Лекция 10

§10. Права в пространството

1. Уравнения на права в пространството. Предполагаме зададена правоъгълна положително ориентирана координатна система $Oxyz$ при ортонормирани базисни вектори $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$, с помощта на която ще представяме векторите и точките посредством техните координати.

Да разгледаме правата g, определена от точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$, която лежи върху g, $M_0 \in g$, и даден направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3) \neq \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{a}} \parallel g$ (рис. 10.1).

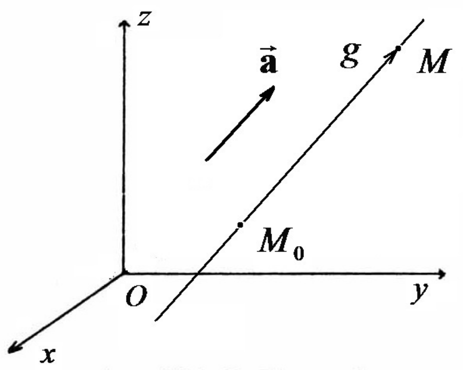

Рис. 10.1.

Правата g се състои от точките M, за които векторът $\overrightarrow{M_0M}$ е успореден на $\vec{\mathbf{a}}$, следователно g се характеризира чрез равенството $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{\mathbf{a}}$, което можем да запишем като $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0 = \lambda\vec{\mathbf{a}}$, където $\vec{\mathbf{r}}$ и $\vec{\mathbf{r}}_0$ са радиус векторите на текущата точка $M(x, y, z)$ и дадената точка M_0. По този начин получихме ***векторно параметричното уравнение*** на правата g,

$$g : \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \lambda\vec{\mathbf{a}}.$$

Последното в координатна форма има вида

$$g : \left| \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda a_1 \\ y = y_0 + \lambda a_2 \\ z = z_0 + \lambda a_3 \end{array} \right.$$

което се нарича ***скаларно параметрично уравнение*** на правата g.

Например правата g през точката $M_0(1,2,3)$ с направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}(2,-1,1)$ има уравнение

$$(10.1) \quad g : \left| \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{array} \right. ,$$

където λ е параметър, който може да приема произволни стойности. Сега като изключим параметъра λ от уравненията на (10.1), за правата g получаваме следното представяне

$$g : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3},$$

което се нарича ***канонично уравнение*** на правата. И тук, както при каноничното уравнение на права в равнината, някое от числата a_1, a_2 или a_3 може да бъде нула, но не и трите едновременно, понеже представляват координатите на ненулевия направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}$.

Например нека правата g е зададена чрез своето канонично уравнение

$$g: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}.$$

От последния запис веднага заключаваме, че точката $M_0(-1,2,3)$ лежи върху правата g и векторът $\vec{\mathbf{a}}(2,3,-1)$ е направляващ за g, следователно правата g има следното параметрично уравнение

$$g: \left| \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array} \right. .$$

Нека правата g е определена като ***пресечница*** на двете пресичащи се равнини

$\alpha_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ и $\alpha_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$.

Да разгледаме общите уравнения на α_1 и α_2 заедно като система от две линейни уравнения с три неизвестни x, y и z

$$(10.2) \quad \left| \begin{array}{l} A_1 x + B_1 y + C_1 z = -D_1 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = -D_2 \end{array} \right. .$$

По условие равнините α_1 и α_2 се пресичат, което означава, че техните нормални вектори $\vec{\mathbf{N}}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{\mathbf{N}}_2(A_2, B_2, C_2)$ не са успоредни и следователно техният ранг е равен на 2, $r(\vec{\mathbf{N}}_1, \vec{\mathbf{N}}_2) = 2$ и съответно за ранга на основната матрица на (10.2) намираме

$$r\left[\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}\right] = r(\vec{\mathbf{N}}_1, \vec{\mathbf{N}}_2) = 2.$$

Последният факт показва, че системата (10.2) е съвместима и неопределена, при което има точно едно свободно неизвестно. Поне един от минорите

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

е различен от нула, например нека

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогава системата (10.2) може да се преобразува по метода на Гаус-Жордан с базисни неизвестни x и y и свободно неизвестно z, при което ще приеме вида

$$\left| \begin{array}{l} x + C_1' z = D_1' \\ y + C_2' z = D_2' \end{array} \right. ,$$

която има общо решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1' \\ D_2' \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -C_1' \\ -C_2' \\ 1 \end{pmatrix},$$

от което веднага получаваме параметричното уравнение на пресечната права g.

От друга страна пресечницата $g = \alpha_1 \cap \alpha_2$ лежи едновременно в двете равнини и следователно е перпендикулярна едновременно на двата нормални вектора $\vec{\mathbf{N}}_1$ и $\vec{\mathbf{N}}_2$, откъдето веднага следва, че векторът $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{N}}_1 \times \vec{\mathbf{N}}_2$ се явява направляващ за g. Сега за да намерим уравнение за правата g е достатъчно за имаме на разположение една (коя да е) точка от нея, което означава да намерим някакво (кое да е) частно решение на линейната система (10.2).

Например да намерим уравнение за правата g, получена от пресичането на равнините $\alpha_1 : x + y + 2z - 1 = 0$ и $\alpha_2 : 2x - y + 3z - 5 = 0$. Тази права има направляващ вектор

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{N}}_1 \times \vec{\mathbf{N}}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} - 3\vec{\mathbf{k}}.$$

За да намерим една точка от правата, търсим едно решение на системата

$$\left| \begin{array}{l} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + 3z = 5 \end{array} \right. .$$

Като положим $z = 0$, получаваме $x = 2$ и $y = -1$, следователно точката $M_0(2,-1,0)$ лежи върху правата g, за която намираме следното канонично уравнение

$$g : \frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}$$

и съответно следното параметрично уравнение

$$g : \left| \begin{array}{l} x = 2 + 5\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -3\lambda \end{array} \right. .$$

Нека $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ са две различни точки от пространството. Тогава съществува единствена права g, която минава и през двете точки. Тази права има направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, следователно правата g има уравнение

$$g : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

което се нарича ***канонично уравнение*** на права в пространството през две дадени точки.

Например правата g минаваща през точките $M_1(1,2,3)$ и $M_2(3,1,-2)$ има уравнение

$$g : \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{5}.$$

2. Взаимно разположение на права и равнина. Да разгледаме правата

$$(10.3) \quad g : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

с дадена точка от нея $M_0(x_0, y_0, z_0) \in g$ и даден направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3) \neq \vec{\mathbf{0}}$ и равнината α

$$(10.4) \quad \alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$

с нормален вектор $\vec{\mathbf{N}}(A, B, C) \neq \vec{\mathbf{0}}$. Различаваме следните три основни взаимни разположения.

1) Правата g пробожда равнината α в една точка $M_1(x_1, y_1, z_1) = g \cap \alpha$.

2) Правата g е успоредна на равнината α и не лежи в нея, $g \parallel \alpha$, $g \notin \alpha$.
3) Правата g лежи в равнината α, $g \in \alpha$.

Първият случай е налице, когато векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{N}}$ не сключват прав ъгъл, т.е. когато $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{N}} = a_1A + a_2B + a_3C \neq 0$. Пресечната точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ лежи върху g, следователно за нейните координати имаме

$$\left| \begin{aligned} x_1 &= x_0 + \tau a_1 \\ y_1 &= y_0 + \tau a_2 \\ z_1 &= y_0 + \tau a_3 \end{aligned} \right.$$

при някоя конкретна стойност на параметъра τ. За да намерим тази стойност заместваме координатите на M_1 в уравнението на равнината α и получаваме

$$\tau(a_1A + a_2B + a_3C) + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0$$

или по друг начин

(10.5) $\tau(\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{N}}) + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0$,

което винаги има единствено решение, понеже коефициентът пред τ в този случай сигурно е различен от нула.

Уравнението, което представлява частен случай на система от едно линейно уравнение с едно неизвестно τ, (10.5) определя всичките общи точки между правата g и равнината α, следователно тяхното взаимно разположение изцяло зависи от вида на (10.5). Когато това уравнение има единствено решение (съвместима и определена система), то правата пробожда равнината.

Ако (10.5) няма решения (несъвместима система), то правата и равнината са успоредни, което е вторият случай. Това е налице, когато $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{N}} = a_1A + a_2B + a_3C = 0$, т.е. когато векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{N}}$ са ортогонални, но другият коефициент е различен от нула, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.

Последната възможност за (10.5) е то да има безбройно много решения (съвместима и неопределена система), което определя третия случай, когато правата лежи в равнината. Това е налице, когато $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{N}} = a_1A + a_2B + a_3C = 0$ и другият коефициент е равен на нула, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Например да определим взаимното разположение на правата

$$g : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-1}$$

и равнината $\alpha : x + y - 2z - 3 = 0$. Тук $M_0(1,2,0)$ е точка от g, а векторът $\vec{\mathbf{a}}(1,-2,-1)$ е направляващ за g. Равнината α има нормален вектор $\vec{\mathbf{N}}(1,1,-2)$. За да определим взаимното разположение на g и α съставяме уравнението (10.5), което в дадения конкретен случай има вида $\tau + 3 = 0$, което има единственото решение $\tau = -3$ и следователно правата пробожда равнината. За да намерим координатите на прободната точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, в параметричното уравнение на g

$$\left| \begin{aligned} x &= 1 + \lambda \\ y &= 2 - 2\lambda \\ z &= -\lambda \end{aligned} \right.$$

заместваме параметъра λ със стойността $\lambda = \tau = 1$, при която стойност се получава точката M_1 и намираме, че M_1 има координати $M_1(2,0,-1)$.

Ъгъл φ между правата g, зададена с каноничното уравнение (10.3) и равнината α, зададена с общото уравнение (10.4), когато g не е перпендикулярна на α, се нарича ъгълът между правата g и нейната ортогонална проекция в равнината (рис. 10.2). Когато $g \perp \alpha$, по определение $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (в този случай ортогоналната проекция на g върху α се свежда до прободната точка на g с α).

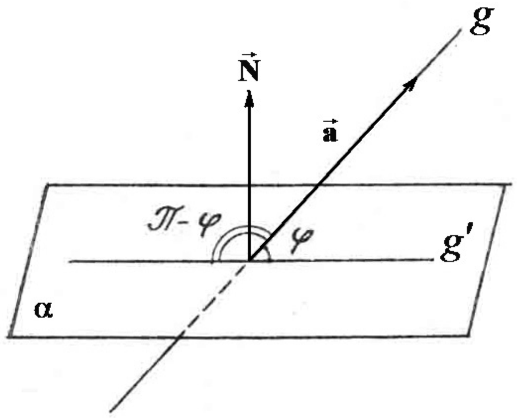

Рис. 10.2.

Горното определение задава два ъгъла, които се допълват до π. Нека ψ е ъгълът между направляващият вектор $\vec{\mathbf{a}}$ и нормалният вектор $\vec{\mathbf{N}}$. Тогава при всяко взаимно разположение на $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{N}}$ е изпълнено $\sin\varphi = |\cos\psi|$, следователно за ъгъла φ между правата g и равнината α имаме

$$\sin\varphi = \frac{|a_1 A + a_2 B + a_3 C|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3. Разстояние от точка до права. Да разгледаме правата g през точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3) \neq \vec{\mathbf{0}}$, която има канонично уравнение

$$g: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

и нека $M_1(x_1, y_1, z_1)$ е дадена точка от пространството. Под ***перпендикуляр***, спуснат от точката M_1 към правата g се разбира правата g', която минава през M_1 и пресича дадената права g под прав ъгъл в някаква точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 10.3).

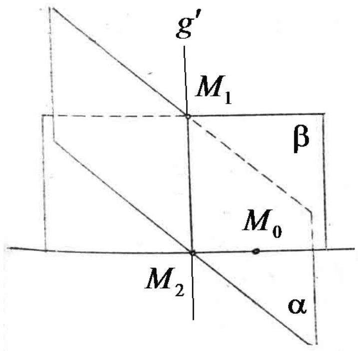

Рис. 10.3.

Нека α е равнината през точката M_1 и перпендикулярна на правата g. Тази равнина има нормален вектор $\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{a}}$, следователно има уравнение

$\alpha: a_1(x-x_1)+a_2(y-y_1)+a_3(z-z_1)=0$.

Нека β е равнина през точката M_1, която съдържа правата g. За тази равнина познаваме два успоредни вектора $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$, следователно за нейното уравнение имаме

$$\beta: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=0.$$

Правата g', която минава през точката M_1 и е перпендикулярна на дадената права g се получава от пресичането на равнините α и β, $g'=\alpha\cap\beta$.

Дължината на отсечката $d=M_1M_2$ се нарича ***разстояние*** от точката M_1 до правата g. За да намерим това разстояние да разгледаме успоредника, построен върху векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$ (рис. 10.4).

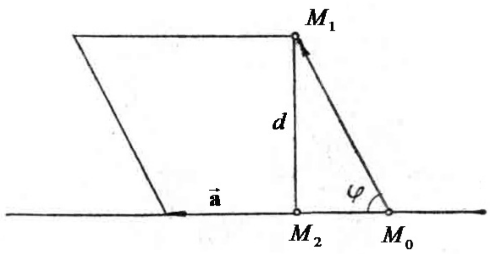

Рис. 10.4.

За неговото лице S имаме на разположение два израза

$$S=\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{\mathbf{a}}\right|=|\vec{\mathbf{a}}|d,$$

откъдето за търсеното разстояние намираме формулата

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{\mathbf{a}}\right|}{|\vec{\mathbf{a}}|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_2 & a_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ a_3 & a_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ a_1 & a_2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

Например да намерим разстоянието между правата

$$g: \frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1}$$

и точката $M_1(-1,4,3)$. Имаме $\overrightarrow{M_0M_1}=(-4,3,5)$. Пресмятаме

$$\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{\mathbf{a}}=\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -4 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=8\vec{\mathbf{i}}+14\vec{\mathbf{j}}-2\vec{\mathbf{k}},$$

откъдето намираме

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{\mathbf{a}}\right|}{|\vec{\mathbf{a}}|}=\frac{\sqrt{8^2+14^2+(-2)^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=2\sqrt{11}.$$

4. Взаимно разположение на две прави в пространството. Да разгледаме правите g_1 и g_2, дадени чрез своите канонични уравнения

$$g_1 : \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}, \; M_1(x_1, y_1, z_1) \in g_1, \; \vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3) \parallel g_1,$$

$$g_2 : \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}, \; M_2(x_2, y_2, z_2) \in g_2, \; \vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3) \parallel g_2.$$

Да разгледаме вектора $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ (рис. 10.5)

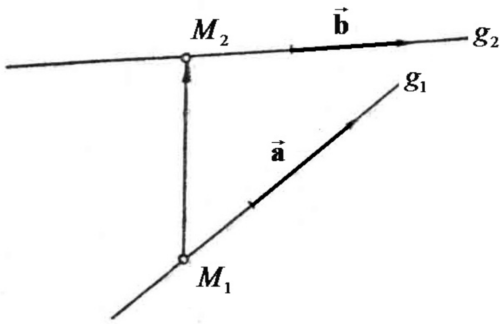

Рис. 10.5.

и да образуваме смесеното произведение

$$\Delta = \left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Очевидно правите g_1 и g_2 лежат в една равнина тогава и само тогава, когато $\Delta = 0$. Освен това g_1 и g_2 са успоредни тогава и само тогава, когато $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}}$.

Различаваме следните основни взаимни разположения на правите g_1 и g_2.

1) Правите g_1 и g_2 са ***кръстосани***, което означава, че те ***не лежат в една равнина***. Това е случаят, когато векторите $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ не лежат в една равнина, т.е. когато тяхното смесено произведение е различно от нула, $\Delta \neq 0$.

2) Правите g_1 и g_2 лежат в една равнина α, където се пресичат в една точка. Това съответства на случая, когато $\Delta = 0$ (лежат в една равнина) и $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ (правите не са успоредни).

3) Правите g_1 и g_2 лежат в една равнина α, където са успоредни и не се сливат. Това съответства на случая, когато $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}}$ (правите g_1 и g_2 са успоредни, при което по необходимост имаме $\Delta = 0$, понеже в този случай детерминантата съдържа два пропорционални реда) и точката M_1 не принадлежи на правата g_2, както и точката M_2 не принадлежи на правата g_1 (правите не се сливат).

4) Правите g_1 и g_2 се сливат. Това съответства на случая, когато $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}}$, при което точката M_1 принадлежи на правата g_2, както и точката M_2 принадлежи на правата g_1.

От изброените случаи най-голям интерес представлява случаят, когато правите g_1 и g_2 са кръстосани, понеже се явява типичен за взаимното разположение на две прави в пространството.

Например да определим взаимното разположение на двете прави

$$g_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{3} \text{ и } g_1 : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+2}{1}.$$

Тук имаме $M_1(1,-1,1) \in g_1$, $\vec{\mathbf{a}}(2,1,3) \parallel g_1$ и $M_2(3,2,-2) \in g_2$, $\vec{\mathbf{b}}(-1,5,1) \parallel g_2$. Пресмятаме

$$\Delta = \left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right) = \begin{vmatrix} 3-1 & 2+1 & -2-1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -76 \neq 0,$$

следователно двете прави са кръстосани.

Ос на две кръстосани прави. За всеки две кръстосани прави g_1 и g_2 съществува единствена трета права g, която ги пресича под прав ъгъл.

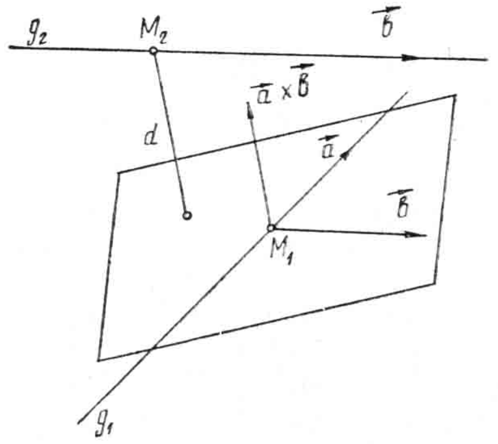

Рис. 10.6.

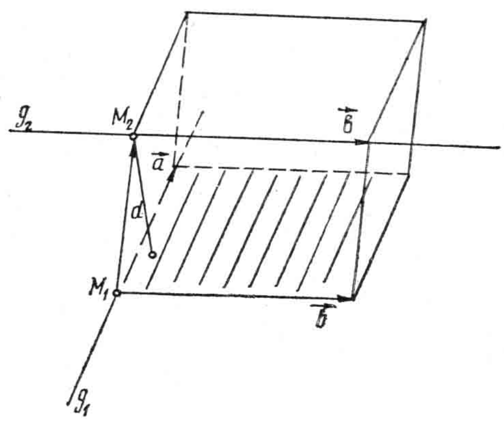

Рис. 10.7.

За направляващ вектор на оста g можем да изберем вектора $\vec{\mathbf{c}}(c_1, c_2, c_3) = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$,

$$\vec{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

По условие $\vec{\mathbf{c}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ иначе правите биха били успоредни. Нека α_1 е равнина, която съдържа правата g_1 и е успоредна на вектора $\vec{\mathbf{c}}$ и нека α_2 е равнина, която съдържа правата g_2 и също е успоредна на вектора $\vec{\mathbf{c}}$. Тогава тези равнини имат уравнения

$$\alpha_1 : \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ и } \alpha_2 : \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

и нормални вектори $\vec{\mathbf{N}}_1 = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{c}}$ и $\vec{\mathbf{N}}_2 = \vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}$.

Да допуснем, че векторите $\vec{\mathbf{N}}_1$ и $\vec{\mathbf{N}}_2$ са успоредни. Тогава съществува тяхна нулева линейна комбинация $\lambda\vec{\mathbf{N}}_1 + \mu\vec{\mathbf{N}}_2 = \vec{\mathbf{0}}$, при което поне един от коефициентите λ или μ не е равен на нула. Имаме

$$\vec{\mathbf{0}} = \lambda\vec{\mathbf{N}}_1 + \mu\vec{\mathbf{N}}_2 = \lambda\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{c}} + \mu\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}} = \left(\lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}}\right) \times \vec{\mathbf{c}},$$

следователно векторът $\vec{\mathbf{c}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ е успореден с вектора $\lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}}$, с който от друга страна са взаимно перпендикулярни, понеже

$$\left(\lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}}\right)\vec{\mathbf{c}} = \lambda\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{c}} + \mu\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}} = 0 + 0 = 0.$$

Получихме, че векторът $\lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}}$ е едновременно колинеарен и ортогонален с даден ненулев вектор, което е възможно, единствено когато $\lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}}$, което пък означава, е $\lambda = \mu = 0$, понеже $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ не са успоредни по условие.

По този начин установихме, че равнините α_1 и α_2 не са успоредни и следователно се пресичат в една права, която права очевидно се явява оста g на двете кръстосани прави g_1 и g_2.

Например да намерим оста g на двете кръстосани прави

$$g_1 : \frac{x-2}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-7}{1} \text{ и } g_2 : \frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}.$$

За правата g_1 имаме направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}(8,4,1)$, а за правата g_2 имаме направляващ вектор $\vec{\mathbf{b}}(2,-2,1)$. За вектора $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ пресмятаме

$$\vec{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} - 4\vec{\mathbf{k}}.$$

Равнините α_1 и α_2 имат уравнения

$$\alpha_1 : \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-7 \\ 8 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \text{ и } \alpha_2 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

откъдето намираме общите уравнения

$$\alpha_1 : 5x - 11y + 4z + 48 = 0 \text{ и } \alpha_2 : x + y = 0.$$

Понеже за оста g вече разполагаме с направляващ вектор $\vec{\mathbf{c}}(1,-1,-4)$, за да получим уравнението на тази ос остава да намерим една (коя да е) точка от g. За тази цел търсим някакво частно решение на системата

$$\begin{aligned} 5x - 11y + 4z + 48 &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}.$$

Полагайки $z = 0$ намираме $x = -3$ и $y = 3$, следователно точката $M_0(-3,3,0)$ лежи върху оста g, за която вече ос получаваме каноничното уравнение

$$g : \frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{-4}.$$

Разстояние между две кръстосани прави. Ако правите g_1 и g_2 са кръстосани, то под разстояние $d = d(g_1, g_2)$ между тези оправи се разбира дължината на отсечката между пресечните точки на оста с двете прави. Нека β е равнина през правата g_1, която е успоредна на направляващия вектор $\vec{\mathbf{b}}$ на другата права g_2. Тогава правата g_2 е успоредна на равнината β и следователно разстоянието между коя да е точка от g_2 и равнината β е едно и също, равно на търсеното разстояние d (рис. 10.6). Да разгледаме паралелепипеда, построен върху векторите $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, за който d се явява височина (рис. 10.7). За обема V на този успоредник разполагаме с два израза, единият чрез абсолютната стойност на смесеното произведение $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right)$, а другият по известната формула за обем на паралелепипед – лице на основа по височина,

$$V = \left| \left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right) \right| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| d,$$

откъдето за търсеното разстояние между кръстосаните прави g_1 и g_2 намираме формулата

$$d=\frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}\right)\right|}{\left|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}\right|}=\frac{\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}^2}}.$$

Това разстояние представлява най-малката дължина на отсечка, единият край на която лежи върху правата g_1, а другият край лежи върху правата g_2.