Лекция 9

§9. Равнина в пространството

1. Уравнения на равнина. Предполагаме зададена правоъгълна положително ориентирана координатна система $Oxyz$ с ортонормирани базисни вектори $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$, с помощта на която ще представяме векторите и точките посредством техните координати.

Да разгледаме равнината α, съдържаща точката $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ и успоредна на двата неколинеарни вектора $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3) \parallel \alpha$ и $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3) \parallel \alpha$ (рис. 9.1).

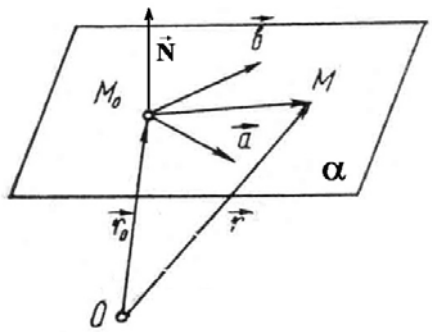

Рис. 9.1.

Тези данни определят по единствен начин равнината α, за която ще потърсим координатно уравнение. Нека $\vec{\mathbf{r}}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ и $\vec{\mathbf{r}} = \overrightarrow{OM}$ са радиус векторите на дадената точка M_0 и текущата точка M. Равнината α се състои от точките $M(x, y, z)$, за които векторите $\overrightarrow{M_0M} = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0$, $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ са компланарни (лежат равнината α), което означава, че тяхното смесено произведение е равно на нула. По този начин за равнината α получихме представянето $\alpha : \left(\overrightarrow{MM_0}, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right) = 0$, което обосновава следното координатно уравнение за α

(9.1) $$\alpha : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ако означим с A, B и C адюнгираните количества на първия ред на тази детерминанта, то уравнението (9.1) приема вида

(9.2) $\alpha : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Сега като положим $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, получаваме

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0,$$

което се нарича ***общо уравнение*** на равнина в пространството. В това общо уравнение поне един от коефициентите A, B или C е различен от нула, понеже тези адюнгирани количества представляват координатите на векторното произведение

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

което е различно от нулевия вектор, понеже по условие векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ са линейно независими. Това условие ще предполагаме налице, винаги когато разглеждаме общо уравнение на равнина в пространството.

Например да намерим общото уравнение на равнината α, която съдържа точката $M_0(1,-2,3)$ и успоредна на векторите $\vec{\mathbf{a}}(1,1,-1)$ и $\vec{\mathbf{b}}(-1,0,2)$. Съгласно (9.1) това уравнение има вида

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

откъдето намираме

$$\alpha: 2x - y + z - 7 = 0.$$

Теорема 9.1. Нека A, B, C и D са числа такива, че $|A|+|B|+|C|>0$ (поне едно между A, B и C е различно от нула). Тогава съвкупността от точки $M(x,y,z)$ в пространството, чиито координати удовлетворяват равенството

(9.3) $\quad Ax + By + Cz + D = 0$,

образуват някаква равнина α.

Доказателство. Ако разгледаме (9.3) като система от едно уравнение с три неизвестни, то тази система съгласно теоремата на Кронекер-Капели е съвместима и определена, следователно има безбройно много решения. По условие $A \neq 0$ или $B \neq 0$ или $C \neq 0$. За определеност да предположим, че $A \neq 0$ (другите случаи се разглеждат аналогично), при което за простота можем да предположим $A = 1$. Тогава съгласно общата теорема за структурата на решенията на линейна система, решенията на (9.3) се записват във вида

$$(9.4) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -B \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -C \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

където λ и μ са произволни коефициенти. Да положим

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} -D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} -B \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} -C \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогава векторите $\vec{\mathbf{r}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{r}}_2 = \vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2$, $\vec{\mathbf{r}}_3 = \vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_3$, които се получават от (9.4) съответно при $\lambda = \mu = 0$, $\lambda = 1$ и $\mu = 0$, $\lambda = 0$ и $\mu = 1$ са решения на системата (9.3), при което очевидно $\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_2$ и $\vec{\mathbf{r}}_3 - \vec{\mathbf{r}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_3$ са линейно независими, понеже за техния ранг е изпълнено

$$r(\vec{\mathbf{r}}_2, \vec{\mathbf{r}}_3) = r\begin{pmatrix} -B & -C \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Нека $\vec{\mathbf{r}}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{\mathbf{r}}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{\mathbf{r}}_3 = (x_3, y_3, z_3)$. Координатите на тези вектори удовлетворяват уравнението (9.3). Да разгледаме точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Тези три точки сигурно ***не лежат върху една права***, понеже векторите $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1$ и $\overrightarrow{M_1M_3} = \vec{\mathbf{r}}_3 - \vec{\mathbf{r}}_1$ са линейно независими. Следователно M_1, M_2 и M_3 определят по единствен начин някаква равнина α (рис. 9.2).

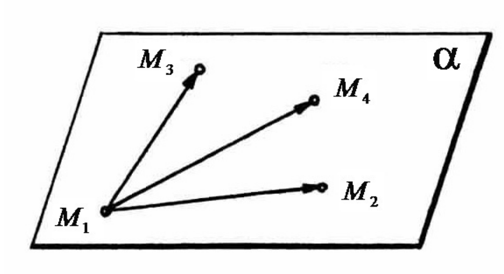

Рис. 9.2.

Остава да докажем, че всяка точка $M_4(x_4, y_4, z_4)$, чиито координати удовлетворяват уравнението (9.3), лежи в същата равнина α. По условие имаме

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$
$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$
$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0$$
$$Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D = 0$$

Ако извадим почленно първото равенство от другите три получаваме

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1)A + (y_2 - y_1)B + (z_2 - z_1)C = 0\\(x_3 - x_1)A + (y_3 - y_1)B + (z_3 - z_1)C = 0\,.\\(x_4 - x_1)A + (y_4 - y_1)B + (z_4 - z_1)C = 0\end{aligned}$$

Последното може да се разглежда като хомогенна система от три уравнения с три неизвестни A, B и C, която по условие има ненулево решение. Съгласно общите свойства на хомогенните системи, последното е възможно единствено когато нейната детерминанта е равна на нула,

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

което означава, че между редовете на детерминантата има линейна зависимост. От друга страна тези редове са точно координатите на векторите $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ и $\overrightarrow{M_1M_4}$, което показва, че те са линейно зависими и следователно векторът $\overrightarrow{M_1M_4}$ лежи в равнината α. ■

Един ненулев вектор $\vec{\mathbf{N}}$ се нарича нормален към равнината α, когато е перпендикулярен на α, $\vec{\mathbf{N}} \perp \alpha$. Според това определение, векторът $\vec{\mathbf{N}}$ е нормален към α когато е ортогонален на всеки вектор от равнината α.

Твърдение 9.1. Векторът $\vec{\mathbf{N}}$ е нормален към равнината α тогава и само тогава, когато е ортогонален на някои (кои да е) два линейно независими (неколинеарни) вектори $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ от тази равнина.

Доказателство. Нека вектори $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ лежат в равнината α и са линейно независими, при което $\vec{\mathbf{N}} \perp \vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{N}} \perp \vec{\mathbf{b}}$. На езика на скаларното произведение последното означава $\vec{\mathbf{N}}\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{N}}\vec{\mathbf{b}} = 0$. Да разгледаме кой да е вектор $\vec{\mathbf{c}}$ от тази равнина. По условие $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ са линейно независими, следователно образуват базис в α и $\vec{\mathbf{c}}$ може да се изрази като линейна комбинация на $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}} = \lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}}$. Тогава

$$\vec{\mathbf{N}}\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{N}}\left(\lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}}\right) = \lambda\vec{\mathbf{N}}\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{N}}\vec{\mathbf{b}} = 0\,,$$

следователно $\vec{\mathbf{N}} \perp \vec{\mathbf{c}}$. Последното е валидно за всеки вектор от α, което по определение означава, че $\vec{\mathbf{N}}$ е нормален към α. Ако пък е известно, че $\vec{\mathbf{N}}$ е нормален към α, то $\vec{\mathbf{N}}$ е ортогонален на всеки вектор от α, в частност и на векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$. ■

Нека е дадена равнина α с общо уравнение $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$. ***Тогава ненулевият вектор*** $\vec{\mathbf{N}}(A, B, C)$ ***е нормален към равнината*** α. Наистина, нека $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ са някакви точки от α, което означава, че

$$\begin{aligned} &Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ &Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \end{aligned}.$$

Като извадим първото уравнение от второто получаваме равенството

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0,$$

което показва, че векторите $\vec{\mathbf{N}}(A, B, C)$ и $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ са ортогонални, следователно така определеният вектор $\vec{\mathbf{N}}$ е ортогонален на всеки вектор с начало и край върху равнината, което доказва твърдението.

Една равнина α напълно се определя по дадена точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ и даден нормален вектор $\vec{\mathbf{N}}(A, B, C) \perp \alpha$, $\vec{\mathbf{N}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ (рис. 9.3).

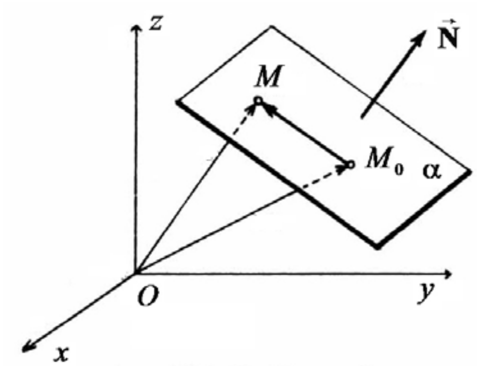

Рис. 9.3.

Нека $\vec{\mathbf{r}}_0(x_0, y_0, z_0)$ и $\vec{\mathbf{r}}(x, y, z)$ са радиус векторите на дадената точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и текущата точка от равнината $M(x, y, z)$. Равнината α се състои от точките $M(x, y, z)$, за които $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0 = \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{\mathbf{N}}$, което означава, че скаларното произведение на векторите $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0$ и $\vec{\mathbf{N}}$ е равно на нула. Следователно точките от α се описват от съотношението $\alpha: (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0)\vec{\mathbf{N}} = 0$, което в координатна форма има вида

(9.5) $\quad \alpha: A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$

и се нарича ***уравнение на равнина през дадена точка и известен нормален вектор***.

Например уравнението на равнината α, която съдържа точката $M_0(2, -1, 3)$ и има нормален вектор $\vec{\mathbf{N}}(2, 1, 1)$ има вида

$$\alpha: 2(x - 2) + 1(y + 1) + 1(z - 3) = 0.$$

Уравнението (9.5) предлага алтернативен начин за решаване на задачата за намиране уравнение на равнина през дадена $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ и съдържаща два линейно независими вектора $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3) \parallel \alpha$ и $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3) \parallel \alpha$. В този случай, съгласно твърдение 9.1, векторът $\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ е нормален към равнината α, следователно поставената задача може да бъде решена посредством уравнението (9.5). Между записа на уравненията (9.2) и (9.5) няма формална разлика, понеже при уравнението (9.2) коефициентите A, B и C се оказаха координатите на вектора $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}$, които се явяват и координати на вектора $\vec{\mathbf{N}}$ при уравнението (9.5).

От друга страна, както вече споменахме при извода на уравнението (9.1), равнината α може да бъде характеризирана като съвкупността от точки в пространството, за които векторите $\overrightarrow{M_0M}=\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_0$, $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ са линейно зависими, което означава, че $\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_0$ може да се запише като линейна комбинация на векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, понеже те образуват базис в α. По този начин за α намерихме представянето $\alpha:\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_0=\lambda\vec{\mathbf{a}}+\mu\vec{\mathbf{b}}$, което записваме във вида

(9.6) $\quad \alpha:\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_0+\lambda\vec{\mathbf{a}}+\mu\vec{\mathbf{b}}$,

където параметрите λ и μ могат да приемат произволни константи. Последното се нарича ***векторно параметрично уравнение*** на равнина в пространството. За разлика от параметричното уравнение на права, което съдържа само един параметър, (9.6) съдържа два параметъра, понеже геометричната размерност на равнината е равна на 2.

Записвайки (9.6) в координатен вид, получаваме

$$\alpha:\left|\begin{array}{l} x=x_0+\lambda a_1+\mu b_1 \\ y=y_0+\lambda a_2+\mu b_2 \\ z=z_0+\lambda a_3+\mu b_3 \end{array}\right.$$

което се нарича ***скаларно параметрично уравнение*** на равнина в пространството.

Уравнение на равнина през три точки. Да разгледаме три точки в пространството $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$, които не лежат върху една права. Тогава те определят единствена равнина α. Ако положим

$$\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1) \text{ и } \vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{M_1M_3}(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1),$$

то координатното уравнение на α може да се намери по формулата (9.1)

$$\alpha:\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Тази равнина има нормален вектор

$$\vec{\mathbf{N}}=\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}.$$

Например общото уравнение на равнината α през трите точки $M_1(1,2,3)$, $M_2(3,4,5)$ и $M_3(3,2,1)$ има вида

$$\alpha:\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3-1 & 4-2 & 5-3 \\ 3-1 & 2-2 & 1-3 \end{vmatrix}=-4x+8y-4z=0.$$

Преминаването от един вид уравнение към друг ще покажем върху пример. Нека равнината α е зададена чрез своето общо уравнение $\alpha:x-3y+2z-5=0$. Тогава, разсъждавайки както при доказателството на теорема 9.1 (разглеждайки общото уравнение на равнината като система от едно линейно уравнение с три неизвестни), за точките от равнината получаваме следното представяне

$$(9.7)\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

от което веднага получаваме, че точката $M_0(-5,0,0)$ лежи в равнината α, а векторите $\vec{\mathbf{a}}(3,1,0)$ и $\vec{\mathbf{b}}(-2,0,1)$ са успоредни на α. Векторното равенство (9.7) е всъщност параметричното уравнение на α, понеже може да бъде преписано във вида

$$\alpha : \left| \begin{array}{l} x = 5 + 3\lambda - 2\mu \\ \quad y = \lambda \\ \quad z = \mu \end{array} \right. .$$

Нека например равнината α е зададена посредством параметричното уравнение

$$\alpha : \left| \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda + 5\mu \\ y = -2 - \lambda + 2\mu \\ z = 3 + 5\lambda - 2\mu \end{array} \right. .$$

Тогава точката $M_0(1,-2,3)$ лежи в α, а векторите $\vec{\mathbf{a}}(2,-1,5)$ и $\vec{\mathbf{b}}(5,2,-2)$ са успоредни на α, следователно векторът

$$\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 2 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -7\vec{\mathbf{i}} + 29\vec{\mathbf{j}} + 9\vec{\mathbf{k}}$$

е нормален към α. Сега общото уравнение на α може да бъде намерено по два (еквивалентни) начина. По формулата (9.5) имаме

$$\alpha : -7(x-1) + 29(x+2) + 9(z-3) = 0 .$$

2. Взаимно разположение на две равнини. Нека са дадени двете равнини α_1 и α_2 чрез своите общи уравнения

$$(9.7)\qquad \alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 ,$$

където $|A_1| + |B_1| + |C_1| > 0$ и $|A_2| + |B_2| + |C_2| > 0$. Различаваме следните три основни взаимни разположения.

1) Равнините α_1 и α_2 се пресичат в една права g, $g = \alpha_1 \cap \alpha_2$.

2) Равнините α_1 и α_2 са успоредни но не се сливат, $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

3) Равнините α_1 и α_2 се сливат, $\alpha_1 \equiv \alpha_2$.

Тези разположения можем да установим, разглеждайки уравненията на двете равнини като система от две линейни уравнения с три неизвестни

$$\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \end{array}$$

с основна и разширена матрици

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \text{ и } \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix}.$$

По условие за ранговете на тези матрици винаги е изпълнено $1 \le r(A) \le r(\widetilde{A}) \le 2$.

Вторият случай е налице, когато системата не е съвместима – няма решение. Според теоремата на Кронекер-Капели, това означава, че $r(A) < r(\widetilde{A})$, което е възможно, само когато $r(A)=1$ и $r(\widetilde{A})=2$.

При първия и третия случай системата е съвместима, което означава $r(A)=r(\widetilde{A})=2$ или $r(A)=r(\widetilde{A})=1$

Нека е налице равенството $r(A)=r(\widetilde{A})=1$, което е еквивалентно на $r(\widetilde{A})=1$. Тогава, съгласно теоремата за базисния минор, всеки от редовете на разширената матрица $\widetilde{A}$ се получава от другия след умножение с някакво различно от нула число, следователно уравненията на α_1 и α_2 задават едно и също множество в пространството, което съответства на третия случай на сливащи се равнини.

Поради липса на друга възможност, за първия случай на равнини пресичащи се в една права остава случая $r(A)=r(\widetilde{A})=2$.

Взаимното разположение на двете равнини α_1 и α_2 може да бъде характеризирано и с помощта на техните нормални вектори $\vec{\mathbf{N}}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{\mathbf{N}}_2(A_2, B_2, C_2)$, понеже две равнини са успоредни (колинеарни, линейно зависими) тогава и само тогава, когато са успоредни техните нормални вектори, а двата вектора $\vec{\mathbf{N}}_1$ и $\vec{\mathbf{N}}_2$ са успоредни тогава и само тогава, когато $\vec{\mathbf{N}}_1 \times \vec{\mathbf{N}}_2 = \vec{\mathbf{0}}$.

По този начин доказахме следното

Твърдение 9.2. Нека са дадени двете равнини α_1 и α_2 чрез своите общи уравнения (9.7). Тогава

1) Равнините α_1 и α_2 се пресичат в една права тогава и само тогава, когато $r(A)=2$, което е еквивалентно на $\vec{\mathbf{N}}_1 \times \vec{\mathbf{N}}_2 \neq \vec{\mathbf{0}}$.

2) Равнините α_1 и α_2 са успоредни но не се сливат тогава и само тогава, когато $r(A)=1$ и $r(\widetilde{A})=2$. Последното е налице, точно когато $\vec{\mathbf{N}}_1 \times \vec{\mathbf{N}}_2 = \vec{\mathbf{0}}$ и всяка точка от едната равнина не лежи върху другата равнина.

3) Равнините α_1 и α_2 са успоредни но не се сливат тогава и само тогава, когато $r(\widetilde{A})=1$. Последното е налице, точно когато $\vec{\mathbf{N}}_1 \times \vec{\mathbf{N}}_2 = \vec{\mathbf{0}}$ и всяка точка от едната равнина лежи върху другата равнина. ■

Една примерна точка M_α, която лежи в равнината $\alpha : Ax+By+Cz+D=0$ има координати

$$M_\alpha\left(\frac{-AD}{A^2+B^2+C^2}, \frac{-BD}{A^2+B^2+C^2}, \frac{-CD}{A^2+B^2+C^2}\right).$$

Тази точка се явява проекцията на началото на координатната система върху равнината.

Например равнините

$$\alpha_1 : 2x-3y+z+1=0 \text{ и } g_2 : 3x-2y-5z+3=0$$

се пресичат в една права, понеже за ранга на основната матрица имаме

$$r\left[\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}\right]=2$$

и разбира се

$$\vec{\mathbf{N}}_1 \times \vec{\mathbf{N}}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 17\vec{\mathbf{i}} + 13\vec{\mathbf{j}} + 5\vec{\mathbf{k}} \neq \vec{\mathbf{0}}.$$

Ъгъл между две равнини. Ъгълът между двете равнини (9.7) се определя като ъгълът φ, който сключват кои да е два нормални вектора, например $\vec{\mathbf{N}}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{\mathbf{N}}_2(A_2, B_2, C_2)$, следователно за ъгъла φ между равнините α_1 и α_2 е в сила формулата

$$\cos\varphi = \frac{\vec{\mathbf{N}}_1\vec{\mathbf{N}}_2}{\left|\vec{\mathbf{N}}_1\right|\left|\vec{\mathbf{N}}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Това определение дава два ъгъла, които се допълват до π. Когато $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, единият от тях е остър, а другият е тъп. Например за ъгъла между равнините

$$\alpha_1 : x + 2y + 3z - 5 = 0 \text{ и } \alpha_2 : 3x - y + 2z + 1 = 0$$

намираме

$$\cos\varphi = \frac{1.3 + 2.(-1) + 3.2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{2},$$

следователно в този пример равнините α_1 и α_2 сключват ***остър ъгъл*** $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

3. Разстояние между точка и равнина. Да разгледаме равнината α, зададена чрез своето общо уравнение $\alpha : Ax + By + cz + D = 0$ и някаква точка от пространството $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 9.4). През точката M_0 да прекараме права g до пресичане с равнината α в точката $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

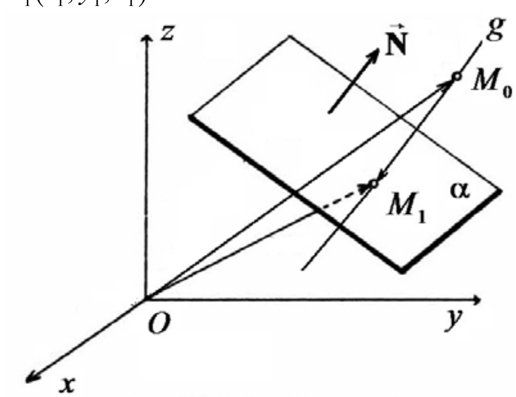

Рис. 9.4.

Тогава векторът $\vec{\mathbf{N}}(A, B, C)$ е нормален към равнината, а векторът

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{N}}}{\left|\vec{\mathbf{N}}\right|} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right)$$

е ***единичен нормален вектор*** към α. Точката M_1 се явява ортогоналната проекция на M_0 върху равнината α. Търсим разстоянието $d = d(\alpha, M_0)$ между равнината α и точката M_0. Очевидно $d = \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|$. Векторът $\overrightarrow{M_0M_1}$ е успореден на $\vec{\mathbf{n}}$, следователно $\overrightarrow{M_0M_1} = \delta\vec{\mathbf{n}}$, за някое число δ, а за търсеното разстояние получаваме

$$d = \left|\delta\vec{\mathbf{n}}\right| = \left|\delta\right|\left|\vec{\mathbf{n}}\right| = \left|\delta\right|.$$

От друга страна $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M_1} = \overrightarrow{OM_0} + \delta\mathbf{\vec{n}}$, откъдето за координатите на точката M_1, които са същевременно и координати на нейния радиус вектор $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_0} + \delta\mathbf{\vec{n}}$ намираме

$$M_1\left(x_0 + \delta\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, y_0 + \delta\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, z_0 + \delta\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right).$$

Числото δ ще определим от условието, че точката M_1 лежи върху равнината α, което означава, че нейните координати удовлетворяват уравнението,

$$\begin{aligned} &A\left(x_0 + \delta\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right) + B\left(x_0 + \delta\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right) + \\ &\qquad + C\left(x_0 + \delta\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right) + D = 0 \end{aligned}.$$

След преобразуване на последния израз получаваме

$$\delta = \frac{Ax_0 + Bx_0 + Cz_0}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

откъдето за търсеното разстояние намираме формулата

$$d = \frac{\left|Ax_0 + Bx_0 + Cz_0\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Например за разстоянието между равнината $\alpha : 2x + y - 2z + 5 = 0$ и точката $M_0(2,1,-4)$ пресмятаме

$$d = \frac{\left|3.2 + 1.1 + (-2)(-4) + 5\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 6.$$