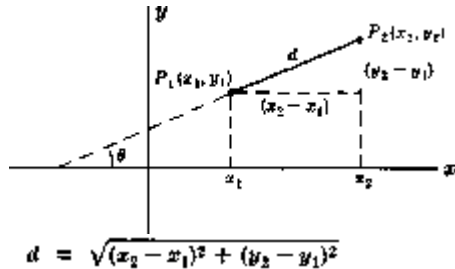


Формули от аналитичната геометрия в равнината

Разстояние d между две точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$



Наклон m на права минаваща през 2 точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \theta$$

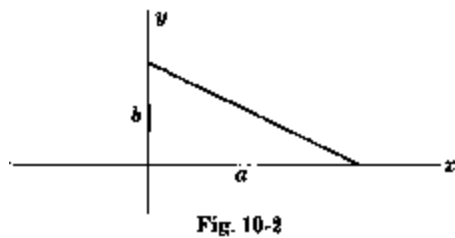
Уравнение на права през две точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m \quad \text{or} \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y = mx + b$$

където $b = y_1 - mx_1 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$ е секущата с y оста, т.е. y секуща.

Уравнение на права пресичаща осите x, y $a \neq 0$ $b \neq 0$



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Нормално уравнение на права

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$$

където p = разстояние (перпендикуляр) от центъра O до правата

и α = ъгъла между разстоянието от 0 до правата

с положителната страна на оста x.

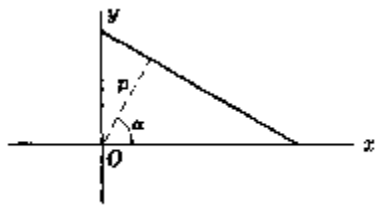


Fig. 14-3

Общо уравнение на права

$$Ax + By + C = 0$$

Разстояние между точка (x_1, y_1) до права $Ax + By + C = 0$

$$\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

където знака е избран така, че разстоянието е положително число.

Ъгъл ψ между две прави с наклон m_1 и m_2

$$\tan \psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Правите са успоредни или съвпадащи, ако $m_1 = m_2$.

Правите са перпендикулярни, ако $m_2 = -1/m_1$.

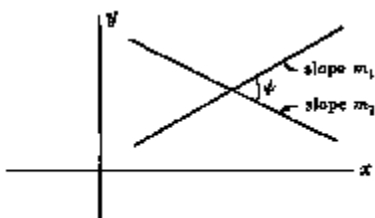


Fig. 19-4

Лице на триъгълник с координати (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3)

Лицето

$$= \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \pm \frac{1}{2} (x_1 y_2 + y_1 x_3 + y_3 x_2 - y_2 x_3 - y_1 x_2 - x_1 y_3)$$

, където знакът така се избира, че лицето да не е отрицателно число. Ако лицето е нула, точките лежат на една права.

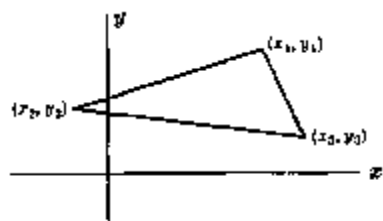


Fig. 10-5

Смяна на координатната система

Промяна на координатната система чрез трансляция

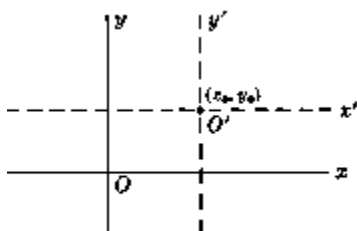


Fig. 10-6

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

където (x, y) са старите координати (т.е. координати съответстващи на xy координатна система) (x', y') са новата координатна система и (x_0, y_0) са координатите на новия център O' към старата xy координатна система.

Транслация на координатите чрез ротация

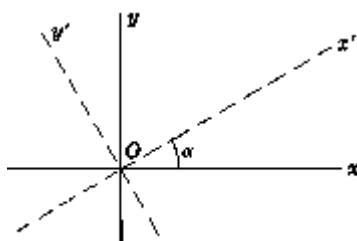


Fig. 10-7

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{cases}$$

където центровете на старата $[xy]$ и новата $[x'y']$ координатни системи са същите, но x' оста сключва ъгъл α с положителната x ос.

Трансформиране на координатите чрез трансляция и ротация

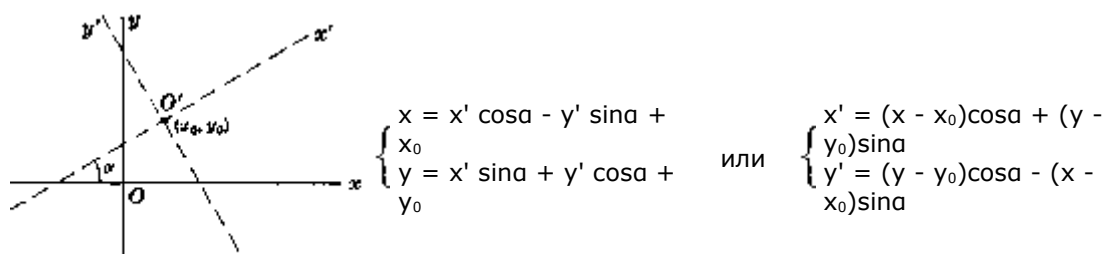
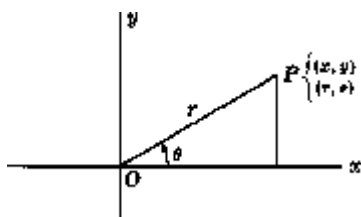


Fig. 14-8

където новия център O' на $x'y'$ координатната система има координати (x_0, y_0) към старата xy координатна система и оста x' сключва ъгъл α с положителната посока на оста x .

Полярни координати(r, θ)

Точката P може да я определим чрез ортонормираната координатна система (x, y) или чрез полярните координати (r, θ) . Трансформацията между тези координати

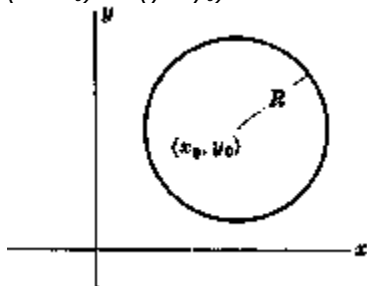


$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}(y/x) \end{cases}$$

Уравнение на окръжност

Уравнение на окръжност с радиус R и център (x_0, y_0)

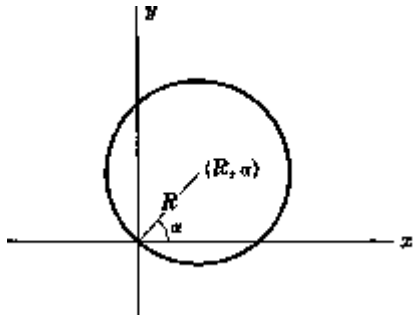
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$



Уравнение на окръжност с радиус R и център началото на координатната система

$$r = 2R \cos(\theta - \alpha)$$

където (θ, a) са полярните координатите на всяка точка от окръжността и (R, α) са полярните координати на центъра на окръжността.



Конуси(елипса, парабола или хипербола)

Ако точка P се движи и разстоянието и от фиксирана точка(наречена **фокус**) разделено на разстоянието от фиксирана линия(наречена **директриса**) е константа(наречена **ексцентрицитет**), тогава кривата описана от точка P се нарича **конус**. Такава крива може да се получи от пресичането на равнина и конус от различни ъгли.

Ако фокусът е избран да е центъра O , уравнението на конус в полярни координати (r, θ) е $OQ = p$ и $LM = D$,

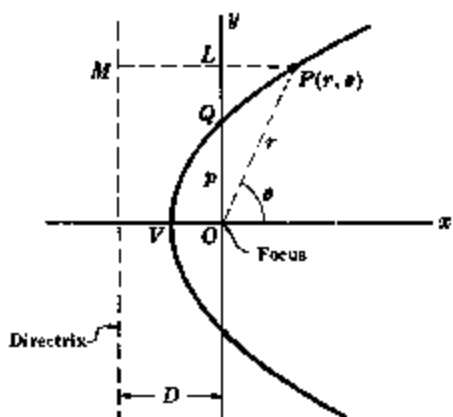
$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \theta} = \frac{\epsilon D}{1 - \epsilon \cos \theta}$$

Конуса е

(i) елипса, ако $\epsilon < 1$

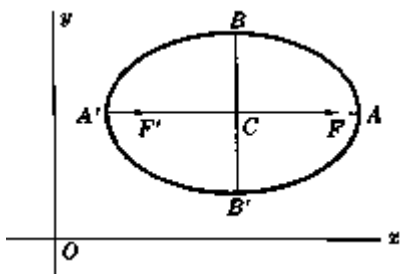
(ii) парабола, ако $\epsilon = 1$

(iii) хипербола, ако $\epsilon > 1$.



Елипса, парабола, хипербола

Елипса с център $C(x_0, y_0)$ и главна ос успоредна на оста x



Дължина на главната ос $A'A = 2a$

Дължина на второстепенната ос $B'B = 2b$

Разстояние от центъра C до фокуса F или F' е

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\text{Ексцентритет} = \epsilon = c/a = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Уравнение в ортонормирана координатна система:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Уравнение в полярни координати ако C съвпада с O :

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$$

Уравнение в полярна координатна система ако C е върху оста x и F' съвпада с O :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}$$

Ако P е точка от елипсата, $PF + PF' = 2a$

Ако главната ос е успоредна на оста y , сменяйки x и y от по-горното и заменяйки θ с $\frac{1}{2}\pi - \theta$ [или $90^\circ - \theta$]

Парабола с оси успоредни на оста x

Ако върха е точка $A(x_0, y_0)$ и разстоянието от A до фокуса F е $a > 0$, уравнението на параболата е (ако параболата е отворена надясно)

$$(y - y_0)^2 = 4a(x - x_0)$$

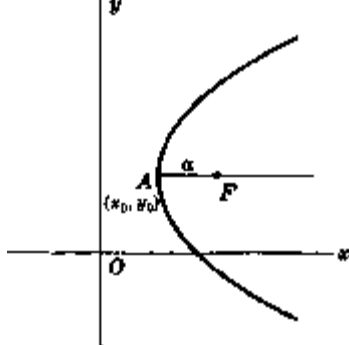


Fig. 10-14

Ако параболата е отворена наляво

$$(y - y_0)^2 = -4a(x - x_0)$$

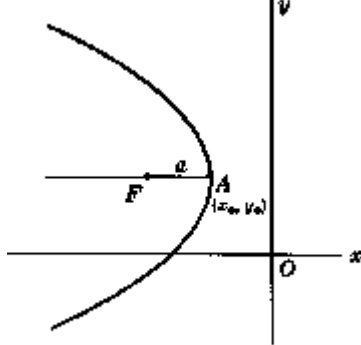


Fig. 10-15

Ако фокуса съвпада с центъра на координатната система, уравнението в полярни координати е

$$r = \frac{2a}{1 - \cos \theta}$$

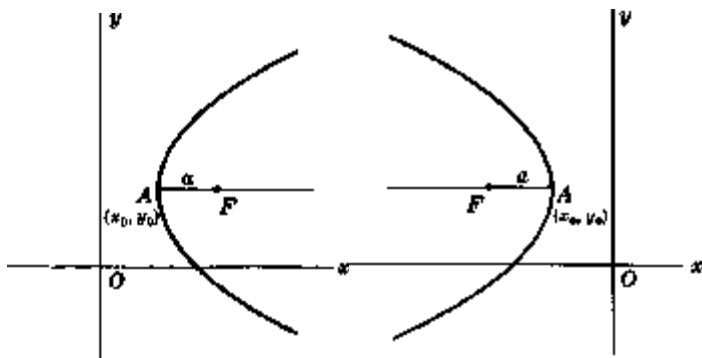


Fig. 10-14

Fig. 10-15

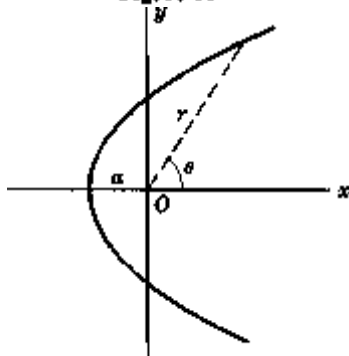
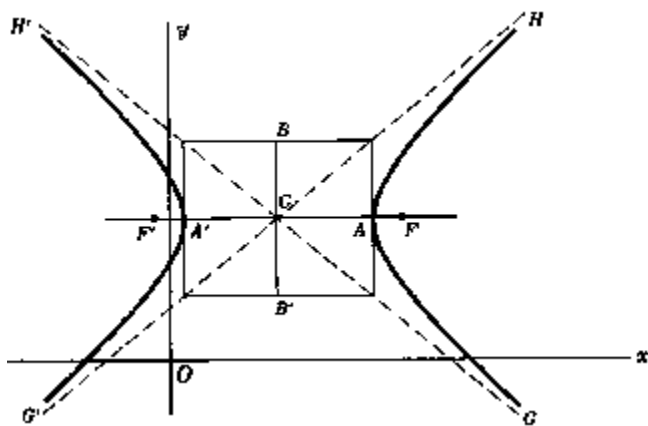


Fig. 10-16

Ако оста е успоредна на оста y , разменяйки x и y или заменяне на θ с $\frac{1}{2}\pi - \theta$ [или $90^\circ - \theta$].

Хипербола с център $C(x_0, y_0)$ и главна ос, успоредна на оста x



Дължина на главната ос $A'A = 2a$

Дължина на второстепената ос $B'B = 2b$

Разстояние от центъра C до фокуса F или $F' = c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ексцентритет $\epsilon = c/a = \sqrt{a^2 + b^2} / a$

Уравнение в правоъгълна координатна система:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Наклони на асимптотите $G'H$ и $GH' = \pm b/a$

Уравнение в полярни координати, ако C съвпада с O :

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta}$$

Уравнение в полярни координати ако C съвпада с оста X и F' съвпада с O :

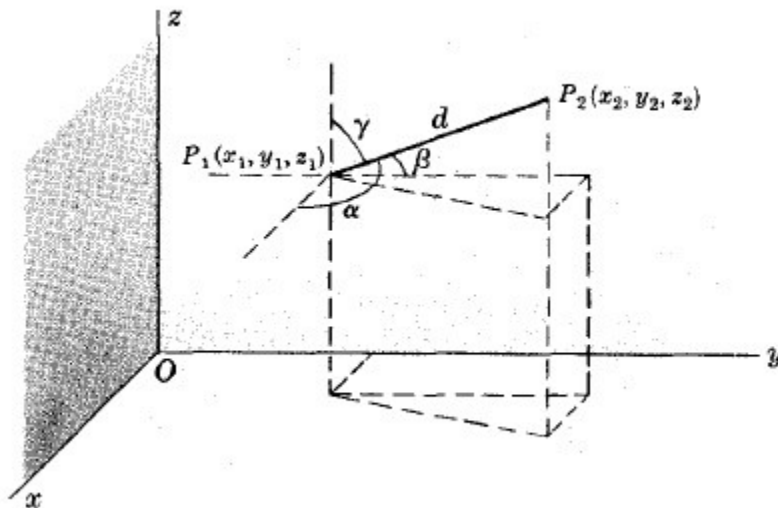
$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 - e \cos \theta}$$

Ако P е точка от хиперболата, $PF - PF' = \pm 2a$ [в зависимост от клона]

Ако основната ос е успоредна на оста y , разменяйки x и y от по-горе заменяме θ с $\frac{1}{2}\pi - \theta$ [или $90^\circ - \theta$].

Формули по аналитична геометрия в пространството

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Насочени вектори върху права, свързваща точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$l = \cos \alpha = \frac{(x_2 - x_1)}{d}, m = \cos \beta = \frac{(y_2 - y_1)}{d}, n = \cos \gamma = \frac{(z_2 - z_1)}{d}$$

където α, β, γ са ъглите, които правата P_1P_2 сключва съответно с положителните оси x, y, z и d е дадено на горната фигура.

Връзка между насочените вектори

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \text{ или } l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

Насочени числа

Числата L, M, N , които са пропорционални на насочените вектори l, m, n се наричат *насочени числа*. Връзката между тях е зададена чрез

$$l = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, m = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, n = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$$

Уравнения на права, свързваща точките $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$ в стандартна форма

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \text{ или } \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

Тези са вярни също ако l, m, n се заместят съответно с $by L, M, N$.

Уравнения на права, свързваща точките $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$ в параметрична форма

$$x = x_1 + lt, y = y_1 + mt, z = z_1 + nt$$

Тези са вярни също и ако l, m, n се заместят съответно с L, M, N .

Ъгъл φ между две прави с насочени вектори l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2

$$\cos \varphi = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

Главно уравнение на равнина

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad [A, B, C, D \text{ са константи}]$$

Уравнение на равнина, минаваща през точки $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

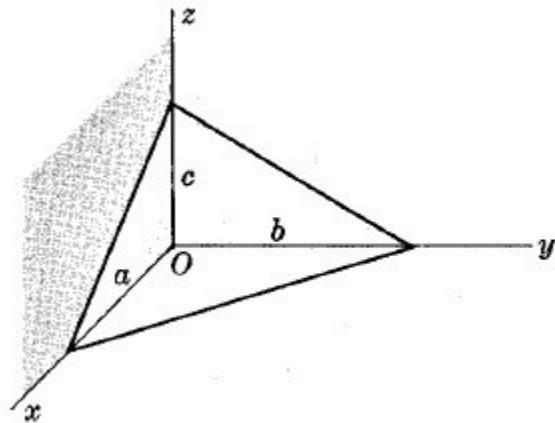
или

$$\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} (x - x_1) + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix} (y - y_1) + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} (z - z_1) = 0$$

Уравнение на равнина в пресечна форма

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

където a, b, c са пресечните точки съответно с осите x, y, z .



Уравнение на права през (x_0, y_0, z_0) и перпендикулярна на равнина $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C} \text{ или } x = x_0 + At, y = y_0 + Bt, z = z_0 + Ct$$

Забележете, че насочените числа за права перпендикулярна на равнина $Ax + By + Cz + D = 0$ са A, B, C .

Разстояние от точка (x_0, y_0, z_0) до равнина $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

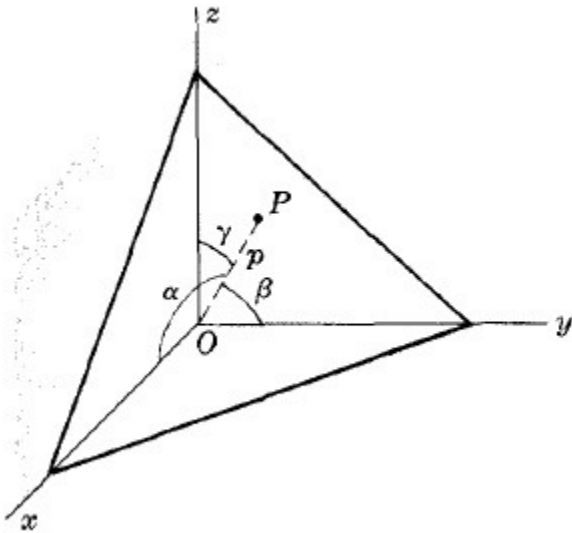
където знакът се определя така че разстоянието е неотрицателно.

Нормална форма на уравнение на равнина

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$$

където p = перпендикулярното разстояние от O до равнината в точка P и α, β, γ са ъглите

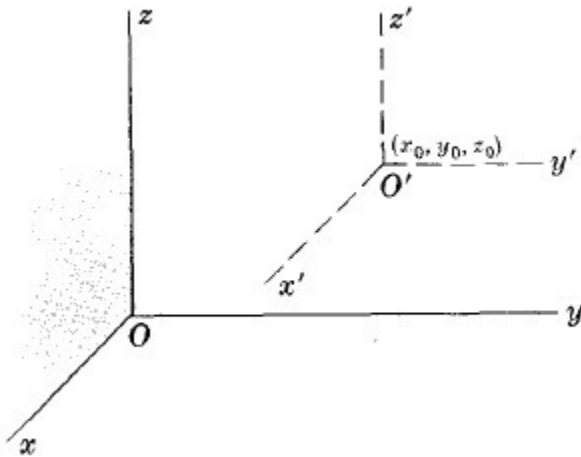
между OP и съответно положителните оси x, y, z .



Смяна на координати, включваща проста трансляция

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \\ z' = z - z_0 \end{cases}$$

където (x, y, z) са старите координати [т.е. координатите съответстващи на системата xyz], (x', y', z') са новите координати [съответстващи на системата $x'y'z'$] и (x_0, y_0, z_0) са координатите на новия център O' съответстващи на старата координатна система xyz .



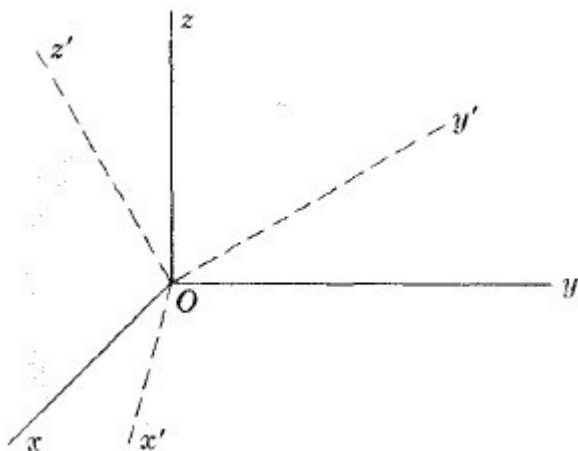
Смяна на координати, включваща проста ротация

$$\begin{cases} x = l_1x' + l_2y' + l_3z' \\ y = m_1x' + m_2y' + m_3z' \\ z = n_1x' + n_2y' + n_3z' \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} x' = l_1x + m_1y + n_1z \\ y' = l_2x + m_2y + n_2z \\ z' = l_3x + m_3y + n_3z \end{cases}$$

където началата на системите xyz и $x'y'z'$ са същите и l_1, m_1, n_1 ; l_2, m_2, n_2 ; l_3, m_3, n_3 са насочените вектори съответно на осите x' , y' , z' към осите x , y , z съответно.



Смяна на координати, включваща трансляция и ротация

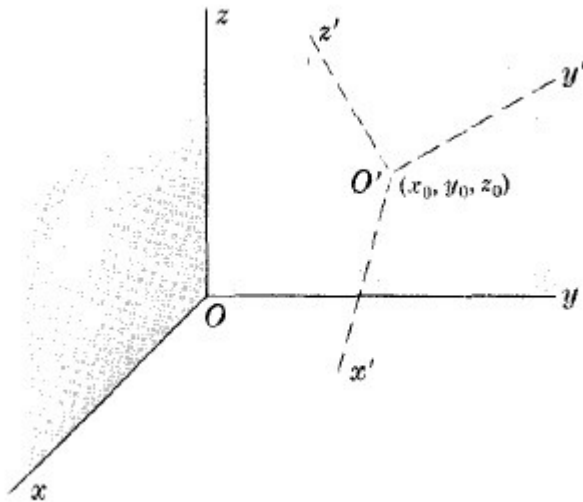
$$\begin{cases} x = l_1x' + l_2y' + l_3z' + x_0 \\ y = m_1x' + m_2y' + m_3z' + y_0 \\ z = n_1x' + n_2y' + n_3z' + z_0 \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} x' = l_1(x - x_0) + m_1(y - y_0) + n_1(z - z_0) \\ y' = l_2(x - x_0) + m_2(y - y_0) + n_2(z - z_0) \\ z' = l_3(x - x_0) + m_3(y - y_0) + n_3(z - z_0) \end{cases}$$

където началото O' на системата $x'y'z'$ има координати (x_0, y_0, z_0) спрямо системата xyz и l_1, m_1, n_1 ; l_2, m_2, n_2 ; l_3, m_3, n_3 са насочените вектори на правите x' , y' , z' съответно към

правите x , y , z .

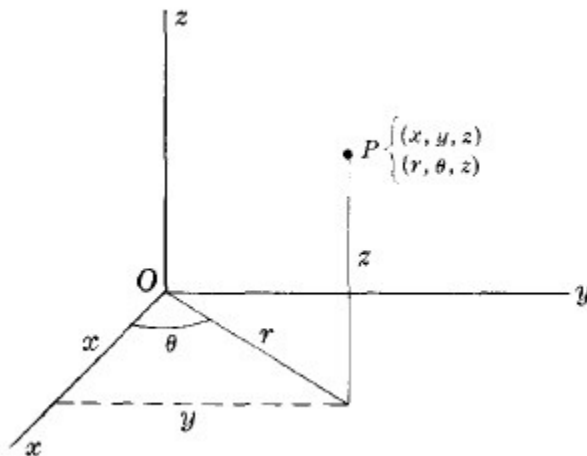


Цилиндрични координати (r, θ, z)

Точка P може да бъде разположена с цилиндрични координати (r, θ, z) както и с правоъгълни координати (x, y, z) .

Смяната между тези координати е

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases}$$



Сферични координати (r, θ, ϕ)

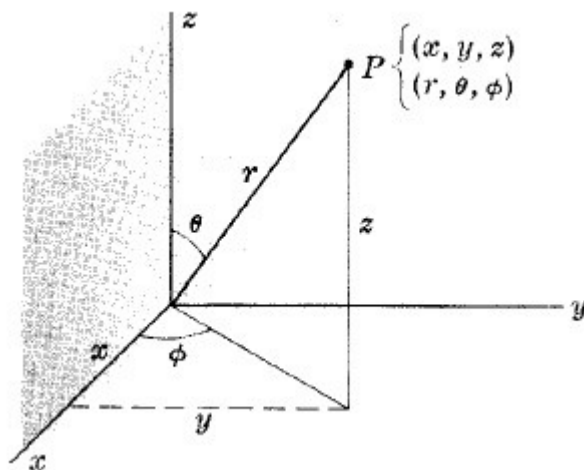
Точка P може да бъде разположена с сферични координати (r, θ, ϕ) както и с правоъгълни (x, y, z) .

Смяната е

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

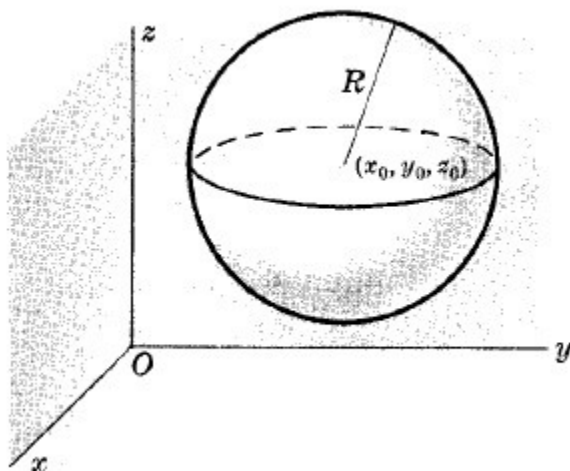
or

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \\ \theta = \cos^{-1}(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \end{cases}$$



Уравнение на сфера в правоъгълни координати

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$
където сферата има център (x_0, y_0, z_0) и радиус R .



Уравнение на сфера в цилиндрични координати

$$r^2 - 2r_0r(\theta - \theta_0) + r_0^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

където сферата има център (r_0, θ_0, z_0) в цилиндрични координати и радиус R .

Ако центърът на сферата е в началото уравнението е:

$$r^2 + z^2 = R^2$$

Уравнение на сфера в сферични координати

$$r^2 + r_0^2 - 2r_0r\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0) = R^2$$

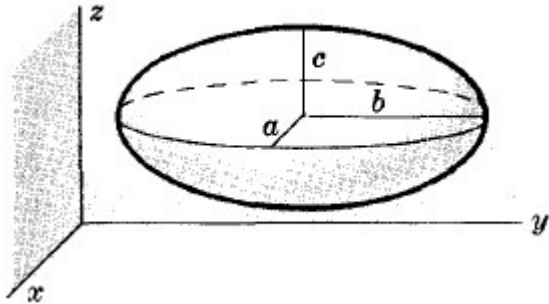
където сферата има център $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ в сферични координати и радиус R .

Ако центърът е в началото уравнението е:

$$r = R.$$

Уравнение на елипсоид с център (x_0, y_0, z_0) и полуоси a, b, c

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

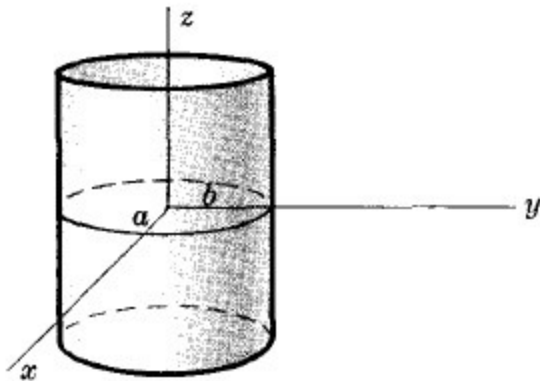


Елиптичен цилиндър със ос като z оста

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

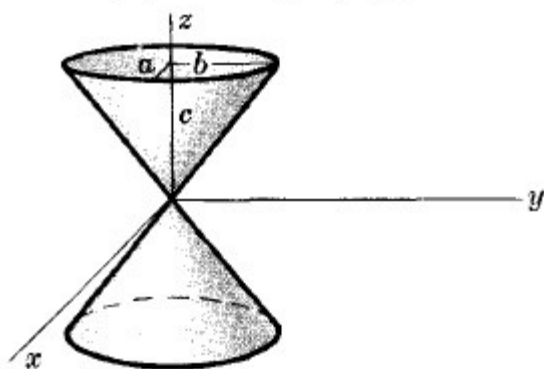
където a, b са полуосите на елиптичното сечение.

Ако $b = a$ става цилиндър с радиус a .



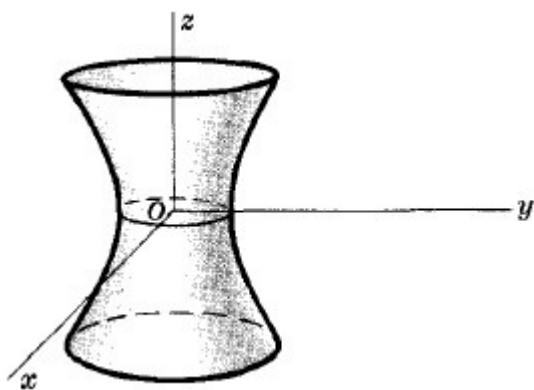
Елиптичен конус със ос като z оста

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$



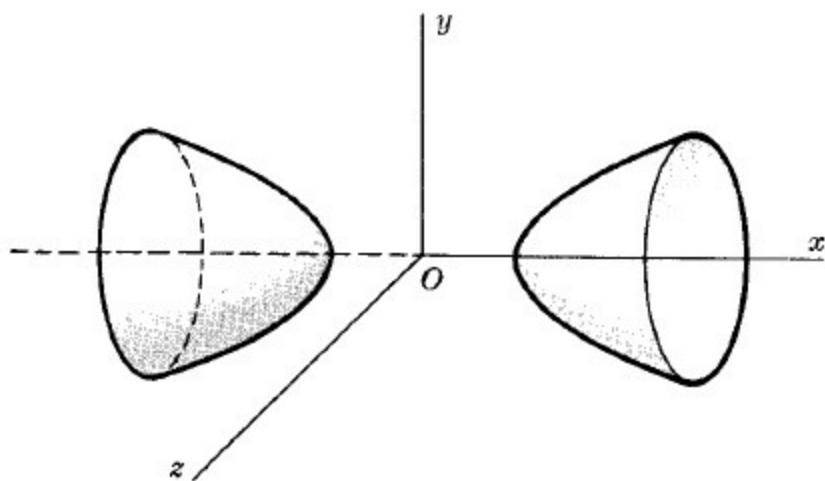
Хиперболоид от една част

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



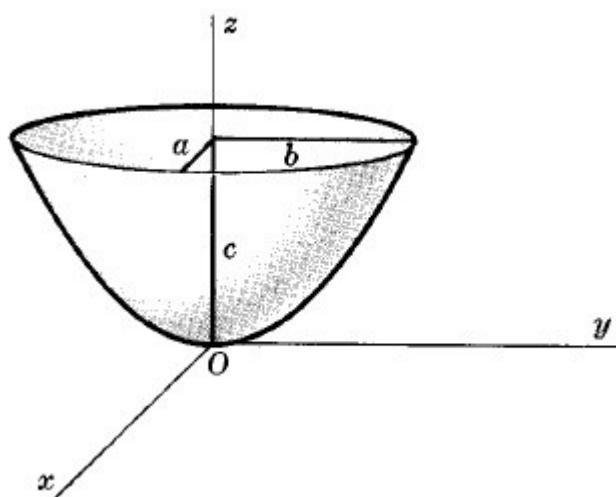
Хиперболоид от две части

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Елиптичен параболоид

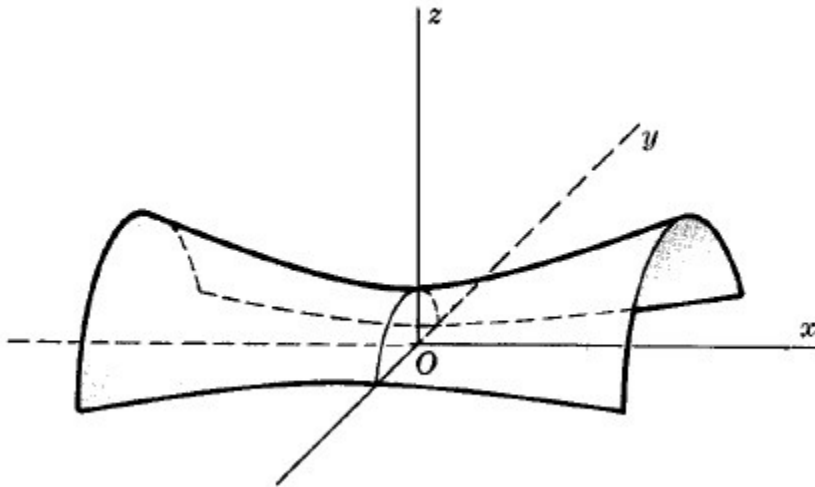
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$



Хиперболичен параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

Забележете, ориентацията на осите на фигурата.



Специални равнинни криви

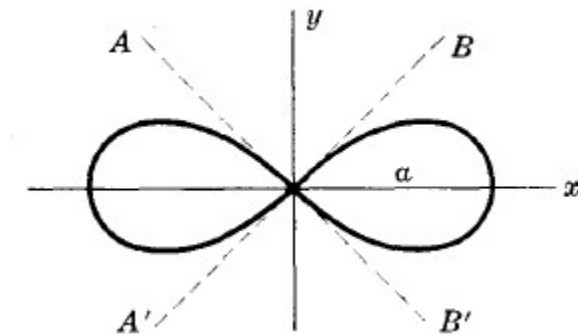
LEMNISCATE

Уравнение в полярни координати:
 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$

Нормално равнение:
 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

Ъгъл между AB' или $A'B$ и оста $x = 45^\circ$

Уравнение на затворена крива = $a^2/2$



Циклоид

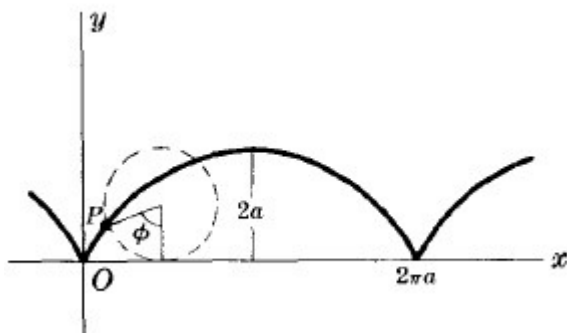
Уравнения в параметрична форма:

$$\begin{cases} x = a(\phi - \sin \phi) \\ y = a(1 - \cos \phi) \end{cases}$$

Уравнение на една арка = $3\pi a^2$

Дължина на арка = $8a$

Това е прѳа описана от точка P по кръг с радиус a движеща се по оста x.



Хипоциклоид с четири листа

Уравнение в квадратни координати:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

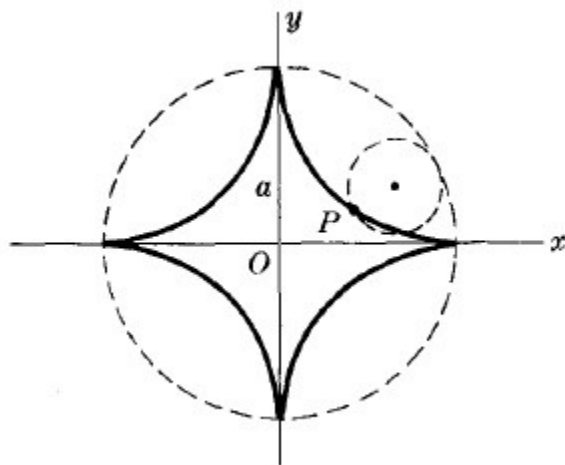
Уравнения в параметрична форма:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}$$

Хиперболоид ограден от крива = $3\pi a^2/8$

Дължина на цялата крива = $6a$

Това е крива описана от точка P по окръжност с радиус a/4 като се движи по вътрешността на окръжност с радиус a.



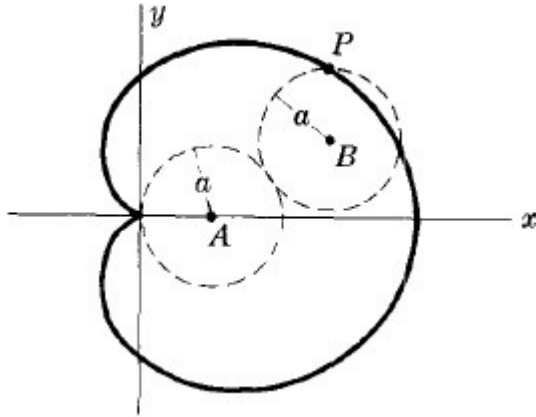
Кардиоид

Уравнение: $r = a(1 + \cos\theta)$

Кардиоид ограден от крива = $3\pi a^2/2$

Дължина на крива = $8a$

Това е кривата описана от точка P по окръжност с радиус a като се движи по външността на фиксирана окръжност с радиус a. Кривата също е специален случай на limacon of Pascal.

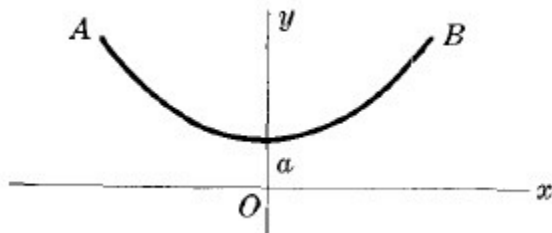


Дъга

Уравнение:

$$y = a(e^{x/a} + e^{-x/a})/2 = a \cosh(x/a)$$

Това е крива, на която ако е окачена тежка верига вертикално от фиксирани точки A и B ще виси.

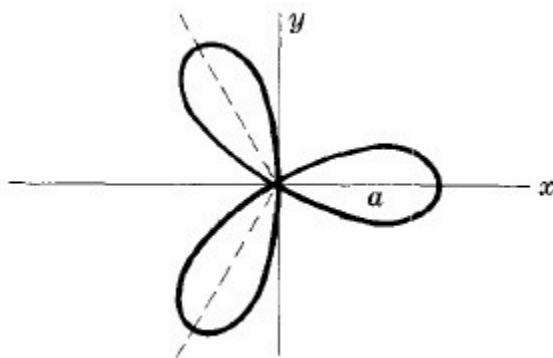


Трилистна роза

Уравнение: $r = a \cos 3\theta$

Уравнението $r = a \cos 3\theta$ е подобна на крива получена чрез въртене на кривата по посока обратна на часовниковата стрелка на 30° или $\pi/6$ радиани.

По принцип $r = a \cos n\theta$ или $r = a \sin n\theta$ има n листа ако n е нечетно.

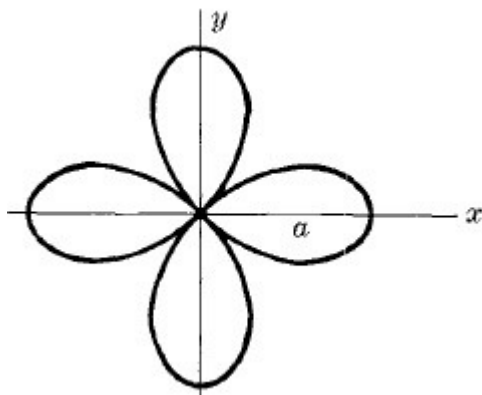


Четирилистна роза

Уравнение: $r = a \cos 2\theta$

Уравнението $r = a \sin 2\theta$ е подобна крива получена чрез въртене на кривата по посока обратна на часовниковата стрелка на 45° или $\pi/4$ радиани.

По принцип $r = a \cos n\theta$ или $r = a \sin n\theta$ има $2n$ листа ако n е четно.



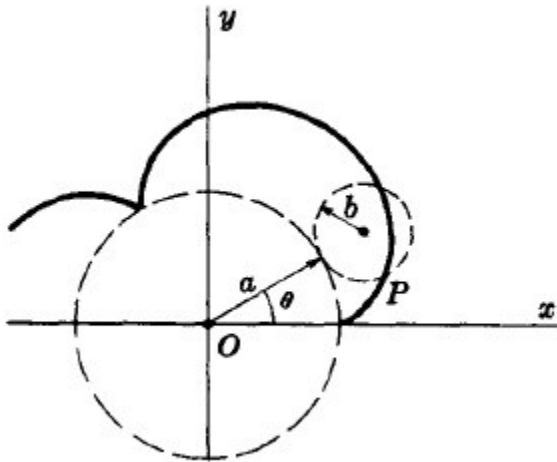
Епициклоид

Полярни уравнения:

$$\begin{cases} x = (a+b) \cos \theta - b \cos \left(\frac{a+b}{b} \theta \right) \\ y = (a+b) \sin \theta - b \sin \left(\frac{a+b}{b} \theta \right) \end{cases}$$

Това е крива описана от точка P от окръжност с радиус b като се движи по външната

страна на окръжност с радиус a . Кардиоида е частен случай на епициклоид.



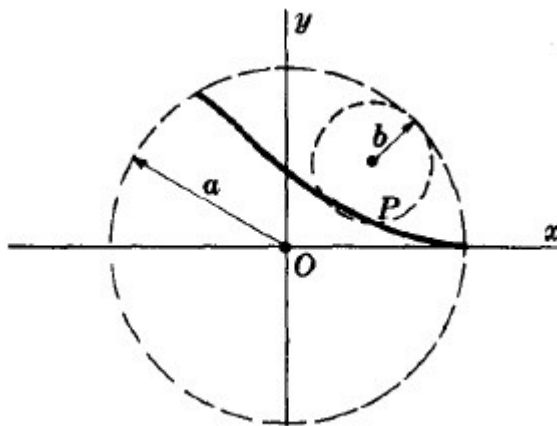
Обикновен хипоциклоид

Полярни уравнения:

$$\begin{cases} x = (a - b) \cos \phi + b \cos \left(\frac{a - b}{b} \phi \right) \\ y = (a - b) \sin \phi - b \sin \left(\frac{a - b}{b} \phi \right) \end{cases}$$

Това е крива описана от точка P от кръг с радиус b като се движи по външността на окръжност с радиус a .

Ако $b = a/4$, кривата е хипоциклоид с четири листенца.



TROCHOID

Полярни уравнения:

$$\begin{cases} x = a\phi - b \sin \phi \\ y = a - b \cos \phi \end{cases}$$

Това е крива описана от точка P на разстояние b от центъра на окръжност с радиус a като окръжността се движи по оста x.

Ако $b < a$, кривата е показана на Fig.11-10 и се нарича *curtate* циклоид.

Ако $b > a$, кривата е показана на Fig.11-11 и се нарича *prolate* циклоид.

Ако $b = a$, кривата е циклоид.

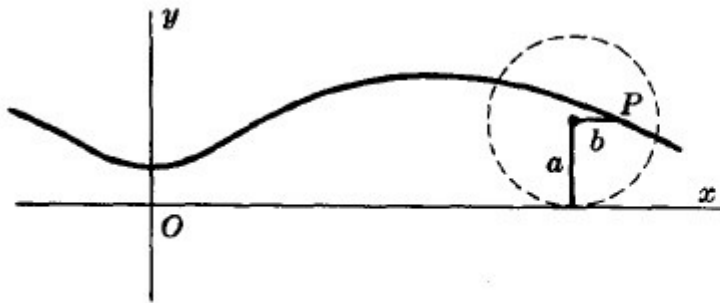


Fig. 11-10

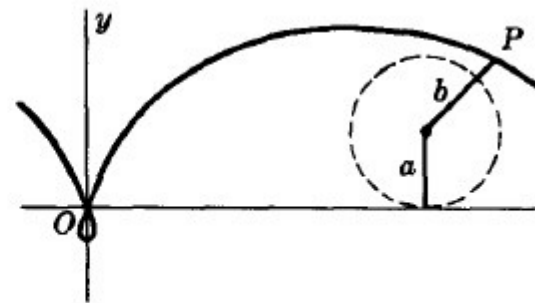


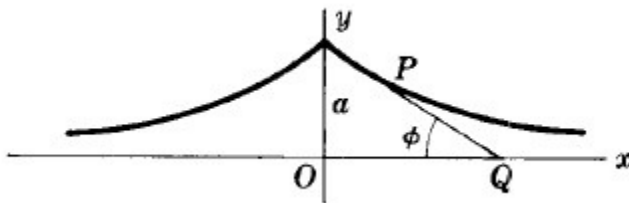
Fig. 11-11

TRACTRIX

Полярни уравнения:

$$\begin{cases} x = a(\ln \cot \frac{1}{2}\phi - \cos \phi) \\ y = a \sin \phi \end{cases}$$

Това е крива описана от външна точка P на права отсечка PQ с дължина a като другия край Q се мести по оста x.



WHITCH OF AGNESI

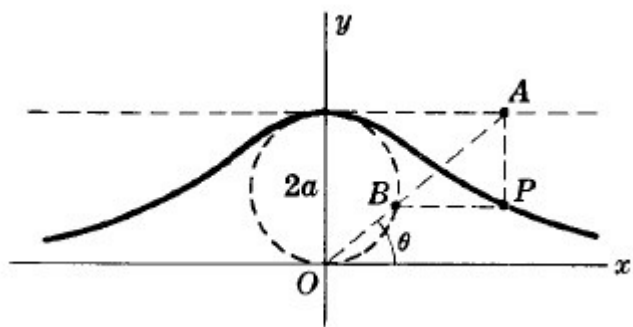
Уравнение в квадратни координати: $y = 8a^3/(x^2 + 4a^2)$

Параметрични уравнения:

$$\begin{cases} x = 2a \cot \theta \\ y = a(1 - \cos 2\theta) \end{cases}$$

На фигурата променящата се права OA пресича $y = 2a$ и окръжността с радиус a с център

(0,a) в A и B съответно. Всяка точка P "която" се разполага чрез спускане на прави успоредни на осите x и y през точките B и съответно A и се определя точката P на пресичане.



Фолио на Декарт

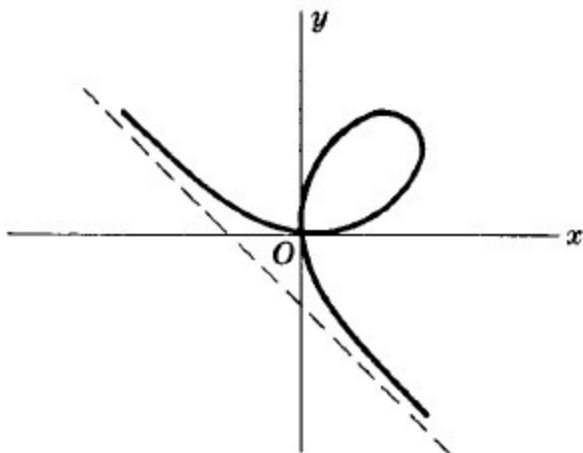
Уравнение в квадратни координати:
 $x^3 + y^3 = 3axy$

Параметрични уравнения:

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$

Уравнение с наклон $3a^2/2$

Уравнение на асимптота: $x + y + a = 0$.

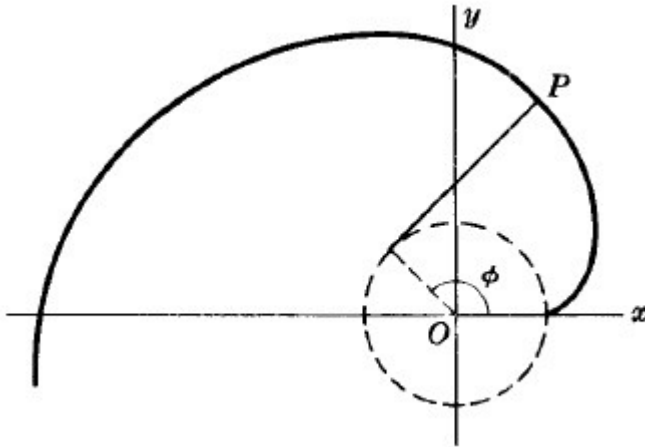


СПИРАЛА на кръг

Параметрични уравнения:

$$\begin{cases} x = a(\cos \phi + \phi \sin \phi) \\ y = a(\sin \phi - \phi \cos \phi) \end{cases}$$

Това е крива описана чрез крайната точка P на нишка, която се развива от окръжност с радиус a докато стане права.



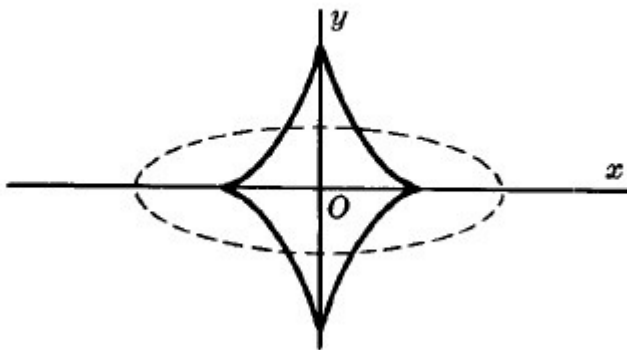
EVOLUTE на елипса

Уравнение в квадратни координати:
 $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$

Параметрични уравнения:

$$\begin{cases} ax = (a^2 - b^2) \cos^3 \theta \\ by = (a^2 - b^2) \sin^3 \theta \end{cases}$$

Това е крива на envelope на нормалите на елипсата $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.



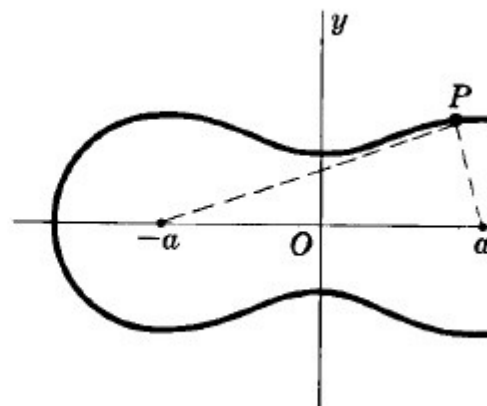
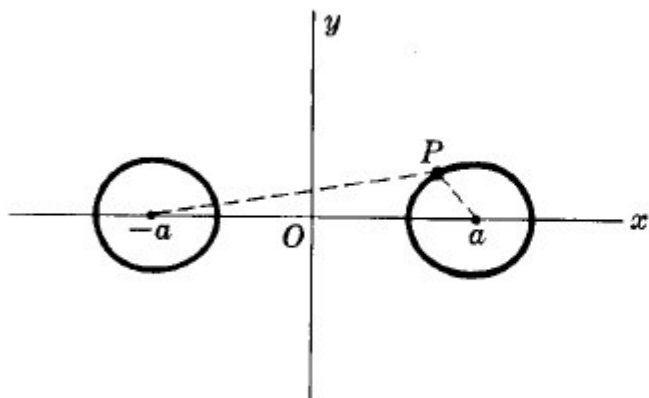
Овали на Касини

Полярно уравнение: $r^4 + a^4 - 2a^2r^2\cos 2\theta = b^4$.

Това е крива описана от точка P така че накрая разстоянието от две фиксирани точки [разстоянието 2a] е константата b^2 .

Кривата е на фигурите съответно когато $b < a$ или $b > a$.

Ако $b = a$, кривата е *lemniscate*

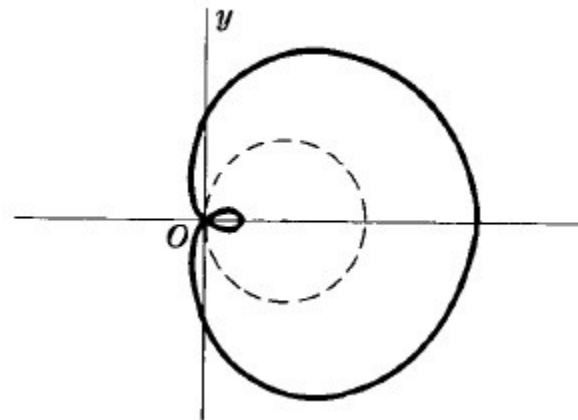
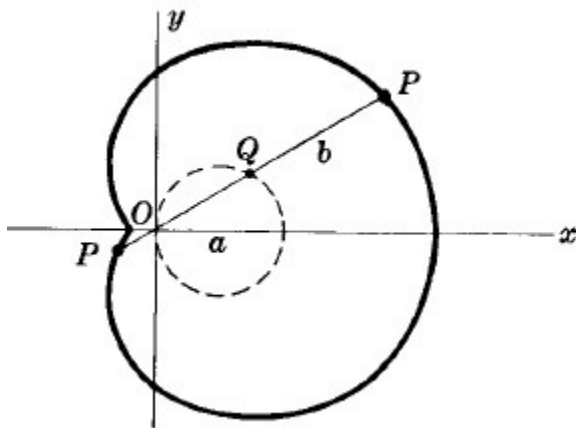


LIMASCON на Паскал

Полярно уравнение: $r = b + a \cos \theta$

Нека OQ е права свързваща началото O, с която и да е точка Q от окръжност с диаметър a минаваща през O. Тогава кривата е множеството на всички точки P така че $PQ = b$.

Кривата е като на фигурите по-долу съответно когато $b > a$ или съответно $b < a$. Ако $b = a$, кривата е кардиоид.



CISSOID на Диоклес

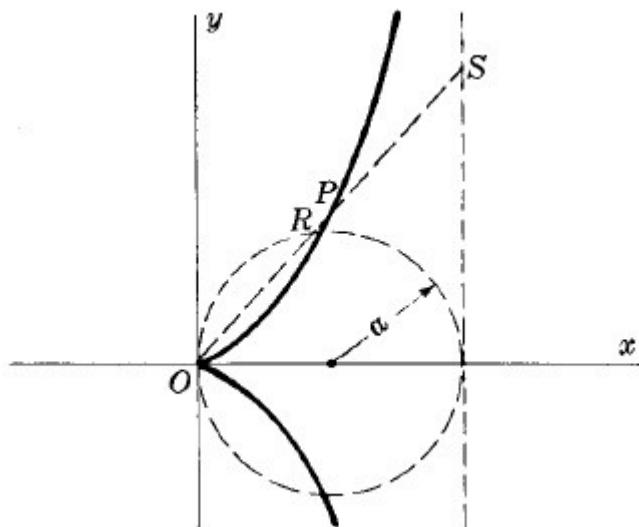
Уравнение в квадратни координати: $y^2 = x^3 / (2a - x)$

Параметрични уравнения:

$$\begin{cases} x = 2a \sin^2 \theta \\ y = \frac{2a \sin^3 \theta}{\cos \theta} \end{cases}$$

Това е крива описана от точка P така, че разстоянието OP = разстоянието RS. Използвано

е при проблема с *дубликиране на куб*, т.е. намиране на страната на куб, който има два пъти по-голям обем от даден куб.



Спирала на Архимед

Полярно уравнение: $r = a\theta$

