

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

за специалност Математика и информатика, I курс

Упражнение 6.

Разширено тримерно пространство. Хомогенни координати. Безкрайни елементи

Основни необходими сведения

Зависимостта между нехомогенните (X, Y, Z) и хомогенните координати (x, y, z, t) на *крайна* точка ($t \neq 0$) в разширеното тримерно пространство се изразява чрез равенствата:

$$X = \frac{x}{t}, \quad Y = \frac{y}{t}, \quad Z = \frac{z}{t}. \quad (1)$$

Нехомогенните координати са еднозначно определени, докато хомогенните са определени с точност до ненулев множител, т.е. (x, y, z, t) и $(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$ определят една и съща точка в разширеното тримерно пространство при $\lambda \neq 0$.

Безкрайните точки U_∞ имат хомогенни координати от вида $(x, y, z, 0)$, където наредената тройка от нехомогенни координати (x, y, z) са координатите на направляващия вектор на правата, чиято безкрайна точка е точката U_∞ . Успоредните прави имат обща безкрайна точка.

Уравнения на права l в хомогенни координати:

- параметрично уравнение на права в тримерното пространство

$$l : M = \alpha M_1 + \beta M_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

където $M(x, y, z, t)$ е произволна точка от правата (текуща точка), а $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ са две фиксирани точки от правата. Координатният запис на горното уравнение е

$$l : \begin{cases} x = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ y = \alpha y_1 + \beta y_2 \\ z = \alpha z_1 + \beta z_2 \\ t = \alpha t_1 + \beta t_2 \end{cases}. \quad (3)$$

- общо уравнение на права в равнина

$$l : Ax + By + Ct = 0. \quad (4)$$

Уравнение на равнина α в хомогенни координати:

- параметрично уравнение

$$\alpha : M = \alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

където M е произволна точка от равнината (текуща точка), а M_1 , M_2 и M_3 са три фиксирани точки от същата равнина.

• *общо уравнение*

$$\alpha : Ax + By + Cz + Dt = 0. \quad (6)$$

Двойното отношение на четири точки P_i ($i = 1, 2, 3, 4$) върху права се означава с $\delta(P_1P_2P_3P_4)$ и се определя от

$$\delta(P_1P_2P_3P_4) = \frac{(P_1P_2P_3)}{(P_1P_2P_4)}. \quad (7)$$

Ако $P_i(X_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), координатният запис на горното равенство е

$$\delta = \frac{(X_1 - X_3)(X_2 - X_4)}{(X_2 - X_3)(X_1 - X_4)}. \quad (8)$$

Ако $\delta(P_1P_2P_3P_4) = -1$, четирите точки P_i ($i = 1, 2, 3, 4$) образуват *хармонична група*. Казва се, че първата двойка точки P_1P_2 е хармонично спрегната на втората двойка точки P_3P_4 и обратно.

Двойното отношение $\delta(ABCU_\infty)$ съвпада с простото отношение (ABC) .

Точката C е среда на отсечката AB , точно когато $\delta(ABCU_\infty) = -1$.

Задачи за семинарни занятия

Задача 1. В разширеното тримерно пространство са дадени точките: (а) $A(3, -2, 4, 6)$, $B(3, 2, 0, 3)$; (б) $A(4, 2, -3, 1)$, $B(0, 4, 21, 0)$; (в) $A(3, -2, 4, 0)$, $B(3, 4, 7, 0)$. Определете дали правата AB е крайна или безкрайна и намерете безкрайните ѝ точки.

Задача 2. Намерете общите безкрайни точки на равнините: (а) $\alpha : x + y - 3 = 0$, $\beta : 2x + 3y + z - 4 = 0$; (б) $\alpha : x + 2y - 3z + 4 = 0$, $\beta : 2x + 4y - 6z + 7 = 0$.

Задача 3. Проверете, че правите $l : x - y + z - 1 = 0$, $x + y = 0$, $m : x = 2s$, $y = -1 + 4s$, $z = 1 + s$ са кръстосани и намерете безкрайната им трансверзала.

Задача 4. Върху една права са дадени точките $A(1)$, $B(2)$, $C(3)$, $D(4)$. Намерете: (а) $(ABCD)$; (б) точка F такава, че A, B, C, F да образуват хармонична група.

Задачи за самостоятелна подготовка

Задача 1. Намерете уравнението на правата l , която пресича правите $a : x + y - 3 = 0$, $y - z = 0$ и $b : 2x + 4y + z = 0$, $3y + z = 0$, и минава през безкрайната точка на правата $c : x + 4y + z = 0$, $3x + 4y - z - 2 = 0$.

Отг. Търсената права е трансверзалата на правите a и b през безкрайната точка $U(2, -1, 2, 0)$ на c , т.е. трансверзалата на двете прави, която е успоредна на c .
 $l : 3x + 4y - z - 9 = 0$, $2x + 6y + 3z = 0$.

Задача 2. Дадени са точката $A(6, 0, 2)$, правата $l : x = 0, y + z = 0$ и равнината $\alpha : 2x + 2y - 3z + 4 = 0$. Намерете права m , която минава през точката A , пресича правата l и безкрайната права на α .

Отг. Търсената права може да се представи като пресечница на две равнини. Едната равнина е от снопа равнини с носител правата l и съдържа точката A . Другата е през снопа равнини с носител безкрайната права на α и също минава през A .

$$m : x - 3y - 3z = 0, 2x + 2y - 3z - 6 = 0.$$

Задача 3. Върху правата $l : x = 3 + s, y = 4 - 2s, z = 18 + 6s$ са дадени точките A, B, C и D , които се получават при стойности на параметъра s съответно 3, 1, 6, -2 . Намерете двойното отношение $\delta(ABCD)$.

$$\text{Отг. } \delta = \frac{9}{25}.$$