ГЕОМЕТРИЯ НА ЛОБАЧЕВСКИ

Проф. дмн (DHC multe) Грозьо Станилов

stanilov@fmi.uni-sofia.bg

Увод

Настоящият кратък курс по геометрия на Лобачевски възникна в резултат на изборните курсове ,които в продължение на няколко години четох на студенти от всичките специалности във Факултета по математика и информатика на Софийски университет „Св. Климент Охридски. Изборните курсове обикновено носеха заглавията *Предмет на геометрията* , *Приложение на Компютърната алгебра в геометрията , Компютърни методи в математиката.* Една част от преподавания материал по първия посочен тук курс се съдържа в учебника ми по Аналитична геометрия. Поради това, за пълнота и улеснение на студентите , счетох за необходимо да изложа в отделно сега предлаганото ръководство по Геометрия на Лобачевски.
Две характерни неща искам да отбележа при написването на това помагало: Първо, геометрията на Лобачевски е изградена на проективна основа, подготовка за което студентите имат след като са се запознали със споменатия наш учебник. Изложението е елементарно и достъпно за студентите след първи курс. Но любознателният читател може да мине и без необходимостта от такива познания. Второ, при излагане на теоретичен материал и особено при решаване на задачи, съпътстващи лекциите, аз се опрях на компютърната система Maple, използването на която отдавна би трябвало да стане достояние на студенти от всички специалности, имащи допирни точки с математика. Поради липса на време сега се задоволяваме само с излагането на теоретичния материал от геометрията на Лобачевски. Представяне на задачи, решени с компютърни средства ще последва скоро.
Включването на геометрията на Лобачевски в моите лекции по изборните ми курсове не е случайно. Моята цел е била да възбудя определен интерес у студентите към тази част на геометрията, която отдавна е станала модерна област и основа на съвременото развитие на диференциалната геометрия, а също така и на теоретичната физика, по-специално на теорията на относителността на А. Айнщайн, откриваща хоризонти за опознаване на заобикалящия ни реален свят.

Съдържание

& 1 . Равнина на Лобачевски. Скаларно произведение на две точки. Репери на Лобачевски

1. Равнина на Лобачевски. Изграждането на геометрията на Лобачевски ще направим на проективна основа. **Равнина на Лобачевски** ще наричаме вътрешността на реалната неизродена крива от втора степен в проективната равнина, разглеждана като разширената евклидова равнина:

(1) $$k : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 .$$

Тук (x_1, x_2, x_3) са хомогенни проективни координати на точка. Проективните трансформации, превеждащи точка $(x_1, x_2, x_3) \to (y_1, y_2, y_3)$,се дават с формулите

(2)
$$y1 := a11\ x1 + a12\ x2 + a13\ x3$$
$$y2 := a21\ x1 + a22\ x2 + a23\ x3$$
$$y3 := a31\ x1 + a32\ x2 + a33\ x3$$

като $\det(a_{ij}) \neq 0$. Най-напред ще намерим онези проективни преобразувания,които запазват кривата (1).Това означава уравнението (1) да е равносилно на уравнението

(3) $$k : y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0 .$$

За целта заместваме (2) в (3); след развиваме и приведение се получава:

(4) $$(a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2)x_1^2 + (a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{32}^2)x_2^2 + (a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2)x_3^2 +$$

$2(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}-a_{31}a_{32})x_1x_2+2(a_{11}a_{13}+a_{21}a_{23}-a_{31}a_{33})x_1x_3+2(a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}-a_{32}a_{33})x_2x_3=0$
.

Условието за равносилност на това уравнение с уравнението (1) означава,че трябва да са изпълнени равенствата:

(5) $$\begin{aligned}&a_{11}^2+a_{21}^2-a_{31}^2=\lambda, a_{12}^2+a_{22}^2-a_{32}^2=\lambda, a_{13}^2+a_{23}^2-a_{33}^2=-\lambda;\\&a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}-a_{31}a_{32}=0, a_{11}a_{13}+a_{21}a_{23}-a_{31}a_{33}=0, a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}-a_{32}a_{33}=0.\end{aligned}$$

Тук λ е произволен множител на пропорционалност.
Да намерим броя на параметрите, от които зависят проективните преобразувания, запазващи кривата (1). Най-напред вземам предвид, че в (2) имаме 9-1=8 параметъра a_{ij}.Тук се намалява броя на параметрите с 1, поради хомогенността на координатите $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)$. По-нататък, в (5) имаме още един параметър λ,така че всичките параметри са отново 9. Обаче в (5) имаме 6 уравнения за 9 неизвестни (броя на параметрите). Следователно остават 9-6=3 свободни параметъра. И тъй множеството от проективните преобразувания,запазващи (1) зависи от 3 параметъра. Проективни преобразувания,запазващи кривата k , се наричат **движения на Лобачевски**. Тяхното множество GL_2 е група от преобразувания, зависяща от 3 параметъра. Действително, произведението на две такива преобразувания също запазва кривата k и обратното преобразувание (поради $\det(a_{ij})\neq 0$) е също проективно преобразувание и запазва кривата k.
Групата от преобразувания GL_2 се нарича **група на Лобачевски**. Според приведените малко по-горе съображения, тя е 3-параметрична група от преобразувания,така както е в евклидовата равнина.
Ако $P(p_1,p_2,p_3)$ е произволна точка от проективната равнина, в която действа проективната група (2), нейната поляра относно кривата (1) има уравнение

(6) $$\pi(P): p_1x_1+p_2x_2-p_3x_3=0.$$

Както знаем, една точка е външна точка за кривата (1),когато полярата ѝ пресича кривата (1).Да намерим характеристично условие за това. За тази цел изследваме решенията на системата

(7) $$k: x_1^2+x_2^2-x_3^2=0, \pi(P): p_1x_1+p_2x_2-p_3x_3=0.$$

За улеснение прилагаме компютърната система Maple.

```
> solve({x1^2+x2^2-x3^2=0,p1*x1+p2*x2-p3*x3=0},{x1,x2});
```

$\{x2 = \mathrm{RootOf}((p2^2+p1^2)\,\_Z^2+p3^2-p1^2-2\,p2\,\_Z\,p3, label=\_L1)\,x3,$
$x1 = -x3\,($
$p2\,\mathrm{RootOf}((p2^2+p1^2)\,\_Z^2+p3^2-p1^2-2\,p2\,\_Z\,p3, label=\_L1)$
$-p3)/p1\}$

Налага се да се реши още едно уравнение, което решаваме по същия начин:

```
> solve({(p2^2+p1^2)*_Z^2+p3^2-p1^2-2*p2*_Z*p3},{_Z});
```

$$\{\_Z = \frac{p3\,p2+\sqrt{p2^2\,p1^2-p1^2\,p3^2+p1^4}}{p2^2+p1^2}\},$$
$$\{\_Z = \frac{p3\,p2-\sqrt{p2^2\,p1^2-p1^2\,p3^2+p1^4}}{p2^2+p1^2}\}$$

Дискриминантата е

```
> di:=p1^2*(p1^2+p2^2-p3^2);
```

$$di := p1^2\,(p2^2-p3^2+p1^2)$$

Следва верността на следната
ЛЕМА. Точката $P(p_1, p_2, p_3)$ е външна точка за кривата (1) точно когато

(8) $$p_1^2+p_2^2-p_3^2>0;$$

тя е контурна точка точно когато

(9) $$p_1^2+p_2^2-p_3^2=0;$$

тя е вътрешна точка точно когато

(10) $$p_1^2+p_2^2-p_3^2<0.$$

Точка за която е в сила (9) се нарича понякога **безкрайна точка за равнината на Лобачевски**. Очевидно това са контурните точки на абсолюта.Точки, за които е в сила (8) са точките от равнината на Лобачевски и понякога се наричат **крайни точки**.
2. Скаларно произведение на две точки.За две точки $P(p_1, p_2, p_3), Q(q_1, q_2, q_3)$ се дефинира скаларно произведение по следния начин:

(11) $$(P,Q) = p_1q_1+p_2q_2-p_3q_3.$$

Понеже хомогенните координати са определени с точност до ненулев множител, то скаларното произведение не е определено еднозначно (определено е също с точност до ненулев множител).Въпреки това то се прилага твърде успешно.Ето някои негови основни свойства:

I. Комутативност: $(P,Q)=(Q,P)$;

II. Линейност по всеки множител: $(mP,Q)=(P,mQ)=m(P,Q)$;

III. Дистрибутивност по двата аргумента: $\begin{array}{l}(P_1+P_2,Q)=(P_1,Q)+(P_2,Q)\\(P,Q_1+Q_2)=(P,Q_1)+(P,Q_2).\end{array}$

Скаларното произведение

$$(P,P)=p_1^2+p_2^2-p_3^2$$

се нарича **Скаларен квадрат на точката** $P(p_1,p_2,p_3)$.

Примери: За координатния триъгълник $A_1(1,0,0), A_2(0,1,0), A_3(0,0,1)$ имаме

(12) $(A_1,A_1)=1,(A_2,A_2)=1,(A_3,A_3)=-1$

(13) $(A_1,A_2)=0,(A_2,A_3)=0,(A_3,A_1)=0$.

Първите три равенства показват, че точките A_1, A_2 са външни точки, а A_3 - вътрешна точка, т.е. точка от равнината на Лобачевски.

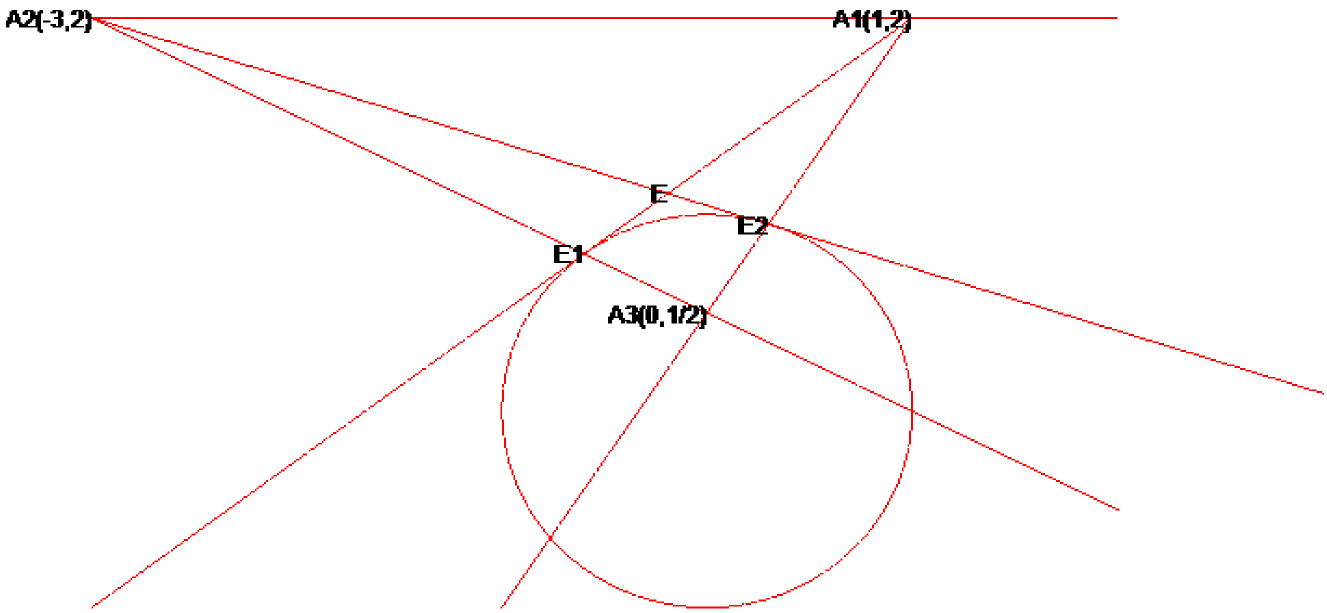
Освен тези свойства на координатния триъгълник $A_1A_2A_3$ в сила са още и следните свойства за координатната система $A_1A_2A_3E$:

1. Координатният триъгълник $A_1A_2A_3$ е **автополярен** относно кривата (1); това означава, че полярата на всеки един от неговите върхове е правата,съединяваща другите върха.Проверката е непосредствена.

2. Ако точката E_1 е пресечната точка на абсолюта с правата A_2A_3, а точката E_2 е пресечната точка на абсолюта с правата A_1A_3, то единичната точка E на координатната система е пресечната точка на правите A_1E_1, A_2E_2.

Проверката на тези свойства е непосредствена.

Координатна система $A_1A_2A_3E$, за която първите два върха са външни точки, а третият връх е вътрешна точка за абсолюта и са в сила свойствата **1**. и **2**, се нарича **Репер наЛобачевски**. На фиг. 1 е показан един такъв репер.



Фиг. 1

3. Свойства на движенията на Лобачевски. В сила са следните твърдения:

Теорема 1. Всяко движение на Лобачевски трансформира репер на Лобачевски в репер на Лобачевски.

Теорема 2. Всяко движение на Лобачевски трансформира вътрешна точка в равнината на Лобачевски във вътрешна точка.

Теорема 3. Движения на Лобачевски са точно онези проективни преобразувания, които запазват скаларното произведение.

На доказателствата няма да се спираме, тъй като и директно няма да ги ползваме.

& 2 . Права и наредба върху права в равнината на Лобачевски.

Според определението **равнина на Лобачевски** е вътрешността на единичната окръжност (в нехомогенни координати)

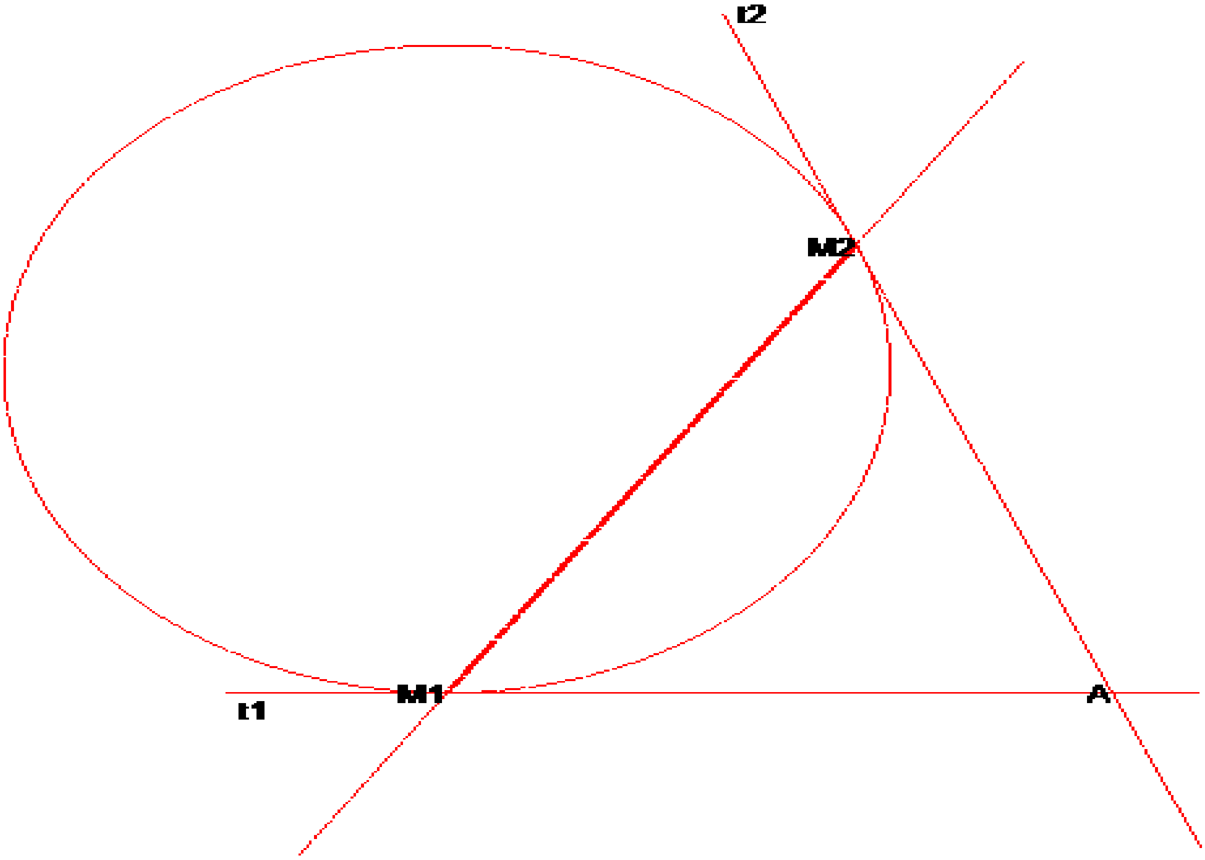
(1) $$x_1^2 + x_2^2 = 1 .$$

Тази окръжност се нарича **абсолют на равнината на Лобачевски.**Той не принадлежи на равнината на Лобачевски.

Права в равнината на Лобачевски наричаме отсечката от проективната права, която се явява хорда на окръжността (1). Краищата M_1, M_2 на хордата принадлежат на абсолюта, поради което за тях са валидни равенствата

(2) $$(M_1, M_1) = 0 ,\ (M_2, M_2) = 0 .$$

Понеже правата на хордата е секателна за окръжността,то тя се явява поляра на външна точка $A(a_1, a_2, a_3)$ (Фиг.1).



Фиг. 1

поради което за хордата (както и за всички точки $X(x_1, x_2, x_3)$ на правата й) можем да напишем равенството:

(3) $$(A, X) = a_1x_1 + a_2x_2 - a_3x_3 = 0.$$

Понеже A е външна точка, за нея важи неравенството

(4) $$(A, A) = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 > 0.$$

За точките X от хордата, т.е. правата на Лобачевски, е в сила равенството (понеже това са вътрешни точки):

(5) $$(X, X) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0.$$

На фигурата (1) правите $t_1 = AM_1, t_2 = AM_2$ са, разбира се, допирателните от външната точка A към абсолюта.

Равенството (3) при условията (4) и (5) ще наричаме **уравнение на правата на Лобачевски** M_1M_2**.**
Произволна точка X от проективната права M_1M_2 може да се представи като линейна комбинация на точките M_1, M_2 и затова можем да напишем равенството

(6) $$M = M_1 + \alpha M_2 .$$

За скаларния квадрат (X, X) имаме:

$$(X, X) = (M_1 + \alpha M_2, M_1 + \alpha M_2)$$
и съгласно свойствата на скаларното произведение получаваме

$$(X, X) = (M_1, M_1) + 2\alpha(M_1, M_2) + \alpha^2 (M_2, M_2) .$$

Оттук поради (2) и (5) следва

(7) $$\alpha(M_1, M_2) < 0 .$$

С това установихме верността на следното : за точки X от правата на Лобачевски (хордата) M_1M_2 е в сила равенството (6) като е валидно неравенството (7).
Точките M_1, M_2 ще наричаме **безкрайните точки на правата** M_1M_2.
По-нататък, да разгледаме скаларното произведение (M_1, M_2) на контурните точки M_1, M_2 .То никога не е нула (тъй като те не могат да са полярно спрегнати). За такива точки ще направим следната
Специална уговорка:
Когато M_1, M_2 *не са полярно спрегнати точки, за тяхното скаларно произведение можем да предполагаме, че е изпълнено неравенството*

(8) $$(M_1, M_2) < 0 .$$

Мотивация за това ни дава следното разсъждение.Ако това число, различно от нула, е положително, с умножаване на координатите на едната от точките с -1,се достига до неравенството (8).
Въз основа на това от (7) следва $\alpha > 0$.
И така, имайки предвид специалната уговорка, валидна в цялостното ни изложение нататък, можем да формулираме следната

Теорема 1. Всяка права на Лобачевски допуска параметричното представяне (6), като параметърът α се изменя в интервала $(0, \infty)$.

Тази теорема дава възможност да да се въведе *наредба върху права*.

Дефиниция. Казваме, че точката

$$A_2 = M_1 + \alpha_2 M_2$$

се намира **между** точките

$$A_1 = M_1 + \alpha_1 M_2 \text{ и } A_3 = M_1 + \alpha_3 M_2$$

когато

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \infty \quad \text{или} \quad 0 < \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1 < \infty .$$

&3 . Лъч и отсечка в равнината на Лобачевски.

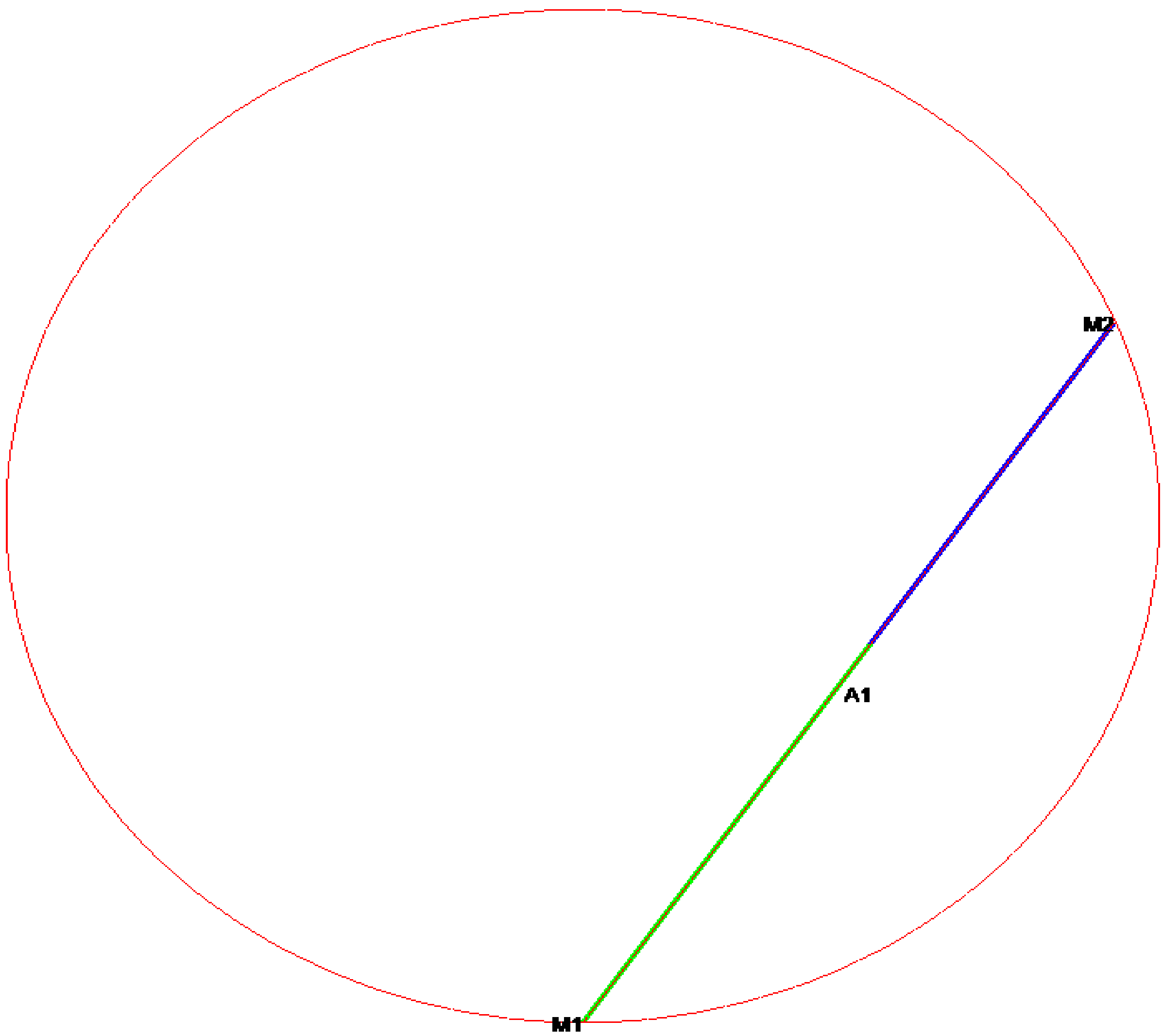
Лъч $A_1 M_1$ (с начало A_1 и посока M_1) наричаме множеството X от точки върху правата $M_1 M_2$, които се получават по формулата

(1) $$X = M_1 + \alpha M_2 \quad \text{като} \quad 0 < \alpha < \alpha_1 .$$

Множеството от точки

(2) $$X = M_1 + \alpha M_2 \quad \text{като} \quad \alpha_1 < \alpha < \infty$$

се нарича противоположен лъч на лъча $A_1 M_1$ и се означава с $A_1 M_2$ - лъч с начало A_1 и посока M_2 (Фиг. 1).



Фиг. 1

Отсечка A_1A_2 с краища точките $A_1 = M_1 + \alpha_1 M_2$ и $A_2 = M_1 + \alpha_2 M_2$ се нарича множеството от точки $X = M_1 + \alpha M_2$, за които $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ (когато $\alpha_1 < \alpha_2$). (Фиг. 2).

Ще докажем следната

Теорема 1. Отечката A_1A_2 е множество от точки X, които могат да се представят параметрично по следния начин

(3) $$X = A_1 + \beta A_2 \quad \text{като} \quad 0 < \beta < \infty .$$

Доказателство. Понеже правата A_1A_2 е проективна права, можем да напишем линейната комбинация $X = A_1 + \beta A_2$. Като внесем тук

$$A_1 = M_1 + \alpha_1 M_2 \text{ и } A_2 = M_1 + \alpha_2 M_2,$$

получаваме

$$X = (M_1 + \alpha_1 M_2) + \beta(M_1 + \alpha_2 M_2)$$

и като направим приведение следва

$$X = (1+\beta)M_1 + (\alpha_1 + \beta\alpha_2)M_2.$$

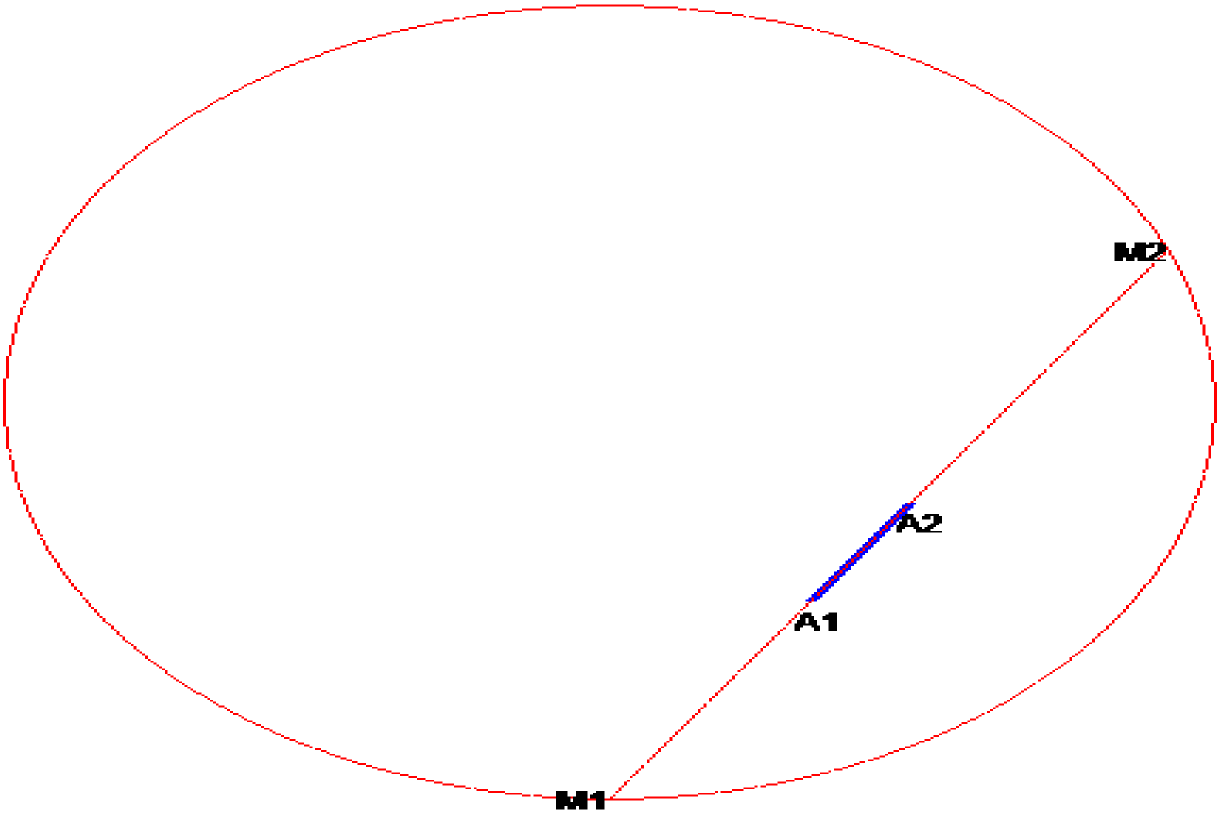
Като разделим двете страни на това равенство с $1+\beta$,получаваме

$$\frac{X}{1+\beta} = M_1 + \frac{\alpha_1 + \beta\alpha_2}{1+\beta}M_2.$$

От това равенство след пренормиране на хомогенните ккординати на точката X (т.е като разделим изходните координати на точката X с $1+\beta$, при което точката не се променя), последното равенство можем да запишем във вида

(4) $$X = M_1 + \frac{\alpha_1 + \beta\alpha_2}{1+\beta}M_2.$$

Като сравним това равенство с равенството (1), достигаме до следното равенство



Фиг.2

(5) $$\alpha = \frac{\alpha_1 + \beta\alpha_2}{1+\beta}$$

Определяме

(6) $$\beta = \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha - \alpha_2}$$

Така достигнахме до функцията

(7) $\beta = \beta(\alpha)$, дефинирана за $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$.

Производната й

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{(\alpha - \alpha_2)^2}$$

е винаги положителна; следователно тя е растяща функция. И понеже

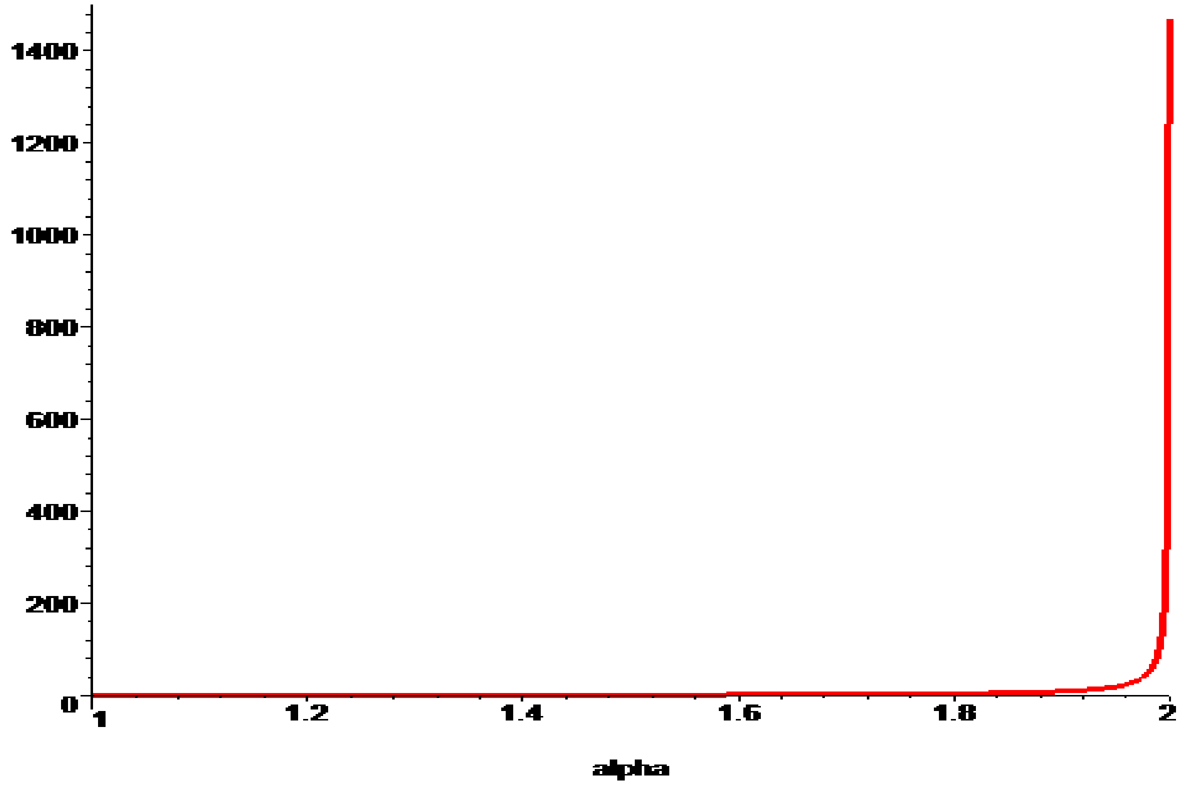
$\beta(\alpha_1) == 0, \lim\limits_{\alpha \to \alpha_2} \beta = \infty$,следва,че $\beta \in (0, \infty)$.

Графиката на тази функция е представена на фиг.3, където $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$.

```
> beta:=(1-alpha)/(alpha-2);
```

$$\beta := \frac{1-\alpha}{\alpha-2}$$

```
> plot(beta,alpha=1..2,thickness=3);
```



Фиг.3

Без доказателство ще формулираме следната

Теорема 2. Всяка права (хорда) в равнината на Лобачевски разделя последната на две полуравнини със следните свойства: отсечка, съединяваща две точки от едната полуравнина няма общи точки с правата, а отсечка, съединяваща точки от различни полуравнини има точно обща точка с правата.

&4 . Разстояние между две точки.

Разстояние между две точки в равнината на Лобачевски може да се дефинира с помоща на двойно отношение на четири колинеарни точки.

При означенията на фиг. 2 от предния параграф можем да напишем равенствата

(1)
$$M_1 = A_1 + \lambda_1 A_2$$
$$M_2 = A_1 + \lambda_2 A_2$$

Оттук за двойното отношение на тези четири точки имаме:

(2)
$$\delta = (A_1 A_2 M_1 M_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ .$$

Понеже M_1, M_2 са точки от абсолюта, за всяка една от тях $M = A_1 + \lambda A_2$ е изпълнено равенството

(3)
$$(M, M) = (A_1 + \lambda A_2, A_1 + \lambda A_2) = 0 \, .$$

След развиване на средния израз получаваме квадратното уравнение

(4)
$$(A_1, A_1) + 2\lambda (A_1, A_2) + \lambda^2 (A_2, A_2) = 0 \, .$$

Неговите корени са:

$$\lambda_1 = \frac{-(A_1, A_2) + \sqrt{(A_1, A_2)^2 - (A_1, A_1)(A_2, A_2)}}{(A_2, A_2)}, \lambda_2 = \frac{-(A_1, A_2) - \sqrt{(A_1, A_2)^2 - (A_1, A_1)(A_2, A_2)}}{(A_2, A_2)}$$

Оттук съгласно (2) имаме

$$\delta = \frac{-(A_1, A_2) + \sqrt{(A_1, A_2)^2 - (A_1, A_1)(A_2, A_2)}}{-(A_1, A_2) - \sqrt{(A_1, A_2)^2 - (A_1, A_1)(A_2, A_2)}}$$

или

$$\delta = \frac{(A_1, A_2) - \sqrt{(A_1, A_2)^2 - (A_1, A_1)(A_2, A_2)}}{(A_1, A_2) + \sqrt{(A_1, A_2)^2 - (A_1, A_1)(A_2, A_2)}}.$$

Дефиниция. **Разстояние** (в равнината на Лобачевски) **между точките** A_1, A_2 наричаме числото $d(A_1 A_2)$,определено по следния начин:

(5) $$d(A_1 A_2) = \frac{\rho}{2} \ln |\, \delta \,|,$$

където ρ е произволно положително число (засега).
Ще отбележим, че поради наредбата на корените λ_1, λ_2,числото δ е по-голямо от 1 и логаритъмът в равенството (5) е дефиниран.
Преди да мотивираме дефиницията за въведеното разстояние,ще изведем работна формула за разстоянието.
И тъй, имаме равенството

(6) $$d(A_1 A_2) = \frac{\rho}{2} \ln \left| \frac{(A_1, A_2) - \sqrt{(A_1, A_2)^2 - (A_1, A_1)(A_2, A_2)}}{(A_1, A_2) + \sqrt{(A_1, A_2)^2 - (A_1, A_1)(A_2, A_2)}} \right|.$$

Ще докажем валидността на следната **Формула за разстояние** в равнината на Лобачевски

(7) $$\cosh \frac{d}{\rho} = \frac{|\,(A_1, A_2)\,|}{\sqrt{(A_1, A_1)(A_2, A_2)}}.$$

Доказателство. Като се освободим от логаритъма в (6) имаме равенството (за краткост сме положили $d(A_1 A_2) = d$)

$$\frac{(A_1, A_2) - \sqrt{(A_1, A_2)^2 - (A_1, A_1)(A_2, A_2)}}{(A_1, A_2) + \sqrt{(A_1, A_2)^2 - (A_1, A_1)(A_2, A_2)}} = e^{\frac{2d}{\rho}}.$$

Тук сме се освободили и от модула тъй като знаците на числителя и знаменателя се определят от знака на числото (A_1, A_2), което съгласно Специалната ни уговорка, е отрицателно число.
От последното равенство получаваме

$$[(A_1, A_2) + \sqrt{(A_1, A_2)^2 - (A_1, A_1)(A_2, A_2)}\,]e^{\frac{2d}{\rho}} = (A_1, A_2) - \sqrt{(A_1, A_2)^2 - (A_1, A_1)(A_2, A_2)}$$

или

$$[e^{\frac{2d}{\rho}}+1]\sqrt{(A_1,A_2)^2-(A_1,A_1)(A_2,A_2)}=[1-e^{\frac{2d}{\rho}}](A_1,A_2).$$

След умножаване с $e^{-\frac{d}{\rho}}$ получаваме

$$[e^{\frac{d}{\rho}}+e^{-\frac{d}{\rho}}]\sqrt{(A_1,A_2)^2-(A_1,A_1)(A_2,A_2)}=[e^{-\frac{d}{\rho}}-e^{\frac{d}{\rho}}](A_1,A_2)$$

Като се вземат предвид равенствата

$$\cosh(\frac{d}{\rho})=\frac{e^{\frac{d}{\rho}}+e^{-\frac{d}{\rho}}}{2},\sinh(\frac{d}{\rho})=\frac{e^{\frac{d}{\rho}}-e^{-\frac{d}{\rho}}}{2},$$

предходното равенство приема вида

$$\frac{\sqrt{(A_1,A_2)^2-(A_1,A_1)(A_2,A_2)}}{(A_1,A_2)}=-\frac{\sinh(\frac{d}{\rho})}{\cosh(\frac{d}{\rho})}.$$

След повдигаме в квадрат и използваме на равенството

$$\sinh(\frac{d}{\rho})^2=\cosh(\frac{d}{\rho})^2-1$$

достигаме до равенството

$$1-\frac{(A_1,A_1)(A_2,A_2)}{(A_1,A_2)^2}=1-\frac{1}{\cosh(\frac{d}{\rho})^2},$$

откъдето следва желаната формула (7).

Следствие. Когато някоя от точките A_1,A_2 клони към точка от абсолюта, следва $d\to\infty$.

Резултатът може да се изкаже и така: разстоянието между коя да е точка от равнината на Лобачевси и точка от абсолюта е безкрайно голямо.

Сега да се върнем към обещаната мотивация за въвеждане на разстоянието. Тя се съдържа във верността на следните свойства на разстоянието:

Адитивно свойство на разстоянието: Ако A_2 е между точките A_1,A_3, то валидно е равенството

$$d(A_1,A_2)+d(A_2,A_3)=d(A_1,A_3).$$

Комутативно свойство на разстоянието:

$$d(A_1, A_2) = d(A_2, A_1).$$

Идентично свойство на разстоянието:

$$d(A_1, A_2) = 0 \Leftrightarrow A_1 = A_2.$$

На доказателствата няма да се спираме. Ще отбележим само, че адитивното свойство се доказва като се използва едно равенство за двойните отношения на 5 колинеарни точки.

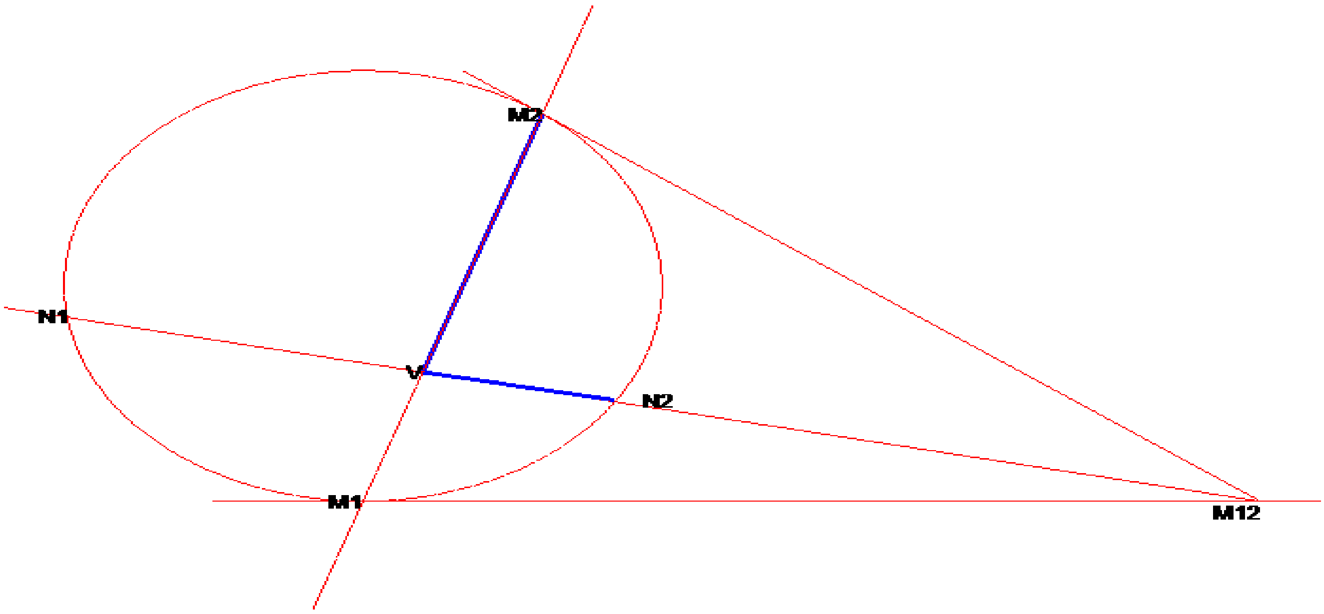
&5 . Ъгли. Прав ъгъл. Триъгълник.

Редица понятия се въвеждат както в евклидовата равнина. Затова ще бъдем по-кратки.

Ъгъл се нарича съвкупност от два лъча с общо начало (фиг. 1).

Понятието прав ъгъл се въвежда като се използват понятията полюс и поляра.

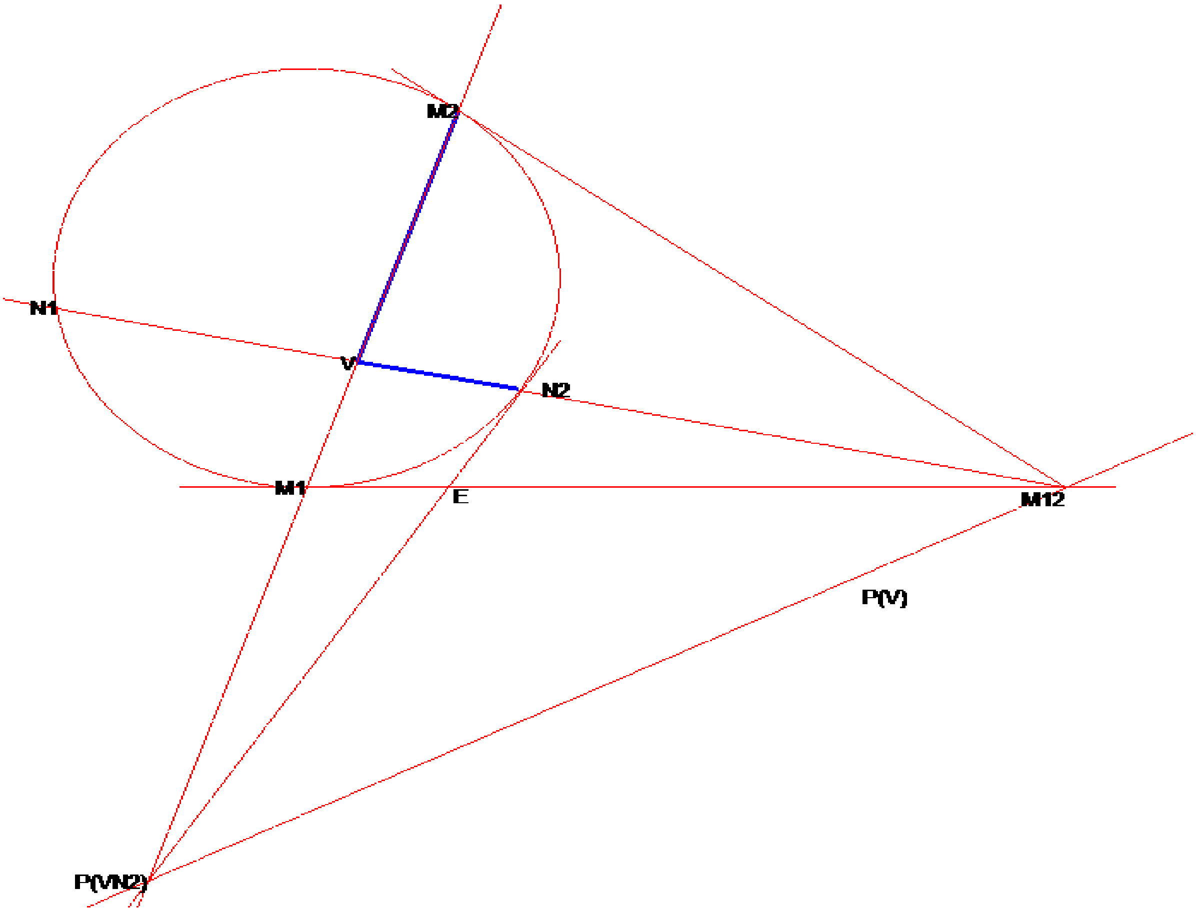
Прав ъгъл се нарича ъгъл за който полюсът на правата ,съдържаща едното му рамо (единия лъч) лежи на правата, съдържаща другото рамо (другия лъч) (фиг. 2).



Фиг. 1

За краткост, това определение ще изказваме така; Прав ъгъл е ъгъл, за който полюсът на едното му рамо лежи на другото му рамо.
На фиг. 1 е показан правият ъгъл $\angle(VN_2, VM_2)$. Според определението, той е прав, защото полюсът M_{12} на правата M_1M_2 лежи на другото рамо VN_2 на ъгъла.
Ъгълът $\angle(VM_2, VN_1)$, както в евклидовата геометрия, се нарича **съседен ъгъл** на ъгъла $\angle(VN_2, VM_2)$. Той също е прав. Ъгълът $\angle(VN_1, VM_1)$ се нарича **връхен** (вертикален) ъгъл на ъгъла $\angle(VN_2, VM_2)$.Той също е прав.
Понятието еднаквост на фигури се дефинира както в евклидовата геометрия.
Еднакви фигури в равнината на Лобачевски се наричат такива фигури, за които съществува движение наЛобачевски,което трансформира едната фигура в другата фигура.
Ще докажем следното
Твърдение. Всеки прав ъгъл е еднакъв на своя съседен ъгъл.

Доказателство (Фиг. 2). От условието $M_{12} \in VN_2$,съгласно свойството на



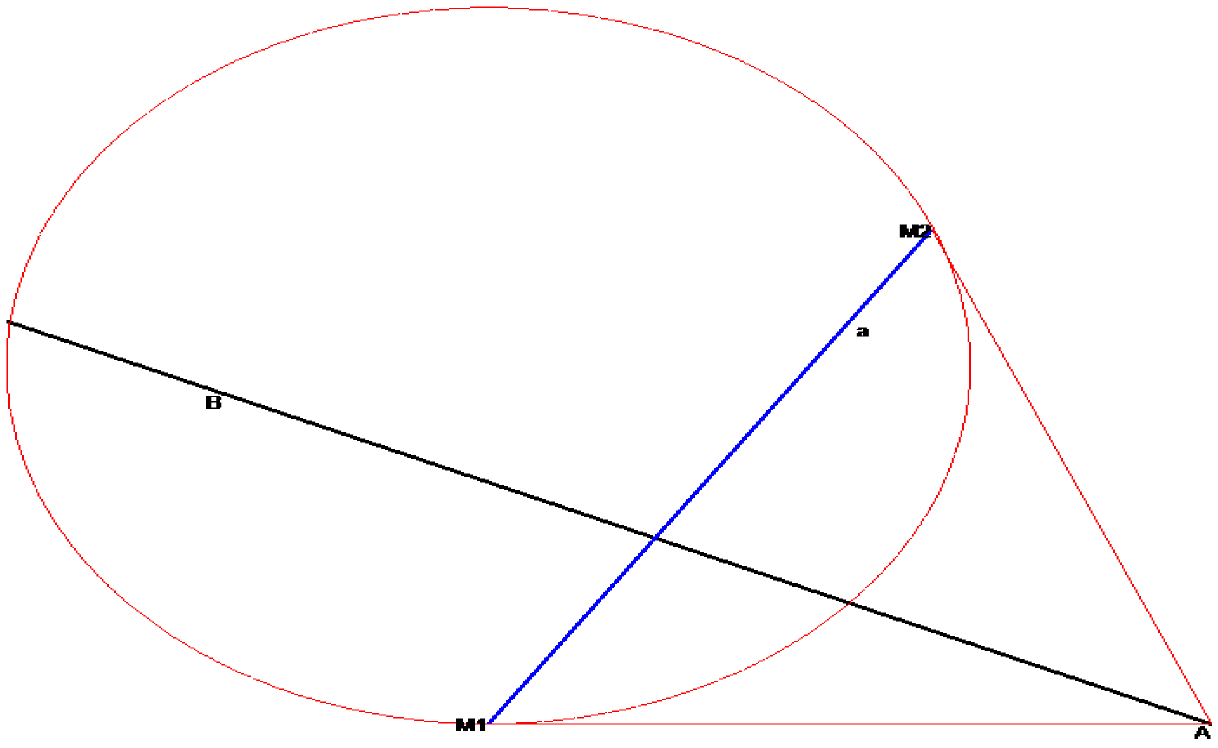
Фиг. 2

спрегнати поляри, следва полюсът $P(VN_2)$ на другото рамо VN_2 лежи на рамото
спрегнати поляри, следва полюсът $P(VN_2)$ на другото рамо VN_2 лежи на рамото VM_2. Тогава полярата на върха V е правата $P(V)$,съединяваща точките $\mathrm{M}_{12}, P(VN_2)$.Следва, че триъгълникът с върхове $V, M_{12}, P(VN_2)$ е автополярен и като се избере за единична точка точката E ,която е пресечната точка на допирателните към абсолюта в точките му M_1, N_2 ,се получава репер на Лобачевски. Произволна точка от равнината има представяне

$$M = x_1 M_{12} + x_2 P(VN_2) + x_3 V$$

Трансформацията $y_1 = x_1, y_2 = -x_2, y_3 = x_3$ запазва абсолюта $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$

и следователно е движение на Лобачевски. Това движение на Лобачевски трансформира $\angle(VN_2, VM_2)$ в $\angle(VN_2, VM_1)$ и следователно тези ъгли са еднакви.



Фиг. 3

Две прави в равнината на Лобачевски се наричат **перпендикулярни**, ако образуват прав ъгъл.

Ще докажем следната

Теорема. През произволна точка в равнината на Лобачевски съществува единствен перпендикуляр към произволна права.

Доказателство. Нека е дадена произволна точка B и произволна права a в равнината на Лобачевски (фиг.3). Ако A е полюсъта на правата a, правата AB (по-точно частта от нея,която е вътрешна за абсолюта) е перпендикулярна на правата a; записва се $AB \perp a$.

По указания начин може да се построява перпендикуляра от точка към права.

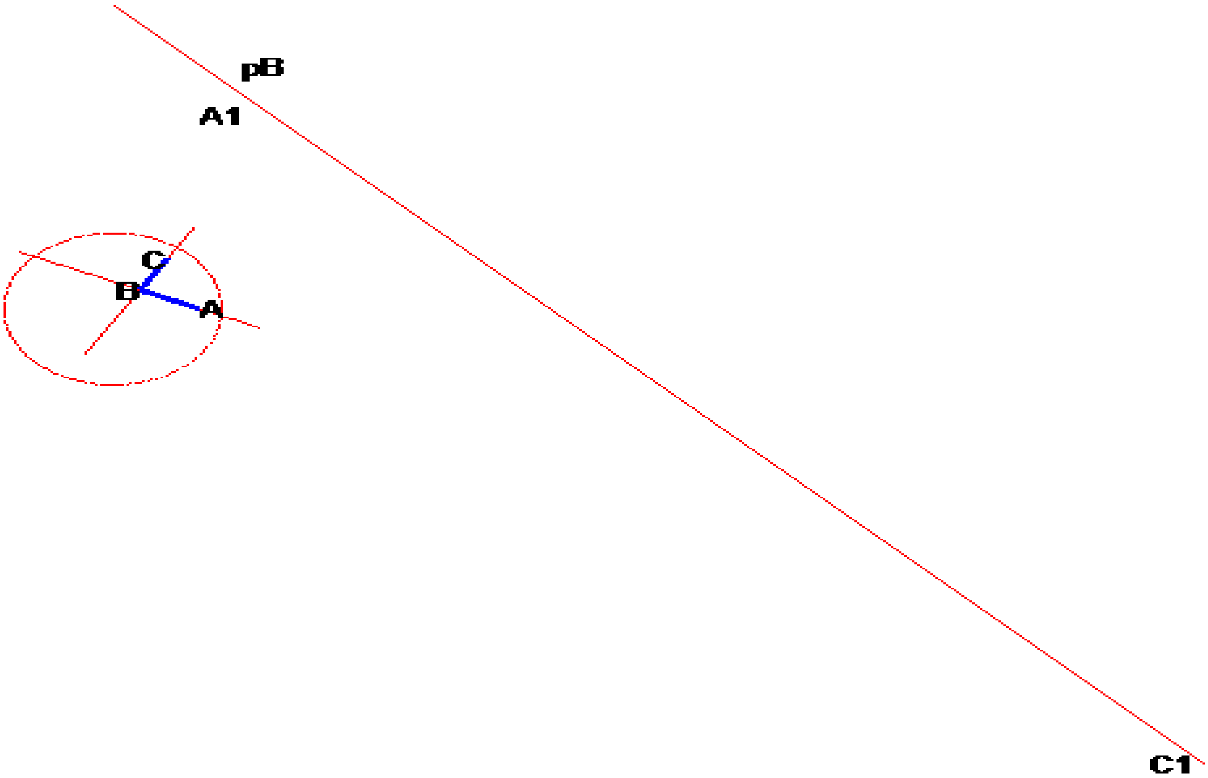
Точката може да лежи или не лежи на правата.

Определението за триъгълник е аналогично на това в евклидовата геометрия.

&6. Измерване на ъгли.

Мярка на ъгъл се въвежда аналогично на въвеждането на разстоянието между две тoчки- чрез двойно отношение.

Нека е даден ъгъл ABC с връх B. Неговата поляра pB е несекателна за абсолюта и следователно пресича абсолюта в две комплексно спрегнати точки I_1, I_2. Полюсът A_1 на правата AB ,лежи на полярата pB. Същото се отнася и за полюса C_1 на правата BC. Означаваме с δ двойното отношение на четирите точки A_1, C_1, I_1, I_2 върху полярата pB:



Фиг.1

(1) $$\delta = (A_1 C_1 I_1 I_2)\,.$$

Тогава за мярка на ъгъла се взема

(2) $$\alpha = cLn(\delta)\,,$$

където c е произволна константа, а Ln е логаритмичната функция определена в комплексна област по следния начин:

(3) $$Ln(z) = \ln(|\, z\,| + iArg(z)\,,$$

като $Arg(z) \in (-\pi, \pi), i = \sqrt{-1}$.

Ако се положи

(4) $$I_1 = A_1 + \lambda_1 C_1, I_2 = A_1 + \lambda_2 C_1\,;$$

то имаме

(5) $$\delta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Понеже всяка една от точките $I = A_1 + \lambda C_1$ лежи на абсолюта, в сила е равенството

$$(I, I) = (A_1 + \lambda C_1, A_1 + \lambda C_1) = 0,$$

което развито приема вида

$$(A_1, A_1) + 2\lambda(A_1, C_1) + \lambda^2 (C_1, C_1) = 0.$$

Корените на това квадратно уравнение са:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(A_1, C_1) \pm \sqrt{(A_1, C_1) - (A_1, A_1)(C_1, C_1)}}{(C_1, C_1)}.$$

Тогава двойното отношение е:

$$\delta = \frac{-(A_1, C_1) + \sqrt{(A_1, C_1) - (A_1, A_1)(C_1, C_1)}}{-(A_1, C_1) - \sqrt{(A_1, C_1) - (A_1, A_1)(C_1, C_1)}}$$

или

$$\delta = \frac{(A_1, C_1) - \sqrt{(A_1, C_1) - (A_1, A_1)(C_1, C_1)}}{(A_1, C_1) + \sqrt{(A_1, C_1) - (A_1, A_1)(C_1, C_1)}}$$

Според (2)

(6) $$\alpha = cLn \frac{(A_1, C_1) - \sqrt{(A_1, C_1) - (A_1, A_1)(C_1, C_1)}}{(A_1, C_1) + \sqrt{(A_1, C_1) - (A_1, A_1)(C_1, C_1)}}$$

Константата c може да се определи от следното условие (както е и в евклидовата геометрия): *мярката на прав ъгъл да е* $\frac{\pi}{2}$. Когато ъгълът ABC е прав, точките A_1, C_1 са спрегнати (т.е. всяка една от тях лежи на полярата на другата точка) и слдователно $(A_1, C_1) = 0$. Тогава равенството (6) приема вида

(7) $$\frac{\pi}{2} = cLN(-1).$$

Понеже

$$LN(-1) = \ln|-1| + iArg((-1) = 0 + i\pi,$$

(7) приема вида

$$\frac{\pi}{2} = ci\pi \ ,$$

откъдето намираме

(8) $$c = \frac{1}{2i}$$

с което (6) приема вида

(9) $$\alpha = \frac{1}{2i} Ln \frac{(A_1, C_1) - \sqrt{(A_1, C_1) - (A_1, A_1)(C_1, C_1)}}{(A_1, C_1) + \sqrt{(A_1, C_1) - (A_1, A_1)(C_1, C_1)}} \ .$$

Ще докажем следната

Теорема. (10) $$\cos\alpha = \frac{|(A_1, C_1)|}{\pm\sqrt{(A_1, A_1)(C_1, C_1)}} \ ,$$

където + се взема когато ъгълът е остър и $-$ когато ъгълът е тъп.

Доказателство. От (9) последователно имаме

$$\frac{(A_1, C_1) - \sqrt{(A_1, C_1) - (A_1, A_1)(C_1, C_1)}}{(A_1, C_1) + \sqrt{(A_1, C_1) - (A_1, A_1)(C_1, C_1)}} = e^{2\alpha i} \ ,$$

$$(A_1, C_1) - \sqrt{(A_1, C_1) - (A_1, A_1)(C_1, C_1)} = e^{2\alpha i}((A_1, C_1) + \sqrt{(A_1, C_1) - (A_1, A_1)(C_1, C_1)}),$$
$$e^{-\alpha i}(A_1, C_1) - \sqrt{(A_1, C_1) - (A_1, A_1)(C_1, C_1)}) = e^{\alpha i}(A_1, C_1) + \sqrt{(A_1, C_1) - (A_1, A_1)(C_1, C_1)}),$$
$$(e^{\alpha i} + e^{-\alpha i})\sqrt{(A_1, C_1) - (A_1, A_1)(C_1, C_1)} = (e^{-\alpha i} - e^{\alpha i})(A_1, C_1),$$
$$\frac{\sqrt{(A_1, C_1) - (A_1, A_1)(C_1, C_1)}}{(A_1, C_1)} = \frac{e^{-\alpha i} - e^{\alpha i}}{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}$$

Като се взем предвид, че

$$e^{\alpha i} = \cos\alpha + i\sin\alpha, e^{-\alpha i} = \cos\alpha - i\sin\alpha \ ,$$

последното равенство приема вида

$$\sqrt{1-\frac{(A_1,A_1)(C_1,C_1)}{(A_1,C_1)^2}}=-itg\alpha$$

или

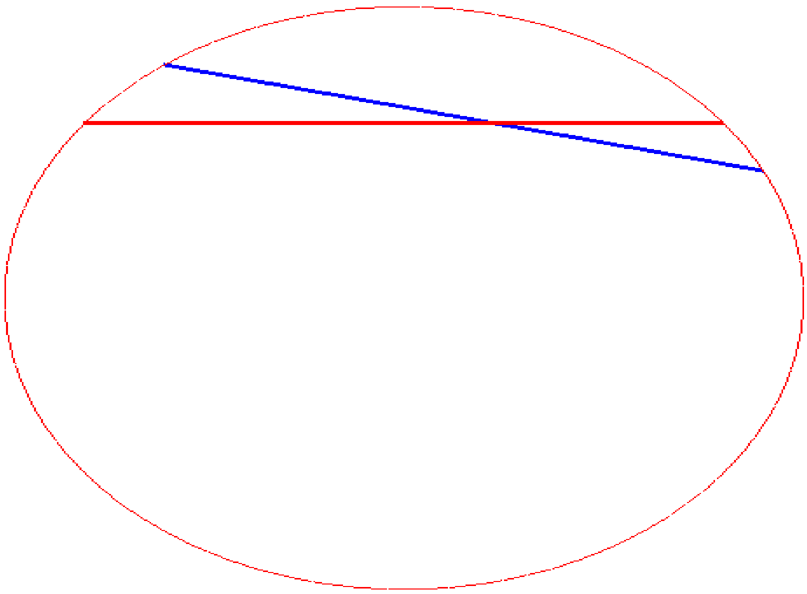
$$1-\frac{(A_1,A_1)(C_1,C_1)}{(A_1,C_1)^2}=-tg^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha}\,,$$

откъдето следва желаната формула (10).

&7 . Взаимно положение на две прави в равнината на Лобачевски.

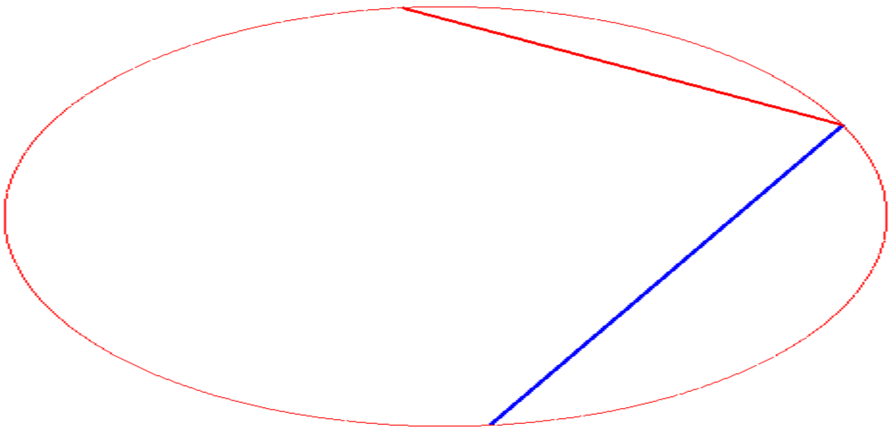
Според определението за права в равнината на Лобачевски, а именно, че тя е хорда в единичната окръжност, следва че две различни прави в равнината на Лобачевски имат следните взаимни положения:

I. Двете прави имат обща крайна точка (фиг.1); такива прави се наричат **пресекателни прави**.



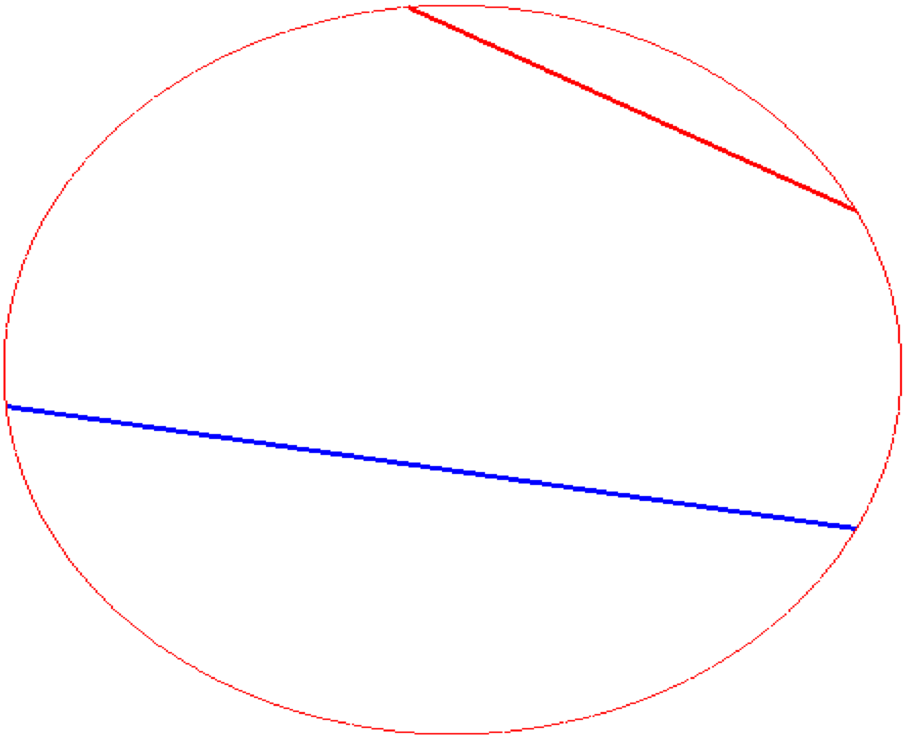
Фиг.1 (Пресекателни прави)

II. Двете прави имат обща безкрайна точка (т.е. точка от контура на абсолюта) (фиг.2); такива прави се наричат **паралелни прави**.



Фиг. 2 (Паралелни прави)

III. Двете прави нямат никаква обща точка (фиг.3); такива прави се наричат **разходящи прави**.

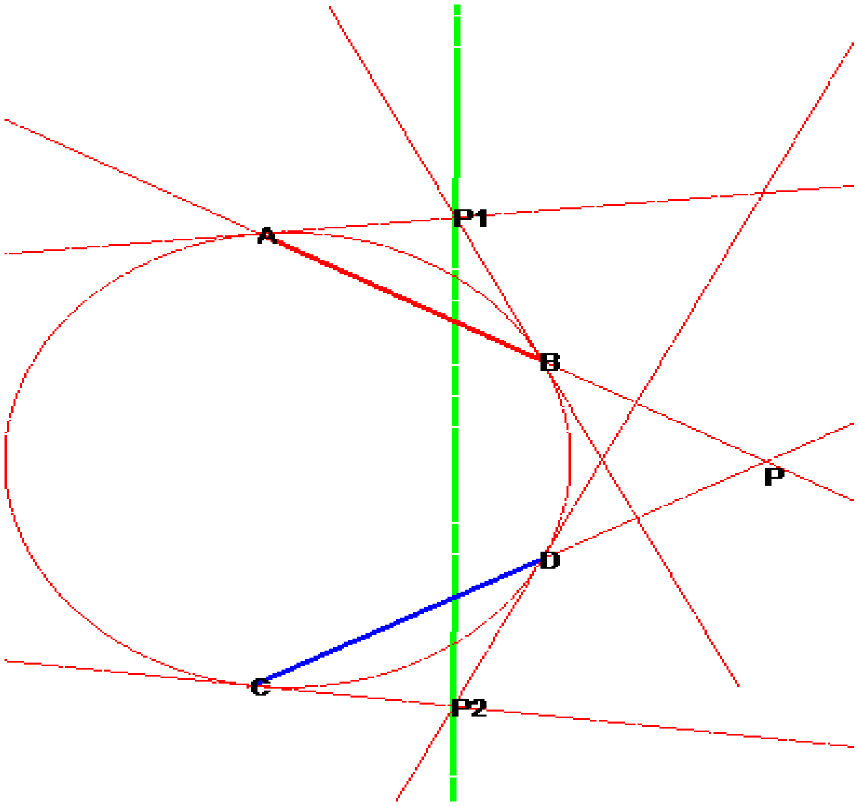


Фиг.3 (Разходящи прави)

Ще докажем следната

Теорема 1. Две разходящи прави имат единствен перпендикуляр

Доказателство. Нека правите AB, CD са разходящи (фиг. 4).Ако P_1 е полюсът на правата AB, а P_2 -полюсът на правата CD, правата P_1P_2 е общият перпендикуляр на



Фиг. 4

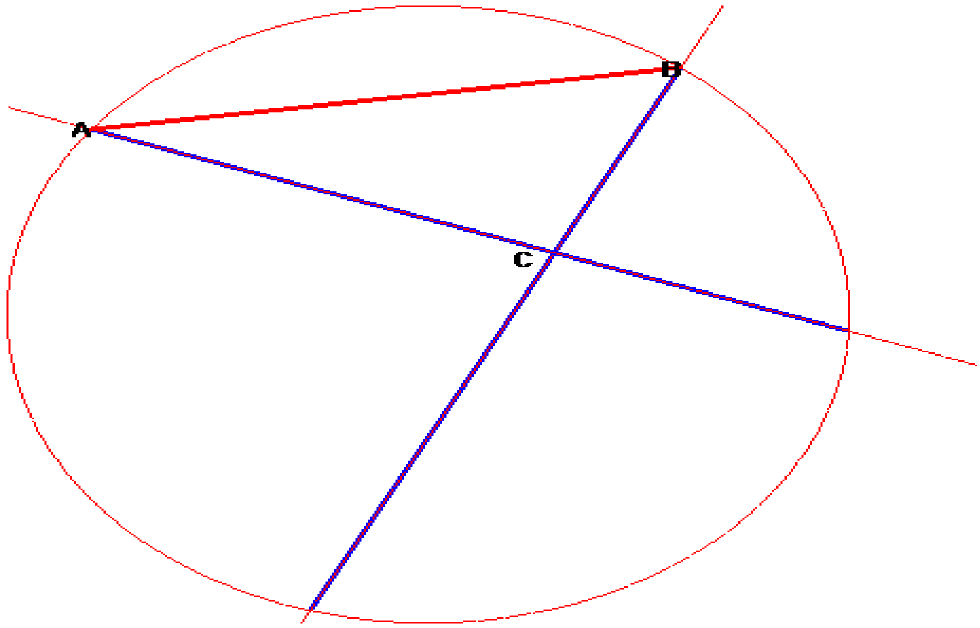
двете разходящи прави (частта от тази права,намираща се в равнината.Лобачевски). Тази права пресича абсолюта, тъй като нейният полюс P е външна точка (поради условието, че двете прави са разходящи).

Може да се докаже, че две пресекателни прави или две паралелни прави не притежават общ перпендикуляр.

&8 . Свойства на паралелните прави.

Най-напред ще докажем следната

Теорема 1. През точка, нележаща на дадена права може да се прекарат две прави,паралелни на дадената.
Доказателство. Нека е дадена правата AB и точката C . Правите CA, CB са паралелните на правата AB и минаващи през точката C .Казва се, че правата CA е паралелна на правата AB в посоката A , а правата CB е паралелна на правата AB в посоката B (фиг. 1).



Фиг. 1

Сега ще пристъпим към следваща важна

Теорема 2. При означенията на фиг. 2 когато точката C клони към точката N, разстоянието от точката C до правата MN клони към нула, а когато точката C клони към точката P, разстоянието от точката C до правата MN расте неограничено.

Доказателство. Нека правите MN, PN са паралелни в посоката N и A, C са различни точки върху правата PN (по-нататък A ще е фиксирана, а C - променлва точка). Спускаме перпендикулярите (O_2A, O_2C) от тях към другата права MN. Петите на тези перпендикуляри са съответно O, F .Следователно ъглите при тези точки са прави. Означаваме с O_1 полюса на правата O_2C. Триъгълникът O_1O_2O е автополярен относно абсолюта с уравнение в нехомогенни координати $\frac{x_1}{x_3} = x, \frac{x_2}{x_3} = y$:

(1) $$k : x^2 + y^2 = 1 .$$

В уравнението на правата

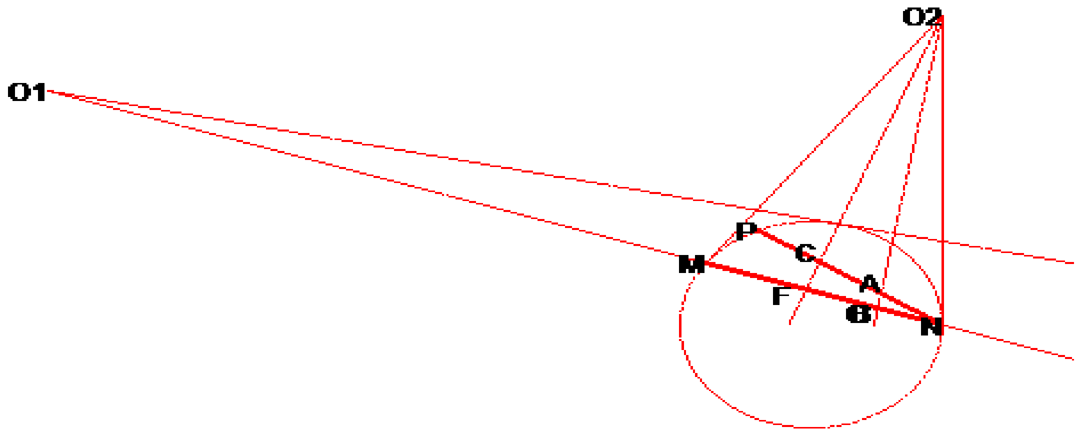


Fig. 2

$$AC: a_1x + a_2y + a_3 = 0$$

коефициентът $a_2 \neq 0$,тъй като в противен случай би излязло, че всички точки върху правата AC имат едно и също $x = x_0$,включително и точката N . За тази точка ,обаче имаме $N = x_0O_1 + O$,т.е $N(x_0, 0, 1)$.Понеже тази точка лежи на абсолюта, то $x_0^2 = 1$, т.е $x_0 = \pm 1$.Това би означавало, че това са всичките точки на правата AC , което е невъзможно. Следва, че уравнението на правата AC може да се представи във вида

(2) $$AC : \quad y = kx + n .$$

От проведените разсъждения следва, че $N(\pm 1, 0, 1$.нека изберем $N(1, 0, 1)$.Понеже координатите на тази точка удовлетворяват уравнението (2), следва $n = -k$.Тогава уравянението (2) приема вида:

(3) $$AC : \quad y = k(x-1) .$$

Точките C, F могат да бъдат представени по следния начин:

$$C = xO_1 + yO_2 + O = xO_1 + k(x-1)O_2 + O ,$$

$$F = xO_1 + O,$$

т.е $C(x, k(x-1), 1), F(x, 0, 1)$.

За разстоянието от точката C до правата MN, т.е. за разстоянието между точките C, F ,съгласно формулата за разстояние (7) от & 4 между две точки , имаме

$$\cosh(\frac{d}{\rho}) = \frac{|(C,F)|}{\sqrt{(C,C)(F,F)}}$$

Пресмятаме

$$(C,F) = x^2 - 1, (F,F) = x^2 - 1, (C,C) = x^2 + k^2(x-1)^2 - 1.$$

Тогава

$$\cosh(\frac{d}{\rho}) = \frac{|x^2 - 1|}{\sqrt{[x^2 + k^2(x-1)^2 - 1](x^2 - 1,)}}.$$

Като се внесе модула в знаменателя се получава

(4) $$\cosh(\frac{d}{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 \frac{x-1}{x+1}}}.$$

От тук следва когато точката $C \to N$:

(5) $$\lim_{x \to 1} \cosh(\frac{d}{\rho}) = 1.$$

Тогава $\lim\limits_{C \to N} d = 0$.

За да изследваме поведението на функцията $d = d(x)$, когато точката C клони към другата безкрайна точка P на правата PN ,трябва най-напред да намерим координатите на точката P. Затова решаваме системата:

$$x^2 + y^2 = 1, y = k(x-1).$$

Това ще направим със системата MAPLE. Командата е:

```
> solve({x^2+y^2=1,y=k*(x-1)},{x,y});
```

$$\{y = 0, x = 1\}, \{y = -\frac{2k}{1+k^2}, x = \frac{-1+k^2}{1+k^2}\}$$

Следователно освен известната пресечна точка *N(1,0)* се получава и точката *P* с координати :

$$x_P = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}, y_P = \frac{-2k}{k^2 + 1}$$

За да намерим границата на фунцията (4) когато *C->P*, означаваме

```
G:=1+k^2*(x-1)/(x+1);
```

$$G := 1 + \frac{k^2 (x - 1)}{x + 1}$$

и намираме

```
limit(G,x=(-1+k^2)/(1+k^2));
```

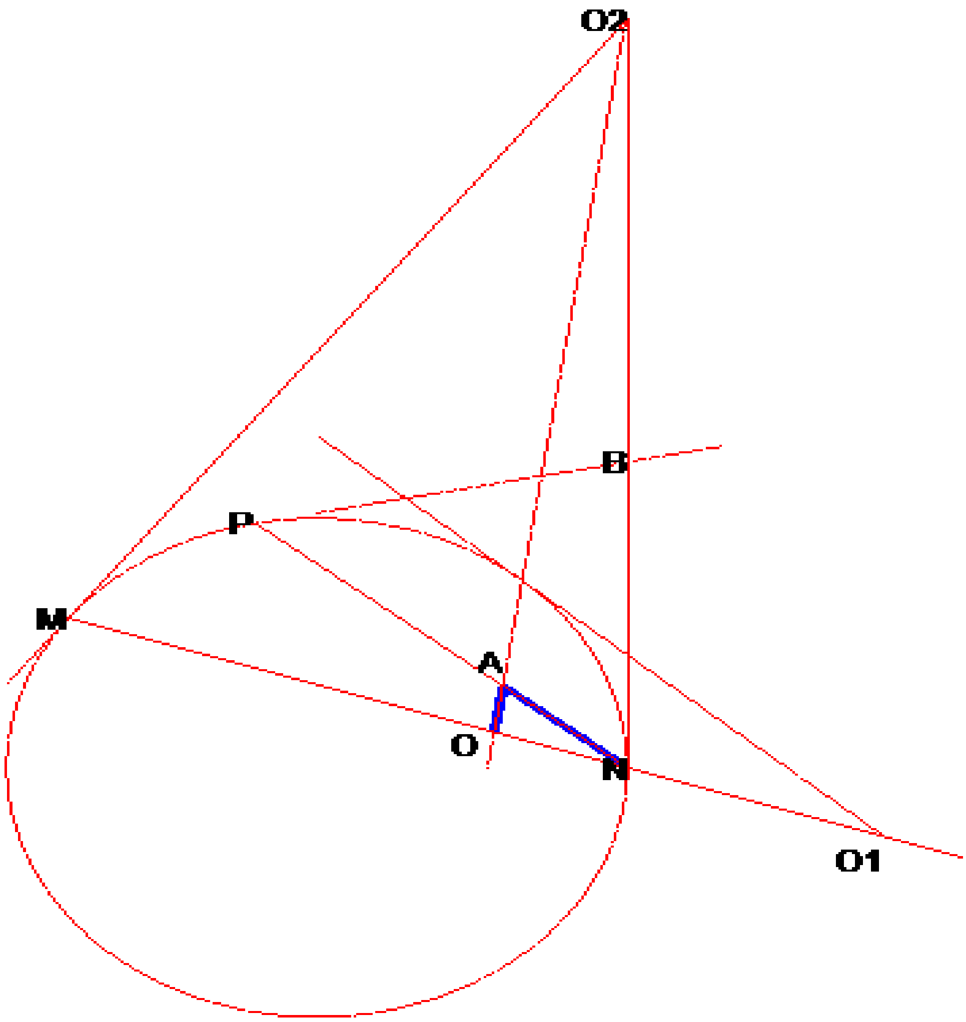
$$0$$

Тогава

$$\lim_{x \to x_P} \cosh(\frac{d}{\rho}) = \infty .$$

&9 . Ъгъл на паралелността.

Да разгледаме паралелните прави MN, PN в посоката N . Ако A е произволна фиксирана точка от правата PN ,нека AO_2 е перпендикулярът към правата MN .



Фиг.1

Ако O е петата му върху правата MN (ъгълът при точката O е прав), то разстоянието d на точката A до правата MN е дължината $d(A,O)$ на отсечката AO : $d = d(A,O)$.

Ъгълът $\angle OAN$ се нарича **Ъгъл на паралелността,съответен на разстоянието** d и се означава с $\pi(d)$. Ще докажем следната *Формула за ъгъла на паралелността:*

(1) $$\cosh(\frac{d}{\rho}) = \frac{1}{\sin\pi(d)}$$

Доказтелство. Относно автополярния триъгълник и съответния репер на Лобачевски O_1O_2O имаме:

(2) $$\begin{aligned} A &= O + y_A O_2 \\ B &= O + x_B O_1 + y_B O_2 \\ N &= O + O_1 \end{aligned}$$

Понеже B е полюсът на правата PN, то последната права има уравнение $(B, X) = 0$, където X е произволна точка от тази права. Понеже точките A, N лежат на тази права , в сила са равенствата

(3) $$(B, A) = 0, (B, N) = 0.$$

Въз основа на (2) тези равенства приемат вида

(3′) $$y_A y_B - 1 = 0, x_B - 1 = 0.$$

За разстоянието OA имаме:

(4) $$\cosh(\frac{d}{\rho}) = \frac{|(O, A)|}{\sqrt{(O,O)(A,A)}}$$

и понеже

$$O, A) = -1, (O,O) = -1, (A, A) = -1 + y_A^2,$$

то

(4′) $$\cosh(\frac{d}{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{1 - y_A^2}}.$$

Понеже O_1 е полюсът на правата AO, а B е полюсът на правата PN, за ъгъла $\pi(d)$ между тези две прави,имаме

(5) $$\cos\pi(d) = \frac{|(O_1, B)|}{\sqrt{(O_1,O_1)(B,B)}}$$

и понеже

$$(O_1, B) = x_B, (O_1, O_1) = 1, (B, B) = -1 + x_B^2 + y_B^2,$$

следва

$$(5') \qquad \cos\pi(d) = \frac{|x_B|}{\sqrt{-1+x_B^2+y_B^2}}.$$

Което въз основа на $(3')$ приема вида

$$(5'') \qquad \cos\pi(d) = |y_A|.$$

От $(4')$ и $(5'')$ следва желаната формула (1).

Следствия от формулата (1).

I. Когато $d \to 0, \cosh(\frac{d}{\rho}) \to 1, \sin\pi(d) \to 1, \pi(d) \to \frac{\pi}{2}$.

В евклидовата геометрия $\pi(d) = \frac{\pi}{2}$.Поради това се казва, че ***в достатъчно малки области на равнината на Лобачевски, геометрията на Лобачевски е близка до евклидовата геометрия.***

II. Ъгълът на паралелността $\pi(d)$, съответен на разстоянието d, е намаляваща функция на разстоянието.

За да добием представа за поведението на тази функция ще използваме MAPLE.

Имаме формулата

```
cosh(d/rho)=1/sin(Pi(d));
```

$$\cosh\left(\frac{d}{\rho}\right) = \frac{1}{\sin(\pi(d))}$$

от която намираме

```
sin(Pi(d))=1/cosh(d/rho);
```

$$\sin(\pi(d)) = \frac{1}{\cosh\left(\frac{d}{\rho}\right)}$$

Тогава ъгълът на паралелността е:

```
Pid:=arcsin(1/cosh(d/rho));
```

$$Pid := \arcsin\left(\frac{1}{\cosh\left(\frac{d}{\rho}\right)}\right)$$

Производната на тази функция е:

```
E:=simplify(diff(Pid,d));
```

$$E := -\frac{1}{\cosh\left(\frac{d}{\rho}\right)\rho}$$

Следва, че тя е намаляваща фунция на разстоянието.

III. От формулата следва

$$\sin\pi(d) = \frac{1}{\cosh(\frac{d}{\rho})},$$

поради

$$\cosh(\frac{d}{\rho}) > 1, \text{ когато } d \neq 0,$$

следва $\sin\pi(d) < 0$,което показва, че ъгълът на паралелността е винаги остър.

&10 . Снопове прави в равнината на Лобачевски.

Нека са дадени две прави в равнината на Лобачевски, определени с уравненията си:

(1) $$(A, X) = 0, (B, X) = 0.$$

Понеже точките A, B са външни за абсолюта, за тях важат равенствата:

(2) $$(A, A) > 0, (B, B) > 0.$$

Понеже X е произволна точка от коя да е от правите, следва че тя е вътрешна точка, поради което

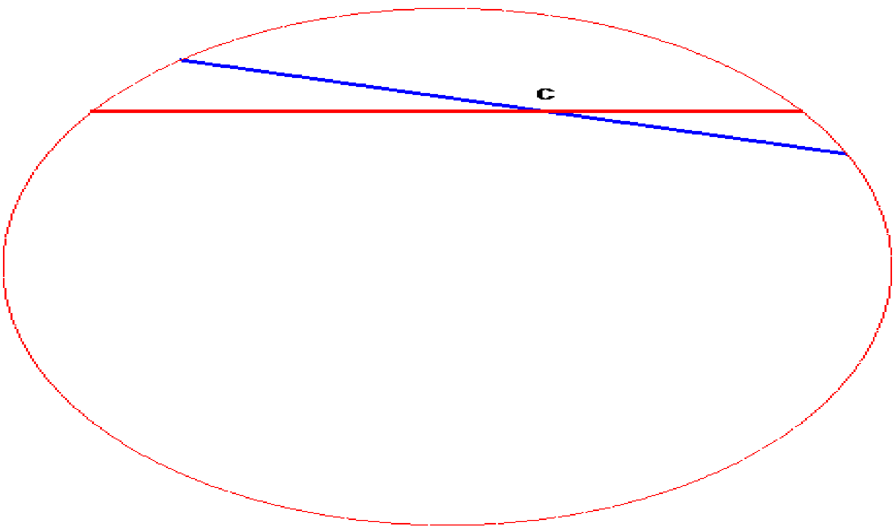
(3) $$(X, X) < 0.$$

Сноп прави в равнината на Лобачевски се определя като линейна комбинация от уравненията (1):

(4) $$\alpha(A, X) + \beta(B, X) = (\alpha A + \beta B, X) = 0.$$

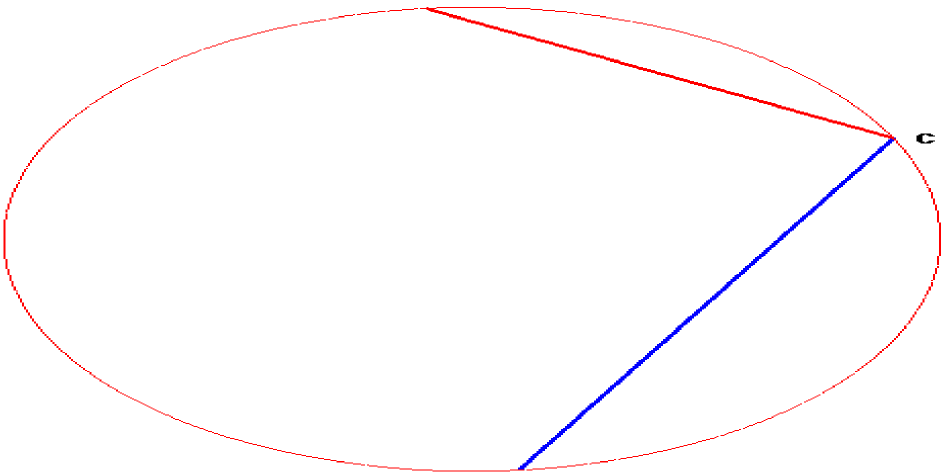
Възможни са следните случаи:

I. Двете прави са пресекателни, т.е общата им точка е вътрешна точка C за абсолюта. Такъв сноп прави се нарича **елиптичен сноп прави** (фиг.1).



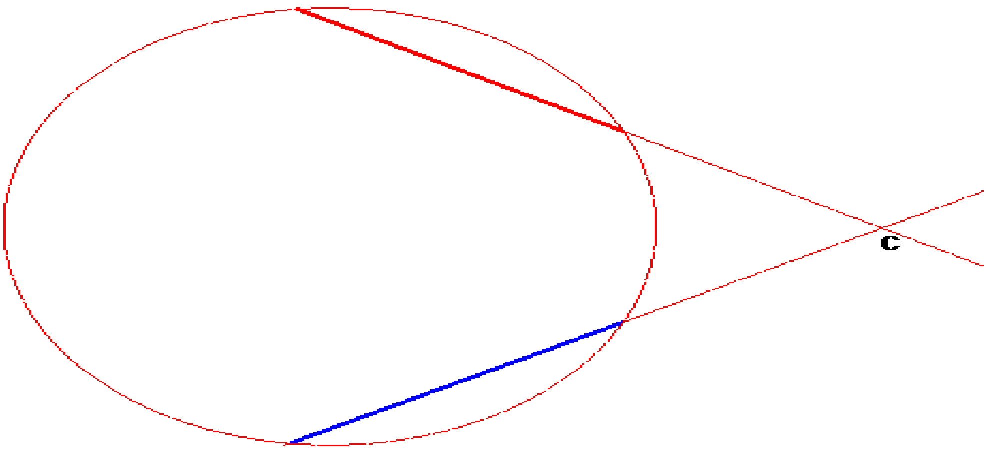
Фиг.1

II. Двете прави са паралелни, т.е общата им точка C е контурна за абсолюта. Такъв сноп прави се нарича **параболичен сноп прави** (фиг.2).



Фиг. 2

III. Двете прави са разходящи, т.е общата им точка C е външна точка за абсолюта.Такъв сноп прави се нарича **хиперболичен сноп прави** (фиг.2).



Фиг. 3

&11. Сбор от ъглите в триъгълник.

Сега ще се запознаем с една от най-впечатляващите теореми в геометрията на Лобачевски.

Фундаментална Теорема .Сборът от ъглите в триъгълник е по-малък от два прави ъгъла.

Преди да пристъпим към доказателството на тази теорема, ще разгледаме най-напред случая на правоъгълен триъгълник (фиг.1):

Нека ABC е правоъгълен триъгълник с прав ъгъл C. Изчисленията ще правим относно репера на Лобачевски O_1O_2C ,където точката O_1 лежи на правата AC и е полюс на правата BC, а O_2 е полюсът на правата AC. Точката D е полюсът на хипотенузата AB.

Имаме следните представяния

(1) $$A = C + x_A O_1, B = C + y_B O_2, D = C + x_D O_1 + y_D O_2.$$

Поради това, че D е полюсът на хипотенузата AB, в сила са равенствата

(2) $$(D, A) = 0,),(D, B) = 0.$$

Като се използват (1) се пресмятат скаларните произведения

(3) $$(D, A) = -1 + x_D x_A, (D, B) = -1 + y_D y_B, (D, D) = -1 + x_D^2 + y_D^2.$$

Въз основа на (2) се получава

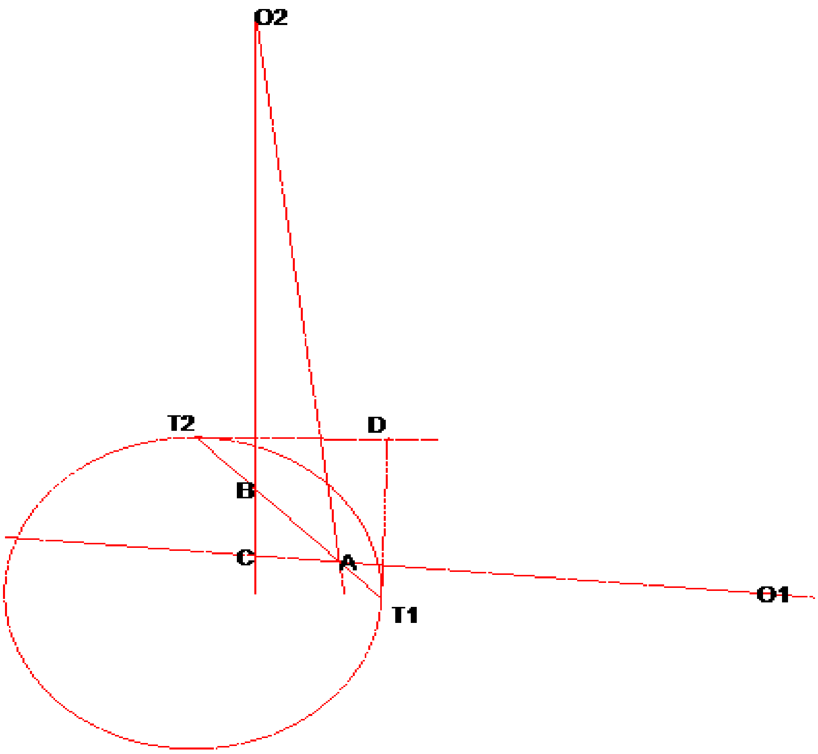
(4) $$x_D = \frac{1}{x_A}, y_D = \frac{1}{y_B}.$$

В триъгълника ABC ъгълът $\angle B$ е остър, тъй като е по-малък от ъгъла на паралелността. Следователно

$$\cos(\angle B) = \frac{|(O_1, D)|}{\sqrt{(O_1, O_1)(D, D)}} = \frac{|x_D|}{\sqrt{-1 + x_D^2 + y_D^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_A^2 + \frac{x_A^2}{y_B^2}}},$$

откъдето следва

$$\sin(\angle B) = \frac{x_A \sqrt{\frac{1}{y_B^2} - 1}}{\sqrt{1 - x_A^2 + \frac{x_A^2}{y_B^2}}}.$$



Фиг. 1

Аналогично намираме

$$\cos(\angle A) = \frac{|(O_2, D)|}{\sqrt{(O_2, O_2)(D, D)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_B^2 + \frac{y_B^2}{x_A^2}}},$$

$$\sin(\angle A) = \frac{y_B \sqrt{\frac{1}{x_A^2} - 1}}{\sqrt{1 - y_B^2 + \frac{y_B^2}{x_A^2}}}.$$

Като се използват намерените стойност лесно получаваме

$$\cos(\angle A+\angle B)=\frac{1-\sqrt{(1-x_A^2)(1-y_B^2)}}{\sqrt{1-x_A^2+\dfrac{x_A^2}{y_B^2}}\sqrt{1-y_B^2+\dfrac{y_B^2}{x_A^2}}}.$$

Понеже тази дроб е винаги положителна,следва

$$\cos(\angle A+\angle B)>0,$$

което показва, че

$$\angle A+\angle B<\frac{\pi}{2}.$$

С това доказахме следната

Лема . Сборът от острите ъгли на правоъгълен триъгълник е по-малък от прав ъгъл.

Оттук следва

Теорема . Сборът от ъглите на правоъгълен триъгълник е по-малък от изправен ъгъл.

Сега ще пристъпим към доказателството на фундаменталната теорема.

Ако ABC е произволен триъгълник,спускаме перпендикуляра BD от върха B към страната AC . Трябва да се разгледат следните случаи:
I. Точката D съвпада с C (фиг. 2).

II. Точката D е вътрешна точка за страната AC (фиг. 3).

III. Точката D е външна точка за страната AC (фиг. 4).

В първия случай триъгълникът ABC е правоъгълен и твърдението е доказано. Във втория случай се прилага лемата за триъгълниците BCD, BAD . В третия случай се спуска перпендикуляра AH (когато A е между точките C, D) и се прилага лемата за триъгълниците ACH, ABH .

Сравнителен анализ между евклидовата геометрия и геометрията на Лобачевски. Знаем, че в евклидовата геометрия за всеки триъгълник сборът от ъглите му е равен на константата 2π.В геометрията на Лобачевски това далеч не е така : сборът не е константа, а променлива величина,която е по-малка от 2π. По-нататък ще видим, че сборът от ъглите на труъгълник в геометрията на Лобачевски, е свързан с лицето на триъгълника.

&12. Признаци за еднаквост на триъгълници.

Според дефиницията за еднакви фигури от & , $ABC, A_1B_1C_1$ се наричат **еднакви триъгълници**, когато съществува движение на Лобачевски, което преобразува единият триъгълник в другия.
Някои от признаците за еднаквост на триъгълници от евклидовата геометрия, са валидни и тук.

Първи признак за еднаквост на триъгълници. Два триъгълника са еднакви,ако имат съответно равни по две страни и ъгъл, заключен между тях.

Втори признак за еднаквост на триъгълници. Два триъгълника са еднакви,ако имат по страна и два прилежащи ъгъла съответно равни.

Трети признак за еднаквост на триъгълници. Два триъгълника са еднакви,ако имат по три страни съответно равни.

Тези празнаци са идентични и в евклидовата геометрия. Тук обаче в геометрията на Лобачевски е в сила още един презнак, който няма аналог
в евклидовата геометрия,а именно:

Четвърти признак за еднаквост на триъгълници. Два триъгълника са еднакви,ако имат по три ъгъла съответно равни.

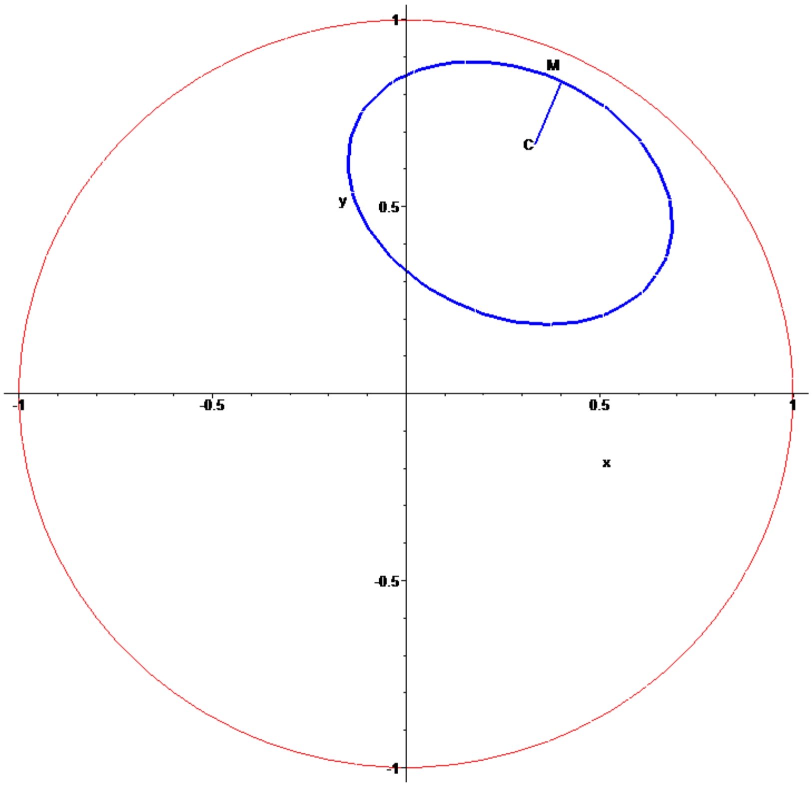
Съществуват и други съществени различия в двете геометрии. Например:

Теорема за симетралите в геометрията на Лобачевски. В геометрията на Лобачевски трите симетрали на страните на триъгълник или се пресичат във една точка (вътрешна за абсолюта),или в точка от абсолюта (значи са паралелни прави),или във външна точкая за абсолюта (значи са разходящи прави).

Ние няма да се спираме на доказателствата на тези теореми.Вместо това ще спрем вниманието си на други по-впечатляващи факти от тази геометрия.

&13. Окръжност в равнината на Лобачевски

Множеството от точки , които се намират от дадена точка C на дадено разстояние r, се нарича **окръжност с център** C **и радиус** r.Ще я означаваме с $k(C,r)$.



Фиг. 1

Ще отбележим, че на фигурата е начертана (в синьо) окръжност с център $C(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ и радиус $r=\frac{1}{2}$ при $\rho=\frac{1}{2}$.

За да се намери уравнение за тази окръжност ще използваме формулата за разстояние между две точки. Ако X е произволна точка от тази окръжност, то нейното дефиниционно равенство е

(1) $$\cosh(\frac{r}{\rho})=\frac{|(C,X)|}{\sqrt{(C,C)(X,X)}}.$$

От тук следва

(2) $$(X,X)-\frac{(C,X)^2}{(C,C)\cosh^2(\frac{r}{\rho})}=0.$$

Последното равенство може да се напише още във вида

(3) $$(X,X)+[\frac{C}{\sqrt{-(C,C)}\cosh(\frac{r}{\rho})},X]^2=0.$$

Ще напишем уравнението (2) в координати.Нека $X(x,y)$,$C(c_1,c_2)$. Тогава

(4) $$(X,X)=x^2+y^2-1,(C,X)=c_1x+c_2y-1$$

и уравнението (2) приема вида

(5) $$x^2+y^2-1-\frac{(c_1x+c_2y-1)^2}{(C,C)\cosh^2(\frac{r}{\rho})}=0.$$

Ще формулираме получените резултати като

Теорема 1. Всяка окръжност $k(C,r)$ се характеризира с уравнението (3) като точката C е вътрешна точка за абсолюта и значи е изпълнено неравенството
(6) $(C,C)<0$.
В координати окръжността в равнината на Лобачевски има уравнението (5), което е линейна комбинация от уравнението на абсолюта

(7) $$x^2+y^2-1=0$$

и на квадрата на уравнението

(8) $$c_1x+c_2y-1=0,$$

което е уравнението на полярата на центъра относно абсолюта.

Както в евклидовата геометрия и тук е в сила следната

Теорема 2. Всяка окръжност е ортогонална траектория на снопа прави (елиптичния сноп прави) с център центъра на окръжността .

Забележка. Ако се положи

$$P=\frac{C}{\sqrt{-(C,C)}\cosh(\frac{r}{\rho})}$$

уравнението (3) на окръжност приема вида

(9) $$(X,X)+(P,X)^2=0,$$

като

(10) $$(P,P)<0\,.$$

&14. Гранична линия в равнината на Лобачевски

Гранична линия (или **Орицикъл)** в равнината на Лобачевски се нарича граничното положение на окръжност, когато една от точките на окръжността е фиксирана , а центърът на окръжността клони към точка от абсолюта.
Да разгледаме уравнението (3) от предния параграф:

(1) $$(X,X)+[\frac{C}{\sqrt{-(C,C)}\cosh(\frac{r}{\rho})},X]^2=0,$$

и да положим

(2) $$P=\frac{C}{\sqrt{-(C,C)}\cosh(\frac{r}{\rho})},$$

Тогава (1) приема вида

(3) $$(X,X)+(P,X)^2=0.$$

Да спрем вниманието си на равенството (2). В него P и C са една и съща геометрична точка, само че хомогенните координати на първата точка се получават от хомогенните кординати на втората точка (центъра) като се разделят последните с различното от нула число $\sqrt{-(C,C)}\cosh(\frac{r}{\rho})$. Според определението за гранична линия съществува фиксирана крайна точка от окръжността, а центърът C клони към безкрайна точка (тока от абсолюта).Това означава, че $r\to\infty$.Пресмятаме

$$\lim_{r\to\infty}(P,P)=\lim_{r\to\infty}(\frac{C}{\sqrt{-(C,C)}\cosh(\frac{r}{\rho})},\frac{C}{\sqrt{-(C,C)}\cosh(\frac{r}{\rho})})=\lim_{r\to\infty}(\frac{-1}{\cosh^2(\frac{r}{\rho}})=\frac{-1}{\infty}=0.$$

Равенството $\lim_{r\to\infty}(P,P)=0$ показва, че центърът C има за граница безкрайна точка. Получениет резултат ще формулираме като

Теорема 1. Всака гранична линия се характеризира с уравнението

(3) $$(X,X)+(P,X)^2=0.$$

Като точката P е безкрайна точка, т.е. в сила е равенството

(4) $$(P,P)=0.$$

Точката P се нарича **център на граничната линия**.

Може да се докаже следната

Теорема 2. Всяка гранична линия е ортогонална траектория на параболичен сноп прави със същия център.

На фигурата 1 е начертана гранична линия с център $P(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$.

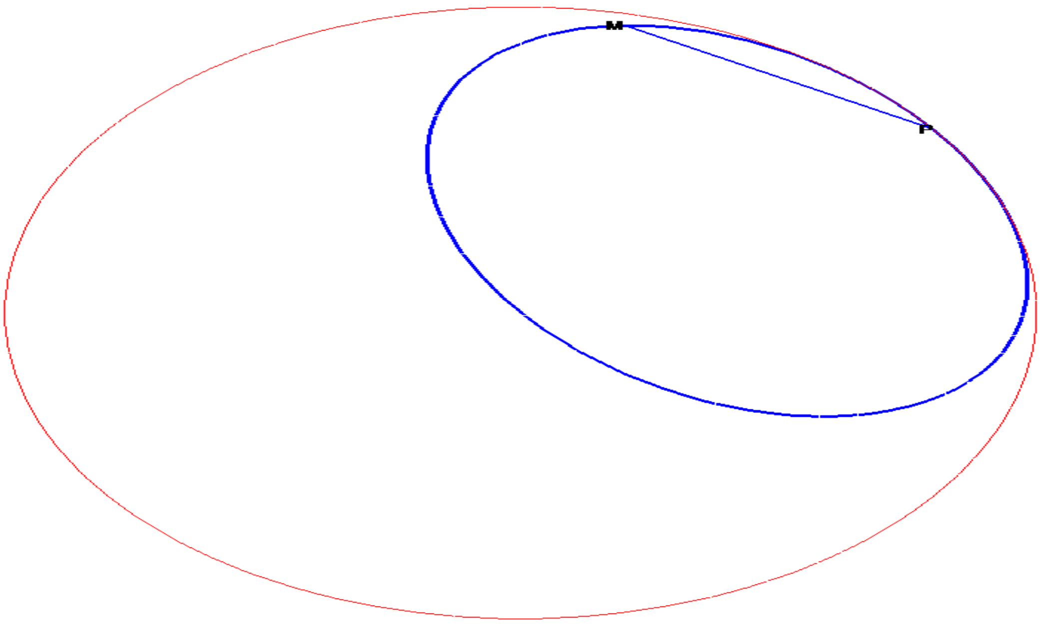


Fig. 1

На фигурата PM е част от права. Разстоянието между точките P, M е безкрайно голямо.

В сила са слдните твърдения:

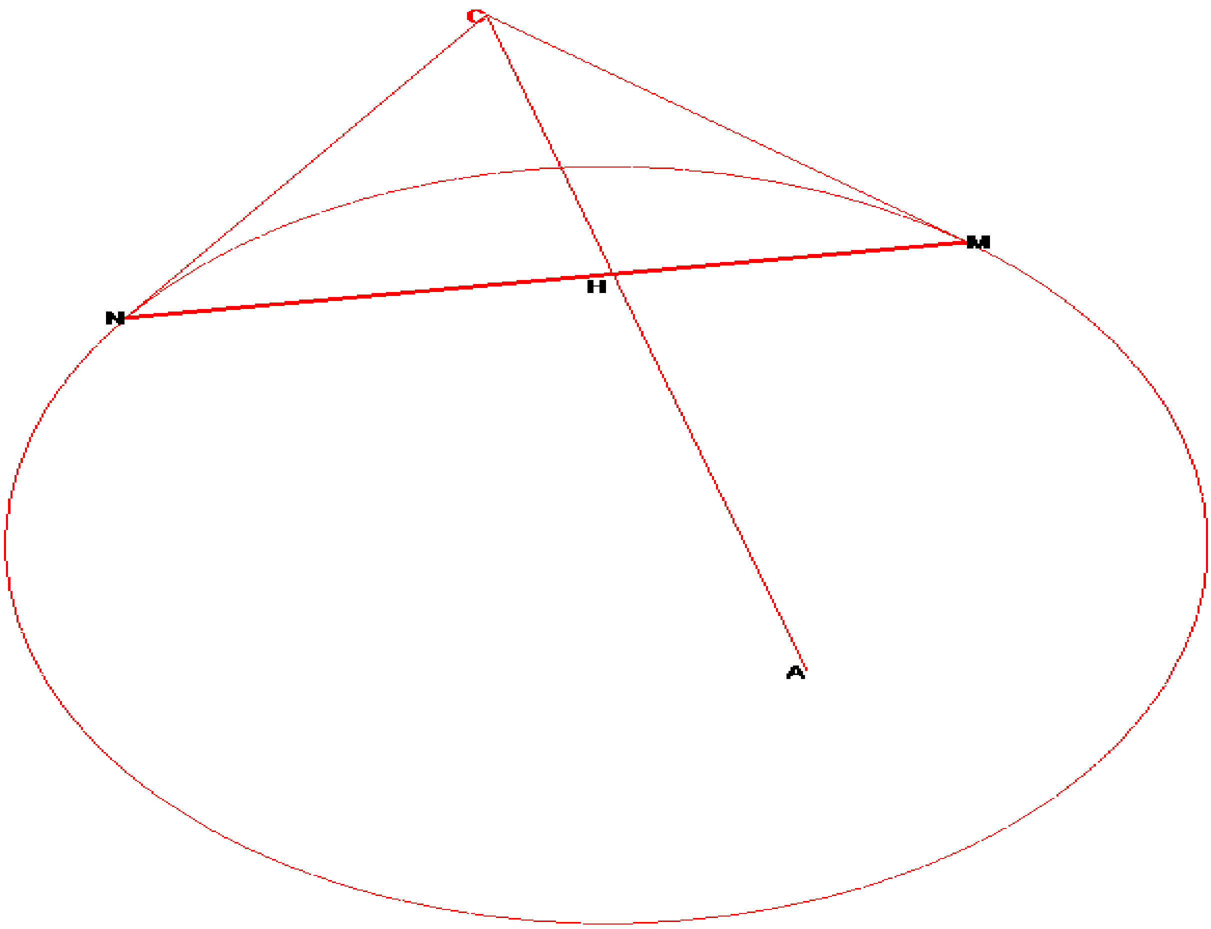
За всяка точка P от абсолюта, граничната линия е винаги неизродена.

За всяка точка P от абсолюта, граничната линия и абсолюта се допират.

&15. Еквидистанта в равнината на Лобачевски

Еквидистанта в равнината на Лобачевски се нарича геометричното място на точки ,които са равноотдалечени от права линия, наричана **база на еквидистантата**.

Нека MN е права в равнината на Лобачевски, а C е нейният полюс.През произволна точка A прекарваме перпендикуляра към правата MN и нека H е неговата пета (фиг. 1). Ако разстоянието от A до MN е a имаме равенството



Фиг. 1

(1) $$\cosh(\frac{a}{\rho}) = \frac{|(A,H)|}{\sqrt{(A,A)(H,H)}}.$$

Точката H може да се представи така:

(2) $$H = A + \lambda C.$$

Понеже H лежи на полярата на точката C, изпълнено е равенството

$$(C,H) = 0.$$

Като внесем тук (2), се получава

(3) $$(C,A) + \lambda(C,C) = 0,$$

откъдето намираме

(4) $$\lambda = -\frac{(C,A)}{(C,C)},$$
което внесено в (2) дава **формула за ортогонална проекция на точка върху права**

(5) $$H = A - \frac{(C,A)}{(C,C)}C,$$
която след подходящо нормиране координатите на H приема вида:

(6) $$H = (C,C)A - (C,A)C.$$

Сега намираме скаларните произведения,необходими за (1):

$$(A,H) = (C,C)(A,A) - (C,A)^2, (H,H) = ((C,C)A - (C,A)C, H) = (C,C)(A,H),$$
тъй като $(C,H) = 0$. Тогава от (1) имаме

$$\cosh(\frac{a}{\rho}) = \frac{|(A,H)|}{\sqrt{(A,A)(C,C)(A,H)}}$$
и след повдигане в квадрат е получава

$$\cosh^2(\frac{a}{\rho}) = \frac{(A,H)}{(A,A)(C,C)} = \frac{(C,C)(A,A)-(C,A)^2}{(A,A)(C,C)} = 1 - \frac{(C,A)^2}{(A,A)(C,C)},$$

откъдето следва

$$\frac{(C,A)^2}{(A,A)(C,C)} = 1 - \cosh^2(\frac{a}{\rho}) = -\sinh^2(\frac{a}{\rho}).$$

Като заместим A с произволна точка от геометричното място,получаваме

(7) $$(X,X) + (\frac{C}{\sqrt{(C,C)}\sinh(\frac{a}{\rho})}, X)^2 = 0.$$

Това уравнение можем да наречем **Уравнение на еквидистантата**.Ако се положи

$$P = \frac{C}{\sqrt{(C,C)}\sinh(\frac{a}{\rho})},$$

следва

(8) $$(P,P) = \frac{(C,C)}{\sinh^2(\frac{a}{\rho}} > 0\,.$$

Тогава уравнението на еквидистантата приема вида

(9) $$(X,X) + (P,X)^2 = 0\,,$$
при условието (8).

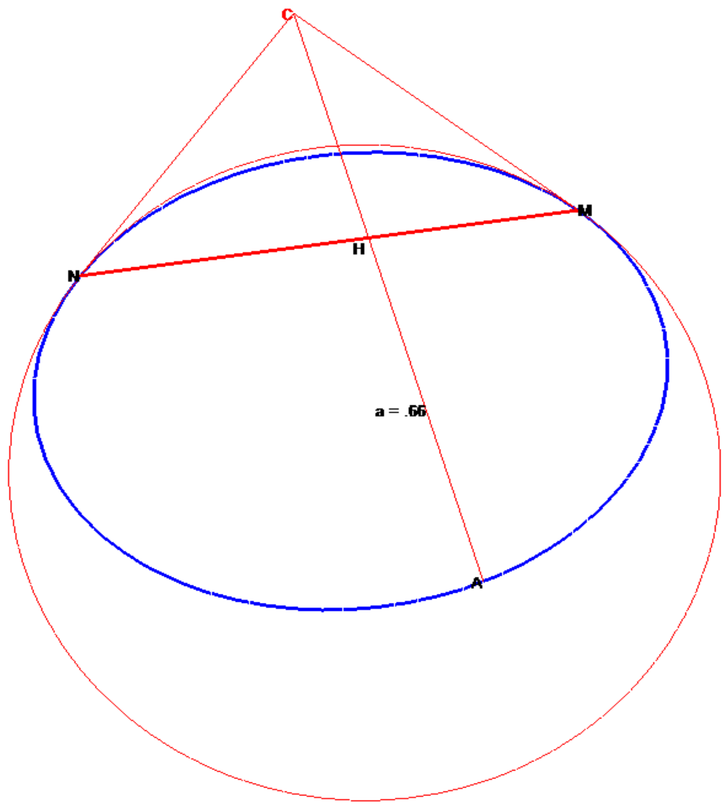


Fig. 2

На фиг. 2 е начертана еквидистантата (7) при следните условия:

$$M(3/5,4/5), N(-4/5,3/5), A(1/95,68/95)$$

Намерени са: $C(-1/5,7/5), H(1/95,68/95), a \approx 0.66$.

&16. Сравнителен анализ на окръжност, гранична линия и еквидистанта

Видехме, че уравненията на окръжност, гранична линия, еквидистанта са идентични и се записват по сләния начин:

(1) $$(X,X)+(P,X)^2=0,$$

като :

I. За окръжност точката P е точка от равнината на Лобачевски (вътрешна точка за абсолюта) и следователно

(2) $$(P,P)<0;$$

II. За гранична линия точката P е контурна точка (точка на абсолюта) и следователно

(3) $$(P,P)=0;$$

III. За еквидистанта точката P е външна точка за абсолюта и следователно

(4) $$(P,P)>0.$$

От казаното следва, че всяка точка P определя една от тези линии..

В координати уравнението се записва така:

(1′) $$x^2+y^2-1+(p_1x+p_2y-1)^2=0,$$

където $P(p_1,p_2)$, а $X(x,y)$ е произволна точка от съответната крива линия.
Матрицата на кривата с уравнение $(1')$ е:

$$M:=\begin{bmatrix}1+p1^2 & p1\,p2 & -p1\\ p1\,p2 & p2^2+1 & -p2\\ -p1 & -p2 & 0\end{bmatrix}$$

а детерминантата на кривата е $\det(M)=-(p_1^2+p_2^2)$.Минорът $A_{33}=p_1^2+p_2^2+1$.
Следователно от гледна точка на евклидовата геометрия,всяка крива линия с уравнение (1) , е елипса.
Полупроизводните на кривата линия (1) в точката $P(p_1,p_2)$ са:

Уравнението на полярата за точката P е:

(5) $$\pi(P):\ (p_1^2+p_2^2)(p_1x+p_2y-1)=0,$$

което, очевидно, е равносилно на уравнението на полярата

(6) $$\pi(P):\ p_1x + p_2y - 1 = 0$$

за същата точка относно абсолюта $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Полученият резултат ще формулираме като

Теорема 1. Всяка точка има една и съща поляра относно абсолюта и относно кривата с уравнение (1) – коя да е окръжност, коя да е гранична линия или коя да е еквидистанта.

&17. Тригонометрични формули за правоъгълен триъгълник

Нека ABC е правоъгълен триъгълник с прав ъгъл $\angle C$. Ако C_1 е полюсът на катета CB, C_2 - полюсът на катета CA, а D - полюсът на хипотенузата AB (фиг.1), имаме равенствата

(1) $$A = C + x_AC_1, B = C + y_BC_2, D = C + x_DC_1 + y_DC_2.$$

Понеже D е полюсът на AB, в сила е равенството

(2) $$(A, D) = 0, (B, D) = 0.$$

От (1) и (2) следвата равенствата

(3) $$x_Ax_D = 1, y_By_D = 1.$$

За страните

$$BC = a, CA = b, AB = c,$$

имаме

$$\cosh(\frac{a}{\rho}) = \frac{|(B,C)|}{\sqrt{(B,B)(C,C)}} = \frac{|-1|}{\sqrt{-1(1-y_B^2)}},$$

$$\cosh(\frac{b}{\rho}) = \frac{|(A,C)|}{\sqrt{(A,A)(C,C)}} = \frac{|-1|}{\sqrt{-1(1-x_A^2)}},$$

$$\cosh(\frac{c}{\rho}) = \frac{|(A,B)|}{\sqrt{(A,A)(B,B)}} = \frac{|-1|}{\sqrt{(1-x_A^2)(1-y_B^2)}}$$

От тук следва

(4)
$$\cosh(\frac{c}{\rho}) = \cosh(\frac{a}{\rho})\cosh(\frac{b}{\rho}).$$

Това равенство свързва катетите и хипотенузата на правоъгълен триъгълник и следователно е аналог на Питагоровата теорема от евклидовата геометрия. Лесно може да се покаже, че когато $\rho \to \infty$,то приема вида ;

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Следователно с право равенството (4) може да бъде наричано **Питагорова теорема в равнината на Лобачввски.**

Ще докажем следните две формули:

(5)
$$tgh(\frac{a}{\rho}) = tgh(\frac{c}{\rho})\cos B, tgh(\frac{b}{\rho}) = tgh(\frac{c}{\rho})\cos A.$$

Док. Имаме

$$\cos B = \frac{|(C_1,D)|}{\sqrt{(C_1,C_1)(D,D)}} = \frac{|x_D|}{\sqrt{1.(-1+x_D^2+y_D^2)}}.$$

Тогава

$$tgh(\frac{a}{\rho}) = \frac{\sinh(\frac{a}{\rho})}{\cosh(\frac{a}{\rho})} = \frac{\sqrt{\cosh^2(\frac{a}{\rho})-1}}{\cosh(\frac{a}{\rho}} = |y_B| = \frac{1}{|y_D|}.$$

Понеже

$$tgh(\frac{c}{\rho}) = \frac{\sinh(\frac{c}{\rho})}{\cosh(\frac{c}{\rho})} = \frac{\sqrt{\cosh^2(\frac{c}{\rho})-1}}{\frac{1}{\sqrt{(1-x_A^2)(1-y_B^2)}}} = \frac{\sqrt{x_D^2+y_D^2-1}}{|x_D y_D|}.$$

Следва първото равенство на (5). Аналогично се доказва и второто равенство. Аналогично се доказват и равенствата:

(6) $$\sinh(\frac{a}{\rho}) = \sinh(\frac{c}{\rho})\sin A, \sinh(\frac{b}{\rho}) = \sinh(\frac{c}{\rho})\sin B;$$

(7) $$tgh(\frac{a}{\rho}) = \sinh(\frac{b}{\rho})tghA, tgh(\frac{b}{\rho}) = \sinh(\frac{a}{\rho})tghB,$$

(8) $$tgh(\frac{a}{\rho}) = \sinh(\frac{b}{\rho})tghA, tgh(\frac{b}{\rho}) = \sinh(\frac{a}{\rho})tghB$$

&18. Връзка между лицето и сбора от ъглите в триъгълник.

В този параграф ще докажем следната

Теорема. Ако $S(\Delta ABC)$ е лицето на ΔABC чиито ъгли са α, β, γ, то в сила е следната формула

(1) $$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)-\pi}{S(\Delta ABC)} = -\frac{1}{\rho^2}.$$

Преди да пристъпим към доказателството на теоремата, ще направим тривиалната забележка, че когата $\rho \to \infty$ следва зависимостта

(2) $$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

от евклидовата геометрия.
Предварителни бележки. Ще използваме без доказателство следния факт. От формулата за разстояние между две точки в равнината на Лобачевски, приложена за две безкрайно близки точки, следва че равнината на Лобачевски може да се разглежда като повърхнина, чиято първа квадратична форма е [2], [3]:

(3) $$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

чиито коефициенти са :

(4) $$E=\rho^2\frac{1-y^2}{(1-x^2-y^2)^2}, F=\rho^2\frac{xy}{(1-x^2-y^2)^2}, G=\rho^2\frac{1-x^2}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

(3) се нарича **линеен елемент на повърхнина**. Той служи за измерване на дължини на линии.
Тогава **лицевият елемент** на тази повърхнина

(5) $$d\sigma=\sqrt{EG-F^2}dudv$$

приема вида

(6) $$d\sigma=\rho^2\frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

С формулата (6) могат да се измерват лица на фигури в равнината на Лобачевски. Тази формула ще приложим за намиране на лице на триъгълник и намиране на лице на кръг.

Да разгледаме четириъгълника $OACB$ с прави ъгли при върховете O, A, B (Фиг 1) >

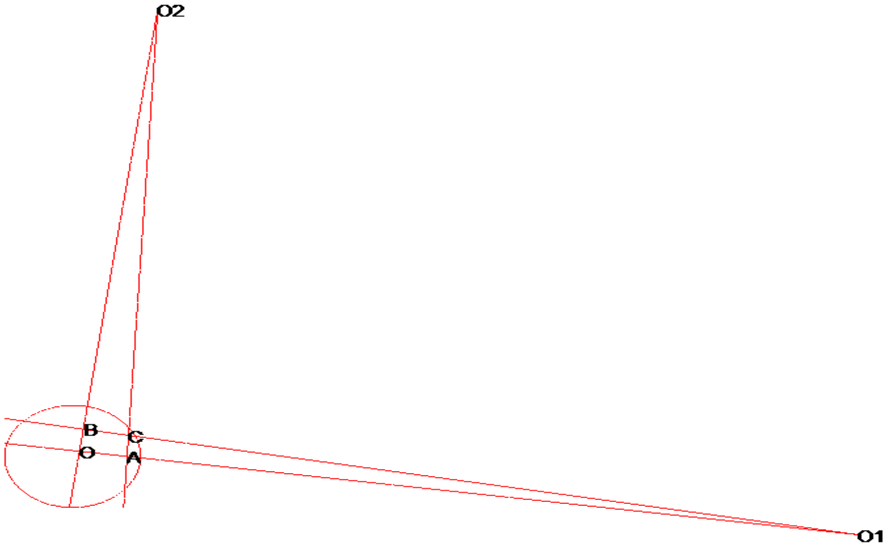


Fig. 1

Според казаното O_1 е полюсът на правата $OB = BO_2$, а O_2 е полюсът на правата $OA = OO_1$. Триъгълникът OO_1O_2 е автополярен относно абсолюта на равнината на Лобачевски и може да се допълни до репер на Лобачевски.Ако се положи

(1) $$A = O + x_C O_1, B = O + y_C O_2,$$

следва

(2) $$C = O + x_C O_1 + y_C O_2.$$

В това лесно се убеждаваме като напишем C като линейни комбинации $C = A + qO_2, C = B + pO_1$ и използваме равенствата (1).

От това следва, че четириъгълникът $OACB$ с прави ъгли при върховете O, A, B е напълно определен с координатите на върха C.

Лема 1. В сила е следната формула

(3) $$\text{Лицето}(OACB) = \rho^2\left(\frac{\pi}{2} - \angle C\right).$$

Доказателство. Съгласно формулата (6), това лице ще пресметнем с двойния интеграл

(4) $$\text{Лицето}(OACB) = \iint_{OACB} \rho^2 \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

За интеграла I имаме

(5) $$I = \rho^2 \int_0^{x_C} \left(\int_0^{y_C} \frac{dy}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) dx .$$

За вътрешния интеграл имаме

(6) $$I_1 = \int_0^{y_C} \frac{dy}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1-x^2} \int_0^{y_C} d\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

Понеже (с Maple)

```
(1/(1-x^2)*(diff(y/sqrt(1-x^2-y^2),y));
```

$$\frac{1}{(1-x^2-y^2)^{(3/2)}}$$

Тогава от (5) следва

(7) $$I = \rho^2 \int_0^{x_C} \frac{1}{1-x^2} \left(\int_0^{y_C} d\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) dx .$$

Тук за вътрешния интеграл имаме

(8) $$I_2 = \int_0^{y_C} d\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{y_C}{\sqrt{1-x^2-y_C{}^2}}$$

И следователно

(9) $$I = \rho^2 y_C \int_0^{x_C} \frac{1}{1-x^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y_C{}^2}} dx = \rho^2 \int_0^{x_C} d\arcsin\frac{xy_C}{\sqrt{(1-x^2)(1-y_C^2)}},$$

Тъй като

```
simplify(diff(arcsin(x*yc/sqrt((1-x^2)*(1-yc^2))),x));
```

$$-\frac{yc}{(-1+x^2)\sqrt{(-1+x^2)(-1+yc^2)}\sqrt{-\frac{-1+yc^2+x^2}{(-1+x^2)(-1+yc^2)}}}$$

Последният израз е, очевидно, равен на

$$\frac{y_C}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2-y_C^2}}.$$

Тогава от (9) следва

(10) $$I=\rho^2\arcsin\frac{x_C y_C}{\sqrt{(1-x_C^2)(1-y_C^2)}}\ .$$

Да намерим острия ъгъл при върха C в четириъгълника $OACB$. За този ъгъл имаме

(11) $$\cos(\angle C)=\frac{|(A_2,B_2)|}{\sqrt{(A_2,A_2)(B_2,B_2)}},$$

където A_2,B_2 са полюсите съответно на раменете CA,CB на ъгъла C. Понеже $\angle A$ е прав и $O_2\in CA$, следва

(12) $$A_2=O+x_1O_1$$

Понеже $\angle B$ е прав и $O_1\in CB$, следва

(13) $$B_2=O+y_2O_2.$$

Понеже A лежи на полярата на A_2, следва, че тези две точки са спрегнати :

(14) $$(A,A_2)=0.$$

Аналогично имаме и равенството

(15) $$(B,B_2)=0.$$

От последните две равенства и равенствата (1) намираме

$$x_1 = \frac{1}{x_C},\, y_2 = \frac{1}{y_C}.$$

Тогава от (11) ,след пресмятаме на съответните произведения,имаме равенството

(16) $$\cos(\angle C) = \frac{x_C y_C}{\sqrt{(1-x_C^2)(1-y_C^2)}}$$

и понеже

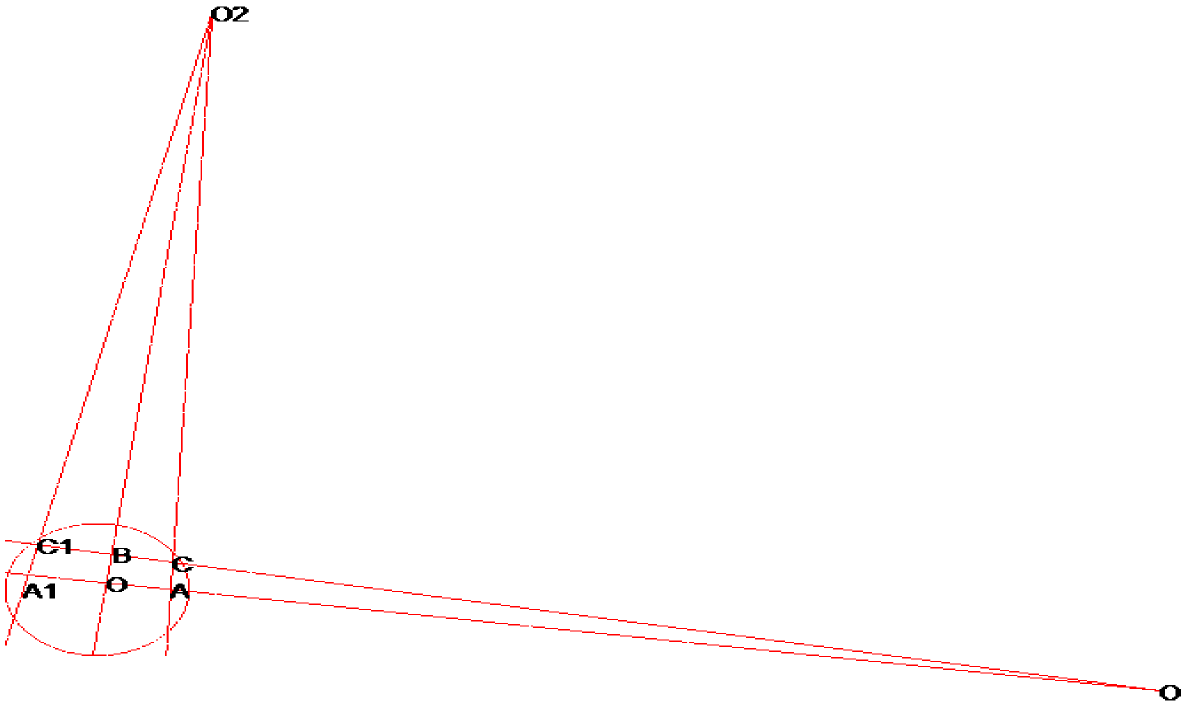
$$\cos(\angle C) = \sin(\frac{\pi}{2} - \angle C)\,,$$

следва равенството

(17) $$\frac{\pi}{2} - \angle C = \arcsin \frac{x_C y_C}{\sqrt{(1-x_C^2)(1-y_C^2)}}\,.$$

Като се използва и равенството (1) следва верността на лемата.

Четириъгълник на Сакери. Ако $A_1 = O - x_C O_1$ е симетричната точка на точката $A = O + x_C O_1$ относно правата CB, а $C_1 = O - x_C O_1 + y_C O_2$ е симетричната точка на точката $C = O + x_C O_1 + y_C O_2$ относно същата права, то четириъгълникът $A_1 ACC_1$ се нарича **Четириъгълник на Сакери** (Фиг. 2).



Фиг.2

За него е в сила следната

Лема 2. В четириъгълника A_1ACC_1 на Сакери са верни следните твърдения:

a/ $AC = A_1C_1$;

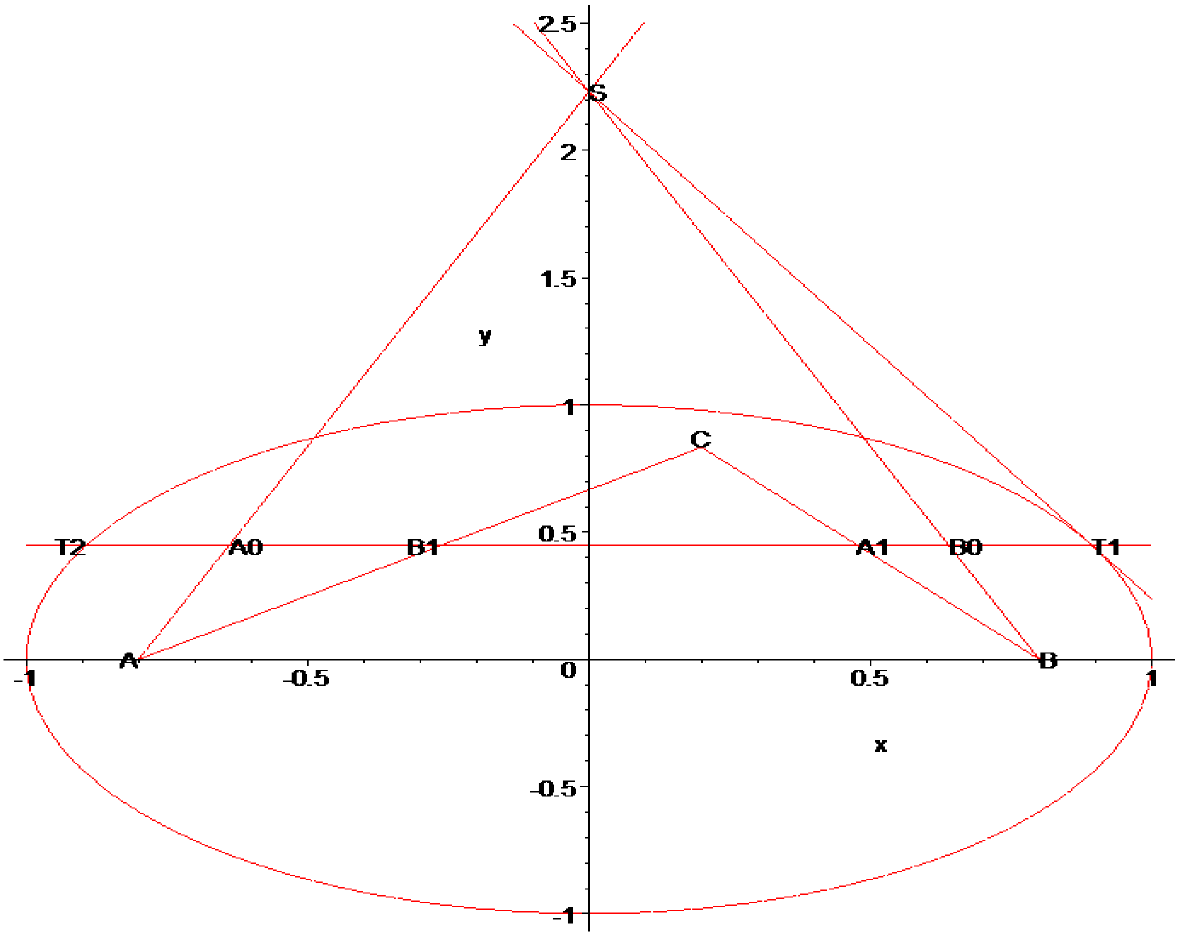
b/ AC, A_1C_1 са перпендикулярни на основата AA_1;

c/ Ъглите $\angle C, \angle C_1$ са остри.

d/ Лицето на четир. На Сакери $ACC_1A_1 = \rho^2(\pi - 2\angle C)$.

Верността на a/ се проверява непосредствено. Твърдението b/ е очевидно. Третото твърдение ще оставим без доказателство. Верността на четвъртото твърдение следва от лема 1 и второто твърдение.

Доказателство на теоремата. Ако ABC е произволен триъгълник, прекарваме правата A_1B_1 ,където A_1 е средата на страната BC, а B_1 - средата на AC. Спускаме перпендикулярите AA_0, BB_0, CC_0 към правата A_1B_1 (Фиг.3).



Фиг. 3

Фигурата ABB_0A_0 е четириъгълник на Сакери с прави ъгли при върховете A_0, B_0 с остри ъгли $\angle A_0AB, \angle B_0BA$. Според лема 1 имаме равенството

(18) Лицето (ABB_0A_0)= $\rho^2(\pi - 2\angle A_0AB)$

От еднаквостта на двойките триъгълници:

$$AA_0B_1, CC_0B_1; BB_0A_1, CC_0A_1$$

Следват равенствата:

$$2\angle A_0AB) = \angle A_0AB) + \angle B_0BA = (\angle A + \angle A_0AB_1) + (\angle B + \angle B_0BA_1).$$

Понеже

$$\angle A_0AB_1) = \angle C_0CB_1, \angle B_0BA_1 = \angle C_0CA_1,$$

а

$$\angle C_0CB_1 + \angle C_0CA_1 = \angle C,$$

Равенството (18) става равенството (1), с което теоремата е доказана.

&19. Лице на кръг и дължина на окръжност в равнината на Лобачевски

При разглеждане на тези въпроси е удобно да се използва формулата за линейния елемент на равнината на Лобачевски в полярни координати (r,φ):

(1) $$ds^2 = dr^2 + \rho^2 \sinh^2(\frac{r}{\rho})d\varphi^2 .$$

Коефициентите сега са: $E = 1, F = 0, G = \rho\sinh(\frac{r}{\rho})$. Лицевият елемент се га приема вида

(2) $$d\sigma = \rho\sinh(\frac{r}{\rho})drd\varphi .$$

Съгласно определението на окръжност имаме: $r = R$, $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Лице на кръг. За да се намери лицето на кръга, определен от окръжността трябва да се реши интеграла

(3) $$I = \iint_K \rho\sinh(\frac{r}{\rho})drd\varphi ,$$

където кръгът K е определен с равенствата : $r \in (0, R), \varphi \in (0, 2\pi)$. Решаването на интеграла е тривиално:

$$I = \rho \int_0^R \sinh(\frac{r}{\rho}) dr \int_0^{2\pi} d\varphi \, .$$

Като се вземе предвид, че

$$\frac{d \cosh(x)}{dx} = \sinh(x) \, ,$$

За интеграла се получава:

$$I = 2\pi\rho^2 (\cosh(\frac{R}{\rho}) - 1)$$

С това установихме следната

Лема 1. Лицето S на кръг с радиус R се дава с формулата

(5) $$S = 2\pi\rho^2 (\cosh(\frac{R}{\rho}) - 1) \, .$$

Дължина на окръжност. За да се намери дължината на окръжност трябва във формулата (1) да се замести полярния радиус r с константата R и получения резултат да се интегрира, т. е да се реши интеграла

(6) $$I_1 = \int_0^{2\pi} \rho \sinh(\frac{R}{\rho}) d\varphi = 2\pi\rho \sinh(\frac{R}{\rho}) \, .$$

С това установихме следната

Лема 2. Дължината l на окръжност с радиус R се дава с формулата

(7) $$l = 2\pi\rho \sinh(\frac{R}{\rho}) \, .$$

Щр направим две забележки:

Забележка 1. Както и в евклидовата геометрия, и тук в геометрията на Лобачевски е вярно твърдението:

Производната на лицето на кръга относно радиуса му, е равна на дължината на окръжността.

Деиствително,да положим:

```
S:=2*Pi*rho^2*(cosh(R/rho)-1);
```

$$S := 2\,\pi\,\rho^2\left(\cosh\left(\frac{R}{\rho}\right)-1\right)$$

```
l:=2*Pi*rho*sinh(R/rho);
```

$$l := 2\,\pi\,\rho\,\sinh\left(\frac{R}{\rho}\right)$$

Тогава за производната на лицето получаваме

```
diff(S,R);
```

$$2\,\pi\,\rho\,\sinh\left(\frac{R}{\rho}\right)$$

Забележка 2 . Когато $\rho \to \infty$ формулите за лице на кръг и дължина на окръжност приемата вида на съответните формули в евклидовата геометрия.
Действително:

```
limit(S,rho=infinity);
```

$$R^2\,\pi$$

```
limit(l,rho=infinity);
```

$$2\,R\,\pi$$

Литература

1. Грозьо Станилов: *Аналитична геометрия*, СОФТЕХ, София,1993.
2. Грозьо Станилов: *Диференциална геометрия*, ТИЛИА, София, 1997.
3. Л. К. Тутаев: *Геометрия Лобачевского, Проективная модель,*Издателство Белгосуниверситета им. В.И Ленина, МИНСК -1959.

.