ЗАДАЧИ ПО АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

I ЧАСТ: Линейна зависимост и независимост на вектори.

1 зад. Даден е триъгълник *АВС*, за който $\vec{CA}=\vec{a} и \vec{CB}=\vec{b}$ . Върху страните *AC* и *BC* са нанесени съответно точките *M* и *N* така, че *CM*:*MA* = 2:3 и *CN*:*NB* = 2:3.

1. Да се изразят векторите $\vec{AN},\vec{BM}, \vec{MN} и \vec{AB}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Да се покаже, че правите *MN* и *АВ* са успоредни;
2. Да се докаже, че правите *AN* и *BM* имат точно една обща точка.

2 зад. Даден е успоредник *ABCD*, за който $\vec{AB}=\vec{a} и \vec{AD}=\vec{b}$, точката $O=AC∩BD$, а точката *P* е от страната *BC* такава, че *BP*:*PC* = 3:1.

1. Да се изразят векторите $\vec{OC},\vec{OB}, \vec{OP} $ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
2. Ако точката *Q* е от страната *AD* такава, че *AQ*:*QD* = 1:3, да се докаже, че точките *P*, *Q* и *О* са колинеарни.

3 зад. Даден е успоредник *ABCD*, за който $\vec{AB}=\vec{a} и \vec{AD}=\vec{b}$, точката $O=AC∩BD$. Точките M и N са медицентровете съответно на триъгълник ABD и триъгълник ABC.

1. Да се изразят векторите $\vec{AN},\vec{BM}, \vec{MN} и \vec{AB}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
2. Да се покаже, че правите *MN* и *АВ* са успоредни.

4 зад. Даден е тетраедър *OABC*, за който $\vec{OA}=\vec{a}, \vec{OB}=\vec{b} и \vec{OC}=\vec{c}$. Точките *А1*, *C1* и *O1* са медицентровете съответно на триъгълниците: *BOC*, *AOB* и *ABC*.

1. Да се изразят медианите на тетраедъра $\vec{AA\_{1}},\vec{CC\_{1}}, \vec{OO\_{1}} $ чрез $\vec{a}$ , $\vec{b}$ и $\vec{c}$;
2. Да се докаже, че векторите $\vec{AA\_{1}} и \vec{CC\_{1}}$ са линейно независими;
3. Да се докаже, че векторите $\vec{AA\_{1}},\vec{CC\_{1}} и \vec{AC}$ са линейно зависими, т.е. четирите точки *A*, *C*, *А1* и *C1­* лежат в една равнина. От двете подусловия b) и c) следва, че двете прави *AА1* и *СС1* се пресичат в единствена точка *М*;
4. Да се докаже, че намерената по-горе точка *М* лежи и на третата медиана *OO*1 и да се намерят отношенията, в които т. *М* дели всяка от медианите.

5 зад. Даден е тетраедър *OABC*, за който $\vec{OA}=\vec{a}, \vec{OB}=\vec{b} и \vec{OC}=\vec{c}$. Точките *М*, *N*, *P* и *Q* са медицентровете съответно на триъгълниците: *AOB,* *BOC*, *ABC* и *АОС*. Да се докаже, че следните прави са две по две успоредни: *MN* и *АС*, *MQ* и *ВС*, *QN* и *AB*, *MP* и *ОС*, *NP* и *ОА*, *PQ* и *ОВ*.

II ЧАСТ: Скаларно произведение на два вектора

1 зад. Даден е триъгълник *АВС*, за който $\vec{CA}=\vec{a} и \vec{CB}=\vec{b}$. Нека $\left|\vec{a}\right|=1, \left|\vec{b}\right|=2, ∢\left(\vec{a}, \vec{b}\right)= \frac{π}{3}$. Дадени са точките *F* и *D*, съответно от страните *AB* и *CB* на триъгълника, такива че: *AF*:*FB* = 1:3 и *CD*:*DB* = 1:3.

1. Да се изразят векторите $\vec{CF}$ и $\vec{AD}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ;
2. Да се намерят дължините на векторите $\vec{CF}$ и $\vec{AD}$;
3. Да се намери косинусът на ъгъла между векторите $\vec{CF}$ и $\vec{AD}$.

2 зад. Даден е триъгълник *АВС*, за който $\vec{CA}=\vec{a} и \vec{CB}=\vec{b}$. Нека $\left|\vec{a}\right|=2, \left|\vec{b}\right|=3, ∢\left(\vec{a}, \vec{b}\right)= γ$. Медианите *АА*1 и *ВВ*1 на триъгълника са взаимно перпендикулярни. Да се определи *cos*$ γ$*.*

 Упътване: Да се изразят векторите $\vec{AA\_{1}}$ и $\vec{BB\_{1}}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и да се пресметне скаларното им произведение.

3 зад. Даден е триъгълник *АВС*, за който $\vec{CA}=\vec{a} и \vec{CB}=\vec{b}$. Нека $\left|\vec{a}\right|=3, \left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}, ∢\left(\vec{a}, \vec{b}\right)= \frac{π}{4}$. Отсечката *CH* е височина в триъгълника, т.*H* $\in $ *AB*. Да се изрази вектора $\vec{CH}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4 зад. Даден е тетраедър *OABC*, за който $\vec{OA}=\vec{a}, \vec{OB}=\vec{b} и \vec{OC}=\vec{c}$. Нека $\left|\vec{a}\right|=2, \left|\vec{b}\right|=2, \left|\vec{c}\right|=1$ и трите вектора са два по два перпендикулярни. Построена е височината *ОH* на тетраедъра, т.*H* $\in $ (*ABC)* и $OH⊥(ABC)$. Да се изрази вектора $\vec{CH}$ чрез $\vec{a}$ , $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

5 зад. Спрямо ОКС *К = Оxy* са дадени точките: $A\left(2, -1\right), B\left(-1, 0\right) и C(2, 3)$. Да се докаже, че трите точки образуват триъгълник. Да се намерят:

1. Координатите на медицентъра *М* на триъгълник *ABC* и разстоянието от т.*М* до върха *C*;
2. Координатите на петите на трите височини на триъгълника, спуснати от върховете *А*, *B* и *C*.

6 зад. Спрямо ОКС *К = Оxyz* са дадени точките: $A\left(1, -1, 2\right), B\left(2, 1, 1\right), C\left(1,1, 2\right)и D(-3, 2, -1)$. Да се докаже, че четирите точки не лежат в една равнина. Да се намерят:

1. Да се намерят дължините на страните на триъгълник *ABC*;
2. Косинусите на ъглите на триъгълник *ABC*;
3. Координатите на медицентъра *G* на триъгълник ***ABD*** и дължината на вектора $\vec{CG}$;
4. Координатите на точката *H*: т.*H* $\in $ (*ABC)* и $DH⊥(ABC)$.

III ЧАСТ: Векторно и смесено произведение на вектори

1 зад. Спрямо ОКС *К = Оxyz* са дадени векторите $\vec{a}\left(1, 0, 2\right),\vec{b}\left(2, -1, 3\right) и \vec{c}\left(1, -1, 0\right).$ Да се намерят координатите на неизвестния вектор $\vec{x}$ от уравненията: $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{x}\right)=1, \left(\vec{b}\vec{c}\vec{x}\right)=2, \left(\vec{c}\vec{a}\vec{x}\right)=0$.

2 зад. Дадени са векторите $\vec{a} и \vec{b}$. Нека $\left|\vec{a}\right|=3, \left|\vec{b}\right|=2, ∢\left(\vec{a}, \vec{b}\right)= \frac{π}{2}$. Да се определи неизвестния вектор $\vec{p}$ от равенствата : $\left(\vec{a}\vec{p}\right)=-18, \left(\vec{b}\vec{p}\right)=12, \left(\vec{a}\vec{b}\vec{p}\right)=-12$.

3 зад. Дадени са векторите $\vec{a} , \vec{b} и \vec{c}$. Нека $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1$ и

 $∢\left(\vec{a}, \vec{b}\right)= \frac{π}{3}, ∢\left(\vec{a}, \vec{c}\right)= \frac{π}{3},∢\left(\vec{c}, \vec{b}\right)= \frac{π}{3}$.

1. Да се пресметне смесеното произведение $ \left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$ и да се докаже, че трите вектора са линейно независими;
2. Нека *OABC* е тетраедър като:$ \vec{OA}=(\vec{c} + \vec{b}), \vec{OB}=(\vec{c}+ \vec{a}) и \vec{OC}=(\vec{a}+\vec{b}$). Да се намери обема на тетраедъра *OABC*.

4 зад. Дадени са векторите $\vec{a} и \vec{b}$. Нека $\left|\vec{a}\right|=2, \left|\vec{b}\right|=1, ∢\left(\vec{a}, \vec{b}\right)= \frac{2π}{3}$. В триъгълника *ОАВ*

 $\vec{OA}=(\vec{a}×\vec{b}$)$×\vec{a}$, а $\vec{OB}=\vec{b}×(\vec{a}×\vec{b}$).

1. Да се намери лицето на триъгълника;
2. Ако т.*М* е медицентърът на триъгълник *ОАВ*, да се изрази вектора $\vec{OM}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и да се пресметне дължината му.

5 зад. Дадени са векторите $\vec{a} и \vec{b}$, като $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1, ∢\left(\vec{a}, \vec{b}\right)= \frac{π}{3}$.

Нека $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=(\vec{a}×\vec{b}$), $ \vec{OC}=\vec{b}×(\vec{a}×\vec{b}$). Да се докаже, че векторите $\vec{OA}, \vec{OB} и \vec{OC}$ са линейно независими и да се намери обема на тетраедъра *OABC*.

6 зад. Спрямо ОКС *К = Оxyz* са дадени точките: $A\left(5, -2, 1\right), B\left(1, 1, -2\right), C\left(1,0, 5\right)и D(1, 1,1)$.

1. Да се намери лицето на триъгълник *ABC*;
2. Да се намери обема на тетраедъра *ABCD*.

7 зад. Спрямо ОКС *К = Оxy* в равнината са дадени точките: $A\left(1, -1\right), B\left(-3, 2\right), C\left(5, 1\right)$. Да се намери лицето на триъгълник *ABC*.