Непрекъснати ф-ии

<u>Def</u> Казваме, че ф-ята $f: D \to R$ е непрекъсната в $x_0 \in D$, ако $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$, $x \in D$

<u>Твърдение</u> Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на точката c. Тогава $f(x)$ е непрекъсната в точката c точно тогава, когато лявата и дясната граница на $f(x)$ при $x \to c$ съществуват и са равни на $f(c)$, т.е.

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = f(c) = \lim_{x \to c+0} f(x)$$

<u>Def. (Хайне)</u> Ф-ята $f: D \to \mathbb{R}$ наричаме непрекъсната в точката $x_0 \in D$, ако за всяка редица $\{x_n\} \to x_0$ имаме $f(x_n) \to f(x_0)$

<u>Def. (Коши)</u> Ф-ята $f: D \to R$ наричаме непрекъсната в точката $x_0 \in D$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $\delta > 0$, че щом $|x - x_0| < \delta$, има

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

<u>Твърдение:</u> Ако ф-ята $f(x)$ е дефинирана в околност на x_0, $f(x_0) > 0$ и f е непрекъсната в x_0, то съществува такава симетрична околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ на x_0, че $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ за $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

<u>Def</u> Ф-ята $f(x)$ се нарича непрекъсната, ако е непрекъсната във всяка точка от дефиниционната си област.

С-ва | 1) Нека f и g са дефинирани и непрекъснати в D.
Тогава:
а) $f \pm g$ е дефинирана и непрекъсната в D
б) $f \cdot g$ е — " —
в) Ако $g \neq 0$ за $\forall x \in D$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ е — " —

Композиция на непрекъснати ф-ии е непрекъсната ф-я:
Нека $f(x): D \to D_1$ и $g(x): D_1 \to R$ са непрекъснати.
Тогава съставената ф-я $F(x) = g(f(x)): D \to R$ е непрекъсната.

Непрекъснатост на монотонни ф-ии:

Def. Казваме, че $f: D \to R$ е монотонно растяща, ако всеки път, когато $x_1 < x_2$, имаме $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Лема Нека Δ е интервал, $f: \Delta \to R$ е монотонна ф-я и $c \in \Delta$.
Ако c е вътрешна точка на интервала Δ съществуват лявата и дясната граници $f(c-0)$ и $f(c+0)$, а ако c е ляв (десен) край на интервала Δ, то съществуват дясната (лявата) граница на f в точката c.

T| Нека Δ е интервал и $f: \Delta \to R$ е монотонна ф-я
а) Ф-ята f е непрекъсната $\iff$ множ. на нейните функционални стойности е интервал
б) Ако f е непрекъсната и строго растяща, то нейната обратна ф-я f^{-1} съществува и е също непрекъсната и строго растяща.

Граници на ф-ии при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$

Деф. област D не е ограничена нито отгоре, нито отдолу.

Твърдение: Множ. D не е ограничено точно тогава, когато съществува редица от негови точки $\{x_n\} \to \infty$

Д-во: Нека D не е ограничено $\Rightarrow$ можем да изберем $x_n \in D$ така, че $x_n > n$.
Даваме стойности на n и разгл. $\{x_n\}$
От $x_n > n \Rightarrow x_n \to +\infty$

Def. Хайне Казваме, че $f: D \to R$ клони към A при $x \to +\infty$, ако за $\forall$ редица от точки на D $\{x_n\} \to +\infty$ имаме $\{f(x_n)\} \to A$

Def. Коши Казваме, че A е граница на ф-ята $f: D \to R$ при $x \to \infty$, ако за $\forall \varepsilon > 0$ може да се намери такова число B, че щом $x \in D$ и $x > B$ да имаме $|f(x) - A| < \varepsilon$

Необходимо и достатъчно условие на Коши

За да съществува граница на ф-я $f: D \to R$ при $x \to \infty$ е необходимо и достатъчно за $\forall \varepsilon > 0$ да съществува такова число B, че щом $x', x'' \in D$ и $x', x'' > B$, да имаме
$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Def: Нека ф-ята $f(x)$ е дефинирана при $x > a$. Правата с уравнение $y = kx + b$ се нарича асимптота на графиката на ф-ята $f(x)$ при $x \to \infty$, ако $f(x) - (kx + b) \to 0$ при $x \to \infty$

Твърдение Ако правата с у-е $y = kx + b$ е асимптота на $f(x)$ при $x \to \infty$, то:
$$\frac{f(x)}{x} \to k \quad \text{и} \quad f(x) - kx \to b$$

Твърдение Границите $\lim_{x\to\infty} f(x)$ и $\lim_{t\to 0+0} f(\frac{1}{t})$ съществуват едновременно и са равни.

Def. Хайне Казваме, че ф-ят $f: D\to R$ клони към $+\infty(-\infty)$ при $x\to c$, ако за всяка редица $\{x_n\}\to c$ от точки на D имаме:

$\{f(x_n)\}\to +\infty(-\infty)$

Твърдение Ако $f(x)$ приема само положителни стойности, то тя клони към $+\infty$ при $x\to c \Longleftrightarrow \frac{1}{f(x)}\to 0$

Д-во: Нека $f(x)>0$ и $f(x)\to+\infty$ при $x\to c$.
Взимаме произволна редица $\{x_n\}\to c$.
Тогава $f(x_n)\to+\infty$ ~~.~~ $\Rightarrow \frac{1}{f(x_n)}\to 0$
$\Rightarrow \frac{1}{f(x)}\to 0$ при $x\to c$

Def Нека $a\in R$. Казваме, че ф-ята $f: D\to R$ клони към $+\infty$ при $x\to a$, ако за $\forall A\ \exists\ \delta>0$, че щом $x\in D$ и $|x-a|<\delta$ имаме $f(x)>A$

Def Казваме, че $f\to+\infty$ при $x\to a+0$, ако за $\forall A\ \exists\ \delta>0$, че щом $x\in D$ и $a<x<a+\delta$ имаме $f(x)>A$

Def Казваме, че $f\to+\infty$ при $x\to+\infty$, ако за $\forall A\ \exists B$, че щом $x\in D$ и $x>B$ имаме $f(x)>A$

Сравняване на „безкрайно малки" и „безкрайно големи" ф-ии.

<u>Def</u> Нека c е $a+0, a-0, +\infty, -\infty$

$f(x)$ – безкрайно малка, ако $\underset{x \to c}{f(x) \to 0}$

<u>Def</u> Нека $f(x)$ и $g(x)$ – безкрайно малки при $x \to c$
Казваме, че $f(x)$ е безкрайно малка ф-я от не по-нисък ред от $g(x)$ при $x \to c$, ако $\exists M = const > 0$, такава, че

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M$$, за $\forall x$ достатъчно близко до c.

<u>Def</u> Ако границата $\lim\limits_{x \to c} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ съществува, ~~казваме, че~~ и е различна от 0, казваме, че f и g са безкрайно малки от един и същ ред при $x \to c$

<u>Def</u> Нека $f(x)$ и $g(x)$ – безкрайно малки ф-ии при $x \to c$
Казваме, че $f(x)$ има по-висок ред от $g(x)$, ако

$$\lim_{x \to c} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$$

<u>Def</u> Ф-ята $f(x)$ – безкрайно голяма при $x \to c$, ако $f(x) \to +\infty$ при $x \to c$

<u>Def</u> Нека $f(x)$ и $g(x)$ – безкрайно големи при $x \to c$
Казваме, че при $x \to c$:

1) $f(x)$ е безкр. голяма от не по-висок ред от g, ако

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M$$

2) $f(x)$ и $g(x)$ – безкр. големи от един и същ ред, ако $\exists \lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = a \neq 0$. Ако границата е 1 – f и g са еквивалентни

3) $g(x)$ има по-висок ред от f, ако

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$