

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

за специалност Математика и информатика, I курс

Упражнение 4.

Уравнение на права и окръжност в равнина

Основни необходими сведения

Уравнения на права в равнина:

- *скалярно параметрично уравнение* на права l през точката $M(x_0, y_0)$ с направляващ вектор $\vec{v}(a, b)$

$$l : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases} ; \quad (1)$$

- *канонично уравнение* на права l през точката $M(x_0, y_0)$ с направляващ вектор $\vec{v}(a, b)$

$$l : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}; \quad (2)$$

- *канонично уравнение* на права l през точките $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$

$$l : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_2}; \quad (3)$$

- *уравнение на права l през точката $M(x_0, y_0)$ с нормален вектор $\vec{N}(A, B)$ (относно ортонормирана координатна система)*

$$l : A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0; \quad (4)$$

- *общо уравнение на права l с нормален вектор $\vec{N}(A, B)$ (относно ортонормирана координатна система)*

$$l : Ax + By + C = 0; \quad (5)$$

- *отрезково уравнение на права l през точките $A(a, 0)$, $B(0, b)$*

$$l : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; \quad (6)$$

- *декартово уравнение на права l с ъглов коефициент $k = \operatorname{tg} \alpha$ (α е ъгълът, който l сключва с положителната посока на оста Ox) и с отрез n от оста Oy (относно ортонормирана координатна система)*

$$l : y = kx + n. \quad (7)$$

Ако относно ортонормирана координатна система правата l има направляващ вектор $\vec{v}(a, b)$, то векторът $(b, -a)$ е неин нормален вектор. Обратно, ако $\vec{N}(A, B)$ е нормален вектор за l , то векторът $(B, -A)$ е колинеарен на l .

Разстояние $d(M, l)$ от точката $M(x_0, y_0)$ до правата $l : Ax + By + C = 0$ (относно ортонормирана координатна система)

$$d(M, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (8)$$

Сноп прави с носител точка S . Ако $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ са две прави през точката S , то всяка права през същата точка има уравнение от вида

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0). \quad (9)$$

Общо уравнение на окръжност (c) с център точката $C(a, b)$ и радиус $r > 0$ (относно ортонормирана координатна система)

$$c : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (10)$$

Задачи за семинарни занятия

Задача 1. Намерете уравнението на правата:

- (а) през точката $M(1, -1)$, склучваща ъгъл 135° с оста Ox ;
- (б) през точката $N(3, -1)$, успоредна на оста Ox (съотв. Oy);
- (в) пресичаща осите Ox и Oy съответно в точките $A(2, 0)$, $B(0, -5)$;
- (г) минаваща през точките $M_1(-4, -6)$ и $M_2(2, 3)$;
- (д) през точката $M(1, -1)$, успоредна на правата $p : 3x - y + 3 = 0$;
- (е) през точката $P(-3, 4)$, перпендикулярна на правата $q : 11x + 8y - 4 = 0$.

Задача 2. Относно афинна координатна система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$, за която $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 1$ и $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{3}$, са дадени точката $M(3, -2)$ и правата $p : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{3}$. Да се намери уравнението на права l през M , която е: (а) успоредна на p ; (б) перпендикулярна на p .

Задача 3. Намерете уравнението на ъглополовящата на тъпия ъгъл между правите $p : 5x + 12y - 1 = 0$ и $q : 3x - 4y + 1 = 0$ и да се намери права l , успоредна на p и на разстояние 5 от нея.

Задача 4. Дадени са точката $A(1, 2)$ и правата $p : 3x - y - 11 = 0$. Намерете:

- (а) точка A' – ортогонално-симетрична на A относно p ;
- (б) права p' – симетрична на p относно A ;
- (в) точка P от p , която е на равноотдалечена от точките A и $B(-1, 2)$;
- (г) точка M от p , която е на равноотдалечена от точката A и правата $q : x - y - 7 = 0$.

Задача 5. Намерете симетричната права на $l : 3x - y + 5 = 0$ относно правата $x + y - 1 = 0$.

Задача 6. Дадена е точка $A(1, 7)$. Ако правите $p : 2x + 3y - 10 = 0$ и $q : x = -3 + 2s, y = s$ са симетрали на страните през върха A на $\triangle ABC$, намерете:

- (а) координатите на върховете B и C ;

(б) уравненията на страните на $\triangle ABC$;

(в) периметъра и лицето на $\triangle ABC$.

Задача 7. Намерете права от снопа, съдържащ правите $l_1 : x + y = 0$ и $l_2 : x + 2y - 1 = 0$, която е на разстояние 1 от точката $A(1, 1)$.

Задача 8. Правите $l_A : x - 3y - 3 = 0$ и $m_A : y = 0$ са съответно ъглополовяща и медиана през върха A в $\triangle ABC$. Намерете лицето на триъгълника, ако $B(3, -4)$.

Задача 9. Ако някое от уравненията задава окръжност: (а) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$; (б) $3x^2 - 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$; (в) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$; (г) $x^2 + y^2 + 2x - y + 5 = 0$, намерете центъра и радиуса ѝ.

Задача 10. Намерете уравнението на окръжността:

(а) през точките $A(3, 0)$ и $B(-1, 2)$, ако центърът ѝ лежи на правата $l : x - y + 2 = 0$. Намерете допирателните към окръжността, които са успоредни на l .

(б) описана около триъгълника с върхове $A(1, -1)$, $B(1, 1)$, $C(5, 3)$.

Задача 11. Намерете уравнението на окръжността с център $C(5, 4)$, която се допира външно до окръжността $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$.

Задача 12. Намерете допирателните към окръжността $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$, минаващи през точката $M(1, 4)$.

Задачи за самостоятелна подготовка

Задача 1. За $\triangle ABC$ са известни координатите на два от неговите върхове $A(3, -1)$ и $B(1, 4)$, както и координатите на медицентъра му $G(0, 2)$. Намерете:

(а) координатите на върха C ;

(б) уравненията на страните на $\triangle ABC$;

(в) уравнението на височината през върха A ;

(г) уравнението на симетралата на страната AB ;

(д) лицето на $\triangle ABC$.

Отг. (а) $C(-4, 3)$; (б) $AB : 5x + 2y - 13 = 0$, $AC : 4x + 7y - 5 = 0$, $BC : x - 5y + 19 = 0$;
(в) $h_A : 5x + y - 14 = 0$; (г) $4x - 10y + 7 = 0$; (д) $S = \frac{27}{2}$.

Задача 2. За кои стойности на $a \in \mathbb{R}$ правите $p : ax - 4y - 6 = 0$ и $q : x - ay - 3 = 0$

(а) се пресичат; (б) са успоредни; (в) съвпадат?

Отг. (а) $a \neq \pm 2$; (б) $a = -2$; (в) $a = 2$.

Задача 3. Намерете права от снопа, съдържащ правите $l_1 : x + y = 0$ и $l_2 : x - y + 1 = 0$, която е на разстояние $\sqrt{2}$ от точката $A(1, 0)$.

Отг. $x - y + 1 = 0$, $7x + y + 3 = 0$.

Задача 4. Да се намери права, минаваща през пресечната точка на правите $p_1 : 7x + y - 58 = 0$ и $p_2 : x - 7y + 6 = 0$, ако точката $A(1, 1)$ е на разстояние 5 от търсената права.

$$\text{Отг. } 4x - 3y - 26 = 0, 3x + 4y - 32 = 0.$$

Задача 5. Намерете права, която е перпендикулярна на правата $2x + 6y - 3 = 0$ и се намира на разстояние $\sqrt{10}$ от точката $A(5, 4)$.

$$\text{Отг. } 3x - y - 21 = 0, 3x - y - 1 = 0.$$

Задача 6. Намерете ортогонално-симетричната точка на $P(-2, 9)$ относно правата $l : 2x - 3y + 18 = 0$.

$$\text{Отг. } (2, 3).$$

Задача 7. Върху правата $5x - y - 4 = 0$ намерете точка, която е равноотдалечена от точките $A(1, 0)$ и $B(-2, 1)$.

$$\text{Отг. } (1, 1).$$

Задача 8. Правите $a : 3x - 2y + 1 = 0$ и $b : x - y + 1 = 0$ са страни на един триъгълник, а една от медианите има уравнение $m : 2x - y - 1 = 0$. Намерете уравнението на третата страна и координатите на медицентъра на триъгълника.

$$\text{Отг. } 2x - y - 1 = 0, G(2, \frac{10}{3}).$$

Задача 9. Диагоналите на успоредника $ABCD$ се пресичат в точката $O(3, 2)$, а точките $M(2, 1)$, $N(4, -1)$, $P(-2, 0)$ и $Q(1, 5)$ лежат съответно върху правите AB , BC , CD и DA . Намерете: (а) уравненията на тези прави; (б) координатите на върховете на успоредника; (в) лицето на успоредника.

$$\text{Отг. (а) } AB : x - 2y = 0, CD : x - 2y + 2 = 0, BC : y + 1 = 0, AD : y - 5 = 0; \\ \text{(б) } A(10, 5), B(-2, -1), C(-4, -1), D(8, 5); \text{ (в) } S = 12.$$

Задача 10. Намерете уравнението на права през точката $A(1, \frac{1}{2})$ така, че отсечката от тази права, заключена между правите $2x + y + 2 = 0$ и $4x + y - 1 = 0$, да се разполовява от A .

$$\text{Отг. } 25x + 8y - 29 = 0.$$

Задача 11. Две от медианите в триъгълник лежат върху правите $x + y - 3 = 0$ $2x + 3y - 1 = 0$, а точката $A(1, 1)$ е връх на триъгълника. Намерете координатите на останалите два върха и уравненията на страните на триъгълника.

Задача 12. За правоъгълния триъгълник ABC ($\angle C = 90^\circ$) е известно, че точката $C(-3, 4)$, $M(1, 2)$ е средата на хипотенузата, а точката $D(3, 3)$ лежи на хипотенузата. Намерете координатите на върховете A и B и уравненията на страните на триъгълника.

$$\text{Отг. } A(-3, 0), B(5, 4); AB : x - 2y + 3 = 0, AC : x + 3 = 0, BC : y - 4 = 0.$$

Задача 13. Намерете радиуса и координатите на центъра на окръжностите:

- (а) $x^2 + y^2 + 4y = 0$;
 (б) $x^2 + y^2 + 5x - 5y + 12 = 0$;
 (в) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 16y + 19 = 0$.

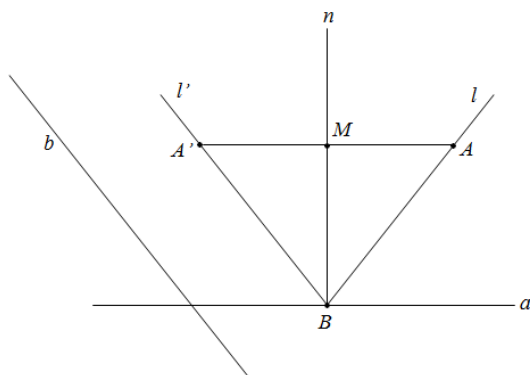
$$\text{Отг. (а) } r = 2, (0, -2); \text{ (б) } r = \frac{\sqrt{2}}{2}, (\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}); \text{ (в) } r = \frac{1}{2}, (1, -2).$$

Задача 14. Намерете уравнението на окръжност:

- (а) с център точката $O(2, 2)$, ако правата $3x + y - 18 = 0$ се допира до окръжността;
 (б) описана около триъгълника с върхове $A(-2, 1)$, $B(2, 1)$, $C(3, 0)$.

Отг. (а) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$; (б) $x^2 + (y + 3)^2 = 18$.

Задача 14. (СУ, Държавен изпит, 2006) Относно ортонормирана координатна система са дадени точката $A(-\frac{1}{2}, 3)$ и правите $a : 3x - 4y + 1$, $b : 10x - 5y + 1 = 0$. Светлинен лъч l през точката A след отразяването си от правата a става успореден на правата b . Намерете уравненията на падащия и отразения лъч.



Както е известно, ъгълът на падане е равен на ъгъла на отразяване. Следователно правата n , перпендикулярна на a и минаваща през точката на падане (и отразяване) B , е ъглополовяща на ъгъла между падащия лъч l и отразения лъч l' .

От общото уравнение на правата a получаваме нейното скалярно параметрично уравнение. Нормалният вектор на a е $\vec{N}_a(3, -4)$, следователно векторът $(4, 3)$ е колинеарен с a . Една точка от a има координати $(1, 1)$. Тогава

$$a : \begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = 1 + 3s \end{cases} \quad (11)$$

Точката B от a получава координати $B(1 + 4s, 1 + 3s)$ за някоя стойност на s . Ще намерим тази стойност на параметъра.

Построяваме уравнението на правата n , минаваща през B и перпендикулярна на a . Следователно $n : 4(x - 1 - 4s) + 3(y - 1 - 3s) = 0$ или

$$n : 4x + 3y - 7 - 25s = 0. \quad (12)$$

Намираме точка A' – ортогонално-симетрична на A относно правата n . Тъй като n е ъглополовяща на ъгъла между правите l и l' (правите l и l' са симетрични относно n), то A' ще лежи на l' . Постъпваме по познатия начин:

1. Спускаме перпендикуляр през A към n , т.е. построяваме права m през a , която е успоредна на a . Тази права има уравнение

$$m : 6x - 8y + 27 = 0. \quad (13)$$

2. Намираме координатите на пресечната точка M на n и m , като намираме единственото решение на системата от уравненията на двете прави

$$\begin{cases} 4x + 3y - 7 - 25s = 0 \\ 6x - 8y + 27 = 0 \end{cases} . \quad (14)$$

Така получаваме $M(4s - \frac{1}{2}, 3 + 3s)$.

3. Отчитаме, че M е среда на отсечката AA' . Следователно $A' = 2M - A$. Пресмятаме $A'(8s - \frac{1}{2}, 6s + 3)$.

Съгласно условието на задачата правата l' , съдържаща отразения лъч, е успоредна на правата b и минава през точката B . Тогава тази права има уравнение

$$l' : 2x - y - 1 - 5s = 0. \quad (15)$$

Сега отчитаме, че точката $A'(8s - \frac{1}{2}, 6s + 3)$ също лежи на правата l' , следователно координатите на A' удовлетворяват уравнението на l' . След заместване на координатите на A' в (15), получаваме следното уравнение за параметъра s

$$5s - 5 = 0, \quad (16)$$

чието решение е $s = 1$. Като заместим $s = 1$ в уравнението (11) на правата a , за точката B пресмятаме $B(5, 4)$. Тогава падащия лъч намираме като построим уравнението на права през точките A и B , т.е.

$$l : 2x - 11y + 34 = 0, \quad (17)$$

а отразения лъч получаваме след заместване на $s = 1$ в уравнението (15). Окончателно

$$l' : 2x - y - 6 = 0. \quad (18)$$