

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

1. ПРАВА ЛИНИЯ В РАВНИНАТА

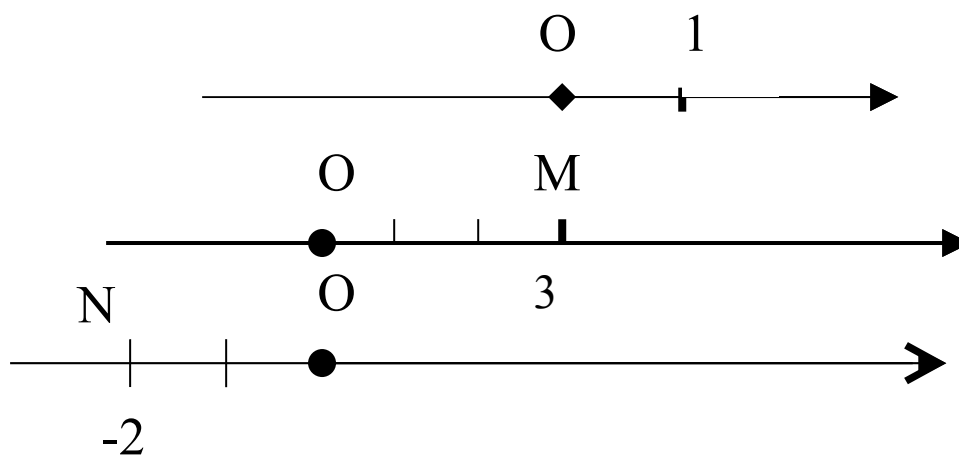
1.1.1 Числова ос.

Върху права линия се избира:

точка О (координатно начало)

положителна посока (надясно от т.О)

единична отсечка.



Всяка точка има за координата някакво реално число x . За точките отдясно на нулата това число е положително, а за точките отляво на нулата- отрицателно.

Разстоянието между две точки е равно на разликата между координатите. Понеже разстоянието е положително се взема абсолютна стойност.

$$|MN| = |x_N - x_M| = |x_M - x_N|.$$

От друга страна **насочените отсечки** се измерват само с разликата от координатите на края и началото.

$$\overline{MN} = x_N - x_M, \quad \overline{NM} = x_M - x_N$$

1.1.2. Декартова координатна система

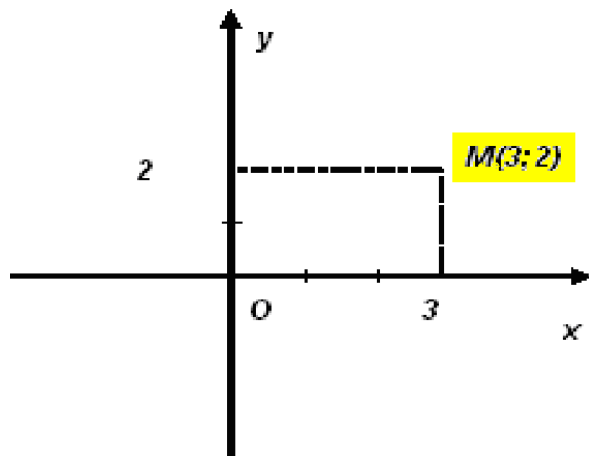
В равнината се въвеждат:

точка О (координатно начало),

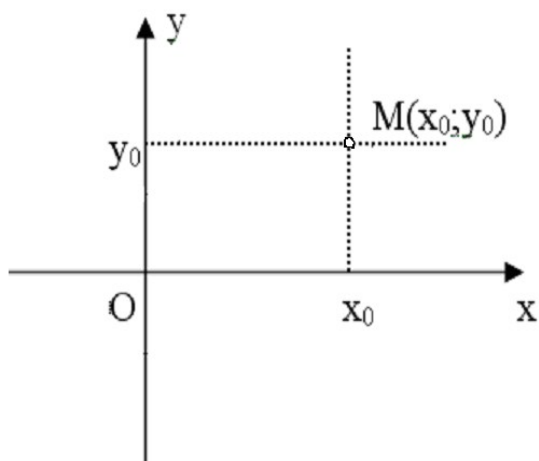
две перпендикулярни оси, минаващи през тази точка,

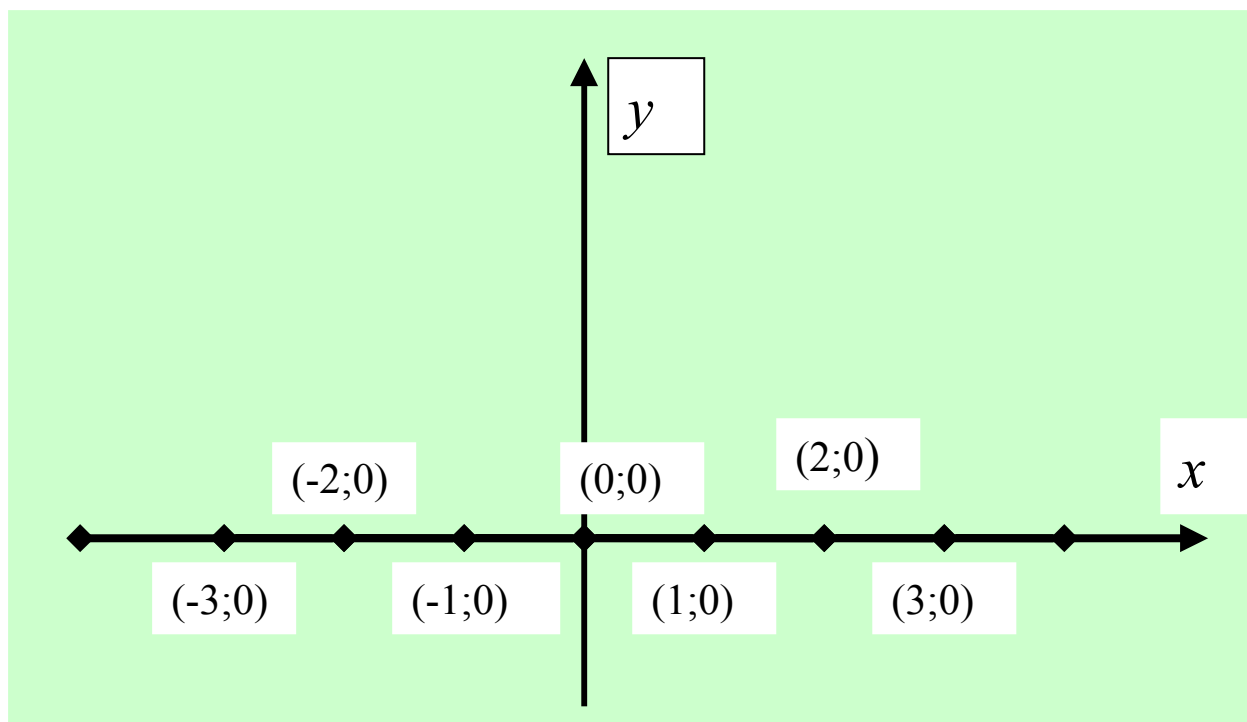
мерна единица (една и съща) върху тези оси. Едната от осите се нарича абсцисна и се отбелязва с **Ox**, другата ос сключва ъгъл 90° с Ox и се нарича ординатна ос **Oy**.

На всяка точка M от равнината се съпоставя наредена двойка от числа
(абсциса; ордината).



фиг.1.1





Върху оста Ox всички точки имат ордината равна на нула-

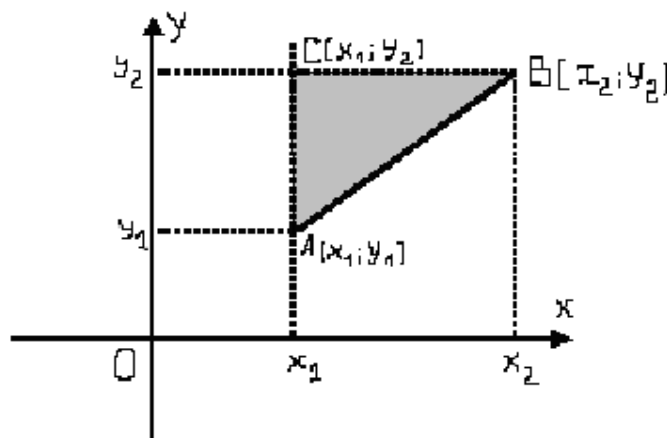
Уравнението на абсцисната ос е: $y = 0$.

Аналогично,

уравнението на ординатната ос Oy е: $x = 0$.

1.1.3. Разстояние между две точки

Нека са дадени две точки в равнината $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$.



Разстоянието е равно на:

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

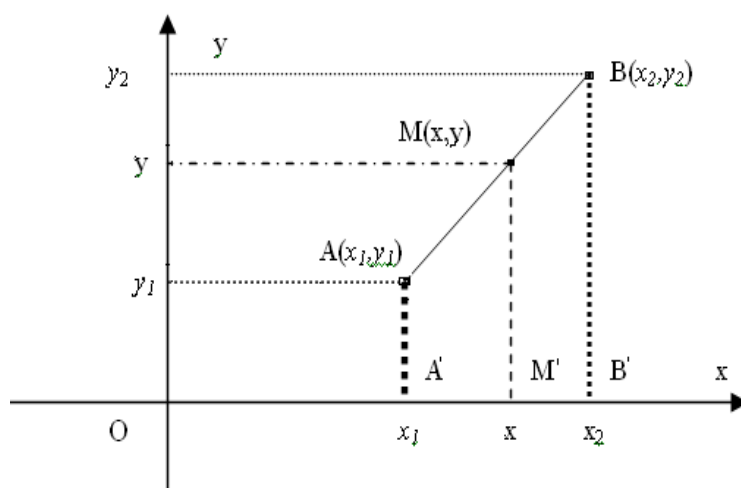
$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

1.2. Делене на отсечка в дадено отношение

Нека са дадени две различни точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2, y_2)$, точка $M(x; y)$ от

правата AB , $M \neq B$ и отношението $\lambda = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$.

Да се определи т. М.



фиг.1.6

$$\frac{\overline{A'M'}}{\overline{M'B'}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \lambda.$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \quad x_2 - x \neq 0,$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

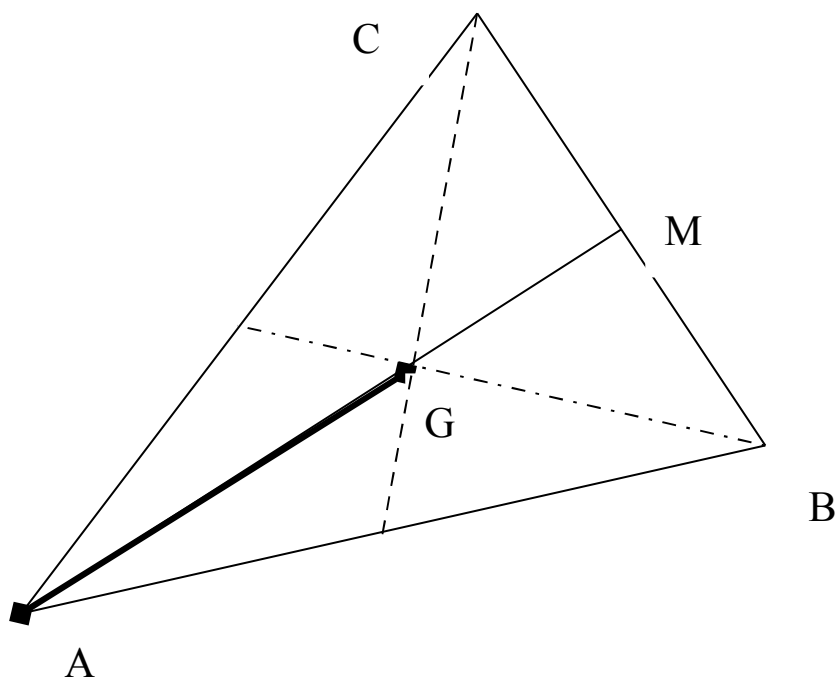
$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

При определянето на числото λ , отначало се определя абсолютната му стойност като отношение на две дължини на отсечки, а след това неговия знак. Знакът на λ е положителен, ако точката M е между точките A и B . Знакът на λ е отрицателен, ако точката M е извън отсечката AB и $\lambda = 0$, ако $M = A$.

Ако точката M е среда на отсечката AB , $\overline{AM} = \overline{MB}$, $\lambda = 1$, формулите за среда имат вида:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

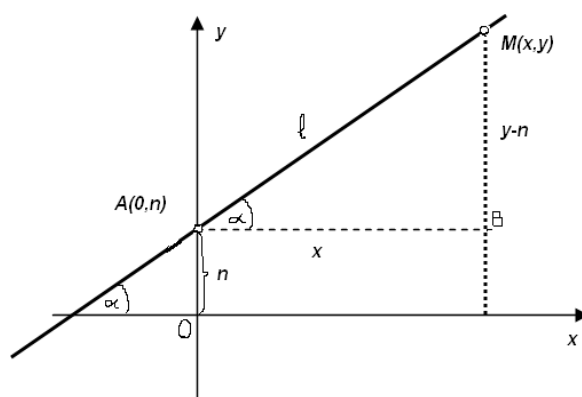
Пример. В триъгълник ABC $A(1;4)$, $G(3;6)$ - медицентър. Медианата AM пресича BC в т.М. Да се определят координатите на т.М.



$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MG}} = -3, \quad x_M = \frac{1-3.3}{1-3} = \frac{-8}{-2} = 4, \quad y_M = \frac{4-3.6}{1-3} = 7$$

$$M(4; 7)$$

1.3. Декартово уравнение на права линия



$$(\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z})$$

Нека

$$\overline{OA} = n, \quad k = \operatorname{tg} \alpha$$

и $M(x, y) \in l$ е произволна точка от правата. За ъгъл BAM се записва функцията тангенс

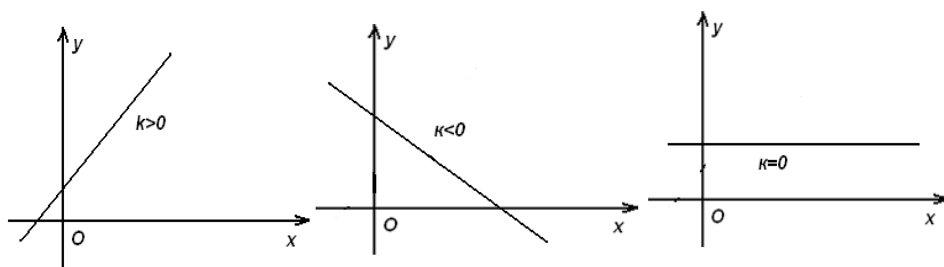
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y-n}{x}, \quad k = \frac{y-n}{x},$$

$$kx = y - n, \quad y = kx + n.$$

Полученото уравнение

$$y = kx + n$$

е прието да се нарича **декартово** уравнение.



1.4. Общо уравнение на права линия

Ако една права минава през точката $A(x_0; y_0)$ и е успоредна на ординатната ос, нейните точки имат една и съща абсциса равна на абсцисата на точката A . Това означава, че за всяка точка $M(x; y)$ от правата $x = x_0$ или

Лесно се вижда, че уравненията

$$x = x_0 \text{ и } y = kx + n$$

могат да се обединят в едно **общо уравнение** на права от вида:

$$ax + by + c = 0 \quad a^2 + b^2 \neq 0$$

Това уравнение при $b = 0$ дава уравнението на вертикалните прави $x = -\frac{c}{a}$ и

при $b \neq 0$ - декартовото уравнение $y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right)$.

1.5. Отрезково уравнение на права

Ако **и трите** коефициента в общото уравнение на една права са различни от нула, уравнението на правата може да придобие вида:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Нека $abc \neq 0$ и уравнението на правата е

$$ax + by + c = 0.$$

Тогава

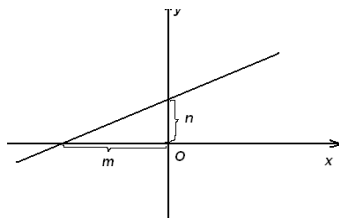
$$ax + by = -c, \quad : (-c)$$

$$\frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1,$$

$$\frac{x}{-c/a} + \frac{y}{-c/b} = 1.$$

Като се положи $m = \frac{-c}{a}$, $n = \frac{-c}{b}$ се получава **отрезовото** уравнение на правата:

За да се изясни геометричния смисъл на параметрите m и n , ще бъдат определени пресечните точки на правата с координатните оси.



За намиране на пресечната точка на правата с оста Ox се полага $y = 0$ в отрезовото уравнение и се определя $x = m$. Параметърът m в отрезовото уравнение представлява алгебричната мярка на отреза, който правата отсича от абсцисната ос. За намиране на пресечната точка на правата с оста Oy се полага $x = 0$ в отрезовото уравнение и се определя $y = n$. Параметърът n в отрезовото уравнение представлява алгебричната мярка на отреза, който правата отсича от ординатната ос. Тази геометрична интерпретация дава възможност бързо да се записва уравнението на правата линия, ако са известни отрезите.

Пример 1.16: Запасът от бензин в началния момент на работния ден на бензиностанция е бил 5000 л. Да се определи количеството бензин в момента x , ако е известно, че разходът на бензин е равномерен и след 15 часа работа цялото количество ще бъде продадено.

Решение: Въвеждат се следните означения:

x – време в часове от началото на работното време, y – количество на бензина в момента x .

От условието на задачата следва, че отрезите са равни на 15 и 5000 съответно по осите Ox и Oy . Записва се отрезовото уравнение:

$$\frac{x}{15} + \frac{y}{5000} = 1.$$

Определя се y :

$$y = 5000 \left(1 - \frac{x}{15} \right).$$

Пример 1.17: Да се определи уравнението на права, която отсича от координатните оси в четвъртия квадрант равнобедрен триъгълник с лице 8 квадратни единици.

Решение: $S_{\Delta} = \frac{|m||n|}{2} = 8, \quad |m| = |n|, \quad m > 0, \quad n < 0, \quad |m|^2 = 16, \quad |m| = 4,$

$$m = 4, \quad n = -4, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{-4} = 1, \quad x - y - 4 = 0.$$

1.6. Уравнение на права с дадено направление през фиксирана точка

Правите или имат декартово уравнение или са вертикални.

Нека е зададено направлението на правата, т.е. ъгловия коефициент k или ъгъла, който правата сключва с оста Ox α , $k = \operatorname{tg} \alpha$. Ако правата минава през фиксираната точка $(x_0; y_0)$, координатите на точката удовлетворяват уравнението на правата:

$$\begin{aligned} y &= kx + n \\ y_0 &= kx_0 + n \end{aligned}$$

Изваждат се тези две равенства, за да се елиминира неизвестния отрез n и се получава едно от най-често използваните уравнения на права линия – уравнението на права през една точка с дадено направление:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad .$$

Пример 1.18: Да се запише уравнението на права, която минава през точката $M(3; -1)$ и:

а) ординатите ѝ нарастват 2 пъти по-бързо спрямо правата $3x - y - 4 = 0$;

б) сключва с Ox два пъти по-голям ъгъл с оста Ox спрямо правата $3x - y - 4 = 0$.

Решение:

$$A) x_1 \rightarrow y_1 = 3x_1 - 4, \quad x_2 = x_1 + 1 \rightarrow y_2 = 3x_1 + 3 \cdot 1 - 4 = 3x_1 - 1$$

$$y_2 - y_1 = 3x_1 - 1 - (3x_1 - 4) = 3 \quad k=2 \cdot 3=6$$

$$y - (-1) = 6(x - 3), \quad y + 1 = 6x - 18, \quad 6x - y - 19 = 0.$$

Проверка:

$$\text{За първата права: } y_2 - y_1 = 3(x_2 - x_1)$$

$$\text{За втората права: } y_2 - y_1 = 6(x_2 - x_1).$$

Б) Дадената права сключва ъгъл α_1 с Ox , който може да бъде определен от равенството:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{3}{-1} = 3.$$

Ако ъгълът, който сключва търсената права с Ox е α , то $\alpha = 2\alpha_1$ и

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2\operatorname{tg} \alpha_1}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_1} = \frac{2 \cdot 3}{1 - 3^2} = \frac{2 \cdot 3}{-8} = -\frac{3}{4}.$$

Уравнението на търсената права има вида:

$$y - (-1) = -\frac{3}{4}(x - 3),$$

$$4y + 4 = -3x + 9,$$

$$3x + 4y - 5 = 0.$$

Пример 1.19: Да се запише уравнението на права, която е успоредна на правата

$$4x + y - 3 = 0 \text{ и минава през пресечната точка на правите } \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - 4y = -9 \end{cases}.$$

Решение: От условието за успоредност следва, че ъгловите коефициенти на търсената права и на дадената са равни.

$$k = -\frac{4}{1} = -4.$$

В тази задача не е зададена явно фиксираната точка, през която правата минава. Тя

може да бъде определена като се реши системата
$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - 4y = -9 \end{cases}$$
. Вместо това е

възможно да се запише уравнението на всички прави, минаващи през тази точка (т.н. сноп прави) без да се определят координатите на точката. След това търсената права е права от този сноп прави, чиито ъглов коефициент е равен на -4.

Ако точката $M(x; y)$ е пресечна точка на правите
$$\begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0 \\ x - 4y + 9 = 0 \end{cases}$$
, тя е решение на

всяко от уравненията в системата и затова при всички λ и μ

$$\lambda(3x + 2y - 1) + \mu(x - 4y + 9) = 0,$$

$$(3\lambda + \mu)x + (2\lambda - 4\mu)y - \lambda + 9\mu = 0$$

$$k = -\frac{3\lambda + \mu}{2\lambda - 4\mu} = -4, \quad 3\lambda + \mu = 4(2\lambda - 4\mu), \quad 5\lambda - 17\mu = 0,$$

В последното равенство се полага λ например 17 и от уравнението се определя $\mu = 5$.

Уравнението на търсената права има вида:

$$17(3x + 2y - 1) + 5(x - 4y + 9) = 0 \Rightarrow$$

$$56x + 14y + 28 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$4x + y + 2 = 0.$$

Пример 1.20: Да се запише уравнението на права, която минава през точката $A(4; 3)$ и е перпендикулярна на правата $y - 2 = 0$.

Решение: Правата $y - 2 = 0$ има ъглов коефициент равен на $-\frac{0}{1} = 0$ и

е успоредна на абсцисната ос. Това означава, че търсената права е перпендикулярна на

абсцисната ос. Вертикалните прави имат уравнение $x = x_0$. Понеже търсената

права минава през точката $A(4; 3)$, уравнението ѝ има вида $x = 4$.

7. Уравнение на права през две зададени точки

Нека са дадени две различни точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Те напълно определят правата AB . Лесно се вижда (с проверка), че координатите на точките удовлетворяват уравнението:

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$$

Действително, за точката A :

$$(x_1 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_1 - y_1)(x_2 - x_1) = 0 - 0 = 0.$$

За точката B се получава аналогично твърждение:

$$(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_2 - x_1) = 0.$$

Двете точки принадлежат на посочената права. Правата, определена от двете точки е единствена и затова намереното уравнение е уравнение на права през две зададени точки. На това уравнение може да се придаде симетричен вид, ако правата не е успоредна на координатните оси:

Пример 1.21: Разходите за производство на 20 изделия са 2 хил. лв., а за производство на 60 изделия – 4 хил.лв. Да се определят разходите за 50 изделия (предполага се, че разходите са подчинени на линейния закон).

Решение: Нека са въведени означенията: x – брой на изделията, y – количеството на разходите. От наличните данни могат да се запишат координатите на две точки M

$(20; 2)$ и $N(60; 4)$.

тези две точки има вида:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

функция, която минава през

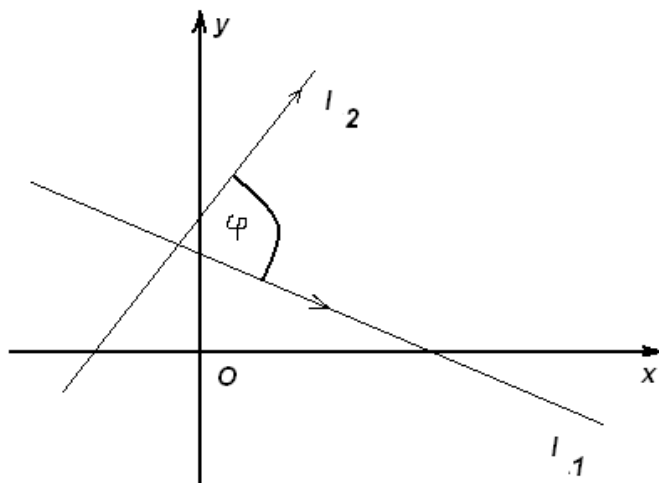
$$\frac{x - 20}{60 - 20} = \frac{y - 2}{4 - 2}, \quad \frac{x - 20}{40} = \frac{y - 2}{2}, \quad \frac{x - 20}{20} = \frac{y - 2}{1},$$

$$x - 20 = 20y - 40, \quad y = \frac{x + 20}{20}.$$

При $x=50$
$$y(50) = \frac{50+20}{20} = 3.5 \text{ хил.лв.}$$

1.8. Ъгъл между две прави

За всяка права линия, която не е успоредна на оста Oy , може да се въведе положителна посока, съответстваща на нарастването на абсцисата.



фиг.1.21

Под ъгъл между две прави се разбира ъгълът, на който трябва да се завърти първата права до съвпадането на положителната ѝ посока с тази на втората права.

Нека са дадени две прави, които не са вертикални и имат уравнения

$$l_1: y = k_1 x + n_1$$

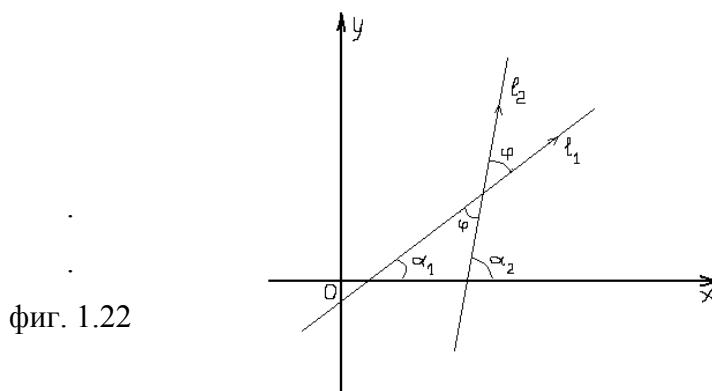
$$l_2: y = k_2 x + n_2$$

Ще бъде показано, че ъгълът между първата и втората права се определя чрез формулата:

Нека ъгълът между правите е φ ,
$$tg \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$
 ъгъл α_1 с оста Ox , втората

права сключва ъгъл α_2 с оста Ox , $k_1 = tg \alpha_1$, $k_2 = tg \alpha_2$, /фиг. 22/.

Тогава $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$, $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Изчислява се тангенс от двете части на това равенство.



$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

Пример 1.22: Даден е правоъгълен равнобедрен триъгълник ABC с хипотенуза $2x - 3y + 1 = 0$ и прав ъгъл при върха $C(3; -1)$. Да се определят уравненията на катетите на триъгълника.

Решение: $k_{AB} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$, ,

$$1 + \frac{2k}{3} = k - \frac{2}{3}, \quad \frac{k}{3} = \frac{5}{3}, \quad k = 5$$

Уравнението на единия катет е

$$y - (-1) = 5(x - 3), \quad 5x - y - 16 = 0.$$

$$\frac{\frac{2}{3} - k'}{1 + \frac{2k'}{3}} = 1, \quad k = -\frac{1}{5}.$$

Уравнението на другия катет е:

$$y - (-1) = -\frac{1}{5}(x - 3) \quad , \quad 5y + 5 = -x + 3,$$

$$x + 5y + 2 = 0.$$

За намиране на условие за перпендикулярност се използва формулата за котангенса от ъгъла между две прави

$$\cotg \varphi = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1}.$$

Оттук веднага следва условието за перпендикулярност на две прави:

$$l_1 \perp l_2 \iff k_1 k_2 = -1.$$

Пример 1.23: Да се запише уравнението на права, която минава през точката А $(-2 : 4)$ и е перпендикулярна на правата с уравнение:

$$\text{а) } 3x - 5y + 2 = 0; \qquad \text{б) } x - 3 = 0; \qquad \text{в) }$$

$$y + 6 = 0.$$

Решение: а) Уравнението на търсената права се записва във вида:

$$y - 4 = k(x + 2).$$

Ъгловият коефициент се определя от условието за перпендикулярност.

$$kk_1 = -1, \quad k_1 = -\frac{3}{-5} = \frac{3}{5}, \quad k \frac{3}{5} = -1, \quad k = -\frac{5}{3},$$

$$y - 4 = -\frac{5}{3}(x + 2), \quad 3y - 12 = -5x - 10,$$

$$5x + 3y - 2 = 0.$$

б) Дадената права $x - 3 = 0$ е вертикална, нейната перпендикулярна права е хоризонтална и има ъглов коефициент равен на нула. Уравнението ѝ е:

$$y - 4 = 0(x + 2), \quad y - 4 = 0.$$

в) Дадената права $y + 6 = 0$ е хоризонтална, нейната перпендикулярна права е вертикална и няма ъглов коефициент. Уравнението ѝ е: $x = -2$.

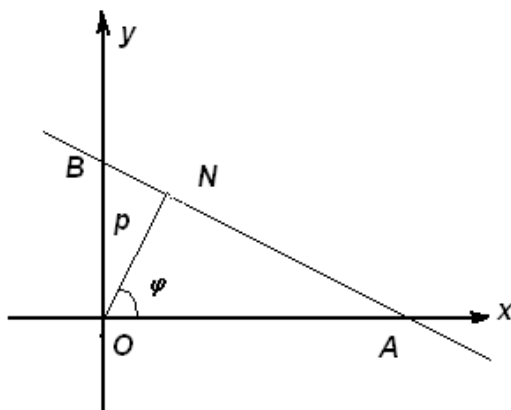
1.9. Нормално уравнение на права линия

Уравнението $ax + by + c = 0$ се нарича нормално уравнение на права, ако

$$a^2 + b^2 = 1 \text{ и } c \leq 0.$$

При $c=0$ уравнението не е определено еднозначно. Нека $c \neq 0$. Ще бъде показано, че уравнението на правата може да бъде записано във вида:

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$$



Всяко уравнение $ax + by + c = 0$ може да се приведе в нормален вид.

За тази цел е достатъчно да се раздели на $\pm \sqrt{a^2 + b^2}$ като знакът пред радикала се избира противоположен на знака на свободния член c .

Уравнението

$$\frac{ax + by + c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

е нормално уравнение на

1.10. Разстояние от точка до права

Нека правата е зададена със своето нормално уравнение

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0,$$

където параметърът φ представлява ъгълът, който нормалата ON към правата сключва с оста Ox , p – представлява разстоянието от координатното начало до правата ($p \geq 0$). Полуравнината

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p < 0$$

съдържа координатното начало. За всички точки $(x_0; y_0)$ от тази полуравнина се полага

$$\delta = -d,$$

където d е абсолютното разстояние от точката $(x_0; y_0)$ до правата. За точките

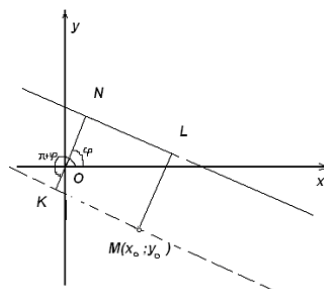
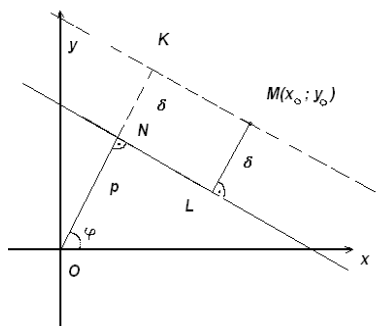
$(x_0; y_0)$ от полуравнината $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p > 0$ се полага

$$\delta = d,$$

където d е абсолютното разстояние от точката $(x_0; y_0)$ до правата. Числото δ се

нарича **ориентирано разстояние**. За всяка точка $(x_0; y_0)$ е в сила

$$\delta = x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - p$$



Нека разстоянието от точката $M(x_0; y_0)$ до правата е равно на δ . Ако

$p + \delta \geq 0$ правата с уравнение

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - (p + \delta) = 0$$

е успоредна на дадената и се намира на разстояние $p + \delta \geq 0$ единици от

координатното начало и затова минава през точката $M(x_0; y_0)$, т.е.

$$x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - (p + \delta) = 0.$$

От полученото равенство се определя δ :

$$\delta = x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - p.$$

Случаят $p + \delta < 0$ води до същия резултат.

Ако уравнението на правата не е записано в нормален вид, лявата му част се разделя на нормиращия множител $\pm \sqrt{a^2 + b^2}$ със знак, противоположен на знака на свободния член c и в получения израз се заместват координатите на точката.

$$\delta = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Пример 1.24: Дадена е правата $6x + 8y - 5 = 0$. Да се определи в коя полуравнина лежи точката $M(3; -1)$. В същата полуравнина да се намери права, успоредна на дадената, която се намира на 2 единици от дадената.

Решение: Определя се ориентираното разстояние от точката до дадената права

$$\delta = \frac{6 \cdot 3 + 8(-1) - 5}{+ \sqrt{36 + 64}} = \frac{5}{10} = 0.5 > 0.$$

Следователно координатното начало и точката M лежат в различни полуравнини.

Точката M лежи в полуравнината $6x + 8y - 5 > 0$.

За определяне на правата се записва формулата за разстояние и се приравнява на +2:

$$\frac{6x + 8y - 5}{+ \sqrt{36 + 64}} = 2, \quad 6x + 8y - 25 = 0.$$

2. КРИВИ ОТ ВТОРА СТЕПЕН

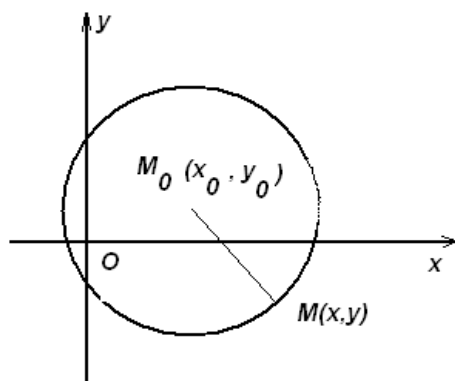
Общият вид на една крива от втора степен е:

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

2.1. Окръжност

Геометричното място на точки $M(x; y)$ в равнината, които са **на равни** разстояния от една точка $M_0(x_0; y_0)$, наречена **център**, се нарича **окръжност**.

Уравнението на окръжността се извежда от дефиницията $|MM_0| = R$.



$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R,$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Уравнението представлява **уравнение на окръжност с център в точката**

$M_0(x_0; y_0)$ **и радиус R .**

Едно общо уравнение на крива от втора степен представлява уравнение на окръжност, ако коефициентите пред квадратите са равни, а коефициента пред произведението xy е равен на нула.

Пример 2.3: Да се определят точките $M(x; y)$ от равнината, за които

$$2|\overline{AM}| \leq |\overline{MB}|, \text{ където } A(3; -3) \text{ и } B(6; 9).$$

Решение:

$$2|\overline{AM}| = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2} \leq \sqrt{(x-6)^2 + (y-9)^2} = |\overline{MB}|$$

,

$$4[(x-3)^2 + (y+3)^2] \leq (x-6)^2 + (y-9)^2,$$

$$4x^2 - 24x + 36 + 4y^2 + 24y + 36 \leq x^2 - 12x + 36 + y^2 - 18y + 81$$

,

$$3x^2 - 12x + 3y^2 + 42y - 45 \leq 0,$$

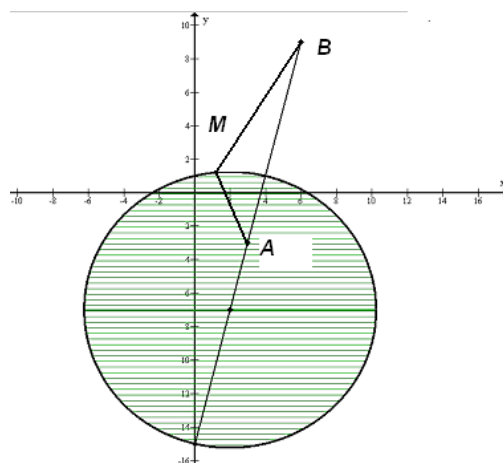
$$x^2 - 4x + y^2 + 14y - 15 \leq 0,$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 \leq 2 + 1 + 15$$

$$(x-2)^2 + (y+7)^2 \leq (2\sqrt{17})^2.$$

Възможните положения на точките M се намират в кръг с център точката $Q(2; -7)$ и

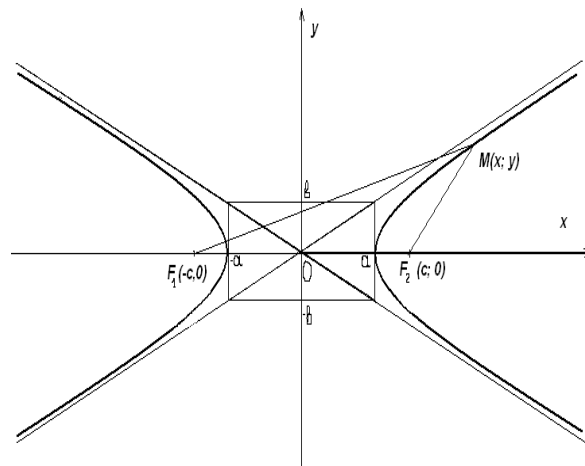
радиус $R = 2\sqrt{17}$



2.2. Хипербола

Хипербола е геометричното място на точки M в равнината, за които абсолютната стойност от разликата на разстоянията до две фиксирани точки F_1 и F_2 , наречени *фокуси*, е постоянна величина $2a$, по-малка от *фокусното разстояние* $|F_1F_2|$ - т.е. $2a < |F_1F_2| = 2c$.

За намиране на точките от геометричното място се въвежда координатна система. За да се получи по-опростен вид на зависимостта, нека за абсцисна ос Ox е правата, която минава през фокусите F_1 и F_2 . За координатно начало O се избира



средата на отсечката F_1F_2 , положителната посока се избира от O към F_2 . Оста Oy е перпендикулярна на Ox и сключва с нея ъгъл 90° . Нека точката $M(x; y)$ е точка от хиперболата и координатите на фокусите са $(-c, 0)$ и $(c, 0)$. Тогава

$$\left| |MF_1| - |MF_2| \right| = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a.$$

Повдигат се на квадрат двете страни на това равенство.

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad :4$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Повдигат се на квадрат двете страни на това равенство.

$$c^2 x^2 - 2a^2 cx + a^4 = a^2 x^2 - 2a^2 cx + a^2 c^2 + a^2 y^2,$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Прави се полагане като се въвежда параметър b

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad (2a < 2c \text{ - по условие, } c^2 - a^2 > 0).$$

За уравнението на хиперболатата се получава:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2, \quad : a^2 b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

Полученото уравнение се нарича **канонично уравнение на хиперболатата**. Оси на симетрия на кривата са двете координатни оси, а координатното начало е център на симетрия. Хиперболатата пресича само абсцисната ос в точките $(-a, 0)$ и $(a; 0)$. Тя

има две **асимптоти** $y = \pm \frac{b}{a} x$ (диагоналите на правоъгълника със страни $2a$ и

2b).

Разликата

$y_{\text{хиперболатата}} - y_{\text{асимптотата}}$

=

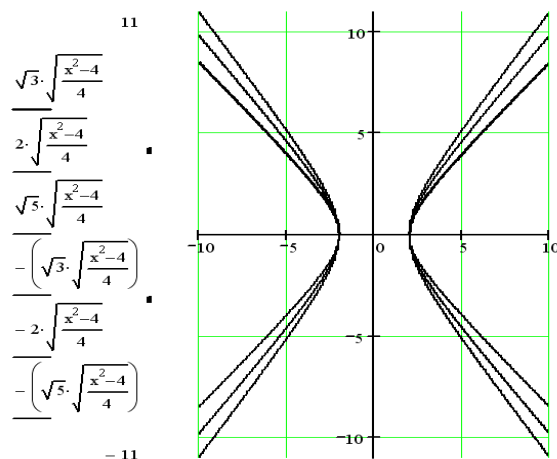
$$\pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \left(\pm \frac{b}{A} x \right) = \pm \frac{b}{a} \frac{(-a^2)}{\sqrt{x^2 - a^2} \pm x} \rightarrow 0$$

клони към нула при нарастването на абсолютната стойност на x . Това показва, че клоновете на хиперболата клонят към асимптотите ѝ.

Отношението $\mathcal{E} = \frac{c}{a}$ се нарича **ексцентрицитет** и е по-голямо от единица за

хиперболата.

Ако параметрите a и b са равни, хиперболата се нарича равнораменна. Ако b нараства при постоянно a , разширява се ъгълът между асимптотите.



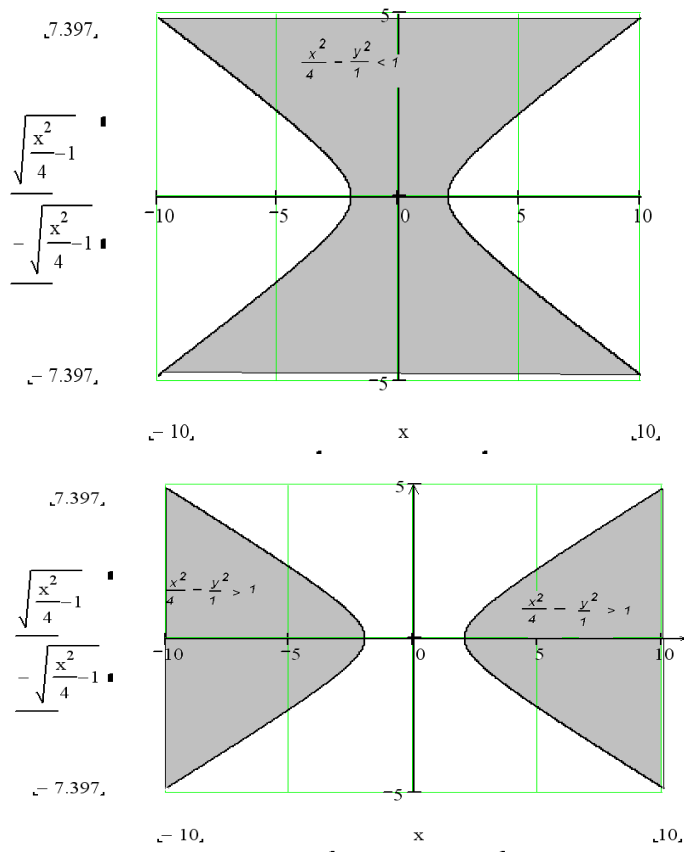
фиг. 2.5

На фиг. 2.5 са представени графиките на хиперболите

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1, \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1, \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

Редът, в който те са разположени в първия квадрант, съответства на задаването на техните аналитични изрази.

Всяка хипербола разделя равнината на три области. На фиг. 2.6 и 2.7 са дадени характеристиките на тези области.



Пример 2.4: В градовете A и B , отстоящи един от друг на 400 км., има университети, в които годишните такси за обучение са 400 лв. и 500 лв. съответно. Средните годишни транспортни разходи за студент от друг град са средно 1 лв. за 1 км. Да се определи множеството от населени места, за които общите разходи (транспортни + такса за обучение) са по-малки при обучение в град A , отколкото в град B .

Решение: Въвежда се координатна система. Оста Ox съвпада с OB , където O е среда на AB , оста Oy е перпендикулярна на Ox . За мерна единица се избира 100 km. Координатите на точките A и B са съответно равни на: $(-2;0)$, $(2;0)$. Общите разходи за един студент от населеното място $M(x; y)$ да учи в град A са:

$$u(M, A) = 400 + 100\sqrt{(x+2)^2 + y^2}.$$

Общите разходи за един студент от населеното място $M(x; y)$ да учи в град B са:

$$u(M, B) = 500 + 100\sqrt{(x-2)^2 + y^2}.$$

За да се определи множеството от населени места M , за които за студент от това населено място е по-изгодно да се обучава в град A вместо в град B , се дава с неравенството:

$$u(M, A) \leq u(M, B),$$

$$400 + 100\sqrt{(x+2)^2 + y^2} \leq 500 + 100\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$100\sqrt{(x+2)^2 + y^2} \leq 100 + 100\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} \leq 1 + \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$8x - 1 \leq 2\sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2}.$$

Неравенството се изпълнява за всички точки с абсциса по-малка от $1/8$. За останалите

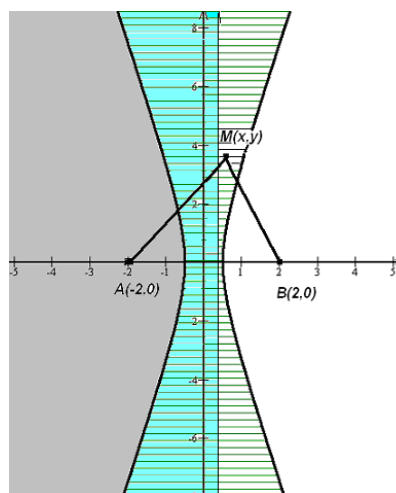
точки $\left(x \geq \frac{1}{8}\right)$ се повдига на квадрат неравенството и се получава:

$$64x^2 - 16x + 1 \leq 4x^2 - 16x + 16 + 4y^2,$$

$$60x^2 - 4y^2 \leq 15$$

$$\frac{x^2}{1/4} - \frac{y^2}{15/4} \leq 1.$$

Решенията са разположени в заштрихованата част на фиг. 2.8. Към решенията принадлежат всички точки, които лежат отляво на десния клон на хиперболата.



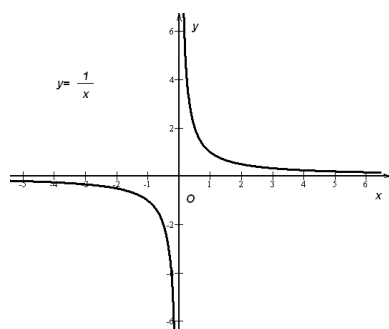
фиг. 2.8

Запознаването с хиперболата на читателя започва от училищния курс. Обратно

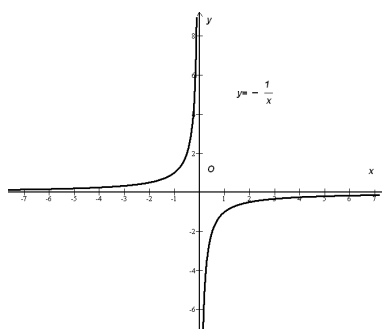
пропорционалната зависимост $y = \frac{1}{x}$ представлява *равнораменна хипербола*.

Нейните две основни графики (фиг.2.9 и фиг. 2.10) са основа за построяване на

графиката на общата *дробно линейна функция* $y = \frac{ax + b}{cx + d}$.



фиг. 2.9



фиг.2.10

За да се разбере, че зависимостта $y = \frac{1}{x}$ представлява хипербола, достатъчно е да се

въведат нови координатни оси по формулите (старите се завъртват на 45°):

$$x = x' - y' \text{ и } y = x' + y'.$$

Тогава уравнението $xy - 1 = 0$ преминава в $x'^2 - y'^2 = 1$, което е уравнение на хиперболата.

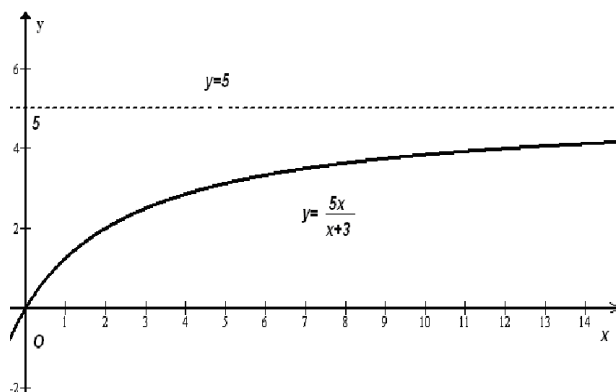
Дробно линейната функция често се използва за модел в икономиката.

Торнквист успешно използва функцията $y = \frac{ax}{x + b}$, $x \geq 0$ (фиг. 2.11) за

моделиране на потреблението на стоки от първа необходимост при доход от X

лв. Тук е използвано, че потреблението на стоки от първа необходимост има насищане,

моделът $y = \frac{ax}{x+b}$ също има насищане- хоризонтална асимптота $y = a$.



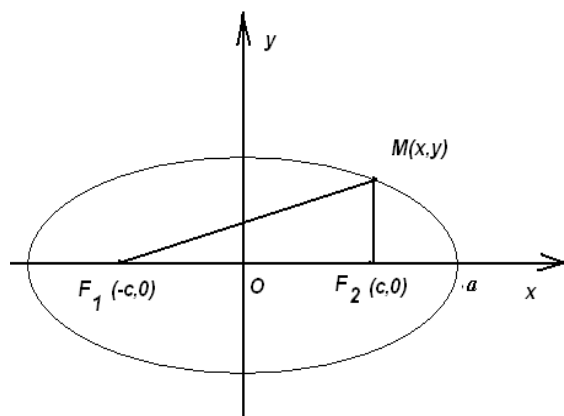
фиг.2.11

2.3. Елипса

Елипса се нарича геометричното място от токи в равнината, за които **сумата** от разстоянията до две постоянни точки, наречени **фокуси**, е постоянна величина $2a$, където $2a > F_1 F_2$ - **фокусното разстояние**.

За намиране уравнението на елипсата се въвежда координатна система. За да се получи по-опростен вид на зависимостта, се избира за ос Ox права, която минава през фокусите F_1 и F_2 . За координатно начало O се избира средата на отсечката $F_1 F_2$, положителната посока се избира от O към F_2 . Оста Oy е перпендикулярна на Ox и

сключва с нея ъгъл 90° . Нека точката $M(x; y)$ е точка от елипсата, координатите на фокусите са $(-c, 0)$ и $(c, 0)$. Тогава (фиг. 2.12):



$$|MF_1| + |MF_2| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a.$$

Повдигат се на квадрат двете страни на това равенство.

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad :4$$

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Повдигат се на квадрат двете страни на това равенство.

$$c^2 x^2 - 2a^2 cx + a^4 = a^2 x^2 - 2a^2 cx + a^2 c^2 + a^2 y^2,$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Прави се полагане като се въвежда параметър b по формулата:

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad (2a > 2c \text{ - по условие, } a^2 - c^2 > 0).$$

За уравнението на елипсата се получава:

$$-b^2 x^2 - a^2 y^2 = -a^2 b^2, \quad :(-a^2 b^2)$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Полученото уравнение се нарича **канонично уравнение на елипсата**. Оси на симетрия на кривата са двете координатни оси, а координатното начало е център на симетрия.

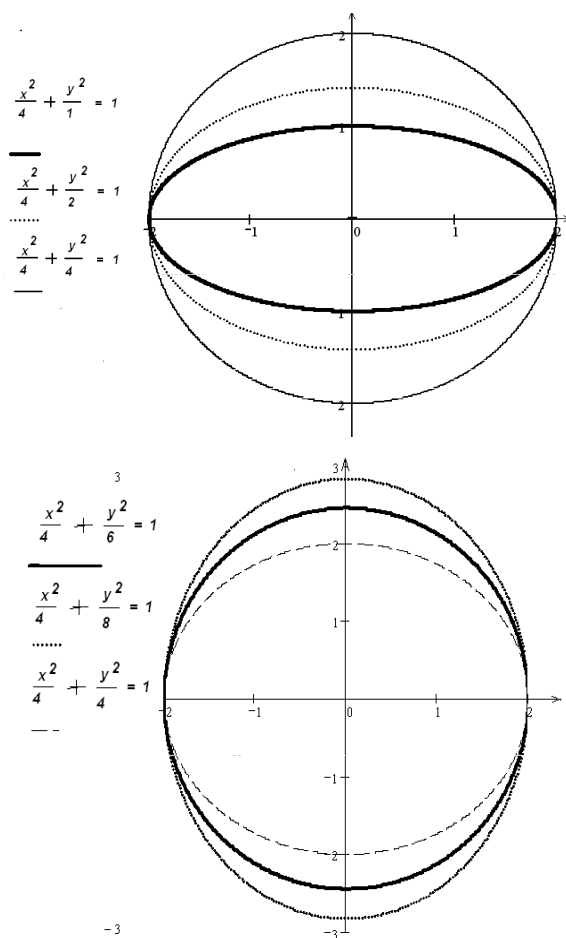
Параметрите a и b се наричат **голяма и малка полуос на елипсата**.

Пресечните точки на елипсата с координатните оси са точките: $(a; 0)$, $(0; b)$, $(-a; 0)$ и

$(0; -b)$. Отношението $\varepsilon = \frac{c}{a}$ се нарича **ексцентрицитет** и е по-малко от единица за

елипсата $\left(\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < \frac{a}{a} = 1 \right)$. При $\varepsilon = 0$ елипсата преминава в окръжност.

При тези означения $a \geq b$. При $a < b$ кривата е елипса, но фокусите ѝ се намират на оста Оу (вж. фиг. 2.13 и 2.14).



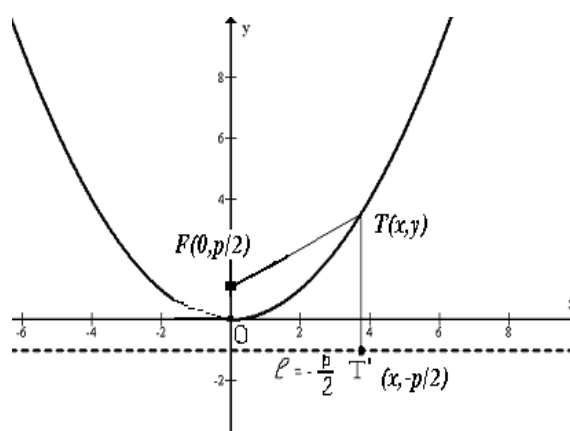
Елипсата разделя равнината на две области:

едната – **вътре** в елипсата, която се характеризира с връзката $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$,

втората, която е **вън** от елипсата, се описва с неравенството $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$.

2.4. Парабола

Парабола се нарича геометричното място на точки в равнината, които са на **равни** разстояния от една фиксирана точка, наречена **фокус** F и от една права, наречена **директриса**.



фиг. 2.15

При извеждане на каноничното уравнение на параболата се въвежда координатна система с координатното начало O - среда на перпендикуляра (разстоянието) от фокуса към директрисата. Като за ос Ox се избира права, успоредна на директрисата (разполовяваща разстоянието от фокуса до директрисата). За ос Oy се избира правата, която минава през фокуса и е перпендикулярна на директрисата. Посоката е от директрисата към фокуса. Ако $T(x, y)$ е точка от параболата, то

$$|TF| = |TT'|,$$

където T' е проекцията на точка T върху директрисата. Ако се приеме, че $\overline{OF} = p$,

координатите на точките са: $O(0;0)$, $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, $T'\left(x; -\frac{p}{2}\right)$, уравнението на

директрисата е: $y = -\frac{p}{2}$.

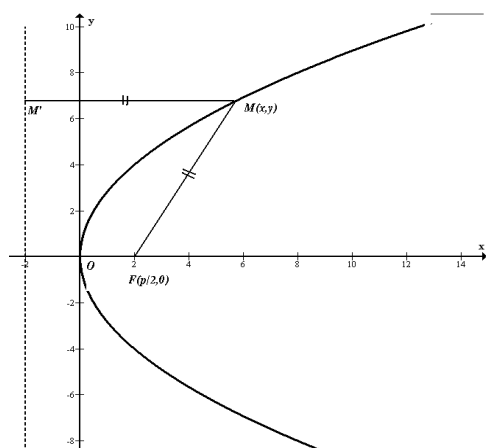
$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \left|y + \frac{p}{2}\right|,$$

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4},$$

$$\boxed{x^2 = 2py}$$

Това уравнение се нарича **канонично уравнение на параболата** с ос на симетрия ординатната ос.

Ако оста на симетрия е абсцисната ос, каноничното уравнение на параболата се извежда по аналогичен начин, в този случай директрисата е успоредна на ординатната ос (вж. фиг. 2.16)



фиг.2.16

$$|M'M| = |MF|$$

$$\left| -p/2 - x \right| = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x \right)^2 + y^2}$$

$$2px = y^2.$$

Уравнението на директрисата е $x = -\frac{p}{2}$.

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИЯ НА ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

4. ФУНКЦИЯ. ОБРАТНА ФУНКЦИЯ

4.1. Функция - определение. Сложна функция

Нека са зададени две множества X и Y . Ако на всеки елемент $x \in X$ по определено правило f може да се съпостави точно един елемент $y \in Y$, се казва, че е зададена **функцията** $y = f(x)$. Тук x се нарича **аргумент**, а y - **стойност на функцията**. Множеството D_f , върху което е зададена функцията (където се изменя аргументът), се нарича **дефиниционно множество на функцията**. В този случай $D_f = X$. Множеството от стойности,

$$R_f = \{y \in Y : y = f(x), x \in D_f = X\} \subset Y$$

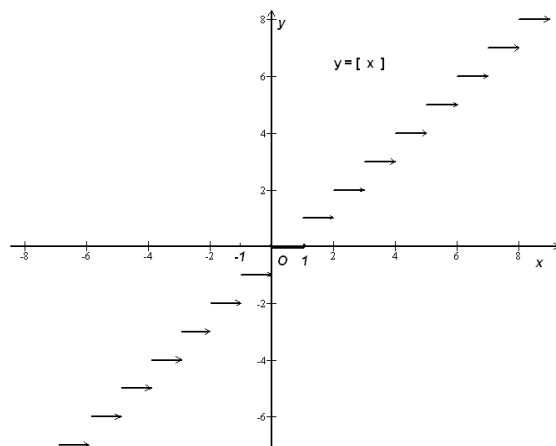
които приема y , когато $x \in D_f$, се нарича **множество на стойности на функцията** или **област на изменение на функцията**.

Правилото f може да бъде зададено аналитично (чрез формула), словесно, таблично, графично.

$$y = |x| = \begin{cases} -x, & \text{ако } x < 0 \\ x, & \text{ако } x \geq 0 \end{cases}$$

$$y = x^2 - 4, D_y = (-\infty; +\infty), R_y = [-4; +\infty).$$

Пример 4.1: Функцията **цяла част** се отбелязва със средни скоби от аргумента си: $y = [x]$. На всяка стойност на своя аргумент x тя съпоставя най-голямото цяло число n , което не превъзхожда x . Например $[2,7] = 2$, $[-2,7] = -3$, $[3] = 3$, $[-3] = -3$, $[0] = 0$.



За функцията цяла част са в сила свойствата:

$$\text{а) } [x + m] = [m] + [x] = m + [x], \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } [-x] = -[x] - 1, \quad x \notin \mathbb{Z}.$$

Пример 4.2: Функцията на **Дирихле** се задава словесно с правилото:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \text{ е ирационално число} \\ 1, & \text{ако } x \text{ е рационално число} \end{cases}.$$

Това е пример за функция, която се задава словесно. Функцията има редица особености като прекъснатост във всяка точка, няма интервал на монотонност, графиката на тази функция не може да бъде нарисувана, няма интеграл на Риман, но има интеграл на Лебег, всяко положително рационално число изпълнява дефиницията за периодичност, но функцията няма период. Функцията може да бъде зададена с формула

$$D(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} [\cos(\pi m! x)]^{2n},$$

но за използването ѝ трябва да се използват безкрайно много операции. Функцията е граница от непрекъснати функции. Тя е източник на редица контрапримери. Особеностите на тази функция ще бъдат обект на внимание в следващите теми.

Пример 4.3: Функционалната връзка между x и y , зададена посредством равенството

$$y^3 + 2^y - x = 0$$

определя неявно функцията $y(x)$. На всяка стойност на x от горното равенство може да се покаже, че съществува единствена стойност y , за която да се изпълнява равенството.

x	-2	0	1	2
y	-1.338	-0.827	0.0001249	0.712

Ако са зададени две функции $y = f(x)$, $x = g(t)$ и

$R_g \subset D_f$ при $t \in D_g$ може да се образува функцията

$y = f(g(t))$. Тази функция се нарича **сложна** функция. Например от функциите

$y = \sin x$ и $x = 2t$ може да се получи функцията $y = \sin 2t$.

Пример 4.4: Нека са дадени функциите $y = f(x) = \frac{3x+2}{4x-3}$,

$x = \varphi(t) = \frac{3t+2}{4t-3}$. Да се образува сложната функция $f(g(t))$.

$$\text{Решение: } f(g(t)) = \frac{3 \frac{3t+2}{4t-3} + 2}{4 \frac{3t+2}{4t-3} - 3} = \frac{9t+6+8t-6}{12t+8-12t+9} = \frac{17t}{17} = t.$$

4.2. Дефиниционно множество на функция

При задаването на функцията се посочва дефиниционното ѝ множество. Ако то не е посочено, за дефиниционно множество е прието да се счита максималното множество, в което са дефинирани всички операции, участващи в задаването на

функцията. Например функцията $f(x) = \frac{1}{A(x)}$ не е дефинирана за тези

стойности, за които $A(x) = 0$. За функцията $f(x) = \sqrt{A(x)}$, намирането

на дефиниционното множество включва и изискването $A(x) \geq 0$. Същото изискване се отнася за корените с четен показател. За функцията $f(x) = \log_a A(x)$, намирането на дефиниционното множество включва и изискването $A(x) > 0$. Ако основата на логаритъма съдържа променливата x , като например $f(x) = \log_{B(x)} A(x)$, към изискванията се добавят

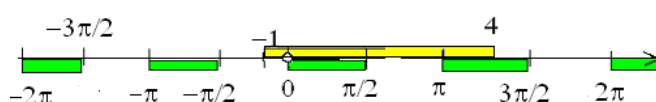
$$\left| \begin{array}{l} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ B(x) \neq 1. \end{array} \right.$$

Пример 4.5: Да се определи дефиниционното множество на функцията

$$y = \sqrt{\sin 2x} + \log_{1+x} (4-x).$$

Решение:

$$\left| \begin{array}{l} \sin 2x \geq 0 \\ 4-x > 0 \\ 1+x > 0 \\ 1+x \neq 1 \end{array} \right| , \left| \begin{array}{l} 2k\pi \leq 2x \leq \pi + 2k\pi \\ x < 4 \\ x > -1 \\ x \neq 0 \end{array} \right. , \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$



$$x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right] \cup [\pi; 4).$$

4.3. Област на изменение на функция. Графика на функция

Определянето на множеството от стойности, които една функция приема е сериозна задача, която е свързана с изследването на функцията. Тук частично ще бъде даден отговор на тази задача за някои функции. На първо място ще бъде разгледана функцията $y = \sin x$. Тази функция е определена за всяко реално число и приема

стойности от -1 до +1. Същото се отнася за функцията $y = \cos x$,
 $x \in (-\infty; \infty)$, $y \in [-1; 1]$.

Пример 4.6: Да се определи областта на изменение на функцията
 $y = 4\sin x - 3$.

Решение: От дадената връзка между x и y се определя $\sin x$.

$$\sin x = \frac{y + 3}{4}.$$

$$-1 \leq \frac{y + 3}{4} \leq 1 \Rightarrow -4 \leq y + 3 \leq 4 \Rightarrow -7 \leq y \leq 1.$$

$$R_y = [-7; 1].$$

Пример 4.8: Да се определи областта на изменение на функцията

$$y = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Решение: Тази функция е дефинирана за всяко x . Определя се x от функцията:

$$y + yx^2 = 2x,$$

$$yx^2 - 2x + y = 0.$$

За това квадратно уравнение се знае, че то има решение. Това ще бъде така, ако

$$D = 4 - 4y^2 \geq 0,$$

$$(1 - y)(1 + y) \geq 0.$$

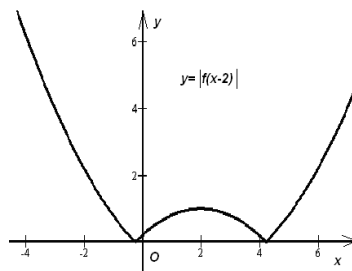
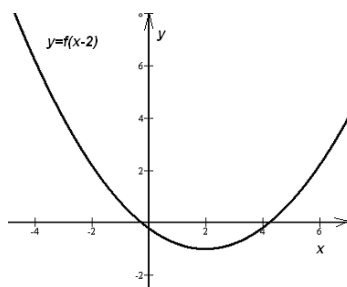
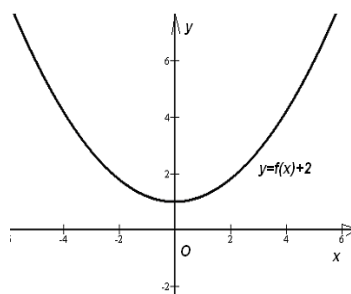
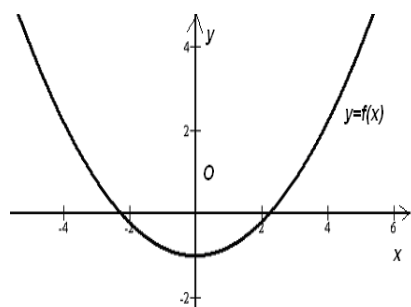
Решенията на неравенството са: $y \in [-1; 1]$. $R_y = [-1; 1]$.

Графика на една функция $y = f(x)$ се нарича множеството от точки от

вида $(x; f(x))$, $x \in D_f$. Важни точки от графиката на функцията са

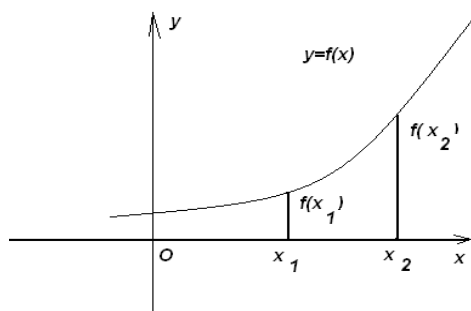
пресечните ѝ точки с координатните оси. Графиката пресича ординатната ос в точката $(0; f(0))$. Графиката пресича абсцисната ос в точките, които са корени на уравнението $f(x) = 0$.

Ако се познава графиката на функцията $y = f(x)$, лесно се построяват следните графики: $y = f(x) + 2$, $y = f(x - 2)$, $y = |f(x - 2)|$.



4.4. Монотонност и екстремум на функция

Една функция се нарича **растяща**, ако за всеки две стойности на аргумента от дефиниционното ѝ множество, стойностите на функцията запазват посоката на неравенството между аргументите, т.е. ако $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (фиг. 4.6).



Примери за растящи¹ функции:

$$y = kx + n, \quad k > 0; \quad y = x^{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$y = \sqrt{x}, \quad x \in [0; \infty); \quad y = \sqrt[3]{x};$$

$$y = a^x, \quad a > 1; \quad y = \log_a x, \quad a > 1;$$

$$\operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$y = \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right], \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$y = \cos x, \quad x \in [\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ако две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ са растящи, функцията

$$af(x) + bg(x) + c$$

е растяща при $a > 0$ и $b > 0$.

Ако две функции $y = f(x)$ и $x = g(t)$ са растящи, сложната функция

$$y = f(g(t))$$

също е растяща: $t_1 < t_2 \Rightarrow x_1 = g(t_1) < g(t_2) = x_2$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(g(t_1)) < f(g(t_2))$. Например

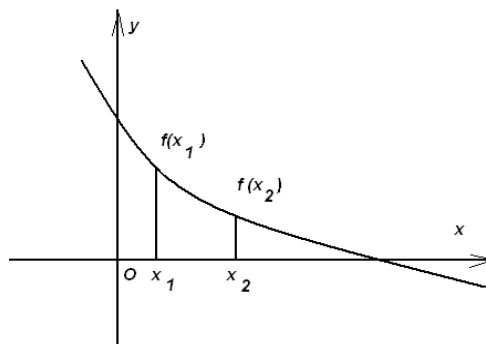
$$y = \sqrt{1 + x^3}.$$

Една функция се нарича **намаляваща**, ако за всеки две стойности на аргумента от дефиниционното ѝ множество, стойностите на функцията заменят неравенството

¹ По-нататък, след разглеждането на теоремата на Лагранж, ще бъдат дадени ефективни критерии за определяне интервалите на растене и намаляване на функциите.

между аргументите на противоположното, т.е. ако $x_1 < x_2 \Rightarrow$

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ (фиг. 4.7).}$$



фиг. 4.7

Ако една функция $y = f(x)$ е растяща, нейната противоположна функция

$$y = -f(x)$$

е намаляваща.

Ако две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ са намаляващи, функцията

$$af(x) + bg(x) + c$$

е намаляваща при $a > 0$ и $b > 0$.

Ако в сложната функция $y = f(g(t))$ едната от функциите е растяща, а другата намаляваща, сложната функция е намаляваща. Например, ако f е растяща, а g е

намаляваща то: $t_1 < t_2 \Rightarrow x_1 = g(t_1) > g(t_2) = x_2$

$$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(g(t_1)) < f(g(t_2)).$$

Ако и двете функции в сложната функция $y = f(g(t))$ са намаляващи, сложната функция е растяща.

Примери за намаляващи функции:

$$y = kx + n, \quad k < 0; \quad y = -x^{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$y = -\sqrt{x}, \quad x \in [0; \infty); \quad y = -\sqrt[3]{x};$$

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty); \quad y = a^x, \quad 0 < a < 1;$$

$$y = \log_a x, \quad 0 < a < 1;$$

$$\cotg x, \quad x \in (k\pi; \pi + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$y = \sin x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right], \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$y = \cos x, \quad x \in [2k\pi; \pi + 2k\pi], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.9: Да се докаже, че функцията

$$y = \frac{12}{\sqrt{x^3 + 3x + 4}}, \quad x \in [0; 5]$$

е намаляваща и да се намери множеството от стойности, които функцията приема.

Решение: Функциите x^3 и $3x + 4$ са растящи и значи функцията

$x^3 + 3x + 4$ е растяща. Понеже функцията $y = \sqrt{x}$ е растяща, то и

сложната функция $\sqrt{x^3 + 3x + 4}$ е растяща. Понеже функцията $y = \frac{12}{x}$ е

намаляваща, а $\sqrt{x^3 + 3x + 4}$ е растяща, то функцията

$$y = \frac{12}{\sqrt{x^3 + 3x + 4}}, \quad x \in [0; 5]$$

е намаляваща. Множеството от стойности на една намаляваща функция, зададена в интервала $[a; b]$, е интервала $[$

$y(b); y(a)$]. В конкретния случай множеството от стойности е $[1; 6]$.

За растящите и намаляващите функции се казва също, че са съответно **строго растящи** и **строго намаляващи функции**. Тези функции се наричат още и **монотонни функции**. Когато в дефинициите за растяща и намаляваща функция се допуска и равенство, функциите се наричат **ненамаляващи** и **нерастящи** или монотонни. Ако трябва да се акцентира, че функцията не намалява, използва се термина **монотонно растяща функция**, а в случая, когато функцията не нараства, използва се термина **монотонно намаляваща функция**.

Освен растящи, намаляващи и монотонни има функции, които не са нито растящи, нито намаляващи и следователно не са и монотонни.

Пример 4.10: $y = x^2$ има дефиниционно множество $(-\infty, \infty)$ и

$$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 > 0 \Rightarrow y(x_1) > y(x_2), \text{ но}$$

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow y(x_1) < y(x_2).$$

Следователно при $x \in (-\infty, 0)$ неравенствата са разнопосочни, а при

$x \in (0, \infty)$ еднопосочни – функцията не е монотонна.

Примери за функции, които не са монотонни:

$$y = x^{2n}, n \in \mathbb{N}; \quad y = ax^2 + bx + c, a \neq 0;$$

$$y = \frac{1}{x^2}, \quad x \in (-\infty; 0) \sqcup (0; \infty); \quad y = a^{-x^2}, 0 < a < 1;$$

$$y = \sin x, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad y = \cos x, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Една функция се нарича **растяща (монотонно растяща) в множеството X** , което е част от дефиниционното ѝ множество когато $\forall x_1, x_2 \in X$ от $x_1 < x_2$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Една функция се нарича **намаляваща (монотонно намаляваща) в множеството X** , което е част от дефиниционното ѝ множество когато

$$\forall x_1, x_2 \in X \text{ от } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Ако $y = f(x)$ е дефинирана в интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и $f(x_0) > f(x)$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ се казва, че функцията има **локален максимум** (или накратко **максимум**) в точката x_0 и $y_{max} = f(x_0)$, а ако $f(x_0) < f(x)$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ се казва, че функцията притежава **локален минимум** (или накратко **минимум**) в точката x_0 и $y_{min} = f(x_0)$. Казано по друг начин, ако е дефинирана в интервала

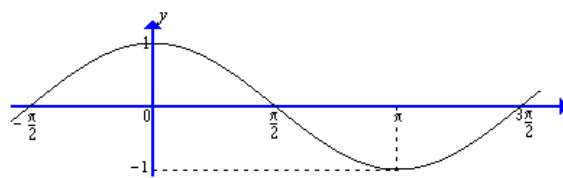
$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, функция $y = f(x)$ е в $(x_0 - \delta, x_0]$ монотонно растяща и в $[x_0, x_0 + \delta)$ е монотонно намаляваща, то в x_0 има локален максимум. Ако $y = f(x)$ е дефинирана в интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и в $(x_0 - \delta, x_0]$ функцията е монотонно намаляваща, а в $[x_0, x_0 + \delta)$ е монотонно растяща, то в т. x_0 има локален минимум. Когато една функция има локален минимум или локален максимум в някаква точка се казва още, че тя има **локален екстремум** в тази точка - последният термин обобщава двата случая без да уточнява за кой от тях става дума.

Пример 4.12: $y = \cos x$ е растяща в $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, а в $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ е

намаляваща - следователно в точката $x_0 = 0$ има локален максимум, който е

$$y_{max} = \cos 0 = 1;$$

$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ и растяща в



намаляваща в

$\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ - в

$x_1 = \pi$ има локален минимум $y_{min} = \cos \pi = -1$.

фиг. 4.8

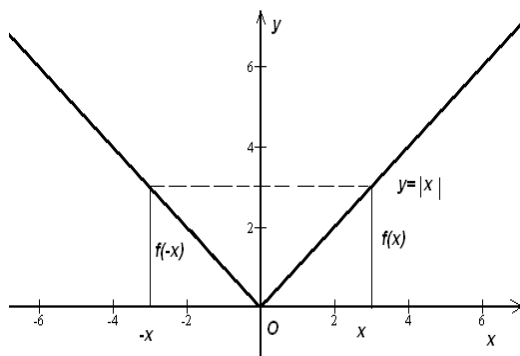
4.5. Четни и нечетни функции

В тази точка се счита, че дефиниционното множество на функцията е симетрично множество спрямо координатното начало.

Една функция $y = f(x)$ се нарича **четна**, ако за всяко $x \in D_f$ е изпълнено

$$f(-x) = f(x).$$

Графиката на една четна функция е симетрична спрямо ординатната ос. (вж. $y = |x|$)



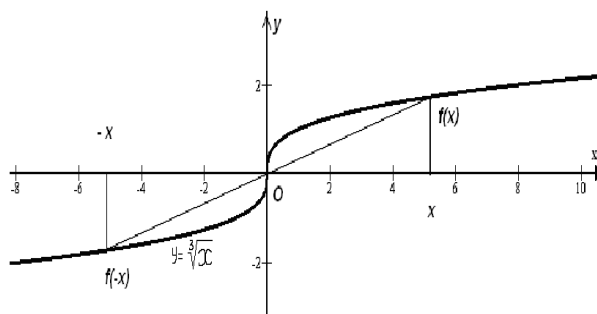
Ако в една сложна функция $y = f(g(x))$ вътрешната функция $g(x)$ е четна, сложната функция е четна. Сумата, разликата, произведението и частното на две четни функции е четна функция.

Четни функции са: $y = C$, $y = x^{2n}$, $n \in N$, $y = |x|$,
 $y = \cos x$.

Една функция $y = f(x)$ се нарича **нечетна**, ако за всяко $x \in D_f$ е изпълнено

$$f(-x) = -f(x).$$

Графиката на една нечетна функция е симетрична спрямо координатното начало O .



Сумата и разликата на две нечетни функции е нечетна функция.

Произведението и частното на две нечетни функции е четна функция. Произведението и частното на нечетен брой нечетни функции е нечетна функция. Ако в една сложна функция $y = f(g(x))$ вътрешната функция $g(x)$ и външната функция $f(x)$ са нечетни, сложната функция е нечетна. Ако в една сложна функция $y = f(g(x))$ вътрешната функция $g(x)$ е нечетна, а външната функция $f(x)$ е четна, сложната функция е четна.

Нечетни функции са: $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sin x$,

$y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$.

Пример 4.13: Да се докаже, че функцията $y = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$ е нечетна.

Решение:

$$y(-x) = \lg(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \lg\left(\frac{-x + \sqrt{x^2 + 1}}{1}\right) =$$

$$\begin{aligned}
& \lg \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \\
& = \lg \frac{(x^2 + 1) - x^2}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \lg \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \\
& \lg 1 - \lg(x + \sqrt{x^2 + 1}) = 0 - \lg(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -y(x).
\end{aligned}$$

Разгледаната функция y е нечетна.

Освен четни или нечетни функциите могат да бъдат и такива, които **не са нито четни, нито нечетни**. Графиките на такива функции не са симетрични относно координатното начало или относно ординатната ос.

Ако $f(x)$ е четна, а $g(x)$ е нечетна сумата им

$F(x) = f(x) + g(x)$ не е четна нито нечетна.

Функции, които не са четни нито четни: $y = x + x^2$, $y = a^x$,
 $y = \log_a x$.

Пример 4.15: Да се докаже, че функцията $y = \frac{x}{x-2}$ не е четна, нито нечетна.

Решение: $y(-x) = \frac{-x}{-x-2} = \frac{x}{x+2} \neq y$ - следователно не е четна.

$$-y(x) = -\frac{x}{x-2} = \frac{x}{2-x} \neq y(-x) \text{ - следователно}$$

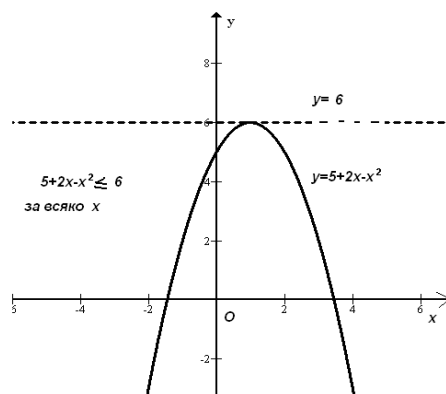
не е нечетна.

4.6. Ограничени функции

Една функция $y = f(x)$, $x \in D_f$ се нарича *ограничена отгоре*, ако съществува константа M , че

$$f(x) \leq M, \quad \forall x \in D_f.$$

Пример за ограничена отгоре функция е тази на фиг.

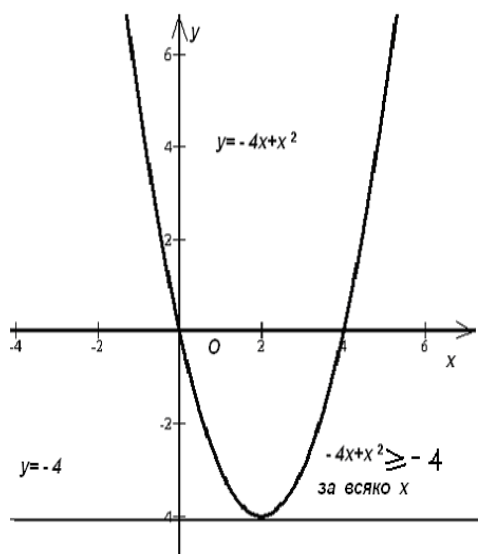


фиг. 4.11

Една функция $y = f(x)$, $x \in D_f$ се нарича *ограничена отдолу*, ако съществува константа m , че

$$f(x) \geq m, \quad \forall x \in D_f.$$

Пример за ограничена отдолу функция е тази на фиг. 4.12.



фиг. 4. 12

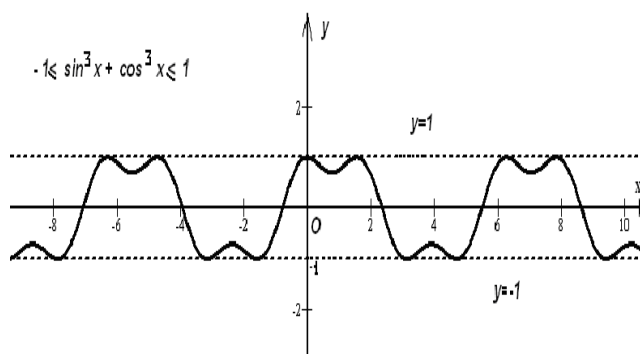
Една функция се нарича **ограничена**, ако тя е едновременно ограничена отгоре и отдолу, т.е. съществуват две константи m и M , че

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in D_f.$$

В този случай може от двете константи да се образува една по формулата

$$K = \max(|m|, |M|) \text{ и се използва неравенството: } |f(x)| \leq K.$$

Пример за ограничена функция е тази на фиг. 4.12.



фиг.4.13

Примери за ограничени функции: $y = \sin x, \quad |\sin x| \leq 1;$

$$y = \cos x, \quad |\cos x| \leq 1;$$

$$y = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad 0 \leq \frac{x^2}{1+x^2} < 1; \quad y = 2^{-x^2}, \quad 0 < 2^{-x^2} \leq 1;$$

$$y = \frac{1}{\lg(10+x^2)}, \quad 0 < \frac{1}{\lg(10+x^2)} \leq 1;$$

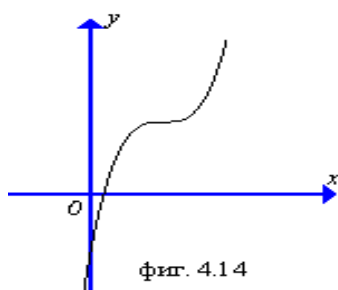
$$y = \frac{2}{\sqrt{x^2+2x+5}}, \quad 0 < \frac{2}{\sqrt{x^2+2x+5}} \leq 1.$$

Ако функцията не е ограничена, тя се нарича **неограничена**. При неограничена отгоре функция за всяко число N съществува x_N , че $f(x_N) > N$, а за

неограничена отдолу функция за всяко число n съществува x_n , че $f(x_n) < n$.

Примери за неограничени функции: $y = tg x$; $y = cotg x$, $y = x^{2n+1}$,

$$y = \frac{4x-3}{2x+5}, y = \log_a x, y = \frac{1}{\sin x}, y = \frac{a}{\cos x}.$$



4.7. Периодични функции

Функцията $y = f(x)$ е периодична, ако съществува число l , че

$$f(x+l) = f(x), \quad \forall x \in D_f.$$

Най-малкото такова положително число се нарича период на функцията.

Ако едно число l изпълнява горното равенство, то всяко негово кратно също го изпълнява.

Ако функцията $y = f(x)$ има период l , то функцията $y = f(ax)$

има период $\frac{l}{a}$. Функциите $\sin ax$ и $\cos ax$ имат период $l = \frac{2\pi}{a}$.

Функциите $tg ax$ и $cotg ax$ имат период $l = \frac{\pi}{a}$. Ако функциите $f(x)$ и

$g(x)$ имат периоди l_1 и l_2 съответно, то

Функцията $F(x) = af(x) + bg(x)$ има период

$l = HOK(l_1, l_2)$, ако съществува най-малкото общо кратно.²

Пример 4.16: Да се покаже, че функцията $\{x\} = x - [x]$ (дробна част от x) има период единица.

Решение:

$$\{x + 1\} = x + 1 - [x + 1] = x + 1 - [x] - 1 = x - [x] = \{x\}.$$

Покажем, че числото 1 е един от периодите. Ще покажем, че той е най-малкият. Ако допуснем, че l е период и $0 < l < 1$, то трябва за всички x да се изпълнява

$$\{x + l\} = \{x\}.$$

Нека x е положително число такова, че $x + l < 1$ (например $x = \frac{1-l}{2}$). Тогава

$$\{x + l\} = x + l - 0 = \{x\} + l \neq \{x\}.$$

Полученото противоречие показва, че единицата е най-малкият от всички положителни периоди на функцията.

Пример 4.17: Да се определи периодът на функцията

$$y = 2\sin \frac{3x}{2} \left(2\sin \frac{3x}{2} + \sin \frac{9x}{2} \right).$$

Решение:

$$y = 4\sin^2 \frac{3x}{2} + 2\sin \frac{3x}{2} \sin \frac{9x}{2} =$$

² Не всеки две числа имат най-малко общо кратно. Например числата 1 и $\sqrt{2}$ нямат НОК.

$$2 - 2\cos 3x + \cos 3x - \cos 6x = 2 - \cos 3x - \cos 6x.$$

Функцията $\cos 3x$ има период $l_1 = \frac{2\pi}{3}$. Функцията $\cos 6x$ има период

$l_2 = \frac{2\pi}{6}$. Функцията $2 - \cos 3x - \cos 6x$ има период

$$l = HOK(l_1, l_2) = HOK\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

4.9. Обратна функция

Нека е зададена функцията $y = f(x)$, $x \in D_f$, $y \in R_f$. Ако на различните стойности на аргумента x тя съпоставя различни стойности y , може да се определи функцията

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in R_f, \quad x \in D_f, \quad D_{f^{-1}} = R_f, \quad R_{f^{-1}} = D_f^3$$

като се съпостави на елемента y този елемент x , който се изобразява в y от първоначалната функция $f(x)$. Така определената обратна функция изпълнява следните две свойства, които напълно я характеризират като обратна функция:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(y)) &\equiv y, \quad y \in R_f \\ f^{-1}(f(x)) &\equiv x, \quad x \in D_f \end{aligned}$$

Теорема 4.1: За всяка строго растяща (намаляваща) функция съществува обратна функция.

³ При обратните функции дефиниционното множество на правата функция става множество на функционалните стойности на обратната функция, а множеството от стойности на правата функция става дефиниционно множество на обратната функция.

Доказателство: Нека за определеност функцията $f(x)$ е растяща. Ако $x_1 \neq x_2$, то или $x_1 < x_2$, или $x_1 > x_2$. Тогава $f(x_1) < f(x_2)$ в първия случай и $f(x_1) > f(x_2)$ във втория случай. Нека съществува поне една стойност y_0 , на която може да се съпоставят две различни стойности x'_1 и x'_2 така, че $y_0 = f(x'_1)$, $y_0 = f(x'_2)$. От казаното по-горе веднага следва, че $y_0 = f(x'_1) < f(x'_2) = y_0$ или $y_0 = f(x'_1) > f(x'_2) = y_0$. Полученото противоречие доказва теоремата, т.е. съществува обратната функция $f^{-1}(y) = x$ и е еднозначна,

$$y \in R_f = D_{f^{-1}}.$$

Като следствие от направеното разсъждение се получава, че ако правата функция е растяща (намаляваща), обратната функция е растяща (намаляваща).

Например, ако $y_1 < y_2$, то за x_1 и x_2 ($y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$) има възможност или $x_1 = x_2$, или $x_1 > x_2$, или $x_1 < x_2$. От условието за растене (намаляване) на функцията f следва, че първото и второто (третото) съотношения отпадат и остава третото (второто), което показва, че обратната функция запазва (променя) неравенството между аргументите си и затова е растяща (намаляваща).

Всички строго монотонни функции имат еднозначни обратни функции. По-долу са дадени някои често използвани функции, които са строго монотонни:

$$y = a^x, \quad a > 0, a \neq 1, \quad y = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1,$$

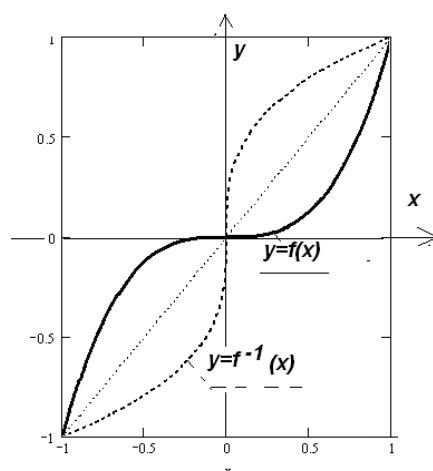
$$y = \frac{1}{x}, \quad x > 0 \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{x}, \quad x < 0, \quad y = ax + b, \quad a \neq 0,$$

$$y = \sqrt{x}, \quad y = x^3.$$

Ако дефиниционното множество на функцията може да се раздели на подинтервали, в които функцията да е строго монотонна, функцията има обратна във всеки от тези интервали. Тези обратни функции най-често са различни. Например, функцията $y = x^2$ има две обратни функции. За стойностите на аргумента от интервала $(-\infty; 0)$ тя има обратна $x = -\sqrt{y}$, а за стойностите на аргумента от интервала $(0; \infty)$ тя има обратна $x = \sqrt{y}$.

По-нататък за аргумент обикновено се използва x както за правата, така и за обратната функция. При задаването на интервал на изменение на аргумента за две взаимно обратни функции се има предвид изменението на аргумента на правата функция. Аргументът на обратната функция пробягва множеството от стойности на правата функция.

Графиките на две взаимно обратни функции са симетрични относно ъглополовящата на първия и третия квадранти.



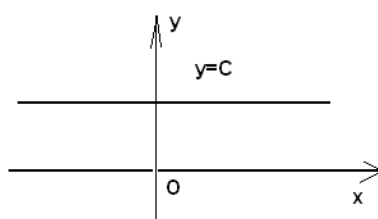
4.8. Основни елементарни функции

Основните функции, с помощта на които се описват елементарните функции, се наричат основни елементарни функции. Основните елементарни функции включват:

константата, степенната функция, показателната функция, логаритмичната функция, тригонометричните функции и обратните тригонометрични функции. От разгледаните тук функции има и неелементарни функции като например функцията на Дирихле, функцията абсолютна стойност и др.

Константа $y = C$

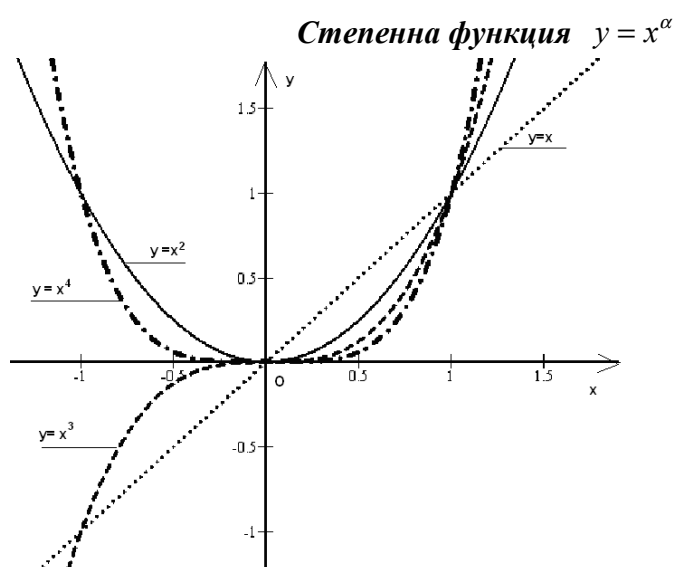
Функцията е дефинирана за всяко x само една стойност. Графиката ѝ е хоризонтална линия (фиг. 4.15). се счита и монотонно растяща и намаляваща.



и приема

Функцията
монотонно

фиг. 4.15

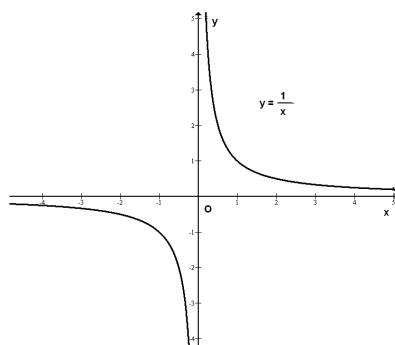


фиг.4.16

Функцията $y = x^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $(D_y = (-\infty; \infty), R_y = (-\infty; \infty))$ е неограничена, растяща, нечетна, не е периодична – например $y = x^3$ (фиг 4.16).

Функцията $y = x$ (фиг 4.16) има наклонена асимптота - същата функция.

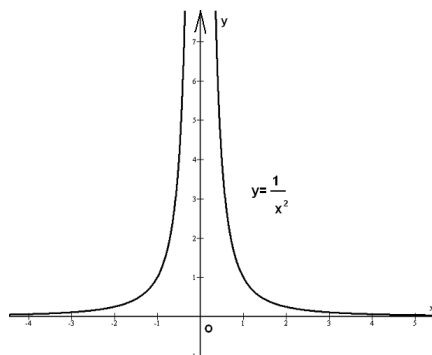
Функцията $y = x^{2n}$, $n \in N$, ($D_y = (-\infty; \infty)$, $R_y = [0; \infty)$) е неограничена отгоре, ограничена от числото нула отдолу, намаляваща в интервала $(-\infty; 0]$, растяща в интервала $[0; \infty)$, четна, не е периодична - например функциите $y = x^2$ и $y = x^4$ (фиг 4.16).



фиг.4.17

Функцията $y = \frac{1}{x^n}$, $n \in N$ ($D_y = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$) - при нечетно n (фиг.17) е намаляваща и $R_y = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Функцията е нечетна и е неограничена в околността на нулата. Има вертикална асимптота $x=0$ и хоризонтална асимптота $y=0$.

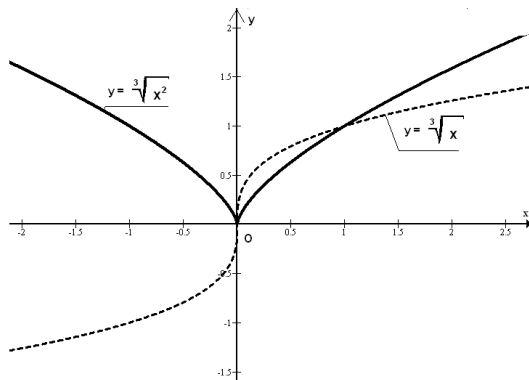
Същата функция $y = \frac{1}{x^n}$, $n \in N$ ($D_y = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$) - при четно n (фиг. 18) расте в интервала $(-\infty; 0)$ и намалява в интервала $(0; \infty)$. Тя е ограничена отдолу от нулата и неограничена отгоре. $R_y = (0; \infty)$. Функцията е четна. Има вертикална асимптота $x=0$ и хоризонтална асимптота $y=0$.



фиг.4.18

От останалите случаи са дадени графиките на $y = x^{2/3}$ и $y = x^{1/3}$ (фиг. 4.19).

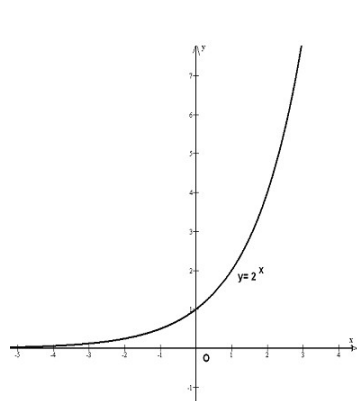
Когато степенният показател е от вида $\alpha = \frac{m}{2n+1}$, $m, n \in \mathbb{N}$ или $\alpha = \frac{2n}{m}$, функцията е дефинирана за всяко x . В останалите случаи е дефинирана за положителните x .



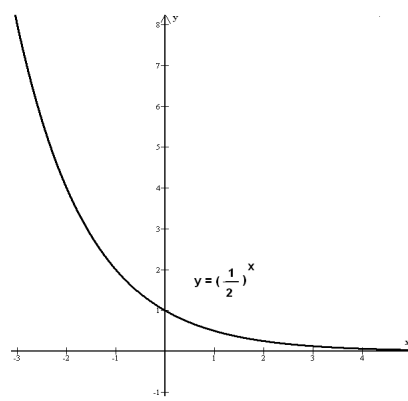
фиг. 4.19

Показателна функция $y = a^x$, ($a > 0$, $a \neq 1$)

Функцията е дефинирана за всяко x и приема само положителни стойности, $R_y = (0; \infty)$. При $a > 1$ функцията е растяща (фиг. 4.20), при $0 < a < 1$ функцията е намаляваща (фиг. 4.21). Функцията има хоризонтална асимптота $y = 0$.



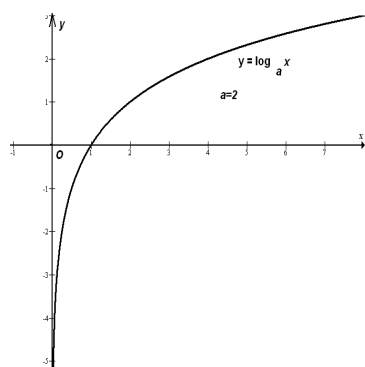
фиг. 4.20



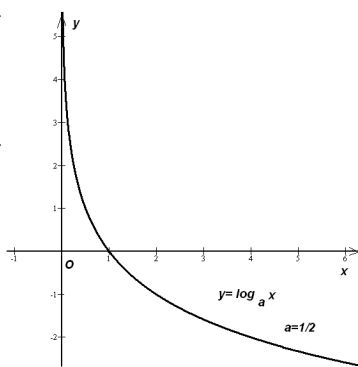
фиг. 4.21

Логаритмична функция $y = \log_a x$, ($a > 0$, $a \neq 1$)

$D_y = (0; \infty)$, $R_y = (-\infty; \infty)$. Функцията има вертикална асимптота $x = 0$. При $a > 1$ функцията е растяща (фиг. 4.22), при $0 < a < 1$ функцията е намаляваща (фиг. 4.23).

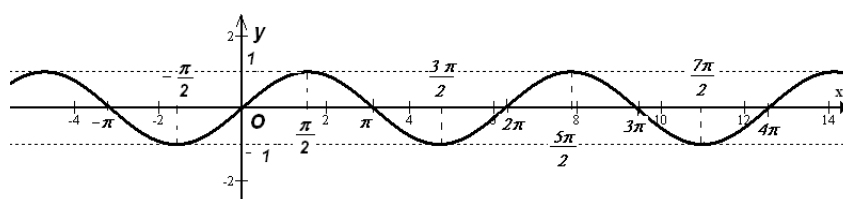


фиг. 4.22



фиг.4.23

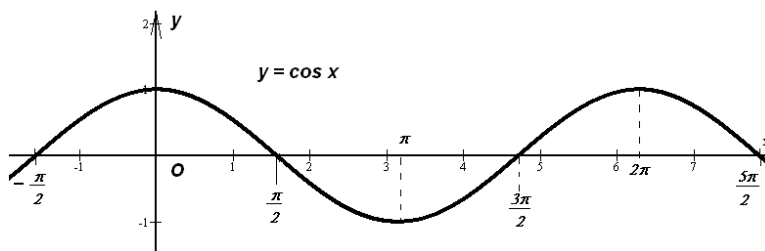
Синус $y = \sin x$



фиг. 4.24

Функцията е дефинирана за всяко x ($D_{\sin x} = (-\infty; \infty)$), приема стойности от -1 до 1 ($R_{\sin x} = [-1; 1]$), ограничена, нечетна, периодична с период 2π , няма асимптоти.

Косинус $y = \cos x$

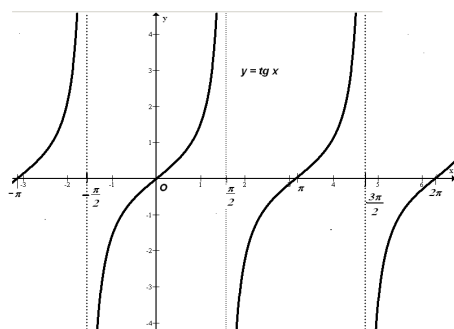


фиг. 4.25

Функцията е: определена за всяко x ($D_{\cos x} = (-\infty; \infty)$), приема стойности от интервала $[-1; 1]$, ограничена, четна, периодична с период 2π , няма асимптоти.

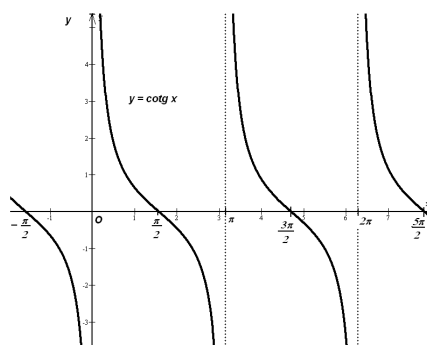
Тангенс $y = \tan x$

Функцията е дефинирана в интервалите от вида $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$, приема всички стойности $R_{tgx} = (-\infty; \infty)$, неограничена, нечетна, периодична с период π , растяща в съответните интервали, има вертикални асимптоти $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in Z$.



фиг. 4. 26

Котангенс $y = \cotg x$



фиг. 4.27

Функцията котангенс е дефинирана в интервалите от вида $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (k\pi; \pi + k\pi)$, приема всички стойности $R_{cotgx} = (-\infty; \infty)$, неограничена, нечетна, периодична с период π , намаляваща в съответните интервали, има вертикални асимптоти $x = k\pi$, $k \in Z$.

Към основните елементарни функции се отнасят и обратните тригонометрични функции, които се въвеждат и разглеждат в точка 4.10.

Елементарна функция се нарича всяка функция, която се получава от основните елементарни функции с помощта на действията събиране, изваждане, умножение, деление и образуване на сложна функция като използва тези операции

краен брой пъти. Елементарните функции биват цели, дробни, рационални, ирационални, трансцендентни. **Цялата функция** е полином от вида:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Дробнорационалната функция е отношение на два полинома: $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

Ирационалните функции съдържат радикали. От основните елементарни функции трансцендентни са: показателната, логаритмичната, тригонометричните функции.

Lekcia 3

Обратна функция. Обратни тригонометрични функции

Обратна функция

Нека е зададена функцията $y = f(x)$, $x \in D_f$, $y \in R_f$. Ако при

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

може да се определи функцията

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in R_f, \quad x \in D_f, \quad D_{f^{-1}} = R_f, \quad R_{f^{-1}} = D_f^4$$

като се съпостави на елемента y този елемент x , който се изобразява в y от първоначалната функция $f(x)$. Така определената обратна функция изпълнява следните две свойства, които напълно я характеризират като обратна функция:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(y)) &\equiv y, \quad y \in R_f \\ f^{-1}(f(x)) &\equiv x, \quad x \in D_f \end{aligned}$$

Теорема 4.1: За всяка строго растяща (намаляваща) функция съществува обратна функция.

⁴ При обратните функции дефиниционното множество на правата функция става множество на функционалните стойности на обратната функция, а множеството от стойности на правата функция става дефиниционно множество на обратната функция.

Доказателство: Нека за определеност функцията $f(x)$ е растяща. Ако $x_1 \neq x_2$, то или $x_1 < x_2$, или $x_1 > x_2$. Тогава $f(x_1) < f(x_2)$ при растяща ф. (и $f(x_1) > f(x_2)$ при намаляваща ф.). Нека съществува поне една стойност y_0 , на която може да се съпоставят две различни стойности x'_1 и x'_2 така, че $y_0 = f(x'_1)$, $y_0 = f(x'_2)$. От казаното по-горе веднага следва, че $y_0 = f(x'_1) < f(x'_2) = y_0$ или $y_0 = f(x'_1) > f(x'_2) = y_0$. Полученото противоречие доказва теоремата, т.е. съществува обратната функция $f^{-1}(y) = x$ и е еднозначна,

$$y \in R_f = D_{f^{-1}}.$$

Като следствие от направеното разсъждение се получава, че ако правата функция е растяща (намаляваща), обратната функция е растяща (намаляваща).

Например, ако $y_1 < y_2$, то за x_1 и x_2 ($y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$) има възможност или $x_1 = x_2$, или $x_1 > x_2$, или $x_1 < x_2$. От условието за растене (намаляване) на функцията f следва, че първото и второто (третото) съотношения отпадат и остава третото (второто), което показва, че обратната функция запазва (променя) неравенството между аргументите си и затова е растяща (намаляваща).

Всички строго монотонни функции имат еднозначни обратни функции:

$$y = a^x, a > 0, a \neq 1, y = \log_a x, a > 0, a \neq 1,$$

$$(a^{\log_a x} = x, \log_a a^x = x)$$

$$y = \frac{1}{x}, \quad x > 0 \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{x}, \quad x < 0,$$

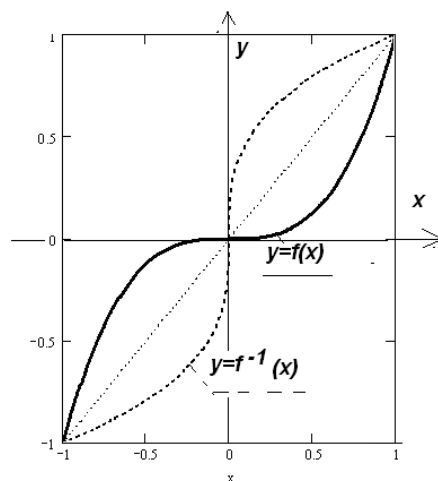
$$y = ax + b, \quad a \neq 0, \quad y = \frac{x - b}{a}$$

$$y = \sqrt{x}, \quad y = x^2.$$

Ако дефиниционното множество на функцията може да се раздели на подинтервали, в които функцията да е строго монотонна, функцията има обратна във всеки от тези интервали. Тези обратни функции най-често са различни. Например, функцията $y = x^2$ има две обратни функции. За стойностите на аргумента от интервала $(-\infty; 0)$ тя има обратна $x = -\sqrt{y}$, а за стойностите на аргумента от интервала $(0; \infty)$ тя има обратна $x = \sqrt{y}$.

По-нататък за аргумент обикновено се използва x както за правата, така и за обратната функция. При задаването на интервал на изменение на аргумента за две взаимно обратни функции се има предвид изменението на аргумента на правата функция. Аргументът на обратната функция пробягва множеството от стойности на правата функция.

Графиките на две взаимно обратни функции са симетрични относно ъглополовящата на първия и третия квадранти.



4.10. Обратни тригонометрични функции

$$\text{Аркуссинус } y = \arcsin x$$

В тази точка се въвежда обратната функция на функцията $y = \sin x$. За да може това да стане, трябва за всяко y от интервала $[-1; 1]$ да се намери правило, по което да се съпостави само една стойност x . Проблемът тук е, че например за $y=0.5$ тези

стойности са безкрайно много, а именно $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ако се

представи дефиниционното множество на правата функция $y = \sin x$ като обединение на интервали, в които правата функция е строго монотонна, тогава ще се получи възможност да се избере само една стойност на x , която е от разглеждания интервал.

$$D_{\sin x} = (-\infty; \infty) = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right].$$

Отначало се разглежда интервала $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, т.е. частта от дефиниционното

множество, която съответства на $k = 0$. В таблицата по-долу са дадени някои примери

на съответствия $y \rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ така, че $\sin x = y$.

y	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
-----	----	-----------------------	-----------------------	----------------	---	---------------	----------------------	----------------------	---

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
-----	------------------	------------------	------------------	------------------	-----	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

По този начин е получено следното правило: за всяко число $y \in [-1; 1]$

съпоставяме $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ така, че $\sin x = y$. Това правило (тази функция)

се означава с $x = \arcsin y$. В бъдеще зависимата променлива се означаваме с y , а независимата с x . По този начин е определена функцията

$$y = \arcsin x, \quad x \in [-1; 1], \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Двете основни тъждества, които характеризират две взаимно обратни функции са:

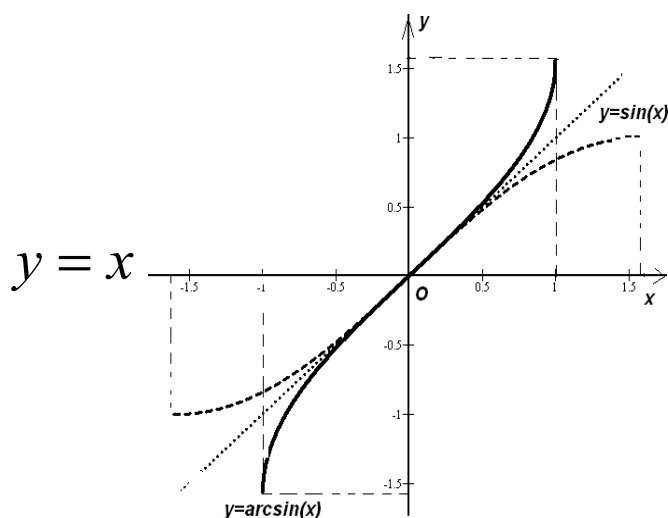
$$\sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1; 1]$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Аркусинусът от числото x е такава дъга (ъгъл), синусът на която е равен на x .

Графиката на функцията $y = \arcsin x$ се построява като огледален образ

на графиката на правата функция $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, спрямо правата



Аркусинусът от числото x е дъга (ъгъл) и от нея могат да се изчисляват други тригонометрични функции.

Пример 4.18: Да се изчисли: а) $\cos(\arcsin x)$; б)

$\sin(2 \arcsin x)$; в) $\arcsin(-x)$; г) $\arcsin(\sin 5)$.

Решение: а) За да може да се използва първото основно тъждество

$\sin(\arcsin x) = x$ косинусът се изразява чрез синуса:

$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$. В тази формула знакът “+” се избира, ако ъгълът

$$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \text{ и знакът “-“ се избира, ако ъгълът } \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]. \text{ В}$$

$$\text{разглежданият случай } \alpha = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \text{ и}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x} = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\text{б) } \sin(2 \arcsin x) =$$

$$2 \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x) = 2x \sqrt{1 - x^2}.$$

в) Нека $\arcsin(-x) = y$. Изчислява се синус от двете части на това равенство.

$$\sin(\arcsin(-x)) = -x = \sin y \Rightarrow x = -\sin y = \sin(-y)$$

Като се ползва, че функцията синус има еднозначна обратна функция, се получава:

$$-y = \arcsin x, \quad y = -\arcsin x.$$

Следователно

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

$$\text{г) } \arcsin(\sin 5) = \arcsin(\sin(5 - 2\pi)) = 5 - 2\pi.$$

Тук бе използвана периодичността на синуса и това даде възможност да се намали аргумента.

$$-\frac{\pi}{2} < 5 - 2\pi < \frac{\pi}{2}.$$

Неравенството се проверява лесно:

$$2\pi - \frac{\pi}{2} < 5, \quad 4\pi - \pi < 10, \quad 3\pi < 10 \quad \text{и}$$

$$5 - 2\pi < \frac{\pi}{2}, \quad 10 < 4\pi + \pi, \quad 10 < 5\pi.$$

Понеже аргументът на функцията удовлетворява дефиниционните условия за второто твърждение за аркуссинуса, то се прилага и задачата е решена.

Обратната функция на синуса ($y = \sin x$) в другите интервали на дефиниционното множество се дава с формулата:

$$y = (-1)^k \arcsin x + k\pi.$$

Числото k се избира в зависимост от аргумента на правата функция. Тази функция е обратна функция на $y = \sin x$, когато аргументът x се намира в интервала

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k - \text{цяло число.}$$

$$\text{Аркускосинус} \quad y = \arccos x$$

За да се въведе обратната функция на функцията $y = \cos x$ трябва за всяко y от интервала $[-1; 1]$ да се намери правило, по което да се съпостави само една стойност x . Проблемът тук е, че например за $y = 0.5$ тези стойности са безкрайно много,

$$\text{а именно } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Дефиниционното множество на правата функция $y = \cos x$ се представя като обединение на интервали, в които правата функция е строго монотонна.

$$D_{\cos x} = (-\infty; \infty) = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [2k\pi; \pi + 2k\pi] \cup$$

$$\bigcup_{l=-\infty}^{\infty} [\pi + 2l\pi; 2l\pi] .$$

Отначало се разглежда интервала $[0; \pi]$, т.е. частта от дефиниционното множество, която съответства на $k = 0$.

По-долу са дадени някои примери на съответствия $y \rightarrow x \in [0; \pi]$ така, че $\cos x = y$ и тези данни са подредени в таблица:

y	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
x	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

По този начин е получено следното правило: за всяко число $y \in [-1; 1]$ се съпоставя $x \in [0; \pi]$ така, че $\cos x = y$. Това правило (тази функция) се означава с $x = \arccos y$. В бъдеще зависимата променлива се означава с y , а независимата – с x . По този начин е определена функцията

$$y = \arccos x, \quad x \in [-1; 1], \quad y \in [0; \pi].$$

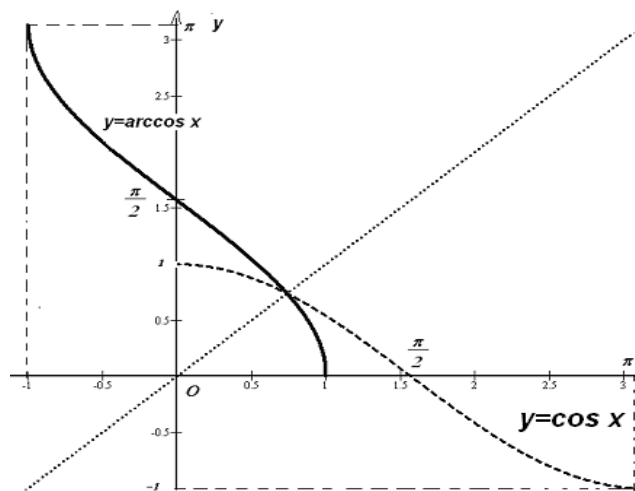
Двете основни тъждества, които характеризират двете взаимно обратни функции са:

$$\cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1; 1]$$

$$\arccos(\cos x) = x, \quad x \in [0; \pi].$$

Много често първото от тези тъждества служи за дефиниция на аркускосинуса. Аркускосинусът от числото x е такава дъга (ъгъл), косинусът на която е равен на x .

Графиката на функцията $y = \arccos x$ се построява като огледален образ на графиката на функцията $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$, спрямо правата $y = x$.



Аркускосинусът от числото x е дъга (ъгъл) и от нея могат да се изчисляват други тригонометрични функции.

Пример 4.19: Да се изчисли: а) $\sin(\arccos x)$; б)

$\cos(2 \arccos x)$; в) $\arccos(-x)$; г) $\arccos(\cos 5)$; д)

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Решение: а) За да се използва първото основно тъждество

$\cos(\arccos x) = x$ синусът се изразява чрез косинуса:

$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$. В тази формула знакът “+” се избира, ако ъгълът

$\alpha \in [0; \pi]$ и знакът “-“ се избира, ако ъгълът $\alpha \in [\pi; 2\pi]$. В

разглежданият случай $\alpha = \arccos x \in [0; \pi]$ и

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2 \arccos x} = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\text{б) } \cos(2 \arccos x) = 2 \cos^2 \arccos x - 1 = 2x^2 - 1.$$

в) Нека $\arccos(-x) = y$. Изчислява се косинус от двете части на това равенство

$$\cos(\arccos(-x)) = -x = \cos y \Rightarrow x = -\cos y = \cos(\pi - y)$$

Като се ползва, че функцията косинус има еднозначна обратна функция, се получава

$$\pi - y = \arccos x, \quad y = \pi - \arccos x.^5$$

Следователно

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

$$\text{г) } \arccos(\cos 5) = \arccos(-\cos(\pi - 5)) =$$

$$\pi - \arccos(\cos(5 - \pi)) = \pi - (5 - \pi) = 2\pi - 5$$

$$\text{д) Нека } y = \frac{\pi}{2} - \arccos x. \text{ Тогава } y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \text{ Изчислява}$$

се синус от двете страни на това равенство.

$$\sin y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x,$$

$$\text{т.е. } \sin y = x.$$

⁵ Обратната функция на четна функция може и да не е четна.

В интервала $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ синусът има еднозначна обратна функция и:

$$y = \arcsin x.$$

Замества се в полагането и се получава:

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \Rightarrow \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Обратната функция на косинуса ($y = \cos x$) в другите интервали на дефиниционното множество се дава с формулите:

$$\text{а) } y = (-1)^k \arccos x + 2\left[\frac{k+1}{2}\right]\pi$$

е обратна функция на $y = \cos x$, когато аргументът x се намира в интервала

$$k\pi \leq x \leq (k+1)\pi, \quad k \geq 0, k \in N;$$

$$\text{б) } y = (-1)^{k+1} \arccos x - 2\left[\frac{k+1}{2}\right]\pi,$$

е обратна функция на $y = \cos x$, когато аргументът x се намира в интервала

$$(-k-1)\pi \leq x \leq -k\pi, \quad k \geq 0, k \in N.$$

$$\text{Аркустангенс } y = \arctg x$$

При въвеждане на обратната функция на функцията $y = \tg x$ за всяко y ще бъде намерено правило, по което да се съпостави само една стойност x . Проблемът тук е, че например за $y = 1$ тези стойности са безкрайно много, а именно

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z. \text{ Дефиниционното множество на правата функция}$$

$y = \operatorname{tg} x$ ще бъде представено като обединение на интервали, в които правата функция е строго монотонна, тогава има възможност да се избере само една стойност на x , която е от разглеждания интервал.

$$D_{\operatorname{tg} x} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right).$$

Нека отначало е даден интервалът $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$, който съответства на случая

$k=0$. По-долу са посочени някои примери на съответствия

$y \rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ такива, че $\operatorname{tg} x = y$ и са дадени в таблица:

y	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

По този начин е получено следното правило: на всяко число y е съпоставено $x \in$

$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ така, че $\operatorname{tg} x = y$. Това правило (тази функция) се означава с

$x = \operatorname{arctg} y$. В бъдеще зависимата променлива ще се означава с y , а независимата – с x . По този начин е определена функцията

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in (-\infty; \infty), \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right).$$

Двете основни тъждества, които характеризират двете взаимно обратни функции са:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in (-\infty; \infty)$$

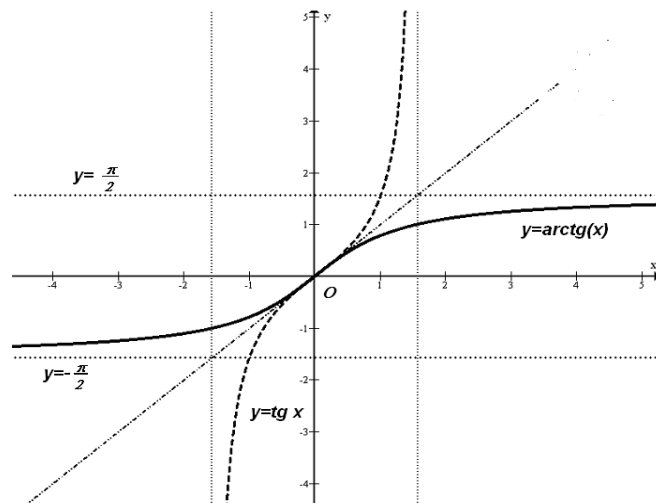
$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Много често първото от тези твърдения служи за дефиниция на аркустангенс. Аркустангенсът от числото x е такава дъга (ъгъл), тангенсът на която е равен на x .

Графиката на функцията $y = \operatorname{arctg} x$ се построява като огледален образ

на графиката на правата функция $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, спрямо

правата $y = x$.



Аркустангенсът от числото x е дъга и от нея могат да се изчисляват други тригонометрични функции.

Пример 4.20: Да се изчисли:

- а) $\cos(\operatorname{arctg} x)$; б) $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} x)$; в) $\operatorname{arctg}(-x)$;
г) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)$.

Решение: а) За да се използва първото основно твърдение

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ косинусът се изразява чрез тангенс:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}}. \text{ В тази формула знакът “+” се избира, ако ъгълът}$$

$$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ и знакът “-” се избира, ако ъгълът } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right). \text{ В}$$

разглежданият случай $\alpha = \operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и:

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \operatorname{arctg} x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\text{б) } \operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} x) = \frac{2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1 - \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{2x}{1 - x^2}.$$

в). Нека $\operatorname{arctg}(-x) = y$. Изчислява се тангенс от двете части на това равенство.

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-x)) = -x = \operatorname{tg} y \Rightarrow x = -\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(-y).$$

Като се ползва, че функцията тангенс има еднозначна обратна функция, се получава:

$$-y = \operatorname{arctg} x, \quad y = -\operatorname{arctg} x.$$

Следователно

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$

$$\text{г) } \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5) = 5.$$

Обратната функция на тангенса ($y = \operatorname{tg} x$) в другите интервали на дефиниционното множество се дава с формулата:

$$y = \operatorname{arctg} x + k\pi.$$

Числото k се избира в зависимост от аргумента x . Тази функция е обратна функция на $y = \operatorname{tg} x$, когато аргументът x се намира в интервала

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ } k \text{ — цяло число.}$$

$$\text{Аркускотангенс } y = \operatorname{arccotg} x$$

При въвеждане на обратната функция на функцията $y = \operatorname{cotg} x$ за всяко y се определя правило, по което да се съпостави само една стойност x . Проблемът тук

е, че например за $y=1$ тези стойности са безкрайно много, а именно $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$,

$k \in \mathbb{Z}$. Дефиниционното множество на правата функция $y = \operatorname{cotg} x$ се представя като обединение на интервали, в които правата функция е строго монотонна, тогава се получава възможност да се избере само една стойност на x , която е от разглеждания интервал.

$$D_{\operatorname{cotg} x} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (k\pi; \pi + k\pi).$$

Нека отначало аргументът x е от интервала $(0; \pi)$, т.е. се разглежда случая $k=0$.

По-долу са дадени някои примери на съответствия $y \rightarrow x \in (0; \pi)$ такива, че

$\operatorname{cotg} x = y$ и са подредени в таблица:

y	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
x	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

По този начин е получено следното правило: на всяко число y е съпоставено $x \in (0; \pi)$ така, че $\cotg x = y$. Това правило (тази функция) се означава с $x = \operatorname{arccotg} y$. В бъдеще зависимата променлива ще се означава с y , а независимата – с x . По този начин е определена функцията

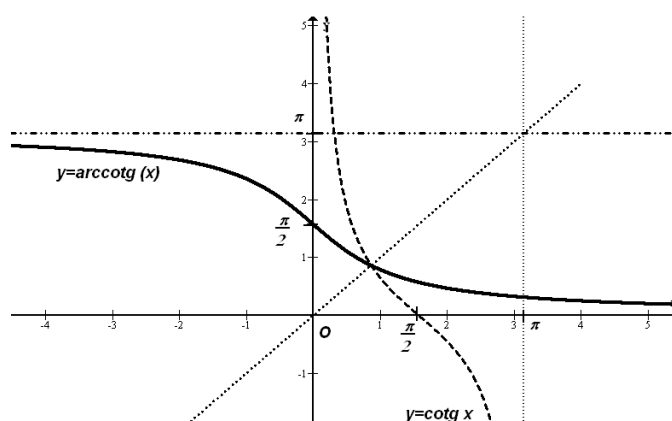
$$y = \operatorname{arccotg} x, \quad x \in (-\infty; \infty), \quad y \in (0; \pi).$$

Двете основни тъждества, които характеризират двете взаимно обратни функции са:

$$\begin{aligned} \cotg(\operatorname{arccotg} x) &= x, & x \in (-\infty; \infty) \\ \operatorname{arccotg}(\cotg x) &= x, & x \in (0; \pi). \end{aligned}$$

Много често първото от тези тъждества служи за дефиниция на аркускотангенса. Аркускотангенсът от числото x е такава дъга (ъгъл), котангенсът на която е равен на x .

Графиката на функцията $y = \operatorname{arccotg} x$ се построява като огледален образ на графиката на правата функция $y = \cotg x$, $x \in (0; \pi)$, спрямо правата $y = x$.



фиг. 4.32

Аркускотангенсът от числото x е дъга и от нея могат да се изчисляват други тригонометрични функции.

Пример 4.21: Да се изчисли: а) $\sin(\operatorname{arccotg} x)$; б)

$\cotg(2 \operatorname{arccotg} x)$; в) $\operatorname{arccotg}(-x)$; г) $\operatorname{arccotg}(\cotg 5)$; д)

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Решение: а) За да се използва първото основно тъждество

$\cotg(\operatorname{arccotg} x) = x$ синусът се изразява чрез котангенс:

$$\sin \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 - \cotg^2 \alpha}}. \text{ В тази формула знакът “+” се избира, ако } \alpha \in (0; \pi)$$

и знакът “-” се избира, ако $\alpha \in (\pi; 2\pi)$. В

разглежданият случай $\alpha = \operatorname{arccotg} x \in (0; \pi)$ и

$$\sin(\operatorname{arccotg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \cotg^2(\operatorname{arccotg} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\text{б) } \cotg(2 \operatorname{arccotg} x) =$$

$$\frac{\cotg^2(\operatorname{arccotg} x) - 1}{2 \cotg(\operatorname{arccotg} x)} = \frac{x^2 - 1}{2x}.$$

в) Нека $\operatorname{arccotg}(-x) = y$. Взема се котангенс от двете части на това равенство.

$$\cotg(\operatorname{arccotg}(-x)) = -x = \cotg y \Rightarrow$$

$$x = -\cotg y = \cotg(\pi - y).$$

Като се ползва, че функцията котангенс има еднозначна обратна функция, се получава

$$\pi - y = \operatorname{arccotg} x, \quad y = \pi - \operatorname{arccotg} x.^6$$

Следователно

$$\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x.$$

$$\text{г) } \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} 5) = 5.$$

$$\text{д) Нека } y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x. \quad \text{Тогава } y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Изчислява се тангенс от двете страни на това равенство.

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x \right) = \operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) = x,$$

$$\text{т.е. } \operatorname{tg} y = x.$$

$$\text{В интервала } y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ тангенсът има еднозначна обратна функция и:}$$

$$y = \operatorname{arctg} x.$$

Замества се в полагането и се получава:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x$$

Обратната функция на котангенса ($y = \operatorname{cotg} x$) в другите интервали на

дефиниционното множество се дава с формулата $y = \operatorname{arccotg} x + k\pi$. Тук

k е цяло число, което се определя от аргумента x . Тази функция е обратна на функцията

$y = \operatorname{cotg} x$, когато аргументът x се намира в интервала

$k\pi < x < \pi + k\pi$, k —цяло число.

⁶ Полученият резултат показва, че обратната функция на нечетна функция не винаги е нечетна.

ЛЕКЦИЯ 4

5. ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЯ. НЕПРЕКЪСНАТОСТ НА ФУНКЦИЯ

5.1. Граница на функция

Под **околност на точката** x_0 , се разбира всеки отворен интервал $(a; b)$, който съдържа тази точка, т.е. $x_0 \in (a; b)$. Най-често се разглеждат **симетрични околности** от вида $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $\delta > 0$. Означението за тях е $U(x_0, \delta)$.

В някои от случаите се използва и безкрайно отдалечената точка отдясно на нулата, която се означава с $+\infty$, или $-\infty$, ако е отляво на нулата. Под околност на точката $+\infty$ се разбира всеки интервал от вида $(N; +\infty)$. Под околност на точката $-\infty$ се разбира всеки интервал от вида $(-\infty; N)$.

Определение: (Коши) Числото A се нарича **граница на функцията** $y = f(x)$ при x **клонящо към** x_0 със стойности различни от x_0 , ако за всяка околност $U(A, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, съществува околност на точката x_0 $U(x_0, \delta)$, $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ така, че

$$f(U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \subset U(A, \varepsilon).$$

Последното включване трябва да се разбира по следния начин:

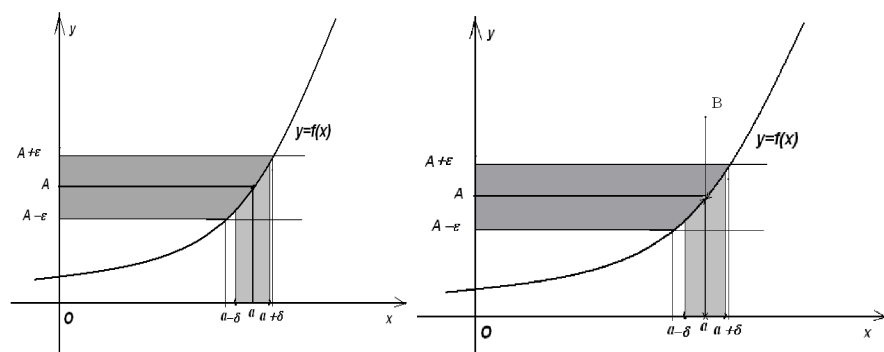
$$\text{при } x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta) = U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in (A - \varepsilon; A + \varepsilon) = U(A, \varepsilon),$$

т.е.

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Това, че A е граница на функцията $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, кратко се записва така:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$



фиг. 5.1

⁷ $U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \equiv (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$

На фиг. 5.1 е дадена геометрична илюстрация на тази дефиниция. Числото A е граница, ако за всеки две прави от вида $y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, може да се намери интервал с център в точката $a = x_0$ такъв, че всяка стойност на функцията $f(x)$, $x \in (a - \delta; a) \cup (a; a + \delta)$ се намира между двете прави $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$.

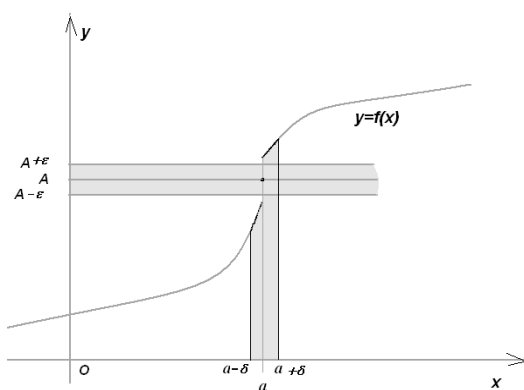
Определение⁸: (Коши) Числото A се нарича **граница на функцията** $y = f(x)$ **при** x **клонящо към** ∞ , ако за всяка околност $U(A, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, съществува околност $(N; \infty)$ така, че

$$f((N; \infty)) \subset U(A, \varepsilon). \quad ^8$$

Последното включване трябва да се разбира по следния начин:

при $x \in (N; \infty) \Rightarrow f(x) \in (A - \varepsilon; A + \varepsilon) = U(A, \varepsilon)$,

т.е. $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.



фиг. 5.2

На фиг. 5.2 е представен случаят, когато числото A не е граница. От чертежа се вижда, че колкото и малък да бъде избраният интервал с център в точката a *без самата точка*, стойностите на функцията от множеството $x \in (a - \delta; a) \cup (a; a + \delta)$ не са изцяло между двете прави $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$. В дефиницията на Коши се иска стойностите на функцията изцяло да са между правите $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$.

Редица се наричат стойностите на функция, зададена на множеството от естествените числа: $x_n = f(n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

⁸ $U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \equiv (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$

Числото a е граница на редицата $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, ако функцията $x_n = f(n)$ има граница при $n \rightarrow \infty$, т.е. за всяко $\varepsilon > 0$ съществува N , че при $n > N \Rightarrow a - \varepsilon < x_n = f(n) < a + \varepsilon$ или $|x_n - a| < \varepsilon$.

В този случай

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Редиците, които имат граница се наричат сходящи. Редиците, които нямат граница се наричат разходящи.

Дефиницията на Коши за граница на функция е еквивалентна на следната дефиниция:

Определение: (Хайне) Числото A се нарича **граница на функцията** $f(x)$ **при** $x \rightarrow x_0$, ако за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $x_n \neq x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Основни свойства на сходящите редици:

1. Ако една функция има граница числото A , то тази граница е единствена.
2. Ако една редица има граница числото a , то всяка нейна подредица има същата граница.
3. Ако една редица има граница, тя е ограничена.
4. Всяко ограничено множество от числа съдържа редица, която е сходяща към някакво реално число.
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$.
6. Всяка монотонно растяща и ограничена отгоре редица е сходяща. Всяка монотонно намаляваща и ограничена отдолу редица е сходяща.
7. Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$, то $\exists N$, че при $n > N$ $x_n > 0$.
8. Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a < 0$, то $\exists N$, че при $n > N$ $x_n < 0$.
9. Ако $x_n < C$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \leq C$.
10. Ако $x_n > C$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \geq C$.
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} (kx_n) = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

15. Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$.

16. Ако $x_n \leq y_n \leq z_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ съществува и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

17. Ако $|x_n| < C$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = 0$.

18. Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ и след някакъв номер N $y_{n-1} \leq y_n$, $n > N + 1$ и съществува

границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ (крайна или безкрайна), то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

19. За всяко реално число x съществува редица само от рационални числа $\{r_n^x\}$ сходяща към x ($\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^x = x$).

20. За всяко реално число x съществува редица само от ирационални числа $\{\xi_n^x\}$ сходяща към x ($\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^x = x$).

По-долу са дадени три основни граници за функциите:

1⁰ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

2⁰ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

3⁰ $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $e \approx 2.718281828459045...$

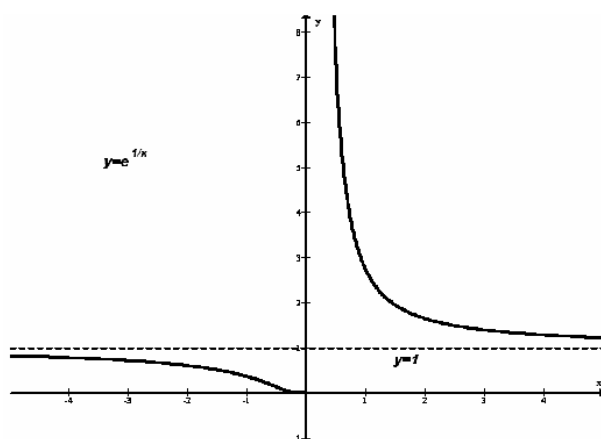
Числото e е трансцендентно число, то не е корен на уравнение с рационални коефициенти.

При търсенето на граница, когато аргументът x клони към граничната точка a със стойности по-големи (по-малки) от a и съответната граница съществува се казва, че съществува **дясна (лява) граница в точката a** . Ако функцията има граница, тя има лява и дясна граница. Тези три граници са равни. Ако лявата и дясната граници съществуват и са равни, функцията има граница. Възможно е функцията да няма граница, а да има само лява или само дясна граница.

Пример: За функцията $y = \begin{cases} e^{1/x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ да се определи лявата граница в точката

0.

Решение: Нека $t = \frac{1}{x}$. Тогава $t \rightarrow -\infty$, когато $x < 0$ и $x \rightarrow 0$.



фиг. 5.3

$$\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} e^{1/x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0, (e > 1).$$

Лявата граница на функцията в точката 0 е равна на 0.

Когато $x > 0$ и $x \rightarrow 0$, тогава $t \rightarrow +\infty$ и

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} e^{1/x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = \infty, \text{ т.е. Дясната граница на функцията в точката 0 е равна на } \infty.$$

Следователно границата в точката 0 не съществува.

5.2 Теореме за граници на функции

1. Ако функцията $f(x)$ има граница в точката a и е определена в точката a , тя е ограничена в някаква околност на точката a .

$$2. \lim_{x \rightarrow a} C = C.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} x^\alpha = a^\alpha, a > 0.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

$$7. \text{ Ако } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

$$8. \text{ Ако } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ и } |g(x)| \leq K, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

9. Ако $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$, то $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$.

10. Ако $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

11. Ако $f(x)$ е една от основните елементарни функции и a е точка от дефиниционната ѝ област, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

За елементарните функции са справедливи следните граници:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty, \quad 0 < a < 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \infty, \quad a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad a > 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty, \quad 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty, \quad 0 < a < 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, \quad a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \quad a > 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi.$$

Пример: Да се изчисли границата $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \operatorname{arccotg} x$.

Решение: Нека $t = \operatorname{arccotg} x$. Тогава $x = \cotg t$. При $x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow 0, t > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \operatorname{arccotg} x = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\cotg t) \cdot t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\sin t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \cos t = 1 \cdot \cos 0 = 1.$$

Пример: Да се изчисли границата $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$.

Решение: Функцията синус е ограничена $(-1 \leq \sin x \leq 1)$, а $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ и по

теорема 8

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \cdot \frac{1}{x} = 0.$$

Пример: Да се изчисли границата $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{3x+1}$.

$$\text{Решение: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2x+3)-3-1}{2x+3} \right)^{3x+1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{(-4)}{2x+3} \right)^{\frac{2x+3}{(-4)} \cdot \frac{(-4)}{2x+3} (3x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{(-4)}{2x+3} \right)^{\frac{2x+3}{(-4)}} \right]^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-4)}{2x+3} (3x+1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{(-4)}{2x+3} \right)^{\frac{2x+3}{(-4)}} \right]^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-4)}{2 + \frac{3}{x}} \left(3 + \frac{1}{x} \right)} = e^{-6}.$$

Тук бе използвано, че

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-4) \left(3 + \frac{1}{x} \right)}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{(-4) \left(3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \right)}{2 + 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{(-4)3}{2} = -6 \text{ и}$$

$$y = \frac{(-4)}{2x+3} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-4)}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{2 + \frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{-4}{2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x}} = 0 \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{(-4)}{2x+3} \right)^{\frac{2x+3}{(-4)}} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{1/y} = e.$$

5.3. Непрекъснатост на функция

Определение: Функцията $y = f(x)$ е **непрекъсната в точката** $x_0 \in D_f$, ако за всяка околност $U(f(x_0), \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, съществува такава околност $U(x_0, \delta)$ на точката x_0 , че $f(U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \varepsilon)$.

От дефиницията за граница следва, че функциите, за които се изпълнява

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

са непрекъснати. Ако една точка x_0 е **изолирана** точка, то функцията е непрекъсната в тази точка.

За непрекъснатите функции се изпълнява равенството:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$$

Ако се означи **нарастването на функцията** с $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, то функцията е непрекъсната, ако

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0.$$

При непрекъснатите функции малките нараствания на аргумента водят до малки нараствания на функцията.

Теорема: Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и $f(x_0) > 0$, съществува околност на точката x_0 , в която функцията е положителна.

Теорема: Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в точката x_0 , то $af(x) + bg(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ при предположение $g(x_0) \neq 0$, са непрекъснати в точката x_0 .

Теорема: Ако $y = f(x)$ е непрекъсната в точката x_0 , $x = g(t)$ е непрекъсната в точката t_0 като $x_0 = g(t_0)$, то сложната функция $y = f(g(t))$ е непрекъсната в точката t_0 .

Теорема: Елементарните функции са непрекъснати във всички точки, в които са дефинирани.

Теорема: Нека функцията $y = f(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и функцията е строго монотонна, тогава обратната функция f^{-1} е непрекъсната в точката $y_0 = f(x_0)$.

5.4. Класификация на точките на прекъсване

По-долу е дадено по-детайлно условието за непрекъснатост на функцията в неизолирани точки. В една неизолирана точка $x_0 \in D_f$ функцията f е непрекъсната, ако

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функцията има прекъсване в дадена точка, ако някоя от границите не съществува или някое от неравенствата е нарушено.

Определение: Функцията $f(x)$ има прекъсване от първи род (прекъсване със скок) в точката x_0 , ако съществуват лявата и дясна граници в тази точка и не са равни

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} f(x).$$

Пример: Да се изследва функцията дробна част $\{x\} = x - [x]$ на непрекъснатост.

Решение: Функцията е периодична с период 1. Затова ще бъде разглеждана в интервала $[0; 1]$. Ако числото x_0 е различно от нула и единица, ще бъде показано, че

функцията е непрекъсната. Нека $\delta = \min(x_0, 1 - x_0)$. Тогава $\{x\} = x$ за всяко $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \{x\} = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$$

Следователно функцията е непрекъсната в тази точка.

Нека $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1, 0 < x < 1} \{x\} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \neq \{1\} = 0.$$

Нека $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0, 0 < x < 1} \{x\} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

От периодичността следва, че

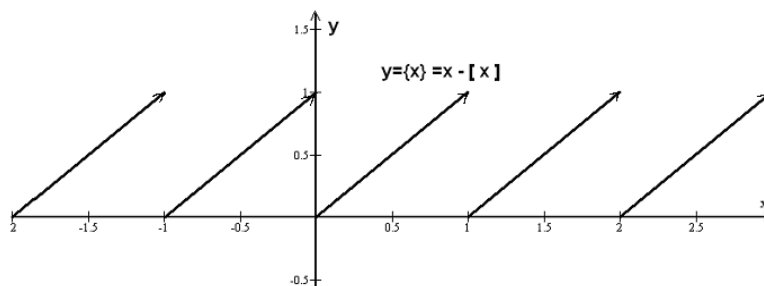
$$\lim_{x \rightarrow 0, -1 < x < 0} \{x\} = \lim_{x \rightarrow 1, 0 < x < 1} \{x\} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \neq 0.$$

От периодичността следва, че

$$\lim_{x \rightarrow 1, 1 < x < 2} \{x\} = \lim_{x \rightarrow 0, 0 < x < 1} \{x\} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

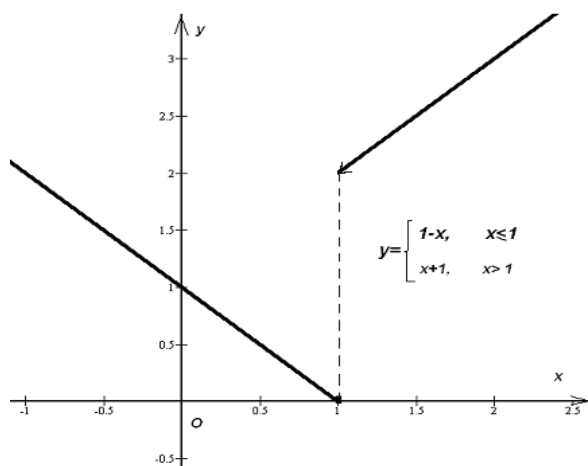
В точките 0 и 1 функцията има **прекъсване със скок**, защото

$$\lim_{x \rightarrow 0, -1 < x < 0} \{x\} = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0, 0 < x < 1} \{x\} = 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow 1, 0 < x < 1} \{x\} = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1, 1 < x < 2} \{x\} = 0 \text{ (фиг. 5.4).}$$



фиг. 5.4

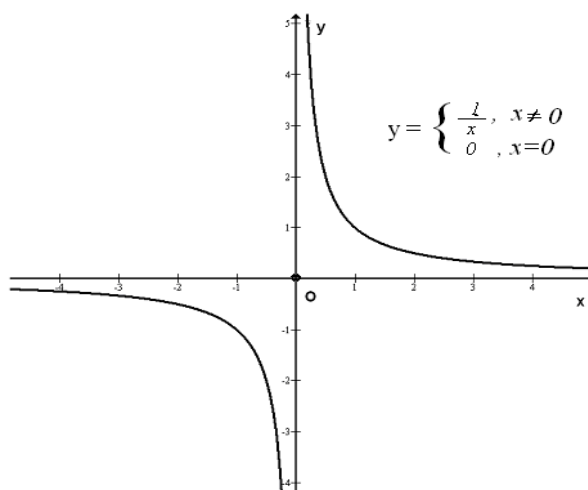
Функцията $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 1 \\ 1+x, & x > 1 \end{cases}$ има **прекъсване със скок** в точката $x=1$ (фиг. 5.5).



фиг. 5.5

Определение: Функцията $f(x)$ има прекъсване от втори род (неотстранимо прекъсване) в точката x_0 , ако не съществува границата на функцията в тази точка.

Пример: Функцията $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ има прекъсване от **втори род** в точката $x=0$.



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \pm \infty.$$

Пример: Функцията на Дирихле $y = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \text{ е рационално число} \\ 0, & \text{ако } x \text{ е ирационално число} \end{cases}$ е прекъснатата във всяка точка. Това прекъсване е от **втори род**.

Нека е избрано някакво x . Могат да бъдат избрани две сходящи към x редици, едната от рационални числа r_n , $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$, а другата от ирационални числа ξ_n , $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = x$. Тогава редицата

$$r_1, \xi_1, r_2, \xi_2, \dots, r_n, \xi_n, \dots$$

е сходяща към x , но редицата от функционални стойности

$$1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots$$

не е сходяща. Функцията има прекъсване от втори род.

Определение: Функцията $f(x)$ има прекъсване от **трети род (отстранимо прекъсване)** в точката x_0 , ако съществуват лявата и дясна граници в тази точка и са равни, но не са равни на стойността на функцията:

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

Пример: Да се изследва за непрекъснатост функцията

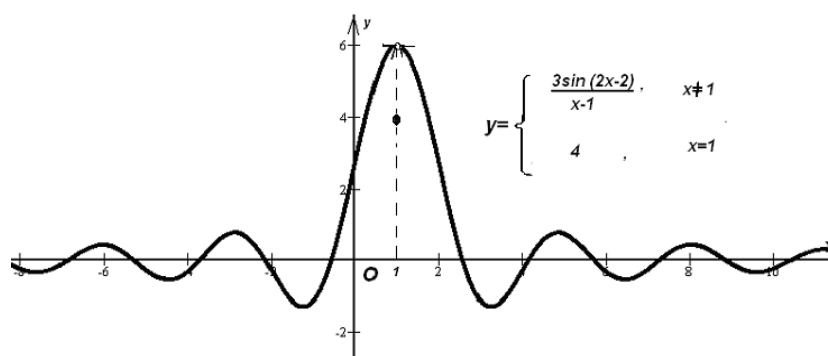
$$y = \begin{cases} \frac{3 \sin(2x-2)}{x-1}, & \text{ако } x \neq 1 \\ 4, & \text{ако } x = 1 \end{cases} \quad (\text{фиг. 5.6}).$$

Решение: Ако $x \neq 1$ функцията е дефинирана и елементарна и значи е непрекъсната.

В точката $x = 1$ имаме:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \sin 2(x-1)}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3 \sin t}{t/2} = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 6.$$

Тук бе положено $t = 2(x-1)$. Границата съществува, но не е равна на 4 – стойността на функцията в точката 1. Функцията има **отстранимо прекъсване** в точката 1.



фиг. 5.6

5.5. Свойства на непрекъснатите функции в затворен интервал

Една функция е непрекъсната в затворен интервал, ако тя е непрекъсната във всяка точка от този интервал.

Теорема: (Вайерщрас) Всяка непрекъсната функция в затворен интервал е ограничена.

Теорема: (Вайерщрас) Всяка непрекъсната функция в затворен интервал приема своята най-голяма и своята най-малка стойност.

Теорема: (Болцано-Коши) Всяка непрекъсната функция в затворен интервал, която приема в двата края на интервала стойности с различен знак се анулира поне в една точка от отворения интервал.

Теоремата дава възможност **за локализация на корен** на дадено уравнение. Например, ако се разглежда уравнението $x3^x - 4 = 0$ върху интервала $[0;2]$ може да се изчисли стойността на лявата му част за краищата на интервала:

$$f(x) = x3^x - 4, \quad f(0) = -4 < 0, \quad f(2) = 2 \cdot 3^2 - 4 = 18 - 4 = 14 > 0.$$

По теорема 3 следва, че в този интервал има корен. Ако се разгледа още стойността в точката 1 $f(1) = 3 - 4 < 0$ може да се направи изводът, че **коренът в действителност е в интервала $[1; 2]$** . По този начин може да се намалява интервала и да се уточнява корена с необходимата ни точност. В тази задача броят на корените на уравнението може да

бъде определен след записването му във вида $3^x = \frac{4}{x}$. Отляво е растяща функция, отдясно е намаляваща функция. Те имат само една пресечна точка. Уравнението има само един корен в интервала $[1; 2]$.

От теорема 3 може да направи полезно следствие, което дава обосновка на метода на интервалите при решаване на неравенства.

Следствие: Ако една непрекъсната функция се анулира в двата края на затворения интервал $[a; b]$ и няма корени във вътрешността на интервала, тя запазва своя знак вътре в интервала.

Съгласно това следствие за определяне знака на лявата част на едно неравенство от вида $f(x) > 0$ между два корена a и b на уравнението $f(x) = 0$, достатъчно е да се избере подходящо число $c \in (a; b)$ и да се изчисли $f(c)$. Знакът ще се запази в целия интервал $(a; b)$.

Теорема: (Болцано-Коши) Ако една функция е непрекъсната в затворения интервал $[a; b]$, тя приема всички стойности между най-малката и най-голямата стойност на функцията.

6. ПРОИЗВОДНА

6.1. Дефиниция и тълкуване на понятието производна

Нека е зададена функцията $y = f(x)$, $x \in D_f$. И заедно с точката x и околност $U(x, \delta) \subset D_f$. Изменението на аргумента от точката x до точката $x_2 \in U(x, \delta)$ се измерва с разликата $x_2 - x$ и се нарича **нарастване на аргумента** и се отбелязва с Δx ($\Delta x = x_2 - x$). Това изменение (нарастване) Δx на аргумента може да бъде както положително, така и отрицателно. На всяко изменение на аргумента за дадената функция съответства **изменение на функцията**, което се означава с Δy или Δf

$$\Delta f(x) = f(x_2) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Определение 6.1: **Производна на функцията** $y = f(x)$, $x \in D_f$ **в точката** x се нарича границата на частното $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, когато $\Delta x \rightarrow 0$, ако тази граница съществува.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Производната се означава $f'(x)$ или $\frac{df(x)}{dx}$.

6.2. Правила за диференциране

Ако функциите $u(x), v(x), f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми, то:

$$1^0 \quad C' = 0.$$

$$2^0 \quad (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$3^0 \quad (u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

$$4^0 \quad (ku)' = k \cdot u'.$$

$$5^0 \quad \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

$$6^0 \quad (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

Таблица на производните на основните елементарни функции

функция	производна
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$

x	1
x^2	$2x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

6.3 Производни на основните елементарни функции

1⁰ Производна на логаритмичната функция

$$x > 0, \quad (\ln x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x}{\Delta x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} =$$

$$= \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

2⁰ Производна на показателната функция

$$x \in (-\infty; \infty), \quad y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x = \log_a y.$$

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{1/y \ln a} = y \ln a = a^x \ln a,$$

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x).$$

3⁰ Производна на степенната функция

$$x > 0, \quad y = x^\alpha, \quad y = e^{\ln x^\alpha}, \quad (x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Като се ползват теоремите за четни и нечетни функции се вижда, че при цяло n горната формула е справедлива и за отрицателните стойности на аргумента.

4⁰ Производни на тригонометричните функции

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{2 \frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tg x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(cotg x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$(cotg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

5⁰ Производни на обратните тригонометрични функции

$$y = \arcsin x, \quad |x| < 1, \quad x = \sin y, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} =$$

$$\frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x = \operatorname{tg} y$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \cos^2 y = \cos^2 \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \operatorname{arctg} x} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \operatorname{arccotg} x, \quad x = \operatorname{cotg} y$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Таблица на производните на основните елементарни функции

функция	производна
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
x	1
x^2	$2x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Пример 6.3: Да се намери уравнението на допирателна към хиперболатата в точка

$(x_0; y_0)$, лежаща на хиперболатата $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение: Определя се y от уравнението:

$$-\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}, \quad y^2 = -\frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2} = \frac{b^2(x^2 - a^2)}{a^2}, \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Получава се:

$$y_0 = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x_0^2 - a^2} \quad \text{или} \quad \sqrt{x_0^2 - a^2} = \pm \frac{ay_0}{b}$$

Намира се производната в точката $(x_0; y_0)$:

$$y' = \pm \frac{b}{a} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - a^2}} = \pm \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}};$$

$$y'(x_0) = \pm \frac{bx_0}{a\sqrt{x_0^2 - a^2}} = \left(\pm \frac{bx_0}{a} \right) \left(\pm \frac{b}{ay_0} \right) = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Записва се уравнението на допирателната:

$$y - y_0 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0), \quad \frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{xx_0}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2}, \quad \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Пример . Да се намери уравнението на допирателна към параболата $y = -2x^2 + 6x$, която е успоредна на правата $y = 2x + 5$.

Решение: От условието за успоредност имаме:

$$f'(x) = k = 2; \quad -4x + 6 = 2; \quad x = 1.$$

Уравнението на допирателната има вида:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \equiv y - (-2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1) = (-4 \cdot 1 + 6)(x - 1)$$

$$y = 2x + 2.$$

6.4. Производни от по-висок ред

Втора производна се определя като производна на първата производна. Въобще, n -та производна се определя като производна на $n-1$ -та производна

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})', \quad n=2, 3, 4, \dots$$

За някои функции може да се намери формула за определянето на n -тата производна без да се изписват предходните производни.

Отначало се разглежда функцията $y = (ax + b)^\lambda$. За да се открие как се записват производните от произволен ред, се намират първите три производни:

$$y' = \lambda(ax + b)^{\lambda-1} a,$$

$$y'' = \lambda(\lambda-1)(ax + b)^{\lambda-2} a^2,$$

$$y''' = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(ax + b)^{\lambda-3} a^3$$

.....

Забелязва се следното правило: в коефициента участват толкова множители, колкото е редът на производната, множителите започват с λ и намаляват с единица, степента на скобата е равна на разликата между първоначалната степен и номера на производната, производната се умножава още с множител a на степен реда на производната.

$$y^{(n)} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)(ax + b)^{\lambda-n} a^n.$$

Пример 6.4: Да се намери n -тата производна на функцията $y = \ln(1+x)$.

Решение: Намира се първата производна:

$$y' = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}.$$

Тази функция е разгледаната по-горе като $\lambda = -1$, $a = 1$, $b = 1$. Определя се $(n-1)$ -та производна.

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = \left[(x+1)^{-1} \right]^{(n-1)} = (-1)(-1-1)(-1-2)\dots(-1-(n-1)+1)(x+1)^{-1-(n-1)} =$$

$$= (-1)(-2)(-3)\dots(-(n-1))(x+1)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}1.2.3\dots(n-1)}{(x+1)^n} = \frac{(-1)^{n-1}n!}{(1+x)^n}.$$

$$\left[\ln(1+x) \right]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}n!}{(1+x)^n}$$

Пример 6.5: Да се намери n -тата производна на функцията $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

Решение: Разлага се на елементарни дробни функцията y и се диференцира:

$$y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}.$$

$$y^{(n)} = \left[(x-3)^{-1} \right]^{(n)} - \left[(x-2)^{-1} \right]^{(n)} = (-1)(-2)\dots(-(n)) \left[(x-3)^{-1-n} - (x-2)^{-1-n} \right] =$$

$$(-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-3)^{n+1}} - \frac{1}{(x-2)^{n+1}} \right].$$

Производна от n -ти ред на функцията $y = \sin x$ е:

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = (y'')' = \left(\sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \right)' = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

При всяко диференциране отговорът е синус като аргументът се променя. Към аргумента се добавя при всяко диференциране числото $\frac{\pi}{2}$.

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Производна от n -ти ред на функцията $y = \cos x$.

$$y^{(n)} = (\cos(x))^{(n)} = \left(-\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right)^{(n)} = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

С използването на формулата за диференциране на сложна функция се получава:

$$(\sin(ax+b))^{(n)} = a^n \sin\left(ax+b+n\frac{\pi}{2}\right), \quad (\cos(ax+b))^{(n)} = a^n \cos\left(ax+b+n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(e^{ax+b})^{(n)} = a^n e^{ax+b}.$$

Пример 6.6: Да се намери n -тата производна на функцията

$$y = 2\cos^2 x + 2\sin 2x \cos 3x.$$

Решение: Представя се функцията като алгебричен сбор от тригонометрични функции от първа степен.

$$y = 1 + \cos 2x + \sin 5x - \sin x.$$

Намира се n -тата производна.

$$y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) + 5^n \sin\left(5x + n\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

6.5 Логаритмична производна

$$y = u^v, \quad \ln y = \ln u^v = v \ln u, \quad \frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}, \quad y' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right)$$

$$\left((\cos x)^{3x^2} \right)' = (\cos x)^{3x^2} \left(6x \ln \cos x + 3x^2 \left(-\frac{\sin x}{\cos x} \right) \right) =$$

$$\left((\cos x)^{3x^2} \right)' = 3x (\cos x)^{3x^2} (2 \ln \cos x - x \cotg x)$$

6.6. Диференциал

Диференциал на една функция $y = f(x)$ се нарича главната линейна част от нарастването на функцията.

Нека е зададена функцията $y = \frac{4}{3} \pi r^3$. Нарастването ѝ е равно на

$$\Delta y = \frac{4}{3} \pi (r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (r^3 + 3r^2 \Delta r + 3r (\Delta r)^2 + (\Delta r)^3 - r^3) =$$

$$\frac{4}{3}\pi 3r^2\Delta r + \frac{4}{3}\pi 3r(\Delta r)^2 + \frac{4}{3}\pi(\Delta r)^3 = \frac{4}{3}\pi 3r^2\Delta r + \left(\frac{4}{3}\pi 3r\Delta r + \frac{4}{3}\pi(\Delta r)^2\right)\Delta r.$$

Нарастването се състои от две събираеми. Първото е линейно относно Δr и представлява диференциала на функцията. Второто събираемо съдържа Δr във втора и трета степен, т.е. това е нелинейна част.

$$dy = \left(\frac{4}{3}\pi 3r^2\right)\Delta r = y'\Delta r.$$

Получената формула е справедлива за всяка диференцируема функция:

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0, \quad df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Ако се разгледа функцията $y = x$, диференциалът ѝ е равен на $dx = dy = 1\Delta x$. В бъдеще вместо Δx се записва dx и формулата за диференциала има вида:

$$df(x) = f'(x)dx.$$

От таблицата на производните се получава таблицата на диференциалите:

$$\begin{array}{lll} 1. \quad dx^n = nx^{n-1}dx & 2. \quad d \ln x = \frac{dx}{x} & 3. \quad da^x = a^x \ln a \, dx \\ 4. \quad d \sin x = \cos x \, dx & 5. \quad d \cos x = -\sin x \, dx & 6. \quad d \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ 7. \quad d \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\sin^2 x} dx & 8. \quad d \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & 9. \quad d \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ 10. \quad d \arctg x = \frac{1}{1+x^2} dx & 11. \quad d \operatorname{arccotg} x = -\frac{1}{1+x^2} dx \end{array}$$

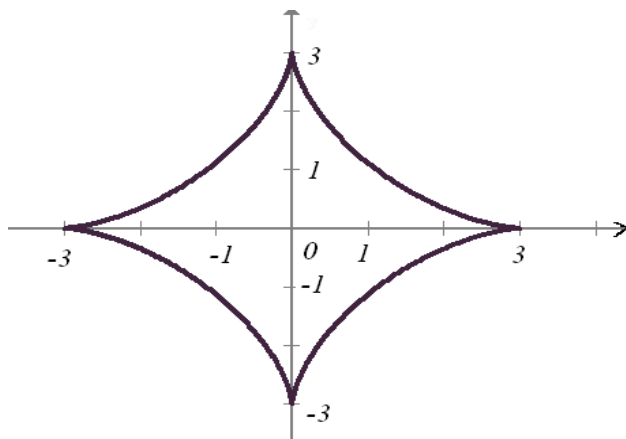
От формулата за диференциала на една функция се получава ново записване на производната като отношение на два диференциала:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Ако линията $y = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$ е зададена посредством параметър t , производната ѝ се намира по горната формула:

$$f'(\varphi(t)) = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi'(t)dt} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

Пример 6.7: Дадена е астроида $y = 3\cos^3 t$, $x = 3\sin^3 t$, $t \in [0; 2\pi)$.



Да се определи производната за всяка стойност на параметъра $t \neq 0; \pi$.

Решение: $dy = 3 \cdot 3 \cdot \cos^2 t (-\sin t) dt$, $dx = 3 \cdot 3 \cdot \sin^2 t \cos t dt$,

$$f'(x(t)) = \frac{dy}{dx} = \frac{-3 \cdot 3 \cdot \cos^2 t \sin t dt}{3 \cdot 3 \cdot \sin^2 t \cos t dt} = \frac{-\cos t}{\sin t} = -\cot t.$$

Диференциалът притежава следните свойства:

$$1^0 \quad dC = 0.$$

$$2^0 \quad d(u \pm v) = du \pm dv.$$

$$3^0 \quad d(ku) = kdu.$$

$$4^0 \quad d(u \cdot v) = vdu + u dv.$$

$$5^0 \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}.$$

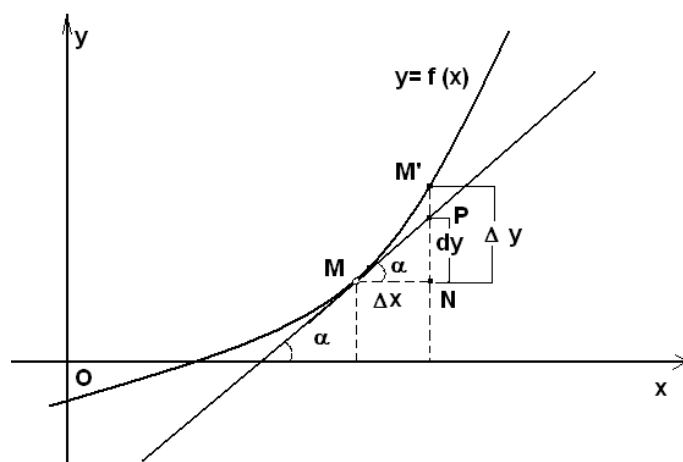
$$6^0 \quad df(x(t)) = f'(x(t)) dx(t).$$

Доказателство на свойство 5^0 .

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u'v - uv'}{v^2} dx = \frac{vu' dx - uv' dx}{v^2} = \frac{vdu - u dv}{v^2}.$$

Доказателството на останалите свойства се извършва аналогично.

Нека е дадена линията $y = f(x)$ и допирателната MP в точката M към кривата.



фиг. 6.2

Диференциалът в точката M е равен на нарастването на ординатата на допирателната. Това се вижда от изчисленията:

$$\overline{NP} = \overline{MN} \operatorname{tg} \alpha = f'(x) \Delta x = dy.$$

Диференциалът е източник на приблизителни формули: $\Delta y \approx dy$ или

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x \Rightarrow f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x.$$

Например $\sqrt{1 + \Delta x} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \Delta x = 1 + \frac{1}{2} \Delta x$; $e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x$; $\ln(1 + \Delta x) \approx \Delta x$;

$$\sin \Delta x \approx \sin 0 + \cos 0 \cdot \Delta x = \Delta x; \quad 1 - \cos \Delta x = 2 \sin^2 \frac{\Delta x}{2} \approx 2 \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 = \frac{(\Delta x)^2}{2}.$$

7. СВОЙСТВА НА ДИФЕРЕНЦИРУЕМИТЕ ФУНКЦИИ

В тази тема ще бъдат разгледани основните теореми на диференциалното смятане на функция на една променлива.

Теорема 7.1 (Ферма⁹). Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в отворения интервал $(a; b)$ и във точка $c \in (a; b)$ приема своята най-голяма /най-малка/ стойност. Ако функцията има производна в точката c , то необходимо $f'(c) = 0$.

Доказателство. От условието на теоремата следва, че $f(c) > f(x)$, за всяко $x \in (a; b)$, $x \neq c$. Доказателството се извършва с допускане на противното. Нека

⁹ Теоремата се нарича теорема на Ферма, защото в нея се използва метода на Ферма за търсене на екстремуми, но Ферма не е знаел какво е производна.

производната $f'(c) \neq 0$ и например $f'(c) > 0$. Тогава в някаква околност на точката c $(c - \delta; c + \delta)$, $\delta > 0$ е справедливо:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0, \quad x \in (c - \delta; c + \delta).$$

Неравенството следва от границата $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) > 0$. Горното неравенство влиза в противоречие с това, че в точката c функцията има най-голяма стойност.

Аналогично, ако се допусне, че $f'(c) < 0$ се получава $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0, x \in (c - \delta; c)$, макар че числителят и знаменателят са отрицателни. Получените противоречия показват, че $f'(c) = 0$.

От теоремата на Ферма следва, че функцията има екстремум евентуално в точките от множеството:

$$E = \{x \in D_f : f'(x) = 0\} \cup \{x \in D_f : f'(x) \text{ не съществува}\}.$$

Точките от множеството E се наричат критични точки.

От теоремата на Ферма се получава следния резултат, който се привежда без доказателство.

Теорема 7.2 (Дарбу) Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в интервала $[a; b]$. Тогава производната $f'(x)$ приема всички междинни стойности между числата $f'(a)$ и $f'(b)$.

Теорема 7.3. (М.Рол) Нека $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a; b]$, диференцируема поне в отворения интервал $(a; b)$ и в двата края на интервала приема равни стойности: $f(a) = f(b)$. Тогава съществува поне една точка c , в която $f'(c) = 0$.

Доказателство: Ако функцията $f(x)$ е константа $f'(x) = 0$ за всяка точка от интервала $(a; b)$. Точката c е коя да е точка от интервала.

Нека сега $f(x) \neq C$. По теоремата на Вайерщрас функцията приема своята най-голяма стойност M и своята най-малка стойност m в точките x_1 и x_2 като $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$, $m < M$. Ще бъде показано, че поне една от точките x_1 и x_2 е вътрешна за интервала $(a; b)$. Допуска се обратното, че и двете точки не са вътрешни, т.е. те са крайни. Например $a = x_1$, $b = x_2$. Тогава неравенството

$$f(a) = M > m = f(b)$$

влиза в противоречие с третото условие на теоремата $f(a) = f(b)$. Следователно поне една от точките x_1 и x_2 е вътрешна за интервала $(a; b)$. Тази вътрешна точка се означава с буквата c . От теоремата на Ферма следва, че $f'(c) = 0$.

Пример 7.1. Ако $a > 0$ и за числото $x_1 > 0$ $2ax_1^3 + 3bx_1^2 + 6cx_1 + 6 < 0$, то $b^2 > 4ac$.

Решение: Функцията $f(x) = 2ax^3 + 3bx^2 + 6cx + 6$ притежава следните свойства:

а) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ и значи, съществува $x_0 < 0$, $f(x_0) < 0$;

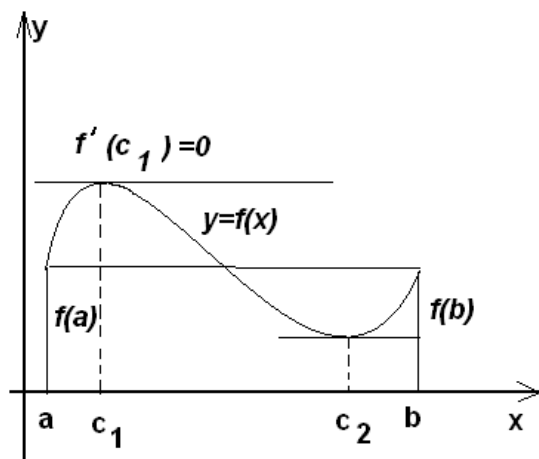
б) $f(0) = 6 > 0$, $f(x_1) < 0$;

в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ и значи, съществува $x_2 > x_1$, $f(x_2) > 0$.

От тези свойства и теоремата на Болцано-Коши следва, че съществуват три корена ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 $f(\xi_1) = 0$, $f(\xi_2) = 0$, $f(\xi_3) = 0$. Прилага се теоремата на Рол два пъти за всеки от интервалите $[\xi_1; \xi_2]$, $[\xi_2; \xi_3]$ и се намират две точки c_1 и c_2 , в които $f'(c_1) = 0$, $f'(c_2) = 0$. Понеже $f'(x) = 6(ax^2 + bx + c)$ и квадратното уравнение $f'(x) = 6(ax^2 + bx + c) = 0$ има два различни корена, неговата дискриминанта е по-голяма от нула, т.е. $b^2 - 4ac > 0$.

Пример 7.2. Да се докаже, че уравнението $x^3 + x - 100 = 0$ има само един реален корен.

Решение: Уравнението има поне един реален корен, защото $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x - 100) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x - 100) = +\infty$. Ако се допусне, че има поне два корена, те могат да бъдат различни или да съвпадат. Ако са различни, може да се приложи теоремата на Рол на интервала между корените. Тогава производната трябва да има корен в този интервал. От друга страна уравнението $(x^3 + x - 100)' = 3x^2 + 1 = 0$ няма реални корени. Полученото противоречие показва, че уравнението не може да има два или три различни корена. Ако едно уравнение има двоен корен, то този корен е корен и на производната. (Ако $f(x) = (x - \alpha)^2 \varphi(x)$, $f'(x) = (x - \alpha)[2\varphi(x) + (x - \alpha)\varphi'(x)]$) В нашия случай това е невъзможно, защото производната няма корени. Следователно уравнението $x^3 + x - 100 = 0$ има само един реален корен.



фиг. 7.1

Геометричната интерпретация на теоремата на Рол /фиг.1/ е следната: ако са изпълнени условията на теоремата/ функцията е непрекъсната в затворения интервал, диференцируема поне в отворения интервал и в двата края ординатите са равни/ съществува точка c , в която допирателната е успоредна на абсцисната ос. Последното означава, че съществува поне една точка, в която допирателната е успоредна на хордата, съединяваща точките $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$. В тази формулировка не се иска допирателната да бъде успоредна на абсцисната ос /успоредността следва от равенството на ординатите/. В тази геометрична формулировка теоремата е доказана от Лагранж.

Теорема 7.4. (Лагранж) Ако функцията $y = f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a; b]$ и диференцируема поне в отворения интервал $(a; b)$, то съществува поне една точка c , в която

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Доказателство: Да е зададена функцията $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$ в този интервал. Тя е непрекъсната, диференцируема и в двата края приема равни стойности:

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a = \frac{bf(a) - af(a) - af(b) + af(a)}{b - a} = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \\ g(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b = \frac{bf(b) - af(b) - bf(b) + bf(a)}{b - a} = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}, \\ g(a) &= g(b). \end{aligned}$$

За тази функция са изпълнени условията на теоремата на Рол. Тогава съществува точка c , в която $g'(c) = 0$, т.е.

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \text{или} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

От тази теорема се получават три важни следствия:

Следствие 7.1. Ако една функция е непрекъсната в затворен интервал, диференцируема поне в отворен интервал и производната ѝ е равна на нула, то тя е константа в този интервал.

Доказателство: Нека функцията се разглежда в интервала $[a; x] \subset [a; b]$ и за нея се записва теоремата на Лагранж:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f'(c)(b - a) = 0. \\ f(x) &= f(a), \quad \forall x \in [a; b]. \end{aligned}$$

Следствие 7.2. Ако две функции $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в затворения интервал, диференцируеми поне в отворения интервал и имат равни производни, те се отличават с константа, т.е. $f(x) - g(x) = C$.

Доказателство: Въвежда се функцията $h(x) = f(x) - g(x)$. Тя изпълнява условията на следствие 1 и затова е константа, т.е. $f(x) - g(x) = C$.

Следващото следствие представлява критерий за монотонност на функциите.

Следствие 7.3. Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в $[a; b]$, диференцируема поне в $(a; b)$ и има неотрицателна (неположителна) производна като производната е равна на нула най-много в краен брой точки, функцията е строго растяща (намаляваща).

Доказателство: Нека $f'(x) > 0$, $x \in (a; b)$. Тогава за $a \leq x_1 < x_2 \leq b$
 $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$ и $f(x_1) < f(x_2)$, т.е. функцията е строго растяща.
 Нека производната се обръща в нула в точките $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k$. Разглежда се функцията в интервалите $[a; \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2]$, $\dots$, $[\xi_k; b]$. Според доказаното, тя е строго растяща на всеки от тези интервали и значи, тя е строго растяща на целия интервал.

Пример 7.3. Да се докаже, че единствената функция, която съвпада със своята производна е $C.e^x$.

Решение: Разглежда се функцията $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, където $f'(x) = f(x)$, $x \in (-\infty; \infty)$.

Тогава $g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{f(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = 0$. От следствие 2 следва, че $g(x) = C$,

т.е. $\frac{f(x)}{e^x} = C$, $f(x) = Ce^x$.

Следствие 1 често служи за доказателство на твърдения.

Пример 7.4. Да се докаже, че при $x \geq 1$

$$2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi.$$

Решение: Разглежда се функцията

$$f(x) = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

в интервала $[1; A]$, $A > 1$, A произволно.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{2 \frac{1+x^2-2x \cdot x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} = \\ &= \frac{2}{1+x^2} \left[1 - \frac{x^2-1}{x^2-1} \right] = 0, \quad x > 1. \end{aligned}$$

По следствие 1 функцията е константа във всеки интервал $[1; A]$, $A > 1$. Избира се една точка и се изчислява функцията. По този начин се определя константата. Полага се $x = 1$.

$$C = f(1) = 2\operatorname{arctg} 1 + \arcsin \frac{2}{1+1} = 2\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Забележка: Ако дефиниционното множество се състои от няколко интервала, възможно е в различните интервали константите да са различни.

С помощта на теоремата на Лагранж могат да се доказват неравенства.

Пример 7.5. Да се докаже неравенството:

$$\ln(1-x) \geq -x - \frac{x^2}{2(1-x)}, \quad x \in [0; 1).$$

Доказателство: За всяко $x < 1$ се взема число a , $x < a < 1$ и се разглежда функцията

$$f(x) = \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2(1-x)}$$

на интервала $[0; a]$. Намира се производната ѝ:

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 + \frac{2x(1-x) + x^2}{2(1-x)^2} = \frac{x^2}{2(1-x)^2} > 0, \quad x \in (0; a).$$

Функцията е растяща, т.е. $f(x) > f(0)$ при $x \in (0; a)$, или

$$\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2(1-x)} > 0, \text{ или } \ln(1-x) \geq -x - \frac{x^2}{2(1-x)}, \quad x \in [0; 1).$$

Теорема 7.5. (Коши) Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в затворения интервал $[a; b]$, диференцируеми поне в отворения интервал $(a; b)$ и $g'(x) \neq 0$, $x \in (a; b)$.

Тогава съществува поне една точка $c \in (a; b)$, в която

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказателство: Първо ще отбележим, че $g(b) \neq g(a)$, иначе от теоремата на Рол би съществувала точка $\xi \in (a; b)$, в която $g'(\xi) = 0$, което противоречи на условието на теоремата. Доказателството се провежда както в теоремата на Лагранж. Разглежда се функцията

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x), \quad x \in [a; b].$$

Тя е непрекъсната в затворения интервал, диференцируема поне в отворения интервал.

В краищата на интервала приема равни стойности:

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(a) = \frac{f(a)g(b) - f(a)g(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a)}{g(b) - g(a)} = \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)} \\ h(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(b) = \frac{f(b)g(b) - f(b)g(a) - f(b)g(b) + f(a)g(b)}{g(b) - g(a)} = \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)}, \end{aligned}$$

т.е.

$$h(a) = h(b).$$

Към функцията $h(x)$ се прилага теоремата на Рол. Съществува точка $c \in (a; b)$, в която

$$h'(c) = 0,$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0,$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Теорема 7.6 (правило на Лопитал). Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в интервала $(a; b]$, диференцируеми поне в отворения интервал $(a; b)$, $g'(x) \neq 0$, $x \in (a; b)$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$) и

съществува границата $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ / крайна или безкрайна/. Тогава

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Доказателство: Ще бъде приведено доказателството на един от случаите в теоремата, когато a е крайно число, границите са : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Доопределят се двете функции в точката a по непрекъснатост като се полага $f(a) = 0$, $g(a) = 0$. На интервала $[a; x] \subseteq [a; b]$ са изпълнени условията на теоремата на Коши.

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b,$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b.$$

Преминава се към граница като $x \rightarrow a$, $\Rightarrow c \rightarrow a$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad a < c < b.$$

Последното равенство е написано като се ползва, че границата $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

съществува и по всяка подредица границата е същата. Теоремата е доказана.

Забележка. Теоремата е справедлива, ако a е безкрайност; също така е справедлива при $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Теоремата може да се приложи многократно.

Пример 7. 6. Да се изчисли границата:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\ln(1 + \sin 4x)}.$$

Решение: Числителят и знаменателят са непрекъснати и диференцируеми функции в околност на нулата, производната на знаменателя е различна от нула в тази околност. За съществуването на границата от производните можем да се убедим в процеса на изчисляване на границата.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\ln(1 + \sin 4x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+4x^2}}{\frac{4 \cos x}{1 + \sin 4x}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Пример 7.7. Да се изчисли границата:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_x \sin x.$$

Решение: Премазва се към натурален логаритъм:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_x \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1.$$

За останалите неопределености правилото на Лопитал не се прилага директно. При неопределеност от вида $0 \cdot \infty$, единият от множителите се записва във втория

знаменател $\left(f \cdot g = \frac{g}{1/f} \right).$

Пример 7.8. Да се изчисли границата:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln \frac{\operatorname{arccotg} x}{\pi}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln \frac{\operatorname{arccotg} x}{\pi} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln \frac{\operatorname{arccotg} x}{\pi}}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{arccotg} x} \left(-\frac{1}{1+x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{2x} \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

При неопределеност от вида $\infty - \infty$, изразът се привежда към общ знаменател. Ако няма знаменател, двете събираеми се записват във втория знаменател и се привеждат към

общ знаменател $\left(f - g = \frac{1}{\cancel{1/f}} - \frac{1}{\cancel{1/g}} = \frac{\cancel{1/g} - \cancel{1/f}}{\cancel{1/f} \cdot \cancel{1/g}} \right).$

Пример 7.9. Да се изчисли границата:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{6}{x \cdot \operatorname{tg}(2x)} \right).$$

Решение:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{6}{x \cdot \operatorname{tg}(2x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \operatorname{tg}(2x) - 6x}{x^2 \operatorname{tg}(2x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{6}{\cos^2 2x} - 6}{2x \operatorname{tg}(2x) + x^2 \frac{2}{\cos^2 2x}} =$$

$$= 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \left(\frac{\operatorname{tg}(2x)}{2x} + \frac{1}{\cos^2 2x} \right)} =$$

$$= 6 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos 2x (-\sin 2x) 2}{2x} \cdot \frac{1}{6} = 4.$$

Неопределеностите от вида 1^∞ , 0^0 , ∞^0 се решават с предварително логаритмуване.

Пример 7.10. Да се изчисли границата:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{\ln 5}{\cos x + \ln x}}.$$

Решение: Нека $A = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{\ln 5}{\cos x + \ln x}}$. Логаритмуват се двете страни на това равенство.

$$\ln A = \ln \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{\ln 5}{\cos x + \ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^{\frac{\ln 5}{\cos x + \ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 5 \ln x}{\cos x + \ln x} = \ln 5 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\sin x + \frac{1}{x}} =$$

$$= \ln 5 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - x \sin x} = \ln 5.$$

$$\ln A = \ln 5$$

$$A = 5.$$

В част от задачите е необходимо правилото на Лопитал да се прилага няколко пъти.

Пример 7.11. Да се изчисли границата:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - \sin 3x + \cos 3x - 2}{x - \sin x}.$$

Решение: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - \sin 3x + \cos 3x - 2}{x - \sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x} - 3\cos 3x - 3\sin 3x}{1 - \cos x} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9e^{3x} + 9\sin 3x - 9\cos 3x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{27e^{3x} + 27\cos 3x + 27\sin 3x}{\cos x} = \frac{54}{1} = 54.$$

При изследването на една диференцируема функцията в околността на дадена точка a стойностите ѝ могат да бъдат апроксимирани чрез стойността ѝ в точката a и стойността на производната ѝ в точката a , т.е.

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) \text{ или } f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \alpha(x-a), \lim_{x \rightarrow a} \alpha = 0.$$

В тази формула функцията е представена чрез един полином от първа степен. Ако функцията има втора производна в точката a , тя може да бъде

6.4. Производни от по-висок ред (продължение на лекция 5)

Втора производна се определя като производна на първата производна. Въобще, n -та производна се определя като производна на $n-1$ -та производна

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)} \right)', \quad n=2, 3, 4, \dots$$

За някои функции може да се намери формула за определянето на n -тата производна без да се изписват предходните производни.

Отначало се разглежда функцията $y = (ax+b)^\lambda$. За да се открие как се записват производните от произволен ред, се намират първите три производни:

$$y' = \lambda(ax+b)^{\lambda-1} a,$$

$$y'' = \lambda(\lambda-1)(ax+b)^{\lambda-2} a^2,$$

$$y''' = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(ax+b)^{\lambda-3} a^3$$

.....

Забелязва се следното правило: в коефициента участват толкова множители, колкото е редът на производната, множителите започват с λ и намаляват с единица, степента на

скобата е равна на разликата между първоначалната степен и номера на производната, производната се умножава още с множител a на степен реда на производната.

$$y^{(n)} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)(ax+b)^{\lambda-n}a^n.$$

Пример 6.4: Да се намери n -тата производна на функцията $y = \ln(1+x)$.

Решение: Намира се първата производна:

$$y' = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}.$$

Тази функция е разгледаната по-горе като $\lambda = -1$, $a = 1$, $b = 1$. Определя се $(n-1)$ -та производна.

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (y')^{(n-1)} = \left[(x+1)^{-1}\right]^{(n-1)} = (-1)(-1-1)(-1-2)\dots(-1-(n-1)+1)(x+1)^{-1-(n-1)} = \\ &= (-1)(-2)(-3)\dots(-(n-1))(x+1)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}1.2.3\dots(n-1)}{(x+1)^n} = \frac{(-1)^{n-1}n!}{(1+x)^n}. \end{aligned}$$

$$\boxed{[\ln(1+x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}n!}{(1+x)^n}}$$

Пример 6.5: Да се намери n -тата производна на функцията $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

Решение: Разлага се на елементарни дробни функцията y и се диференцира:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}. \\ y^{(n)} &= \left[(x-3)^{-1}\right]^{(n)} - \left[(x-2)^{-1}\right]^{(n)} = (-1)(-2)\dots(-(n))\left[(x-3)^{-1-n} - (x-2)^{-1-n}\right] = \\ &= (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-3)^{n+1}} - \frac{1}{(x-2)^{n+1}} \right]. \end{aligned}$$

Производна от n -ти ред на функцията $y = \sin x$ е:

$$\begin{aligned} y' &= (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\ y'' &= \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \\ y''' &= (y'')' = \left(\sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) \\ &\dots \end{aligned}$$

При всяко диференциране отговорът е синус като аргументът се променя. Към аргумента се добавя при всяко диференциране числото $\frac{\pi}{2}$.

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Производна от n -ти ред на функцията $y = \cos x$.

$$y^{(n)} = (\cos(x))^{(n)} = \left(-\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)^{(n-1)} = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2} + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

С използването на формулата за диференциране на сложна функция се получава:

$$(\sin(ax+b))^{(n)} = a^n \sin\left(ax+b+n\frac{\pi}{2}\right), \quad (\cos(ax+b))^{(n)} = a^n \cos\left(ax+b+n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(e^{ax+b})^{(n)} = a^n e^{ax+b}.$$

Пример 6.6: Да се намери n -тата производна на функцията

$$y = 2\cos^2 x + 2\sin 2x \cos 3x.$$

Решение: Представа се функцията като алгебричен сбор от тригонометрични функции от първа степен.

$$y = 1 + \cos 2x + \sin 5x - \sin x.$$

Намира се n -тата производна.

$$y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) + 5^n \sin\left(5x + n\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Формули на Тейлър и Маклорен (продължение на лекция 5)

При изследването на една диференцируема функцията в околността на дадена точка a , стойностите ѝ могат да бъдат апроксимирани чрез стойността ѝ в точката a и стойността на производната ѝ в точката a , т.е.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \approx f'(a), \quad f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

В действителност

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + \alpha(x - a), \quad \text{където } \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x - a) = 0.$$

Тогава

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \alpha(x-a).(x-a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x-a) = 0.$$

В тази формула функцията е представена чрез един полином $f(a) + f'(a)(x-a)$ от първа степен. Ако функцията има втора производна в точката a , тя може да бъде представена чрез полином от втора степен и т.н. В общия случай е справедлива следната формула на Тейлър.

$$f(x) = T_n(x) + R_n, \text{ където } T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

или

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n.$$

Тук в остатъка $R_n(x)$ е включено всичко, което е различно от полинома на Тейлър $T_n(x)$, т.е. $R_n = f(x) - T_n(x)$. Интересно е какви свойства има този остатъчен член, кога е равен на нула, кога клони към нула и колко бързо клони към нула.

Теорема. Ако функцията $f(x)$ е полином със степен не по-висока от n , остатъчният член $R_n(x)$ е равен тъждествено на нула.

Доказателство. Намираме последователно производните на остатъчния член $R_n(x)$ и стойностите му в точката $x = a$:

$$R_n(a) = f(a) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(a-a) - \frac{f''(a)}{2!}(a-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(a-a)^n = 0,$$

$$R_n(a) = 0$$

$$R_n'(x) = f'(x) - \frac{f'(a)}{1!} - \frac{2f''(a)}{2!}(x-a) - \frac{3f'''(a)}{3!}(x-a)^2 - \dots - \frac{nf^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-1} =$$

$$R_n'(x) = f'(x) - f'(a) - \frac{f''(a)}{1!}(x-a) - \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}.$$

$$R_n'(a) = f'(a) - f'(a) - \frac{f''(a)}{1!}(a-a) - \frac{f'''(a)}{2!}(a-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(a-a)^{n-1} = 0,$$

$$R_n'(a) = 0$$

$$R_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - \frac{(n-1)!f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} - \frac{n(n-1)\dots 2f^{(n)}(a)}{n!}(x-a) =$$

$$R_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a),$$

$$R_n^{(n-1)}(a) = f^{(n-1)}(a) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(a-a) = 0,$$

$$R_n^{(n-1)}(a) = 0$$

$$R_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - \frac{n! f^{(n)}(a)}{n!} = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) = 0, \quad \forall x,$$

$$R_n^{(n)}(x) = 0, \quad \forall x.$$

Разсъжденията провеждаме от последното равенство към предходните. Понеже функцията е полином със степен не по-висока от n , то $f^{(n)}(x)$ е константа, т.е. $f^{(n)}(x) = f^{(n)}(a)$ и $R_n^{(n)}(x) = 0, \quad \forall x$. От следствието на теоремата на Лагранж следва, че функцията $R_n^{(n-1)}(x) = C, \quad \forall x$. Понеже $R_n^{(n-1)}(a) = 0$, то $C = 0$ и $R_n^{(n-1)}(x) = 0, \quad \forall x$. Понеже $R_n^{(n-1)}(x)$ е производна на $R_n^{(n-2)}(x)$ от следствието на теоремата на Лагранж следва, че функцията $R_n^{(n-2)}(x) = C, \quad \forall x$. От равенството $R_n^{(n-2)}(a) = 0$ следва $R_n^{(n-2)}(x) = 0, \quad \forall x$ и т.н. до $R_n(x) = 0$.

Теорема 7.7: (Дж. Пеано) Ако функцията $f(x)$ има n производни в точката a , то

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \alpha_x(x-a)^n, \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha_x = 0.$$

Доказателство: За да се докаже, че $\lim_{x \rightarrow a} \alpha_x = 0$, α_x се определя от горното равенство и след това се преминава към граница като се ползва правилото на Лопитал $(n-1)$ - пъти в околност на точката a :

$$\alpha_x = \frac{f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{\frac{(x-a)^n}{n!}}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha_x = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{\frac{(x-a)^n}{n!}} =$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a) - \frac{f''(a)}{1!}(x-a) - \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}}{\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}} = \\
& \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x) - f''(a) - \frac{f'''(a)}{1!}(x-a) - \frac{f^{(4)}(a)}{2!}(x-a)^2 \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}}{\frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!}} = \dots = \\
& \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - \frac{f^{(n)}(a)}{1!}(x-a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} - f^{(n)}(a) \right] = \\
& = [f^{(n)}(a) - f^{(n)}(a)] = 0.
\end{aligned}$$

(Тук бе използвано, че функцията $f(x)$ има n - та производна в точката a , която е първа производна $f^{(n-1)}(x)$ и по дефиниция е равна на $f^{(n)}(a) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \right]$).

Получената формула

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n, \quad R_n = \frac{\alpha_x}{n!}(x-a)^n,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha_x = 0.$$

се нарича **формула на Б. Тейлър** с остатъчен член, даден от италианския математик Джузепе Пеано.

Ако функцията има $(n+1)$ производни в околността на точката a , то

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n,$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad a < c < x \text{ или } x < c < a.$$

В този случай остатъчният член е получен от Лагранж.

Теорема (Лагранж). Нека функцията в околността на точката a има n непрекъснати производни в $[a; x]$ и $n+1$ производна в интервала $(a; x)$. Тогава

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Доказателство. Разглеждаме функциите

$$F(z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x-z) - \frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n \quad \text{и} \quad G(z) = (x-z)^{n+1} \quad \text{в}$$

интервала $[a; x]$. Те изпълняват условията на теоремата на Коши. Записваме заключението:

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}, \quad a < c < x.$$

$$F(x) = 0, \quad F(a) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

$$F'(c) = -f'(c) - \frac{f''(c)}{1!}(x-c) + \frac{f'(z)}{1!} - \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{2f''(c)}{2!}(x-c) +$$

$$\dots + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{nf^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n-1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

$$G(x) = 0, \quad G(a) = (x-a)^{n+1}; \quad G'(c) = (n+1)(x-c)^n.$$

След заместването се получава:

$$\frac{f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^{n+1}} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{(n+1)(x-c)^n} \quad \text{или след}$$

съкращаването на $(x-c)^n$ се получава:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Формулата на Б.Тейлър, когато $a=0$ се нарича **формула на Маклорен**. Тя има вида

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \theta \in (0, x)$$

и е една от най-често използваните формули от този вид.

Пример 7.13: Да се запише формулата на Маклорен за функцията e^x и да се избере n , че остатъчният член да е по-малък от 0.01 за всички $|x| \leq 10$.

Решение: Изчисляват се последователно коефициентите на полинома на Маклорен.

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(x) = (e^x)' = e^x, \quad f'(0) = e^0 = 1, \dots, \quad f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} = e^x, \quad f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n, \quad R_n = \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

За да се намери n , решава се неравенството

$$R_n = \left| \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{3^{10}}{(n+1)!} 10^{n+1} < 0.01$$

При $n=38$ неравенството се изпълнява. Това означава, че този полином от 38 степен може да се изчислява трансцендентната функция e^x за всички $|x| \leq 10$ с точност до 0.01.

Пример 7.14: Да се запише формулата на Маклорен за функцията $\ln(1+x)$.

Решение: $f(0) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f'(0) = 1$,

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!, \quad k > 1$$

$$\ln(1+x) = 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{1!}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{n!}x^n + R_n,$$

$$R_n = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!(1+\theta)^{n+1}} x^{n+1},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}} x^{n+1}.$$

Пример 7.15: Да се развие по формулата на Маклорен функцията $y = \cos x$.

Решение: $f(x) = \cos x$, $f(0) = \cos 0 = 1$, $f'(x) = -\sin(x)$, $f'(0) = 0$,

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & k = 2l-1, l \in \mathbb{N} \\ (-1)^l, & k = 2l, l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\cos x = 1 + 0 + \frac{(-1)x^2}{2!} + 0 + \frac{(-1)^2 x^4}{4!} + 0 + \frac{(-1)^3 x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{\cos(\theta + (k+1)\pi) x^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{\cos(\theta + (k+1)\pi) x^{2k+2}}{(2k+2)!}.$$

8. ИЗСЛЕДВАНЕ НА ФУНКЦИИТЕ

Растене и намаляване на функциите

Следствие от теоремата на Лагранж. Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в $[a;b]$, диференцируема поне в $(a;b)$ и има неотрицателна (неположителна) производна

като производната е равна на нула най-много в краен брой точки, функцията е строго растяща (намаляваща).

Доказателство: Нека $f'(x) > 0$, $x \in (a; b)$. Тогава за $a \leq x_1 < x_2 \leq b$
 $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$ и $f(x_1) < f(x_2)$, т.е. функцията е строго растяща.
 Нека производната се обръща в нула в точките $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k$. Функцията се разглежда в интервалите $[a; \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2]$, $\dots$, $[\xi_k; b]$. Според доказаното, тя е строго растяща на всеки от тези интервали и значи, тя е строго растяща на целия интервал.

Пример. Да се покаже, че функцията $y = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ е растяща на интервала $[0; 1]$.

Решение. Определяме производната $y' = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1+x^2-1}{1+x} > 0$, $x > 0$.

Съгласно следствието функцията е растяща.

8.1.Необходимо и достатъчно условие за екстремум на функция

В предходната лекция бе показано, че множеството от критичните точки има вида:

$$E = \{x \in D_f : f'(x) = 0\} \cup \{x \in D_f : f'(x) \text{ не съществува}\}.$$

За определянето на точките, в които функцията има екстремум, се използват достатъчните условия за екстремум.

Теорема 8.1. Нека $f(x)$ е непрекъсната в околността на точката x_0 и диференцируема в тази околност евентуално без точката x_0 . Ако $f'(x) > 0$, ($f'(x) < 0$) при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) < 0$, ($f'(x) > 0$) при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$, то функцията $f(x)$ има максимум (минимум) в точката x_0 .

Доказателство: От следствие на теоремата на Лагранж се получава:

$$\text{при } f'(x) > 0, x \in (x_0 - \delta; x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_0)$$

$$\text{при } f'(x) < 0, x \in (x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) < f(x_0)$$

или $f(x) \leq f(x_0)$, $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, т.е. функцията $f(x)$ има **локален максимум** в точката x_0 ,

/при $f'(x) < 0$, $x \in (x_0 - \delta; x_0) \Rightarrow f(x) > f(x_0)$, при $f'(x) > 0$, $x \in (x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) > f(x_0)$ или $f(x) \geq f(x_0)$, $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, т.е. функцията $f(x)$ има **локален минимум** в точката x_0 /.

Теорема 8.2. Ако функцията $f(x)$ е n -пъти диференцируема в точката x_0 и

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогава при $n = 2k$ функцията има максимум (минимум), ако $f^{(n)}(x_0) < 0$ ($f^{(n)}(x_0) > 0$).

При $n = 2k + 1$ функцията няма екстремум.

Доказателство: Функцията се представя по формулата на Тейлър с остатъчен член, даден от Дж. Пеано.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha_x}{n!}(x-x_0)^n, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_x = 0.$$

Понеже $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha}{n!}(x-x_0)^n, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0.$$

Избира се околност на точката x_0 , $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, в която $|\alpha| < \frac{|f^{(n)}(x_0)|}{2}$. Тогава

при $n = 2k$ знакът на сумата $f^{(n)}(x_0) + \alpha$ се определя от n -тата производна. Например, ако n -тата производна е отрицателна (положителна)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha}{n!}(x-x_0)^n \leq f(x_0), \quad x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

$$(f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha}{n!}(x-x_0)^n \geq f(x_0), \quad x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)) \text{ и функцията } f(x)$$

има локален максимум (минимум).

При $n = 2k + 1$ разликата $f(x) - f(x_0)$ не запазва своя знак във всяка околност $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ и функцията $f(x)$ няма екстремум.

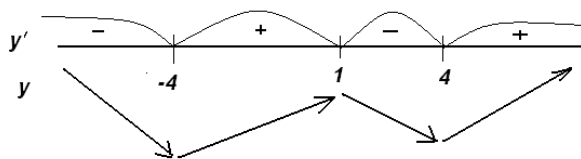
Пример 8.1. Да се определят локалните екстремуми на функцията:

$$y = x^2 - 8|x-1| + 4.$$

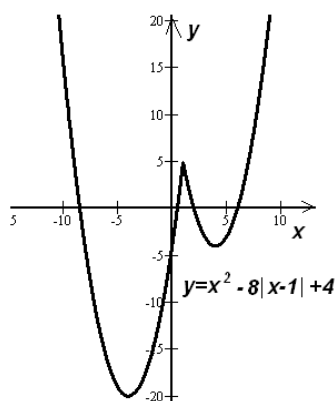
Решение:
$$y = \begin{cases} x^2 + 8x - 4, & \text{при } x < 1 \\ x^2 - 8x + 12, & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 2x + 8, & \text{при } x < 1 \\ 2x - 8, & \text{при } x > 1 \end{cases}, \quad y'(1) \text{ не съществува.}$$

$y' = 0$ в точките $x = -4$ и $x = 4$, $E = \{-4; 4\} \cup \{1\}$.



$y_{\min}(-4) = -20$, $y_{\max}(1) = 5$, $y_{\min}(4) = -4$. Графиката на функцията е на фиг.1



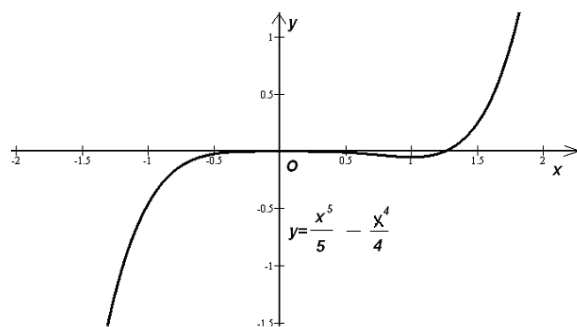
фиг.8.1

Пример 8.2. Да се определят локалните екстремуми на функцията $y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}$ с помощта на второто достатъчно условие.

Решение: $y' = x^4 - x^3 = 0$, $x^3(x-1) = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

$y'' = 4x^3 - 3x^2$, $y''(1) = 1 > 0$, функцията има минимум в точката $x=1$.

$y''(0) = 0$, $y''' = 12x^2 - 6x$, $y'''(0) = 0$, $y^{(4)}(x) = 24x - 6$, $y^{(4)}(0) = -6$, функцията има максимум в точката $x=0$. Графиката на функцията е на фиг. 2.



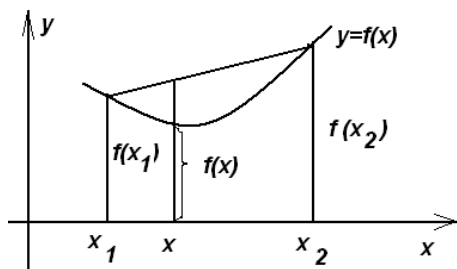
фиг. 8.2

8.2. Изпъкналост (вдлъбнатост) на функция. Темп на изменение

Определение 8.1. Функцията $f(x)$ се нарича изпъкнала (вдлъбната) в интервала $(a; b)$, ако за $x_1, x_2 \in (a; b)$ и $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$

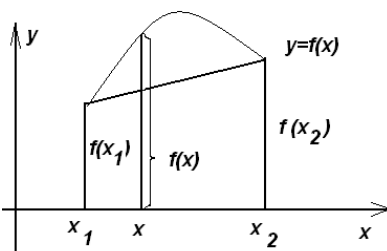
$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2), \quad (f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)).$$

Геометричният смисъл на условието е следния: хордата, свързваща две точки от графиката на функцията лежи над (под) графиката на функцията.



фиг. 8.3

изпъкнала функция



фиг. 8.4

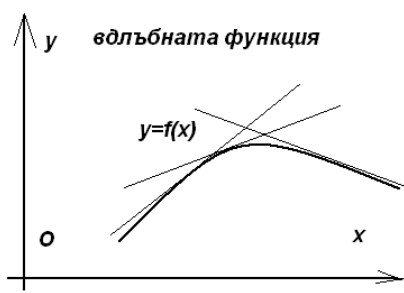
вдлъбната функция

Когато функцията е диференцируема, определение 1 е еквивалентно на определение 2.

Определение 8.2. Функцията $f(x)$ се нарича изпъкнала (вдлъбната) в интервала $(a; b)$, ако графиката ѝ лежи над (под) допирателната, построена към графиката в произволна точка от интервала $(a; b)$.



фиг. 8.5



фиг. 8.6

Теорема 8.3. Ако $f(x)$ е два пъти диференцируема в интервала $(a; b)$ и $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), $x \in (a; b)$, то $f(x)$ е изпъкнала (вдлъбната).

Доказателство: Уравнението на допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точката $x_0 \in (a; b)$ е:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

За да се установи, че графиката на функцията лежи над (под) допирателната, разглежда се разликата:

$$\delta = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)].$$

Представя се функцията в околността на точката x_0 по формулата на Тейлър с остатъчен член на Лагранж:

$$\begin{aligned}\delta &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)(x - x_0)^2}{2!} - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = \\ &= \frac{f''(c)(x - x_0)^2}{2!} > 0 \quad \left(= \frac{f''(c)(x - x_0)^2}{2!} < 0 \right).\end{aligned}$$

При $\delta > 0$ ($\delta < 0$) функцията лежи над (под) допирателната, т.е. функцията е изпъкнала (вдлъбната). Теоремата е доказана.

Точките от дефиниционната област на функцията, които разделят интервалите на изпъкналост от интервалите на вдлъбнатост се наричат инфлексни точки. Ако в тези точки съществува допирателна към графиката, то от едната страна графиката е над допирателната, от другата страна графиката е под допирателната.



фиг. 8.7

Ако в инфлексните точки съществува втората производна, тя е равна на нула.

Пример 8.3. Да се определят интервалите на изпъкналост, вдлъбнатост и инфлексните точки на функцията:

$$y = \frac{a}{1 + be^{-cx}}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

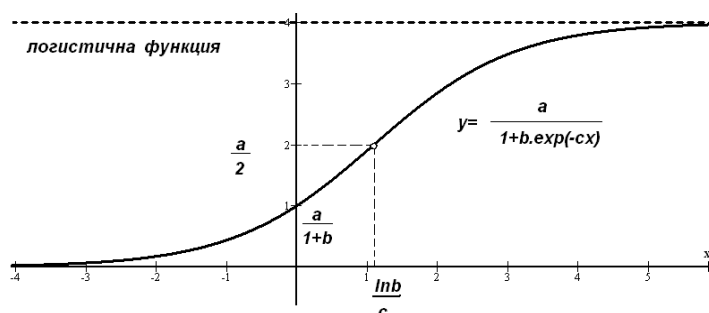
Решение: $y' = \left(\frac{a}{1 + be^{-cx}} \right)' = \frac{abce^{-cx}}{(1 + be^{-cx})^2},$

$$\begin{aligned}y'' &= \left[\frac{abce^{-cx}}{(1 + be^{-cx})^2} \right]' = abc \frac{-ce^{-cx}(1 + be^{-cx})^2 - e^{-cx}2(1 + be^{-cx})b(-c)e^{-cx}}{(1 + be^{-cx})^4} = \\ &= -abc^2e^{-cx} \frac{(1 + be^{-cx}) - 2be^{-cx}}{(1 + be^{-cx})^3} = abc^2e^{-cx} \frac{be^{-cx} - 1}{(1 + be^{-cx})^3},\end{aligned}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow be^{-cx} - 1 > 0, \quad e^{-cx} > \frac{1}{b}, \quad -cx > -\ln b, \quad x < \frac{\ln b}{c}.$$

Функцията е изпъкнала в интервала $\left(-\infty; \frac{\ln b}{c}\right)$, вдлъбната в интервала $\left(\frac{\ln b}{c}; \infty\right)$.

Точката $\left(\frac{\ln b}{c}; \frac{a}{2}\right)$ е инфлексна точка.



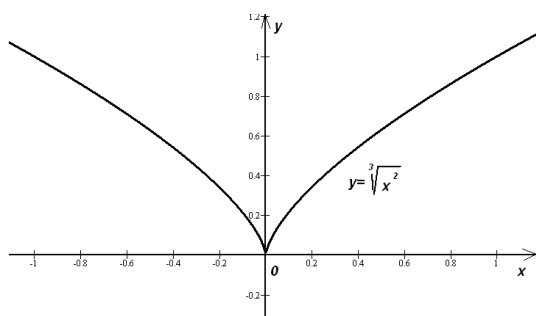
фиг. 8.8

Пример 8.4. Да се определят интервалите на изпъкналост, вдлъбнатост и инфлексните точки на функцията $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Функцията е дефинирана за всяко x . $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$;

$y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x}}$. В точката $x = 0$ функцията е непрекъсната, но няма производна.

Втората производна е отрицателна навсякъде, освен в точката $x = 0$. Там тя не съществува. В интервалите $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ функцията е вдлъбната. Няма инфлексни точки.



фиг. 8.9

Определение. Функцията се нарича:

бързо растяща, ако е растяща и изпъкнала ($f' > 0, f'' > 0$);

бързо намаляваща, ако е намаляваща и вдлъбната ($f' < 0, f'' < 0$);

бавно растяща, ако е растяща и вдлъбната ($f' > 0, f'' < 0$);

бавно намаляваща, ако е намаляваща и изпъкнала ($f' < 0, f'' > 0$).

8.3. Асимптоти

Определение 8.3. Правата $l = x_0$ се нарича **вертикална асимптота**, ако функцията $f(x)$ е дефинирана в $(x_0 - \delta; x_0)$ или в $(x_0; x_0 + \delta)$, или в двата интервала и

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm \infty, \text{ или } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm \infty.$$

Пример 8.5. Да се определят вертикалните асимптоти на функцията

$$f(x) = \frac{x + \frac{\pi}{6}}{\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Решение: Преобразува се функцията и се определя дефиниционното ѝ множество:

$$f(x) = \frac{x + \frac{\pi}{6}}{\sin 2x + \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{x + \frac{\pi}{6}}{2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}, \quad x \neq -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad x \neq \frac{2\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}.$$

В точката $x = -\frac{\pi}{6}$ функцията няма асимптота, защото

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \frac{x + \frac{\pi}{6}}{2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{3}} = 1 \neq \pm \infty.$$

За останалите точки, в които функцията не е дефинирана $x_0 = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$,

$x_0 = \frac{2\pi}{3} + l\frac{\pi}{2}, l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ функцията има вертикални асимптоти, защото

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty.$$

Определение 8.4. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана за $x > M$, или за $x < -M$, $M > 0$. Правата $y = kx + b$ се нарича **наклонена асимптота**, ако

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - b) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx - b) = 0.$$

При $k=0$ асимптотата се нарича **хоризонтална**.

От тази дефиниция се получава, че

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] \quad \text{или} \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx].$$

Понеже

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ то}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} (f(x) - kx - b) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) = 0,$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

По този начин определянето на асимптотата $y = kx + b$ се извършва по формулите:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] \quad \text{или} \quad k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx].$$

Пример 8.6. Да се определят наклонените асимптоти на функцията $y = \sqrt{4x^2 + 2x}$.

Решение: Функцията е дефинирана в множеството $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup (0; \infty)$.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x}}{x} = \sqrt{4 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x}} = 2. \quad b_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 2x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2x - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 2x} + 2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x \left(\sqrt{4 + \frac{2}{x}} + 2 \right)} = \frac{2}{\sqrt{4 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x}} + 2} = \frac{2}{4} = 0.5$$

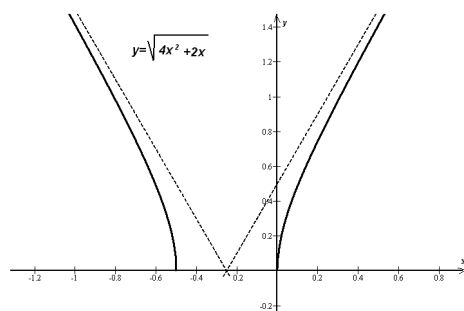
$$y = 2x + 0.5$$

$$k_2 = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x}}{(-x)} = - \sqrt{4 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x}} = -2$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x} + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 2x - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 2x} - 2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x \left(\sqrt{4 + \frac{2}{x}} + 2 \right)} = - \frac{2}{\sqrt{4 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x}} + 2} = - \frac{2}{4} = -0.5$$

$$y = -2x - 0.5$$



фиг. 8.10

представена чрез полином от втора степен и т.н. В общия случай е справедлива следната теорема.

Теорема 7. /Дж. Пеано/ Ако функцията $f(x)$ има n производни в точката a , то

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a) + \alpha}{n!}(x-a)^n, \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha = 0.$$

Доказателство: За да се докаже, че $\lim_{x \rightarrow a} \alpha = 0$, определя се α от горното равенство и след това се преминава към граница като се ползва правилото на Лопитал $(n-1)$ - пъти в околност на точката a :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{\frac{(x-a)^n}{n!}} \\ \lim_{x \rightarrow a} \alpha &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{\frac{(x-a)^n}{n!}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a) - \frac{f''(a)}{1!}(x-a) - \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}}{\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x) - f''(a) - \frac{f'''(a)}{1!}(x-a) - \frac{f^{(4)}(a)}{2!}(x-a)^2 \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}}{\frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!}} = \dots = \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - \frac{f^{(n)}(a)(x-a)}{1!}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} - f^{(n)}(a) \right] =$$

$$= [f^{(n)}(a) - f^{(n)}(a)] = 0$$

Получената формула

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n, \quad R_n = \frac{\alpha}{n!}(x-a)^n,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n}{(x-a)^n} = 0$$

се нарича формула на **Б. Тейлър** с остатъчен член, даден от италианският математик Джузепе Пеано.

Ако функцията има $(n+1)$ производни в околността на точката a , то

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n,$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad a < c < x \text{ или } x < c < a.$$

В този случай остатъчният член е получен от Лагранж.

Формулата на Б.Тейлър, когато $a=0$ се нарича формула на Маклорен. Тя има вида

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

и е една от най-често използваните формули от този вид.

Пример 7.13. Да се запише формулата на Маклорен за функцията e^x и да се избере n така, че остатъчният член да е по-малък от 0.01 за всички $|x| \leq 10$.

Решение: Изчисляват се последователно коефициентите на полинома на Маклорен.

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(x) = (e^x)' = e^x, \quad f'(0) = e^0 = 1, \dots, \quad f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} = e^x, \quad f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n, \quad R_n = \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

За да се намери n , решава се неравенството

$$R_n = \left| \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1} \right| \leq \frac{3^{10}}{(n+1)!}10^{n+1} < 0.01$$

При $n=38$ неравенството се изпълнява. Това означава, че този полином от 38 степен може да се изчислява трансцендентната функция e^x за всички $|x| \leq 10$ с точност до 0.01.

Пример 7.14. Да се запише формулата на Маклорен за функцията $\ln(1+x)$.

Решение: $f(0) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f'(0) = 1$,

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!, \quad k > 1$$

$$\ln(1+x) = 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{1!}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{n!}x^n + R_n,$$

$$R_n = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!(1+\theta)^{n+1}} x^{n+1},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}} x^{n+1}.$$

Пример 7.15. Да се развие по формулата на Маклорен функцията $y = \cos x$.

Решение: $f(x) = \cos x$, $f(0) = \cos 0 = 1$, $f'(x) = -\sin(x)$, $f'(0) = 0$,

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & k = 2l-1, l \in N \\ (-1)^l, & k = 2l, l \in N \end{cases}$$

$$\cos x = 1 + 0 + \frac{(-1)x^2}{2!} + 0 + \frac{(-1)^2 x^4}{4!} + 0 + \frac{(-1)^3 x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{\cos(\theta + (k+1)\pi) x^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{\cos(\theta + (k+1)\pi) x^{2k+2}}{(2k+2)!}.$$

Лекция 7

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИЯ НА ДВЕ И ПОВЕЧЕ ПРОМЕНЛИВИ

9. ВЪВЕДЕНИЕ

9.1. Понятие за функция на две и повече променливи

В общия случай стойностите на една величина зависят от множество фактори. В тази връзка в математиката се разглеждат и изучават функциите на n на брой променливи.

Нека $\mathbf{R}$ е множеството на реалните числа и $x, y \in \mathbf{R}$ - съвкупността от всички наредени двойки (x, y) реални числа се нарича 2-мерно пространство и се бележи $\mathbf{R}^2$. Геометрически то представлява множеството от всички точки в една равнина и най-често се отъждествява с точките в една правоъгълна координатна система xOy . Ако множеството $X \subset \mathbf{R}^2$ и на всяка точка $M(x, y) \in X$ се съпостави едно число $z \in Z \subset \mathbf{R}$ се казва, че е зададена **функция на две променливи** $z = f(x, y)$.

Множеството от всички наредени n -торки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ реални числа се нарича n -мерно пространство и се бележи $\mathbf{R}^n$. В общия случай, ако множеството $X \subset \mathbf{R}^n$ и $x(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ се казва, че x е елемент (точка) на множеството X от n -мерното пространство. Ако още $y \in Y \subset \mathbf{R}$

$$F : X \rightarrow Y$$

е **функция на n променливи**. Пише се още

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ или накратко } y = F(x).$$

Множеството X е **дефиниционно множество** (или **област**), а Y **област на функционалните стойности**. Оттук нататък на **съответствието (изображението)** $F : X \rightarrow Y$, което ще бъде обект на внимание се налага ограничението за **еднозначност**: на всяка точка $x(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ се съпоставя едно единствено число $y \in Y \subset \mathbf{R}$. Задаването или описанието на една функция може да бъде направено по различни начини. В математиката най-често се използва аналитичният, при който стойността на функцията се изчислява по зададена формула (или формули). Ако

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

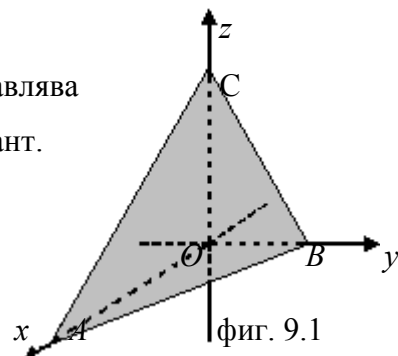
се казва, че y е **определена явно**, а когато вместо последното е дадено

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$$

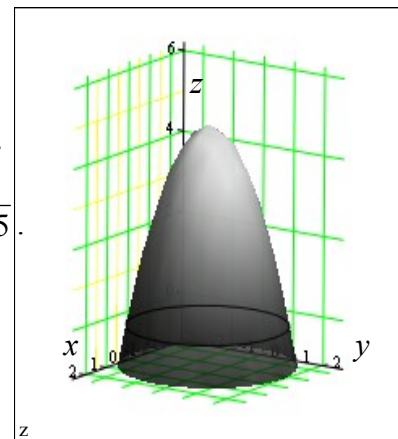
функцията y е **определена неявно**.

Както при функциите на една променлива, така и когато променливите са две, те може да се представят нагледно чрез графики. В общия случай **графиката на $z = f(x, y)$ е повърхнина или линия в тримерното пространство**, чието изображение в един чертеж в равнината не е съвсем точно.

Пример 9.1: $z = 4 - x - 2y$ е линейна функция на независимите променливи x и y . Геометрически представлява равнина, която пресича координатните оси в първи октант. Дефиниционното множество $X = \mathbf{R}^2$, а множеството от функционални стойности $Y = \mathbf{R}$.



Пример 9.2: $z = 5 - x^2 - y^2$ е функция на независимите променливи x и y - представлява параболоид, който пресича xOy в окръжност с център $O(0,0,0)$ и радиус $\sqrt{5}$. Дефиниционното множество $X = \mathbf{R}^2$, а множеството от функционални стойности $Y = (-\infty, 5]$.



фиг. 9.2

Пример 9.3: $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ - функцията z е зададена неявно. Геометрически тя представлява сфера с център $O(0,0,0)$ и радиус 3. Дефиниционното множество е кръг: $X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$, а областта от стойности на z е $Y = [-3, 3]$. Тази функция не е еднозначна защото например на точката $M(2,2) \in X$, съответстват две стойности на z : $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$.

Ако в $z = f(x, y)$ се положи $x = a$, графиката на $z = f(a, y)$ е линия върху повърхнината $z = f(x, y)$ и се нарича **линия на ниво, съответна на $x = a$** , а $z = f(x, b)$

представя линия на ниво при $y = b$. В пример 9.1 отсечката BC е част от линията на ниво при $x = 0$, а AC от линията на ниво при $y = 0$. В пример 9.2 окръжността е линия на ниво, съответно на $z = 0$.

Функцията $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ се нарича **ограничена отдолу** в множеството $X \subset \mathbf{R}^n$, когато $\exists \mu \in \mathbf{R}, \forall A(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X : F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \mu$; в противен случай се казва, че тя е **неограничена отдолу**.

Функцията $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ се нарича **ограничена отгоре** в множеството $X \subset \mathbf{R}^n$, когато $\exists M \in \mathbf{R}, \forall A(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X : F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M$; в противен случай се казва, че тя е **неограничена отгоре**.

Функцията $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ се нарича **ограничена** в множеството $X \subset \mathbf{R}^n$, когато $\exists \mu, M \in \mathbf{R}, \forall A(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X : \mu \leq F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M$.

Пример 9.4: $z = 4 - x - 2y$ е неограничена както отдолу, така и отгоре в $\mathbf{R}^2$, но е ограничена отгоре в $X = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$, защото за $\forall A(x, y) \in X : z(x, y) \leq 4$.

Пример 9.5: $z = 5 - x^2 - y^2$ е неограничена отдолу в $\mathbf{R}^2$, но е ограничена отгоре в същото множество, защото за $\forall A(x, y) \in \mathbf{R}^2 : z(x, y) = 5 - (x^2 + y^2) \leq 5$.

9.2. Граница и непрекъснатост на функция на две променливи

Пространството $\mathbf{R}^n$ се нарича **евклидово** когато в него е дефинирано **разстояние** между произволни две точки $M_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$ и $M_2(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})$

$$|M_1 - M_2| = \sqrt{(x_{11} - x_{21})^2 + (x_{12} - x_{22})^2 + \dots + (x_{1n} - x_{2n})^2} = |M_2 - M_1| = d(M_1, M_2).$$

Ако числото $r \in \mathbf{R}, r > 0$ и $M_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in \mathbf{R}^n$ (или $M_0(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$), множеството от точки $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ (или $M(x, y) \in \mathbf{R}^2$), чието разстояние до M_0 е не по-голямо от r , т.е.

$$(9.1) \quad |M - M_0| \leq r$$

се нарича **затворен n -мерен кръг** с център M_0 и радиус r . Неравенството (9.1) е еквивалентно на

$$(9.2) \quad (x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + \dots + (x_n - x_{0n})^2 \leq r^2 \quad \left(\text{или } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2 \right).$$

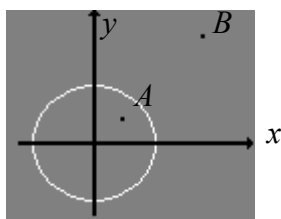
Когато неравенствата (9.1) и (9.2) са строги се говори за **отворен кръг**. **Едно множество се нарича ограничено**, ако съществува кръг, който съдържа всичките му

точки; в противен случай се нарича **неограничено**. Множеството $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ е ограничено защото всичките му точки принадлежат и на кръга $x^2 + y^2 < 2$. Множеството $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$ е неограничено защото не съществува кръг, в който са всичките му точки.

Околност на точката M_0 се нарича всеки отворен кръг който я съдържа. Ако $\varepsilon > 0$ отвореният кръг с център M_0 и радиус ε се нарича **ε -околност на M_0** .

Точката M от множеството X се нарича **вътрешна точка**, когато всяка нейна околност съдържа само точки от X . Множеството съставено само от вътрешните си точки се нарича **отворено множество**. Точката M от множеството X се нарича **гранична точка**, когато всяка нейна околност съдържа както точки от X така и точки не принадлежащи на X . Съвкупността от всички гранични точки на едно множество се нарича **граница на множеството**. Множество, което съдържа всички свои гранични точки се нарича **затворено множество**. Множеството $X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ е отворено - всичките му точки са вътрешни. Всяка точка $M(x, y)$, за която $x^2 + y^2 = 1$ е гранична на X . $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ е граница на X , а $\bar{X} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ е затворено множество. $X_1 = X \cup (0, 1)$ не е нито отворено, нито затворено – съдържа точката $(0, 1)$, която не е вътрешна и X_1 не съдържа всичките си гранични точки, а само една от тях.

Когато в едно множество всяка двойка точки може да бъде съединена с непрекъснатата линия, която лежи изцяло в множеството, то се нарича **свързано множество**. Множествата $X_{<} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ и $X_{\geq} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ са свързани, докато $X_{\neq} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$ не е свързано – точките $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in X_{\neq}$, $B(2, 2) \in X_{\neq}$, но не съществува непрекъснатата линия изцяло в множеството, която да ги свързва.



фиг. 9.3

По-нататък множествата, които тук ще се използват ще бъдат в повечето случаи свързани.

Дефиниционната област се определя от допустимите стойности на независимите променливи (аргументите) на функцията, но често зависи и от естеството им и областта на приложение.

Граница на редица от точки (дефиниция на Хайне):

Ако $M_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ и $M_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) \quad i = 1, 2, \dots, m, \dots$ са точки от $\mathbf{R}^n$, **редицата**

$$M_1, M_2, \dots, M_m, \dots \rightarrow M_0 \text{ (клони към } M_0 \text{)}$$

когато за всяко $k = 1, 2, \dots, n$ границите на числовите редици образувани от техните координати са $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{i1} = x_{01}, \lim_{i \rightarrow \infty} x_{i2} = x_{02}, \dots, \lim_{i \rightarrow \infty} x_{in} = x_{0n}$ или когато $\lim_{i \rightarrow \infty} |M_i - M_0| = 0$.

Граница на редица от точки (дефиниция на Коши):

Ако $M_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ и $M_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) \quad i = 1, 2, \dots, m, \dots$ са точки от $\mathbf{R}^n$, **редицата**

$$M_1, M_2, \dots, M_m, \dots \rightarrow M_0 \text{ (клони към } M_0 \text{)}$$

когато за всяко $\varepsilon > 0$, съществува $\mu : \forall m > \mu \Rightarrow |M_m - M_0| < \varepsilon$.

Точката M_0 се нарича **граница на редицата** и се пише $\lim_{i \rightarrow \infty} M_i = M_0$.

Нека $y = f(M)$ е дефинирана в $X \subset \mathbf{R}^n$ и $M = M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$.

Граница на функция (Хайне): Числото a се нарича **граница на функцията**

$y = f(M)$ при $M \rightarrow M_0$, когато за всяка произволна редица от точки от X :

$$M_1, M_2, \dots, M_m, \dots \rightarrow M_0, \quad (M_m \neq M_0)$$

съответната редица от функционални стойности

$$f(M_1), f(M_2), \dots, f(M_m), \dots \rightarrow a.$$

Граница на функция (Коши): Числото a се нарича **граница на функцията**

$y = f(M)$ при $M \rightarrow M_0$, когато

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |M - M_0| < \delta \Rightarrow |f(M) - a| < \varepsilon.$$

Пише се $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = a$.

Непрекъснатост на функция: Функцията $y = f(M)$ се нарича **непрекъсната в точката** $M_0 \in X$, когато

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$$

Ако $\lim_{M \rightarrow M_0} F(M) \neq F(M_0)$ или границата не съществува точката M_0 се нарича

точка на прекъсване.

Нека $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е дефинирана в множеството X – когато тя е непрекъсната за всяка точка $M \in X$ се казва, че **функцията е непрекъсната в множеството X .**

Пример 9.6: $z = f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$ е дефинирана в $X = \{(x, y) \mid |x| \neq |y|\}$.

В точката $B(1,1) \notin X$: $\lim_{M \rightarrow B} f(M) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{(x-y)(x+y)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{(x^2 + xy + y^2)}{(x+y)} = \frac{3}{2}$.

В $C(-1,-1) \notin X$: $\lim_{M \rightarrow C} f(M) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{(x-y)(x+y)} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{(x^2 + xy + y^2)}{(x+y)} = -\frac{3}{2}$.

В $D(1,-1) \notin X$: $\lim_{M \rightarrow D} f(M) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{(x-y)(x+y)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{(x^2 + xy + y^2)}{(x+y)} = \pm \infty$.

Пример 9.7: $z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}, & |x| \neq |y| \\ \frac{2x+y}{2}, & |x| = |y| \end{cases}$ е дефинирана в $X = \mathbf{R}^n$. В точката

$B(1,1) \in X$: $\lim_{M \rightarrow B} f(M) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{(x-y)(x+y)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{(x^2 + xy + y^2)}{(x+y)} = \frac{3}{2} = f(1,1) = f(B)$ и

следователно функцията $z = f(x, y)$ е непрекъсната в $B(1,1) \in X$. В точката $C(-1,-1) \in X$

: $\lim_{M \rightarrow C} f(M) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{(x-y)(x+y)} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{(x^2 + xy + y^2)}{(x+y)} = -\frac{3}{2} = f(-1,-1) = f(C)$, т.е.

функцията е непрекъсната също и в $C(-1,-1) \in X$. В точката $D(1,-1) \in X$:

$\lim_{M \rightarrow D} f(M) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{(x-y)(x+y)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{(x^2 + xy + y^2)}{(x+y)} = \pm \infty \neq \frac{1}{2} = f(1,-1) = f(D)$ и

следователно в D функцията не е непрекъсната - D е точка на прекъсване.

Следните две теореми са аналогични на известните теореми от функция на една променлива.

Теорема 9.1: Необходимото и достатъчно условие за непрекъснатост на функцията $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е $\lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ i=1,2,\dots,n}} \Delta F = 0$, където

$$\Delta F = F(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

е нейното *нарастване*.

Теорема 9.2А: Ако $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е дефинирана и непрекъсната в ограниченото и затворено множество $X \subset \mathbf{R}^n$, тя е ограничена в него.

Теорема 9.2Б: Ако $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е дефинирана и непрекъсната в ограниченото и затворено множество $X \subset \mathbf{R}^n$, тя достига както най-малката, така и най-голямата си стойност.

Теорема 9.2В: Ако $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е дефинирана и непрекъсната в ограниченото затворено и свързано множество $X \subset \mathbf{R}^n$ и приема в две различни точки от това множество стойности с различен знак, то съществува поне една точка от множеството, в която функцията е равна на нула.

Теорема 9.2Г: Ако $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е дефинирана и непрекъсната в ограниченото затворено и свързано множество $X \subset \mathbf{R}^n$ тя приема всички междинни стойности между най-малката си и най-голямата си стойност.

9.3. Функция на две и повече променливи в икономиката, производствени функции

Приходите y получени от продажбата на количеството x от една единствена стока при фиксирана цена c за определен период от време могат да бъдат изразени като функция на една независима променлива $y = cx$. Ако стоките са две, количествата продажби x_1 и x_2 , както цените им c_1 и c_2 в общия случай са различни и тогава приходите y зависят от две независими променливи

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2.$$

Така приходите y са вече функция на двете независими променливи x_1 и x_2 . Ако се отчете, че цените също се менят и от едната стока са реализирани количествата x_{11} и x_{12} при цени c_{11} и c_{12} , а от другата x_{21} и x_{22} при цени c_{21} и c_{22}

$$y = c_{11} x_{11} + c_{12} x_{12} + c_{21} x_{21} + c_{22} x_{22}$$

- променливите са вече 4.

Печалбата z от дадено производство зависи от приходите x и разходите y , което най-общо може да се запише като функция на две променливи

$$z = f(x, y).$$

При по-детайлно разглеждане, приходите се получават от различни стоки, услуги и дейности, а разходите от необходимите материали, суровини, капитали и т.н. – така печалбата ще е функция на повече променливи

$$z = f(x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots).$$

Пример 9.8: $z = kx^m y^n$, $k > 0, m > 0, n > 0$ при $m + n = 1$ е производствена **функция на Коб-Дъглас** (k, m, n са константи). Дефиниционното множество $X \subset \mathbf{R}_+^2$, а множеството от функционални стойности $Y \subset \mathbf{R}_+$ (знаците $+$ означават, че x, y и z приемат само положителни стойности).

Пример 9.9: $P_n = P \left(1 + \frac{r}{100} \cdot n \right)$ е функция на променливите $P > 0, r > 0$ и $n > 0$ – изразява нарастването на капитала при проста лихва.

Пример 9.10: $P_n = P \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n$ е функция на променливите $P > 0, r > 0$ и $n > 0$ – изразява нарастването на капитала при сложна лихва.

Пример 9.11: $Z = \left(\frac{a}{x^\alpha} + \frac{b}{y^\alpha} \right)^{-\frac{\beta}{\alpha}}$ е **функция на Удзава**, в която променливите са $x > 0, y > 0$, а a, b, α, β са константи или параметри с положителни стойности.

Променливите, величините и параметрите, които участват във функциите с икономически смисъл най-често имат дискретен характер. Разглеждането им като непрекъснати величини (реални числа) и съответно непрекъснати функции е оправдано и необходимо тъй като по такъв начин става възможно чрез средствата на математическия анализ да се изследва същността и динамиката на процесите, което усилва качествено начините и методите за тяхното управление, планиране и прогнозиране.

Нека едно производството зависи от n на брой фактора със съответните им количествени измерения $x_1, x_2, \dots, x_n$, а целта му е получаването на m на брой крайни продукта в количества $y_1, y_2, \dots, y_m$. Уравнението

$$(9.1) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m) = 0$$

е едно **производствено уравнение**, чиито смисъл е количественото съответствие между факторите и произведената продукция. Това уравнение определя функционалната зависимост между отделните фактори и крайните продукти. Когато е необходимо и възможно при решаването му могат да се изразят някои от неговите компоненти чрез останалите

$$(9.2) \quad x_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(9.3) \quad y_j = \psi_j(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m) \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

В (9.2) i -тият фактор е определен като **производствена функция** на останалите фактори и на продуктите, а в (9.3) j -тият продукт е функция на факторите и останалите продукти.

Подобни на уравнението (9.1) и функциите (9.2) и (9.3) могат да се съставят и използват в различните сфери както на макроикономиката, така и в микроикономиката.

10. ДИФЕРЕНЦИРАНЕ НА ФУНКЦИИ НА n ПРОМЕНЛИВИ

10.1. Частни производни от първи ред

Нека $z = f(x, y)$ е функция на 2 променливи и е дефинирана в околност на точката $M_0(x_0, y_0)$. Когато съществува границата

$$(10.1) \quad \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

тя се нарича **първа частна производна на f относно x** и се бележи по някой от

начините: $z'_x, f'_x, \frac{\partial z}{\partial x}$ или $\frac{\partial f}{\partial x}$. Когато границата

$$(10.2) \quad \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

съществува тя се нарича **първа частна производна на f относно y** и се означава по

някой от начините: $z'_y, f'_y, \frac{\partial z}{\partial y}$ или $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Нека е дадена функцията на n променливи $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Когато съществува границата

$$(10.3) \quad \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{F(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)}{\Delta x_k},$$

тя се нарича **първа частна производна на F относно x_k** и се бележи по някой от начините: F'_{x_k} или $\frac{\partial F}{\partial x_k}$. Всяка функция на две или повече променливи може да притежава толкова частни производни, колкото са на брой променливите $\dot{Y}$. За намирането им са валидни всичките правила за производна на функция на една променлива със следното допълнение – когато се диференцира относно някоя от променливите, останалите се считат за константи.

Пример 10.1: $z = 4 - x - 2y$.

$$z'_x = -1, \quad z'_y = -2.$$

Пример 10.2: $z = f(x, y) = \frac{x^3 - 2y^3}{x^2 - y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^2(x^2 - y^2) - (x^3 - 2y^3) \cdot 2x}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2y^2 - 2x^4 + 4xy^3}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^4 - 3x^2y^2 + 4xy^3}{(x^2 - y^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-6y^2(x^2 - y^2) - (x^3 - 2y^3)(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{-6y^2x^2 + 6y^4 + 2x^3y - 4y^4}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{2y^4 - 6y^2x^2 + 2x^3y}{(x^2 - y^2)^2}$$

Нека $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ притежава частни производни $\frac{\partial F}{\partial x_k} (k = 1, 2, \dots, n)$ в

точката $M_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ и $F(M_0) = F(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \neq 0$ - отношението

$$(10.4) \quad \frac{x_{0k}}{F(M_0)} \cdot \frac{\partial F(M_0)}{\partial x_k}$$

се нарича **частна еластичност относно x_k на функцията F в точката M_0** и се бележи $E_k(F(M_0))$. Частната еластичност показва приблизителното относително изменение свързано с x_k .

10.2. Диференциал

Нека $z = f(x, y)$. Ако x и y са фиксирани, а Δx и Δy са съответните им нараствания, **нарастването (пълното нарастване) на z е**

$$(10.5) \quad \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Функцията $z = f(x, y)$ се нарича **диференцируема** в точката $M(x, y)$ когато съществуват числа A и B , чрез които нарастването (10.5) може да се представи във вида

$$(10.6) \quad \Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \varepsilon_x \cdot \Delta x + \varepsilon_y \cdot \Delta y,$$

където $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon_y = 0$. Главната линейна част на Δz от (10.6) се нарича **пълнен диференциал на функцията** и се бележи

$$(10.7) \quad dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y.$$

Независимите променливи x и y могат да се разглеждат като линейни функции на една променлива и тогава за техните нараствания е в сила

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y.$$

Така (10.7) придобива вида

$$(10.8) \quad dz = A \cdot dx + B \cdot dy.$$

Теорема 10.1: Ако функцията $z = f(x, y)$ е диференцируема в точката $M(x, y)$, тя е:

- непрекъсната в $M(x, y)$;
- притежава първи частни производни $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в $M(x, y)$;
- пълният диференциал $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$.

Доказателство:

- От дефиницията за диференцируемост и (10.6) следва

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z (A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \varepsilon_x \cdot \Delta x + \varepsilon_y \cdot \Delta y) = 0$$

и съгласно необходимото и достатъчно условие за непрекъснатост, z е непрекъсната.

- При $\Delta y = 0$ (10.6) става

$$(10.9) \quad \Delta_x z = A \cdot \Delta x + \varepsilon_x \cdot \Delta x \Rightarrow \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \varepsilon_x.$$

Тъй като A не зависи от x (а следователно и от Δx), то границата $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$ и щом тя съществува z притежава първа частна производна относно x

$$(10.10) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = A.$$

Аналогично при $\Delta x = 0$ - z притежава първа частна производна относно y и

$$(10.11) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

- Като се заместят A от (10.10) и B от (10.11) в (10.8) се получава

$$(10.12) \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy.$$

Забележка 10.1: Последното показва, че *съществуването на частните производни е необходимо условие* (но не и достатъчно) *за диференцируемостта на една функция.*

Подобна теорема е валидна и в общия случай и ако $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е диференцируема, то пълният $\dot{Y}$ диференциал е

$$(10.13) \quad dz = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

където $dx_i = \Delta x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, а Δx_i е нарастването на x_i .

Теорема 10.2: (**достатъчно условие за диференцируемост**) Ако функцията $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ притежава непрекъснати първи частни производни в точката $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, тя е диференцируема в тази точка и е в сила (10.13).

Забележка 10.2: Важно теоретично и практическо приложение на диференциала е, че нарастването на функцията $\Delta z \approx dz$, ако частните производни са непрекъснати и нарастванията на Δx_i независимите променливи x_i са достатъчно малки.

Пример 10.3: Да се изчисли приблизително $\arctg \frac{19}{21}$. Нека $z(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$.

$$z(19, 21) = \arctg \frac{19}{21} = \arctg \frac{19 \cdot 5}{21 \cdot 5} = \arctg \frac{95}{105} = \arctg \frac{0.95}{1.05} = z(1 + (-0.05), 1 + 0.05).$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{y^2 + x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{y^2 + x^2} \Rightarrow dz = \frac{y}{y^2 + x^2} \cdot dx - \frac{x}{y^2 + x^2} \cdot dy = \frac{ydx - xdy}{y^2 + x^2}.$$

При $x = 1, y = 1, dx = -0.05, dy = 0.05$ се получава $dz = \frac{1 \cdot (-0.05) - 1 \cdot 0.05}{2} = -0.05$. Така

$$\arctg \frac{19}{21} = z(19, 21) = z(1 + (-0.05), 1 + 0.05) = z(1, 1) + \Delta z(1, 1) \approx \arctg 1 + dz = \frac{\pi}{4} - 0.05 \text{ и}$$

$$\arctg \frac{19}{21} \approx 0.7853982 - 0.05 = 0.7353982, \text{ а точната стойност е } \arctg \frac{19}{21} = 0.7354398\dots$$

10.3. Производна на сложна (съставна) функция

Когато аргументите на една функция са функции, тя се нарича **сложна (или съставна) функция**. Нека $z = f(x, y)$ и нейните аргументи (променливите) са функции

$$(10.14) \quad x = x(t), \quad y = y(t).$$

Тогава z чрез (10.14) може да се разглежда и като функция на една променлива t .

Теорема 10.3: Ако $z = f(x, y)$ е дефинирана в X , а $x = x(t)$, $y = y(t)$ и при всяко $t \in [a, b]$ точката $(x(t), y(t)) \in X$. Нека съществуват и са непрекъснати частните

производни $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ и съществуват производните $x'(t), y'(t)$. Тогава

$$(10.15) \quad z' = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Доказателство: Нека нарастването на t е $\Delta t = dt$. Съответните нараствания на x и y са $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$, $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$, а на z е Δz . Понеже z има непрекъснати частни производни от достатъчното условие (теорема 10.2) следва, че тя е диференцируема и от дефиницията и теорема 10.1:

$$(10.16) \quad \Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \varepsilon_x \cdot \Delta x + \varepsilon_y \cdot \Delta y,$$

което като се раздели на Δt се получава

$$(10.17) \quad \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Тъй като съществуват $x'(t), y'(t)$ и функциите $x = x(t)$, $y = y(t)$ са непрекъснати, от това следва, че ако $\Delta t \rightarrow 0$, то и $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$. Значи $\varepsilon_x \rightarrow 0, \varepsilon_y \rightarrow 0$. Тогава

$$(10.18) \quad \begin{aligned} z' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_x \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_y \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

Пример 10.4: $z = \frac{u^2 - v^2}{2}$, $u = \sin x$, $v = \cos x$.

$$z'_u = u, \quad z'_v = v, \quad u'_x = \cos x, \quad v'_x = -\sin x.$$

$$z' = \frac{dz}{dx} = u \cos x - v(-\sin x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

Теорема 10.4: Ако $z = F(u_1, u_2, \dots, u_m)$, а $u_k = u_k(x)$ за $i = 1, 2, \dots, m$, частните производни на z съществуват и са непрекъснати и функциите u_k притежават производни, то

$$(10.19) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial F}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x} + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x} = z'.$$

Теорема 10.5: Нека е дадена функцията на m променливи $z = F(u_1, u_2, \dots, u_m)$ където $u_k = u_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за $k = 1, 2, \dots, m$. Ако в точката $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ съществуват и са непрекъснати частните производни

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \text{ за } k = 1, 2, \dots, m \text{ и } i = 1, 2, \dots, n,$$

а в съответната точка $(u_1, u_2, \dots, u_m)$ съществуват и непрекъснатите частни производни

$\frac{\partial F}{\partial u_k}$ за $k = 1, 2, \dots, m$, то сложната функция

$$z(x_1, x_2, \dots, x_n) = F[u_1(x_1, x_2, \dots, x_n), u_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

е диференцируема в точката $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и има следните частни производни:

$$(10.20) \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \text{ за } i = 1, 2, \dots, n.$$

Пример 10.5: $z = \sqrt{u^2 - uv + v^2}$, $u = e^{xy}$, $v = 2y^3 - x^3$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u - v}{2\sqrt{u^2 - uv + v^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2v - u}{2\sqrt{u^2 - uv + v^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -3x^2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 6y^2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2u - v}{2\sqrt{u^2 - uv + v^2}} \cdot ye^{xy} + \frac{2v - u}{2\sqrt{u^2 - uv + v^2}} \cdot (-3x^2) =$$

$$\frac{(2u - v)ye^{xy} - 3(2v - u)x^2}{2\sqrt{u^2 - uv + v^2}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2u - v}{2\sqrt{u^2 - uv + v^2}} \cdot xe^{xy} + \frac{2v - u}{2\sqrt{u^2 - uv + v^2}} \cdot 6y^2 =$$

$$\frac{(2u - v)xe^{xy} + 6(2v - u)y^2}{2\sqrt{u^2 - uv + v^2}}.$$

