Р[redacted]МАН Р.ЛЕЙТОН М.СЕНДС

ФАЙНМАНОВИ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКА

ТОМ 2

НАРОДНА ПРОСВЕТА

Р. Файнман, Р. Лейтон, М. Сендс

Файнманови лекции по физика

том 2

Превели от руски *Николай Николов*
Анастас Анастасов
Николай Карабашев
Иван Карабашев

Р. ФАЙНМАН
Р. ЛЕЙТОН
М. СЕНДС

ФАЙНМАНОВИ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКА

том 2

НАРОДНА ПРОСВЕТА 1972

Р. Фейнман, Р. Лейтон, М Сэндс

ФЕЙНМАНОВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

ИЗДАТЕЛСТВО „МИР"
МОСКВА 1966 г.



Предговор

Много години Ричард П. Файнман размишлява върху тайнствените механизми на физичния свят и упорито се стреми да намери порядък в привидния хаос. Последните две години той отдаде своята енергия и на лекции за начинаещи студенти. За тези лекции той подбра най-важното от това, което сам знае, и нарисува така физичната картина на Вселената, че студентите да могат да се ориентират в нея. В тези лекции той вложи блясъка и ясността на мисълта, оригиналността и живостта на метода, заразителния ентусиазъм на разказвача. Неговият разказ доставяше истинска радост на слушателите.

Като основа на първия том залегнаха лекциите, прочетени за студентите от първи курс. Във втория том включихме част от лекциите за втори курс. Те бяха прочетени през учебната 1962/1963 година. Останалите лекции за второкурсници са включени в третия том.

Две трети от лекциите за втори курс бяха посветени на твърде подробното изучаване на физиката на електричеството и магнетизма. При това се преследваха две цели. Първо, искахме да дадем на студентите пълна картина за един от най-големите раздели на физиката — от първите, направени пипнешком, стъпки на Франклин, през великия синтез на Максвел, до лоренцовата електронна теория за свойствата на веществото, включително и още нерешените дилеми на електромагнитната собствена енергия. Второ, надявахме се да въведем от самото начало пресмятането на векторните полета и да дадем по такъв начин солиден увод към математиката на теориите на полето. За да се подчертае общата полза от математичните методи, понякога сродни въпроси от други области на физиката се анализираха едновременно с електричните им двойници. Стремяхме се през цялото време да внедрим в съзнанието общността на математиката („еднаквите уравнения имат еднакви решения"). Това се подчертаваше с характера на упражненията, а след това и на изпитите.

След електромагнетизма две глави са посветени на еластичността, а други две — на хидродинамиката. В първата глава на всяка от тези теми се обсъждат само елементарни и практически въпроси, а вторите глави са посветени на опит за обзор на целия сложен кръг явления, към които води разглежданата задача. Впрочем тези четири глави могат да бъдат пропуснати без особена загуба, тъй като те не са необходими за разбиране на материала.

Например цялата последна четвърт на втория курс бе посветена на увод в квантовата механика. Тя съставя съдържанието на третия том.

Публикувайки записа на лекциите на Файнман, искахме да осъществим нещо повече от просто написване на книга на това, което е казано от него устно. Ние искахме колкото е възможно по-ясно да бъдат написани тези идеи, на които са

основани лекциите. За някои лекции това ни се отдаде, като се наложи да се внесат малки поправки в стенографските записки, други изискваха значителна работа и доста сериозно редактиране. Понякога чувствувахме, че за по-голяма яснота е необходимо да се включи допълнителен материал. При това постоянно прибягвахме към помощта и съветите на самия Файнман.

„Преводът" в свързан текст на повече от милиони устни думи в такива кратки срокове е грамадна работа, особено ако към това се прибавят и другите задължения, свързани обикновено с четенето на нов курс — подготовка за упитване, за семинари, упражнения, изпити и др. Необходими бяха много ръце и глави. Надявам се, че в редица случаи ни се отдаде вярно да отразим файнмановия оригинал. В други се оказахме много далеч от идеала. За успехите ни сме задължени на всеки, който ни помагаше. Много съжаляваме за неуспехите.

Както подробно обяснихме в предговора към първия том, тези лекции бяха част от програмата, която набеляза и за чието изпълнение следеше Комитетът по преразглеждане на курса (Р. Лайтън — председател, Г. Неер и М. Сендс) на КАЛТЕХ при финансовата поддръжка на Фонда на Форд. Освен това в подготовката на текста на лекциите на втория том участвуваха Т. Кохи, М. Клейтон, Д. Курцио, Д. Хартл, Т. Харвей, М. Израел, В. Карзас, Р. Каванах, Д. Метюз, М. Плесет, Ф. Уорен, В. Уейлинг, С. Уилтс и Б. Цимерман. В работата над лекциите помагаха Дж. Блю, Дж. Чаплин, М. Клаузер, Р. Долен, Г. Хил и А. Тайтл. Бих искал да изтъкна постоянната помощ на професор Нойгебауер. И въпреки всичко без изключителното дарование и активност на самия Файнман този разказ за физиката, който сега четете, никога не би прозвучал.

Март 1964 г. Метю Сендс

Съдържание

Предговор

1. Електромагнетизъм

1-1. Електрични сили **11**
1-2. Електрични и магнитни полета **14**
1-3. Характеристики на векторните полета **15**
1-4. Закони на електромагнетизма **16**
1-5. Какво е това „поле“ ? **20**
1-6. Електромагнетизмът в науката и техниката **22**

2. Диференциално смятане на векторни полета

2-1. Разбиране на физиката **24**
2-2. Скаларни и векторни полета T и $\mathbf{h}$ **25**
2-3. Производни на полетата — градиент **27**
2-4. Операторът ∇ **30**
2-5. Операции с ∇ **31**
2-6. Диференциални уравнения на потока топлина **32**
2-7. Втори производни на векторните полета **33**
2-8. Клопки **35**

3. Интегрално смятане на вектори

3-1. Векторни интеграли ; криволинеен интеграл от $\nabla\phi$ **37**
3-2. Поток на векторно поле **39**
3-3. Поток от куб ; теорема на Гаус **41**
3-4. Топлопроводност ; уравнение на дифузия **42**
3-5. Циркулация на векторното поле **45**
3-6. Циркулация по квадрат ; теорема на Стокс **46**
3-7. Полета без ротация и полета без дивергенция **47**
3-8. Резултати **49**

4. Електростатика

4-1. Статика **50**
4-2. Закон на Кулон ; събиране на сили **51**
4-3. Електричен потенциал **53**
4-4. $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$ **55**
4-5. Поток на полето E **57**
4-6. Закон на Гаус ; дивергенция на полето E **59**
4-7. Поле на заредена сфера **61**
4-8. Линии на полето ; еквипотенциални повърхнини **61**

5. Приложения на закона на Гаус

5-1. Електростатиката е законът на Гаус плюс ... **64**
5-2. Равновесие в електростатичното поле **64**
5-3. Равновесие с проводници **66**
5-4. Устойчивост на атомите **66**
5-5. Поле на заредена права линия **67**
5-6. Заредена равнина ; двойка равнини **68**
5-7. Хомогенно заредено кълбо ; заредена сфера **68**
5-8. Точен ли е законът на Кулон ? **69**
5-9. Полета на проводник **72**
5-10. Поле в кухина на проводник **73**

6. Електрично поле в различни физични условия

6-1. Уравнения на електростатичния потенциал **75**
6-2. Електричен дипол **76**
6-3. Забележки за векторните уравнения **78**
6-4. Диполният потенциал като градиент **79**
6-5. Диполно приближение за произволно разпределение **81**
6-6. Полета на заредени проводници **82**
6-7. Метод на образите **83**
6-8. Точков заряд до проводяща равнина **84**
6-9. Точков заряд до проводяща сфера **85**
6-10. Кондензатори ; успоредни пластини **87**
6-11. Пробив при високо напрежение **88**
6-12. Йонен микроскоп **89**

7. Електрично поле в различни физични условия (продължение)

7-1. Методи за определяне на електростатичното поле **91**
7-2. Двумерни полета ; функции на комплексен аргумент **92**
7-3. Трептения на плазма **96**
7-4. Колоидни частици в електролит **98**
7-5. Електростатично поле на мрежа **101**

8. Електростатична енергия

8-1. Електростатична енергия на заряди. Хомогенно кълбо **103**
8-2. Енергия на кондензатор. Сили, които действуват на заредени проводници **104**
8-3. Електростатична енергия на йонен кристал **107**
8-4. Електростатична енергия на ядрото **109**
8-5. Енергия на електростатичното поле **113**
8-6. Енергия на точков заряд **115**

9. Електричеството в атмосферата

9-1. Градиент на електричния потенциал в атмосферата **117**
9-2. Електрични токове в атмосферата **118**
9-3. Произход на токовете в атмосферата **120**
9-4. Гръмотевични бури **121**
9-5. Механизъм на разпределение на зарядите **124**
9-6. Мълния **128**

10. Диелектрици

10-1. Диелектрична проницаемост **130**
10-2. Вектор на поляризацията P **132**
10-3. Поляризационни заряди **132**
10-4. Уравнения на електростатиката за диелектрици **135**
10-5. Полета и сили в присъствие на диелектрици **137**

11. Вътрешен строеж на диелектриците

11-1. Молекулни диполи **140**
11-2. Електронна поляризация **140**
11-3. Полярни молекули ; насочена поляризация **143**
11-4. Електрични полета в кухини на диелектрик **145**
11-5. Диелектрична проницаемост на течности ; формула на Клаузиус-Мосоти **146**
11-6. Твърди диелектрици **148**
11-7. Сегнетоелектричество ; бариев титанат **148**

12. Електростатични аналогии

12-1. Еднакви уравнения — еднакви решения **153**
12-2. Поток топлина ; точков източник близо до безкрайна плоска граница **154**
12-3. Опъната мембрана **157**
12-4. Дифузия на неутрони ; сферично-симетричен източник в хомогенна среда **159**
12-5. Безвихрово движение на течности ; обтичане на кълбо **161**
12-6. Осветление ; равномерно осветление на равнина **164**
12-7. „Фундаменталното единство“ на природата **165**

13. Магнитостатика

13-1. Магнитно поле **167**
13-2. Електричен ток ; запазване на заряда **167**
13-3. Магнитна сила, която действува на ток **169**
13-4. Магнитно поле на постоянни токове ; закон на Ампер **169**

13-5. Магнитно поле на прав проводник и соленоид; атомни токове **171**
13-6. Относителност на магнитните и електрични полета **173**
13-7. Трансформация на токове и заряди **178**
13-8. Суперпозиция; правило на дясната ръка **179**

14. Магнитното поле в различни случаи

14-1. Векторен потенциал **181**
14-2. Векторен потенциал на зададени токове **184**
14-3. Прав проводник **185**
14-4. Дълъг соленоид **186**
14-5. Поле на малка рамка; магнитен дипол **187**
14-6. Векторен потенциал на верига **189**
14-7. Закон на Био-Савар **190**

15. Векторен потенциал

15-1. Сили, които действуват на рамка с ток; енергия на дипол **191**
15-2. Механична и електрична енергия **194**
15-3. Енергия на постоянните токове **197**
15-4. *B* или *A*? **198**
15-5. Векторният потенциал и квантовата механика **200**
15-6. Кое е вярно за статиката, а е не вярно за динамиката **206**

16. Индуцирани токове

16-1. Мотори и генератори **209**
16-2. Трансформатори и индуктивности **213**
16-3. Сили, които действуват на индуцираните токове **214**
16-4. Електротехника **218**

17. Закони на индукцията

17-1. Физика на индукцията **221**
17-2. Изключения от „правилото на потока" **223**
17-3. Ускорение на частиците в индуцирано електрично поле; бетатрон **224**
17-4. Парадокс **226**
17-5. Генератор за променлив ток **227**
17-6. Взаимна индукция **230**
17-7. Самоиндукция **232**
17-8. Индуктивност и магнитна енергия **234**

18. Уравнения на Максвел

18-1. Уравнения на Максвел **239**
18-2. Какво дава добавката **241**
18-3. Всичко за класическата физика **243**
18-4. Преместващо се поле **244**
18-5. Скорост на светлината **247**
18-6. Решение на уравненията на Максвел; потенциали и вълново уравнение **249**

19. Принцип на най-малкото действие
Специална лекция-почти студия **252**
Добавка, направена след лекцията **267**

20. Решения на уравненията на Максвел в празно пространство

20-1. Вълни в празното пространство; плоски вълни **269**
20-2. Тримерни вълни **276**
20-3. Научно въображение **278**
20-4. Сферични вълни **281**

21. Решения на уравненията на Максвел с токове и заряди

21-1. Светлина и електромагнитни вълни **285**
21-2. Сферични вълни от точков източник **287**
21-3. Общо решение на уравненията на Максвел **288**
21-4. Полетата на трептящ дипол **290**
21-5. Потенциали на движещ се заряд; общо решение на Ленар и Вихерт **294**
21-6. Потенциали на заряд, който се движи с постоянна скорост: формула на Лоренц **297**

22. Вериги с променлив ток

22-1. Импеданси **300**
22-2. Генератори **304**
22-3. Вериги от идеални елементи; закони на Кирхоф **307**
22-4. Еквивалентни контури **310**
22-5. Енергия **311**
22-6. Верига — стълба **313**
22-7. Филтри **314**
22-8. Други елементи на веригата **317**

23. Кухи резонатори

23-1. Реални елементи на веригата **320**
23-2. Кондензатор при високи честоти **321**
23-3. Резонансна кухина **326**
23-4. Собствени трептения на кухината **329**
23-5. Кухини и резонансни кръгове **331**

24. Вълноводи

24-1. Предаваща линия **333**
24-2. Правоъгълен вълновод **336**
24-3. Гранична честота **338**
24-4. Скорост на вълните във вълновода **339**
24-5. Как да наблюдаваме вълните на вълновода **340**
24-6. Свързване на вълноводи **341**
24-7. Типове вълни във вълновода **343**
24-8. Друг начин за разглеждане на вълните във вълновода **344**

25. Електродинамика в релативистични означения

25-1. Четиривектори **347**
25-2. Скаларно произведение **349**
25-3. Четиримерен градиент **352**
25-4. Електродинамиката в четиримерни означения **355**
25-5. Четиримерен потенциал на движещ се заряд **356**
25-6. Инвариантност на уравненията на електродинамиката **357**

26. Лоренцови трансформации на полетата

26-1. Четиримерен потенциал на движещ се заряд **359**
26-2. Полета на точков заряд, който се движи с постоянна скорост **360**
26-3. Релативистично трансформиране на полетата **363**
26-4. Уравненията на движение в релативистични означения **370**

27. Енергия на полето и импулс на полето

27-1. Локални закони за запазване **374**
27-2. Запазване на енергията и електромагнитно поле **375**
27-3. Плътност на енергията и поток на енергията в електромагнитното поле **377**
27-4. Неопределеност на енергията на полето **379**
27-5. Примери за потоци на енергията **380**
27-6. Импулс на полето **383**

28. Електромагнитна маса

28-1. Енергия на полето на точков заряд **387**
28-2. Импулс на полето на движещ се заряд **388**
28-3. Електромагнитна маса **389**
28-4. С каква сила електронът действува сам на себе си? **391**
28-5. Опити за изменяне теорията на Максвел **393**
28-6. Поле на ядрените сили **400**

29. Движение на зарядите в електрично и магнитно поле

29-1. Движение в хомогенни електрично и магнитно полета **403**
29-2. Анализатор на импулсите **403**
29-3. Електростатична леща **405**
29-4. Магнитна леща **406**
29-5. Електронен микроскоп **406**
29-6. Стабилизиращи полета на ускорителите **407**
29-7. Фокусиране чрез последователно сменящ се градиент **409**
29-8. Движение в кръстосани електрично и магнитно полета **411**

30. Вътрешна геометрия на кристалите

30-1. Вътрешна геометрия на кристалите **412**
30-2. Химически връзки в кристалите **413**
30-3. Растеж на кристалите **414**
30-4. Кристални решетки **415**
30-5. Симетрии в две измерения **416**
30-6. Симетрии в три измерения **419**
30-7. Якост на металите **420**
30-8. Дислокации и растеж на кристалите **422**
30-9. Модел на кристала по Бряг и Най **422**

ПРИЛОЖЕНИЕ (към глава 30)

Л. Бряг и Дж. Най. Динамичен модел на кристална структура **423**

31. Тензори

31-1. Тензор на поляризацията **429**
31-2. Преобразуване на компонентите на тензора **431**
31-3. Елипсоид на енергията **432**
31-4. Други тензори; тензор на инерцията **435**
31-5. Векторно произведение **437**
31-6. Тензор на напреженията **438**
31-7. Тензори от по-високи рангове **441**
31-8. Четиримерен тензор на електромагнитния импулс **443**

32. Коефициент на пречупване на плътното вещество

32-1. Поляризиране на веществото **445**
32-2. Уравнения на Максвел в диелектрик **447**
32-3. Вълни в диелектрик **449**
32-4. Комплексен коефициент на пречупване **452**
32-5. Коефициент на пречупване на смеси **453**
32-6. Вълни в метали **455**
32-7. Нискочестотно и високочестотно приближения; дълбочина на скин-слоя и плазмена честота **456**

33. Отражения от повърхност

33-1. Отражение и пречупване на светлината **460**
33-2. Вълни в плътни среди **461**
33-3. Гранични условия **464**
33-4. Отразена и пречупена вълна
33-5. Отражение от металите **471**
33-6. Пълно вътрешно отражение **472**

34. Магнетизъм на веществото

34-1. Диамагнетизъм и парамагнетизъм **475**
34-2. Магнитни моменти и момент на количеството на движението **477**
34-3. Прецесия на атомните магнитчета **479**
34-4. Диамагнетизъм **480**
34-5. Теорема на Лармор **482**
34-6. В класическата физика няма нито диамагнетизъм, нито парамагнетизъм **483**
34-7. Момент на количеството на движението в квантовата механика **484**
34-8. Магнитната енергия на атомите **487**

35. Парамагнетизъм и магнитен резонанс

35-1. Квантоване магнитни състояния **489**
35-2. Опит на Щерн-Герлах **491**
35-3. Метод на молекулните снопове на Раби **493**
35-4. Парамагнетизъм **495**
35-5. Охлаждане чрез адиабатно размагнитване **499**
35-6. Ядрен магнитен резонанс **500**

36. Феромагнетизъм

3
36-1. Токове на намагнитването **503**
36-2. Полето H **508**
36-3. Крива на намагнитването **509**
36-4. Индуктивност с желязна сърдевина **511**
36-5. Електромагнити **513**
36-6. Спонтанно намагнитване **514**

37. Магнитни материали

37-1. Същност на феромагнетизма **520**
37-2. Термодинамични свойства **524**
37-3. Хистерезисни криви **525**
37-4. Феромагнитни материали **531**
37-5. Необичайни магнитни материали **532**

38. Еластичност

38-1. Закон на Хук **536**
38-2. Хомогенна деформация **537**
38-3. Усукване на прът; вълни на отместването **541**
38-4. Огъване на греда **545**
38-5. Надлъжно огъване **547**

39. Еластични материали

39-1. Тензор на деформацията **550**
39-2. Тензор на еластичността **553**
39-3. Движения в еластично тяло **556**
39-4. Нееластично поведение **559**
39-5. Пресмятане на еластичните константи **561**

40. Как тече „сухата" вода?

40-1. Хидростатика **565**
40-2. Уравнение на движението **566**
40-3. Стационарен поток; теорема на Бернули **570**
40-4. Циркулация **574**
40-5. Вихрови линии **576**

41. Как тече „мократа" вода?

41-1. Вискозитет **579**
41-2. Вискозен поток **582**
41-3. Число на Рейнолдс **584**
41-4. Обтичане на кръгов цилиндър **585**
41-5. Граничен случай на нулев вискозитет **588**
41-6. Поток на Куете **589**

1

Електромагнетизъм

1-1. Електрични сили

Да разгледаме сила, която подобно на гравитацията се изменя обратно пропорционално на квадрата от разстоянието, но само че е *милион билиони билиони билиони* пъти по-силна. И която се отличава с още нещо. Нека съществуват два вида „вещество", които могат да бъдат наречени положително и отрицателно. Нека еднаквите видове да се отблъскват, а различните — да се привличат за разлика от гравитацията, при която има само привличане. Какво ще се случи тогава?

Всичкото положително ще се отблъсне със страшна сила и ще се разлети в различни посоки. Всичкото отрицателно — също. Но съвсем друго ще стане, ако положителното и отрицателното се размесят по равно. Тогава те с огромна сила ще се привлекат и в резултат тези невероятни сили почти изцяло ще се балансират, образувайки плътни „дребнозърнести" смеси на положително и отрицателно; между две купчинки на такива смеси практически няма да се усеща нито привличане, нито отблъскване.

Такава сила съществува: това е електричната сила. И цялото вещество е смес от положителни протони и отрицателни електрони, привличащи се и отблъскващи се с невероятна сила. Обаче балансът между тях е толкова съвършен, че когато стоите до някого, вие не усещате никакво действие на тази сила. А ако балансът би се нарушил нищожно малко, вие веднага бихте почувствували това. Ако във вашето тяло или в тялото на ваш съсед (стоящ от вас на разстояние една протегната ръка) електроните биха били само с 1% повече от протоните, силата на вашето отблъскване би била невъобразимо голяма. Колко голяма? Достатъчна ли, че да повдигне небостъргач? По-голяма! Достатъчна ли, че да повдигне планината Еверест? По-голяма! Силите на отблъскване биха били достатъчни, за да се повдигне „тегло", равно на теглото на нашата Земя!

Щом такива огромни сили в такива фини смеси са така съвършено балансирани, не е трудно да се разбере, че веществото, стремейки се да задържи своите положителни и отрицателни заряди в съвършено равновесие, трябва да притежава голяма твърдост и якост. Върхът на небостъргача например се отклонява при поривите на вятъра само на няколко метра, защото електрическите сили удържат всеки електрон и всеки протон повече или по-малко на своите места. От друга страна, ако се разгледа достатъчно малко количество вещество така, че в него да има само малко на брой атоми, там не е задължително да има равен брой положителни и отрицателни заряди и могат да се проявят големи остатъчни електрични сили. Даже ако броят на едните и другите заряди е еднакъв, въпреки това между съседни области може да действува значителна електрична сила. Защото силата, действуваща между отделните заряди, се изменя обратно пропорционално на квадратите на разстоянията между тях и може да се окаже, че отрицателните заряди на една част от веществото са по-близко до положителните заряди (на друга част), отколкото до отрицателните. Силите на привличане тогава ще надделеят над силите на отблъскване и в резултат ще възникне привличане между двете части на веществото, в които няма излишен заряд. Силата, която удържа атомите, и химичните сили, които съединяват молекулите, са електрични сили, действуващи там, където

1-1. Електрични сили

1-2. Електрични и магнитни полета

1-3. Характеристики на векторните полета

1-4. Закони на електромагнетизма

1-5. Какво е това „полета"?

1-6. Електромагнетизмът в науката и техниката

Да се повтори: 12 глава (I том) „Характеристики на силата"

броят на зарядите е различен или където разстоянията между тях са малки.

Разбира се, вие знаете, че в атома има положителни протони в ядрото и електрони извън ядрото. Вие можете да попитате: „Ако тези електрични сили са толкова големи, защо тогава електроните и протоните не се съберат на едно място? Ако те се стремят да образуват тясна компания, защо тя да не стане още по-тясна?“ Отговорът е свързан с квантовите ефекти. Ако се опитаме да заключим нашите електрони в малък обем около протона съгласно с принципа на неопределеността, у тях следва да възникне среден квадратичен импулс, толкова по-голям, колкото по-силно ги ограничим. Именно това движение (изисквано от законите на квантовата механика) пречи на електричното привличане още повече да приближи зарядите.

Тук възниква друг въпрос: „Какво свързва ядрото?“ В ядрото има няколко протона и всичките са положително заредени. Защо те не се разлитат? Оказва се, че в ядрото освен електричните сили действуват още и неелектрични сили, наречени *ядрени*. Тези сили са по-мощни от електричните и са способни въпреки електричното отблъскване да удържат протоните заедно. Действието на ядрените сили обаче е на малки разстояния; то спада значително по-бързо от $1/r^2$. И това довежда до важен резултат. Ако в ядрото има твърде много протони, ядрото става твърде голямо и то вече не може да се задържа. За пример може да послужи уранът с неговите 92 протона. Ядрените сили действуват основно между протон (или неутрон) и близкия му съсед, а електричните сили действуват на големи разстояния и предизвикват отблъскване на всеки протон в ядрото от всички останали. Колкото повече са протоните в ядрото, толкова по-силно е електричното отблъскване, докато (както при урана) равновесието не стане толкова неустойчиво, че на ядрото почти нищо не му струва да се разлети от действието на електричното отблъскване. Достатъчно е едва-едва „да се побутне“ (например като се изпрати вътре бавен неутрон) и то се разцепва на две, на две положително заредени части, които се разлитат в различни посоки в резултат на електричното отблъскване. Енергията, която се освобождава при това, е енергията на атомната бомба. Обикновено я наричат ядрена“ енергия, макар че това всъщност е „електрична“ енергия, освобождавана щом електричните сили надделеят над ядрените сили на привличане.

На края може да се попита какво задържа отрицателно заредения електрон (нали в него няма ядрени сили)? Ако целият електрон се състои от вещество от един вид, всяка негова част трябва да отблъсква останалите. Тогава защо те не се разлетят в различни посоки? А наистина ли съществуват в електрона „части“? Може би следва да се счита електронът просто точка и да се говори, че електричните сили действуват само между *различни* точкови заряди, така че електронът не действува сам на себе си? Възможно е. Единственото, което може сега да се каже, е, че въпросът за това с какво, как е свързан електронът предизвиква много трудности при опита да се създаде пълна теория на електромагнетизма. И отговора на този въпрос така и не получиха. Ние ще се заемем с обсъждането му малко по-късно.

Както видяхме, може да се надяваме, че съчетанието на електричните сили с квантовомеханичните ефекти ще определи структурата на големи количества вещества и следователно техните свойства. Едни материали са твърди, други — меки. Някои от тях са електрични „проводници“, защото техните електрони са свободни и могат да се движат; други са „изолатори“, техните електрони са привързани всеки към своя атом. По-късно ще изясним откъде се появяват такива свойства, но този въпрос е доста сложен и за това отначало ще разгледаме електричните сили в най-прости ситуации. Ще започнем с изучаването само на законите на електричеството, като включим тук и магнетизма, тъй като и едното, и другото в действителност са явления с една и съща природа.

Казахме, че електричните сили, както и силите на гравитация, намаляват обратно пропорционално на квадрата на разстоянието между зарядите. Това съотношение се нарича закон на Кулон. Обаче този закон престава да се изпълнява точно, ако зарядите се движат. Електричните сили зависят също по сложен начин и от движението на зарядите. Една от частите на силата, която действува между движещи се заряди, наричаме *магнитна* сила. В същност това е само една от проявите на електричното действие. Затова и говорим за „електромагнетизъм".

Съществува важен общ принцип, който позволява сравнително просто да се изучат електромагнитните сили. Установяваме експериментално, че силата, действуваща на отделен заряд (независимо от това колко още заряди има там или как те се движат), зависи само от положението на този отделен заряд, от неговата скорост и големина. Силата **F**, която действува на заряда q, движещ се със скорост **v**, можем да напишем във вида

$$\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \tag{1.1}$$

тук **E** е *електричното поле* в точката, в която се намира зарядът, а **B** е *магнитното поле*. Съществено е, че електричните сили, които действуват от страна на всички останали заряди във Вселената, се сумират и дават именно тези два вектора. Стойностите им зависят от това, *къде* се намира зарядът и могат ли да се изменят *с времето*. Ако заменим този заряд с друг, силата, която действува на новия заряд, ще се измени точно пропорционално на големината на заряда, стига всички останали заряди в света да не изменят движението и положението си. (В реални условия, разбира се, всеки заряд действува на всички други разположени в съседство с него заряди и може да ги застави да се движат, така че при замяната на един даден заряд с друг полетата *могат* да се изменят.)

От материала, изложен в първия том, знаем как да определим движението на частица, ако е известна силата, която действува върху нея. Уравнението (1.1) заедно с уравнението на движение дава

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m\mathbf{v}}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\right] = \mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{1.2}$$

Значи ако **E** и **B** са известни, може да се определи движението на зарядите. Остава само да се знае как се получават **E** и **B**.

Един от най-важните принципи, който опростява получаването на големините на полетата, се състои в следното. Нека някакво количество движещи се по някакъв начин заряди създават полето $\mathbf{E}_1$, а друга съвкупност заряди — полето $\mathbf{E}_2$. Ако действуват и двата набора от заряди едновременно (като запазват положенията и движенията си такива, каквито са били при разлеждането им поотделно), полето, което възниква, е точно равно на сумата

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2. \tag{1.3}$$

Този факт се нарича *принцип на наслагване на полетата* (или *принцип на суперпозицията*). Той е в сила и за магнитните полета.

Този принцип означава, че ако ни е известен закона за електричното и магнитно полета, създадени от *единичен* заряд, който се движи по произволен начин, значи са ни известни всички закони на електродинамиката. Ако искаме да знаем силата, която действува на заряда A, необходимо ни е само да пресметнем големината на полетата **E** и **B**, създадени от всеки от зарядите B, C, D и т. н., и да съберем всички тези **E** и **B**; с това ще намерим полетата, а от тях и силите, действуващи на A. Ако би се оказало, че полето, създадено от единичен заряд, се отличава с простота, това би бил най-изящният начин на описание на законите на електродинамиката. Но ние вече описахме този закон (вж. I том, 28 гл.) и за съжаление той е доста сложен.

Най-често употребяваните гръцки букви:

	α	— алфа
	β	— бета
Γ	γ	— гама
Δ	δ	— делта
	ε	— епсилон
	ζ	— цета
	η	— ета
Θ	θ	— тета
	ι	— йота
	$\varkappa$	— капа
Λ	λ	— ламбда
	μ	— мю
	ν	— ню
Ξ	ξ	— кси
	o	— омикрон
Π	π	— пи
	ρ	— ро
Σ	σ	— сигма
	τ	— тау
Υ	υ	— ипсилон
Φ	φ	— фи
	χ	— хи
Ψ	ψ	— пси
Ω	ω	— омега

Оказва се, че формата, в която законите на електродинамиката стават прости, съвсем не е такава, каквато би могла да се очаква. Тя *не е* проста, ако пожелаем да имаме формула за силата, с която един заряд действува на друг. Наистина, когато зарядите са в покой, законът за силата — законът на Кулон — е прост, но когато зарядите се движат, съотношенията се изменят и усложняват поради закъсняване във времето, влиянията на ускоренията и др. Следователно по-добре е да не се опитваме да строим електродинамиката само с помощта на законите на силите, които действуват между зарядите; значително по-приемлива е друга гледна точка, при която по-лесно ще се справим със законите на електродинамиката.

1-2. Електрични и магнитни полета

Преди всичко трябва да разширим малко нашите представи за електричния и магнитния вектори **E** и **B**. Ние ги определихме чрез сили, които действуват на заряда. Сега имаме намерение да говорим за електричното и магнитното полета в *точка* даже ако там няма никакъв заряд. Следователно ние утвърждаваме, че след като на заряда „действуват" сили, на това място, където той е стоял, остава „нещо" и след като са махнали оттам заряда.

Ако зарядът, разположен в точката (x, y, z), в момента t усеща действието на силата **F**, съгласно с уравнение (1.1), ние свързваме векторите **E** и **B** с *точката* (x, y, z) в пространството. Може да се счита, че **E** (x, y, z, t) и **B** (x, y, z, t) дават сили, чието действие ще усети в момента t заряд, разположен в (x, y, z), при условие, че поставянето на заряда в тази точка *не ще обезпокои* нито разположението, нито движението на всички останали заряди, отговорни за полетата.

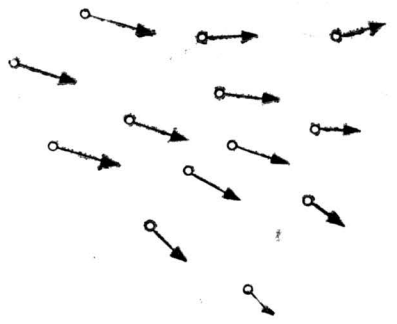
Следвайки тази представа, ние свързваме с *всяка* точка (x, y, z) на пространството два вектора **E** и **B**, способни да се изменят с времето. Електричните и магнитни полета тогава се разглеждат като *векторни функции* от x, y, z и t. Тъй като векторът се определя от компонентите си, всяко от полетата **E** (x, y, z, t) и **B** (x, y, z, t) представлява три математически функции на x, y, z и t.

Именно поради това че **E** (или **B**) може да бъде определено за всяка точка на пространството, го наричат и „поле". Поле е всяка физическа величина, която в различни точки на пространството приема различни стойности. Да речем температурата е поле (в случая скаларно), което може да се запише във вида $T(x, y, z)$. Освен това температурата може да се изменя и с времето, тогава ще кажем, че температурното поле зависи от времето и ще запишем $T(x, y, z, t)$. За друг пример може да послужи „полето на скоростите" на течаща течност. Ние записваме скоростта на течността във всяка точка на пространството в момента t във вид $\mathbf{v}(x, y, z, t)$. Това поле е векторно.

Да се върнем към електромагнитните полета. Въпреки че формулите, по които те се създават от зарядите, са сложни, те имат следното важно свойство: връзката между стойностите на полетата в *някоя точка* и стойностите им *в съседна точка* е много проста. Няколко такива съотношения (във форма на диференциални уравнения) са достатъчни, за да опишат напълно полетата. Именно в такава форма законите на електродинамиката ще изглеждат особено просто.

Немалко изобретателност трябваше да се изразходва, за да се помогне на хората мислено да си представят поведението на полетата. И най-правилната гледна точка е най-отвлечена: трябва просто полетата да се разглеждат като математически функции на координатите и времето. Също може да се направи опит да се получи мислена картина на полето, като се начертаят в много точки на пространството на вектор така, че всеки от тях да по-

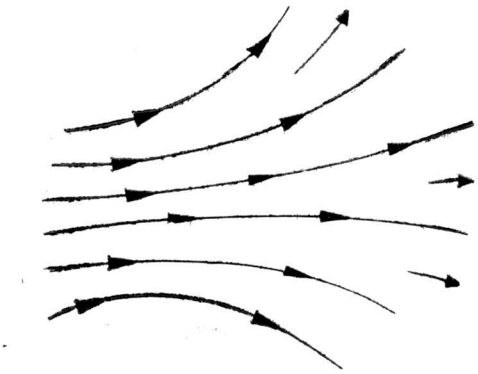
казва интензитета и посоката на полето в тази точка. Такова представяне е показано на фиг. 1-1. Може да се отиде и по-нататък: да се начертаят линии, които във всяка точка да бъдат допирателни към тези вектори. Те като че следват стрелките и запазват посоката на полето. Ако това се направи, сведенията за дължините на векторите ще се загубят, но те могат да се запазят, ако в местата, където интензитетът на полето е малък, линиите се прокарат по-рядко, а където е по-голям — по-гъсто. Ще се договорим, че *броят на линиите на единица площ,* разположена перпендикулярно на линиите, ще бъде пропорционален на *интензитета* на полето. Това, разбира се, е само приближение; понякога ще се наложи да добавяме нови линии, така че количеството им да отговаря на интензитета на полето. Полето, показано на фиг. 1-1, е представено с линиите на полето на фиг. 1-2.



Фиг. 1-1. Векторно поле, представено чрез множество стрелки. Дължината и посоката им показва големините на векторното поле в точките от които излизат стрелките

1-3. Характеристики на векторните полета

Векторните полета притежават две важни математически свойства, от които ще се ползуваме при описание на законите на електричеството от гледна точка на полетата. Да си представим затворена повърхност и да зададем въпроса, изтича ли от нея „нещо", т. е. притежава ли полето свойството „изтичане"? Да речем, за полето на скоростите можем да се поинтересуваме винаги ли скоростта е насочена от повърхността или в по-общия случай изтичали от повърхността повече течност (за единица време), отколкото се втича. Общото количество течност, която изтича през повърхността, ще наречем „поток на скоростта" през повърхността за единица време. Потокът през елемент на повърхността е равен на компонентата на скоростта, перпендикулярна на елемента, умножена с площта му. За произволна затворена повърхност *сумарният поток* е равен на средната стойност на нормалната компонента на скоростта (измервана отвътре навън), умножена с площта на повърхността:

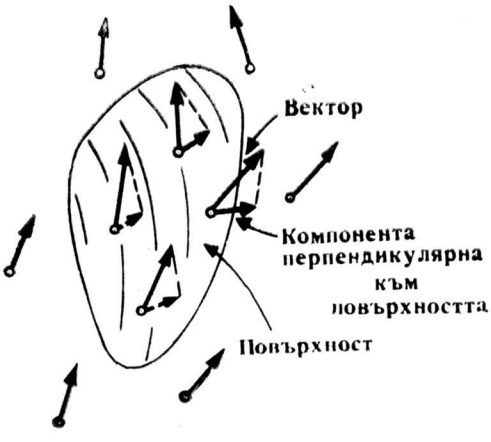


Фиг. 1-2. Векторно поле, представено с линии, допирателни към посоката на векторното поле във всяка точка.

Плътността на линиите показва големината на векторното поле

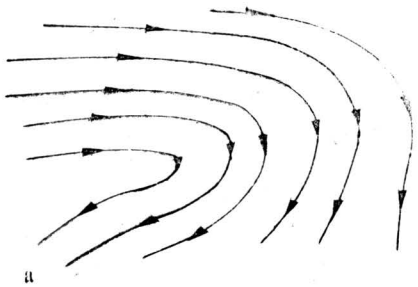
Потокът = (средна нормална компонента на скоростта). (площ на повърхността (1.4)

В случая на електрично поле може да се определи математично понятие, подобно на потока на течността; ние също ще го наречем поток, но, разбира се, това вече не е течение на някаква течност, защото електричното поле не може да се счита за скорост на нещо. Все пак се оказва, че математичната величина, определена като средна нормална компонента на полето, както преди има полезно значение. Тогава ние говорим за *поток на електричеството*, също определен с уравнението (1.4). На края полезно е да се говори и за поток не само през затворена повърхност, но и през произволна ограничена повърхност. Както и преди, потокът през такава повърхност се определя като средна нормална компонента на вектора, умножена с площта на повърхността. Тези представяния се илюстрират на фиг. 1-3.

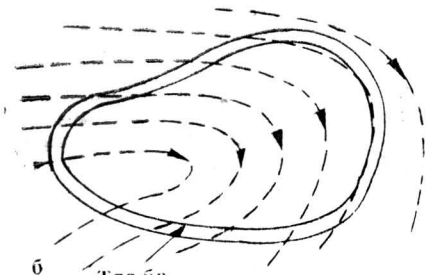


Фиг. 1-3. Потокът на векторното поле, определен като произведение от средната стойност на перпендикулярната компонента на вектора по лицето на тази повърхност

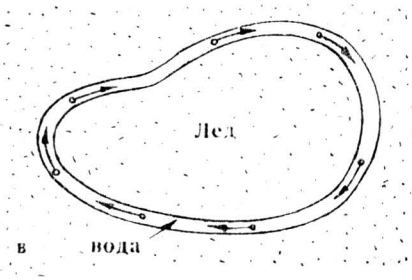
Другото свойство на векторните полета се отнася не толкова до повърхностите колкото до линиите. Да си представим отново полето на скоростите, което описва потока течност. Може да се зададе интересен въпрос: циркулира ли течността? Това значи: съществува ли нейно вртеливо движение по някакъв затворен контур? Представете си, че сме замръзили мигновено течността навсякъде с изключение на вътрешната част на завита във вид на бримка тръба с постоянно сечение (фиг. 1-4). Извън тръбата течността спира, но вътре тя може да продължава да се движи, ако в нея (течността) се е запазил импулс, т. е. ако импулсът, който я е гонил в една посока, е по-голям от импулса в обратната посока. Определяме величината, наречена *циркулация* като скорост на течността в тръбата, умножена по дължината на тръбата. И отново можем да разширим нашите представи и да определим „циркулацията" за произволно векторно поле (даже



а

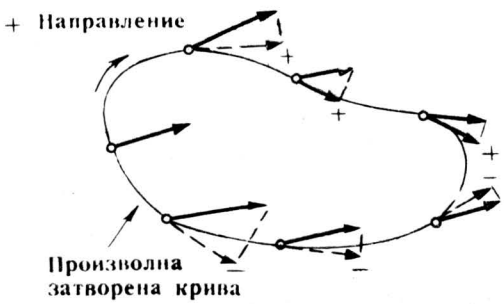


б Тръба



Фиг. 1-4. Поле на скоростите в течност (а).

Представете си тръба с постоянно сечение, поставена по произволна затворена крива (б). Ако течността внезапно се замрази навсякъде освен в тръбата, течността започва да циркулира (в)



Фиг. 1-5. Циркулацията на векторното поле е равна на произведението от средната тангенциална компонента на вектора (с отчитане на знака й спрямо посоката на обикаляне) по дължината на контура

ако там няма нищо движещо се). За всяко векторно поле се определя *циркулация по произволен въображаем затворен контур* като средна допирателна компонента на вектора (с отчитане на посоката на обикаляне), умножена по дължината на контурата (фиг. 1-5):

Циркулацията = (средната допирателна компонента). (дължината на пътя на обикаляне). (1.5)

Виждате, че това определение наистина дава число, пропорционално на циркулацията на скоростта в тръбата, пробита в бързозамръзващата течност.

Като се ползуваме само от тези две понятия — понятието за поток и понятието за циркулация, ние сме способни да опишем всички закони на електричеството и магнетизма. На вас може би ще ви бъде трудно ясно да разберете значението на законите, но те ще ви дадат някаква представа за това, по какъв начин в крайна сметка може да бъде описана физиката на електромагнитните явления.

1-4. Закони на електромагнетизма

Първият закон на електромагнетизма описва потока на електричното поле:

$$\text{Потокът на интензитета } \mathbf{E} \text{ през произволна затворена повърхност} = \frac{\text{заряда вътре в нея}}{\varepsilon_0}. \quad (1.6)$$

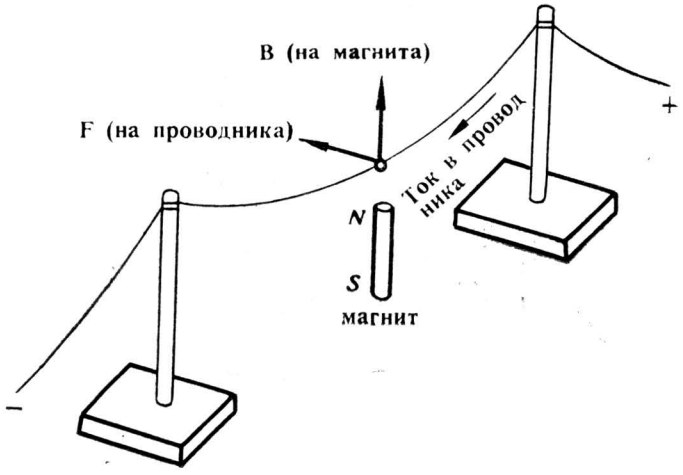
където ε_0 е някаква константа (чете се епсилон — нула). Ако в обема, затворен от повърхността, няма заряди, а извън нея (даже съвсем до нея) има, все едно *средната* нормална компонента E е равна на нула, така че през повърхността няма никакъв поток. За да покажем ползата от такъв тип твърдения, ще докажем, че уравнение (1.6) съвпада със закона на Кулон, ако само се отчете, че полето на отделен заряд трябва да има сферическа симетрия. Да прокараме около точков заряд сфера. Тогава средната нормална компонента е точно равна на стойността на **E** във всяка точка, защото полето трябва да бъде насочено по радиуса и да има една и съща стойност във всички точки на сферата. Тогава нашето правило твърди, че полето на повърхността на сферата, умножено с площта на сферата (т. е. изтичащият от сферата поток), е пропорционално на заряда вътре в нея. Ако се увеличава радиусът на сферата, площта й ще расте като квадрата на радиуса. Произведението на средната нормална компонента на електричното поле по тази площ, както и преди ще бъде равно на вътрешния заряд, значи полето трябва да намалява като квадрата на разстоянието; така се получава поле „на обратните квадрати".

Ако се вземе в пространството произволна крива и се измери циркулацията на електричното поле по тази крива, оказва се, че тя в общия случай не е равна на нула (макар в кулоново поле това да е така). Вместо това за електричеството е в сила втори закон, твърдящ, че

$$\text{Циркулацията на вектора } \mathbf{E} \text{ по контура } C = \frac{d}{dt} \text{ (от потока на вектора } \mathbf{B} \text{ през затворената повърхност } S). \quad (1.7)$$

И на края формулировката на законите на електромагнитното поле ще бъде завършена, ако се напишат две съответни уравнения за магнитното поле **B**:

$$\text{Потокът на вектора } \mathbf{B} \text{ през всяка затворена повърхност} = 0, \quad (1.8)$$



Фиг. 1-6. Магнитната пръчка създава около проводника поле **B**.

Когато по проводника тече ток, проводникът се премества поради действието на силата $\mathbf{F}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$

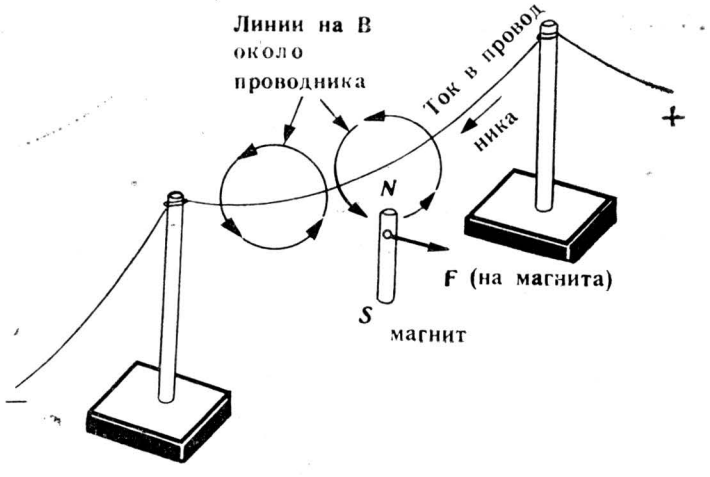
А за повърхността S, ограничена от кривата C:

$$c^2\,(\text{циркулацията на вектора }\mathbf{B}\text{ по контура }C) = \frac{d}{dt}\,(\text{от потока на вектора }\mathbf{E}\text{ през }S) + \frac{\text{електричният ток през }S.}{\varepsilon_0}. \qquad (1.9)$$

Появилата се в уравнение (1.9) константа c^2 е квадратът на скоростта на светлината. Нейното появяване е оправдано с това, че магнетизмът по същество е релативистка проява на електричеството. А константата ε_0 е поставена, за да възникнат приетите единици за електричния ток.

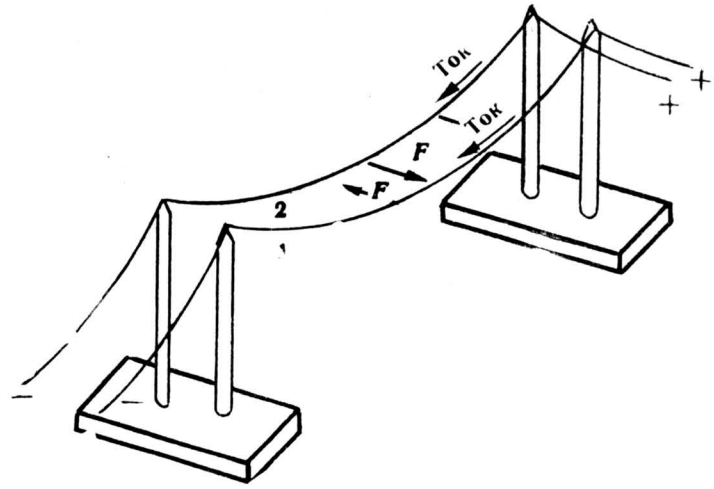
Уравненията (1.6)—(1.9), а също уравнението (1.1) са всичките закони на електродинамиката.[1] Както помните, беше много просто да се напишат законите на Нютон, но затова пък от тях последваха множество сложни следствия, така че беше необходимо немалко време, за да се изучат всичките. Да се напишат законите на електродинамиката е несравнимо по-трудно и трябва да очакваме, че следствията от тях ще бъдат много по-забъркани и сега ние трябва доста дълго да се ориентираме в тях.

Ние можем да илюстрираме някои закони на електродинамиката със серия прости опити, които ще могат да ни покажат, макар и качествено, взаимоотношенията на електричното и магнитно полета. С първия член в уравнение (1.1) вие се запознавате като си разчесвате косите, така че за него няма да говорим. Вторият член в уравнението (1.1) може да се демонстрира, като се пропусне ток по проводник, висящ над постоянен магнит, както е показано на фиг. 1-6. При включването на тока проводникът се премества, поради това че му действува сила $\mathbf{F}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Когато по проводника тече ток, зарядите в него се движат, т. е. имат



Фиг. 1-7. Магнитното поле на тока който тече по проводника, действува върху магнита с някаква сила

[1] Необходимо е само да се договорим за избора на *знака* на циркулацията.



Фиг. 1-8. Два проводника, по които тече ток, също си действуват един на друг с определена сила

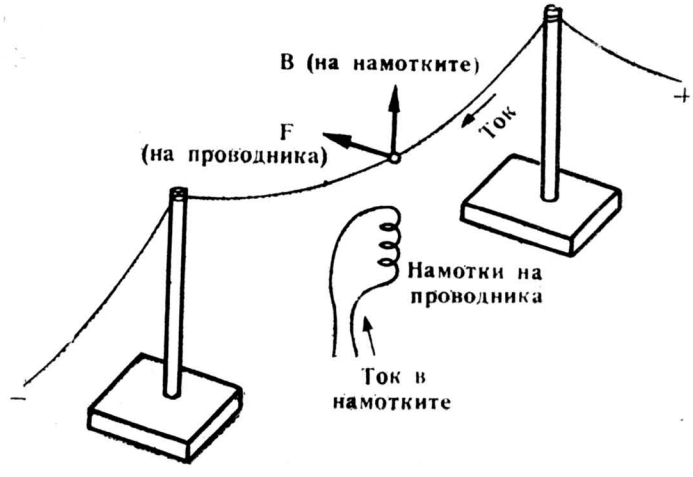
скорост **v**, и на тях действува магнитното поле на магнита, в резултат на което проводникът се отмества.

Когато проводникът се премества наляво, може да се очаква, че магнитът изпитва тласък надясно. (Иначе цялото това устройство може да се постави на платформа и да се получи реактивна система, в която не би се запазвал импулсът!) Силата е твърде малка, за да може да се забележи движението на магнитната пръчка, обаче движението на по-чувствително устройство, да речем стрелката на компаса, е напълно забележимо.

По какъв начин токът в проводника тласка магнита ? Токът, който тече по проводника, създава около него свое собствено магнитно поле, което действува на магнита. В съответствие с последния член в уравнение (1.9) токът трябва да довежда до *циркулация* на вектора **B**; в нашия случай линиите на полето **B** са затворени около проводника, както е показано на фиг. 1-7. Именно това поле **B** е причина за силата, действуваща на магнита.

Уравнението (1.9) ни показва, че при дадена големина на тока, който тече по проводника, циркулацията на полето **B** е еднаква за *всяка* крива, окръжаваща проводника. При тези криви (окръжности например), които лежат далеч от проводника, дължината се оказва по-голяма, така че допирателната компонента на **B** трябва да намалява. Вие виждате, че следва да се очаква линейно намаляване на **B** с отдалечаването от дълъг прав проводник.

Казахме, че токът, който тече по проводник, образува около него магнитно поле и че ако има магнитно поле, то действува с някаква сила върху проводника, по който тече ток. Значи следва да се мисли, че ако магнитното поле е създадено от ток, който тече в един проводник, то ще действува с някаква сила и върху друг проводник, по който също тече ток. Това може да се покаже, като се използуват два



Фиг. 1-9. Магнитната пръчка, показана на фиг. 1-6, може да бъде заменена с бобина, по която тече ток.

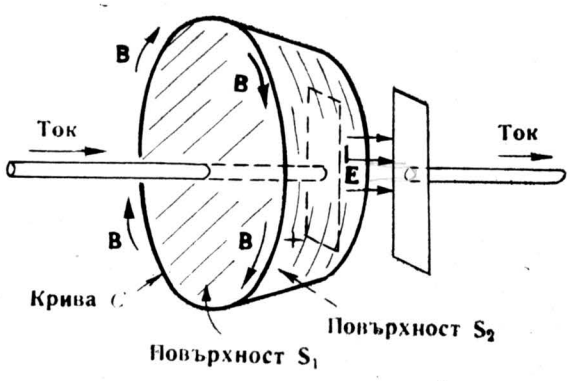
На проводника, както и преди, се действува сила

свободно окачени проводника (фиг. 1-8). Когато посоката на токовете е еднаква, проводниците се привличат, а когато посоките са противоположни, се отблъскват.

Накратко казано, електричните токове, както и магнитите, създават магнитни полета. Но какво е тогава магнит? Щом магнитни полета се създават от движещи се заряди, не може ли да се окаже, че магнитното поле, създавано от парче желязо, всъщност е резултат от действието на токове? По всяка вероятност е така. В нашите опити може да се замени магнитната пръчка с навит проводник, както е показано на фиг. 1-9. Когато тока протича по бобината (както и по правия проводник над нея), наблюдава се точно такова движение на проводника, както и преди, когато вместо бобината има магнит. Всичко изглежда така, като че в парчето желязо непрекъснато циркулира ток. И наистина магнитите може да се разглеждат в термините на непрекъснати токове в атомите на желязото. Силата, която действува върху магнита на фиг. 1-7, се обяснява от втория член в уравнение (1.1).

Откъде пък се вземат тези токове? Единият източник е движението на електроните по атомните орбити. При желязото това не е така, но при някои вещества произходът на магнетизма е именно такъв. Освен въртене около ядрото на атома електронът се върти още и около собствената си ос (нещо подобно на въртенето на Земята); и ето от това именно въртене възниква токът, създаващ магнитното поле на желязото. (Ние казахме „нещо подобно на въртенето на Земята", защото всъщност въпросът е толкова дълбок в квантовата механика, че не се побира достатъчно добре в класическите представи.) В повечето вещества част от електроните се въртят в една посока, друга — в друга, така че магнетизмът изчезва, а в желязото (по тайнствена причина, за която ще говорим по-късно) много електрони се въртят така, че техните оси на въртене са насочени в една посока и това служи за източник на магнетизма.

Тъй като полетата на магнитите се пораждат от токове, в уравненията (1.8) и (1.9) не е необходимо да се поставят допълнителни членове, които да отчитат съществуването на магнити. В тези уравнения става дума за *всички* токове, включително и кръговите токове на въртящите се електрони и законът се оказва правилен. Трябва още да се отбележи, че съгласно с уравнение (1.8) магнитни заряди, подобни на електричните, стоящи в дясната страна на уравнението (1.6), не съществуват. Те никога не са били наблюдавани.



Фиг. 1-10. Циркулацията на полето **B** по кривата C се определя или от тока, който тече през повърхността S_1, или от бързината на изменение на потока на полето **E** през повърхността

Първият член в дясната част на уравнението (1.9) е открит от Максвел теоретически; той е много важен. Той говори, че изменението на *електричните* полета предизвиква магнитните явления. И наистина без този член уравнението загубва смисъл, тъй като без него биха изчезнали токовете в незатворените контури. А на практика такива токове съществуват; затова говори следният пример. Представете си кондензатор, съставен от две плоски пластини. Той се зарежда от ток, който протича към едната пластина и изтича от другата, както е показано на фиг. 1-10.

Да прокараме около един от проводниците кривата C, да опънем на нея повърхност (повърхността S_1), която пресича проводника. Съгласно уравнение (1.9) циркулацията на полето **B** по кривата C дава големината на тока в проводника (умножена с c^2). Но какво ще стане, ако през кривата S_1 прекараме *друга* повърхност S_2 във формата на чашка, чието дъно е разположено между пластините на кондензатора и не се докосва до проводниците? През такава повърхност, разбира се, никакъв ток не преминава. Но нали изменение на положението и формата на въображаемата повърхност не трябва да изменя реалното магнитно поле! Циркулацията на **B** трябва да остане предишната. И наистина първият член в дясната част на уравнението (1.9) така се комбинира с втория член, че за двете повърхнини S_1 и S_2 възниква еднакъв ефект. За S_2 циркулацията на вектора **B** се изразява чрез степента на изменение на потока на вектора **E** от едната пластина към другата. И се получава, че изменението на **E** е свързано с тока именно така, че уравнението (1.9) се оказва изпълнено. Максвел е видял тази необходимост и е бил първият, който написва пълното уравнение.

С помощта на устройство, показано на фиг. 1-6, може да се демонстрира друг закон на електромагнетизма. Да изключим краищата на висящия проводник от батерийката и да ги съединим с галванометър — уред, който регистрира протичането на ток по проводника. Достатъчно е *да се заклати* проводникът в полето на магнита и по него веднага протича ток. Това е ново следствие от уравнението (1.1): електроните в проводника ще почувствуват действието на силата $\mathbf{F}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Скоростта им сега е насочена встрани, защото те се отклоняват заедно с проводника. Именно **v** заедно с вертикално насоченото поле **B** на магнита довежда до сила, която действува на електроните *по посоката* на проводника и електроните се отправят към галванометъра.

Да предположим, че сме оставили проводника в покой и започнем да преместваме магнита. Ние чувствуваме, че не би трябвало да има никаква разлика, тъй като относителното движение е едно и също, и наистина през галванометъра протича ток. Но как пък магнитното поле действува на заряди в покой? Съгласно с уравнение (1.1) трябва да възниква електрично поле. Движещият се магнит трябва да създава електрично поле. На въпроса как става това, отговаря количествено уравнение (1.7). Това уравнение описва голям брой много важни явления, които протичат в електричните генератори и трансформатори.

Най-забележителното следствие от нашите уравнения е това, че съчетавайки уравненията (1.7) и (1.9), може да се разбере защо електромагнитните явления се разпространяват на далечни разстояния. Причината за това, грубо казано, е приблизително такава: да предположим, че някъде има магнитно поле, което нараства по големина, например внезапно са пуснали ток по проводник. Тогава от уравнението (1.7) следва, че трябва да възникне циркулация на електричното поле. Когато електричното поле започне постепенно да нараства за възникване на циркулацията, тогава съгласно с уравнение (1.9) трябва да възникне и магнитна циркулация. Но нарастването на *това* магнитно поле създава нова циркулация на електричното поле и т. н. По такъв начин полетата се разпространяват през пространството, без да се нуждаят нито от заряди, нито от токове, освен източници на полета. Именно по такъв начин се *виждаме* един друг! Всичко това е скрито в уравненията на електромагнитното поле.

1-5. Какво е това „поле“?

Сега да направим няколко забележки за приетия от нас начин за разглеждане на въпроса. Вие можете да кажете: „Всичките тези потоци и циркулации са твърде много абстрактни. Нека във всяка точка на пространството има електрично поле и освен това са налице същите тези „закони“. Но какво *всъщност* става там?

Защо вие не можете да обясните всичко например с това, че нещо, каквото и да е, протича между зарядите?“ Всичко зависи от вашите предразсъдъци. Много физици често говорят, че прякото действие през вакуум, през нищото е немислимо. (Как те могат да нарекат идеята немислима, ако тя вече е измислена?) Те казват: „Единствените сили, които ни са известни, са прякото действие на една част от веществото на друга. Невъзможно е да съществува сила без нещо, което да я предава.“ Но какво всъщност става, когато изучаваме „прякото действие“ на едно парче вещество на друго? Ние установяваме, че първото от тях изобщо „не се допира“ до другото; те са леко отдалечени едно от друго и между тях съществуват електрични сили, които действуват в малък мащаб. С други думи, установяваме, че се каним да обясним така нареченото „действие чрез пряк контакт“ — с помощта на електричните сили. Разбира се, не е разумно да се опитваме да отстояваме твърдението, че електричната сила изглежда точно както старото привично мускулно дърпай-бутай, ако все пак се окаже, че всичките наши опити да дърпаме и бутаме довеждат до електрична сила. Единствената разумна постановка на въпроса е да се запитаме кой начин на разглеждане на електричните явления е *най-удобен.*

Едни предпочитат да ги представят като взаимодействие на заряди на разстояние и да се ползуват от сложни закони. На други им са по душа силовите линии. Те през цялото време ги чертаят и им се струва, че да се пишат разни **E** и **B** е твърде абстрактно. Но линиите на полето са твърде груб начин за описване на полето и е много трудно да се формулират строги, количествени закони непосредствено в термините на линиите на полето. При това понятието за линии на полето не съдържа най-дълбокият от принципите на електродинамиката — принципа на суперпозицията. Даже ако знаем как изглеждат силовите линии на една съвкупност от заряди, след това на друга съвкупност, въпреки това няма да получим никаква представа за картината на силовите линии, когато двете съвкупности от заряди действуват заедно. А от математическа гледна точка наслагването (суперпозицията) може да се направи лесно — трябва просто да се съберат два вектора. Силовите линии имат своите достойнства, те дават нагледна картина, но те имат и недостатъци. Начинът на разсъждения, основан на понятието за непосредствено взаимодействие (близкодействие), също притежава големи преимущества, докато става дума за заряди в покой, но притежава и големи недостатъци, ако имаме работа с бързи електрони.

Най-добре е да се ползуваме от абстрактната представа за полето. Жалко наистина, че то е абстрактно, но нищо не може да се направи. Опитите да се представи електричното поле като движение на някакви зъбчати колела или с помощта на силови линии или като напрежения в някакви материали изискваха повече усилия от физиците, отколкото бе необходимо, за да се получат просто правилните отговори на задачите на електродинамиката. Интересно е, че правилните уравнения за поведението на светлината в кристали са изведени от Мак-Кулох още в 1843 г. Но всички му говорили: „Извинете, но нали няма нито един реален материал, чиито механични свойства да удовлетворяват тези уравнения, а доколкото светлината е трептения, които трябва да стават *в нещо,* дотолкова не можем да повярваме на тези абстрактни уравнения.“ Ако у съвременниците му нямаше това предубеждение, те биха повярвали в правилните уравнения за поведението на светлината в кристали много по-рано, отколкото това наистина стана.

Що се отнася до магнитните полета може да се направи следната забележка. Да предположим, че в края на краищата ви се отдаде да нарисувате картината на магнитното поле с помощта на някакви линии или някакви зъбни колелета, които се движат през пространството. Тогава се опитвате да обясните какво става с два заряда, които се движат в пространството, успоредно един на друг и с еднакви скорости. Щом като се движат, те се проя-

вяват като два тока и притежават свързаното с тях магнитно поле (както токовете в проводниците на фиг. 1-8). Но наблюдателят, който се движи заедно с двата заряда, ще ги счита неподвижни и ще каже, че *никакво* магнитно поле няма. И „зъбчатите колела", и „линиите" пропадат, когато се движат заедно с предмета! Всичко, което сте постигнали, е, че сте изобретили *нова* проблема. Къде могат да отидат тези зъбчати колела?! Същата грижа ще се появи у вас, ако сте чертали силови линии. Не само не може да се определи движат ли се тези линии заедно със зарядите, или не, но и въобще те могат напълно да изчезнат в някаква координатна система.

Иска ни се още веднаж да подчертаем, че явлението магнетизъм е всъщност чисто релативистки ефект. В току-що разгледания случай на два заряда, движещи се успоредно един на друг, би могло да се очаква, че е необходимо да се направят релативистки поправки към движението им от порядъка на v^2/c^2. Тези поправки трябва да съответствуват на магнитната сила. Но какво ще стане със силата на взаимодействие на двата проводника в нашия опит (фиг. 1-8)? Та нали там *цялата* действуваща сила е магнитната. Тя не прилича толкова на „релативистка поправка". Освен това ако се оцени скоростта на електроните в проводника (вие сами можете да направите това), ще получите, че средната им скорост по проводника е около 0,01 cm/s. И така, v^2/c^2 е равно приблизително на 10^{-25}. Напълно пренебрежима „поправка". Но не! Макар в този случай магнитната сила да представлява 10^{-25} от „нормалната" електрична сила, която действува между движещите се електрони, спомнете си, че „нормалните" електрични сили са изчезнали в резултат на почти пълния баланс поради това, че количеството на протоните и електроните в проводниците е еднакво. Този баланс е много по-точен от $1/10^{25}$ и този малък релативистки член, който ние наричаме магнитна сила, е единственият оставащ член. Той става преобладаващ.

Почти пълното взаимно унищожаване на електрическите ефекти позволи на физиците да изучат релативистките ефекти (т. е. магнетизма) и да открият правилните уравнения (с точност до v^2/c^2), без да знаят даже какво става в тях. И поради това след откриване на принципа на относителността не се наложи законите на електромагнетизма да се изменят. За разлика от механиката те вече бяха правилни с точност до v^2/c^2.

1-6. Електромагнетизмът в науката и техниката

В заключение ми се иска да завърша тази глава със следното. Сред многото явления, изучавани от древните гърци, имало две много странни. Първото: е, че парче натрит кехлибар може да повдига парченца папирус и второто — близко до остров Магнезий е имало удивителни камъни, които привличали желязото. Странно е да се помисли, че това са били единствените явления, известни на гърците, в които са се проявявали електричеството и магнетизмът. Защо само това им е било известно, се обяснява преди всичко с приказната точност, с която са балансирани зарядите в телата (за което вече споменахме). Учените, живели в по-късни времена, разкриха едно след друго нови явления, в които се проявяваха някои нови страни на същите ефекти, свързани с кехлибара и с магнитния камък. Сега ни е ясно, че и явленията на химическо взаимодействие и в крайна сметка самият живот трябва да се обяснява с помощта на понятията на електромагнетизма.

И в зависимост от това, как се развиваше разбирането на предмета на електромагнетизма, се появяваха такива технически възможности, за които древните не можеха и да мечтаят: стана възможно да се изпращат сигнали по телеграфа на големи разстояния, да се беседва с човек, който се намира на много километри от вас без помощта на някакви свързващи линии, да се включват огромни енергетични системи — големи водни турбини, съединени с многокилометрови проводникови линии с друга ма-

шина, която пуска в ход работник с просто завъртане на ключ. Много хиляди разклоняващи се проводници и десетки хиляди машини на хиляди места привеждат в движение различни механизми във фабриките и къщите. Всичко това се върти, движи се, работи благодарение на нашето знание на законите на електромагнетизма.

Сега използуваме и още по-фини ефекти. Гигантските електрични сили може да бъдат също много малки, да се контролират и използуват за различни цели. Нашите уреди са така чувствителни, че сме способни да узнаем какво прави в момента човек само по това как той въздействува на електроните, заключени в тънка металическа пръчица на стотици километри от него. За това е необходимо само да се използува тази пръчица за телевизионна антена!

В историята на човечеството (ако се погледне на нея след десет хиляди години) най-значително събитие на XIX столетие несъмнено ще бъде откриването на законите на електродинамиката от Максвел. На фона на това важно научно откритие гражданската война в Америка в същото десетилетие ще изглежда като дребно провинциално произшествие.

2

Диференциално смятане на векторни полета

2-1. Разбиране на физиката

2-2. Скаларни и векторни полета — T и h

2-3. Производни на полетата — градиент

2-4. Операторът ∇

2-5. Операции с ∇

2-6. Диференциално уравнение за потока топлина

2-7. Втори производни на векторните полета

2-8. Подвеждания

Да се повтори: гл. 11 (том I) „Вектори“

2-1. Разбиране на физиката

Физикът трябва да притежава умението да подхожда от различни гледни точки към задачата. Точният анализ на реалните физични проблеми обикновено е крайно сложен и всяко конкретно физично явление може да се окаже твърде объркано и неподдаващо се на анализ чрез решаване на диференциални уравнения. Но все пак може да се получи добра представа за поведението на системата, като си изработим особена способност да чувствуваме характера на решенията при различни условия. За тази цел добре служат представите за линиите на полето, за капацитивно, индуктивно и активно съпротивление. Ние ще загубим достатъчно много време за тяхното изучаване. Това ще ни помогне да придобием способност да усещаме какво става при едни или други електромагнитни явления. От друга страна, нито един от спомагателните, евристични модели (например картината на силовите линии) всъщност не може да вмести в себе си адекватно и точно всички събития. Има само един точен метод за представяне на законите — методът на диференциалните уравнения. Уравненията притежават това преимущество, че, първо, са фундаментални и второ (доколкото ни е известно), са точни. Ако вие сте ги научили, винаги можете да се върнете към тях. В тях няма нищо, което би следвало след това да се забрави.

За да започнете да разбирате какво трябва да стане при едни или други условия, ще ви бъде необходимо известно време. Ще ви се наложи да порешавате уравнения и всеки път, когато ги решавате, вие узнавате нещо ново за характера на решенията. За да се запомнят тези решения, полезно е също да се формулира техният смисъл на езика на линиите на полето и други подобни понятия. Такъв е пътят, по който преминава истинското „разбиране“ на уравненията. В това се състои и разликата между физиката и математиката. Математиците или хората с математичен начин на мислене често при „изучаването“ на физиката загубват физиката и попадат в заблуждение. Те казват: „Тези диференциални уравнения — уравненията на Максвел — нали това е всичко, което има в електродинамиката; нали самите физици признават че няма нещо, което да не се съдържа в тези уравнения. Тези уравнения са сложни; добре, но това са само математични уравнения и ако аз се оправя с тях математично, ще се оправя и във физиката.“ Но от това не излиза нищо. Математиците, които подхождат от тази гледна точка към физиката (а такива има твърде много), обикновено не правят големи приноси във физиката, а между впрочем и в математиката. Те постигат неуспех поради това, че истинските физични ситуации на реалния свят са така заплетени, че трябва да се притежава значително по-широко разбиране на уравненията.

Дирак обясни какво значи наистина да се разберат уравненията — да се разберат, без да се ограничаваме само със строгия математичен смисъл. Той казва: „Аз считам, че съм разбрал смисъла на уравнението, ако съм в състояние да си представя общия вид на решението му, без да го решавам непосредствено.“ Значи ако имаме начин, чрез който да узнаем какво ще се случи при дадени условия, без да решаваме уравненията непосредствено, ние „разбираме“ уравненията, приложени към тези

условия. Физичното разбиране е нещо неточно, неопределено и абсолютно нематематично, но за физика е съвършено необходимо.

Обикновено курсът по физика от подобен вид се построява така, че физичните представи се развиват постепенно: като се започва от най-простите явления, преминава се към все по-сложни. Нещичко от изученото при това неминуемо се забравя (това, което е вярно само при определени условия, а не винаги). Например „законът" на обратните квадрати за електричната сила е верен *не винаги*. На нас повече ни харесва обратния подход. Подобре е да се започне с *пълните, най-общи* закони, а след това да се върнем назад и да ги приложим към прости задачи, като развиваме физичните представи с придвижването напред. Така се и каним да направим.

Нашият подход е съвършено противоположен на историческия подход, при който изложението сляпо следва експериментите, в които за първи път е била получена нужната информация. Но нали повече от 200 години много, много умни хора развиват физиката, а ние имаме малко време и ни е необходимо да овладеем знанията по-бързо. Поради това не можем да обхванем всичко, което те са направили. Така че в тези лекции ще бъдем принудени да пренебрегнем историята на предмета и не ще разказваме за опитите. Ние се надяваме, че ще попълните пропуснатото на лабораторните занятия; и, разбира се, много полезно е да се прочетат статии и книги по история на физиката.

2-2. Скаларни и векторни полета—T и h

Сега ще започнем разглеждането на абстрактния, математичен подход към теорията на електричеството и магнетизма. Нашата цел е да обясним смисъла на законите, написани в 1 глава. Но затова трябва първо да обясним новите особени означения, от които искаме да се ползуваме. Нека поради това за известно време да забравим за електромагнетизма и вникнем в математиката на векторните полета. Тя е важна не само в електромагнетизма, но и в много физични положения, така както обикновеното диференциално и интегрално смятане е важно във всички области на физиката. Ние преминаваме към диференциалното смятане на вектори.

По-долу са изброени някои сведения от векторната алгебра. Счита се, че с тях вече сте запознати

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\text{Скалар}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\text{Вектор} \tag{2.2}$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_z=A_xB_y-A_yB_x$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_x=\mathbf{A}_y\mathbf{B}_z-\mathbf{A}_z\mathbf{B}_y$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_y=A_zB_x-A_xB_z$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{A}=0 \tag{2.3}$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=0 \tag{2.4}$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \tag{2.6}$$

Също ще се ползуваме от следните две равенства

$$\Delta f(x,\ y,\ z)=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \tag{2.8}$$

Уравнението (2.7), разбира се, е в сила само при Δx, Δy и $\Delta z\to 0$.

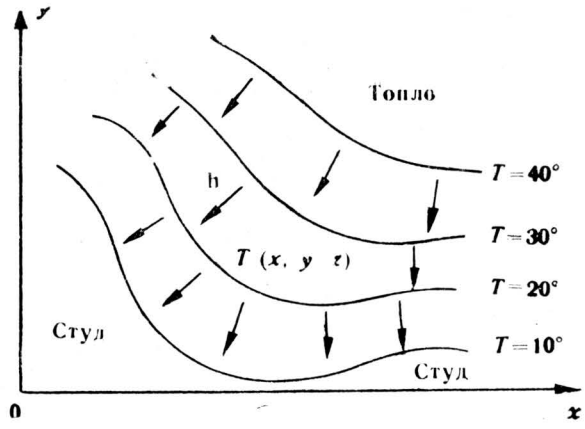
Как се пишат векторите ръкописно

Някои пишат така:

$\vec{E}$ или $\overrightarrow{E}$

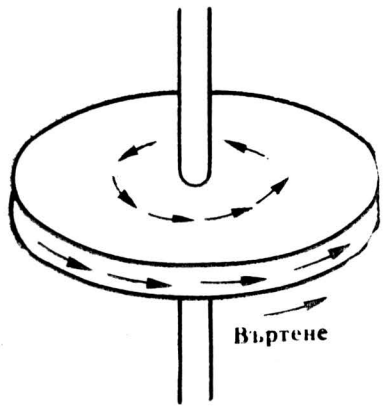
или просто $\underline{E}$.





Фиг. 2-1. Температурата T е пример за скаларно поле.

С всяка точка (x, y, z) в пространството се свързва числото $T(x, y, z)$. Всички точки на повърхността, отбелязана с $T=20^0$ (изобразена като крива при $z=0$), имат една и съща температура. Стрелките са примери за вектора на топлинния поток h

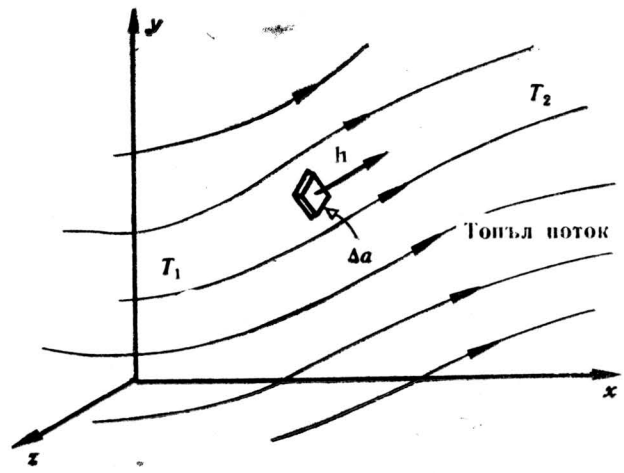


Фиг. 2-2. Скоростите на атомите във въртящо се тяло са пример на векторно поле

Най-простото от физичните полета е скаларното. Поле, както вие помните, се нарича величина, която зависи от положението в пространството. *Скаларното поле* е просто такова поле, което във всяка точка се характеризира с едно единствено число — скаларът. Това число, разбира се, може да се изменя с времето, но засега на това няма да обръщаме внимание. (Ще става дума как изглежда полето в даден момент.) Като пример да разгледаме трупче от някакъв материал. В едни места трупчето е нагрято, а в други—охладено, така че температурата се изменя от точка в точка по някакъв сложен начин. Температурата тогава ще бъде функция на x, y и z-положението в пространството, измерено в правоъгълна координатна система. Температурата е скаларно поле.

Един начин да си представим скаларното поле е да си представим „контури", т. е. мислени повърхности, прекарани през точките с еднаква големина на полето, подобно на хоризонталите на картите, съединяващи точки с еднаква височина над морското равнище. За температурното поле контурите се наричат „изотермични повърхнини" или изотерми. На фиг. 2-1 е показано температурно поле и зависимостта на T от x и y при $z=0$. Прекарани са няколко изотерми.

Полетата биват и векторни. Идеята им е много проста. Във всяка точка на пространството се задава вектор. Той се изменя от точка в точка. Да разгледаме като пример въртящо се тяло. Скоростта на всяка точка от тялото е вектор, който е функция на положението ѝ (фиг. 2-2). Друг пример е потокът на топлина в трупче от някакъв материал. Ако в едната част на трупчето температурата е по-висока, а в другата — по-ниска, от топлата част към студената ще тече поток топлина. Топлината в различните части на трупчето ще тече в различни посоки. Потокът на топлината е величина, която има посока; ще я означим



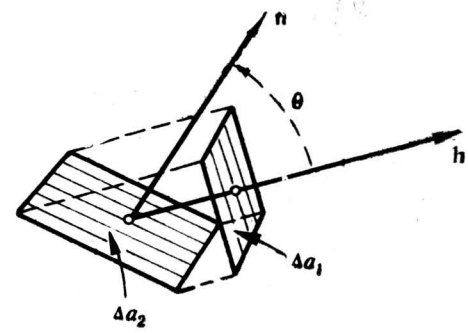
Фиг. 2-3. Топлинният поток е векторно поле.

Векторът h показва посоката на потока. Абсолютната му стойност изразява енергията, пренасяна за единица време през елемент на повърхнината, ориентирана перпендикулярно на потока, разделена на лицето на елемента на повърхнината

с **h**; нека дължината на този вектор измерва количеството топлина, която протича. Векторите на потока топлина са също показани на фиг. 2-1.

Сега да определим по-точно **h**. Дължината на вектора на потока топлина в дадена точка е количеството топлинна енергия, която протича за единица време за единица площ през безкрайно малък елемент на повърхността, перпендикулярна на посоката на потока. Векторът показва посоката на потока (фиг. 2-3). В буквени означения: ако ΔJ е топлинната енергия, която протича за единица време през елемент на повърхността Δa,

$$\mathbf{h} = \frac{\Delta J}{\Delta a}\,\mathbf{e}_f \tag{2.9}$$



Фиг. 2-4. Топлинните потоци през Δa_2 и Δa_1 са еднакви

където $\mathbf{e}_f$ е *единичният вектор* на посоката на потока.

Векторът **h** може да се определи и по друг начин — чрез неговите компоненти. Да си зададем въпроса колко топлина протича през малка повърхност под *произволен* ъгъл спрямо посоката на потока. На фиг. 2-4 сме изобразили малка повърхност Δa_2 под някакъв ъгъл спрямо повърхността Δa_1, която е перпендикулярна на потока. *Единичният вектор* **n** е перпендикулярен на повърхността Δa_2. Ъгълът θ между **n** и **h** е равен на ъгъла между повърхнините (тъй като **h** е нормалата към Δa_1). На какво е равен сега потокът топлина през Δa_2 *за единица площ*? Потоците през Δa_2 и Δa_1 са равни помежду си, различават се само по площта. Наистина $\Delta a_1 = \Delta a_2 \cos\theta$. Потокът топлина през Δa_2 е равен на

$$\frac{\Delta J}{\Delta a_2} = \frac{\Delta J}{\Delta a_1}\cos\theta = \mathbf{h}\cdot\mathbf{n} \tag{2.10}$$

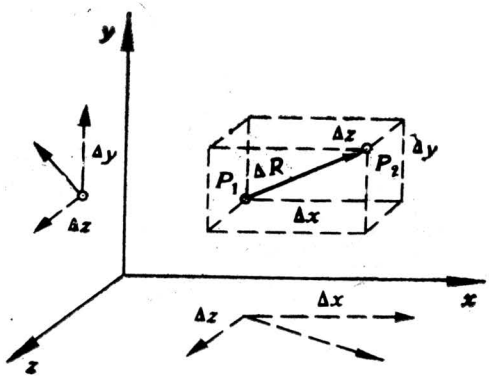
Да поясним това уравнение: потокът топлина (за единица време и на единица площ) през *произволен* елемент на повърхността с единична нормала **n** е **h** . **n**. Може да се каже още и така: компонентата на потока на топлина, перпендикулярна на елемента на повърхността Δa_2, е равна на **h** . **n**. Може, ако желаем, да считаме тези твърдения за *определение* на **h**. Подобни идеи ще приложим и за други векторни полета.

2-3. Производни на полетата — градиент

Когато полетата се изменят с времето, тяхното изменение може да се опише, като се зададат производните им по t. Ние искаме също да опишем и изменението им в пространството, защото се интересуваме от връзката например между температурата в някаква точка и в точката до нея. Как да се зададе производната на температурата по координата? Да се диференцира температурата по x? Или по y, или по z?

Осмислените физични закони не зависят от ориентацията на координатната система. Поради това те трябва да се пишат така, че от двете страни на знака равенство да стоят скалари или вектори. Какво е това производна на скаларно поле, да речем, $\partial T/\partial x$? Скалар ли е това, или вектор, или още нещо? Това, както е лесно да се разбере, не е нито едното, нито другото, защото ако се вземе друга ос x, $\partial T/\partial x$ се изменя. Но забележете: имаме три възможни производни — $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ и $\partial T/\partial z$. Три вида производни, а ние вече знаем, че са необходими именно три числа, за да се образува вектор. Може би тези три производни са и компоненти на вектор

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) = \text{вектор ли е това?} \tag{2.11}$$



Фиг. 2-5. Векторът $\Delta\mathbf{R}$ с компоненти Δx, Δy, Δz

Ясно е, разбира се, че изобщо казано не от *всеки* три числа може да се образува вектор. За вектор може да се говори само когато при завъртане на координатната система компонентите се преобразуват по правилен закон. Ще покажем, че (2.11) наистина е вектор. Производните наистина се преобразуват при въртене на координатната система така, както трябва.

В това можем да се убедим по различни начини. Може например да си зададем въпрос, чийто отговор не трябва да зависи от координатната система и да се опитаме да изразим отговора в „инвариантна" форма. Например ако $S = \mathbf{A}.\mathbf{B}$ и ако $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ са вектори, знаем (това е доказано в том I, гл. 11), че S е скалар. Ние *знаем*, че S е скалар, без да проверяваме изменя ли се той при изменение на координатната система. На него *нищо друго не му остава*, щом като е скаларно произведение на два вектора. По подобен начин, ако *знаем*, че $\mathbf{A}$ е вектор и имаме три числа B_1, B_2, B_3 и установим, че

$$A_x B_1 + A_y B_2 + A_z B_3 = S \tag{2.12}$$

(където S е едно и също в произволна координатна система), тези три числа B_1, B_2, B_3 са *задължени* да бъдат компоненти B_x, B_y, B_z на някакъв вектор $\mathbf{B}$.

Да разгледаме сега температурното поле. Да вземем две точки P_1 и P_2 на малко разстояние една от друга $\Delta\mathbf{R}$. Температурата в P_1 е T_1, а $P_2 - T_2$ и разликата им е $\Delta T = T_2 - T_1$. Разбира се, температурата в тези реални физични точки не зависи от това, какви оси сме избрали за измерване на координатите. Между впрочем ΔT е също число, което не зависи от координатната система. То е скалар.

Като изберем удобна координатна система, можем да напишем

$$T_1 = T(x, y, z) \text{ и } T_2 = T(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z),$$

където Δx, Δy, Δz са компонентите на вектора $\Delta\mathbf{R}$ (фиг. 2-5). Като си спомним (2.7), ще напишем

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial T}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial T}{\partial z}\Delta z. \tag{2.13}$$

Лявата страна на (2.13) е скалар, а дясната е сума от три произведения на някакви числа на Δx, Δy, Δz, които са компоненти на вектор. Значи трите числа

$$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$$

са също x, y и z-компоненти на вектор. Ще запишем този нов вектор с помощта на символа ∇T. Символът ∇ (наричан набла) е Δ обърната с краката нагоре; той ни напомня за диференциране. Четат ∇T различно: „набла T" или „градиент T", или „grad T":

$$\text{grad } T = \nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)^1 \tag{2.14}$$

С това означаване (2.13) се преписва в по-компактна форма

$$\Delta T = \nabla T . \Delta\mathbf{R}. \tag{2.15}$$

Или с думи: температурната разлика в две близки точки е скаларно произведение на градиента на T по вектора на преместване на втората

---

[1] В нашите означения *(a, b, c) представлява вектор с компоненти a, b, c*. Ако ви харесва да се ползувате от единичните вектори **i, j** и **k**, може да се напише

$$\nabla T = \mathbf{i}\frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial T}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial T}{\partial z}.$$

точка спрямо първата. Формата (2.15) също служи за илюстрация на нашето твърдение, че ∇T е наистина вектор.

Може би вие все още не сте убедени? Тогава ще докажем това по друг начин. (Макар че ако се вгледате по-внимателно, ще видите, че това всъщност е същото доказателство, само че по-дълго!) Ще покажем, че компонентите на ∇T се преобразуват абсолютно така, както и компонентите на **R**, а значи ∇T е също вектор в съответствие с първоначалното определение на вектор в том I, глава 11. Ще изберем нова координатна система x', y', z' и в нея ще изчислим $\partial T/\partial x'$, $\partial T/\partial y'$, $\partial T/\partial z'$. За простота ще положим $z=z'$, така че за третата координата можем да забравим. (Можете сами да се заемете с проверката на по-общия случай.)

Ще изберем системата x', y', завъртяна спрямо системата x, y на ъгъл θ (фиг. 2-6, *а*). Координатите на точката (x, y) в щрихованата система имат вида

$$x'=x\cos\theta+y\sin\theta, \tag{2.16}$$

$$y'=-x\sin\theta+y\cos\theta, \tag{2.17}$$

или като решим спрямо x и y,

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta, \tag{2.18}$$

$$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta. \tag{2.19}$$

Ако всяка двойка числа се преобразува така, както x и y, тя представлява компоненти на вектор.

Сега да разгледаме температурната разлика на две съседни точки P_1 и P_2 (фиг. 2-6, *б*). В координати x, y ще запишем

$$\Delta T=\frac{\partial T}{\partial x}\Delta x, \tag{2.20}$$

тъй като $\Delta y=0$.

А в щрихованата система? Там бихме написали

$$\Delta T=\frac{\partial T}{\partial x'}\Delta x'+\frac{\partial T}{\partial y'}\Delta y'. \tag{2.21}$$

Като гледаме на фиг. 2-6, *б*, виждаме, че

$$\Delta x'=\Delta x\cos\theta \tag{2.22}$$

$$\text{и}\quad \Delta y'=-\Delta x\sin\theta, \tag{2.23}$$

тъй като Δy е отрицателно при положително Δx. Като заместим в (2.21), получаваме

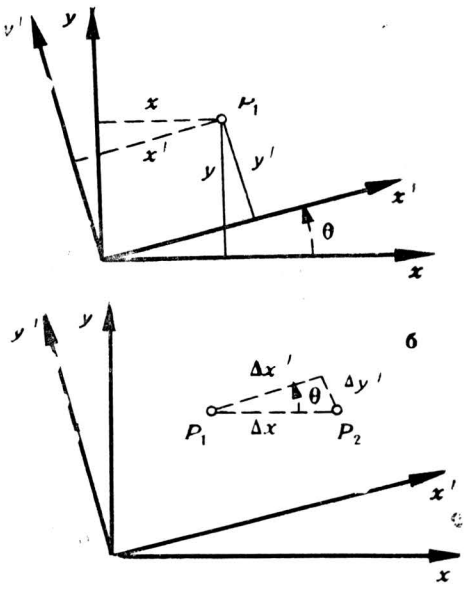
$$\Delta T=\frac{\partial T}{\partial x'}\Delta x\cos\theta-\frac{\partial T}{\partial y'}\Delta x\sin\theta= \tag{2.24}$$

$$=\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\cos\theta-\frac{\partial T}{\partial y'}\sin\theta\right)\Delta x. \tag{2.25}$$

Като сравняваме (2.25) с (2,20), виждаме, че

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial x'}\cos\theta-\frac{\partial T}{\partial y'}\sin\theta. \tag{2.26}$$

Това уравнение ни говори, че $\partial T/\partial x$ се получава от $\partial T/\partial x'$ и $\partial T/\partial y'$ точно така, както x от x' и y' в (2.18). Значи $\partial T/\partial x$ е x-компонента на вектора. Подобни разсъждения показват, че $\partial T/\partial y$ и $\partial T/\partial z$ са y- и z-компоненти. Следователно ∇T е наистина вектор. Това е векторно поле, образувано от скаларното поле T.



Фиг. 2-6. Преход към завъртяна координатна система (*а*) и частен случай на интервала $\Delta\mathbf{R}$, успореден на оста x (*б*)

2-4. Операторът ∇

А сега ще направим едно крайно интересно и остроумно нещо — едно от нещата, което украсява математиката. Доказателството, че grad T или ∇T е вектор, не зависи от това, *какво* скаларно поле диференцираме. Всички доводи биха останали в сила, ако бихме заменили T с *произволно скаларно поле*. Тъй като уравненията на преобразуване са еднакви независимо от това, какво се диференцира, може да се махне T и уравнението (2.26) да се замени с операторно уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cos\theta - \frac{\partial}{\partial y'} \sin\theta. \tag{2.27}$$

Както се е изразил Джинс, ние оставаме операторите, „страстно желаещи да диференцират каквото и да е".

Тъй като самите диференциални оператори се преобразуват както компонентите на векторното поле, може да ги наречем компоненти на *векторен оператор*. Може да се напише

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right); \tag{2.28}$$

това означава, разбира се,

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.29}$$

Ние абстрахирахме градиента от T — в това се състои и остроумието.

Разбира се, през цялото време трябва да помните, че ∇ е оператор. Сам за себе си той нищо не означава. Щом ∇ сам за себе си нищо не означава, какво ще стане, ако умножим *градиент* със скалар, например на T, за да се получи произведението $T\nabla$? (Нали вектор винаги може да се умножи със скалар.) Това отново нищо не значи. x-компонента на този израз е равна на

$$T\frac{\partial}{\partial x}, \tag{2.30}$$

а това не е число, а все още някакъв оператор. Обаче в съгласие с векторната алгебра $T\nabla$ както по-горе може да се нарече вектор.

А сега да умножим ∇ със скалар от другата страна. Получава се произведението ∇T. В обикновената алгебра

$$T\mathbf{A} = \mathbf{A}T, \tag{2.31}$$

но трябва да се помни, че операторната алгебра значително се различава от обикновената векторна. Трябва винаги да се поддържа правилен ред на операторите, за да имат смисъл операциите им. Тогава вие няма да имате трудности, ако си спомните, че операторът ∇ се подчинява на условията, на които се подчиняват производните. Това, което диференцирате, трябва да бъде поставено отдясно на ∇. Редът тук е съществен.

Ако се помни редът, веднага е ясно, че $T\nabla$ е оператор, а произведението ∇T вече не е „страстно жадуващ" оператор, неговата жажда е утолена. Това е физична величина, имаща смисъл. Той показва скоростта на пространствено изменение на T: x-компонентата на ∇T показва колко бързо се изменя T в посоката x. А накъде е насочен векторът ∇T? Ние знаем, че скоростта на изменение на T в някаква посока е компонентата на ∇T в тази посока [вж. (2.15)]. Оттук следва, че посоката на ∇T е тази, по която ∇T има най-дълга проекция; с други думи, тази, по която ∇T се изменя най-бързо. Посоката на градиента на T е посоката на най-бързо изменение на величината T.

2—5. Операции с ∇

Може ли с векторния оператор ∇ да се извършват други алгебрични действия? Ще се опитаме да го комбинираме с вектор. От два вектора може да се образува скаларно произведение, при това по два начина

$$(\text{вектор}).\ \nabla \quad \text{или} \quad \nabla.\ (\text{вектор}).$$

Първият израз засега нищо не означава — това е все още оператор. Окончателният му смисъл зависи от това, на какво ще действува. А второто произведение е някакво скаларно поле (защото **A. B** е винаги скалар).

Да се опитаме да образуваме скаларното произведение на ∇ с известно поле да речем с **h**. Да го напишем по компоненти

$$\nabla . \mathbf{h} = \nabla_x h_x + \nabla_y h_y + \nabla_z h_z, \tag{2.32}$$

или

$$\nabla.\mathbf{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} . \tag{2.33}$$

Тази сума е инвариантна спрямо преобразуването на координатите. Ако се избере друга система (отбелязана с щрих), би се получило[1]

$$\nabla'.\mathbf{h} = \frac{\partial h_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial h_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial h_{z'}}{\partial z'}, \tag{2.34}$$

а това е *същото число*, което би се получило и от (2.33), макар да има друг вид, т. е.

$$\nabla'.\mathbf{h} = \nabla.\mathbf{h} \tag{2.35}$$

във всяка точка на пространството. И така, $\nabla.\mathbf{h}$ е скаларно поле и трябва да представлява някаква физична величина. Вие трябва да разберете, че комбинацията в $\nabla.\mathbf{h}$ има доста специален вид. Може да има и други комбинации от всякакъв вид, да речем $\partial h_y/\partial x$, които не са нито скалари, нито векторни компоненти.

Скаларната величина $\nabla.$ (вектор) широко се прилага във физиката. На нея са ѝ присвоили името „дивергенция“ или „разходимост“. Например

$$\nabla . \mathbf{h} = \operatorname{div} \mathbf{h} = \text{„дивергенция на } \mathbf{h}\text{“}. \tag{2.36}$$

Би могло, както и за ∇T, да се опише физичният смисъл на $\nabla.\mathbf{h}$. Но това ще отложим за по-добри времена.

Първо да видим какво още може да се извлече от векторния оператор ∇. Как стои въпросът с векторно произведение? Може да се надяваме, че

$$\nabla \times \mathbf{h} = \text{вектор}. \tag{2.37}$$

Компонентите на този вектор може да се напишат, като се ползуваме от правилото за векторното произведение (вж. (2.2)):

$$(\nabla \times \mathbf{h})_z = \nabla_x h_y - \nabla_y h_x = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}. \tag{2.38}$$

Подобно на това

$$(\nabla \mathbf{h}) \times_x = \nabla_y h_z - \nabla_z h_y = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial x} \tag{2.39}$$

и

$$(\nabla \times h)_y = \nabla_z h_x - \nabla_x h_z = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \tag{2.40}$$

---

[1] Ние разглеждаме **h** като физична величина, която зависи от положението в пространството, а не като зададена математическа функция с три параметра. Когато **h** „се диференцира“ по x, y и z или по x', y' и z', математичният израз за **h** трябва да бъде предварително изразено във вид на функция на съответните променливи. Затова в новата координатна система не отбелязваме **h** с щрих.

Комбинацията $\nabla \times \mathbf{h}$ наричат „ротация“ (пишат rot **h**) или (рядко) „вихър **h**“ (пишат curl **h**). Произхода на това наименование и физичния смисъл на комбинацията ще обсъдим по-късно.

В резултат получаваме три вида комбинации, в които влиза ∇:

$$\nabla T = \text{grad } T = \text{вектор},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \text{div } \mathbf{h} = \text{скалар},$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{h} = \text{вектор}.$$

Като използуваме тези комбинации, пространствените вариации на полетата може да се записват в удобен вид, т. е. във вид, който не зависи от една или друга съвкупност от координатни оси.

Като пример за прилагане на нашия векторен диференциален оператор ∇ ще напишем съвкупност от векторни уравнения, в които се съдържат същите закони на електромагнетизма, които словесно изказахме в гл. 1. Тях ги наричат уравнения на Максвел.

Уравнения на Максвел

$$(1)\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$(2)\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (2.41)$$

$$(3)\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$(4)\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0},$$

където ρ (ро) е „плътността на електричния заряд“ (количество заряд в единица обем), а $\mathbf{j}$ — „плътността на електричния ток“ (скоростта на протичане на заряда през единица площ). Тези четири уравнения съдържат завършената класическа теория на електромагнитното поле. Виждате какво просто и елегантно записване постигнахме с помощта на нашите нови означения!

2-6. Диференциални уравнения на потока топлина

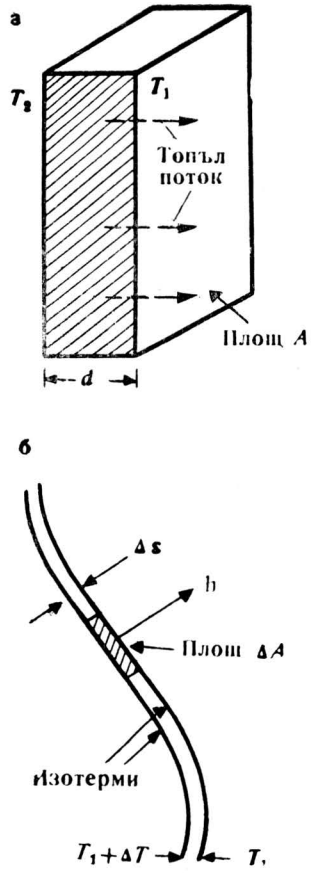
Ще приведем друг пример за векторно записване на физичен закон. Този закон не е от точните, но в много метали и други материали, които провеждат топлината, се проявява съвършено ясно. Известно е, че ако се вземе плоча от някакъв материал и се нагрее едната й страна до температура T_2, а другата се охлади до T_1, топлината ще потече от T_2 към T_1 (фиг. 2-7, *а*). Потокът топлина е пропорционален на площта на повърхнините A и на разликата на температурите. Освен това е обратно пропорционален на разстоянието между повърхнините. (За дадена температурна разлика колкото по-дебела е плочата, толкова по-мощен е потокът топлина.) Като означим с J топлинната енергия, която преминава през плочата за единица време, ще напишем

$$J = \varkappa (T_2 - T_1) \frac{A}{d}. \qquad (2.42)$$

Коефициентът на пропорционалност $\varkappa$ (капа) се нарича *топлопроводност.*

Какво ще стане в по-сложни случаи, например в блок от материал с необикновена форма, в който температурата се изменя по някакъв сложен начин? Да разгледаме тънък слой от материала и да си представим плоча, подобна на показаната на фиг. 2-7, *а*, но миниатюрна. Да ориентираме страните успоредно на изотермичните повърхнини (фиг. 2-7, *б*), така че за тази малка плоча да се изпълнява уравнение (2.42).

Ако площта на тази плоча е ΔA, потокът топлина за единица време е



Фиг. 2-7. Топлинният поток през плочка (*а*) и безкрайно малка плочка, успоредна на изотермичните повърхности в голям блок вещество (*б*)

$$\Delta J = \varkappa \Delta T \frac{\Delta A}{\Delta s}, \tag{2.43}$$

където Δs е дебелината на плочата. Но $\Delta J/\Delta A$ ние по-рано определихме като абсолютна стойност на $\mathbf{h}$ — вектора, насочен нататък, накъдето тече топлината. Топлината тече от $T_1+\Delta T$ към T_1, така че векторът $\mathbf{h}$ е перпендикулярен на изотермите (фиг. 2-7, б). От друга страна, $\Delta T/\Delta s$ е равно на бързината на изменение на T с изменението на положението. Тъй като измененията на положението са перпендикулярни на изотермите, нашето $\Delta T/\Delta s$ е максималната скорост на изменението. Поради това тя е равна на ∇T. На края щом посоките на ΔT и $\mathbf{h}$ са противоположни (2.43), може да се напише като векторно уравнение

$$\mathbf{h} = -\varkappa \nabla T \tag{2.44}$$

(знакът минус е написан, защото топлината тече в посоката на намаляване на температурата). Уравнението (2.44) е диференциално уравнение на топлопроводността в блок вещество. Виждате, че това е чисто векторно уравнение. От двете страни на равенството стоят вектори (ако $\varkappa$ е число). Това е обобщение за произволен случай на частното отношение (2.42) вярно за правоъгълна плоча.

Ние с вас трябва да се научим да пишем всички отношения на елементарната физика, подобни на (2.42) в тези остроумни векторни означения. Те са полезни не само за това, че уравненията започват да *изглеждат* по-просто. В тях много по-ясно се проявява *физичното съдържание* на уравненията независимо от избора на координатната система.

2-7. Втори производни на векторните полета

Досега имахме работа само с първите производни. А защо не и с вторите? От вторите производни може да се съставят няколко комбинации:

$$\begin{aligned} &\text{(а)}\ \nabla\cdot(\nabla T),\\ &\text{(б)}\ \nabla\times(\nabla T),\\ &\text{(в)}\ \nabla\,(\nabla\cdot\mathbf{h}),\\ &\text{(г)}\ \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{h}),\\ &\text{(д)}\ \nabla\times(\nabla\times\mathbf{h}). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Можете да се убедите, че никакви други комбинации не може да има.

Да разгледаме отначало втората комбинация (б). Тя има същата форма, както и

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{A}\,T) = (\mathbf{A}\times\mathbf{A})\,T = 0,$$

защото $\mathbf{A}\times\mathbf{A}$ е винаги нула. Значи

$$\text{rot}\ (\text{grad}\ \text{T}) = \nabla\times(\nabla)\,T = 0. \tag{2.46}$$

Как се получава това, може да се разбере, като се напише една от компонентите:

$$[\nabla\times(\nabla T)]_z = \nabla_x(\nabla T)_y - \nabla_y(\nabla T)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right), \tag{2.47}$$

което е равно на нула (според уравнение (2.8)). Същото е вярно и за другите компоненти. Следователно $\nabla\times(\nabla T)=0$ за всяко разпределение на температурите и даже за *всяка* скаларна функция.

Да вземем втори пример. Да видим не може ли да се получи нула по друг начин. Скаларното произведение на вектор по векторно произведение, което съдържа същия вектор, е равно на нула

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = 0, \tag{2.48}$$

защото $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ е перпендикулярно на $\mathbf{A}$ и няма компоненти, успоредни на $\mathbf{A}$. Подобна комбинация стои в списъка (2.45) под номер (г):

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{h})=\text{div}\ (\text{rot}\ \mathbf{h})=0. \tag{2.49}$$

Във верността на това равенство отново лесно може да се убедим, като го пресметнем в компоненти.

Сега ще формулираме без доказателство две теореми. Те са много интересни и твърде полезни за физици.

Във физичните задачи често се оказва, че ротацията на някаква величина (например на векторното поле $\mathbf{A}$) е равна на нула. Ние видяхме в уравнение (2.46), че ротация от градиент е равен на нула. (Това лесно се запомня по свойствата на векторите.) Понататък може да се окаже, че $\mathbf{A}$ е градиент на някаква величина, защото тогава по необходимост ротация $\mathbf{A}$ е нула. Има и интересна теорема, която твърди, че ако ротация $\mathbf{A}$ е нула, тогава $\mathbf{A}$ *непременно* се оказва *нечий* градиент; съществува някакво скаларно поле ψ (пси), такова, че $\mathbf{A}=\text{grad}\,\psi$. С други думи, в сила е

Теорема:

$$\begin{aligned}&\text{Ако} && \nabla\times\mathbf{A}=0\\ &\text{то има} && \psi,\\ &\text{такова, че} && \mathbf{A}=\nabla\ \psi.\end{aligned} \tag{2.50}$$

Подобна теорема се формулира и за случая, когато дивергенция $\mathbf{A}$ е нула. От уравнение (2.49) се вижда, че дивергенция на ротация от произволна величина е равна винаги на нула. Ако случайно сте срещнали векторно поле $\mathbf{D}$, за което div $\mathbf{D}$ е нула, вие имате право да заключите, че $\mathbf{D}$ е ротация на някакво векторно поле $\mathbf{C}$.

Теорема:

$$\begin{aligned}&\text{Ако} && \nabla\cdot\mathbf{D}=0\\ &\text{то има} && \mathbf{C},\\ &\text{такова, че} && \mathbf{D}=\nabla\times\mathbf{C}.\end{aligned} \tag{2.51}$$

Като преглеждаме всевъзможните комбинации на два оператора ∇, установихме, че две от тях винаги дават нула. Да се заемем сега с тези, които *не са равни* на нула. Да вземем комбинацията $\nabla\cdot(\nabla T)$, първата в нашия списък. В общия случай тя не е нула. Да напишем компонентите

$$\nabla T=\nabla_x T+\nabla_y T+\nabla_z T.$$

По-нататък

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla T)&=\nabla_x(\nabla_x T)+\nabla_y(\nabla_y T)+\nabla_z(\nabla_z T)=\\ &=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2},\end{aligned} \tag{2.52}$$

което може да бъде, изобщо казано, произволно число. Това е скаларно поле.

Вие виждате, че може да не се поставят скоби, а вместо това да се пише, без да рискуваме да сгрешим

$$\nabla\cdot(\nabla T)=\nabla\cdot\nabla T=(\nabla\cdot\nabla)T=\nabla^2 T. \tag{2.53}$$

Може да се разглежда ∇^2 като нов оператор. Това е скаларен оператор. Тъй като във физиката той се среща често, дали са му особено име — *лапласиан.*

$$\text{Лапласиан}=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\cdot \tag{2.54}$$

Щом операторът лапласиан е скаларен оператор, той може да действува и на вектор. Под това разбираме, че той се прилага към всяка компонента на вектора

$$\nabla^2\mathbf{h}=(\nabla^2 h_x,\ \nabla^2 h_y,\ \nabla^2 h_z).$$

Да разгледаме още една възможност: $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{h})$ [(д) в списъка (2.45)]. Ротация от ротация може да се напише по друг начин, ако се използува векторното равенство (2.6)

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}). \tag{2.55}$$

Да заменим в тази формула $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ с оператора ∇ и да положим $\mathbf{C}=\mathbf{h}$. Получава се

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{h})=\nabla(\nabla\mathbf{h})-\mathbf{h}(\nabla\,.\,\nabla)\ldots ???$$

Почакайте! Тук нещо не е в ред. Както и трябва да бъде, първите два члена са вектори (операторите уталожиха жаждата си), но последният член съвсем не е такъв. Той все още е оператор. Грешката е, че не бяхме бдителни и не спазихме необходимия ред на членовете. Като се върнете обратно, ще видите, че (2.55) може със същия успех да се напише във вида

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{C})-(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B})\mathbf{C}. \tag{2.56}$$

Такъв ред на членовете изглежда вече по-добре. Да направим нашето заместване в (2.56). Ще се получи

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{h})=\nabla(\nabla\,.\,\mathbf{h})-(\nabla\ldots.\nabla)\mathbf{h}. \tag{2.57}$$

С тази формула вече всичко е в ред. Тя наистина е правилна, в което можете да се убедите, като напишете компонентите. Последният член е лапласианът, така че със същия успех може да напишем

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{h})=\nabla(\nabla\,.\,\mathbf{h})-(\nabla^2\mathbf{h}) \tag{2.58}$$

От нашия списък (2.45) разгледахме всички комбинации на двойни ∇ освен (в), $\nabla(\nabla\,.\,\mathbf{h})$. В нея има смисъл, това е векторно поле, но повече нищо не може да се каже за нея. Това е просто векторно поле, което може случайно да възникне при някакви пресмятания.

Ще бъде удобно вече всички наши разсъждения да се сведат до таблица:

(а) $\nabla\,.\,(\nabla\,.\,T)=\nabla^2T=$ скаларно поле

(б) $\nabla\times(\nabla T)=0$

(в) $\nabla(\nabla\mathbf{h})=$ векторно поле

(г) $\nabla\,.\,(\nabla\times\mathbf{h})=0$

(д) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{h})=\nabla(\nabla\,.\,\mathbf{h})-\nabla^2\mathbf{h}$

(е) $(\nabla\,.\,\nabla)\,.\,\mathbf{h}=\nabla^2\mathbf{h}=$ векторно поле.

Вие бихте могли да забележите, че не се опитвахме да изобретим нов векторен оператор $\nabla\times\nabla$. Разбирате ли защо?

2-8. Клопки

Ние прилагахме нашите знания от обикновената векторна алгебра към алгебрата на оператора ∇. При това трябва да бъдем внимателни, иначе лесно ще сбъркаме. Трябва да се спомене за две клопки (впрочем в нашия курс те не се срещат). Какво можете да кажете за следния израз, в който влизат две скаларни функции ψ и φ (фи):

$$(\nabla\psi)\times(\nabla\varphi)?$$

Може да помислите, че това е нула, защото прилича на

$$(\mathbf{A}a)\times(\mathbf{A}b),$$

а това винаги е равно на нула (векторното произведение на два *еднакви* вектора $\mathbf{A}\times\mathbf{A}$ е винаги нула). Но в нашия пример двата оператора ∇ съвсем не са еднакви! Първият действува на една

функция, ψ, а вторият — на друга, φ. Макар че ги описваме с един и същ знак ∇, те трябва да се разглеждат като различни оператори. Посоката на $\nabla\psi$ зависи от функцията ψ, а посоката на $\nabla\varphi$ — от функцията φ, така че те не са длъжни да бъдат успоредни:

$$(\nabla\psi)\times(\nabla\varphi)\neq 0 \text{ (в общия случай).}$$

За щастие ние няма да прибягваме до такива изрази. (Но казаното от нас не променя фактът, че $\nabla\times\nabla\psi=0$ в произволно скаларно поле: тук двете ∇ действуват на една и съща функция.)

Клопка номер две (то също не се среща в нашия курс): правилата, които тук набелязахме, изглеждат просто и красиво само в правоъгълни координати. Например, ако искаме да напишем x-компонента на израза $\nabla^2\mathbf{h}$, ще напишем

$$(\nabla^2\mathbf{h})_x=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)h_x=\nabla^2 h_x. \tag{2.60}$$

Но този израз *не върши работа*, ако търсим *радиалната* компонента на $\nabla^2\mathbf{h}$. Тя не е равна на $\nabla^2 h_r$. Работата е в това, че във векторната алгебра всички посоки са напълно определени. А когато имаме работа с векторни полета, посоките им в различни места са различни. Когато се опитваме да опишем векторно поле, например в полярни координати, „радиалната“ посока се изменя от точка в точка. И ако започнете да диференцирате компонентите, вие просто можете да попаднете в беда. Даже в *постоянно* векторно поле радиалната компонента се изменя от точка в точка.

Обикновено е най-безопасно и най-просто да се придържаме към правоъгълни координати. Но си струва да се спомене и едно изключение: тъй като лапласианът ∇^2 е скалар, може да бъде написан в произволна координатна система (да речем в полярни координати). Но тъй като е диференциален оператор, може да го прилагаме само към вектори с фиксирана посока на компонентите, т. е. към зададени в правоъгълни координати. И така, като напишем нашите векторни деференциални уравнения по компоненти, предварително ще изразяваме всичките наши векторни полета чрез техните x-, y-, z-компоненти.

3

Интегрално смятане на вектори

3-1. Векторни интеграли; криволинеен интеграл от ∇ φ.

3-2. Поток на векторно поле

3-3. Поток от куб; теорема на Гаус

3-4. Топлопроводност; уравнение на дифузия

3-5. Циркулация на векторно поле

3-6. Циркулация по квадрат; теорема на Стокс

3-7. Полета без ротация и без дивергенции

3-8. Резултати

3-1. Векторни интеграли; криволинеен интеграл от ∇ φ

В предишната глава видяхме, че може по различен начин да вземаме производни от полето. Едни водят до векторни полета; други — до скаларни. Макар да бяха изведени много формули, всички те може да се обобщят в едно правило: операторите $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$ са три компоненти на векторния оператор ∇. Сега ни се иска да се ориентираме по-добре в стойностите на производните на полето. Тогава по-лесно ще почувствуваме смисъла на векторните уравнения на полето.

Вече говорихме за смисъла на операцията градиент (∇ по скалар). Да насочим вниманието си сега към смисъла на операциите за изчисляване на дивергенцията (разходимостта) и ротацията (вихъра). Тълкуването на тези величини е най-добре да се направи на езика на векторните интеграли и на уравненията, свързващи тези интеграли. Но тези уравнения за нещастие не може да се изведат от векторната алгебра с помощта на някакви прости заместявания, така че ще ви се наложи да ги учите като нещо ново. Една от тези интегрални формули е практически тривиална, а другите две — не. Ще ги изведем и ще изясним смисъла им. Тези формули фактически са математически теореми. Те са полезни не само при тълкуването на смисъла и съдържанието на понятията дивергенция и ротация, но и при разработването на общи физични теории. За теорията на полетата тези математически теореми имат същото значение каквото теоремата за запазване на енергията за механиката на частици. Подобни теореми от общ характер са много важни за по-дълбокото разбиране на физиката. Но вие ще видите, че с малки прости изключения те ни дават малко за решаването на задачите. За щастие тъкмо в началото на нашия курс много прости задачи ще се решават именно с тези три интегрални формули. По-късно обаче, когато задачите станат по-трудни, не ще можем да решим проблемите само с тези прости методи.

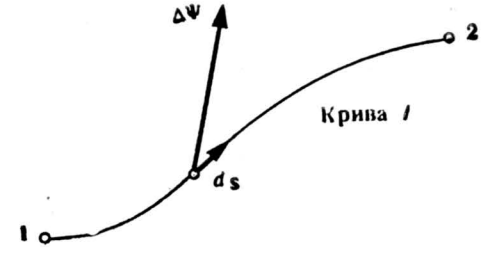
Ще започнем с тази интегрална формула, в която влиза градиент. Мисълта, която се съдържа в нея, е проста: щом градиентът е бързината на изменение на величините на полето, интегралът от тази бързина ще ни даде общото изменение на полето. Нека имаме скаларно поле $\psi(x, y, z)$. В две произволни точки (1 и 2) функцията ψ има съответно стойности ψ (1) и ψ (2). (Използува се следното удобно означение: (2) означава точката (x_2, y_2, z_2), а ψ (2) същото, което показва $\psi(x_2, y_2, z_2)$). Ако Г (гама) е произволна крива, съединяваща (1) и (2) (фиг. 3-1), в сила е

Теорема 1.

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} (\nabla \psi) \cdot d\mathbf{s}. \qquad (3.1)$$
$$\text{по } \Gamma$$

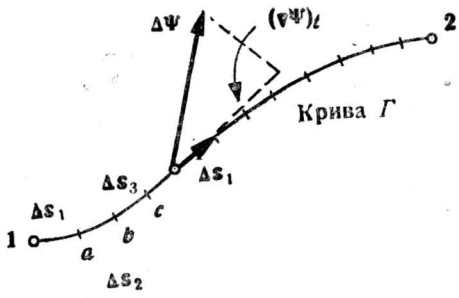
Интегралът, който стои тук, е *криволинеен интеграл* от (1) до (2) по кривата Г от скаларното произведение на вектора $\nabla \psi$ по друг вектор, $d\mathbf{s}$, който представлява безкрайно малък елемент от дъгата на кривата Г (насочен от (1) към (2)).

Ще напомним какво разбираме под криволинеен интеграл. Да разгледаме скаларната функция $f(x, y, z)$ и кривата Г, която съединява две точки (1) и (2). Да отбележим на кривата множество



Фиг. 3-1. Илюстрация на уравнението (3.1).

Векторът $\nabla\psi$ се изчислява за линейния елемент ds



Фиг. 3-2. Криволинейният интеграл е граница на сума

точки и да ги съединим с хорди както на фиг. 3-2. Дължината на i-тата хорда е равна на Δs_i, където i взема стойности 1, 2, ... Под криволинеен интеграл

$$\int_{(1)}^{(2)} f\, ds$$

се разбира границата на сумата по Г

$$\sum f_i \Delta s_i,$$

където f_i е стойността на функцията някъде на i-тата хорда. Границата е това, към което се стреми сумата, когато расте броят на хордите (по разумен начин, че даже най-голямата $\Delta s_i \to 0$).

В нашата теорема (3.1) интегралът означава същото, макар и да изглежда другояче. Вместо f стои друг скалар — слагаемата на $\nabla \psi$ по посока на $\Delta \mathbf{s}$. Ако се означи тази слагаема с $(\nabla \psi)_t$, ясно е, че

$$(\nabla \psi)_t \, \Delta s = (\nabla \psi) . \Delta \mathbf{s}. \tag{3.2}$$

Интергалът в (3.1) подразбира сума от такива членове.

Сега да видим защо уравнение (3.1) е правилно. В гл. 1 показахме, че слагаемата на $\nabla \psi$ по посока на малко преместване $\Delta \mathbf{R}$ е равна на бързината на изменение на ψ по посоката на $\Delta \mathbf{R}$. Да разгледаме хордата $\Delta \mathbf{s}$ от точката (1) до точката a на фиг. 3-2. По нашето определение

$$\Delta \psi_1 = \psi(a) - \psi(1) = (\nabla \psi)_1 . \Delta \mathbf{s}_1 \tag{3.3}$$

Точно на същото основание имаме

$$\psi(b) - \psi(a) = (\nabla \psi)_2 . \Delta \mathbf{s}_2, \tag{3.4}$$

където, разбира се, $(\nabla \psi)_1$ означава градиент, изчислен по хордата $\Delta \mathbf{s}_1$, а $(\nabla \psi)_2$ — градиент, изчислен по $\Delta \mathbf{s}_2$.
Като съберем (3.3) и (3.4), ще получим

$$\psi(b) - \psi(1) = (\nabla \psi)_1 . \Delta \mathbf{s}_1 + (\nabla \psi)_2 . \Delta \mathbf{s}_2. \tag{3.5}$$

Вие виждате, че като продължаваме да прибавяме такива членове, ще получим в крайна сметка

$$\psi(2) - \psi(1) = \sum (\nabla \psi)_i . \Delta \mathbf{s}_i. \tag{3.6}$$

Лявата страна не зависи от това, как се избират интервалите стига точките (1) и (2) да са същите, така че в дясната страна може да се извърши граничен преход. Така се доказва уравнение (3.1).

От нашето доказателство се вижда, че както равенството не зависи от избора на точките a, b, c. ..., точно така не зависи и от избора на самата крива Г. Теоремата е вярна за *произволна* крива, която съединява точките (1) и (2).

Две думи за означенията. Няма да има объркване, ако се пише за удобство

$$(\nabla \psi) . d\mathbf{s} = \nabla \psi . d\mathbf{s}. \tag{3.7}$$

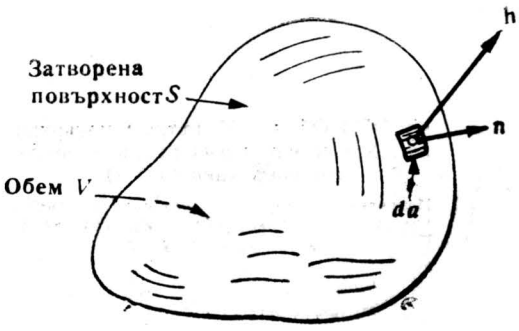
Тогава нашата теорема приема следния вид:

Теорема 1

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} \nabla \psi . d\mathbf{s} \tag{3.8}$$

за произволна крива,
съединяваща точките (1) и (2).

3-2. Поток на векторно поле



Фиг. 3-3. Затворената повърхнина S, ограничаваща обема V.

Единичният вектор **n** е външната нормала към елемента на повърхнината da, а **h** е векторът на топлинния поток през елемента на повърхнината

Преди да разгледаме следващата интегрална теорема — теоремата за дивергенцията — иска ни се да разгледаме една идея, чийто смисъл в случая за топлинен поток лесно се усвоява. Вече определихме векторът **h**, който представлява количеството топлина, което протича през единица площ за единица време. Да предположим, че вътре в тялото има затворена повърхност S, която ограничава обема V (фиг. 3-3). Иска ни се да узнаем колко топлина изтича от този *обем*. Разбира се, това може да определим, като пресметнем общия топлинен поток през *повърхността* S.

Да означим с da площта на елемент от повърхността. Този символ заменя двумерния диференциал. Ако например елементът се окаже в равнината xy,

$$da = dx\, dy.$$

По-късно ще ни се наложи да имаме работа с интеграли по обем и тогава ще бъде удобно да се разглежда елементът на обема като малък куб, да се означи с dV, като разбираме, че

$$dV = dx\ dy\ dz.$$

Някои пишат и d^2a вместо da, за да си спомнят, че този израз е от втора степен; вместо dV пишат също и d^3V. Ние ще се ползуваме от по-простите означения, а вие се постарайте да не забравяте, че площите имат две измерения, а обемите — три.

Потокът топлина през елемента на повърхността da е равен на произведението на площта по компонентата на **h**, перпендикулярна към da. Ние вече определяхме **n** -единичния вектор, насочен навън и перпендикулярно към повърхността (вж. фиг. 3-3). Търсената слагаема на **h** е равна на

$$h_n = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \tag{3.9}$$

и тогава потокът топлина през da е равен на

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}\ da. \tag{3.10}$$

Целият поток топлина през произволна повърхнина се получава чрез сумиране на приносите от всички елементи на повърхността. С други думи, (3.10) се интегрира по цялата повърхнина

$$\begin{matrix}\text{Пълният поток}\\ \text{през } S \text{ навън}\end{matrix} = \int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}\ da. \tag{3.11}$$

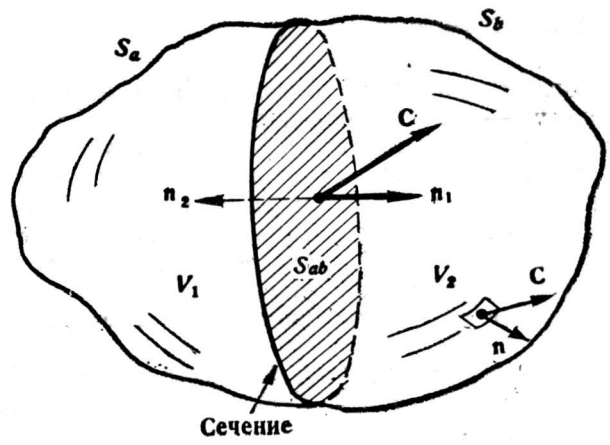
Този интеграл ще наричаме „поток на **h** през повърхност“. Ние разглеждаме **h** като „плътност на потока“ топлина, а повърхностният интеграл от **h** е общият поток топлина навън през повърхнината, т. е. топлинната енергия за единица време (джаули в секунда).

Искаме да обобщим тази идея за случай, когато векторът не е поток на някаква величина, а е например електрично поле. Разбира се, ако това е необходимо, и в този случай можем да интегрираме нормалната слагаема на електричното поле по площта. Макар тя сега вече да не е поток на някаква величина, ще употребяваме думата „поток“. Ще говорим, че

$$\text{Потокът } \mathbf{E} \text{ през повърхнината } S = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\ da. \tag{3.12}$$

На думата „поток“ придаваме смисъл на „повърхнинен интеграл от нормалната компонента“ на някакъв вектор. Същото определение ще се прилага и тогава, когато повърхността не е затворена.

Като се върнем към частния случай на поток топлина, да обърнем внимание на случаите, при които *количеството топлина се запазва*. Представете си например материал, в който след



Фиг. 3-4. Обемът V вътре в повърхнината S се дели на две части „със сечение" (от повърхнината S_{ab}).

Получава се обемът V_1, ограничен от повърхнината $S_1=S_a+S_{ab}$, и обемът V_2, ограничен от повърхнината $S_2=S_b+S_{ab}$

първоначално нагряване няма по-нататъшно провеждане и поглъщане на топлина. Тогава, ако от някоя затворена повърхнина навън постъпва топлина, съдържанието на топлината във вътрешния обем трябва да пада. Така че в условията, когато количеството топлина се запазва, казваме, че

$$\int_S \mathbf{h}\cdot\mathbf{n}\ da = -\frac{dQ}{dt}, \tag{3.13}$$

където Q е запасът топлина вътре в S. Потокът топлина от S навън е равен със знак минус на бързината на изменението във времето на общия запас топлина Q вътре в S. Това тълкуване е възможно, поради това че става дума за поток топлина и поради това че предположихме, че количеството топлина се запазва. Разбира се, ако в обема би се създавала топлина, не би могло да се говори за пълен запас на топлината в него.

Ще обърнем внимание на едно интересно свойство на потока на произволен вектор. При това може да си представяте вектора на потока на топлината, но това ще бъде вярно и за произволно векторно поле **C**. Да си представим затворена повърхнина S, която окръжава обема V. Да разделим с някакво „сечение" обема на две части (фиг. 3-4). Получиха се два обема и две затворени повърхнини. Обемът V_1 е окръжен от повърхнината S_1, съставена от част от предишната повърхнина S_a и част от „сечението" S_{ab}. Обемът V_2 е окръжен от повърхнината S_2, съставена от остатъка от предишната повърхнина (S_b) и от затворената повърхнина S_{ab}. Да зададем въпроса: ако пресметнем потока през повърхнината S_1 и прибавим към него потока през S_2, ще бъде ли тяхната сума равна на потока през първоначалната повърхнина? Отговорът гласи: „Да". Потоците през частта S_{ab}, обща и за двете повърхнини S_1 и S_2, точно се съкращават. За потока на вектора **C** от V_1 може да се напише

$$\text{Потокът през } S_1 = \int_{S_a} \mathbf{C}\cdot\mathbf{n}\ da + \int_{S_{ab}} \mathbf{C}\cdot\mathbf{n}_1\ da, \tag{3.14}$$

а за потока от V_2:

$$\text{Потокът през } S_2 = \int_{S_b} \mathbf{C}\cdot\mathbf{n}\ da + \int_{S_{ab}} \mathbf{C}\cdot\mathbf{n}_2\ da. \tag{3.15}$$

Забележете, че във втория интеграл означихме външната нормала към S_{ab} с буквата $\mathbf{n}_1$, ако тя се отнася за S_1, и с буквата $\mathbf{n}_2$, ако се отнася за S_2 (вж. фиг. 3-4) Ясно е, че $\mathbf{n}_1=-\mathbf{n}_2$ и оттам

$$\int_{S_{ab}} \mathbf{C}\cdot\mathbf{n}_1\ da = -\int_{S_{ab}} \mathbf{C}\cdot\mathbf{n}_2\ da. \tag{3.16}$$

Като съберем сега уравненията (3.14) и (3.15), убеждаваме се, че сумата от потоците през S_1 и S_2 е точно равна на сумата от

двата интеграла, които, взети заедно, дават потока през първоначалната повърхнина $S=S_a+S_b$.

Виждаме, че потокът през цялата външна повърхнина S може да се разглежда като сума от потоците на тези две части, на които е разрязан обемът. Тези части може още да се разрежат: например V_1 да се раздели на две. Отново се налага да прибягваме до същите доводи. Така, че за *произволен* начин на разделяне на обема винаги остава в сила свойството, че потокът през външната повърхнина (първоначалният интеграл) е равен на сумата от потоците от всички вътрешни части.

3-3. Поток от куб; теорема на Гаус

Да разгледаме сега частния случай на поток от малко кубче[1] и ще получим интересна формула. Нека ребрата на куба са насочени по координатните оси (фиг. 3-5), координатите на върховете, най-близки до началото са x, y, z, реброто на куба по x да е равно на Δx, реброто на куба (по-точно на блокчето) по $y-\Delta y$, а по $z-\Delta z$. Искаме да намерим потока на векторното поле **C** през повърхнината на куба. За това ще изчислим сумата на потоците през всичките шест стени. Ще започнем със стена 1 (вж. фиг. 3-5). Потокът *навън* през нея е равен на x-компонентата на **C** с минус, интегрирана по площта на стената. Той е

$$-\int C_x\,dy\,dz.$$

Тъй като кубът се счита за *малък,* този интеграл може да се замени със стойността C_x в центъра на стената [тази точка сме означили с (1)], умножена с площта на стената $\Delta y\Delta z$:

$$\text{Потокът през 1 навън } = -C_x(1)\,\Delta y\Delta z.$$

По подобен начин потокът през стената 2 е равен на

$$\text{Потокът през 2 навън } = C_x(2)\,\Delta y\Delta z.$$

Величините $C_x(1)$ и $C_x(2)$, изобщо казано, малко се различават. Ако Δx е достатъчно малко, може да се напише

$$C_x(2)=C_x(1)+\frac{\partial C_x}{\partial x}\,\Delta x.$$

Съществуват, разбира се, и други членове, но в тях влизат $(\Delta x)^2$ и по-високи степени на Δx и в граничния преход на малки Δx те просто могат да се пренебрегнат. Значи потокът през стената 2 е

$$\text{Потокът през 2} = \left[C_x(1)+\frac{\partial C_x}{\partial x}\,\Delta x\right]\Delta y\,\Delta z.$$

Като съберем потоците през стените 1 и 2, получаваме

$$\text{Потокът през 1 и 2 навън} = \frac{\partial C_x}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

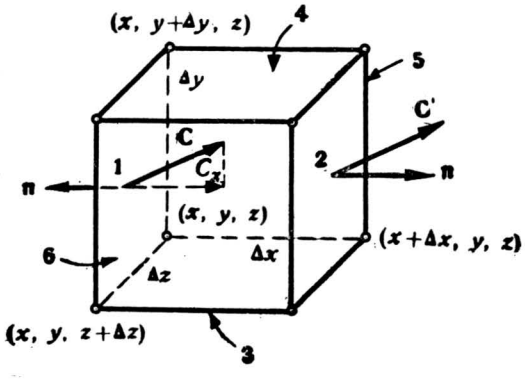
Производната трябва да се изчислява в центъра на стената 1, т. е. в точката $(x,\ y+(\Delta y/2),\ z+(\Delta z/2))$. Но ако кубът е много малък, ще направим пренебрежимо малка грешка, ако я изчислим във върха $(x,\ y,\ z)$.

Като повторим същите разсъждения за всяка двойка стени, получаваме

$$\text{Потокът през 3 и 4 навън } = \frac{\partial C_y}{\partial y}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z,$$

а

$$\text{Потокът през 5 и 6 навън } = \frac{\partial C_z}{\partial z}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$



Фиг. 3-5. Изчисляване на потока на вектора **C** от малко кубче

[1] Разбира се, следващите пресмятания напълно се отнасят и за произволен правоъгълен паралелепипед.

Общият поток през всички стени е равен на сумата на тези членове. Установяваме, че

$$\int_{\text{по повърхността на куба}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da = \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) \Delta x \, \Delta y \, \Delta z.$$

Сумата от производните в скобите е точно $\nabla \cdot \mathbf{C}$, а $\Delta x \, \Delta y \, \Delta z = \Delta V$ (обемът на куба). По такъв начин можем да твърдим, че *за безкрайно малък куб*

$$\int_{\text{повърхнина}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da = (\nabla \cdot \mathbf{C}) \Delta V. \tag{3.17}$$

Показахме, че потокът навън от повърхнина на безкрайно малък куб е равен на произведението на дивергенцията на вектора и обема на куба. Сега разбираме „смисъла“ на понятието дивергенция на вектор. Дивергенция на вектор в точка P е потокът на $\mathbf{C}$ („изтичането“ на $\mathbf{C}$ навън) *за единица обем,* взет в околността на P.

Ние свързахме дивергенцията на $\mathbf{C}$ с потока на $\mathbf{C}$ от безкрайно малък обем. За произволен краен обем може да се използува фактът, доказан по-горе, че сумата от потоците от обемните части е равна на сумарния поток от целия обем. С други думи, можем да интегрираме дивергенцията по целия обем. Това ни довежда до теорема, съгласно с която интегралът от нормалната слагаема на произволен вектор по затворена повърхнина може да бъде представен също във вид на интеграл по обема, ограничен от тази повърхнина. Тази теорема се нарича теорема на Гаус.

Теорема на Гаус

$$\int_S \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{C} dV, \tag{3.18}$$

където S е произволна затворена повърхнина, V — обемът вътре в нея.

3-4. Топлопроводност; уравнение на дифузия

За да свикнем с теоремата, ще разгледаме примери, в които се вижда как тя се прилага. Да се върнем отново на разпространението на топлината например в метал. Ще разгледаме съвсем прост случай: цялата топлина е предадена на тялото предварително, а сега тялото изстива. Източници на топлина няма, така че количеството топлина се запазва. Колко топлина трябва да има тогава в някакъв определен обем в някакъв момент? Тя трябва да се *намалява* точно с количеството, което напуска повърхнината на обема. Ако този обем е малко кубче, по формула (3.17) може да се напише

$$\text{Потокът топлина навън} = \int_{\text{куба}} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da = \nabla \cdot \mathbf{h} \Delta V. \tag{3.19}$$

Но това трябва да бъде равно на скоростта на загуба на топлина от вътрешността на куба. Ако q е количеството топлина в единица обем, целият запас топлина в куба е $q\Delta V$, а скоростта на *загубата* е равна на

$$-\frac{d}{dt}(q\Delta V) = -\frac{dq}{dt}\Delta V. \tag{3.20}$$

Като сравним (3.19) с (3.20), виждаме, че

$$-\frac{dq}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{h}. \tag{3.21}$$

Вгледайте се внимателно във формата на това уравнение; тази форма често се среща във физиката. Тя изразява закон за запазване, в дадения случай закон за запазване на топлината. В уравнение (3.13) същият физичен факт беше изразен по друг начин. Там е *интегрална* форма на уравнението за запазване, а тук — *диференциална*.

Уравнението (3.21) получихме, като приложихме формула (3.13) към безкрайно малък куб. Може да се тръгне и по друг път. За голям обем V, ограничен от повърхнината S, законът на Гаус твърди, че

$$\int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da = \int \nabla \cdot \mathbf{h} \, dV. \tag{3.22}$$

Интегралът в дясната страна, като се използува (3.21), може да се преобразува във вида — dQ/dt и тогава се получава формула (3.13).

Сега да разгледаме друг случай. Да си представим, че в блока от вещество има малка дупчица, а в него протича химична реакция, която генерира топлина. Може да си представим още, че към малко съпротивление вътре в блока са прокарани проводници, които го нагряват с електричен ток. Да предположим, че топлината се създава практически в една точка, а W е енергията, която възниква в тази точка за секунда. В останалата част на обема нека топлината се запазва и освен това нека генерацията на топлина да е започнала толкова отдавна, че сега температурата повече никъде не се изменя. Въпросът се състои в следното: как ще изглежда векторът на потока топлина $\mathbf{h}$ в различните точки на метала? Колко топлина протича през всяка точка?

Знаем, че ако интегрираме нормалната компонента на $\mathbf{h}$ по затворена повърхнина, която окръжава източника, винаги ще получим W. Цялата топлина, генерирана в точковия източник, трябва да протече през повърхнината, защото се предполага, че потокът е постоянен. Пред нас е трудната задача за намирането на такова векторно поле, което след интегрирането по произволна повърхнина винаги да дава W. Но ние сравнително лесно можем да намерим такова поле, като изберем повърхнина от специален вид. Да изберем сфера с радиус R и център в източника и да предположим, че потокът топлина е радиален (фиг. 3-6). Интуицията ни подсказва, че $\mathbf{h}$ трябва да бъде насочен по радиуса, ако блокът вещество е голям и не се приближаваме твърде близко до границите му; освен това големината на $\mathbf{h}$ във всички точки на сферата трябва да бъде еднаква. Виждате, че за да получим отговора, към нашите пресмятания сме принудени да прибавим известно количество догадки (обикновено това се нарича „физична интуиция“).



Фиг. 3-6. В областта близо до точков източник топлинният поток е насочен по радиуса навън

Когато $\mathbf{h}$ е радиално и сферически симетрично, интегралът от нормалната слагаема на $\mathbf{h}$ по площта на повърхнината се изчислява много просто, защото нормалната слагаема е точно равна на $\mathbf{h}$ и е постоянна. Площта, по която се интегрира, е равна на $4\pi R^2$. Тогава получаваме

$$\int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da = h 4\pi R^2, \tag{3.23}$$

където h е абсолютната стойност на $\mathbf{h}$. Този интеграл трябва да бъде равен на W — скоростта, с която източникът генерира топлина. Получава се

$$h = \frac{W}{4\pi R^2}$$

или

$$\mathbf{h} = \frac{W}{4\pi R^2} \mathbf{e}_r, \tag{3.24}$$

където както винаги $\mathbf{e}_r$ означава единичния вектор в радиална

посока. Този резултат ни говори, че $\mathbf{h}$ е пропорционален на W и се изменя обратно на квадрата от разстоянието до източника.

Току-що полученият резултат е приложим към поток топлина близко до точковия топлинен източник. Сега да се опитаме да намерим уравнения, които са в сила за топлинен поток от най-общ вид (като се придържаме към единственото условие, че количеството топлина трябва да се запазва). Ще ни интересува само какво става в местата извън всякакви източници и поглъщатели на топлина.

Диференциалното уравнение за разпространението на топлината беше получено в гл. 2. В съответствие с уравнение (2.44),

$$\mathbf{h} = -\varkappa \nabla T. \tag{3.25}$$

(Помнете, че това съотношение е приблизително, но за някои вещества, като металите, се спазва не лошо.) То е приложимо, разбира се, само за онези части на тялото, където няма нито отделяне, нито поглъщане на топлина. По-горе изведохме друго отношение (3.21), което се изпълнява тогава, когато количеството топлина се запазва. Ако комбинираме това уравнение с (3.25), ще получим

$$-\frac{dq}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{h} = -\nabla \cdot (\varkappa \nabla T)$$

или

$$\frac{dq}{dt} = \varkappa \nabla \cdot \nabla T = \varkappa \nabla^2 T, \tag{3.26}$$

ако $\varkappa$ е постоянна величина. Ще напомня, че q е количеството топлина в единица обем, а $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ — лапласианът, т. е. операторът

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Ако сега направим още едно допускане, изведнаж ще възникне едно твърде интересно уравнение. Да допуснем, че температурата на материала е пропорционална на количеството топлина в единица обем, т. е. че материалът има определена специфична топлоемност. Когато това допускане е вярно (а често бива така), можем да напишем

$$\Delta q = c_v \Delta T$$

или

$$\frac{dq}{dt} = c_v \frac{dT}{dt}. \tag{3.27}$$

Скоростта на изменение на количеството топлина е пропорционална на скоростта на изменение на температурата. Коефициентът на пропорционалност c_v тук е специфичната топлоемност на единица *обем* от материала. Като заместим (3.27) в (3.26), получаваме

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\varkappa}{c_v} \nabla^2 T. \tag{3.28}$$

Установихме, *че бързината на изменение на температурата с времето* във всяка точка е пропорционална на лапласиана от T, т. е. на втората производна от пространственото разпределение на температурите. Имаме диференциално уравнение — в променливи x, y, z и t — за температурата T.

Диференциалното уравнение (3.28) се нарича *уравнение за дифузията на топлината* или *уравнение на топлопроводността.* Често се пише във вида:

$$\frac{dT}{dt} = D \nabla^2 T, \tag{3.29}$$

където D е константа. Тя е равна на $\varkappa / c_v$.

Уравнението на дифузията се появява в много физични задачи: за дифузия на газове, дифузия на неутрони и други. Ние вече обсъждахме физиката на някои такива явления в гл. 43 на том I. Сега пред вас е пълното уравнение, описващо дифузията в най-общ вид. Малко по-късно ще се занимаем с решаването на уравнението на дифузия, за да видим как ще се разпределя температурата в някои случаи. А сега да се върнем към разглеждането на други теореми за векторните полета.

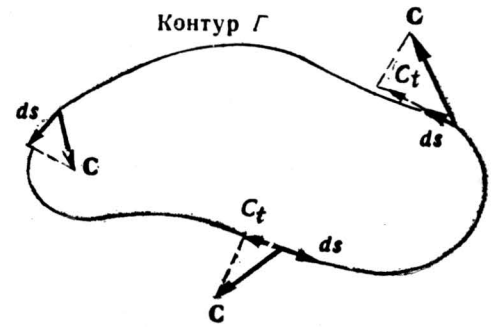
3-5. Циркулация на векторното поле

Сега искаме да разгледаме ротацията на полето приблизително така, както разгледахме дивергенцията. Изведохме теоремата на Гаус, като изчислихме интеграл по повърхнина макар отнапред съвсем да не беше ясно, че ще имаме работа с дивергенцията. Откъде пък можехме да знаем, че за получаването ѝ трябва да се интегрира по повърхнина? Този резултат въобще не беше очевиден. И точно толкова неоправдано сега ще изчислим друга характеристика на полето и ще покажем, че тя е свързана с ротация. Този път ще пресметнем така наречената циркулация на векторното поле. Ако **C** е произволно векторно поле, ще вземем компонентата му по крива линия и ще интегрираме тази компонента по затворен контур. Интегралът се нарича *циркулация* на векторното поле по контура. Ние вече разглеждахме в тази глава криволинейния интеграл от $\nabla\phi$. Сега ще направим същото с *произволно* векторно поле **C**.

Нека Г е произволен затворен контур в пространството (въображаем, разбира се). Примера виждаме на фиг. 3-7. Криволинейният интеграл от тангентната компонента на **C** по контура се записва във вида:

$$\oint_{\Gamma} C_t ds = \oint_{\Gamma} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s}. \tag{3.30}$$

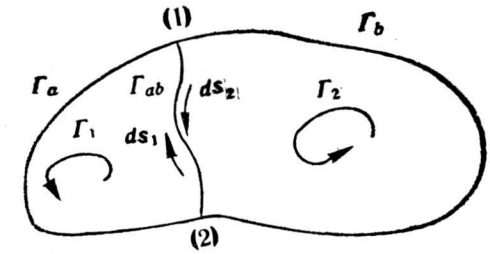
Забележете, че интегралът се взема по целия затворен път, а не от една точка до друга, както се правеше по-рано. Кръгчето на знака на интеграла трябва да ви напомня за това. Такъв интеграл се нарича циркулация на векторното поле по кривата Г. Наименованието е свързано с това, че първоначално така са пресмятали циркулацията на течност. Но това наименование, както и потокът, е разпространено върху произволни полета, даже такива, в които няма какво да „циркулира".



Фиг. 3-7. Циркулацията на вектора **C** по кривата Г е криволинейният интеграл от C_t (тангенциална компонента на **C**)

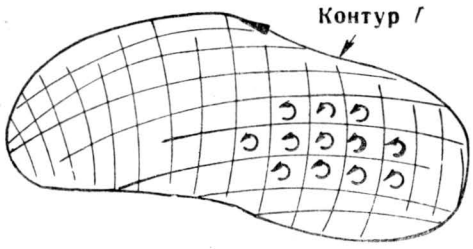
Като се забавляваме със същата игра както при потока, може да покажем, че циркулацията по контур е сума от циркулации по два по-малки контура. Да предположим, че като съединим две точки (1) и (2), сме разделили първоначалната крива на два контура Γ_1 и Γ_2 с помощта на някаква крива (фиг. 3-8). Контурът Γ_1 се състои от Γ_a — частта от първоначалната крива наляво от (1) и (2) и „съединението" Γ_{ab}. Контурът Γ_2 се състои от остатъка от първоначалната крива плюс същото съединение.

Циркулацията по Γ_1 е сума от интеграла по Γ_a и по Γ_{ab}. По същия начин циркулацията по Γ_2 е сума от две части, едната по Γ_b, другата — по Γ_{ab}. Интегралът по Γ_{ab} за кривата Γ_2 има знак, противоположен на знака, който има за кривата Γ_1, защото посоките на обхождане са противоположни (в двата криволинейни интеграла посоката на обхождане трябва да бъде една и съща).



Фиг. 3-8. Циркулацията по целия контур е сума от циркулациите по двата контура: $\Gamma_1=\Gamma_a+\Gamma_{ab}$ и $\Gamma_2=\Gamma_b+\Gamma_{ab}$

Като повторим предишните аргументи, може да се убедим, че сумата от двете циркулации ще даде именно криволинейния интеграл по първоначалната крива Г. Интегралите по Γ_{ab} ще се съкратят. Циркулацията по една част плюс циркулацията по друга е равна на циркулацията по външната линия. Този процес на разделяне на голям контур на по-малки може да се продължи. При събиране на циркулациите по по-малките контури междинните части ще се съкратят, така че сумата им се свежда до циркулация по единствения първоначален контур.



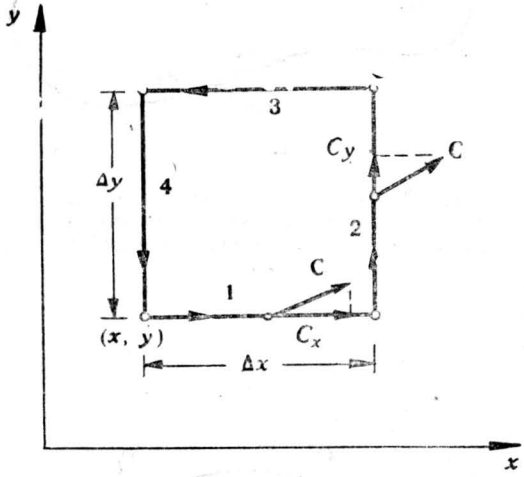
Фиг. 3-9. Някаква повърхнина, ограничена от контура Г.

Повърхнината е разделена на множество малки участъци, чиито форми са приблизително квадрати. Циркулацията по Г е сума от циркулациите по всички малки контури

Сега да предположим, че първоначалният контур е граница на някаква повърхнина. Съществува безкрайно множество от повърхнини, за граница на които служи същият първоначален контур. Нашите резултати обаче не зависят от избора на тези повърхнини. Отначало ще разделим нашия първоначален контур на множество малки контури, които лежат на избрана повърхнина (фиг. 3-9). Каквато и да е формата на повърхнината, ако малките контури се направят достатъчно малки, винаги може да се счита, че всеки от тях обхваща достатъчно плоска повърхнина. Освен това всеки от тях може да се направи да прилича много на квадрат. И циркулацията по големия контур Г може да се намери, като се пресметнат циркулациите по всички квадратчета и се съберат.

3-6. Циркулация по квадрат; теорема на Стокс

Как да намерим циркулацията по всяко квадратче? Всичко зависи от това, как е ориентиран квадратът в пространството. Ако ориентацията му е подбрана подходящо (например той е разположен в една от координатните повърхнини), лесно е да се направи пресмятането. Тъй като досега не сме правили никакви предположения за ориентацията на координатните оси, можем да ги изберем така, че квадратчето, върху което сме насочили вниманието си, да бъде в равнината xy (фиг. 3-10). Ако резултатът от пресмятането се изрази във векторна форма, може да се твърди, че той не зависи от специалната ориентация на равнината.



Фиг. 3-10. Изчисляване на циркулацията на вектора C по малко квадратче

Сега искаме да намерим циркулацията на полето C по нашето квадратче. Лесно е да се извърши криволинейното интегриране, ако квадратчето се направи толкова малко, че векторът C по цялата страна на квадрата да се мени много малко. (Това предположение се изпълнява толкова по-добре, колкото по-малки са квадратчетата, така че в същност става дума за безкрайно малки квадратчета.) Като тръгнем от точката (x, y) — в левия долен ъгъл на фигурата, — ще обходим целия квадрат по посоката, означена със стрелки. По първата страна, отбелязана с цифрата 1, тангентната компонента е равна на C_x (1), а разстоянието е равно на Δx. Първата част от интеграла е равна на $C_x(1)\,\Delta x$. По втората страна се получава $C_y(2)\,\Delta y$. По третата получаваме $-C_x(3)\,\Delta x$, а по четвъртата — $C_y(4)\,\Delta y$. Знаците минус са поставени, защото ни интересува тангентната компонента по посоката на обхождане. Целият криволинеен интеграл тогава е равен на

$$\oint \mathbf{C}d\mathbf{s} = C_x(1)\,\Delta x + C_y(2)\,\Delta y - C_x(3)\,\Delta x - C_y(4)\,\Delta y. \qquad (3.31)$$

Да погледнем сега първия и третия членове. Сумата им е равна на

$$[C_x(1) - C_x(3)]\,\Delta x. \qquad (3.32)$$

Може да ви се струва, че в приетото приближение тази разлика е равна на нула. Но това е само в първо приближение. Ние можем да бъдем по-точни и да отчетем скоростта на изменение на C_x, тогава може да напишем

$$C_x(3) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial y}\,\Delta y. \qquad (3.33)$$

В следващото приближение ще влязат членове с $(\Delta y)^2$, но пред вид на това, че в крайна сметка ни интересува само границата при $\Delta y \to 0$, тези членове могат да се пренебрегнат. Като заместим (3.33) в (3.32), получаваме

$$[C_x(1) - C_x(3)]\,\Delta y = -\frac{\partial C_x}{\partial y}\,\Delta x\,\Delta y. \qquad (3.34)$$

Производната при нашата точност може да се вземе в точката (x, y).

По аналогичен начин останалите два члена може да се напишат във вида

$$C_y(2)\,\Delta y - C_y(4)\,\Delta y = \frac{\partial C_y}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y \tag{3.35}$$

и циркулацията по квадрата тогава е равна на

$$\left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y}\right)\Delta x\,\Delta y. \tag{3.36}$$

Интересно е, че в скобите се получи тъкмо z-компонента на ротация на C. Множителят $\Delta x\,\Delta y$ е площта на нашия квадрат. Така че циркулацията (3.36) може да се запише като

$$(\nabla \times \mathbf{C})_z\,\Delta a.$$

Но z-компонентата е всъщност *нормална* компонента към елемента на повърхнината. Поради това циркулацията около квадратчето може да се зададе и в инвариантна векторна форма

$$\oint \mathbf{C}\,d\mathbf{s} = (\nabla \times \mathbf{C})_n \Delta a = (\nabla \times \mathbf{C})\,.\,\mathbf{n}\,\Delta a. \tag{3.37}$$

В резултат получаваме: циркулацията на произволен вектор **C** по безкрайно малък квадрат е равна на произведението на компонентата на ротация на **C**, нормална към повърхността и площта на квадрата.

Циркулацията по произволен контур Г вече лесно може да бъде свързана с ротация на векторното поле. Да наденем на контура произволна подходяща повърхнина S (както на фиг. 3-11) и да съберем циркулациите по всички безкрайно малки квадратчета на тази повърхнина. Сумата може да бъде записана във вид на интеграл. В резултат на това ще се получи много полезна теорема, наричана теорема на Стокс (на името на физика Стокс).

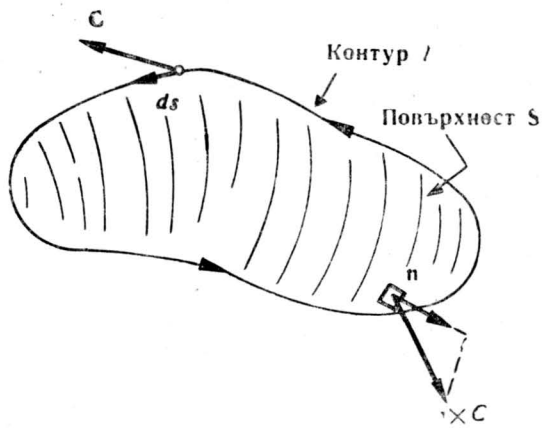
Теорема на Стокс

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{C}\,d\mathbf{s} = \int_{S} (\nabla \times \mathbf{C})_n\,da, \tag{3.38}$$

където S е произволна повърхнина, ограничена от контура Г.

Сега трябва да въведем правила за знаците. На посочената по-рано фиг. 3-10 оста z е насочена *към* вас, ако системата е „обикновена", т. е. „дясна". Когато в криволинейния интеграл вземахме „положителна" посока на обхождане, циркулацията се получи равна на z-компонентата на вектора $\nabla \times \mathbf{C}$. Ако бяхме обходили контура в противоположна посока, щяхме да получим обратен знак. Как изобщо да се разбере каква посока трябва да се избере за положителна посока на „нормалната" компонента на вектора $\nabla \times \mathbf{C}$? „Положителната" нормала трябва винаги да се свързва с посоката така, както е направено на фиг. 3-10. Общият случай е показан на фиг. 3-11.

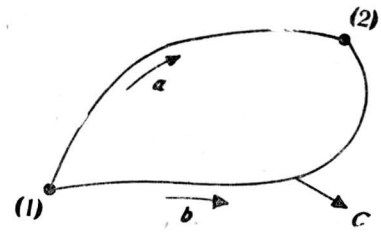
За запомняне е полезно „правилото на дясната ръка". Ако поставите пръстите на вашата *дясна* ръка по посоката на контура Г, така че краищата на пръстите да показват положителната посока на обхождане на $d\mathbf{s}$, вашият палец ще покаже посоката на *положителната* нормала към повърхнината S.



Фиг. 3-11. Циркулацията на вектора **C** по Г е равна на повърхнинния интеграл от нормалната компонента на вектора $\nabla \times \mathbf{C}$

3-7. Полета без ротация и полета без дивергенции

Сега да преминем към някои следствия от нашите нови теореми. Да се заемем отначало с вектор, чиято ротация (или вихър) *навсякъде* е равна на нула. Тогава съгласно с теоремата на Стокс циркулацията по произволен контур е нула. Ако сега вземем две точки (1) и (2) по затворената крива (фиг. 3-12), криволинейният интеграл от тангенциалната компонента от (1) до (2) не трябва да зависи от това кой от двата възможни пътя сме избрали.



Фиг. 3-12. Ако $\nabla \times \mathbf{C}$ е равно на нула, циркулацията по затворената крива Г е също равна на нула.

Криволинейният интеграл от $\mathbf{C}\,.\,d\mathbf{s}$ на участъка от (1) до (2) по a трябва да бъде равен на интеграла по b

Може да се заключи, че интегралът от (1) до (2) може да зависи само от разположението на тези точки, т. е. че той е функция само на координатите на точките. Същата логика използувахме в том I, гл. 14, когато доказвахме, че ако интегралът от някаква величина по произволен затворен контур е винаги равен на нула, този интеграл може да бъде представен като разлика от стойностите на функцията за координатите на двата края. Това ни позволи да изобретим понятието потенциал. Ние доказахме по-нататък, че векторното поле е градиент от тази потенциална функция (вж. том I, уравнение (14.13)).

Оттук следва, че всяко векторно поле, чиято ротация е равна на нула, може да бъде представено във вид на градиент на някаква скаларна функция, т. е. ако $\nabla\times\mathbf{C}=0$ навсякъде, съществува някаква функция ψ (пси), за която $\mathbf{C}=\nabla\psi$ (полезно представяне). Значи ние можем, ако пожелаем, да опишем този вид векторни полета с помощта на скаларни полета.

Сега ще докажем още една формула. Нека разполагаме с *произволно* скаларно поле φ (фи). Ако образуваме градиента му $\nabla\varphi$, интегралът от този вектор по произволен контур трябва да бъде равен на нула. Криволинейният интеграл от точката (1) до точката (2) е равен на $[\varphi(2)-\varphi(1)]$. Ако точките (1) и (2) съвпадат, нашата теорема 1 [уравнение (3.8)] ни съобщава, че криволинейният интеграл е равен на нула

$$\oint_{\text{контур}}\nabla\varphi\,.\,d\mathbf{s}=0.$$

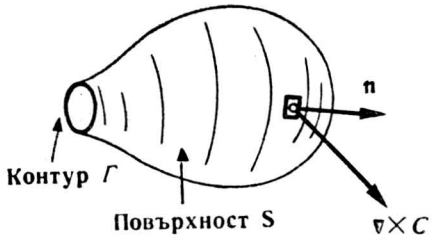
Като приложим теоремата на Стокс, може да заключим, че

$$\int\nabla\times(\nabla\varphi)da=0$$

по *произволна* повърхнина. Но щом интегралът по *произволна* повърхнина е равен на нула, то подинтегралният израз трябва да бъде равен на нула. Значи

$$\nabla\times(\nabla\varphi)=0 \text{ винаги.}$$

Същият резултат беше доказан в гл. 2-7 с помощта на векторната алгебра.



Фиг. 3-13. При граничен преход към затворена повърхнина повърхнинният интеграл от $(\nabla\times\mathbf{C})$ трябва да се анулира

Да разгледаме сега частен случай, когато на *малък* контур Г се поставя *голяма* повърхнина S (фиг. 3-13). Ние искахме да видим какво ще се случи, когато контурът се свие до точка. Тогава границата на повърхнината изчезва, а самата повърхнина се превръща в затворена. Ако векторът $\mathbf{C}$ навсякъде е краен, криволинейният интеграл по Г трябва да клони към нула, когато се свива контурът (интегралът изобщо е пропорционален на дължината на контура, а тя намалява). Съгласно с теоремата на Стокс повърхнинният интеграл от $(\nabla\times\mathbf{C})_n$ също трябва да намалява до нула. Когато повърхнината се затваря, по някакъв начин в интеграла се внася принос, който се унищожава с натрупаните по-рано. Получава се нова теорема:

$$\int_{\substack{\text{произволна}\\\text{затворена}\\\text{повърхнина}}}(\nabla\times\mathbf{C})_n da=0. \tag{3.39}$$

Това трябва да ни заинтересува, защото вече имаме една теорема за повърхнинния интеграл на векторното поле. Такъв повърхнинен интеграл е равен на обемен интеграл от дивергенцията на вектора, както това следва от теоремата на Гаус (уравнение (3.18)). Теоремата на Гаус, приложена към $\nabla\times\mathbf{C}$, твърди, че

$$\int_{\substack{\text{затворена}\\\text{повърхнина}}}(\nabla\times\mathbf{C})_n da=\int_{\substack{\text{обемът}\\\text{вътре}}}\nabla\,.\,(\nabla\times\mathbf{C})\,dV. \tag{3.40}$$

Заключваме, че интегралът в дясната страна трябва да бъде нула

$$\int_{\text{произволен обем}} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{C})\, dV = 0 \tag{3.41}$$

и че това трябва да бъде вярно за всяко векторно поле **C**, каквото и да е то. Щом уравнението (3.41) е изпълнено за *произволен обем*, във *всяка точка* на пространството подинтегралната величина трябва да бъде равна на нула. Получава се, че

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) = 0 \text{ винаги.}$$

Същият резултат беше изведен с помощта на векторната алгебра в гл. 2 — 7. Сега почваме да разбираме как всичко приляга едно към друго.

3-8. Резултати

Да резюмираме сега всичко, което сме научили за векторното смятане. Ето най-съществените моменти на гл. 2 и 3.

1. Операторите $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$ може да се разглеждат като компоненти на векторния оператор ∇; формулите на векторната алгебра остават верни, ако този оператор се счита векторът

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

2. Разликата от стойностите на скаларно поле в две точки е равна на криволинейния интеграл от тангенциалната компонента на градиента на този скалар по произволна крива, която съединява първата точка с втората:

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{\substack{(1) \\ \text{произволна крива}}}^{(2)} \nabla\psi \cdot d\mathbf{s}. \tag{3.42}$$

3. Повърхнинният интеграл от нормалната компонента на произволен вектор по затворена повърхнина е равен на интеграла от дивергенцията на вектора по обема, който лежи вътре в тази повърхнина:

$$\int_{\substack{\text{затворена} \\ \text{повърхнина}}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}\, da = \int_{\substack{\text{обемът} \\ \text{вътре}}} \nabla \cdot \mathbf{C}\, dV. \tag{3.43}$$

4. Криволинейният интеграл от тангенциалната компонента на произволен вектор по затворен контур е равен на повърхнинния интеграл от нормалната компонентна на ротацията на вектора по произволна повърхнина, ограничена от този контур

$$\int_{\text{граница}} \mathbf{C} d\mathbf{s} = \int_{\text{повърхнина}} (\nabla \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n}\, da. \tag{3.34}$$

От редактора (на руското издание.) Като започвате да изучавате уравненията на Максвел, обърнете внимание, че в тези лекции се използува рационализираната мерна система, в която уравненията на Максвел не съдържат коефициенти.

По-привично е вместо ε_0 да се пише $\frac{\varepsilon_0}{4\pi}$; тогава коефициентът 4π изчезва от знаменателя в закона на Кулон (4.9), но се появява в десните страни на уравненията (4.1) и (4.3). Подобрението на мерната система винаги прилича на поговорката променил се Илия все в тия.

Освен това вместо квадрата на скоростта на светлината въвеждат нова константа $\mu_0 = \varepsilon_0/c^2$, наричат я (доста неудачно) магнитна проницаемост на вакуума (както наричат ε_0 диелектрична проницаемост на вакуума) и означават $\varepsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$.

Внимавайте! Проверявайте мерната система, когато отворите нова книга за електричеството!

4

Електростатика

4-1. Статика

4-2. Закон на Кулон; събиране на сили

4-3. Електричен потенциал

4-4. $\mathbf{E}=\nabla\varphi$

4-5. Поток на полето E

4-6. Закон на Гаус; дивергенция на полето E

4-7. Поле на заредена сфера

4-8. Линии на полето; еквипотенциални повърхнини

Да се повтори: гл. 13 и 14 (том I) „Работа и потенциална енергия“

4-1. Статика

Сега ще започнем подробно изучаване на теорията на електромагнетизма. Цялата тя (електромагнетизмът като цяло) е скрита в *уравненията на Максвел:*

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{4.1}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{4.2}$$

$$c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}, \tag{4.3}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \tag{4.4}$$

Явленията, описвани от тези уравнения, могат да бъдат твърде сложни. Но преди да преминем към по-сложните, ще започнем със сравнително по-простите и отначало ще се научим да боравим с тях. Най-лек за изучаване е случаят, който се нарича *статичен.* Това е случаят, когато нищо не зависи от времето, когато всички заряди или са здраво закрепени на местата си, или ако се движат, токът им е постоянен (т. е. ρ и $\mathbf{j}$ са постоянни във времето). При тези условия в уравненията на Максвел всички членове, които са производни по времето, стават равни на нула и уравненията добиват следния вид:

Електростатика

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.5}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=0. \tag{4.6}$$

Магнитостатика

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2} \tag{4.7}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0. \tag{4.8}$$

$$\varepsilon_0 c^2=\frac{10^7}{4\pi}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\approx 9\cdot 10^9$$

$$[\varepsilon_0]=\text{Кулон}^2/\text{Нютон}\cdot\text{м}^2$$

Обърнете внимание на едно интересно свойство на тази система от четири уравнения. Тя се разпадна на две части. Електричното поле **E** фигурира само в първите две уравнения, а магнитното поле **B** — само в третото и четвъртото уравнение. Тези две полета съвсем не са свързани помежду си. Това означава, че докато зарядите и токовете са постоянни, електричеството и магнетизмът са различни явления. Не може да се открие никаква зависимост между полетата **E** и **B**, докато не възникнат изменения в зарядите или токовете, например докато кондензаторът не започне да се зарежда или магнитът да се движи. Само когато възникват сравнително бързи изменения, така че временните производни в уравненията на Максвел достигнат забележими стойности, **E** и **B** започват да си влияят.

Ако се вгледате в уравненията на статиката, ще установите, че електростатиката и магнитостатиката са идеални обекти за изучаването на математичните свойства на векторните полета. Електростатиката е чист пример на векторно поле с *нулева ротация* и *зададена дивергенция,* а магнитостатиката — чист пример на поле с *нулева дивергенция* и *зададена ротация.* По-общоприе-

тият (и може би от нечия гледна точка по-удовлетворителен) път на излагане на теорията на електромагнетизма се състои в това да се започне с електростатика и да се изучи всичко за дивергенцията. Магнитостатиката и ротацията оставят за след това. И едва на края обединяват електричеството и магнетизма. Ние с вас започнахме с пълната теория на векторното смятане. Да я приложим сега към частния случай на електростатиката, към полето **E**, зададено с първите две уравнения.

Ще започнем от най-простите задачи, в които положенията на всички заряди са фиксирани. Ако ни беше необходимо да изучим електростатиката само на това ниво (а с това ще се занимаваме в следващите две глави), животът ни би бил много прост. Всичко би било почти тривиално и би ни трябвал, както вие сега ще се убедите, само закона на Кулон и няколко интегрирания. Обаче в много реални електростатични задачи ние отначало *не знаем* къде се намират зарядите. Знаем само, че в зависимост от свойствата на веществото те са се разпределили някъде и някак си. Положението, което ще заемат зарядите, зависи от полето **E**, а то от своя страна зависи от разположението на зарядите. И тогава изведнаж всичко се усложнява. Ако например зареденото тяло е поднесено към проводник или изолатор, електроните и протоните в проводника или изолатора се преместват на ново място. Една част от плътността на заряда ρ в уравнението (4.5) ще ни бъде известна — онзи заряд, който поднасяме; но в ρ ще влязат и части от тези заряди, които са изменили положението си. Ние сме длъжни да отчетем движението на всички заряди. Възникват достатъчни тънки и интересни задачи.

Обаче тази глава, макар че е посветена на електростатиката, не ще засяга най-красивите и тънки въпроси на тази наука. В нея ще бъдат разгледани само такива ситуации, в които може да се предположи, че положението на всички заряди е известно. Но и в този случай, преди да се научим да се справяме със сложните случаи, естествено е отначало да усвоим простите.

4-2. Закон на Кулон; събиране на сили

Логично би било да се приеме за отправна точка уравненията (4.5) и (4.6). Но по-леко е да се започне с друго и след това да се върнем към тези уравнения. Получава се еднакъв резултат. Ще започнем със закона, за който се говореше по-рано, със закона на Кулон, който утвърждава, че между два заряда в покой действува сила, правопропорционална на произведението на зарядите и обратно пропорционална на квадрата на разстоянието между тях. Силата е насочена по правата от единия заряд към другия.

Закон на Кулон

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\mathbf{e}_{12} = -\mathbf{F}_2, \tag{4.9}$$

където $\mathbf{F}_1$ е силата, която действува на заряда q_1, $\mathbf{e}_{12}$ — единичният вектор, насочен от q_2 към q_1, а r_{12} — разстоянието между q_1 и q_2. Силата $\mathbf{F}_2$, която действува на q_2, е равна и противоположна на силата $\mathbf{F}_1$.

Множителят на пропорционалност по исторически причини се пише във вида $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. В системата СП, от която се ползуваме, той се определя като 10^{-7} от квадрата на скоростта на светлината. Тъй като скоростта на светлината е приблизително $3 \cdot 10^8 m/s$, множителят е приблизително равен на $9 \cdot 10^9$ и единицата се оказва равна на *Нютон. м²/Кулон* или *волт. м/Кулон*

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7} c^2 \text{ (по определение)}$$
$$= 9{,}0 \cdot 10^9 \text{ (от експеримента).} \tag{4.10}$$

Величина	Единица
F	*Нютон*
Q	*Кулон*
L	*метър (m)*
W	*Джаул*
$\rho \sim \frac{Q}{L^3}$	*Кулон/м³*
$\frac{1}{\varepsilon_0} \sim \frac{FL^2}{Q^2}$	*Нютон. м²/Кулон²*
$E \sim \frac{F}{Q}$	*Нютон/Кулон*
$\varphi \sim \frac{W}{Q}$	*Джаул/Кулон.Волт*
$E \sim \frac{\varphi}{L}$	*Волт/метър*
$\frac{1}{\varepsilon_0} \sim \frac{EL^2}{Q}$	*Волт.м/Кулон*

Ако зарядите са повече от два (а именно такива случаи са най-интересни), необходимо е законът на Кулон да се допълни с друг факт, който съществува в природата: силата, която действува на заряд, е векторна сума на кулонови сили, с които действуват всички останали заряди. Този експериментален факт се нарича „принцип на суперпозиция“ или „принцип на наслагване“. И това е всичко, което има в електростатиката. Ако се добави към закона на Кулон принципът на суперпозицията, в нея повече нищо не остава. Точно до такива изводи ще ни доведат уравненията на електростатиката, уравненията (4.5) и (4.6).

Когато прилагаме закона на Кулон, е удобно да се въведе понятие за електрично поле. Ние говорим, че полето $\mathbf{E}(1)$ е силата, която действува от страна на всички останали заряди върху *единица заряд* q_1. Като разделим (4.9) на q_1, получаваме за действието на всички заряди освен q_1

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12}. \tag{4.11}$$

Освен това ние считаме, че $\mathbf{E}(1)$ описва нещо, което съществува в точката (1), даже ако в нея няма заряда q_1 (при предположение, че всички останали заряди са запазили положението си). Ние казваме: $\mathbf{E}(1)$ е електричното поле в *точката* (1).

Електричното поле $\mathbf{E}$ е вектор, така че всъщност в (4.11) са написани три уравнения, по едно за всяка компонента. Като напишем x-компонентата в явен вид, получаваме

$$\mathbf{E}_x(x_1, y_1, z_1) = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x_1 - x_2}{[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^{3/2}} \tag{4.12}$$

и точно така за останалите компоненти.

Ако зарядите са много, полето $\mathbf{E}$ във всяка точка (1) е равно на сумата от действието на всички заряди. Всеки член от сумата ще изглежда като (4.11) или (4.12). Нека q_j е големината на j-ия заряд, а $\mathbf{r}_{1j}$ — преместването на q_j от точката (1); тогава ще напишем

$$\mathbf{E}(1) = \sum_{j \neq 1} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{\mathbf{r}_{1j}^2} \mathbf{e}_{1j}, \tag{4.13}$$

което означава, разбира се,

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \sum_{j \neq 1} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j(x_1 - x_j)}{[(x_1-x_j)^2+(y_1-y_j)^2+(z_1-z_j)^2]^{3/2}} \tag{4.14}$$

и т. н.

Често е удобно да се игнорира фактът, че зарядите винаги съществуват във вид на отделни парченца, такива като електроните или протоните, а да се счита, че те са размазани като непрекъснато петно или, както казват, се описват от „разпределение“. Докато ни е все едно какво става в малките мащаби, такова описание е напълно законно. Разпределението на заряда се описва от „плътността на заряда“ $\rho(x, y, z)$. Ако количеството на заряда в малък обем ΔV около точката (2) е Δq_2, ρ се определя от равенството

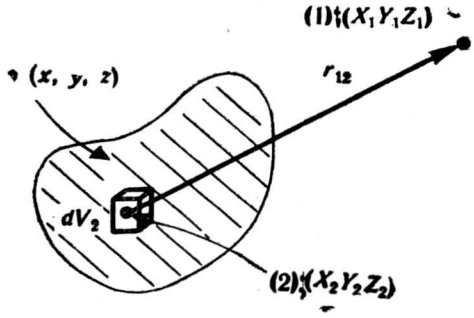
$$\Delta q_2 = \rho(2)\, \Delta V_2 \tag{4.15}$$

Като използуваме закона на Кулон за непрекъснато разпределение на заряда, заменяме в уравненията (4.13) или (4.14) сумите с интеграли по целия обем, който съдържа заряди. Получава се

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\text{цялото пространство}} \frac{\rho(2)\mathbf{e}_{12} dV_2}{\mathbf{r}_{12}^2}. \tag{4.16}$$

Някои предпочитат да пишат

$$\mathbf{e}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}},$$



Фиг. 4-1. Електричното поле $\mathbf{E}$ от някакво разпределение на заряди в точката (1) се получава от интеграла по разпределението.

Точката (1) може да се намира и вътре в разпределението

където $\mathbf{r}_{12}$ е векторът на преместване *от* (2) *към* (1) (фиг. 4-1). Интегралът за **E** тогава се записва във вида

$$\mathbf{E}(1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\text{цялото пространство}}\frac{\rho(2)\,\mathbf{r}_{12}dV_2}{r_{12}^3}. \tag{4.17}$$

Ако наистина искаме да извършим интегрирането до край, обикновено се налага интегралите да се напишат по-подробно. За x - компонентата на уравненията (4.16) или (4.17) се получава

$$E_x(x_1y_1z_1)=\int\limits_{\substack{\text{цялото}\\ \text{пространство}}}\frac{(x_1-x_2)\,\rho(x_2,y_2z_2)\,dx_2\,dy_2\,dz_2}{4\pi\varepsilon_0\,[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^{3/2}} \tag{4.18}$$

Ние нямаме намерение да изчисляваме каквото и да е по тази формула. Тук я написахме, за да подчертаем, че напълно решихме онези електростатични задачи, в които е известно положението на всички заряди.

Дадено: Зарядите.

Да се определят: Полетата.

Решение: Реши горния интеграл.

Така че по същество всичко е направено; остава само да се извършат сложни интегрирания по три променливи. Това е тъкмо работа за изчислителна машина!

Като се ползуваме от тези интеграли, можем да намерим полето на заредена повърхнина, заредена линия, заредена сфера и на произволно избрано разпределение. Макар че сега ще започнем да чертаем силови линии, да говорим за потенциали и да изчисляваме дивергенции, важно е да се разбере, че отговорът на всички решавани задачи по принцип е вече готов. Просто понякога е по-лесно да се извърши интегрирането, като измислим някакъв фокус, отколкото да се правят всички сметки честно. Но да се досетиш е необходимо да се научиш на разни хитрости. Може би би било по-добре да се изчисляват интегралите непосредствено, вместо да се губят сили за остроумни начини на решаване и демонстриране на своята съобразителност. Но все пак ние ще тръгнем по пътя на развиване на съобразителността. Преминаваме по такъв начин към обсъждането на някои други особености на електричното поле.

4-3. Електричен потенциал

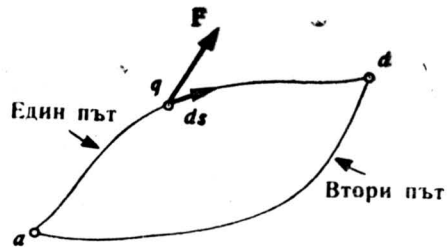
За начало ще усвоим понятието електричен потенциал, свързано с работата за пренасяне на заряд от една точка в друга. Нека имаме някакво разпределение на заряди. То създава електрично поле. Пита се каква работа трябва да се извърши, за да се пренесе малък заряд от една точка в друга? Работата, извършена *срещу* действието на електричните сили при пренасяне на заряда по някакъв път, е равна на *минус* компонентата на електричната сила по посоката на движението, интегрирана по този път. Ако зарядът се пренася от точка a до точка b

$$W=-\int_a^b\mathbf{F}\,.\,d\mathbf{s},$$

където **F** е електричната сила, която действува *на* заряда във всяка точка, а $d\mathbf{s}$ — диференциал на вектора на преместване по траекторията (фиг. 4-2).

За нашите цели е по-интересно да се разгледа работата за пренасяне на *единица* заряд. Тогава силата, която действува на такъв заряд, числено съвпада с електричното поле. Означавайки в този случай работата против електричните сили с буквата W, написваме

$$W_{\text{един}}=-\int_a^b\mathbf{E}.d\mathbf{s}. \tag{4.19}$$



Фиг. 4-2. Работата за пренасянето на заряда от a към b е равна на минус интеграла от $\mathbf{F}\,.\,d\mathbf{s}$ по избрания път

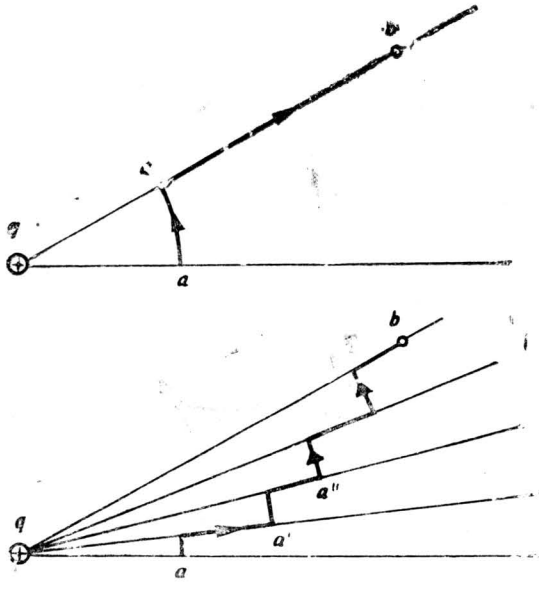
Изобщо казано, това, което се получава при интегриране от този вид, зависи от избрания път на интегриране. Но ако интегралът в (4.19) зависеше от пътя, бихме могли да получим работа от полето, като преместваме заряда към b по един път, а го връщаме по друг. Би могло да се приближим към b по онзи път, където W е по-малка, а да се *отдалечим* по пътя, където тя е по-голяма, като *получим* работа, по-голяма от *вложената*.

По принцип няма нищо невъзможно в получаването на работа от полето. Ние ще се запознаем по-късно с полета, в които това е възможно. Може да се окаже, че като придвижвате заряди, вие действувате на останалата част от целия „механизъм“ с някаква сила. Ако „механизъмът“ сам се движи срещу тази сила, той ще губи енергия и по този начин пълната енергия ще остава постоянна. В *електростатиката* обаче никакъв „механизъм“ няма. Ние знаем какви са силите, които действуват на източниците на полето. Това са кулонови сили, които действуват на зарядите, отговорни за създаването на полето. Ако положенията на всички останали заряди е фиксирано (а това допускане се прави единствено в *електростатиката*), силите на отблъскване не ще успеят да действуват. И тогава няма начин, по който да се получи от тях енергия, разбира се, при условие, че принципът за запазване на енергията е в сила в електростатиката. Ние, разбира се, вярваме, че това е така, но ще се опитаме все пак да покажем как това следва от закона на Кулон за силата.

Да разгледаме отначало какво става в поле, създадено от единичен заряд q. Нека точката a се намира от q на разстояние r_1, а точката b — на разстояние r_2. Да пренесем сега друг заряд, наричан „пробен“ и равен на единица от a до b. Избираме отначало най-лекия за пресмятане път. Пренасяме нашия пробен заряд отначало по дъга от кръг, а след това по радиуса (фиг. 4-3, *а*). Да се пресметне работата по такъв път е детска работа (иначе не бихме го и избрали). Първо, по участъка aa' работа не се извършва. Полето по закона на Кулон е радиално, т. е. насочено е перпендикулярно на посоката на движение. Второ, по участъка $a'b$ полето се изменя както $1/r^2$ и е насочено по посоката на движение. Така че работата по пренасяне на пробния заряд от a до b е равна на

$$-\int_a^b \mathbf{E}.d\mathbf{s} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{a'}^{b}\frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right). \qquad (4.20)$$

Да изберем сега друг лек път, да речем този, който е показан на фиг. 4-3, *б*. Той минава последователно ту по дъга от окръжност, ту по радиуса. Всеки път, когато пътят съвпада с дъгата, работа не се извършва. Всеки път, когато пътят съвпада с радиуса, интегрира се $1/r^2$. По първия радиален участък интегралът се взема от r_a до $r_{a'}$, по следващия — от $r_{a'}$ до $r_{a''}$ и т. н. Сумата от всички интеграли е тъкмо равна на един интеграл в граници от r_a до r_b. Изобщо получава се същият отговор, както и в първия вече проверен случай. Ясно е, че и за *произволен* път, образуван от произволно число участъци от този вид ще се получи същият резултат.



Фиг. 4-3. При пренасяне на пробния заряд от a към b по произволен път се извършва една и съща работа

Добре, а как стои въпросът с плавните траектории? Ще получим ли същия резултат? Този въпрос обсъждахме в т. I, гл. 13. Като се възползуваме от същите доводи, както и тогава, може да заключим, че работата за пренасяне на единичен заряд от a до b не зависи от пътя

$$W_{\text{един}}(a \to b) = -\int_a^b \mathbf{E}\,.\,d\mathbf{s}.$$

произволен път

Щом извършената работа зависи само от краищата на пътя, тя може да бъде представена като разлика от две числа. В това може да се убедим по следния начин. Да изберем за отправна точка P_0 и да се договорим да оценяваме нашия интеграл, като

използуваме само тези траектории, които преминават *през* точката P_0. Да означим работата, извършена при движението срещу полето *от* P_0 до точката a с $\varphi(a)$, а работата по участъка *от* P_0 до точката b — с $\varphi(b)$ (фиг. 4-4). Работата за преминаване от a *към* P_0 (по пътя към b) е равна на $\varphi(a)$ със знак минус, така че

$$-\int_a^b \mathbf{E}\,.\,d\mathbf{s} = \varphi(b) - \varphi(a). \tag{4.21}$$

Тъй като навсякъде ще се среща само разлика от стойностите на функцията φ в две точки, положението на P_0 е всъщност без значение. Обаче щом отправната точка е избрана, по този начин е определена φ във *всяка* точка на пространството; значи φ е *скаларно поле*, функция на x, y, z. Тази скаларна функция наричаме *електростатичен потенциал* в произволна точка.

Електростатичният потенциал е

$$\varphi(P) = -\int_{P_0}^{P} \mathbf{E}.d\mathbf{s}. \tag{4.22}$$

Често е много удобно отправната точка да се вземе в безкрайност. Тогава потенциалът φ на единичен заряд в началото на координатната система, взет в произволна точка (x, y, z), е равен на (вж. уравнение (4.20))

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}. \tag{4.23}$$

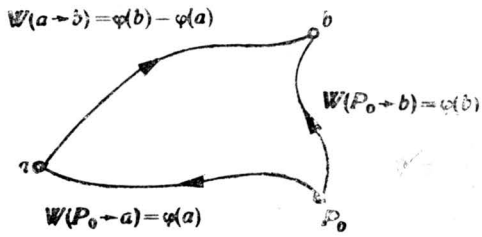
Електричното поле на няколко заряда може да се напише като сума от електричните полета на първия заряд, на втория, на третия и т. н. Като интегрираме сумата, за да определим потенциала, ще стигнем до сума от интеграли. Всеки от тях е потенциалът на съответния заряд. Значи потенциалът на много заряди е сума от потенциалите на всеки от зарядите поотделно. По такъв начин и за потенциалите съществува принцип на събирането. Като се ползуваме от същите аргументи, както когато търсехме електричното поле на група заряди или разпределения на заряди, може да получим окончателните формули за потенциала φ в точка, означена с (1):

$$\varphi(1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{1j}}, \tag{4.24}$$

или

$$\varphi(1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(2)\,dV_2}{r_{12}} \tag{4.25}$$

Не забравяйте, че потенциалът φ има физичен смисъл: това е потенциалната енергия, която би имал единичен заряд, ако бъде пренесен в дадена точка на пространството от някоя отправна точка.



Фиг. 4-4. Работата, изразходвана за движение по произволен път от a до b, е равна на минус работата от някаква точка P_0 до a плюс работата от P_0 до b

4-4. $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$

Защо всъщност ни заинтересува потенциала φ? Силите, които действуват на зарядите, се определят от величината $\mathbf{E}$ — електричното поле. Работата е в това, че от φ много лесно може да се получи $\mathbf{E}$, не по-трудно от изчисляване на производна. Да разгледаме две точки с еднакви y и z, но с различни x: едната с x, другата с $x+\Delta x$; да се заинтересуваме каква работа трябва да се извърши, за да се пренесе единичен заряд от едната точка в другата. Пътят на пренасяне е хоризонтална линия от x до $x+\Delta x$. Работата е равна на разликата на потенциалите в двете точки

$$\Delta W = \varphi(x+\Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta x.$$

Но работата срещу действието на силите на същия отрязък е равна на

$$\Delta W = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -E_x \Delta x.$$

Виждаме, че

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{4.26}$$

По същия начин $E_y = -\partial\varphi/\partial y$, $E_z = -\partial\varphi/\partial z$; всичко това в означенията на векторния анализ може да се сумира така:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \tag{4.27}$$

Това е диференциална форма на уравнението (4.22). Всяка задача, в която са дадени зарядите, може да се реши, като се изчисли по (4.24) или (4.25) потенциалът и се пресметне по (4.27) полето. Уравнението (4.27) се съгласува също с това, което се получава във векторния анализ: с това, че за всяко скаларно поле

$$\int_a^b \nabla\varphi \cdot d\mathbf{s} = \varphi(b) - \varphi(a). \tag{4.28}$$

Съгласно с уравнение (4.25) скаларният потенциал φ е тримерен интеграл, подобен на получения за **E**. Има ли някаква полза ако вместо **E** се пресмята φ? Да. За изчисляването на φ е необходимо да се реши един интеграл, а за пресмятането на **E** — три (нали е вектор). Освен това обикновено $1/r$ се интегрира полесно, отколкото x/r^3. В много практически случаи се оказва, че за получаването на електричното поле е по-лесно да се пресметне φ, а след това да се вземе градиент, отколкото да се пресмятат три интеграла за **E**. Това е просто въпрос на удобство.

Но потенциалът φ има и дълбок физичен смисъл. Показахме, че **E** от закона на Кулон се получава от $\mathbf{E} = -\text{grad}\,\varphi$, където φ се дава от уравнението (4.22). Но ако **E** е градиент на скаларно поле, както е известно от векторното смятане, ротацията от **E** трябва да бъде равна на нула:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{4.29}$$

Но това е и нашето второ основно уравнение на електростатиката — уравнението (4.6). По такъв начин показахме, че законът на Кулон дава поле **E**, което удовлетворява това условие. Така че засега всичко е в ред.

Всъщност това, че $\nabla \times \mathbf{E}$ е равно на нула, беше показано още преди да определим потенциала. Ние показахме, че работата за обикаляне по затворен път е равна на нула, т. е.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

по *произволен* път. Видяхме в гл. 3, че в такова поле $\nabla \times \mathbf{E}$ трябва да бъде нула навсякъде. Електричното поле на електростатиката е поле без ротации.

Можете да се потренирате във векторното смятане, като докажете, че векторът $\nabla \times \mathbf{E}$ е равен на нула по друг начин, т. е. като пресметнете компонентите на вектора $\nabla \times \mathbf{E}$ за полето на точков заряд по формулите (4.11). Ако се получи нула, принципът на наслагване ще ни осигури приравняването на нула на $\nabla \times \mathbf{E}$ за произволно разпределение на зарядите.

Трябва да се подчертае един важен факт. За произволна *радиална* сила извършваната работа не зависи от пътя и съществува потенциал. Ако се задълбочите в разглеждането на горния факт, ще видите, че всички наши доказателства за независимостта на интеграла на работата от пътя се определяха само от това, че силата на отделен заряд беше радиална и сферично симетрична. Това че зависимостта на силата от разстоянието имаше

вида $1/r^2$, нямаше никакво значение, при произволна зависимост от r би се получило същото. Съществуването на потенциал и анулирането на ротацията на **E** следва всъщност само от *симетрията* и *посоката* на електричните сили. По тази причина уравнението (4.28) или (4.29) може да съдържа само част от законите на електричеството.

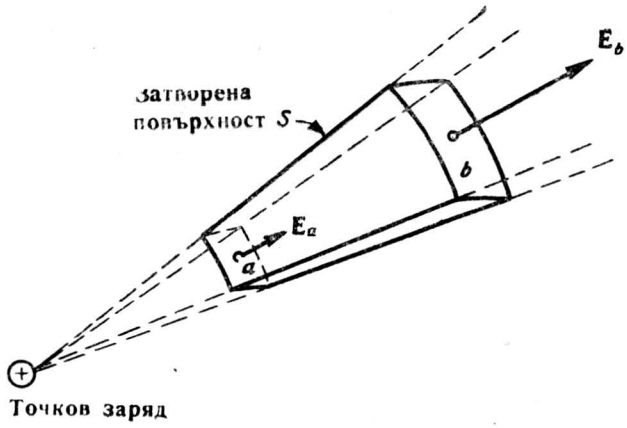
4-5. Поток на полето E

Сега искаме да изведем уравнение, което непосредствено и направо да отчита факта, че законът за силата е закон за обратни квадрати. Има хора, на които им се струва „напълно естествено", че полето се изменя обратно пропорционално на квадрата на разстоянието, защото „именно така, видите ли, всичко се разпространява". Вземете източник на светлина, от който изтича поток светлина; количеството светлина, която преминава през основата на конус с връх в източника, е едно и също независимо от това, какво е разстоянието от върха до основата. Това по необходимост следва от закона за запазване на светлинната енергия. Количеството светлина на единица площ — интензивността — трябва да бъде обратно пропорционално на площта, изрязана от конуса, т. е. на квадрата на разстоянието от източника. Ясно е, че по същата причина и електричното поле трябва да се изменя обратно на квадрата на разстоянието!

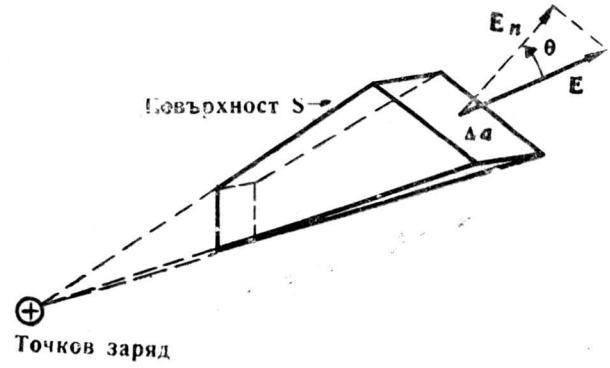
Но тук нали няма нищо подобно на „тази причина". Нали никой не може да каже, че електричното поле е мярка на нещо такова, което прилича на светлината и което поради това трябва да се запазва. *Ако* имахме такъв „модел" на електричното поле, в който векторът на електричното поле би представял посоката и скоростта (например ток) на някакви излитащи малки „сачмички" и ако този модел изисква броят на сачмичките да се запазва и нито една от тях да не може да пропадне след излитането от заряда, тогава бихме могли да говорим, че „чувствуваме" неизбежността на закона на обратните квадрати. От друга страна, непременно би трябвало да съществува математичен начин за изразяване на тази физична идея. Ако електричното поле *би било* подобно на запазващите се сачмики, то би се изменяло обратно пропорционално на квадрата на разстоянието и ние бихме могли да опишем едно такова поведение с някакво уравнение, т. е. по чисто математичен път. Ако ние не твърдим, че електричното поле е *направено* от такива сачмички, а разбираме, че това е просто модел, който ни помага да достигнем до правилна математична теория, в такъв начин на мислене няма нищо лошо.

Да предположим, че за миг сме си представили електричното поле във вид на нещо запазващо се и течащо навсякъде с изключение на местата, където са разположени зарядите (потокът все пак трябва отнякъде да започва!). Да си представим нещо (какво именно, не е важно), което изтича от заряда в окръжаващото го пространство. Ако **E** би бил вектор на такъв поток (както **h** е вектор на топлинния поток), близко до точков източник полето би притежавало зависимостта $1/r^2$. Сега желаем да използуваме този модел, за да формулираме по-задълбочено закона на обратните квадрати, а не просто да говорим за „обратните квадрати". (Може да ви се струва странно защо вместо пътьом направо и открито да формулираме такъв прост закон, ние искаме страхливо да прокараме същото, но от задния вход. Малко търпение! Това ще се окаже полезно!)

Да се запитаме: на какво е равно „изтичането" на **E** през произволна затворена повърхнина в околността на точков заряд? Като начало ще вземем проста повърхнина — такава, каквато е показана на фиг. 4-5. Ако полето прилича на поток, сумарното изтичане от този сандък трябва да бъде равно на нула. Това се и получава, ако под „изтичане" от тази повърхнина разбираме повърхнинния интеграл от нормалната компонента на **E**, т. е. поток



Фиг. 4-5. Потокът на **E** от повърхнината S е равен на нула



Фиг. 4-6. Потокък на **E** от повърхнината S е равен на нула

на **E** в този смисъл, който беше приет в гл. 3. На страничните стени нормалната компонента на **E** е равна на нула. На сферичните повърхнини нормалната компонента на **E** е равна на самата величина **E** с минус на по-малката повърхнина и с плюс на по-голямата. Величината **E** намалява както $1/r^2$, а площта на повърхнината расте както r^2, така, че произведението им не зависи от r. Притокът на **E** през границата a е точно равен на изтичането през границата b. Сумарният поток през S е равен на нула, а това е все едно да кажем, че

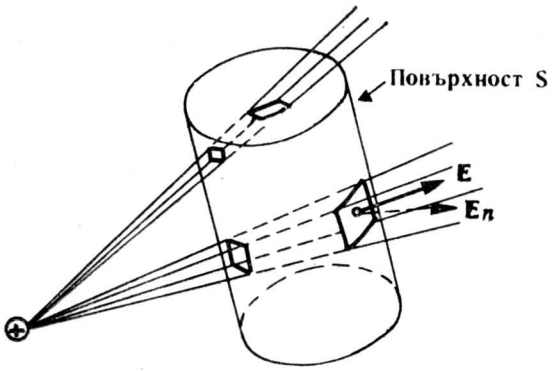
$$\int_S E_n \, da = 0 \tag{4.30}$$

на тази повърхнина.

Сега ще покажем, че двете повърхнини a и b могат да бъдат под ъгъл спрямо радиуса, без това да вреди на големината на интеграла (4.30). Макар че това е вярно винаги, за нашите цели е достатъчно само да покажем, че то е в сила тогава, когато повърхнините a и b са малки и ограничават малък ъгъл с върха в източника, т. е. в действителност безкрайно малък ъгъл. На фиг. 4-6 е показана повърхнината S, чиито странични стени са радиални, а основите са под ъгъл. На фигурата те не са малки, но трябва да си представим, че те всъщност са много малки. Тогава полето **E** над повърхнината ще бъде достатъчно хомогенно, така че може да се вземе стойността му в центъра. Ако една от основите е наклонена под ъгъл θ, площта ѝ нараства $1/\cos\theta$ пъти, а E_n-компонентата на **E**, нормална към повърхнината на основата, намалява $\cos\theta$ пъти, така че произведението $E_n \Delta a$ не се изменя. Потокът от цялата повърхнина S както преди е равен на нула.

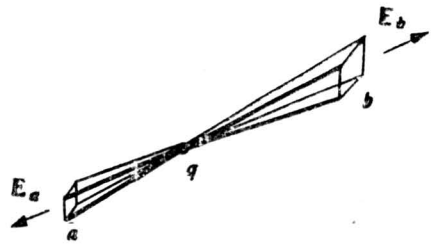
Сега вече лесно може да се види, че и потокът от обема, окръжен от *произволна* повърхнина S, трябва да бъде равен на нула. Та нали всеки обем може да бъде представен като съставен от такива части, каквито са показани на фиг. 4-6. Цялата повърхнина се дели на двойки основни участъци, а тъй като потоците през всяка от тях навън и навътре два по два се унищожават и сумарният поток през повърхнината се анулира. Тази идея се илюстрира от фиг. 4-7. Получаваме съвършено общ резултат: сумарният поток **E** през *произволна* повърхнина S в полето на точков заряд е равен на нула.

Обаче внимавайте! Нашето доказателство е в сила само тогава когато повърхнината S *не окръжава* заряда. А какво би се случило, ако точковият заряд се окаже *вътре* в повърхнината? Както и по-рано, повърхнината би могла да бъде разделена на двойки площадки, свързани с радиални прави, които преминават през заряда (фиг. 4-8). Потоците през тези участъци по същата



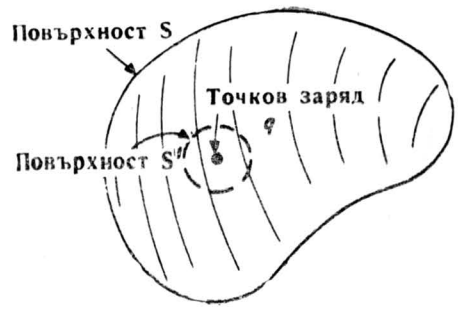
Фиг. 4-7. Всеки обем може да се представи като състоящ се от безкрайно малки пресечени конуси.

Потокът на **E** през единия край на всеки коничен сегмент е равен и противоположен на потока през другия край. Общият поток от повърхнината S поради това е равен на нула



Фиг. 4-8. Ако зарядът се намира вътре в повърхнината, потокът навън не е равен на нула

причина, както и по-рано, са два по два равни, но сега знаците им са *еднакви*. Потокът от повърхнината, която *окръжава* заряда, *не е равен* на нула. Тогава на какво е равен той? Това може да се определи с помощта на фокус. Да допуснем, че „сме махнали" заряда „отвътре", като го окръжим с малка повърхнина S', така че тя да лежи изцяло в първоначалната повърхнина S (фиг. 4-9). Сега в обема между двете повърхнини S и S' няма никакъв заряд. Общият поток от този обем (включително и потока през S') е равен на нула, в което може да се убедим с помощта на предишните аргументи. Те ни говорят, че потокът през S' навътре в *обема* е такъв, какъвто е потокът през S навън.



Фиг. 4-9. Потокът през S е равен на потока през S'

За S' можем да изберем произволна, каквато ни е удобна форма, затова нека я направим сфера със заряд в центъра (фиг. 4-10). Тогава е лесно да се пресметне потокът през нея. Ако радиусът на малката сфера е равен на r, стойността на $\mathbf{E}$ навсякъде по повърхността ѝ е равна на

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}$$

и е насочено винаги по нормалата към повърхнината. Цялият поток през S' се получава, ако тази нормална компонента на $\mathbf{E}$ се умножи по площта на повърхнината:

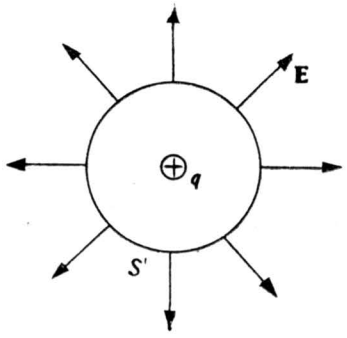
$$\text{Потокът през повърхнината } S' = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\right)(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}, \qquad (4.31)$$

т. е. е равен на число, което не зависи от радиуса на сферата! Значи и потокът навън през S е също равен на q/ε_0; тази стойност не зависи от формата на S дотогава, докато зарядът се намира вътре.

Нашите изводи може да запишем така:

$$\int\limits_{\substack{\text{произволна}\\ \text{повърхнина } S}} E_n\, da = \begin{cases} 0; & q \text{ извън } S. \\ \dfrac{q}{\varepsilon_0}; & q \text{ вътре в } S. \end{cases} \qquad (4.32)$$

Нека да се върнем към нашата аналогия със "сачмичките" и да видим има ли смисъл в нея. Нашата теорема твърди, че сумарният поток от сачмички през повърхнината е равен на нула, ако повърхнината не окръжава оръжие, което стреля сачмички. А ако оръжието е окръжено от повърхнина с какъвто и да е размер и форма, количеството на преминаващите през нея сачмички е винаги едно и също и то се определя от скоростта, с която сачмичките излитат от оръжието. Всичко това изглежда напълно разумно за запазващи се сачмички. Но съобщава ли ни този модел нещо по-вече от това, което се получава просто от уравнението (4.32)? На никого не се е удало да постигне нещо такова, че „сачмичките" да са извадили на бял свят нещо друго освен този закон. Освен него те пораждат само грешки. Поради това ние сега предпочитаме чисто абстрактната представа за електромагнитното поле.



Фиг. 4-10. Потокът през сферичната повърхнина, която обхваща точковия заряд q, е равен на q/ε_0

4-6. Закон за Гаус; дивергенция на полето E

Нашият изящен резултат — уравнението (4.32) — беше доказан за отделен точков заряд. Сега да допуснем, че имаме два заряда: зарядът q_1 — в една точка, и зарядът q_2 — в друга. Задачата изглежда вече по-трудна. Сега електричното поле, чиято нормална компонента интегрираме, е вече полето, създадено от двата заряда. С други думи, ако $\mathbf{E}_1$ е полето, което би създал само единият заряд q_1, а $\mathbf{E}_2$—електриното поле, създадено от заряда q_2, сумарното електрично поле е равно на $\mathbf{E}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2$. Потокът през

произволна затворена повърхнина S е равен на

$$\int_S (\mathbf{E}_{1n}+\mathbf{E}_{2n})\,da = \int_S \mathbf{E}_{1n}\,da + \int_S \mathbf{E}_{2n}\,da. \tag{4.33}$$

Потокът при наличие на два заряда е потокът, предизвикан от единия заряд плюс потока, създаден от другия. Ако и двата заряда се намират извън S, потокът през S е равен на нула. Ако q_1 се намира вътре, а q_2 — отвън, първият интеграл дава q_1/ε_0, а вторият — нула. Ако повърхнината окръжава и двата заряда, всеки ще даде принос в интеграла и потокът ще се окаже равен на $(q_1+q_2)/\varepsilon_0$. Общото правило е очевидно: сумарният поток от затворена повърхнина е равен на сумарния заряд *вътре* в нея, разделен на ε_0.

Този резултат представлява важен общ закон на електричното поле и се нарича теорема на Гаус или закон на Гаус:

Законът на Гаус:

$$\int_{\substack{\text{произволна}\\ \text{затворена}\\ \text{повърхнина } S}} E_n\,da = \frac{\text{сума от зарядите вътре}}{\varepsilon_0}, \tag{4.34}$$

или

$$\int_{\substack{\text{произволна}\\ \text{затворена}\\ \text{повърхнина } S,}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da = \frac{Q\ \text{вътр.}}{\varepsilon_0}, \tag{4.35}$$

където

$$Q\ \text{вътр.} = \sum_{\text{Вътре в } S} q_i. \tag{4.36}$$

Ако описваме положението на зарядите на езика на плътността на зарядите ρ, можем да считаме, че всеки безкрайно малък обем dV съдържа „точков" заряд $\rho\,dV$. Тогава сумата по всички заряди е интегралът

$$Q\ \text{вътр} = \int_{\text{обем вътре в } S} \rho\,dV. \tag{4.37}$$

От нашия извод се вижда, че законът на Гаус следва от факта, че степенният показател в закона на Кулон е точно равен на две. Поле със закон $1/r^3$, пък и произволно поле $1/r^n$ с $n\neq 2$ не би довело до закона на Гаус. Значи законът на Гаус именно изразява (само че в друга форма) закона на силите на Кулон, които действуват между два заряда. Наистина ако се тръгне от закона на Гаус, може да се изведе законът на Кулон. И двата закона са съвършено равноценни дотогава, докато силите между зарядите действуват радиално.

Сега искаме да запишем закона на Гаус на езика на производните. За да направим това, ще го приложим към повърхнината на безкрайно малък куб. В 3 гл. показахме, че потокът на $\mathbf{E}$ от такъв куб е равен на дивергенцията $\nabla\cdot\mathbf{E}$, умножена на обема на куба dV. Зарядът вътре в dV по определението на ρ е равен на $\rho\,dV$, така че законът на Гаус дава

$$\nabla\cdot\mathbf{E}\,dV = \frac{\rho\,dV}{\varepsilon_0}$$

или

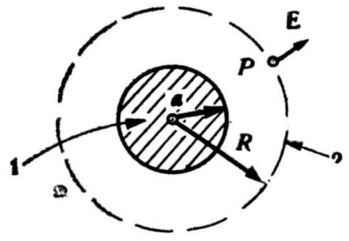
$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{4.38}$$

Диференциалната форма на закона на Гаус е първото от нашите фундаментални уравнения на полето в електростатиката, уравнението (4.5). Ние вече показахме, че двете уравнения на електростатиката (4.5) и (4.6) са еквивалентни на закона за силата на Кулон. Ще разгледаме един пример на приложение на закона на Гаус (други примери ще бъдат разгледани по-късно).

4-7. Поле на заредена сфера

Една от най-трудните задачи, които ни се наложи да решаваме, когато изучавахме теорията на гравитационното привличане, беше да докажем, че силата, която създава твърда сфера на повърхността си, е такава, каквато би била, ако цялото вещество на сферата е концентрирано в центъра ѝ. Много години Нютон не се е решавал да публикува своята теория на гравитацията, тъй като не е бил уверен в правилността на тази теорема. Ние я доказахме в т. I, гл. 13, като интегрирахме потенциала и изчислихме гравитационната сила по градиента. Сега можем много просто да докажем тази теорема. Но този път ще докажем не точно нея, а подобна теорема за хомогенно заредена сфера. (Доколкото законите на електростатиката и гравитацията съвпадат, същото доказателство може да се направи и за гравитационното поле.)

Задаваме въпрос: какво е електричното поле $\mathbf{E}$ в точката P някъде извън напълнена с хомогенно разпределен заряд сфера? Тъй като тук няма „избрана“ посока, законно е да се допусне, че $\mathbf{E}$ навсякъде е насочено от центъра на сферата по радиуса. Да разгледаме въображаема сферична повърхнина, концентрична със сферата на зарядите и която преминава през точката P (фиг. 4-11). За тази сфера потокът навън е равен на



Фиг. 4-11. Приложение на закона на Гаус за определяне на полето на хомогенно заредено кълбо:

1 — разпределението на заряда ρ; *2* — гаусовата повърхнина S

$$\int \mathbf{E}_n \, da = \mathbf{E} . 4 \pi R^2 .$$

Законът на Гаус твърди, че този поток е равен на сумарния заряд на сферата Q (разделена на ε_0):

$$\mathbf{E} . 4 \pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

или

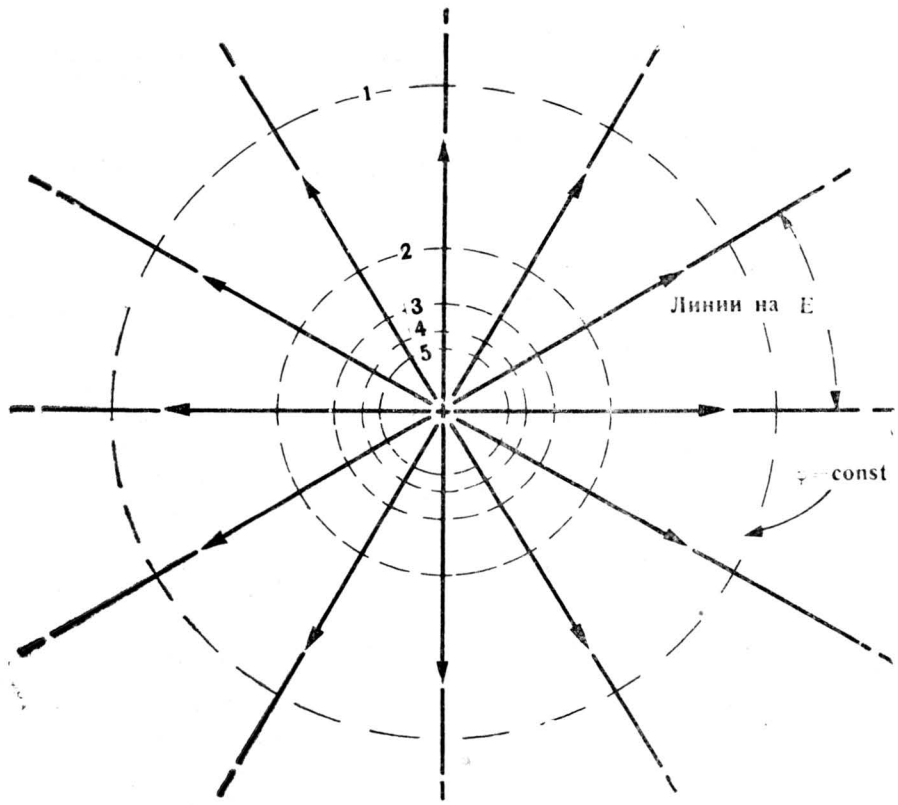
$$E = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} , \qquad (4.39)$$

а това е тъкмо формулата, която би се получила за точков заряд Q. Ние решихме задачата на Нютон по-просто, без интеграл. Разбира се, това е привидна простата: на вас ви се наложи да загубите известно време, за да се ориентирате в закона на Гаус и можете да помислите, че всъщност не е икономисано време. Но когато ви се наложи често да прилагате тази теорема, тя практически ще се рентира. Всичко е въпрос на навик.

4-8. Линии на полето; еквипотенциални повърхнини

Сега се каним да дадем геометрично описание на електростатичното поле. Двата закона на електростатиката: единият за пропорционалността на потока на вътрешния заряд и другият — за това, че електричното поле е градиент на потенциала, могат също да бъдат представени геометрично. Ще илюстрираме това с два примера.

Първият пример: вземаме поле на точков заряд. Да прекараме линии по посока на полето, които насякъде са тангенциални към векторите на полето (фиг. 4-12). Наричат ги *линии на полето*. Линиите на полето навсякъде показват посоката на електричния



Фиг. 4-12. Линиите на полето и еквипотенциалните повърхнини за положителен точков заряд

вектор. Но освен това искаме да представим и абсолютната стойност на вектора. Може да се въведе такова правило: нека интензитетът на електричното поле се представя от „плътността" на линиите. Под това разбираме броя на линии на единица площ, перпендикулярна на линиите. С помощта на тези две правила можем да начертаем картината на електричното поле. За точков заряд плътността на линиите трябва да намалява както $1/r^2$. Но площта на сферичната повърхнина, перпендикулярна към линиите на всички радиуси r, *нараства* както r^2, така че ако запазим навсякъде, на *всички* разстояния от центъра *един и същ брой* линии, *плътността* им ще остане пропорционална на големината на полето. Ние можем да гарантираме неизменност на броя на линиите на всички разстояния, ако осигурим *непрекъснатост* на линиите, т. е. ако линията вече е излязла от заряда, тя никога не свършва. На езика на линиите на полето законът на Гаус твърди, че линиите могат да започват само в плюс-зарядите и да свършват само в минус-зарядите. А броят линии, които напускат заряда q, трябва да бъде равен на q/ε_0.

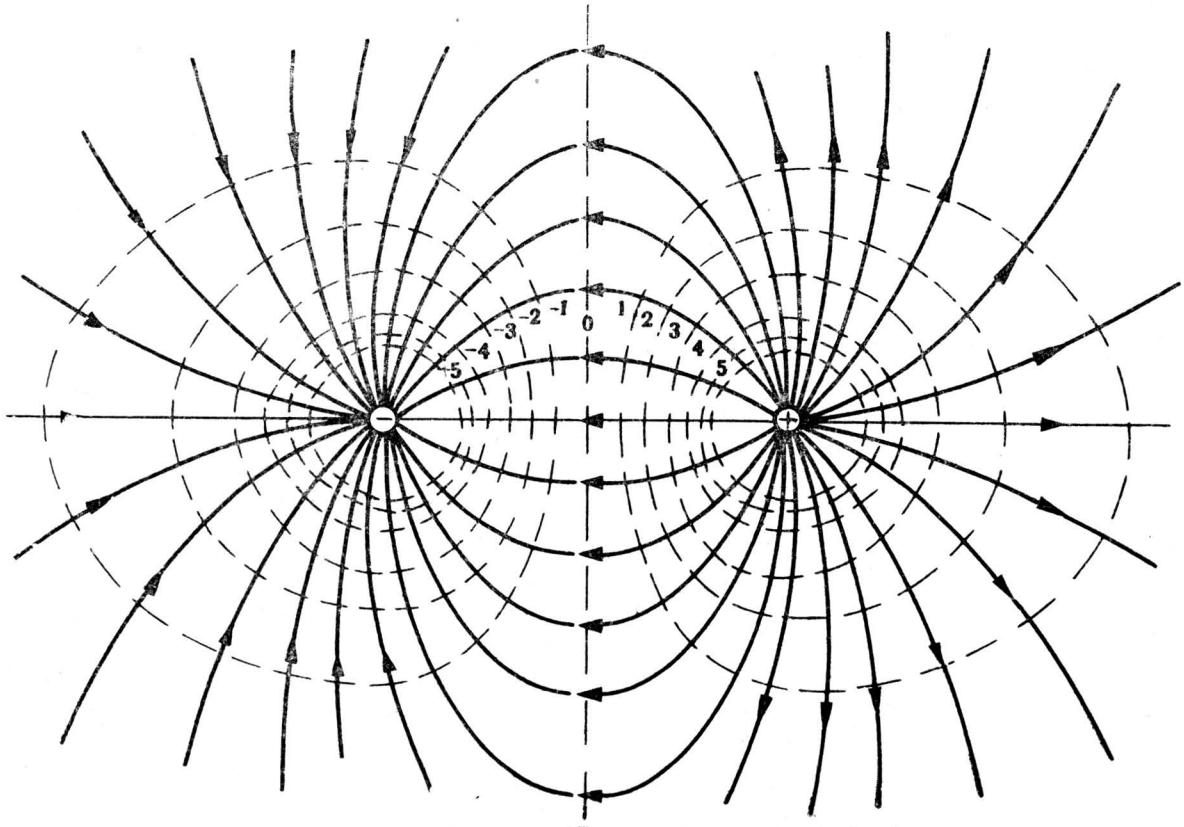
Подобна геометрична картина може да се намери и за потенциала φ. Най-просто той може да се изобрази, като се чертаят повърхнини, на които φ е постоянно. Наричат ги *еквипотенциални*, т. е. повърхнини с еднакъв потенциал. Каква е геометричната връзка между еквипотенциалните повърхнини и линиите на полето? Електричното поле е градиент на потенциала. Градиентът е насочен по най-бързото изменение на потенциала и затова е перпендикулярен на еквипотенциалната повърхнина. Ако **E** *не* би било перпендикулярно към повърхнината, полето би имало компонента *по* повърхнината и потенциалът би се изменял по повърхнината и тогава не би могло да се счита, че повърхнината е еквипотенциална. Поради това еквипотенциалните повърхнини трябва навсякъде да са перпендикулярни на линиите на електричното поле.

За отделно взет точков заряд еквипотенциалните повърхнини са сфери със заряд в центъра. На фиг. 4-12 е показано сечение на тези повърхнини с равнина, прекарана през заряда.

Като втори пример ще разгледаме полето близо до два еднакви заряда, единият — положителен, а другият — отрицателен,

Лесно е да се получи това поле. Това е суперпозиция (наслагване) на полетата на всеки от зарядите. Значи ние можем да вземем две картинки, подобни на фиг. 4-12, и да ги насложим.... не, това е невъзможно! Тогава биха се получили пресичащи се линии на полето, а това не може да бъде, защото **E** не може да има в една точка *две* посоки. Неудобството на картината на линиите на полето сега става очевидно. С помощта на геометрични разсъждения е невъзможно в проста форма да се анализира накъде ще тръгнат новите линии. От две независими картини не може да се получи тяхното съчетание. Принципът на наслагването, толкова простият и дълбок принцип на електричните полета, в картината на линии на полето няма просто съответствие.

Картината на линии на полето все пак има своя област на приложение, така че можем все пак да поискаме да начертаем тази картината за двойка равни (и противоположни) заряди. Ако изчислим от уравнение (4.13) полето, а потенциалите от (4.23), ще съумеем да начертаем и линиите на полето, и еквипотенциалите. Фиг. 4-13 демонстрира този резултат. Но първо се наложи да се реши задачата аналитично!



Фиг. 4-13. Линиите на полето и еквипотенциалните равнини за два равни, но разноименни точкови заряда

5

Приложения на закона на Гаус

5-1. Електростатиката е законът на Гаус плюс...

5-2. Равновесие в електростатичното поле

5-3. Равновесие с проводници

5-4. Устойчивост на атомите

5-5. Поле на заредена права линия

5-6. Заредена равнина; двойка равнини

5-7. Хомогенно заредено кълбо; заредена сфера

5-8. Точен ли е законът на Кулон?

5-9. Полета на проводник

5-10. Поле на кухина на проводник

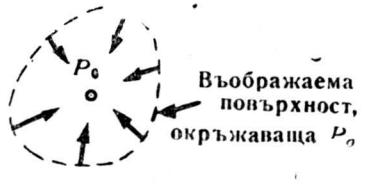
5-1. Електростатиката е законът на Гаус плюс...

Съществуват два закона на електростатиката: потокът на електричното поле от обема е пропорционален на заряда в него — законът на Гаус, и циркулацията на електричното поле е равна на нула — **E** е градиент. От тези два закона следват всички предсказания на електростатиката. Но едно е да се изкажат тези неща математично, а съвсем друго да се приложат с лекота и с необходимата степен на остроумие. В тази глава ще се занимаваме само с такива пресмятания, които могат да бъдат направени непосредствено въз основа на закона на Гаус. Ние ще докажем някои теореми и ще опишем някои ефекти (в частност в проводници), които са лесно разбираеми на основата на закона на Гаус. Сам по себе си законът на Гаус не може да даде решение на нито една задача, защото трябва да бъдат изпълнени и някои други закони. Значи, когато прилагаме закона на Гаус към решаването на частни задачи, винаги е необходимо към него да се добави нещо. Ние трябва например отнапред да правим някакви предположения за вида на полето, като се основаваме например на съображение за симетрия. Или сме длъжни по особен начин да въвеждаме представата, че полето е градиент на потенциала.

5-2. Равновесие в електростатичното поле

Да разгледаме отначало следния въпрос: при какви условия точков заряд може да бъде в механично равновесие в електростатичното поле на други заряди? Като например да си представим три отрицателни заряда във върховете на равностранен триъгълник, разположен в хоризонтална равнина. Ще остане ли в равновесие положителен заряд, поставен в центъра на триъгълника? (за по-просто пренебрегваме теглото, но и отчитането на влиянието на теглото не променя изводите.) Силата, която действува на положителния заряд, е равна на нула, но устойчиво ли е това равновесие? Ще се върне ли зарядът в положението на равновесие, ако бъде отклонен от равновесното положение? Отговорът е: не.

Няма електростатично поле, в което да съществуват точки на устойчиво равновесие с изключение на случая, когато зарядите са един върху друг. Като приложим закона на Гаус, лесно е да се разбере защо. Първо, за да бъде зарядът в равновесие в някаква точка P_0, полето в нея трябва да бъде равно на нула. Второ, за да бъде равновесието устойчиво, изисква се преместването на заряда от P_0 в *произволна посока* да предизвиква възстановяваща сила, насочена обратно на преместването. Векторите на електричното поле във *всички* околни точки трябва да бъдат насочени навътре към точката P_0. Но, както е лесно да се види, това нарушава закона на Гаус, ако в P_0 няма заряд.



Фиг. 5-1. Ако точката P_0 би отбелязвала положението на устойчиво равновесие на положителния заряд, електричното поле навсякъде в нейната околност би било насочено към P_0

Да вземем малка въображаема повърхнина, окръжаваща точката P_0 (фиг. 5-1). Ако навсякъде около P_0 електричното поле е насочено към P_0, повърхнинният интеграл от нормалната компонента определено не е равен на нула. В случая, показан на фигурата, потокът през повърхнината трябва да бъде отрицателно число. Но съгласно със закона на Гаус потокът на електричното поле през произволна повърхнина е пропорционален на количест-

вото заряд вътре в нея. Ако в P_0 няма заряд, представеното от нас поле ще наруши закона на Гаус. Да се уравновеси положителен заряд във вакуум в точка, в която няма никакъв отрицателен заряд, е невъзможно. Но ако положителният заряд е поставен в *центъра* на разпределен отрицателен заряд, той *може* да бъде в равновесие. Разбира се, разпределението на отрицателния заряд трябва само да се удържа на мястото си от външни, неелектрични сили.

Този извод направихме за точков заряд. Спазва ли се той за сложно разположение на зарядите, чието относително разположение е от нещо фиксирано (например от пръчки)? Ще разгледаме този въпрос с примера за два еднакви заряда, закрепени на една пръчка. Може ли тази комбинация в някакво електрично поле да остане в равновесие? И отново отговорът е: не. *Сумарната* сила, която действува на пръчката, не е способна да го върне към равновесното положение при произволни посоки на преместването.

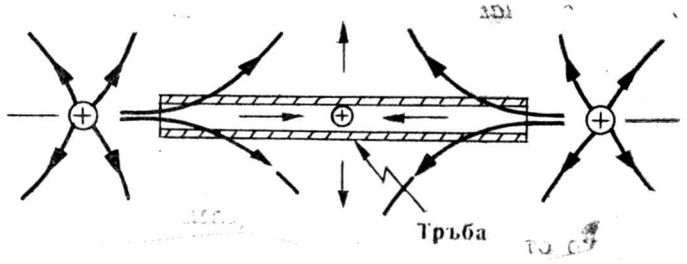
Да означим сумарната сила, която действува на оста при произволно положение с буквата **F**. Тогава **F** е векторно поле. Като повторим същите разсъждения, както и по-горе, ще достигнем до заключението, че в положението на устойчиво равновесие дивергенцията на **F** трябва да бъде отрицателно число. Но сумарната сила, която действува на пръчката, е равна на произведението на първия заряд по полето в мястото, където се намира, плюс произведението на втория заряд по полето в мястото, където той се намира

$$\mathbf{F} = q_1\mathbf{E}_1 + q_2\mathbf{E}_2. \tag{5.1}$$

Дивергенцията на **F** се дава от израза

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = q_1(\nabla \cdot \mathbf{E}_1) + q_2(\nabla \cdot \mathbf{E}_2).$$

Ако всеки от двата заряда q_1 и q_2 се намира в свободно пространство и $\nabla \cdot \mathbf{E}_1$ и $\nabla \cdot \mathbf{E}_2$, са равни на нула, и $\nabla \cdot \mathbf{F}$ е също нула, а не отрицателно число, както би трябвало да бъде при равновесие. По-нататъшното разширение на това доказателство ще покаже, че никаква здраво свързана комбинация на произволен брой заряди не е способна да замре в положение на устойчиво равновесие в електростатичното поле във вакуум.



Фиг. 5-2. Зарядът може да бъде в равновесие, ако има механични ограничения

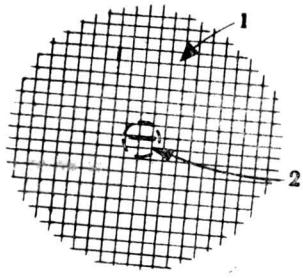
Но ние не се каним да доказваме, че ако зарядът може да се хлъзга по осите или да се опира на други механични връзки, въпреки това равновесието е невъзможно. Това не е така. Да вземем тръба, в която зарядът може свободно да се движи напред и назад (но не и встрани). Сега е лесно да се създаде електрично поле, което на краищата на тръбата да е насочено навътре (при това близо до центъра на тръбата му се разрешава да бъде насочено навън, встрани). За това е необходимо просто да се постави положителен заряд на всеки край на тръбата (фиг. 5-2). Сега точка на равновесие съществува даже и в случая, когато дивергенцията на **E** е равна на нула. Разбира се, зарядът не би се оказал в устойчиво равновесие, ако нямаше „неелектричните" сили на стените на тръбата.

5-3. Равновесие с проводници

В система закрепени заряди няма устойчиво място за пробен заряд. А как стои въпросът със система заредени проводници? Може ли системата от заредени проводници да създаде поле, в което макар и някъде да може да се намери устойчиво местенце за точков заряд? (Разбира се, има се пред вид място не на повърхнината на проводника.) Вие знаете, че проводниците се характеризират с това, че зарядите по тях могат да се движат свободно. Може би ако малко се премести точковият заряд, останалите заряди на проводника ще се преместят така, че на точковия заряд ще започне да действува връщаща сила? Отговорът е отново отрицателен, макар че от приведеното доказателство това въобще не следва. В този случай доказателството е посложно и ние ще набележим само неговия ход.

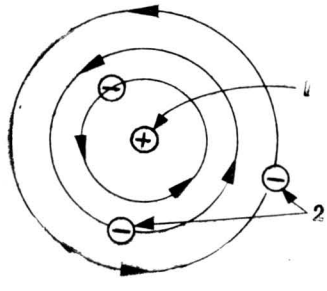
Първо, ние забелязваме, че зарядите се преразпределят по проводниците само тогава, когато от движението им сумарната им потенциална енергия се намалява. (Част от енергията им, когато те се движат по проводника, преминава в топлина.) А ние вече показахме, че когато зарядите, които създават полето, *са стационарни*, близко до произволна точка P_0, в която полето е равно на нула, съществува посока, в която преместването на точков заряд от P_0 ще *намали* енергията на системата (тъй като силата е насочена от P_0). Всяко преместване на зарядите по проводниците само може още повече да намали потенциалната им енергия, така че (по принципа на виртуалната работа) тяхното движение може само *да увеличи* силата в посочената посока, но съвсем не може да промени знака ѝ.

Нашите думи не означават, че е невъзможно да се уравновеси зарядът от електрични сили. Това може да се направи, ако със специални устройства се контролира положението или размерът на удържаните заряди. Вие знаете, че пръчка, която стои в гравитационно поле, на долния си край е неустойчива, но от това не следва, че не можете да я уравновесите на края на палеца си. Точно така и зарядът може да се удържи на едно място с помощта единствено на електрични сили, ако навреме се изменят тези сили. Но това не може да се направи с помощта на пасивна, т. е. *статична* система от сили.



Фиг. 5-3. Томсънов модел на атома:

1 — хомогенно разпределен положителен заряд; *2* — отрицателния заряд е концентриран в центъра



Фиг. 5-4. Модел па атома на Ръдърфорд—Бор:

1 — положителни ядра в центъра; *2* — отрицателните електрони на планетарни орбити

5-4. Устойчивост на атомите

Щом зарядите не могат да имат устойчиво положение, разбира се, не е правилно да се представя веществото като построено от статични *точкови* заряди (електрони и протони), управлявани само от законите на електростатиката. Такава статична конфигурация е немислима, тя ще се разпадне!

Навремето се е предлагало да се счита положителният заряд на атома разпределен хомогенно по сфера, а отрицателните заряди (електроните) в покой вътре в положителния заряд (фиг. 5-3). Това е бил първият атомен модел, предложен от Томсън. Но Ръдърфорд от опита, направен от Гайгер и Марсден, направи извод, че положителните заряди са силно концентрирани и образуват това, което наричаме ядро. И се наложи да се изостави статичният модел на Томсън. След това Ръдърфорд и Бор предположиха, че равновесието може да бъде динамично — електроните се въртят по орбити (фиг. 5-4). Орбиталното движение в този случай би удържало електроните от падане върху ядрото. Но ние с вас знаем поне една трудност, която възниква при такава представа за атома. При движението по орбити електроните се ускоряват (поради въртеливото движение) и поради това те биха излъчвали енергия. При това те губят кинетична енергия, необходима им, за да останат на орбитите и трябва да падат, като се движат по спирали върху ядрото. Отново неустойчивост!

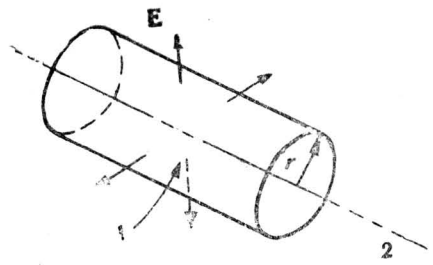
Сега стабилността на атома се обяснява с помощта на кван-

товата механика. Електростатичните сили привличат електрона към ядрото доколкото това е възможно, но електронът е принуден да остава размазан в пространството на разстояния, определени от принципа на неопределеността. Ако той се удържа в тясно пространство близо до ядрото, той би имал голяма неопределеност в импулса. Но това би означавало, че очакваната му енергия е голяма и може да бъде използувана за разкъсване на електричното привличане на ядрото. Излиза, че в крайна сметка електричното равновесие не се различава много от идеята на Томсън, но този път е размазан отрицателният заряд (защото масата на електрона е несравнено по-малка от масата на протона).

5-5. Поле на заредена права линия

Законът на Гаус може да бъде приложен за решаване на много задачи, свързани с електрично поле, което притежава специална симетрия (най-често сферична, цилиндрична или плоска). В останалата част на тази глава ще се заемем с прилагането на закона на Гаус към някои задачи от подобен род. Лекотата, с която ще се решават тези задачи, може да създаде грешно впечатление за мощността на метода и за възможността с негова помощ да се премине към решаването на много други задачи. За съжаление това не е така. Списъкът на задачите, които лесно се решават с помощта на закона на Гаус, бързо се изчерпва. В следващите глави ние ще развием далече по-мощни методи за изследване на електростатичните полета.

Като първи пример ще разгледаме система с цилиндрична симетрия. Нека имаме много дълга равномерно заредена спица. Под това разбираме електрични заряди, равномерно разпределени по дължината на безкрайно дълга права, така че на единица дължина да се пада заряд λ. Ние искаме да определим електричното поле. Разбира се, задачата може да се реши чрез интегриране на приносите на всички части на правата в полето. Но ние се каним да я решим без интегриране, а само с помощта на закона на Гаус и някои догатки. Първо, лесно е да се сетим, че електричното поле е насочено по радиуса. На всяка осева компонента от зарядите, които лежат от едната страна на някаква повърхнина, трябва да отговаря същата осева компонента от зарядите от другата страна на повърхнината. В крайна сметка остава само радиалното поле. Освен това е резонно да се предполага, че във всички точки на еднакво разстояние от правата, полето има еднаква големина. Това е очевидно. (Може би не е лесно да се докаже това, но е вярно, ако пространството е симетрично, а ние считаме, че това е така.)



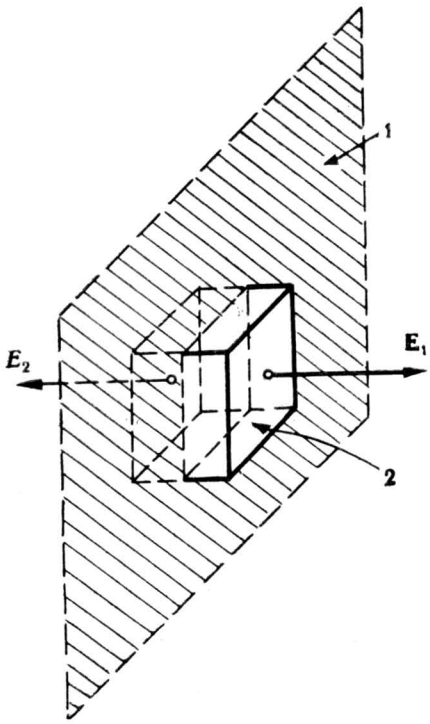
Фиг. 5-5. Цилиндрична гаусова повърхнина, коаксиална на зарядената права: *1* — гаусова повърхнина; *2* — заредена права

Законът на Гаус може да се приложи по следния начин. *Да си представим* повърхнина, която има форма на цилиндър, чиято ос съвпада с нашата права (фиг. 5-5). Съгласно със закона на Гаус целият поток **E** от тази повърхнина е равен на заряда вътре в нея, делен на ε_0. Щом полето се счита нормално на повърхнината, нормалната му компонента е големината на вектора на полето. Да я означим с E. Нека радиусът на цилиндъра е r, а дължината му за удобство изберем равна на единица. Потокът през цилиндричната повърхнина е равен на произведението на E по площта на повърхнината, т. е. по $2\pi r$. Потокът през основите на цилиндъра е равен на нула, защото полето е тангенциално към тях. Целият заряд вътре в нашата повърхнина е точно равен на λ, защото дължината на оста на цилиндъра е равна на единица. Тогава законът на Гаус дава

$$E \cdot 2\pi r = \frac{\lambda}{\varepsilon_0},$$

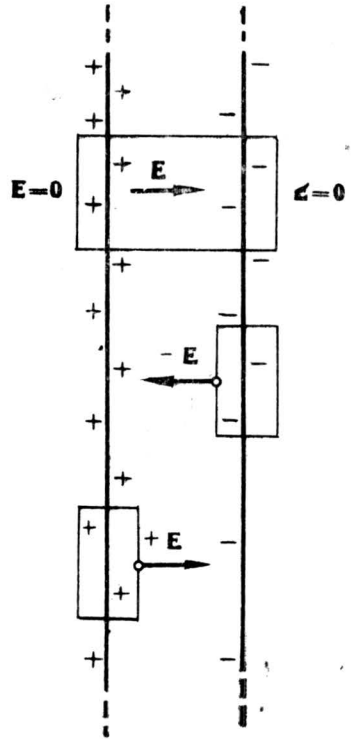
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (5.2)$$

Електричното поле на заредена права е обратно пропорционално на първата степен на разстоянието до правата.



Фиг. 5-6. Електричното поле около хомогенно заредена равнина, намерено с помощта на теоремата на Гаус, приложена към въображаемо блокче:

1 — хомогенно заредена равнина; *2* — гаусовата повърхнина



Фиг. 5-7. Полето между два заредени листа е равно на σ/ε_0

5-6. Заредена равнина; двойка равнини

Като друг пример ще пресметнем полето на хомогенно зареден плосък лист. Да предположим, че листът има безкрайна дължина и на единица площ зарядът е σ. Изведнаж ни идва в главата следното съображение: от симетрията следва, че полето е насочено перпендикулярно на равнината и *ако не съществува поле от всички останали заряди в света,* полето от двете страни на равнината трябва да бъде едно и също (по големина). Този път за гаусова повърхнина ще приемем правоъгълен сандък, пресичащ нашата равнина (фиг. 5-6). Всяка от стените, успоредна на равнината, има площ A. Полето е нормално към тези две стени и успоредно на останалите четири. Сумарният поток е равен на E, умножено по площта на първата стена плюс E, умножено по площта на противоположната стена; от останалите стени никакви слагаеми няма да има. Зарядът вътре в сандъка е равен на σA. Като изравним потока със зарядите, ще напишем

$$EA+EA=\frac{\sigma A}{\varepsilon_0},$$

откъдето

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{5.3}$$

Прост, но важен резултат.

Вие помните може би, че същият резултат беше получен в първите глави чрез интегриране по цялата повърхнина. Законът на Гаус дава отговор значително по-бързо (макар че той не е така широко приложим като предишния метод).

Ще подчертаем, че този резултат се отнася само за поле, създадено от заряди, разположени на равнината. Ако в съседство има други заряди, общото поле близко до равнината би било сума от (5.3) и полетата на останалите заряди. Законът на Гаус тогава само би гарантирал, че

$$E_1+E_2=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \tag{5.4}$$

където E_1 и E_2 са полетата, насочени от двете страни на равнината навън.

Задачата за две успоредни равнини с равни и противоположни плътности на зарядите $+\sigma$ и $-\sigma$ се решава също просто, стига отново да се предположи, че външният свят е абсолютно симетричен. Ще направите ли суперпозиция на двете решения за отделните равнини, или ще построите гаусов сандък, който обхваща и двете равнини, и в двата случая е лесно да се види, че полето извън равнините е равно на нула (фиг. 5-7,*а*). Но ако включите в гаусовия сандък само едната или другата равнина, както е показано на фиг. 5-7,*б* или *в*, лесно ще установим, че полето между равнините трябва да бъде два пъти по-голямо от полето на отделна равнина. Резултатът е такъв:

$$E \text{ (между равнините)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \tag{5.5}$$

$$E \text{ (извън равнините)} = 0. \tag{5.6}$$

5-7. Хомогенно заредено кълбо; заредена сфера

В гл. 4 вече прилагахме закона на Гаус, когато трябваше да намерим полето извън заредена сферична област. Същият метод може да ни даде и полето в точки *вътре* в кълбото. Това пресмятане например може да бъде използувано за получаване на добро приближение за полето вътре в атомното ядро. Въпреки че протоните в ядрото взаимно се отблъскват, те поради силното ядрено привличане са разпределени почти равномерно по цялото ядро.

Нека имаме сфера с радиус R, хомогенно изпълнена със заряди. Нека зарядът в единица обем е равен на ρ. Отново, като използуваме съображения за симетрия, може да предположим, че полето е радиално и в точките, еднакво отдалечени от центъра, по големина е еднакво. За да определим полето в точка на разстояние r от центъра, ще представим сферичната гаусова повърхнина с радиус r ($r<R$), както е показано на фиг. 5-8. Потокът от от нея е равен на

$$4\pi r^2 E.$$

Зарядът вътре в нея е равен на вътрешния обем, умножен по ρ, т. е.

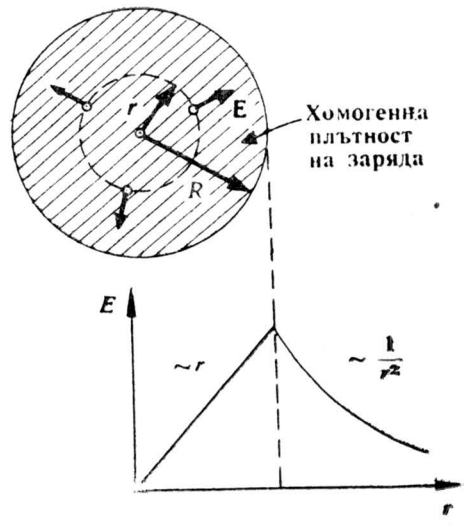
$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho.$$

Като приложим закона на Гаус, получаваме големината на полето

$$E=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \quad (r<R). \tag{5.7}$$

Виждате, че при $r=R$ тази формула дава правилен резултат. Електричното поле *е пропорционално* на разстоянието от центъра и е насочено по радиуса навън.

Аргументите, които ние току-що приведохме за хомогенно заредено кълбо, може да се приложат и към заредена сфера. Като предположим отново радиалност и сферична симетрия на полето, от закона на Гаус веднага получаваме, че полето извън сферата по всичко е подобно на полето на точков заряд, полето пък вътре в сферата е нула (ако прокараме гаусова повърхнина вътре в сферата, вътре в нея заряди няма да има).



Фиг. 5-8. Законът на Гаус може да се приложи за определяне на полето вътре в хомогенно заредено кълбо

5-8. Точен ли е законът на Кулон?

Ако се вгледаме по-внимателно в това, *как* полето вътре в сферата се оказва нулево, ще разберем по-добре защо законът на Гаус дължи своя произход на закона на Кулон, т. е. точна зависимост на силата от втората степен на разстоянието. Да вземем произволна точка P вътре в хомогенно заредена сферична повърхнина. Да си представим тесен конус, който започва в точка P и продължава до повърхнината на сферата, като изразява малък сферичен участък Δa_1 (фиг. 5-9). Точно симетричният конус от другата страна на върха ще изреже на повърхнината площ Δa_2. Ако разстоянията от P до тези два елемента площ са равни на r_1 и r_2, площите се намират в отношение

$$\frac{\Delta a_2}{\Delta a_1}=\frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

(Вие можете да докажете това за всяка точка на сферата с помощта на геометрията.)

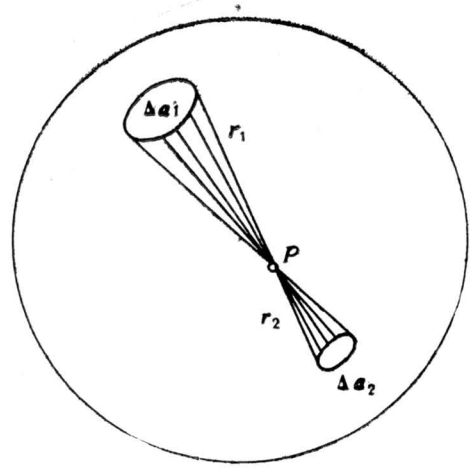
Ако повърхнината на сферата е заредена равномерно, зарядът Δq на всеки елемент на повърхнината е пропорционален на площта му

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta q_1}=\frac{\Delta a_2}{\Delta a_1}.$$

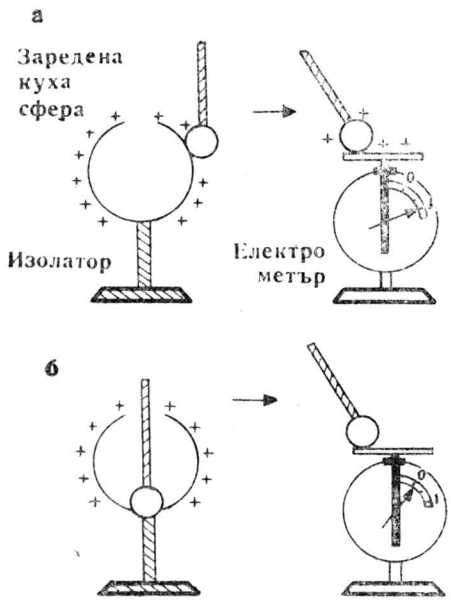
Тогава законът на Кулон твърди, че големината на полетата, създадени от двата елемента на повърхнината в P, се намират в отношение

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{q_2/r_2^2}{q_1/r_1^2}=1.$$

Полетата точно взаимно се унищожават. По такъв начин може да се разбие на двойки цялата сфера. Значи цялото поле в точ-



Фиг. 5-9. Във всяка точка P вътре в заредена сферична повърхнина полето е равно на нула



Фиг. 5-10. Вътре в затворена проводяща обвивка електричното поле е равно на нула

ката P е равно на нула. Но вие виждате, че това не би било така, ако степенният показател на r в закона на Кулон не е равен точно на две.

Валидността на закона на Гаус зависи от закона на обратните квадрати на Кулон. Ако законът за силата не се подчинява точно на зависимостта $1/r^2$, полето вътре в хомогенно заредена сфера не би било равно точно на нула. Например ако полето би се изменяло по-бързо (да речем както $1/r^3$), част от сферата, която се намира по-близко до точката P, би създала в точката P по-силно поле, отколкото по-далечната част. Би се получило (за положителен повърхнинен заряд) радиално поле, насочено към центъра. Тези заключения ни подсказват елегантен път за проверка на точността на изпълнение на закона на обратните квадрати. За това е необходимо само да се знае точно на нула ли е равно полето вътре в хомогенно заредена сфера.

За наше щастие такъв метод съществува. Нали обикновено е трудно да се измери физична величина с голяма точност. Не е трудно да се постигне еднопроцентна точност, но как ще бъде, ако ни е необходимо да измерим закона на Кулон с точност например, до една милярдна? Може почти да се гарантира, че не е възможно да се измери с такава точност *силата,* която действува между две заредени тела даже и с най-добрите уреди. Но ако е необходимо да се убедим, че полето вътре в сферата е *по-малко* от някаква стойност, може да се проведе достатъчно точно измерване на валидността на закона на Гаус и по този начин да се провери обратната квадратична зависимост на закона на Кулон. Всъщност се извършва *сравняване* на закона на силата с идеалния закон на обратните квадрати. Именно такова сравняване на еднакви или почти еднакви неща обикновено става основа на най-точни физични измервания.

Все пак как да се наблюдава полето вътре в заредена сфера? Един от начините е да се опитаме да заредим тяло, като го докоснем до вътрешната част на сферичен проводник. Вие знаете, че ако докоснете с металическо топче заредено тяло и след това електрометър, уредът ще се зареди и стрелката ще се отклони от нулевото положение (фиг. 5-10,*а*). Топчето събира заряди, защото извън заредената сфера има електрични полета, които заставят зарядите да преминават на топчето (или от него). А ако направите същия опит, като докоснете с топчето *вътрешността* на заредената сфера, ще видите, че към електрометъра заряд не се поднася. От този опит изведнаж се вижда, че вътрешното поле е в най-добрия случай няколко процента от външното и че законът на Гаус е верен най-малко приблизително.

Изглежда, че първият, който е забелязал, че полето вътре в заредена сфера е равно на нула, е бил Бенджамен Франклин. Това му се е сторило странно. Когато той съобщил за това на Пристли, последният е подозирал, че това е свързано със закона на обратните квадрати, защото е било известно, че сферичният слой вещество не създава вътре в себе си гравитационно поле. Но Кулон е измерил обратната квадратична зависимост едва след 18 години, а законът на Гаус се е появил на бял свят по-късно.

Законът на Гаус е бил проверяван много щателно: за това са поставяли електрометър вътре в голяма сфера и са наблюдавали ще се отклони ли стрелката, когато сферата се зареди до високо напрежение. Винаги се получавал отрицателен резултат. Ако се знае геометрията на апарата и чувствителността на уреда може да се пресметне минималното поле, което е все още достъпно за наблюдаване. От това число може да се установи горната граница на отклонението на степенния показател от две. Ако се запише зависимостта на електростатичните сили от разстоянието във вида $r^{-2+\varepsilon}$, може да се определи горната граница ε. По този начин Максвел е установил, че ε е по-малко от 1/10000. Опитът е бил повторен и усъвършенствуван в 1936 г. от Плимптън и Лафтън. Те установили, че кулоновият показател се различава от 2 по-малко от една милиардна.

Това ни навежда на един интересен въпрос: как точно се из-

пълнява законът на Кулон при различни обстоятелства? В токущо описаните опити се измерваше зависимостта на полето от разстоянието за разстояния от порядъка на десетки сантиметри. А какво може да се каже за вътрешноатомни разстояния, вътре в атома на водорода, където, както ние считаме, електронът се привлича към ядрото по същия закон на обратните квадрати? Разбира се, за описание на механичната част от поведението на електрона е необходима квантова механика, но силата тук е както преди обикновената електростатична сила. В постановката на задачата за атома на водорода е известна потенциалната енергия на електрона като функция на разстоянието от ядрото и тогава законът на Кулон довежда до потенциал, обратно пропорционален на първата степен на разстоянието. С каква точност е известен този показател на такива малки разстояния? В резултат на много щателни измервания на относителното разположение на енергетичните нива на водорода, проведен в 1947 г. от Лемб и Ризърфорд, сега ни е известно, че на разстояния от порядъка на атомните, т. е. от порядъка на ангстрьом (10^{-8} cm), показателят остава такъв с точност до една милиардна.

Такава точност на измерванията на Лемб и Ризърфорд се оказа възможна отново благодарение на една физична „случайност". Измежду състоянията на атома на водорода има две такива, чиито енергии трябва да бъдат еднакви *само* ако потенциалът се изменя точно по закона $1/r$. Измервана е много малка *разлика* в енергиите по честотата ω на фотоните, излъчвани или поглъщани при преходи от едното състояние в другото (съгласно с формулата $\Delta E = \hbar\omega$). Пресмятанията показаха, че ΔE забележимо би се различавала от наблюдаваната стойност, ако степенният показател в закона за силата $1/r^2$ се различава от 2 само с една милиардна.

А верен ли е този закон и на още по-малки разстояния? Измерванията в ядрената физика показаха, че на типично ядрени разстояния (от порядъка на 10^{-13} cm съществуват електростатични сили и че те се изменят все още както обратните квадрати на разстоянието. Едно подтвърждение на горното твърдение ще разгледаме в следващите глави. Ние сме уверени, че законът на Кулон е все още в сила и на разстояния около 10^{-13} cm.

Какво може да се каже за разстояния 10^{-14} cm? Този интервал е изследван чрез бомбардиране на протони със силно енергетични електрони и проследяването на тяхното разсейване. Днешните данни показват, че на такива разстояния законът търпи крах. Електричните сили на разстояния, по-малки от 10^{-14} cm, се оказват едва ли не 10 пъти по-слаби. Има две обяснения на този факт. Или че законът на Кулон на такива малки разстояния не действува, или че тези тела (електрони и протони) не са точкови заряди. Възможно е, единият от тях да е някак си размазан (а може би и двата). Повечето физици предпочитат да мислят, че е размазан зарядът на протона. Ние знаем, че протоните силно взаимодействуват с мезоните. Това означава, че протонът понякога съществува във вид на неутрон с π^+-мезон наоколо. Такова разположение средно би изглеждало като малка топчица положителен заряд. А ние знаем, че не може да се счита, че полето на заредена сфера се изменя по закона $1/r^2$ до самия център на сферата. Напълно вероятно е, че зарядът на протона е размазан, но теорията на пионите е още много несъвършена и не е изключено и законът на Кулон да не е в сила на малки разстояния. Въпросът засега остава открит.

Още един трудно разрешим въпрос: ако законът на обратните квадрати е верен и на разстояния от порядъка на 1 m и на разстояния от порядъка на 10^{-10} m, остава ли коефициентът $1/4\,\pi\varepsilon_0$ същия? Да — гласи отговорът, — най-малко с точност до 15 милионни.

Да се върнем към важния въпрос, от който се отклонихме, когато говорихме за опитното потвърждаване на закона на Гаус. Вас вероятно ви е удивила точността в опитите на Максвел и

Плимпътн—Лафтън. Та нали едва ли сферичният проводник може да бъде идеална сфера. Да се достигне точност една милиардна е прекрасно; но резонно е да се попита как са могли така точно да изработят сферата? Вероятно върху сферата е имало малки неправилности както на всяка реална сфера и не са ли могли тези неправилности да създадат някакво поле вътре? Сега искаме да покажем, че изобщо не е необходима идеална сфера. Оказва се, че може да се докаже, че вътре в затворена проводяща обвивка с *произволна* форма няма поле. С други думи, опитите зависеха от $1/r^2$, но съвсем не бяха свързани със сферичната форма на повърхнината (нима със сфера по-лесно би се пресмет нало полето, *ако* законът на Кулон си се оказал погрешен). И така, ние отново се връщаме към този въпрос. За решаването му ни е необходимо да знаем някои свойства на проводниците на електричество.

5-9. Полета на проводник

Проводник на електричество е твърдо тяло, в което има много „свободни" електрони. Електроните могат да се движат свободно във *веществото*, но не могат да напускат повърхнината. В метала има толкова много свободни електрони, че всяко електрично поле привежда в движение много от тях. Или възникналият по такъв начин ток на електроните трябва непрекъснато да поддържа своето съществуване за сметка на външните източници на енергия, или движението на електроните се прекратява, щом като източниците, създали полето отначало, се разредят. В условията на „електростатистиката" ние не разглеждаме непрекъснати източници на ток (за тях ще говорим в магнитостатиката), така че електроните се движат само докато не се разположат така, че навсякъде вътре в проводника се създаде нулево електрично поле. (По правило това става за малки части от секундата.) Ако би останало вътре някакво поле, то би принудило да се движат още някои електрони; възможно е само такова електростатично решение, когато полето навсякъде вътре е равно на нула.

Сега да разгледаме *вътрешността* на заредено проводящо тяло. (Имаме пред вид вътрешната част на самия *метал*.) Тъй като металът е проводник, вътрешното поле трябва да бъде нула, а значи и градиентът на потенциала φ е равен на нула. Това значи, че φ от точка в точка не се изменя. Всеки проводник е еквипотенциална *област*, а повърхнината му — еквипотенциална. Щом в проводящ материал електричното поле навсякъде е равно на нула и дивергенцията на **E** е също равна на нула и по закона на Гаус плътността на заряда във *вътрешната част* на проводника става равна на нула.

Но ако вътре в проводника не може да има заряди, как той изобщо може да бъде зареден? Какво имаме пред вид, когато говорим, че проводникът е зареден? Къде са тези заряди? Те се намират на повърхнината на проводника, където съществуват големи сили, които не им дават да я напуснат, така че те не са напълно „свободни". Когато ще изучаваме физиката на твърдото тяло, ще видим, че излишният заряд във всеки проводник се намира само в тесния слой до повърхността със средна дебелина от порядъка на един-два атома. За нашите сегашни цели е достатъчно правилно да се говори, че всеки заряд, попаднал на (или в) проводник, се събира на повърхността му; вътре в проводника няма никакви заряди.

Ние забелязваме също, че електричното поле *около самата повърхност* на проводника трябва да бъде перпендикулярно към повърхнината. То не може да има тангенциална компонента. Ако тя би се появила, електроните биха се движили *по* повърхнината; няма сили, които са способни да попречат на това. Това може да се изрази и иначе: ние знаем, че линиите на електричното поле трябва да бъдат насочени винаги перпендикулярно на еквипотенциалната повърхнина.

Като приложим закона на Гаус, ние можем да свържем интензитетът на полето до самата повърхност на проводника с локалната плътност на заряда на повърхността. За гаусова повърхнина може да приемем малка цилиндрична чаша, наполовина потопена в проводника, а другата половина извън него (фиг. 5-11). Принос в общия поток **E** дава само частта на чашата, която се намира извън проводника. Тогава полето до външната повърхност на проводника е равна на

Извън проводника:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \tag{5.8}$$

където σ е *локалната* повърхнинна плътност на заряда.

Защо слой заряди на проводник създава не такова поле, каквото създава само слой от заряди? С други думи, защо (5.8) е два пъти по-голямо от (5.3)? Но нали ние *не твърдяхме*, че в проводника като че ли няма повече никакви „други" заряди. Всъщност, за да бъде полето **E** в проводника равно на 0, в него обезателно трябва да присъствуват някакви заряди. В непосредствена близост до точката P на повърхността зарядите наистина създават поле $E_{лок} = \sigma_{лок}/R\varepsilon_0$ както навътре, така и навън от повърхността. Но всички останали заряди на проводника общо „организират заговор", за да създадат в точката P добавъчно поле, равно по големина на $E_{лок}$. Сумарното вътрешно поле става нула, а външното се удвоява: $2E_{лок} = \sigma/\varepsilon_0$.



Фиг. 5-11. Електричното поле до най-външната повърхност на проводник е пропорционално на локалната повърхнинна плътност на заряда:

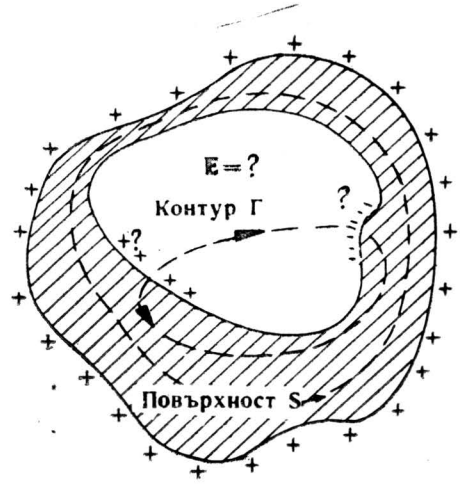
1 — гаусова повърхнина; 2 — локална плътност σ на повърхнинния заряд

5-10. Поле в кухина на проводник

Да се върнем сега към проблема за проводник, който има кухина. В *метала* няма поле, а съществува ли то в *кухината*? Ще покажем, че ако кухината е *празна*, поле не може да има *каквато и да е формата* на проводника или кухината (фиг. 5-12). Ще разгледаме гаусова повърхнина, подобна на S, на фиг. 5-12, която окръжава кухината, но остава навсякъде във веществото на проводника. Навсякъде върху повърхнината полето е равно на нула, така че поток през S не може да има и *сумарният* заряд вътре в S трябва да бъде равен на нула. След това може да се изведе от симетрията, че на вътрешната повърхност на сферичната обвивка няма *никакъв* заряд. Но в по-общ случай ние можем само да кажем, че на вътрешната повърхност на проводника има равно количество положителни и отрицателни заряди. Може би ще кажете, че на едната част има положителен заряд, а някъде другаде — отрицателен (вж. фиг. 5-12)? Такива нещата се изключват от закона на Гаус.

Всъщност, разбира се, се получава, че равните, но противоположни по знак заряди на вътрешната повърхност трябва да се хлъзгат едни към други и да се унищожат. Ние може да се убедим, че те се унищожават, като приложим закона за равенство на нула на циркулацията на **E** (електростатика). Нека на някакви части на вътрешната повърхност се окажат заряди. Ние знаем, че общо трябва да присъствуват равно количество противоположни заряди. Но всички линии на полето **E** започват от положителни заряди и завършват върху отрицателните (разглеждаме случай, когато в кухината няма свободни заряди). Да си представим сега контур Г, който пресича кухината по посоката на силовите линии от някакъв положителен заряд към някакъв отрицателен и се връща в изходната точка по проводника (вж. фиг. 5-12). Интегралът по такава силова линия в границите от положителния до отрицателния заряд няма да бъде равен на нула, а интегралът по пътя през метала е равен на нула, тъй като там $\mathbf{E} = 0$. Така че бихме имали

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 ???$$



Фиг. 5-12. На какво е равно полето в празна кухина с произволна форма на проводник?

Но криволинейният интеграл от **E** по произволен затворен контур в електростатично поле е винаги равен на нула. Значи вътре в празна кухина не може да има полета, както не може да има заряди на вътрешната повърхност.

Забележете, че ние през цялото време подчертавахме, че кухината е *празна.* Ако *се поставят* някакви заряди във фиксирани места на кухината (да речем на изолатор или на малък проводник, изолиран от основния проводник), вътре в кухината *може* да съществуват полета. Но тогава тя няма да бъде „празна".

Ние показахме, че ако кухината изцяло е окръжена от проводник, никакво статично разпределение на заряди *отвън* никога не създава поле вътре. Това обяснява принципа на „защита" на електрични уреди, които се поставят в метални кутии. Към същите разсъждения може да се прибегне, ако е необходимо да се покаже, че никакво статично разпределение на заряди *вътре* в затворен непрекъснат проводник не може да създаде поле *извън* него. Защитата действува в двете посоки! В електростатиката (но не и в изменящите се полета) полетата от двете страни на непрекъсната проводяща обвивка не зависят едно от друго.

Сега вие разбирате защо е било възможно да се провери законът на Кулон с такава точност. Формата на кухата обвивка не е имала никакво значение. Тя изобщо не е било необходимо да бъде кръгла, тя би могла да бъде и куб! Ако законът на Гаус е точен, полето вътре винаги е равно на нула. Сега вие разбирате защо е напълно безопасно да се седи във високоволтния генератор на Ван-де-Грааф при милион волта, без да се страхувате, че ще ви удари ток — вас ви пази самият Гаус!

6

Електрично поле в различни физични условия

6-1. Уравнения на електростатичния потенциал

В тази глава ще разкажем за поведението на електричното поле при едни или други обстоятелства. Вие ще се запознаете с това, как се проявява електричното поле и с някои математични методи, които се използуват за определянето на полето.

Още отначало ще отбележим, че математично цялата задача се състои в решаването на две уравнения — максвеловите уравнения на електростатиката

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{6.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{6.2}$$

Фактически тези две уравнения могат да бъдат обединени в едно. От второто уравнение веднага следва, че полето може да се счита градиент на някакъв скалар (вж. гл. 3, § 7)

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \tag{6.3}$$

Електричното поле от всякакъв частен вид, ако е необходимо, може напълно да се опише с помощта на потенциала на полето φ. Диференциалното уравнение, което трябва да удовлетворява φ, се получава, ако се замести (6.3) в (6.1)

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{6.4}$$

Разходимостта на градиента на φ е същото, че ∇^2 действува на φ

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \tag{6.5}$$

така че уравнението (6.4) ще запишем във вида

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{6.6}$$

Операторът ∇^2 се нарича лапласиан, а уравнението (6.6) — уравнение на Пуасон. Целият предмет на електростатиката от математична гледна точка се заключава просто в изучаването на едно единствено уравнение — (6.6). Щом от (6.6) намерите φ, полето $\mathbf{E}$ веднага се получава от (6.3).

Първо да се обърнем към специалния клас задачи, в които ρ е зададено като функция на x, y, z. Такава задача е почти тривиална, защото ние вече можем да решаваме уравнението (6.6) в общия случай. Ние вече показахме, че ако φ е известно във всяка точка, потенциалът в точката (1) е равен на

$$\varphi(1) = \int \frac{\rho(2)\, dV_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}, \tag{6.7}$$

където $\rho(2)$ е плътността на заряда, dV_2 — елементът на обема в точката (2), а r_{12} — разстоянието между точките (1) и (2). Решението на *диференциалното* уравнение (6.6) се сведе до *интегриране* по пространството. Решението (6.7) трябва особено да се отбележи, защото във физиката често се срещат ситуации, довеждащи до уравнения, които изглеждат така:

$$\nabla^2 \text{ (от нещо)} = \text{ (на нещо друго)}$$

и (6.7) е прототип на решение за всяка такава задача.

6-1. Уравнения на електростатичния потенциал

6-2. Електричен дипол

6-3. Забележки за векторните уравнения

6-4. Диполният потенциал като градиент

6-5. Диполно приближение за произволно разпределение

6-6. Полета на заредени проводници

6-7. Метод на изображенията

6-8. Точков заряд до проводяща равнина

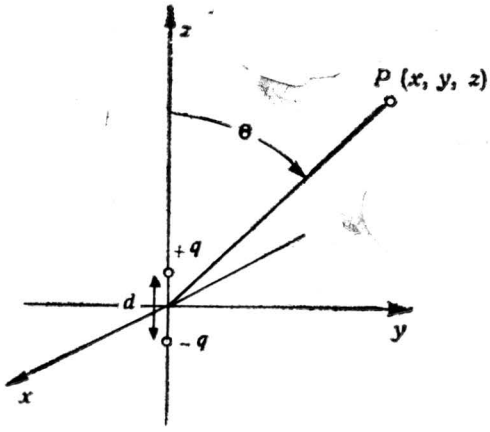
6-9. Точков заряд до проводяща сфера

6-10. Кондензатори; успоредни пластини

6-11. Пробив при високо напрежение

6-12. Йонен микроскоп

Да се повтори: гл. 23 (том I) „Резонанс“



Фиг. 6-1. Дипол: два заряда $+q$ и $-q$, отдалечени един от друг на разстояние d

Проблемата за пресмятане на електростатичното поле по такъв начин се решава съвършено честно, стига да са известни положенията на всички заряди. Нека да видим как действува тази формула с няколко примера.

6-2. Електричен дипол

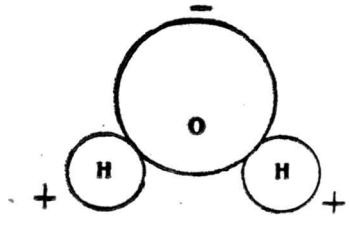
Отначало да вземем два точкови заряда $+q$ и $-q$ на разстояние d един от друг. Да прекараме оста z през зарядите, а началото на координатната система поставим между тях (фиг. 6-1). Тогава по формулата (4.24) потенциалът на система от два заряда се дава от израза

$$\varphi(x,\ y,\ z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{\left(z-\frac{d}{2}\right)^2+x^2+y^2}}+\frac{-q}{\sqrt{\left(z+\frac{d}{2}\right)^2+x^2+y^2}}\right]. \quad (6.8)$$

Ние нямаме намерение да напишем формулата за електричното поле, но винаги при желание това можем да направим, щом като знаем потенциала. Така че задачата за два заряда е решена. Съществува важен частен случай на тази задача, когато зарядите са разположени близко един до друг, или, с други думи, когато нас ни интересува полето на такива разстояния от зарядите, че в сравнение с тях разстоянието между зарядите изглежда незначително. Такава двойка заряди се нарича *дипол*. Диполите се срещат твърде често.

„Диполната" антена може често да се разглежда приблизително като два заряда на малко разстояние един от друг (ако не се интересуваме от полето на самата антена). (Интерес представляват обикновено антени с движещи се заряди; уравненията на статиката тогава са неприложими, но за някои цели те все пак са доста сносно приближение.)

По-важни са естествено атомните диполи. Ако в някакво вещество има електрично поле, електроните и протоните изпитват влияние на противоположни сили и се преместват едни спрямо други. Вие помните, че в проводник някои електрони се движат по повърхността, така че вътрешното поле става равно на нула. В изолатора електроните не могат силно да се разпръснат: пречи им привличането на ядрото. И все пак те някак си се преместват. Така че атомът (или молекулата), макар че остава неутрален, във външно електрично поле все пак възниква едва забележимо разделяне на положителните и отрицателни заряди и атомът става микроскопичен дипол. Ако ни е необходимо да знаем полето на тези атомни диполи близко до предмет с обикновени размери, в този случай имаме работа с разстояния, големи спрямо разстоянията между зарядите.



Фиг. 6-2. Молекулата на водата H_2O

В някои молекули поради самата им форма зарядите са малко разделени даже при отсъствие на външни полета. Например в молекулата на водата има несиметрично разпределение на отрицателния заряд на атома на кислорода и положителния заряд на двата водородни атома (фиг. 6-2). Макар че зарядът на цялата молекула е равен на нула, все пак има разпределение на зарядите с малко преобладаване на отрицателния заряд от едната страна и положителен — от другата. Това разположение, разбира се, не е толкова просто, както при два точкови заряда, но ако го гледаме отдалеч, то действува като дипол. Както ще видим по-нататък, полето на големи разстояния е нечувствително към дребните детайли на разположението.

Да разгледаме сега полето на два противоположни по знак заряда, разстоянието d между които е малко. Ако d стане нула, двата заряда са на едно място, двата потенциала се компенсират, полето изчезва. Но ако те не са съвсем на едно и също място, може да се получи добро приближение за потенциала, като се разложат събираемите в (6.8) в ред по степените на малката ве-

личина d (по формулата за Нютонов бином). Като оставим само първите степени на d, ще напишем

$$\left(z-\frac{d}{2}\right)^2 \approx z^2 - zd.$$

Удобно е да се означи

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Тогава

$$\left(z-\frac{d}{2}\right)^2+x^2+y^2 \approx r^2-zd = r^2\left(1-\frac{zd}{r^2}\right)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{\left(z-\frac{d}{2}\right)^2+x^2+y^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2\left(1-\frac{zd}{r^2}\right)}} \approx \frac{1}{r}\left(1-\frac{zd}{r^2}\right)^{-1/2}.$$

Като разложим в биномен ред $[1-(zd/r^2)]^{-1/2}$ и като пренебрегнем членовете с по-високи степени на d, получаваме

$$\frac{1}{r}\left(1+\frac{zd}{2r^2}\right).$$

Аналогично и

$$\frac{1}{\sqrt{\left(z+\frac{d}{2}\right)^2+x^2+y^2}} \approx \frac{1}{r}\left(1-\frac{zd}{2r^2}\right).$$

Като извадим тези два члена, получаваме за потенциала

$$\varphi(x,\ y,\ z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{r^3}. \tag{6.9}$$

Потенциалът, а значи и полето, което е негова производна, са пропорционални на qd — произведението на заряда и разстоянието между зарядите. Това произведение се нарича *диполен момент* на двойка заряди и ще го означим със символа p (*не го бъркайте с импулса!*):

$$p=qd. \tag{6.10}$$

Уравнението (6.9) може също да се запише във вида

$$\varphi(x,\ y,\ z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}, \tag{6.11}$$

тъй като $z/r=\cos\theta$, където θ е ъгълът между оста на дипола и радиус-вектора към точката (x, y, z) (вж. фиг. 6-1). Потенциалът на дипола намалява като $1/r^2$ при фиксирана посока (а на точковия заряд той намалява както $1/r$). Електричното поле $\mathbf{E}$ на дипола поради това намалява както $1/r^3$.

Ние можем да запишем нашата формула и във векторен вид, ако определим p като вектор, чиято абсолютна стойност е равна на p, а посоката изберем по оста на дипола от q_- към q_+. Тогава

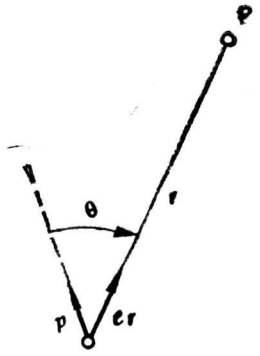
$$\cos\theta=\mathbf{p}\,.\,\mathbf{e}_r, \tag{6.12}$$

където $\mathbf{e}_r$ е единичен радиален вектор (фиг. 6-3). Освен това точката (x, y, z) може да се означи с буквата $\mathbf{r}$. И така,
Диполният потенциал е:

$$\varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\,.\,\mathbf{e}_r}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathbf{p}\,.\,\mathbf{r}}{r^3}. \tag{6.13}$$

Тази формула е в сила за дипол с произволна ориентация и положение, ако $\mathbf{r}$ е вектор, насочен от дипола към интересуващата ни точка.

Ако ни интересува електричното поле на дипола, необходимо е да се вземе градиент от φ. Например z-компонентата на поле



Фиг. 6-3. Векторните означения за дипола

то е $-\partial\varphi/\partial z$. За дипол, ориентиран по оста z, може да използуваме (6.9)

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)=-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}\right)$$

или

$$E_z=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\cos^2\theta-1}{r^3}. \tag{6.14}$$

А x- и y-компонентите са равни на

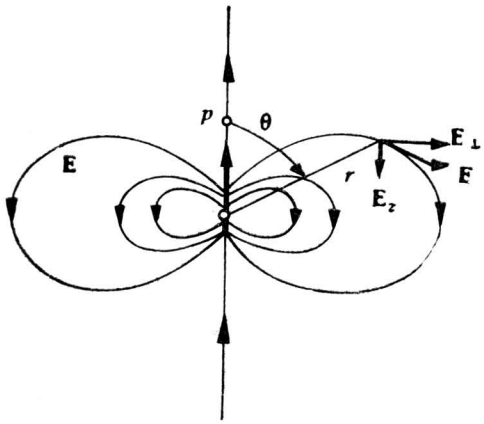
$$E_x=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3zx}{r^5}, \qquad E_y=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3zy}{r^5}.$$

От тези две компоненти може да се състави компонента, *перпендикулярна* на оста z, която се нарича напречна компонента $E_\perp$

$$E_\perp=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3z}{r^5}\sqrt{x^2+y^2}$$

или

$$E_\perp=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3\cos\theta\sin\theta}{r^3}. \tag{6.15}$$



Фиг. 6-4. Електричното поле на дипола

Напречната компонента $E_\perp$ лежи в равнината xy и е насочена по оста на дипола. Пълното поле, разбира се, е равно на

$$E=\sqrt{E_z^2+E_\perp^2}.$$

Полето на дипола се изменя обратно пропорционално на куба на разстоянието от дипола. На оста при $\theta=0$, то е двойно посилно, отколкото при $\theta=90°$. При тези два ъгъла електричното поле притежава само z-компонента. Знаците ѝ при $\theta=0$ и при $\theta=90°$ са противоположни (фиг. 6-4).

6-3. Забележки за векторните уравнения

Тук му е мястото да се направи обща забележка към векторния анализ. Макар че неговите теореми са доказани в общ вид обаче, когато пристъпваме към пресмятане и анализа на някаква задача, трябва с разбиране да се избира посоката на координатните оси. Припомнете си, че когато изчислявахме потенциала на дипола, оста се избираше не произволно, а я насочихме по оста на дипола. Това много облекчи нашата задача. След това вече уравненията бяха преписани във векторна форма и изведнаж престанаха да зависят от избора на координатната система. Сега вече е възможно да се избира произволна координатна система, като знаем, че отсега нататък формулата винаги е в сила. Изобщо няма смисъл да се въвежда произволна координатна система, чиито оси са насочени под някакъв сложен ъгъл, ако е възможно в дадена задача да се избере координатната система по-добре, а вече в крайния резултат да се изрази във вид на векторно уравнение. Така че постарайте се да използувате предимството на векторните уравнения, че те не зависят от координатната система.

От друга страна, ако искате да пресметнете дивергенцията на някакъв вектор, вместо да гледате $\nabla\cdot\mathbf{E}$ и да си припомняте какво беше това, по-добре е да се напише това във вида

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Ако вие след това пресметнете отделно x-, y- и z-компонентите на електричното поле и ги диференцирате, ще получите търсената дивергенция. Често при това се изпитва чувството, че е станало нещо некрасиво — едва ли не, че като написахме вектора по компоненти, сме претърпели неуспех; през цялото време ни

се струва, че всички действия трябва да се извършват само с векторния оператор ∇. Но често от него няма полза. Когато вие за първи път се натъквате на някаква нова задача, като правило полезно е да се напише всичко в компоненти, за да се уверите, че правилно си представяте какво става. Няма нищо некрасиво в това, че в уравненията се поставят числа и няма нищо неприлично в това, че се поставят производни на мястото на причудливи символи. Напротив, в това именно се проявява вашата мъдрост. Разбира се, статия в специализирано списание ще изглежда значително по-приятна (пък и по-разбираема), ако всичко е написано във векторна форма. Но там трябва да се икономисва още и място.

6-4. Диполният потенциал като градиент

Иска ни се да отбележим едно интересно свойство на формулата за дипола (6.13). Потенциалът може да се запише също във вида

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathbf{p}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right). \tag{6.16}$$

И наистина като пресметнете градиент от $1/r$, ще получите

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

и (6.16) съвпада с (6.13).

Как се сетихме за това? Ние просто си спомнихме, че $\mathbf{e}_r/r^2$ вече се появи във формулата за полето на точков заряд и че полето е градиент *на потенциала*, който се изменя както $1/r$.

Съществува и *физична* причина за написването на диполния потенциал във вида (6.16). Нека в началото на координатната система е поставен точков заряд q. Потенциалът в точката $P(x, y, z)$ е равен на

$$\varphi_0 = \frac{q}{r}.$$

(Множителят $1/4\pi\varepsilon_0$ сега не пишем, но на края ще го напишем.) Ако заряда $+q$ преместим на разстояние Δz, потенциалът в точката P малко ще се измени, да кажем с $\nabla\varphi_+$. Но колко точно? Точно с толкова, с колкото *би се изменил* потенциалът, ако зарядът *остане* в покой, а P се премести на същото разстояние *надолу* (фиг. 6-5). С други думи казано,

$$\Delta\varphi_+ = -\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}\,\Delta z,$$

където Δt означава същото, както и $d/2$. Като вземем $\varphi_0 = q/r$, ние получаваме за потенциала на положителния заряд

$$\varphi_+ = \frac{q}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q}{r}\right)\frac{d}{2}. \tag{6.17}$$

Като повторим същите разсъждения и с потенциала на отрицателния заряд може да се напише

$$\varphi_- = \frac{-q}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-q}{r}\right)\frac{d}{2}. \tag{6.18}$$

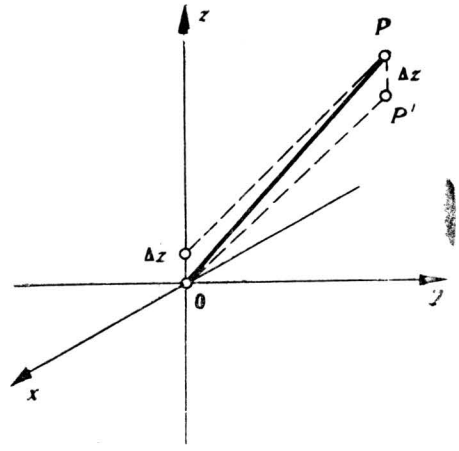
А общият потенциал е просто сума на (6.17) и (6.18):

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q}{r}\right)d = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)qd. \tag{6.19}$$

При други разположения на дипола преместването на положителния заряд може да се изрази с вектора $\Delta\mathbf{r}_+$, а уравнението (6.17) да се представи във вида

$$\Delta\varphi_+ = -\nabla\varphi_0\cdot\Delta\mathbf{r}_+,$$

където $\Delta\mathbf{r}$ след това трябва да се замени с $\mathbf{d}/2$. Като завършим



Фиг. 6-5. Потенциалът в точката P от точков заряд, повдигнат с Δz над началото на координатната система, е равен на потенциала в точката P' (с Δz по-ниска от P) от същия заряд, но поставен в началото на координатната система

доказателството така, както беше направено по-горе, ще приведем уравнението (6.19) към вида:

$$\varphi = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{r}\right) q\mathbf{d}.$$

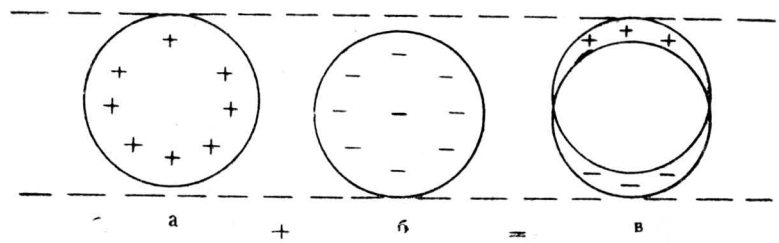
Това е същото уравнение както (6.16). Трябва само да се замени $q\mathbf{d}$ с $\mathbf{p}$ и да се постави множителят $1/4\,\pi\varepsilon_0$. Като погледнем на това уравнение по друг начин, ще видим, че диполният потенциал (6.13) може да се тълкува като

$$\varphi = -\mathbf{p} \cdot \nabla \Phi_0,$$

където $\Phi_0 = 1/4\pi\varepsilon_0 r$ е потенциалът на *единичен* точков заряд.

Макар че потенциалът на дадено разпределение винаги може да бъде намерен с помощта на интегриране, понякога може да се спести време, като се приложи някакъв хитроумен метод. Например на помощ често ни идва принципът на наслагването. Ако ни е дадено разпределение на зарядите, което може да се представи като две разпределения с вече известни потенциали, търсеният потенциал лесно се получава, просто като се съберат известните потенциали. Нашият извод на формулата (6.20) е един от примерите за приложение на този метод.

А ето и друг. Нека имаме сферична повърхнина, чийто повърхнинен заряд е разпределен пропорционално на косинуса на полярния ъгъл. Да се интегрира такова разпределение, откровено казано, е задача не от най-приятните. Но колкото и да е странно на помощ ни идва принципът на наслагването. Представете си кълбо с хомогенна *обемна* плътност на положителни заряди и друго кълбо със същата хомогенна плътност, но на заряди с противоположен знак. Първоначално те са едно в друго, като образуват неутрално, т. е. незаредено кълбо. Ако след това положителното кълбо малко се премести спрямо отрицателното, вътрешността на незареденото кълбо ще си остане незаредена, но на едната страна възниква малък положителен заряд, а на противоположната — същият отрицателен заряд (фиг. 6-6). Ако относителното преместване на кълбата е малко, тези заряди са еквивалентни на съществуването на повърхнинен заряд (на сферичната повърхнина) с плътност, пропорционална на косинуса на полярния ъгъл.



Фиг. 6-6. Две равномерно заредени сфери, вместени една в друга и леко отместени, са еквивалентни на нехомогенно разпределение на повърхнинния заряд

Когато ни потрябва потенциалът на това разпределение, няма защо да се решават интегралите. Ние знаем, че потенциалът на всяка заредена сфера — в точките извън нея — съвпада с потенциала на точков заряд. А двете преместени едно спрямо друго кълба са еквивалентни на два точкови заряда; значи търсеният потенциал е именно потенциалът на дипола.

По такъв начин може да се покаже, че разпределението на зарядите на сфера с радиус a и повърхнинна плътност

$$\sigma = \sigma_0 \cos\theta$$

създава извън сферата такова поле, каквото и диполът с момент

$$p = \frac{4\pi\sigma_0 a^3}{3}.$$

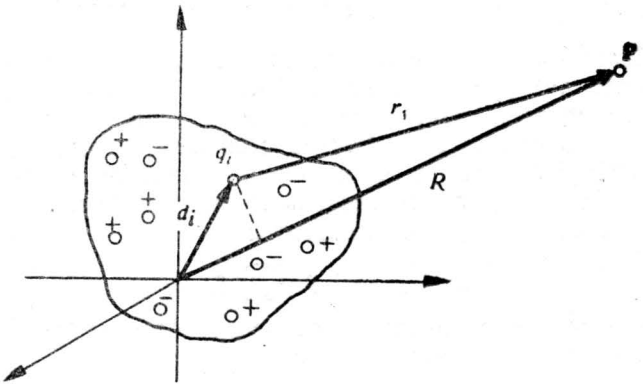
Може също да се покаже, че вътре в сферата полето е постоянно и равно на

$$E=\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}.$$

Ако θ е ъгълът с положителната ос на z, електричното поле вътре в сферата е насочено по *отрицателната* ос на z. Разгледаният от нас пример съвсем не е безполезна измислица на съставител на задачи; ние ще го срещнем в теорията на диелектриците.

6-5. Диполно приближение за произволно разпределение

Също толкова важно и не по-малко интересно е полето на дипол, което възниква при други обстоятелства. Нека имаме тяло със сложно разпределение на заряда, например както на молекулата на водата (вж. фиг. 6-2), а нас ни интересува само полето далеч от него. Ние ще покажем, че може да се получи сравнително прост израз за полето, подходящ за разстояния, големи спрямо размерите на тялото.



Фиг. 6-7. Изчисляване на потенциала в точката P, много отдалечена от група заряди

Ние можем да погледнем на това тяло като на натрупване на заряди q_i в някаква ограничена област (фиг. 6-7). (По-късно, ако се наложи, ще заменим q_i с ρdU). Нека зарядът q_i е отдалечен от началото на координатната система, избрано някъде между зарядите, на разстояние $\mathbf{d}_i$. На какво е равен потенциалът в точка P, разположена някъде далече на разстояние $\mathbf{R}$, много по-голямо от най-голямото $\mathbf{d}_i$? Потенциалът на цялото натрупване се изразява с формулата

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{q_i}{r_i}, \tag{6.21}$$

където r_i е разстоянието от P до заряда q_i (дължината на вектора $\mathbf{R}-\mathbf{d}_i$). Ако разстоянието от зарядите до P (до точката на наблюдението) е много голямо, всяко от r_i може да се приеме за R. Всеки член на сумата ще стане равен на q_i/R и $1/R$ може да се изнесе пред сумата. Получава се простият резултат

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R}\sum q_i=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}, \tag{6.22}$$

където Q е сумарният заряд на тялото. По такъв начин се убедихме, че от точки, достатъчно отдалечени от натрупаните заряди, тялото изглежда просто като точков заряд. Този резултат изобщо не е много удивителен.

Но какво ще стане, ако положителните и отрицателни заряди са по равно количество? Сумарният заряд Q тогава ще бъде равен на нула. Това не е толкова рядък случай; ние знаем, че повечето тела са неутрални. Неутрална е и молекулата на водата,

но зарядите в нея съвсем не са в една точка, така че, ако се приближим плътно, трябва да забележим някакви признаци, които показват, че зарядите са разделени. За потенциала на произволно разпределение на заряди в неутрално тяло се нуждаем от приближение, по-добро от полученото във формула (6.22). Уравнението (6.21), както и преди, върши работа, но не може вече да се положи $r_i = R$. За r_i е необходим по-точен израз. В добро приближение r_i може да се счита различно от R (ако точката P е доста отдалечена) с проекцията на $\mathbf{d}$ върху вектора $\mathbf{R}$ (вж. фиг. 6—7, но само че вие трябва да си представите, че е много по-далече, отколкото е показано). С други думи, ако $\mathbf{e}_r$ е единичният вектор по посоката на $\mathbf{R}$, за следващо приближение на r_i трябва да се приеме

$$r_i \approx R - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r. \tag{6.23}$$

Но на нас ни е необходимо не r_i, а $1/r_i$; в нашето приближение (като вземе пред вид $d_i \ll R$), е

$$\frac{1}{r_i} \approx \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r}{R}\right). \tag{6.24}$$

Като заместим това в (6.21), виждаме, че потенциалът е равен на

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R} + \sum_i q_i \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r}{R^2} + \ldots\right). \tag{6.25}$$

Многоточието показва членовете от по-висш порядък по d/R, които ние пренебрегнахме. Както и членовете, които написахме, това са следващите членове на развитието на $1/r_i$ в Тейлоров ред в околността на $1/R$ по степените на d_i/R.

Първия член в (6.25) ние вече получихме; в неутрални тела той отпада. Вторият член, както и при диполa, зависи от $1/R^2$. И наистина ако ние *определим*

$$\mathbf{p} = \sum q_i \, \mathbf{d}_i \tag{6.26}$$

като величина, която описва разпределението на зарядите, вторият член на потенциала (6.26) става

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{R^2}, \tag{6.27}$$

т. е. *точно диполния потенциал*. Величината $\mathbf{p}$ се нарича *диполен момент на разпределението*. Това е обобщение на нашето предишно определение; то се свежда до него в частния случай на точкови заряди.

В крайна сметка ние изяснихме, че достатъчно далеч от *произволен* набор от заряди потенциалът е диполен, стига този набор да бъде като цяло неутрален. Той намалява както $1/R^2$ и се мени както $\cos\theta$, а големината му зависи от диполния момент на разпределението на зарядите. Именно по тази причина и полетата на диполите са важни; сами за себе си двойките точкови заряди се срещат крайно рядко.

Диполният момент на молекулата на водата например е доста голям. Електричното поле, създавано от този момент, е отговорно за някои важни свойства на водата. А диполният момент на много молекули, да речем на CO_2, липсва поради симетрията им. За такива молекули разлагането трябва да се провежда още по-точно, до следващите членове на потенциала, които намаляват както $1/R^3$ и се наричат квадруполен потенциал. Тези случаи ще разгледаме по-късно.

6-6. Полета на заредени проводници

С това ще свършим с примери на такива физични задачи, в които разпределението на зарядите е известно по начало. Такива задачи се решават без особени трудности, като изискват в най-лошия случай няколко интегрирания. Сега ще се обърнем към

съвършено нов тип задачи — определянето на полетата близко до заредени проводници.

Да си представим, че някакви заряди, произволни по големина Q, са поставени на проводника. Сега вече не можем точно да кажем къде те ще се разположат. Те някак си ще се разтекат по повърхността. Как да се разбере как те се разпределят по нея? Те трябва да се разпределят така, че потенциалът по цялата повърхнина да бъде един и същ. Ако повърхнината не е еквипотенциална, вътре в проводника би съществувало електрично поле и зарядите биха били принудени да се движат, докато полето не изчезне. Общата задача от такъв вид би могла да се реши така. Да предположим, че разпределението на потенциала е определено и да пресметнем потенциала. Ако се окаже, че той навсякъде по повърхнината е еднакъв, задачата е решена. Ако пък повърхнината не е еквипотенциална, ясно е, че сме направили неправилно предположение за разпределението на зарядите; ще направим ново предположение и ще се постараем то да бъде по-успешно! Така може да се продължава до безкрайност, само че здраво ще си набиете ръката с такива проби.

Въпросът, как да се досетим за разпределенията, е труден математически. Разбира се, природата има време да го решава; зарядите ще се привличат и отблъскват, докато не се уравновесят взаимно. А когато ние се опитваме да решим задачата, всяка проба ни отнема толкова много време, че този метод се оказва твърде обемист. Когато имаме произволен сложен набор от проводници и заряди, задачата твърде много се усложнява и в общия случай не може да бъде решена без специално разработени числени методи. Такива числени пресмятания в наши дни се извършват на електронносметачни машини, които могат всичко да пресметнат за нас, ако им обясним как да правят това.

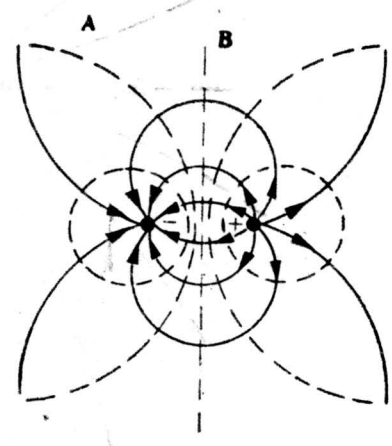
От друга страна, има много дребни практични случаи, в които за наше удоволствие може да се получи решение с някакъв пряк метод, без да съставяме програма за машина. За наше щастие в много случаи с един или друг фокус може да се измъкне отговор от природата.

Първият фокус, който искаме да ви покажем, се състои в използуването на вече известни решения на задачи с фиксирано разположение на зарядите.

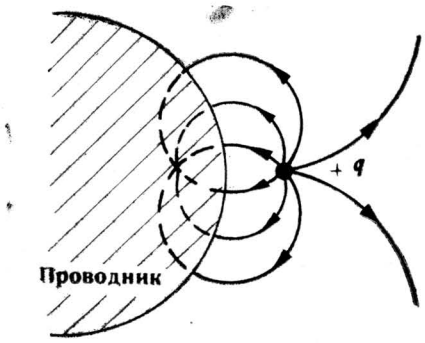
6-7. Метод на образите

Ние определихме полето на два точкови заряда. На фиг. 6-8 са показани някои линии на полето и еквипотенциални повърхнини, получени от пресмятанията в гл. 5. Да разгледаме сега еквипотенциалната повърхнина A. Да предположим, че сме огънали тънък метален лист така, че той точно съвпада с тази повърхнина. Ако го поставим на нейното място и установим за него правилна стойност на потенциала, никой не ще знае, че той лежи там, защото нищо не се е изменило от неговото появяване.

А сега погледнете по-внимателно! Всъщност ние решихме задача с ново условие: повърхнината на огънатия проводник със зададен потенциал е поставена близко до точковия заряд. Ако нашият метален лист, поставен на еквипотенциалната повърхнина, е затворен (или много дълъг), получава се картината, разгледана в гл. 5, -10, когато пространството се дели на две области: едната вътре, а другата извън затворена проводяща повърхнина. Там стигнахме до извода, че полетата в тези две области съвършено не зависят едно от друго. Така че независимо от това, какво е полето вътре в затворения проводник, отвън полето е винаги едно и също. Може даже да се запълни цялата сърцевина на проводника с проводящ материал. Излиза, че ни се отдаде да намерим полето при конфигурация на проводници и заряди, изобразена на фиг. 6-9. В пространството извън проводника полето е точно такова, каквото е на два точкови заряда (вж. фиг. 6-8). Вътре в проводника



Фиг. 6-8. Линиите на полето и еквипотенциалните повърхнини на два точкови заряда



Фиг. 6-9. Полето извън проводник, изкривено по еквипотенциалната повърхнина A на предишната фигура

то е нула. И освен това електричното поле, както и следва да се очаква, до самата повърхнина на проводника е перпендикулярно към нея.

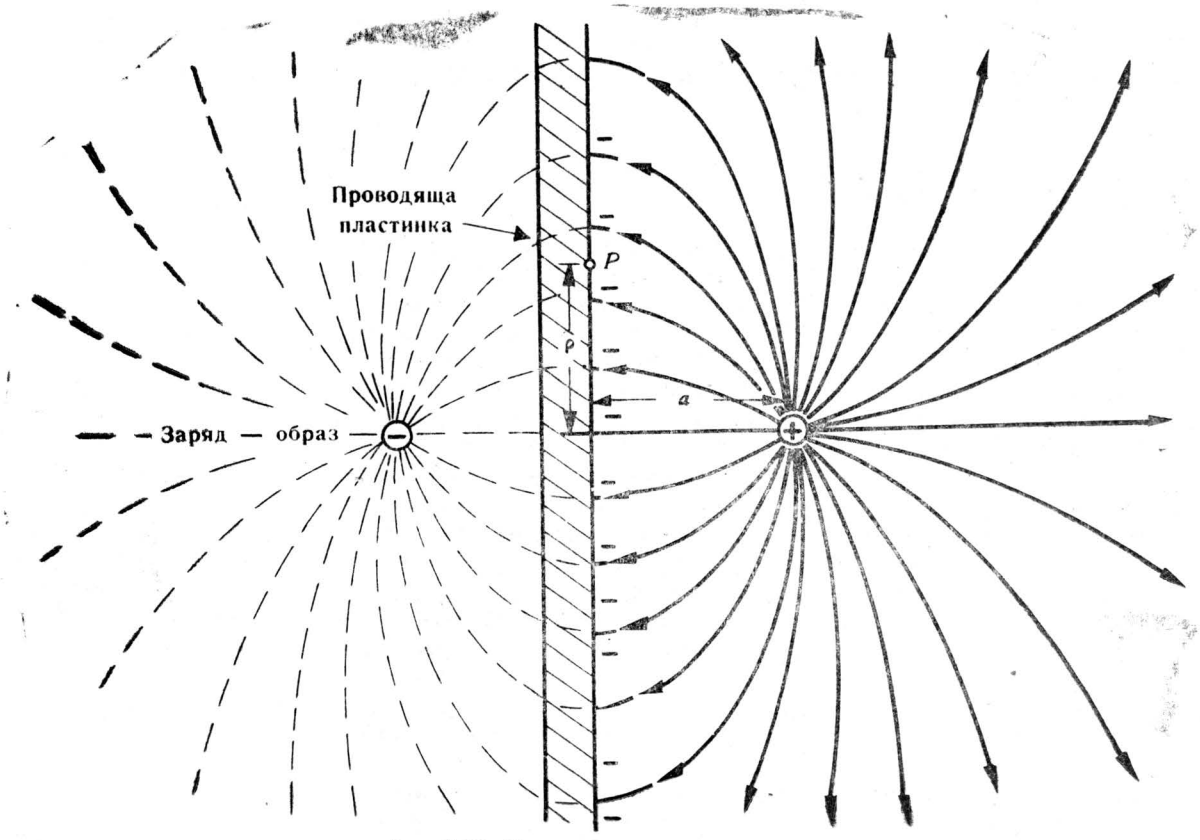
И така, ние можем да пресметнем полетата на фиг. 6-9, като изчисляваме полето, създадено от заряда q, и въображаем точков заряд — q, поставен на подходящо място. А точковият заряд, който си представяхме, като че съществува зад проводящата повърхнина, така се и нарича — *заряд-образ*.

В книгите може да се намерят дълга поредица от решения на задачи на електростатиката за хиперболични повърхнини и други сложни неща. Вас би могла да ви удиви възможността да се пресметнат полетата близко до повърхнини с толкова ужасна форма. Но те са пресметнати отзад напред! Някой е решил простата задача с фиксирани заряди. А след това е установил, че се появяват някои еквипотенциални повърхнини с нови форми и написал работа, в която показва, че полетата извън проводник с такава форма могат да бъдат изобразени така и така.

6-8. Точков заряд до проводяща равнина

В качеството на най-просто приложение на този метод ще използуваме плоската еквипотенциална равнина B (вж. фиг. 6-8) Тя ще ни помогне да решим задачата за заряд близко до прово. дяща равнина. За това просто ще зачертаем лявата част на фигурата. Линиите на полето на нашето решение са показани на фиг. 6-10. Забележете, че равнината има нулев потенциал, защото тя се намира точно на половината път между зарядите. Ние решихме задачата за положителен заряд близо до заземена проводяща равнина.

Така ние намерихме сумарното поле, но какво може да се каже за *реалните* заряди, които са го създали? Освен нашия положителен точков заряд такива са и някакви отрицателни заряди, индуцирани на проводящата равнина и привлечени от положителния заряд (от някакви далечни разстояния). Но сега нека ви



Фиг. 6-10. Полето на заряд, поставен близо до проводяща равнина, намерено по метода на образите

се прииска да узнаете (или за технически цели, или просто от любопитство) как са разпределени тези отрицателни заряди по повърхнината. Повърхнинната плътност на зарядите можете да намерите, като използувате резултата, получен в гл. 5, - 6 с помощта на теоремата на Гаус. Нормалната компонента на електричното поле около самия проводник е равна на плътността на повърхнинния заряд, делена на ε_0. Ние можем да намерим плътността на заряда във всяка точка на повърхнината, като тръгнем назад от нормалната компонента на електричното поле на повърхнината. Ние я знаем, защото въобще ни е известно полето във всяка точка.

Да разгледаме точка на повърхнината на разстояние ρ от точка, която е разположена точно насреща на положителния заряд (вж. фиг. 6-10). Електричното поле в тази точка е перпендикулярно към повърхността и насочено навътре. Компонентата на полето на *положителния* точков заряд, нормална към повърхнината, е равна на

$$E_{n+} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{aq}{(a^2+\rho^2)^{3/2}}. \tag{6.28}$$

Към нея трябва да добавим електричното поле, създадено от отрицателния огледален заряд. Това ще удвои нормалната компонента (и ще унищожи всичко останало), така че плътността на заряда σ в произволна точка на повърхнината ще бъде равна на

$$\sigma(\rho) = \varepsilon_0 E(\rho) = -\frac{2aq}{4\pi(a^2+\rho^2)^{3/2}}. \tag{6.29}$$

Като интегрираме по цялата повърхнина, можем да проверим нашите пресмятания. Трябва да получим целия индуциран заряд, т. е. $-q$.

Още един въпрос: действува ли на точковия заряд сила? Да, защото индуцираните върху равнината отрицателни заряди трябва да го привличат. Щом знаем какви са тези повърхнинни заряди [по формула (6.29)], можем с помощта на интегриране да пресметнем силата, която действува на нашия положителен заряд. Но ние също знаем, че силата, която действува на заряда, е точно такава, каквато би била, ако вместо равнината би имало само отрицателният огледален заряд, защото полетата близко до тях в двата случая са еднакви. Точковият заряд изпитва сила на привличане към равнината, равна на

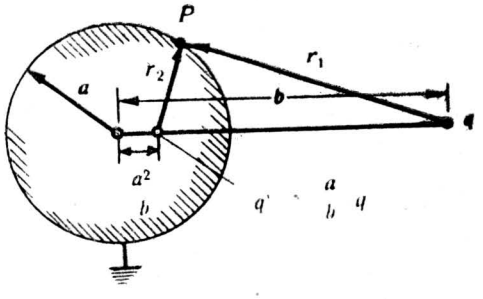
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{(2a)^2}. \tag{6.30}$$

Ние определихме тази сила много лесно, без да интегрираме по отрицателните заряди.

6-9. Точков заряд до проводяща сфера

А какви още повърхнини освен равнината имат просто решение? Най-проста от тях е сферата. Ще се опитаме да определим полето около металична сфера с близък до нея точков заряд q (фиг. 6-11). Ще трябва да потърсим проста физична задача, за която сферата е еквипотенциална повърхнина. Ако прегледаме задачите, които вече са решени, ще видим, че една от еквипотенциалните повърхнини на полето на два *неравни* точкови заряди е именно сфера. Да си отбележим това! Ако подберем, както трябва, положението на заряда-образ и необходимата му големина, може би ще успеем да нагласим еквипотенциалната повърхнина да съвпадне с нашата сфера. Това наистина може да се направи, ако се действува по следната рецепта.

Да предположим, че искате еквипотенциалната повърхнина да бъде сфера с радиус a и с център на разстояние b от заряда q. Поставете образа на заряда с големина $q' = -q(a/b)$ на



Фиг. 6-11 Точковият заряд q индуцира заряди в заземената проводяща сфера. Те създават поле, което е същото, каквото е на заряда-образ, поставен в указаната точка

радиуса, който преминава през заряда на разстояние a^2/b от центъра. Потенциалът на сферата нека бъде нула.

Математичната причина за това е, че сферата е геометрично място на точки, чието отношение на разстоянието от две дадени точки е постоянно. Както следва от фиг. 6-11, потенциалът в точка P от зарядите q и q' е пропорционален на сумата

$$\frac{q}{r_1}+\frac{q'}{r_2}$$

и ще бъде равен на нула във всички точки, за които

$$\frac{q'}{r_2}=-\frac{q}{r_1} \quad \text{или} \quad \frac{r_2}{r_1}=-\frac{q'}{q}.$$

Ако поставим q' на разстояние a^2/b от центъра, отношение т r_2/r_1 е равно на постоянната величина a/b. Тогава, ако

$$\frac{q'}{q}=-\frac{a}{b}, \tag{6.31}$$

сферата става еквипотенциална. Потенциалът ѝ наистина е равен на нула.

А какво ще стане, ако ни потрябва сфера с ненулев потенциал? Нали той е равен на нула само когато сумарният ѝ потенциал случайно се окаже равен на q'! Разбира се, ако я заземим, индуцираните върху нея заряди ще се окажат точно такива, каквито трябва. Но ако тя е изолирана и не сме я снабдили с никакви заряди? Или сме я снабдили със заряд $Q\neq q'$? Или се намира под напрежение, *неравно* на нула? Такива въпроси се решават веднага. Та нали винаги може да се добави в центъра на сферата точков заряд q''. По принципа на наслагването сферата винаги ще остане еквипотенциална, а ще се измени само големината на потенциала.

Нека имаме например проводяща сфера, предварително разредена и изолирана от всичко, и сме поднесли към нея положителен заряд q, тогава сумарният заряд на сферата ще остане равен на нула. Решението може да се намери, като се вземе същото, както и преди, заряд-образ q' и като добавка към него заряд в центъра на сферата такъв, че

$$q''=-q'=\frac{a}{b}q. \tag{6.32}$$

Полетата навсякъде извън сферата ще се получават от наслагването на полетата на q, q' и q''. Задачата е решена.

Сега е ясно, че между сферата и точковия заряд q трябва да съществува сила на привличане. Тя не пропада даже ако сферата е неутрална, на нея няма никакъв заряд. Откъде се взема привличането? Когато поднасяте към проводящата сфера положителен заряд, той привлича отрицателните заряди на близкия до него край на сферата, а положителните отблъсква на далечния. Привличането на отрицателните превишава отблъскването на положителните; в крайна сметка остава привличането. Силата му може да се пресметне, като се пресметне силата, която действува на q в полето, създадено от q' и q''. Сумарната сила е равна на силата на привличане между зарядите q и $q'=-(a/b)q$ на разстояние $b-(a^2/b)$ плюс силата на отблъскване на q и $q''=+(a/b)q$ на разстояние b.

Ако вие в детството си сте обичали да разглеждате списание, на чиято обложка е показано момче, което разглежда списание, на чиято обложка е показано момче, разглеждащо списание, на чиято обложка ..., то вас ще ви заинтересува и следната задача. Две еднакви сфери, едната със заряд $+Q$, а другата със заряд $-Q$, са разположени на някакво разстояние една от друга. Каква е силата на привличане между тях? Задачата се решава с по-

мощта на безкрайно количество образи. Първото приближава всяка от сферите до сфера със заряд в центъра ѝ. Тези заряди създават от своя страна свои образи и т. н., и т. н., и т. н. Решението тук е като картинката на обложката. То твърде бързо клони към определена граница.

6-10. Кондензатори; успоредни пластини

Сега да се обърнем към друг вид задачи, свързани с проводниците. Да разгледаме две широки метални пластини, успоредни една на друга и разделени от малка (в сравнение с техните размери) междина. Да предположим, че пластините са наелектризирани с равни, но противоположни заряди. Зарядите на едната пластина ще привличат зарядите от другата и след това ще се разпределят равномерно на вътрешната повърхност на пластините. Нека повърхнинната плътност на зарядите на пластините е съответно $+\sigma$ и $-\sigma$ (фиг. 6-12). От глава 5 знаем, че полето между пластините е равно на σ/ε_0, полето извън пластините е равно на нула. Пластините притежават неравен потенциал съответно φ_1 и φ_2. На тяхната разлика е удобно да се даде особено име — често я наричат „напрежение“

$$\varphi_1-\varphi_2=V$$

(някои означават с буквата V потенциала, ние го означихме с буквата φ).

Потенциалната разлика V е работата (за единица заряд), необходима за пренасяне на малък заряд от едната пластина до другата, така че

$$V=Ed=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d=\frac{d}{\varepsilon_0 A}Q, \qquad (6.33)$$

където $\pm Q$ е сумарният заряд на всяка пластина, A — площта на всяка от тях, d — разстоянието между пластините.

Виждаме, че напрежението е пропорционално на заряда. Тази пропорционалност между V и Q се спазва за два произволни проводника в пространството, ако на единия от тях има плюс-заряд, а на другия равен по големина минус-заряд. Потенциалната разлика между тях, т. е. напрежението, се оказва пропорционална на заряда. (Ние предполагаме, че наоколо няма други заряди.)

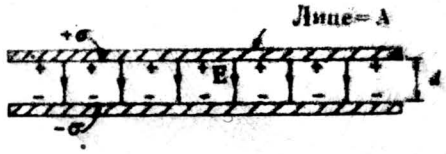
Защо възниква тази пропорционалност? Просто поради принципа на наслагването. Нека ни е известно решението за една съвкупност от заряди, а след това насложим към него друго такова решение. Зарядите се удвояват, полетата се удвояват, работата за пренасяне на заряда от точка в точка също се удвоява. По тази причина потенциалната разлика на две точки е пропорционална на заряда. В частност потенциалната разлика на два проводника е пропорционална на зарядите им. Тази пропорционалност някога са решили да записват иначе. И започнали да пишат

$$Q=CV,$$

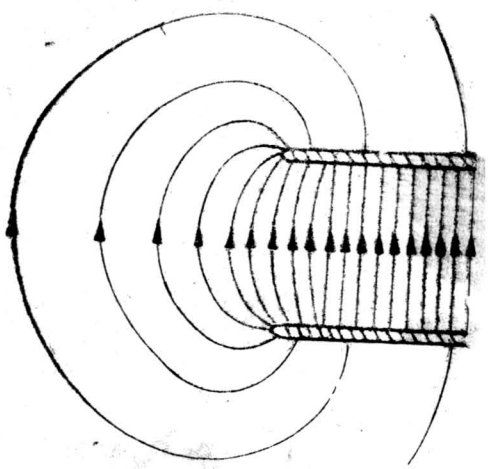
където C е постоянно число. Този коефициент на пропорционалност нарекли *капацитет*, а системата от два проводника — *кондензатор*. За нашия кондензатор с успоредни пластини

$$C=\frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad \text{(успоредни пластини)}. \qquad (6.34)$$

Тази формула не е точна, защото полето в противоречие с нашето предположение всъщност не е навсякъде хомогенно. Полето не свършва изведнаж на края на пластините, а по-скоро прилича на изобразеното на фиг. 6-13. Сумарният заряд също е равен не на σA, както предположихме; съществува малка поправка поради наличието на краеви ефект. За да се знае каква е тя,



Фиг. 6-12. Плосък кондензатор


Фиг. 6-13. Електричното поле в краищата на две успоредни пластини

трябва по-точно да се пресметне полето и да се види какво става на краищата. Това е много сложна математична задача, обаче тя може да бъде решена с помощта на техника, за която тук няма да говорим. Пресмятанията показват, че плътността на зарядите около края на пластината леко нараства. Това означава, че капацитетът на пластините е малко по-голям, отколкото мислехме. (Добро приближение на капацитета може да се получи, ако в уравнение (6.34) се приеме за A площ, която *биха имали* пластините, ако ги разшириха на 3/8 от разстоянието между тях.)

Досега говорихме само за капацитет на два проводника. Понякога хората говорят за собствен капацитет на предмет. Така говорят, че капацитетът на сфера с радиус a е $4\pi\varepsilon_0 a$. При това се разбира, че втори полюс е сфера с безкраен радиус, т. е. ако на сферата е поставен заряд $+Q$, противоположният заряд $-Q$ се намира на безкрайно голяма сфера. Може да се говори и за капацитет, когато проводниците са три или повече от три, но обсъждането на този въпрос ще отложим за по-добри времена.

Нека ни е необходимо да разполагаме с кондензатор с много голям капацитет. Голям капацитет можем да получим, като вземем много голяма площ и много малко разстояние между пластините. Може да се поставят алуминиеви ленти между навосъчена хартия и да ги навием като тръба. (Като я поставим в пластмасова опаковка, ще получим типичен радиокондензатор.) За какво са необходими те? Те са подходящи за натрупване на заряд в тях. Ако пожелаем например да съберем заряд на някаква сфера, потенциалът ѝ бързо ще подскочи, а скоро така би се повишил, че зарядите биха започнали да изтичат във въздуха и от сферата биха се посипали искри. Но ако същият заряд се постави в кондензатор с голям капацитет, напрежението близко до кондензатора ще бъде много малко.

В много електронни схеми е полезно да има устройство, способно да поглъща или отделя големи количества заряди без забележимо да изменя потенциала. Именно кондензаторът (или „капацитетът") е такова устройство. Той има много приложения и в електронните уреди, и в електронносметачните машини. Там кондензаторът се използува за получаване на определено изменение на напрежението в зависимост от изменението на заряда. С подобно приложение се запознахме в том I, гл. 23, когато описвахме свойствата на резонансните контури.

С определението на C получаваме, че единицата за капацитет е *кулон/волт*. Тази единица се нарича също *фарад* (F). Като вгледаме в уравнението (6.34), ще видим, че ε_0 може да се изрази във *фарад/метър* (F/m); обикновено се прилага тази единица

$$\varepsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi.10^9} \text{ F/m}$$

$$\varepsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi.10^9} \text{ F/m}$$

Типичните капацитети на кондензаторите са в интервала от 1 микро-микрофарад (μμF) или 1 пикофарад pF до милифарад. Малките кондензатори от няколко пикофарада се използуват във висококачествените контури за настройка, а капацитетите от порядъка на стотици и хиляди микрофаради намираме в силовите филтри. Две пластинки с площ 1 cm² и разстояние между тях 1 mm имат капацитет приблизително около 1 pF.

6-11. Пробив при високо напрежение

Сега качествено ще разгледаме някои характеристики на полетата около проводниците. Да заредим с електричество проводник, но този път не сферичен, а такъв, който има острие или ребро (например във формата, показана на фиг. 6-14). Тогава полето в това място ще се окаже много по-силно, отколкото в другите места. Причината за това в общи черти е, че зарядите се стремят да се разположат колкото е възможно по-нашироко по повърхността на проводника, а краят на острието винаги стои най-далече от цялата повърхнина. Поради това част от зарядите на пластината течат към острието. Относително малко *количе-*

ство заряди на острието може да създаде **голяма повърхнинна** *плътност*, а голямата плътност означава силно поле близко до проводника в това място.

Изобщо в тези места на проводника, в който радиусът на кривината е по-малък, полето се оказва по-силно. За да се убедим в това, ще разгледаме комбинацията от голяма и малка сфера, съединени с проводник, както е показано на фиг. 6-15. Самият проводник няма да влияе силно на външните полета; той служи за изравняване на потенциалите на сферите. Около коя сфера полето ще се окаже с по-голям интензитет? Ако радиусът на лявата сфера е a, а зарядът Q, потенциалът му е приблизително равен на

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}.$$

Разбира се, наличието на едната сфера ще окаже влияние върху разпределението на зарядите на другите, така че и по двете сфери зарядите няма да бъдат разпределени симетрично. Но ако се интересуваме от приблизителната големина на полето, може да се възползуваме от формулата за потенциала на сферичен заряд.) Ако по-малката сфера с радиус b има заряд q, потенциалът ѝ е приблизително равен на

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{b}.$$

Но $\varphi_1 = \varphi_2$, така че

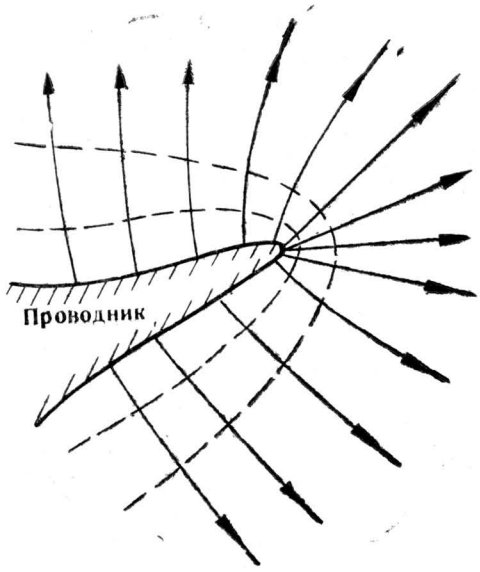
$$\frac{Q}{a} = \frac{q}{b}.$$

От друга страна, полето до повърхността [вж. уравнение (5.8)] е пропорционално на повърхнинната плътност на заряда, която от своя страна е пропорционална на сбора от двата заряда делен на квадрата на радиуса. Получава се, че

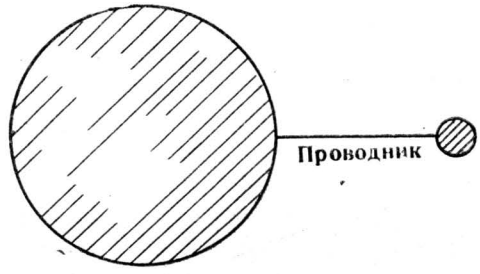
$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{Q/a^2}{q/b^2} = \frac{b}{a}. \qquad (6.35)$$

Значи до повърхността на малката сфера полето е по-голямо. Полетата са обратно пропорционални на радиусите.

Този резултат от техническа гледна точка е много важен, защото във въздуха възниква пробив, ако полето е твърде голямо. Някакъв свободен заряд във въздуха (електрон или йон) се ускорява от това поле и ако то е много силно, зарядът може да набере такава скорост до удара си с атом, че да избие от атома нов електрон. В резултат на това се получават все повече и повече йони. Тяхното движение представлява искра или разряд. Ако ви е необходимо да заредите тяло до висок потенциал, така че то да не загуби товара си във въздуха, вие трябва да сте уверени, че повърхността на тялото е гладка, че на него няма места, където полето е твърде голямо.



Фиг. 6-14. Електричното поле около острия край на проводник е много голямо

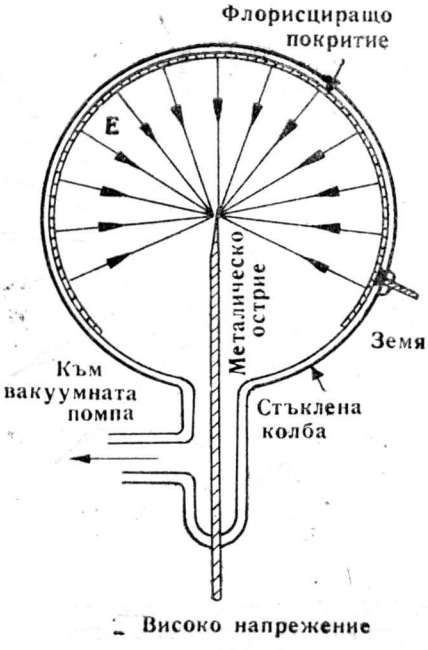


Фиг. 6-15. Полето на островръх предмет може приближено да се счита равно на полето на две сфери с еднакъв потенциал

6-12. Йонен микроскоп

Свръхвисокото електрично поле, което окръжава всеки остър ръб на зареден проводник, получи интересно приложение в един уред. Работата на йонния микроскоп е обусловена от мощните полета, които възникват около метално острие[1]. Устройството на този уред е следното. Много тънка игла, чийто връх има диа-

[1]. Вж. статията на Миллер (E. W. Mueller, The field — ion microscope, Advance in Electronics and Electron Physics, 13, 83 (1960).



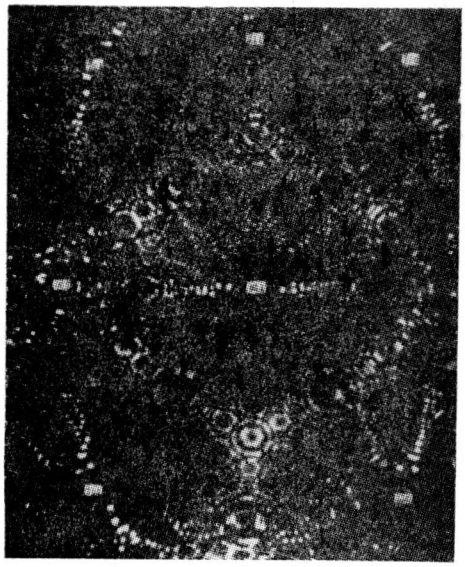
Фиг. 6-16. Йонен микроскоп

метър не повече от 1000 Å, е поставена в центъра на стъклена сфера, от която е изпомпан въздухът (фиг. 6-16). Вътрешната повърхност на сферата е покрита с тънък проводящ слой от флуоресциращо вещество и между иглата и флуоресциращото покритие е създадена голяма потенциална разлика.

Да разгледаме отначало какво ще стане, ако иглата е заредена отрицателно спрямо флуоресциращия екран. Линиите на полето до върха на иглата са силно концентрирани. Електричното поле може да достигне до 40.10^6 V на 1 cm. При такива силни полета електроните се откъсват от повърхността на иглата и се ускоряват от иглата до екрана за сметка на потенциалната разлика. Като достигнат екрана, те предизвикват на това място светене (точно както на екрана на телевизионната тръба).

Електроните, дошли в дадена точка на флуоресциращия екран в много добро приближение, са същите електрони, които са напуснали другия край на радиалната линия на полето, защото електроните се движат по линиите на полето, които съединяват върха на иглата с повърхността на сферата. Така че на повърхността виждаме някакъв образ на върха на иглата. По-точно виждаме картината на *излъчвателната способност* на повърхността на иглата, т. е. лекотата, с която електроните могат да напуснат повърхността на металното острие. Ако разделителната способност е голяма, може да се разчита да се отделят положенията на отделните атоми от върха на иглата. Но с електроните такава разделителна способност не може да се постигне по следните причини. Първо, възниква квантовомеханична дифракция на електронните вълни и образът се замъглява. Второ, в резултат на вътрешното движение на електроните в метала електроните имат малка напречна начална скорост в момента на изтръгване от иглата и тази случайна напречна компонента на скоростта ще доведе до размазване на образа. Поради това разделителната способност се ограничава до 25 Å.

Ако обаче сменим знака на напрежението и пуснем в колбата малко хелий, детайлите ще бъдат разделени по-добре. Когато атомът на хелия се сблъсква с върха на острието, мощното поле откъсва от атома на хелия електрон и атомът се зарежда положително. След това хеливият йон се ускорява по посока на силовите линии, докато не попадне на екрана. Тъй като хеливият йон е несравнимо по-тежък от електрона и квантовомеханичната му дължина на вълната е много по-малка. Ако и температурата не е много висока, влиянието на топлинните скорости е също значително по-слабо, отколкото при електрона. Образът се размазва по-малко и се получава далече по-рязък образ на върха на иглата. С микроскоп, който работи на принципа на йонната емисия, е възможно да се постигне увеличение до 2 000 000 пъти, т. е. десет пъти по-добро от увеличението на най-добрите електронни микроскопи.



Фиг. 6-17. Образ, получен от йонен микроскоп

На фиг. 6-17 е показано какво може да се получи с такъв микроскоп, като се използува волфрамова игла. Центровете на атомите на волфрама йонизират атомите на хелия различно, отколкото промеждутъците между атомите на волфрама. Разположението на петната на флуоресциращия екран демонстрира разположението на *отделните атоми* на волфрамовото острие. Защо петната имат вид на пръстени, може лесно да се разбере, ако си представим голям сандък, напълнен с топки, поставени в правоъгълна мрежа и образуващи по този начин кубична решетка. Тези топки играят роля на атомите в метала. Ако от този сандък изрежете примерно сферична част, ще видите картина на пръстените, характерна за атомната структура. Йонният микроскоп за първи път снабди човечеството със средство за виждане на атомите. Забележително постижение и при това получено с такъв прост уред.

7

Електрично поле в различни физични условия (продължение)

7-1. Методи за определяне на електростатичното поле

7-1. Методи за определяне на електростатичното поле

7-2. Двумерни полета; функции на комплексен аргумент

7-3. Трептения на плазма

7-4. Колоидни частици в електролит

7-5. Електростатично поле на мрежа

В тази глава ще продължим разглеждането на характеристиките на електричните полета в различни условия. Отначало ще опишем един от най-разнообразните методи за пресмятане на полета в присъствие на проводници. Ние, разбира се, не разчитаме, че тези усъвършенствувани методи ще бъдат усвоени веднага. Но трябва да предполагаме, че ви е интересно да получите представа за характера на задачите, които е възможно да бъдат решени с помощта на техниката, излагана в специалните, по-задълбочени курсове. След това ще приведем два примера, в които няма нито предварително фиксирано разпределение на зарядите, нито движение на зарядите по проводника, а вместо това разпределението се определя от други физични закони.

Както изяснихме в гл. 6, задачата за електростатичното поле се решава много просто, когато предварително е уговорено разпределението на зарядите; остава само да се решат интегралите. Когато имаме проводници, възникват усложнения, защото разпределението на зарядите от самото начало е неизвестно; зарядите са принудени сами да се разпределят по повърхността на проводника така, че целият проводник да добие еднакъв потенциал. Тези задачи не се решават така просто.

Ние разгледахме обиколен път за решаване на такива задачи, при които отначало се търсят еквипотенциалните повърхнини на някакво зададено разпределение и след това една от тях се заменя с подходяща повърхнина. По такъв начин може да се състави каталог на частните решения за проводници с произволна форма, плоска, сферична и т. н. Използуването на образи, описани в гл. 6, е пример за косвено решаване. Друг такъв начин ще опишем в тази глава.

Ако нашата задача не се отнася към задачите, които може да се решат чрез обиколен път, налага се да я решаваме направо. Математичната основа на такъв начин за решаване е решение на уравнението на Лаплас

$$\nabla^2 \varphi = 0, \tag{7.1}$$

при условие че потенциалът φ на някаква граница (повърхности на проводници) е равен на зададена константа. Задачите, свързани с решаването на диференциалното уравнение на полето, което удовлетворява някакви *гранични условия*, се наричат задачи за *гранични стойности*. Те бяха предмет на интензивно математично изучаване. Няма общи аналитични методи за решаване на задачи за сложни проводници. Даже такава проста задача, като намирането на полето на зареден метален цилиндър със споени основи — консервна кутия, представлява огромни математически трудности. Тя може да се реши само приблизително чрез числени методи. *Единственият* общ метод за решаване е численият.

Има няколко задачи, при които уравнението (7.1) все пак се решава. Например задачата за зареден проводник, който има форма на ротационен елипсоид, може да бъде решена с помощта на някои специални функции. Решението за тънък диск тогава може да се получи, като се сплеска елипсоидът безкрайно. Като разтегнем безкрайно същия елипсоид, ще получим полето на елип-

соидна игла. Но трябва да се подчертае, че единственият пряк начин, прилаган винаги и навсякъде, е методът на числено пресмятане.

Задачата за граничните стойности може също да се реши чрез физичните й аналози. Уравнението на Лаплас се появява при много физични ситуации: при изучаването на установил се поток топлина, безвихрово течение на течност, отклонения на пъргава мембрана. Често може да се построи физичен модел, който е аналог на решаваната от нас електрична задача. Като се измери в модела величината, аналогична на интересуващата ни, може да се намери решението на задачата. Пример за аналогова техника е приложението на електролитната вана за решаването на двумерните задачи на електростатиката. Решение се получава, защото диференциалното уравнение за потенциала в хомогенна проводяща среда е същото каквото е във вакуум.

Има много физични задачи, в които физичните полета в една посока не се изменят или тези изменения може да се пренебрегнат в сравнение с измененията в другите две посоки. Такива задачи се наричат двумерни; полето зависи само от две координати. Да речем ако по оста z се постави дълъг зареден проводник, в точките близко до проводника електричното поле зависи от x и y, но не и от z; задачата е двумерна. Тъй като двумерните задачи $\partial\varphi/\partial z=0$, уравнението за φ в свободното пространство има вида

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \tag{7.2}$$

Тъй като двумерното уравнение е сравнително просто, съществува широк клас условия, при които то се решава аналитично. Наистина съществува мощна математична техника, свързана с теоремите на теорията на функциите на комплексен аргумент. Към нейното излагане пристъпваме сега.

7-2. Двумерни полета; функции на комплексен аргумент

Комплексната величина ζ се определя така:

$$\zeta=x+iy.$$

(Не бъркайте ζ с координатата z; координата z няма да се среща по-нататък, защото полетата не зависят от z.) Тогава на всяка точка от равнината (x, y) отговаря комплексно число z. Ние можем да считаме ζ особена (комплексна) променлива величина и с нейна помощ да записваме обикновените математични функции $F(\zeta)$. Например

$$F(\zeta)=\zeta^2$$

или

$$F(\zeta)=\frac{1}{\zeta^3}$$

или

$$F(\zeta)=\zeta\log\zeta$$

и т. н.

Ако е дадена някоя определена функция $F(\zeta)$, може да се замести аргументът $\zeta=x+iy$; ще се получи функция на x и y с реална и имагинерна части. Например

$$\zeta^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy. \tag{7.3}$$

Всяка функция $F(\zeta)$ може да се запише във вид на сума от чисто реална и чисто имагинерна части и всяка от частите ще бъде функция на x и y:

$$F(\zeta)=U(x,y)+iV(x,y), \tag{7.4}$$

където $U(x, y)$ и $V(x, y)$ са реални функции. Значи от всяка комплексна функция $F(\zeta)$ може да се получат две нови функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$. Например $F(\zeta)=\zeta^2$ дава две функции:

$$U(x, y)=x^2-y^2 \tag{7.5}$$

и

$$V(x, y)=2xy. \tag{7.6}$$

Ние сега достигнахме до удивителна математична теорема, толкова прекрасна, че доказателството ѝ трябва да се отложи до съответния математичен курс. (Ако започнем предварително да ви откриваме всички тайни на математиката, след това тя ще ви изглежда скучна. (Теоремата е следната. За всяка „нормална" функция (какво е това, по-добре ще ви обяснят математиците) функциите U и V удовлетворяват *автоматично* съотношенията

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y} \tag{7.7}$$

и

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial U}{\partial y} \tag{7.8}$$

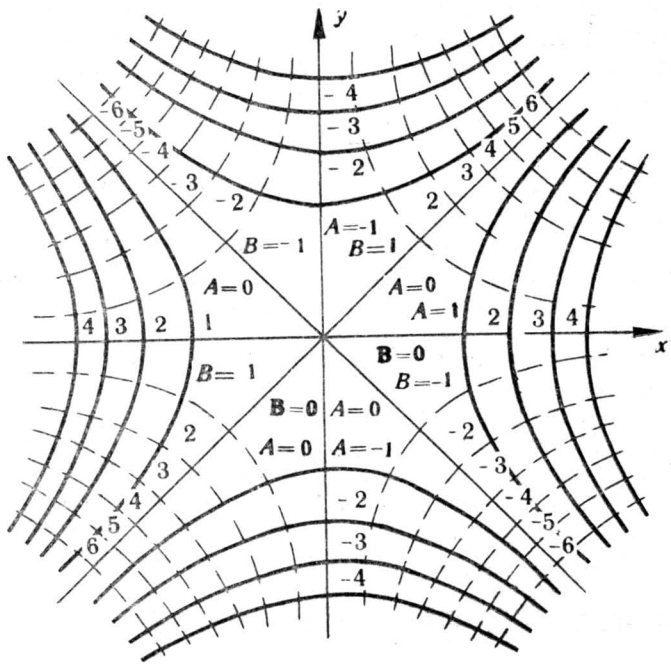
Оттук веднага следва, че всяка от функциите U и V удовлетворява уравнението на Лаплас:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0 \tag{7.9}$$

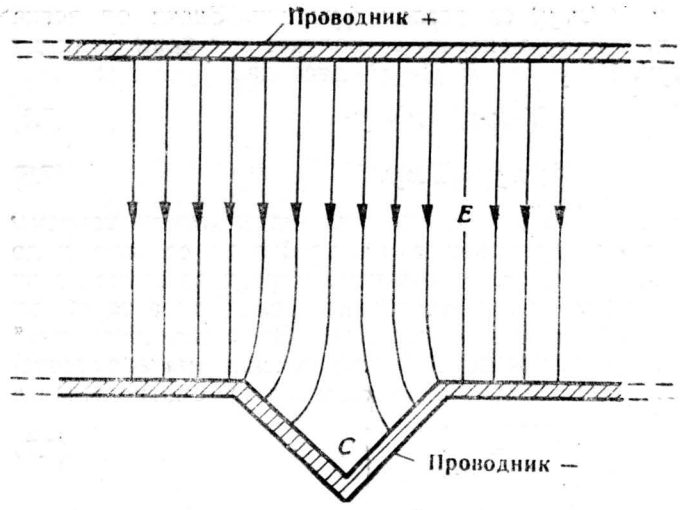
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \tag{7.10}$$

Веднага се вижда, че за функциите (7.5) и (7.6) тези уравнения се изпълняват.

Значи винаги, като тръгнем от някаква обикновена функция, може да се достигне до две функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$, решения на двумерното уравнение на Лаплас. Всяка функция представя някакъв електростатичен потенциал. *Всяка* избрана от нас функция $F(\zeta)$ трябва да ни снабди с решение на *някаква* задача от електростатиката, по-точно даже на две задачи, защото решение е *както U, така и V*. Така може да се напишат колкото желаете решения: просто трябва да се измислят много функции и остава да се намерят задачи с такова решение. Такъв подход към



Фиг. 7-1. Две семейства ортогонални криви, които могат да представляват еквипотенциалните линии на двумерно електростатично поле



Фиг. 7-2. Полето около точката C е същото, каквото е на фиг. 7-1

задачите е напълно допустим, макар че се извършва отзад напред.

Като пример ще разгледаме до каква физична задача ще ни доведе функцията $F(\zeta)=\zeta^2$. От нея получаваме двете потенциални функции (7.5) и (7.6). За да видим каква физична задача решава функцията U, ще намерим еквипотенциалните равнини, като положим U, равна на постоянно число A:

$$x^2-y^2=A.$$

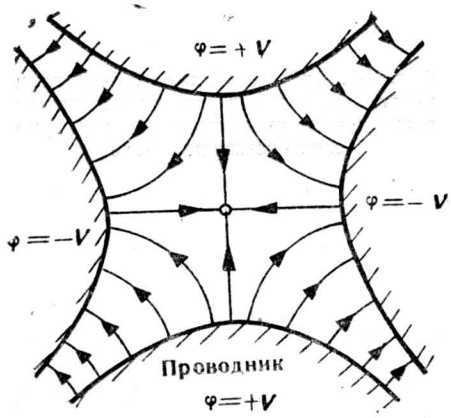
Това е уравнение на правоъгълна хипербола. Като вземем различни стойности на A, получаваме семейство хиперболи, начертано на фиг. 7-1. Когато $A=0$, хиперболите се израждат в двойка диагонали, които преминават през началото.

Такова семейство еквипотенциални повърхнини се среща в няколко физични задачи. В една от тях то изобразява детайли от структурата на полето около точка между два еднакви точкови заряда. В друга то изобразява полето вътре в прав ъгъл, образуван от две проводящи равнини. Ако има два електрода, огънати така, както е показано на фиг. 7-2, които имат различни потенциали, полето вътре в ъгъла C ще изглежда точно така, както полето около началото на фиг. 7-1. Плътните линии са еквипотенциалните повърхнини, а пресичащите ги пунктирни — линиите на полето **E**. Близко до острие или издатина електричното поле се повишава, а около впадина или отвор то отслабва.

Намереното от нас поле отговаря също на хиперболичен електрод, поставен около прав ъгъл или две хиперболи при съответни потенциали. Забележете, че полето на фиг. 7-1 има интересно свойство. Компонентата по x на електричното поле **E** се дава от израза

$$E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-2x,$$

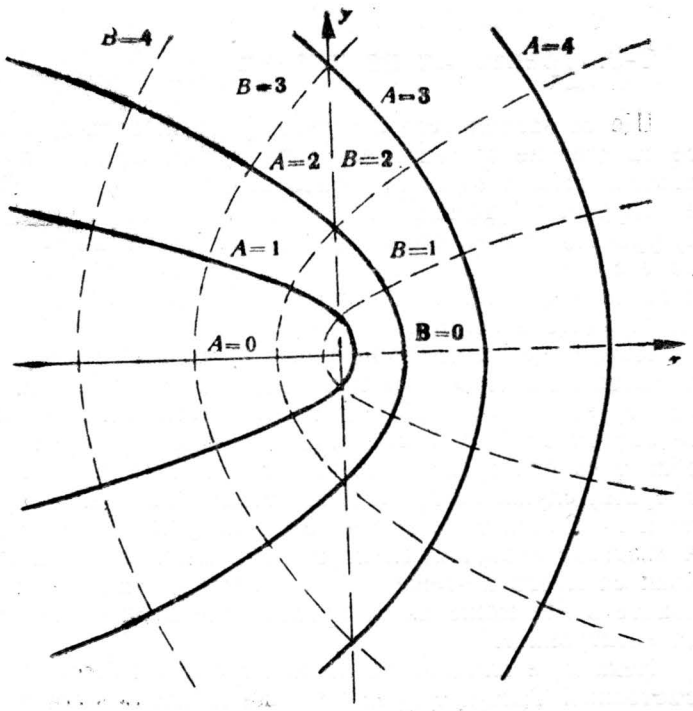
т. е. електричното поле е пропорционално на разстоянието от координатните оси. Този факт бе използуван за създаване на устройство (наричано квадруполна леща), необходимо за фокусировката на снопове от частици (вж. гл. 28, § 9). Обикновено фокусиращото поле се получава с помощта на четири хиперболични електрода, изобразени на фиг. 7-3. Като прокараме тука линиите на електричното поле, ние просто пречертаваме от фиг. 7-1 семейството пунктирни линии $V=\text{const}$. Тези линии ние получихме съвсем безплатно! Кривите $V=\text{const}$ са перпендикулярни на кривите $U=\text{const}$, както това следва от уравненията (7.7) и (7.8). Щом изберем функцията $F(\zeta)$, веднага от U и V получаваме еквипотенциалните линии и линиите на полето. Ние отдавна знаем, че можем да решим по избор едната от двете задачи в зависимост от това, кое семейство от криви приемаме за еквипотенциално.



Фиг. 7-3. Поле на квадруполна леща

Като друг пример ще ни послужи функцията

$$F(\zeta)=\sqrt{\zeta}. \qquad (7.11)$$



Фиг. 7-4. Кривите на постоянни $U(x, y)$ и $V(x, y)$ от уравнение (7.12)

Ако напишем

$$\zeta = x + iy = \rho e^{i\theta},$$

където

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

и

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x},$$

$$F(\zeta) = \rho^{1/2} e^{i\theta/2} = \rho^{1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right),$$

откъдето следва

$$F(\zeta) = \left[\frac{(x^2+y^2)^{1/2}+x}{2}\right]^{1/2} + i\left[\frac{(x^2+y^2)^{1/2}-x}{2}\right]^{1/2}. \qquad (7.12)$$

Кривите $U(x,y)=A$ и $V(x,y)=B$, където U и V са взети от уравнението (7.12), са начертани на фиг. 7-4. И тук може да се посочат немалко случаи, описвани от тези полета. Един от най-интересните е полето до края на тънка пластинка. Ако линията $B=0$ надясно от оста y изобразява тънката заредена пластинка, линиите на полето близко до нея се дават от криви с различни A. Физичната картина е показана на фиг. 7-5.

По-нататъшните примери са функцията

$$F(\zeta) = \zeta^3 \qquad (7.13)$$

даваща ни полето *извън* прав ъгъл, функцията

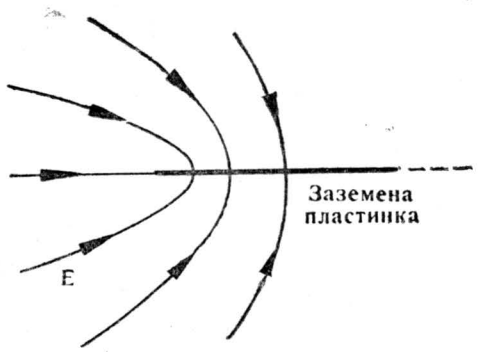
$$F(\zeta) = \log\zeta, \qquad (7.14)$$

даваща полето на заредена нишка, и функцията

$$F(\zeta) = \frac{1}{\zeta}, \qquad (7.15)$$

изобразяваща полето на двумерния аналог на електричния дипол, т. е. на две успоредни прави, заредени с противоположни знаци и поставени плътно една до друга.

Повече с този въпрос в нашия курс няма да се занимаваме: трябва да подчертаем, че макар и техниката на комплексните променливи да се оказва често много мощна, тя е все пак ограничена само за двумерните задачи, освен това тя е все пак косвен метод.



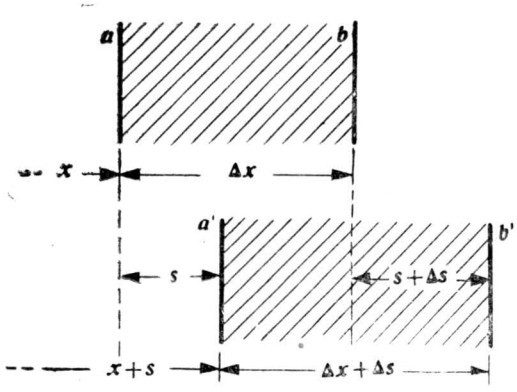
Фиг. 7-5. Електричното поле около края на тънка заземена пластинка

7-3. Трептения на плазма

Ще се заемем сега с такива физични задачи, в които полето се създава не от закрепени заряди и не от заряди на проводящи повърхности, а от съчетанието на двата фактора. С други думи, едновременно управляват полето две системи уравнения: 1) уравненията на електростатиката, които свързват електричното поле с разпределението на зарядите; 2) уравнения от друга област на физиката, които определят положението или движението на зарядите в полето.

Първо ще разгледаме един динамичен пример. В него движението на зарядите се контролира от законите на Нютон. Прост пример за това се наблюдава в плазмата, в йонизирания газ, който се състои от йони и свободни електрони, разпределени в някаква област на пространството. Йоносферата (горният слой на атмосферата) служи за пример на такава плазма. Ултравиолетовите лъчи на Слънцето откъсват от молекулите на въздуха електрони и създават свободни електрони и йони. В плазмата положителните йони са много по-тежки от електроните, така че движението на йоните в нея може да се пренебрегне в сравнение с движението на електроните.

Нека n_0 е плътността на електроните в несмутено равновесно състояние. Такава трябва да бъде и плътността на положителните йони, защото в несмутено състояние плазмата е неутрална. Сега да допуснем, че по някакъв начин електроните са изведени от равновесното състояние. Какво ще се получи тогава? Ако плътността на електроните в някаква област е нараснала, те ще започнат да се отблъскват и ще се стремят да се върнат в предишното равновесно състояние. Като се движат към своите първоначални положения, те ще наберат кинетична енергия и вместо да замрат в равновесна конфигурация, те ще отминат равновесното положение. Ще започнат трептения. Нещо подобно се наблюдава в звуковите вълни, но там връщащата сила е налягането на газа. В плазмата връщащата сила е действуващото на електроните електрично привличане.



Фиг. 7-6. Движение на вълната в плазма.
Електроните от равнината a се преместват към a', а от b — към b'

За да опростим разсъжденията, ще се занимаваме само с едномерно движение на електроните — да речем, по посока x. Ще предположим, че електроните, които първоначално се намират в точка x, в момента t са се отместили от равновесното положение на разстояние $s(x, t)$. Щом са се отместили, плътността им, изобщо казано, ще се измени. Лесно се пресмята това изменение. Ако се погледне фиг. 7-6, се вижда, че електроните, който първоначално се намирали между равнините a и b, са се преместили и сега се намират между равнините a' и b'. Количеството електрони между a и b преди е било пропорционално на $n_0 \Delta x$; сега *същото* количество се намира в промеждутъка с ширина $\Delta x + \Delta s$. Плътността сега е станала

$$n = \frac{n_0 \Delta x}{\Delta x + \Delta s} = \frac{n_0}{1 + (\Delta s / \Delta x)}. \tag{7.16}$$

Ако изменението на плътността е малко, може да се напише [като се замени с помощта на биномно разлагане $(1+\varepsilon)^{-1}$ с $(1-\varepsilon)$]

$$n = n_0 \left(1 - \frac{\Delta s}{\Delta x}\right). \tag{7.17}$$

Що се отнася до йоните, ще предположим, че те не са се преместили забележимо от местата си (инерцията им е далеч по-голяма), така че плътността им е останала предишната, n_0. Зарядът на всеки електрон е $-q_e$ и средната плътност на заряда в произволна точка е

$$\rho = -(n - n_0) q_e$$

или

$$\rho = n_0 q_e \frac{ds}{dx} \tag{7.18}$$

(тук $\Delta s / \Delta x$ е записано чрез диференциали).

По-нататък уравненията на Максвел свързват плътността на зарядите с електричното поле. В частност

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{7.19}$$

Ако задачата е наистина едномерна (и никакви полета освен предизвиканите от преместването на електроните няма), електричното поле $\mathbf{E}$ има една единствена компонента E_x. Уравнението (7.19) заедно с (7.18) ще доведе до

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{n_0 q_e}{\varepsilon_0} \frac{\partial s}{\partial x}. \tag{7.20}$$

Като интегрираме (7.20), получаваме

$$E_x = \frac{n_0 q_e}{\varepsilon_0} s + K. \tag{7.21}$$

Константата от интегрирането K е равна на нула, защото $E_x = 0$ при $s = 0$.

Силата, която действува на преместения заряд, е

$$F_x = -\frac{n_0 q_e^2}{\varepsilon_0} s, \tag{7.22}$$

т. е. връщащата сила е пропорционална на преместването s на електрона. Това ще доведе до хармонично трептене на електроните. Уравнението на движение на преместения електрон има вида

$$m_e \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{n_0 q_e^2}{\varepsilon_0} s. \tag{7.23}$$

Оттук следва, че s се изменя по хармоничен закон. Във времето s се изменя както $\cos \omega t$ или ако се използува експонентът (вж. т. I) като

$$e^{i\omega_p t}. \tag{7.24}$$

Честотата на трептене ω_p се определя от (7.23).

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 q_e^2}{\varepsilon_0 m_e}. \tag{7.25}$$

Това число, характеризиращо плазмата, се нарича *собствена честота на трептене на плазмата* или *плазмена честота.*

Оперирайки с електроните, много учени предпочитат да получават отговори в единици e^2, определени като

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi \varepsilon_0} = 2{,}3068 \cdot 10^{-28} \text{ Нютон. м}^2. \tag{7.26}$$

При това условието (7.25) се превръща в

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}. \tag{7.27}$$

В такъв вид тази формула може да се срещне в много книги.

И така, ние установихме, че смущенията на плазмата довеждат до свободни трептения на електроните близо до равновесното положение със собствена честота ω_p, пропорционална на квадратния корен от плътността на електроните. Плазмените електрони имат поведение на резонансна система, подобна на описаната в том I, гл. 23.

Този собствен резонанс на плазмата довежда до интересни ефекти. Например при преминаване на радиовълни през йоносферата се установява, че те могат да преминат само ако честотата им е по-голяма от плазмената честота. Ако не е, те се отразяват обратно. За връзка с изкуствените спътници ние използуваме високи честоти. Ако пък искаме да се свържем с радиостанция, разположена някъде зад хоризонта, необходими са честоти, по-

малки от плазмената, иначе сигналът няма да се отрази обратно към Земята.

Друг интересен пример на трептения на плазмата се наблюдава в металите. В тях се съдържа плазма от положителни йони и свободни електрони. Плътността n_0 там е много голяма, значи висока е и ω_p. Но трептения на електроните все пак може да се установят. Нали съгласно квантовата механика хармоничният осцилатор със собствена честота ω_p притежава енергетични нива, различаващи се с величината $\hbar\omega_p$. Значи ако бомбардираме с електрони алуминиева фолия, може да се очаква, че от време на време от другата страна на фолията електроните поради трептенията на плазмата ще губят енергия именно $\hbar\omega_p$, ако много точно измерваме енергията им зад фолията. Така точно и става. За първи път това явление е надблюдавано експериментално в 1936г. Електроните с енергия от няколкостотин до няколко хиляди елекронволта, когато се разсейват от тънка металическа фолия или когато преминават през нея, губят енергия на порции. Ефектът оставаше непонятен до 1953 г., докато Бом и Пайнс[1] не показваха, че всичко това може да се обясни с квантово възбуждане на плазма в металите.

7-4. Колоидни частици в електролит

Да се обърнем към друго явление, когато положението на зарядите се определя от потенциала, създаван в известна степен от самите заряди. Такъв ефект е съществен за поведението на колоидите. Колоидът е суспенсия на малки заредени частички във вода. Макар и тия частички да са микроскопически, все пак в сравнение с атомите те са много големи. Ако колоидните частици не бяха заредени, те биха се стремили да коагулират (сливат) в големи бучки; но бидейки заредени, те се отблъскват взаимно и остават в суспенсно състояние. Ако във водата освен това е разтворена и сол, тя дисоциира (разлага се) на положителни и отрицателни йони. (Такъв разтвор на йони се нарича електролит.) Отрицателните йони се привличат от колоидните частици (ще считаме, че зарядите им са положителни), а положителните — се отблъскват. Необходимо ни е да узнаем как са разпределени йоните в пространството, което окръжава всяка частица на колоида.

За да бъде мисълта ни по-ясна, ще разгледаме само едномерен случай. Да си представим колоидната частица като много голямо (в сравнение с атома!) кълбо; тогава малка част от повърхността му можем да считаме част от равнина. (Изобщо, когато се опитваме да разберем ново явление, е по-добре да го разберем на базата на опростен модел; и едва след като разберем същността на проблема, да се захващаме за по-точни пресмятания.)

Да предположим, че разпределението на йоните създава плътност на заряди $\rho(x)$ и електричен потенциал φ, свързани с електростатичния закон $\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0$ или в едномерния случай със закона

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{7.28}$$

Как биха се разпределили йоните в такова поле, ако потенциалът се подчинява на това уравнение? Това може да се узнае с помощта на принципите на статическата механика. Въпросът е как да се определи φ, че следващата от статическата механика плътност на заряда *също* да удовлетворява условието (7.28)?

Съгласно статистическата механика (вж. том I, гл. 40) частиците, които са в топлинно равновесие в силово поле, се разпре-

[1] За нови работи по този въпрос и библиография вж. статията C. J. Powell, J. B. Swann, Phys. Rev, **115**, 869 (1959).

делят така, че плътността на n частиците с координата x се дава от формулата

$$n(x)=n_0e^{-U(x)/kT}, \tag{7.29}$$

където $U(x)$ е потенциалната енергия, k — константата на Болцман, а T — абсолютна температура.

Да предположим, че всички йони имат еднакъв електричен заряд положителен или отрицателен. На разстояние x от повърхността на колоидната частица положителният йон ще притежава потенциална енергия

$$V(x)=q_e\varphi(x).$$

Плътността на положителните йони тогава е

$$n_+(x)=n_0e^{-q_e\varphi(x)/kT},$$

а плътността на отрицателните

$$n_-(x)=n_0e^{+q_e\varphi(x)/kT}.$$

Сумарната плътност на заряда е

$$\rho=q_en_+-q_en_-$$

или

$$\rho=q_en_0(e^{-q_e\varphi/kT}-e^{+q_e\varphi/kT}). \tag{7.30}$$

Като я заместим в (7.28), виждаме, че потенциалът φ трябва да удовлетворява уравнението

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=-\frac{q_en_0}{\varepsilon_0}(e^{-q_e\varphi/kT}-e^{+q_e\varphi/kT}) \tag{7.31}$$

Това уравнение се решава в общ вид (умножете двете му страни с $2(d\varphi/dx)$ и го интегрирайте по x), но за да опростим задачата, ще се ограничим тук само с граничния случай на малки потенциали или високи температури T. Това че φ е малко, съответствува на малка концентрация на разтвора. Показателят на експонентите тогава е малък и може да се вземе

$$e^{\mp q_e\varphi/kT}=1\pm\frac{q_e\varphi}{kT}. \tag{7.32}$$

Уравнението (7.31) дава

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=+\frac{2n_0q_e^2}{\varepsilon_0kT}\varphi(x). \tag{7.33}$$

Забележете, че сега в дясната страна има знак плюс (решението не е трептене, а е експоненциално).

Общото решение на (7.33) има вида

$$\varphi=Ae^{-x/D}+Be^{+x/D}, \tag{7.34}$$

където

$$D^2=\frac{\varepsilon_0kT}{2n_0q_e^2}. \tag{7.35}$$

Константите A и B се определят от допълнителни условия. В нашия случай B трябва да бъде нула, защото в противен случай потенциалът за големи x става безкрайност. И така

$$\varphi=Ae^{-x/D}, \tag{7.36}$$

където A е потенциалът при $x=0$ на повърхността на колоидната частица.

Потенциалът намалява e пъти при отдалечаване на разстояние D (фиг. 7-7). Числото D се нарича *дебаевска дължина*; тя е мярка за дебелината на йонната обвивка около всяка голяма заредена частица в електролит. Уравнението (7.36) твърди, че обвивката става по-тънка с увеличаването на концентрацията на йоните (n_0) или намаляването на температурата.

Константата A в (7.36) се получава лесно, ако е известен повърхнинният заряд σ на повърхността на заредената частица. Ние знаем, че

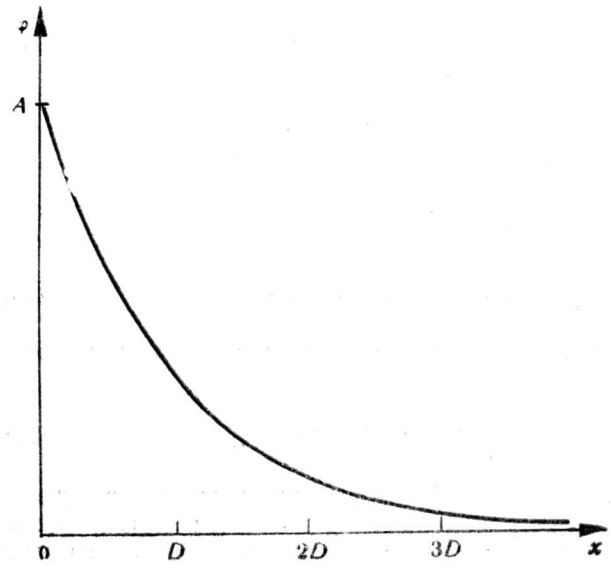
$$E_n = E_x(0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{7.37}$$

Но E е също градиент от φ

$$E_x(0) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_0 = +\frac{A}{D}. \tag{7.38}$$

откъдето се получава

$$A = \frac{\sigma D}{\varepsilon_0}. \tag{7.39}$$



Фиг. 7-7. Изменение на потенциала до повърхнината на колоидна частица
D — дебаевската дължина

Като заместим този резултат в (7.36), ще получим (като положим $x=0$), че потенциалът на колоидната частица е равен на

$$\varphi(0) = \frac{\sigma D}{\varepsilon_0}. \tag{7.40}$$

Забележете, че този потенциал съвпада с потенциалната разлика в кондензатор с разстояние между плочите D и повърхнинна плътност на заряда σ.

Ние казахме, че колоидните частици не се слепват поради електричното отблъскване. Но сега виждаме, че недалеч от повърхността на частицата поради възникването на йонна обвивка полето намалява. Ако обвивката би станала достатъчно тънка, има вероятност частиците да се ударят една в друга. Тогава те биха се слели, колоидът би се утаил и отделил от течността. От нашия анализ се вижда, че след добавяне на подходящо количество сол ще започне падане на утайка. Този процес се нарича „изсоляване на колоид".

Друг интересен пример е влиянието на разтварянето на солта върху утаяването на белтъка. Молекулата на белтъка е дълга, сложна и еластична верига от аминокиселини. Върху нея тук-там има заряди и от време на време зарядът от някакъв знак, да речем отрицателен, се разпределя по цялата верига. В резултат на взаимното отблъскване на отрицателните заряди белтъчната верига се изправя. Ако в разтвора има и други такива молекули-вериги, те няма да се залепят една за друга поради същото отблъскване. Така възниква в течността суспенсия от молекули-вериги. Но щом се добави в такава суспенсия сол, свойствата на суспенсията се изменят. Намалява се дебаевската дължина, молекулите започват да се доближават и се навиват като спирали. А ако солта е много, молекулите на белтъка започват да се утаяват. Съществуват много други химични явления, които може да се разберат чрез анализа на електричните сили.

7-5. Електростатично поле на мрежа

На края искаме да изложим още едно интересно свойство на електричните полета. То се използува в електрическите уреди, електронните лампи и за други цели. Става дума за поведението на електричното поле близко до мрежа, съставена от заредени проводници. За да опростим задачата, ще вземам плоска система от проводници с безкрайна дължина, разстоянията между които са еднакви.

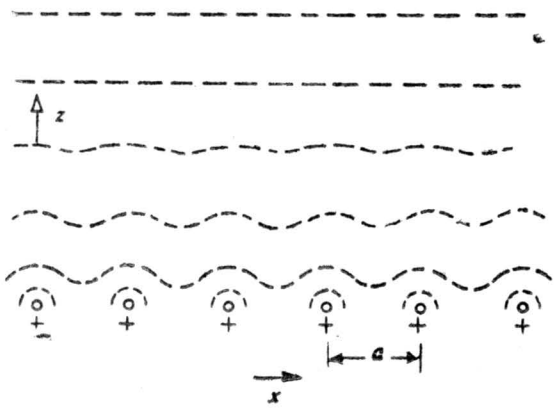
Ако погледнем на полето някъде отвисоко над равнината на проводниците, пред нас ще се представи хомогенно електрично поле, като че ли зарядът е разпределен равномерно по равнината. С приближаването към мрежата ще започнат отклонения от предишната равномерност. Ние искаме да оценим колко близко до решетката се появят забележими отклонения в потенциала. На фиг. 7-8 е показано примерно разположение на еквипотенциалните повърхнини на различни разстояния от мрежата. Колкото са по-близко до мрежата, толкова са по-силни отклоненията. Ако се движим успоредно на мрежата, ще забележим, че полето се изменя периодично.

Ние вече знаем (вж. том I, гл. 50), че всяка периодична величина може да бъде представена във вид на сума от синусни вълни (теорема на Фурие). Да видим не може ли да се намери подходяща периодична функция, която да удовлетворява нашите уравнения на полето.

Ако проводниците лежат в равнината xy, успоредно на оста y, може да се опитат за решение членове от вида

$$\varphi(x, y) = F_n(z) \cos \frac{2\pi n x}{a}, \tag{7.41}$$

където a е разстоянието между нишките, а n — честота на трептене. (Ние предположихме, че тези нишки са достатъчно дълги, така че никакви изменения по y не се забелязват.) Пълното ре-



Фиг. 7-8. Еквипотенциалните повърхнини над хомогенна решетка от заредени проводници

шение трябва да се състои от сума от такива членове при $n=1, 2, 3, \ldots$ За да се получи правилен потенциал, трябва в областта над мрежата (където няма заряди) да се подчинява на уравнението на Лаплас, т. е.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Като проверим в това уравнение функцията φ от (7.41), получаваме

$$-\frac{4\pi^2 n^2}{a^2} F_n(z) \cos \frac{2\pi n x}{a} + \frac{d^2 F_n}{dz^2} \cos \frac{2\pi n x}{a} = 0, \tag{7.42}$$

т. е. $F_n(z)$ трябва да удовлетворява условието

$$\frac{d^2 F_n}{dz^2} = \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} F_n \tag{7.43}$$

И така,

$$F_n = A_n e^{-z/z_0}, \tag{7.44}$$

$$z_0 = \frac{a}{2\pi n}. \tag{7.45}$$

Ние установихме, че ако има n-та хармонична компонента на Фурие на полето, тази компонента трябва да намалява по експоненциален закон с височината, като характерното разстояние е $z_0 = a/2\pi n$. Амплитудата на първата хармонична ($n=1$) се намалява $e^{2\pi}$ пъти (много рязко падане) всеки път, когато се отдалечаваме от решетката на разстояние a. Другите хармонични намаляват още по-бързо. Виждаме, че вече на разстояние няколко a решетката изглежда почти хомогенна, т. е. отклоненията на полето са много малки. Разбира се, винаги остава „нулева хармонична“ на полето

$$\varphi_0 = -E_0 z,$$

която дава хомогенното поле при големи z. За пълното решение трябва да се добави този член към сумата на членове от вида (7.41) с F_n от (7.44), при което всеки член трябва да се вземе с коефициент A_n. Тези коефициенти обикновено се избират така, че след диференциране да се получи поле, което се съгласува с плътността на зарядите λ на нишките на мрежата.

Развитият от нас метод може да обясни защо електростатичната защита с помощта на мрежа с нищо не е по-лоша от плътни метални листове. Полето зад мрежата е равно на нула навсякъде с изключение на разстояние, не по-голямо от няколко a до самата мрежа. Виждаме, че медна мрежа, която е много по-лека и по-евтина от плътна медна обшивка, напълно е годна за защита на чувствително електрично оборудване от смущаващите външни полета.

8

Електростатична енергия

8-1. Електростатична енергия на заряди. Хомогенно кълбо

Едно от най-интересните и полезни открития в механиката е законът за запазване на енергията. Като знаем формулите за кинетичната и потенциална енергия на механична система, ние сме в състояние да установим връзка между състоянията на системата в два различни момента, без да вникваме в подробностите какво става между тези моменти. Ние искаме сега да определим енергията на електростатични системи. В електричеството запазването на енергията ще се окаже също полезно за установяване на много любопитни факти.

Законът, по който се изменя енергията при електростатичното взаимодействие, е много прост; всъщност ние вече сме го обсъждали. Нека има два заряда q_1 и q_2 на разстояние r_{12}. Тази система има някаква енергия, защото трябваше да извършим някаква работа, за да сближим зарядите. Ние пресмятахме работата, извършвана при сближаването на два заряда от голямо разстояние; тя е равна на

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}. \tag{8.1}$$

Ние знаем от принципа на наслагването, че ако зарядите са много, общата сила, която действува на всеки заряд, е равна на сумата от силите, които действуват от страна на всички останали заряди. Оттук следва, че пълната енергия на система от няколко заряда е сума от членовете, които изразяват взаимодействието на всяка двойка заряди поотделно. Ако q_i и q_j са два от зарядите, а разстоянието между тях е r_{ij} (фиг. 8-1), енергията именно на тази двойка е равна на

$$\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}. \tag{8.2}$$

Пълната електростатична енергия U е сума от енергията на всевъзможните двойки заряди:

$$U = \sum_{\text{всички двойки}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}. \tag{8.3}$$

Ако разпределението се задава от плътност на заряда ρ, сумата (8.3) трябва, разбира се, да се замени с интеграл.

Ние ще разкажем тук за енергията от две гледни точки. Едната е *приложение* на понятието за енергия към електростатичните задачи; втората — различни начини *за оценка* на големината на енергията. Понякога е по-лесно да се пресметне работата в някой случай, отколкото да се оценява големината на сумата в (8.3) или на съответния интеграл. За пример ще пресметнем енергията, необходима за събирането на заряди в хомогенно кълбо. Енергията тук не е нищо друго освен работата, която се извършва за събиране на зарядите от безкрайност.

Представете си, че ние построяваме кълбото, като наслояваме последователно един върху друг сферични слоеве с безкрайно малка дебелина. На всеки стадий от процеса събираме малко количество електричество и го поставяме като тънък слой от r до $r+dr$. Продължаваме този процес дотогава, докато не достигнем

8-1. Електростатична енергия на заряди. Хомогенно кълбо

8-2. Енергия на кондензатор. Сили, които действуват на заредени проводници

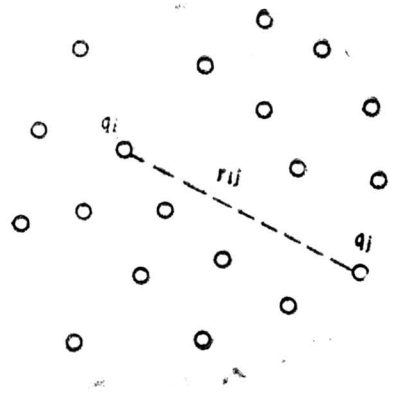
8-3. Електростатична енергия на йонен кристал

8-4. Електростатична енергия на ядрото

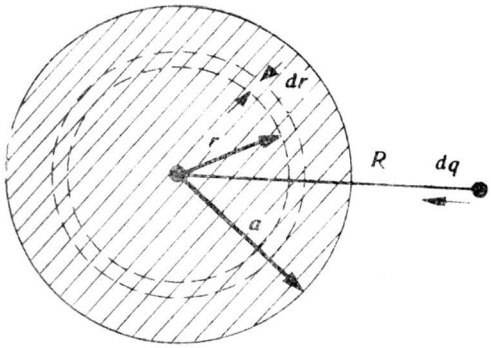
8-5. Енергия в електростатично поле

8-6. Енергия на точков заряд

Да се повтори: гл. 4 (том I) „Запазване на енергията“; гл. 13 и 14 (том I) и потенциална енергия“



Фиг.8-1 Електростатичната енергия на система от частици е равна на сумата от електростатичните енергии на всяка двойка



Фиг. 8-2. Енергията на хомогенно заредено кълбо може да се пресметне, като си представим, че сме го залепили, последователно залепвайки един за друг сферични слоеве

зададения радиус a (фиг. 8-2). Ако Q_r е зарядът на кълбото в момента, когато кълбото има радиус r, работата за доставяне върху кълбото на заряд dQ е

$$dU = \frac{Q_r dQ}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{8.4}$$

Ако плътността на заряда вътре в кълбото е ρ, зарядът е

$$Q_r = \rho \frac{4}{3}\pi r^3,$$

а зарядът dQ е равен на

$$dQ = \rho\, 4\pi r^2 dr.$$

Уравнението (8.4) се превръща в

$$dU = \frac{4\pi \rho^2 r^4 dr}{3\varepsilon_0}. \tag{8.5}$$

Пълната енергия, необходима, за да се натрупа пълният заряд на кълбото, е равна на интеграла по dU от $r=0$ до $r=a$, т. е.

$$U = \frac{4\pi \rho^2 a^5}{15\varepsilon_0}, \tag{8.6}$$

а ако желаем да изразим резултата чрез пълния заряд Q на кълбото

$$U = \frac{3}{5} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}. \tag{8.7}$$

Енергията е пропорционална на квадрата на пълния заряд и обратно пропорционална на радиуса. Може да се представи (8.7) и така: средната стойност на $(1/r_{ij})$ по всички двойки точки вътре в кълбото е равна на $6/5\,a$.

8-2. Енергия на кондензатор. Сили, които действуват на заредени проводници

Да разгледаме сега енергията, необходима за зареждане на кондензатор. Ако зарядът Q беше взет от едната пластина на кондензатора и пренесен на другата, между пластините ще възникне потенциална разлика

$$V = \frac{Q}{C}, \tag{8.8}$$

където C е капацитетът на кондензатора. Колко работа е извършена за зареждането на кондензатора? Като постъпваме точно така, както постъпвахме с кълбото, ще си представим, че кондензаторът е вече зареден чрез пренасяне на заряд от едната пластина на другата на малки порции dQ. Работата, необходима за пренасяне на заряда dQ, е

$$dU = V dQ.$$

Като вземем V от (8.8), ще напишем

$$dU = \frac{Q dQ}{C}.$$

Или като интегрираме от $Q=0$ до крайния заряд Q, получаваме

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}. \tag{8.9}$$

Тази енергия може също да се напише и така

$$U = \frac{1}{2} CV^2. \tag{8.10}$$

Като си спомним, че капацитетът на сфера (спрямо безкрайност) е

$$C_{\text{сфера}} = 4\pi\varepsilon_0 a,$$

ние веднага от (8.9) ще получим енергията на заредена сфера

$$U = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}. \tag{8.11}$$

Този израз, разбира се, се отнася също и за енергията на тънък *сферичен слой* с пълен заряд Q; получава се 5/6 от енергията на *хомогенно заредено кълбо* [уравнение (8.7)].

Да видим как се прилага понятието електростатична енергия. Ще разгледаме два въпроса. Каква е силата, която действува между пластините на кондензатора? Какъв въртящ момент спрямо някаква ос изпитва зареден проводник в присъствие на друг проводник с противоположен заряд? На такива въпроси е лесно да се отговори, като се възползуваме от нашия израз за електростатичната енергия (8.9) и принципа за виртуалната работа (вж. т. I, гл. 4, 13, 14).

Да приложим този метод за определяне на силата, която действува между двете пластини на кондензатора. Ако си представим, че разстоянието между пластините се измени с малката величина Δz, тогава извършената отвън механична работа, за да се раздалечат пластините, е

$$\Delta W = F\,\Delta z, \tag{8.12}$$

където F е силата, която действува между пластините. Тази работа трябва да бъде равна на изменението на електростатичната енергия на кондензатора, само ако зарядът на кондензатора не се изменя.

Съгласно уравнение (8.9) енергията на кондензатора първоначално е била

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}.$$

Изменението на енергията (ако не допускаме изменение на големината на заряда) тогава е

$$\Delta U = \frac{1}{2}\,Q^2\Delta\left(\frac{1}{C}\right). \tag{8.13}$$

Като приравним (8.12) и (8.13), получаваме

$$F\,\Delta z = \frac{Q^2}{2}\,\Delta\left(\frac{1}{C}\right), \tag{8.14}$$

което може да бъде записано във вида

$$F\,\Delta z = -\frac{Q^2}{2C^2}\,\Delta C. \tag{8.15}$$

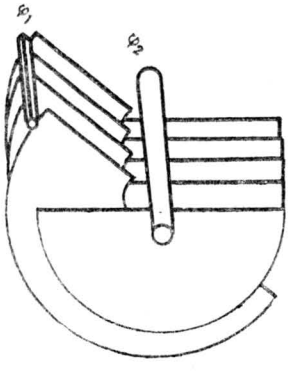
Ясно е, че тази сила възниква тук от привличането на зарядите на пластините; ние виждаме обаче, че няма нужда да се грижим за това, как там са разпределени зарядите; единственото, което ни е нужно, е да отчетем капацитета C.

Лесно се разбира как да се обобщи тази идея за проводници с произволна форма и за другите компоненти на силата. Ще заменим в уравнението (8.14) F с тази компонента, която ни интересува, а Δz — с малко преместване в съответната посока. Или ако имаме електрод, поставен на някаква ос, и искаме да знаем момента на въртене τ, ще запишем виртуалната работа във вида

$$\Delta W = \tau\Delta\theta,$$

където $\Delta\theta$ е малко ъглово завъртване. Разбира се, сега $\Delta(1/C)$ трябва да бъде изменението на $1/C$, което отговаря на завъртане $\Delta\theta$. По този начин можем да определим момента на въртене, който действува на подвижните пластини на променливия кондензатор, показан на фиг.

Да се върнем частния случай на плосък кондензатор;



Фиг. 8-3. На какво е равен моментът на въртене, като действува на променлив кондензатор?

ние можем да използуваме формулата за капацитета, изведен в гл. 6:

$$\frac{1}{C}=\frac{d}{\varepsilon_0 A}, \tag{8.16}$$

където A е площта на всяка пластина. Ако разстоянието се увеличи с Δz,

$$\Delta\left(\frac{1}{C}\right)=\frac{\Delta z}{\varepsilon_0 A}.$$

Тогава от (8.14) следва, че силата на привличане между двете пластини е

$$F=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}. \tag{8.17}$$

Да погледнем по-внимателно уравнение (8.17) и да помислим не може ли да се каже как възниква тази сила. Ако запишем заряда на една от пластините във вида

$$Q=\sigma A,$$

(8.17) може да бъде написано така:

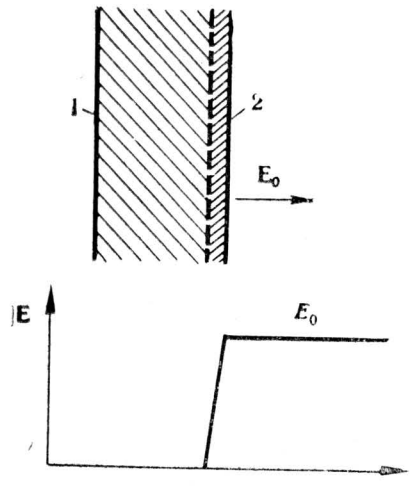
$$F=\frac{1}{2}\cdot Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Или тъй като полето между пластините е

$$E_0=\frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

силата е

$$F=\frac{1}{2}QE_0. \tag{8.18}$$



Фиг. 8-4. Полето на повърхността на проводник се изменя от нула до $E_0=\sigma/\varepsilon_0$, когато се пресича слоят на повърхнинния заряд:
1 — проводяща пластина; *2* — слоят на повърхнинния заряд

Бихме могли изведнаж да се досетим, че силата, която действува на едната пластина, ще бъде равна на заряда Q на тази пластина, умножен по полето, действуващо на заряда. Но това, което ни удивлява, е множителят 1/2. Работата е в това, че E_0 не е полето, *което действува* на зарядите. Ако си представим, че зарядът на повърхността на пластината заема някакъв тънък слой (фиг. 8-4), полето ще се изменя от 0 на вътрешната граница на слоя до E_0 в пространството извън пластината. Средното поле, което действува на повърхнинните заряди, е равно на $E_0/2$. Ето откъде в (8.18) се е появил множителят 1/2.

Вие трябва да обърнете внимание, че пресмятайки виртуалната работа, ние предположихме, че зарядът на кондензатора е постоянен, че кондензаторът не бе електрично свързан с други предмети и че пълният заряд не можеше да се изменя.

Сега нека предположим, че при виртуалните премествания кондензаторът се поддържа при постоянна потенциална разлика. Тогава ние трябва да вземем

$$U=\frac{1}{2}CV^2$$

и вместо (8.15) ще имаме

$$F\Delta z=\frac{1}{2}V^2\Delta C,$$

което довежда до сила, равна по големина на получената в уравнение (8.15) [тъй като $V=Q/C$], но с противоположен знак!

Разбира се, силата, която действува между пластините на кондензатора, не изменя знака си, когато изключваме кондензатора от източника на електричество. Освен това ние знаем, че двете пластини с разноименно електричество трябва да се привличат. Принципът на виртуалната работа във втория случай беше приложен неправилно, защото не взехме пред вид виртуалната ра-

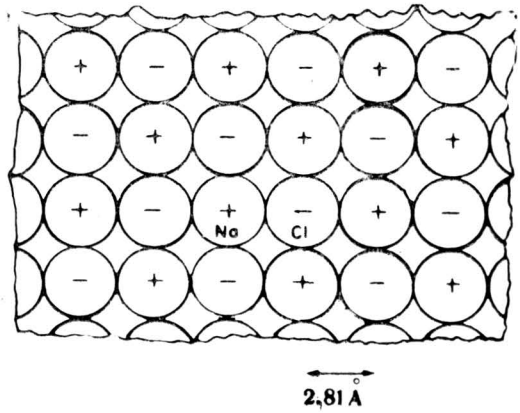
бота, извършена от източника, който зарежда кондензатора. Това значи, че за да поддържаме потенциала постоянен при стойност V, когато се изменя капацитетът, източникът на електричество трябва да снабди кондензатора със заряд $V\Delta C$. Но този заряд постъпва при потенциал V, така че работата, извършена от електричната система, която поддържа заряда постоянен, е равна на $V^2\Delta C$. Механичната работа $F\Delta z$ *плюс* тази електрична работа $V^2\Delta C$ заедно довеждат до изменението на пълната енергия на кондензатора с $1/2V^2\Delta C$. Поради това на механичната работа, както и по-рано, се пада $F\Delta z = -\frac{1}{2}V^2\Delta C$.

8-3. Електростатична енергия на йонен кристал

Да разгледаме сега приложението на понятието електростатична енергия в атомната физика. Ние не можем направо да измерим силите, които действуват между атомите, но често ни интересува разликата в енергиите на две подреждания на атомите (например енергията на химичните изменения). Тъй като атомните сили в основата си са електрични сили и химичната енергия в главната си част е електростатична енергия.

Да разгледаме например електростатичната енергия на йонната решетка. Такъв йонен кристал като NaCl се състои от положителни и отрицателни йони, които може да считаме твърди сфери. Те електрически се привличат, докато не се докоснат; след това започва да действува силата на отблъскване, която бързо нараства, ако се опитаме да ги доближим още.

За първоначално приближение ще си представим, че атомите на кристала на солта са съвкупност от твърди сфери. Строежът на такава решетка беше определен с помощта на дифракцията на рентгенови лъчи. Тази решетка е кубична — нещо подобно на тримерна шахматна дъска. Сечението ѝ е показано на фиг. 8-5. Разстоянието между йоните е 2,81 Å (или $2{,}81.10^{-8}$ cm).



Фиг. 8-5. Напречен разрез на кристала на солта в мащаб на няколко атома.
В двете перпендикулярни на равнината на фигурата сечения ще има същото шахматно разположение на йоните на Na и Cl (вж. т. I, фиг. 1-7)

Ако нашата представа за системата е правилна, трябва да умеем да я проверим, като зададем следния въпрос: колко енергия е необходима, за да разделим тези йони, т. е. напълно да се раздели кристалът на йони? Тази енергия трябва да бъде равна на топлината на изпарение плюс енергията за дисоциация на молекулите на йони. Пълната енергия на разделяне на NaCl на йони, както следва от опита, е равна на 7,92 eV на молекула. Като се използува преводният коефициент

$$1\ \text{eV} = 1{,}602.10^{-19}\ \text{J}$$

и числото на Авогадро (количеството молекули в грам-молекула)

$$N_0 = 6{,}02.10^{23},$$

може да се представи енергията на изпарение във вида

$$W = 7{,}64.10^5\ \text{J/mol}.$$

Любимата единица за енергия, от която се ползуват физикохимиците, е килокалорията, равна на 4190 J; така че 1 eV на молекула е все едно 23 kcal/mol. Поради това химикът би казал, че енергията на дисоциация на NaCl е

$$W = 183\ \text{kcal/mol}.$$

Можем ли да получим тази химична енергия теоретично, като пресмятаме колко работа е необходима, за да се разруши кристалът? По нашата теория тя е равна на сумата от потенциалните енергии на всички двойки йони. Най-просто можем да получим представа за тази енергия, като изберем един произволен йон и пресметнем потенциалната му енергия по отношение на всички останали йони. Това ще даде *удвоената* енергия на един йон, защото енергията принадлежи на двойка заряди. Ако ни е

необходима енергията, свързана с един произволен йон, трябва да вземем половината сума. Но всъщност на нас ни трябва енергията за *молекула,* която съдържа два йона, така че изчислената от нас сума ни дава енергията на молекулата.

Енергията на йона спрямо най-близкия му съсед е равна на $-e^2/a$, където $e^2=q_e^2/4\pi\varepsilon_0$, а a е разстоянието между центровете на йоните. (Ние разглеждаме едновалентни йони.) Тази енергия е равна на $-5{,}12$ eV; ние вече виждаме, че отговорът се получава с правилен порядък за величината. Но ни предстои още да пресметнем безкраен ред членове.

Ще започнем със събиране на енергията на всички йони, които лежат по права. Като считаме йона, отбелязан на фиг. 8-5 с Na, за нашия избран йон, отначало ще разгледаме йоните, които лежат на една хоризонтала с него. Там има два най-близко до него йона на хлора с отрицателни заряди, всеки на разстояние a от Na. След това идват два положителни йона на разстояние $2a$ и т. д. Като означим тази сума от енергии с U_1, ще напишем

$$U_1=\frac{e^2}{a}\left(-\frac{2}{1}+\frac{2}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\cdots\right)=$$

$$=-\frac{2e^2}{a}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right). \tag{8.19}$$

Редът клони бавно към определена граница, така че да се оцени числено е трудно, но е известно, че той е равен на $\ln 2$. Значи

$$U_1=-\frac{2e^2}{a}\ln 2=-1{,}386\,\frac{e^2}{a}. \tag{8.20}$$

Сега да преминем към близките горни линии. Най-близкият йон е отрицателен и се намира на разстояние a. След това стоят два положителни на разстояния $\sqrt{2}\,a$. Следващата двойка на разстояние $\sqrt{5}\,a$, следващата — на $\sqrt{10}\,a$ и т. н. За цялата линия се получава редът

$$\frac{e^2}{a}\left(-\frac{1}{1}+\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{10}}\cdots\right). \tag{8.21}$$

Такива линии са *четири*: над, под, отпред и отзад (йона). След това има четири линии, които са най-близките по диагонал, и т. н.

Ако вие търпеливо извършите пресмятанията за всички линии и след това ги съберете, ще видите, че резултатът е такъв:

$$U=-1{,}747\,\frac{e^2}{a}.$$

Числото е малко по-голямо от полученото в (8.20) за първата линия. Като вземем пред вид, че $e^2/a=-5{,}12$ eV, ще получим

$$U=-8{,}94\ \text{eV}.$$

Нашият отговор е приблизително с 10% по-голям от експериментално наблюдаваната енергия. Той показва, че нашата представа, че цялата решетка е съединена (закрепена) от електрически кулонови сили, в основата си е правилна. Ние за първи път получихме специфично свойство на макроскопично вещество от нашите познания в атомната физика. С време ще достигнем значително повече. Областта от науката, която се опитва да разбере поведението на големи маси вещество на езика на законите на атомното поведение, се нарича *физика на твърдото тяло.*

А как стои въпросът с грешката в нашите пресмятания? Защо те не са верни докрай? Ние не отчитахме отблъскването между йоните на малки разстояния. Това нали не са съвършено твърди сфери, така че, приближавайки се, те малко се сплескват. Но те не са съвсем меки и се сплескват съвсем малко. Все пак за тази деформация отива енергия и когато йоните се разлитат, тази енергия се освобождава. Енергията, която е необходима всъщност, за да се разделят всички йони, е малко по-малка от изчислената

от нас; отблъскването помага да се преодолее електростатичното привличане.

А има ли възможност да се пресметне частта на това отблъскване? Да, ако знаем закона за силите на отблъскване. Ние не умеем засега да анализираме детайлите на механизма на отблъскване, но някаква представа за неговите характеристики можем да получим от макроскопичните измервания. Като се измерва *свиваемостта* на кристала като цяло, може да се получи количествена представа за закона за отблъскването между йоните, а оттам — и приносът му в енергията. По такъв начин беше установено, че този принос трябва да бъде 1/9,4 част от приноса на електростатичното привличане и има естествено противоположен знак. Ако този принос извадим от чисто електростатичната енергия, ще получим за енергията на дисоциация на молекулата числото 7,99 eV. То е много близко до наблюдавания резултат 7,92 eV, но все още не е в съвършено съгласие с него. Има още едно нещо, което не сме отчели: не направихме никакви предположения за кинетичната енергия на трептене на кристала. Ако се направи поправка за този ефект, веднага се получава много добро съвпадение с експерименталната величина. Значи нашите представи са правилни; главният принос в енергията на такъв кристал като NaCl е електростатичен.

8-4. Електростатична енергия на ядрото

Да се обърнем сега към друг пример на електростатична енергия в атомната физика — към електростатичната енергия на атомното ядро. Преди да се занимаем с този въпрос, трябва да разгледаме някои свойства на основните сили (наречени ядрени), които свързват протоните и неутроните в ядрото. В началото, след откриването на ядрата — и на протоните, и на неутроните, които ги съставят — учените се надяваха, че законът за силната, неелектрична част от силата, която действува например между един протон и останалите, ще има някакъв прост вид, подобен например на закона за обратните квадрати в електричеството. Ако би ни се отдало да определим този закон и освен това закона за силите, които действуват между протон и неутрон и между неутрон и неутрон, тогава би било възможно теоретично да се опише напълно поведението на тези частици в ядрата. Поради това започна да се развива широка програма за изучаване на разсейването на протони с надежда да се намери законът на силите, които действуват между тях; но след тридесетгодишни усилия нищо просто не се получи. Натрупа се забележителен багаж от познания за силите, които действуват между протон и протон, но при това се установи, че тези сили са толкова сложни, колкото е възможно да си представим.

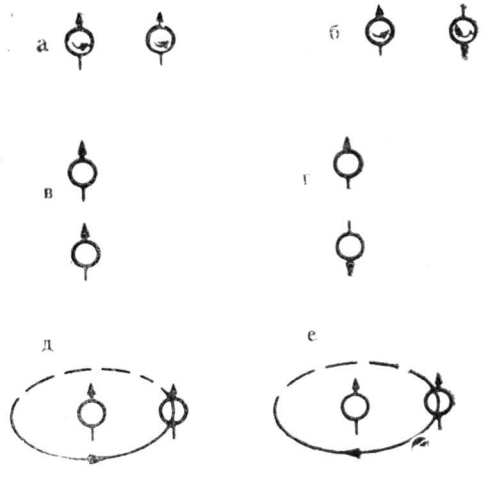
Под думите „толкова сложни, колкото е възможно" ние разбираме, че силите зависят от всички величини, от които биха могли да зависят.

Първо, силата не е проста функция на разстоянието между протоните. На големи разстояния съществува привличане, на малки — отблъскване. Зависимостта от разстоянието е някаква сложна функция, все още не много добре известна.

Второ, силата зависи от ориентацията на спина на протона. Протоните имат спин, а два протона, които си взаимодействуват, могат да се въртят или в една и съща посока, или в противоположни посоки. Силата, когато спиновете са паралелни, се различава от силата, когато спиновете са антипаралелни (фиг. 8-6, *а* и *б*). Разликата е огромна; не може да се пренебрегне.

Трето, силата силно се изменя в зависимост от това *успоредни* ли са, или не техните спинове в промеждутъка между протоните (фиг. 8-6, *в* и *г*), или пък са *перпендикулярни* (фиг. 8-6, *а* и *б*).

Четвърто, силата, както и в магнетизма, зависи (и даже значително по-силно) от скоростта на протоните. И тази зависимост

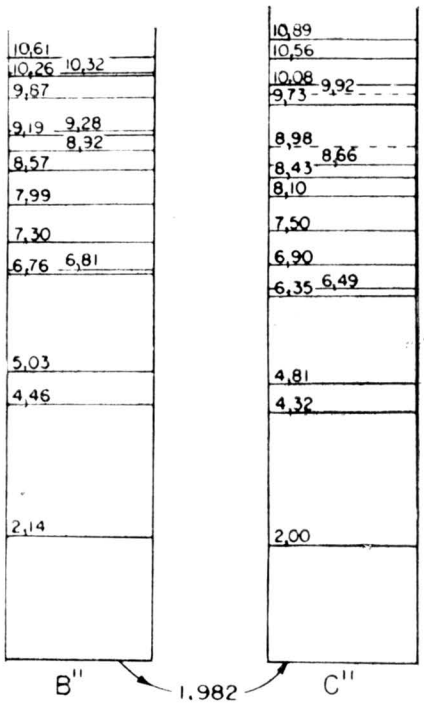


Фиг. 8-6. Силата на взаимодействие на два протона зависи от всички мислими параметри

на силата от скоростта съвсем не е релативистки ефект; тя е голяма даже тогава, когато скоростите са много по-малки от скоростта на светлината. Нещо повече, тази част на силата зависи освен от големината на скоростта и от други неща. Например когато протонът се движи недалеч от друг протон, силата се изменя от това, съвпада ли орбиталното движение по посока със спиновото въртене (фиг. 8-6, *д*), или тези две посоки са противоположни (фиг. 8-6, *е*). Това е, което се нарича „спин-орбитална" част на силата.

Не по-малко сложен характер имат силите на взаимодействие на протона с неутрона и на неутрон с неутрон. До ден днешен не знаем механизма, който определя тези сили, не знаем никакъв прост начин за разбирането им.

Впрочем в едно важно отношение ядрените сили все пак са по-прости, отколкото биха могли да бъдат. Ядрените сили, които действуват между два неутрона, съвпадат със силите, които действуват между протон и неутрон, и със силите, които действуват между два протона. Ако в някаква система, в която има ядра, ние заменим неутрона с протон (и обратно), то ядрените взаимодействия не се изменят. „Фундаменталната причина" за това равенство не ни е известна, но това е проявление на важен принцип, който може да бъде разширен и за законите на взаимодействие на другите силно взаимодействуващи си частици, такива като — мезони и „странни" частици.



Фиг. 8-7. Енергетичните нива на ядрата B^{11} и C^{11} (енергиите в MeV).

Основното състояние на C^{11} е с 1,982 MeV по-високо от същото състояние на B^{11}

Този факт прекрасно се илюстрира от разположението на енергетичните нива в подобни ядра. Да разгледаме такова ядро, като B^{11} (бор-единадесет), което се състои от пет протона и шест неутрона. Тези единадесет частици в ядрото си взаимодействуват, извършвайки някакъв заплетен танц. Но съществува такова съчетание от всички възможни взаимодействия, което притежава възможната най-ниска енергия; това е нормалното състояние на ядрото и го наричат основно. Ако ядрото бъде възбудено (да речем чрез удар с високоенергетичен протон или някаква друга частица), то може да премине в произволен брой други конфигурации, наричани възбудени състояния, всяко от които ще притежава своя характерна енергия, която е по-голяма от енергията на основното състояние. В изследванията по ядрена физика например, извършвани с генератора на Ван-де-Грааф, енергиите и другите свойства на тези възбудени състояния се определят експериментално. Енергиите на петнадесетте най-ниски от известните възбудени състояния на B^{11} са показани на едномерната схема в лявата половина на фиг. 8-7. Долната хоризонтална линия представлява основното състояние. Първото възбудено състояние има енергия с 2,14 MeV повече от основното, следващото — с 4,46 MeV повече от основното и т. н. Изследователите се опитват да намерят обяснение на тази достатъчно объркана картина на нивата на енергия; засега обаче няма все още пълна обща теория на такива ядрени нива на енергията.

Ако в B^{11} се замени един от неутроните с протон, получава се ядрото на изотопа на въглерода C^{11}. Енергиите на шестнадесет от най-ниските възбудени състояния на ядрото на C^{11} също бяха измерени; те са показани на фиг. 8-7 отдясно. (С пунктирани линии са прокарани нивата, за които експерименталната информация е под въпрос).

Като гледаме фиг. 8-7, забелязваме поразително подобие между картините на нивата на енергии на двете ядра. Първите възбудени състояния се намират приблизително с 2 MeV по-високо от основното състояние. След това има широка пролука с ширина 2,3 MeV, която отделя второто възбудено състояние от първото, след това малък скок от 0,5 MeV до третото ниво. След това отново голям скок от четвъртото до петото ниво, но между петото и шестото малък скок от 0,1 MeV. И така нататък. Приблизително на десетото ниво съответствието, както изглежда, пропада, но все още не може да бъде установено, ако се отбележат нивата с други характеристики, да речем с моментите им

на количество на движение и с това по какъв начин те губят излишъка си от енергия.

Подобието на картините на нивата на енергии на ядрата B^{11} и C^{11}, което прави силно впечатление, съвсем не е просто съвпадение. То крие в себе си някакъв физичен закон. И наистина то показва, че даже в сложните условия на ядрото смяната на неутрон с протон малко променя нещата. Това може да значи само, че неутрон-неутронните и протон-протонните сили трябва да бъдат почти еднакви. Само тогава бихме могли да очакваме, че ядрените конфигурации от пет протона и шест неутрона ще съвпаднат с комбинацията „пет неутрона — шест протона".

Забележете, че свойствата на тези ядра не ни дават нищо за неутрон-протонните сили; броят на неутрон-протонните комбинанации в двете ядра е еднакво. Но ако сравним две други ядра като C^{14} с неговите шест протона и осем неутрона и N^{14}, в който и едните, и другите са по седем, ще установим в енергетичните нива същото съответствие. Може да се направи изводът, че p—p-, n—n- и p—n-сили съвпадат помежду си във всички детайли. В законите за ядрените сили възниква неочакван принцип. Макар че силите, които действуват между всяка двойка ядрени частици, са много объркани, но силите на взаимодействие за всяка от мислимите двойки са едни и същи.

Обаче има и някои слаби различия. Няма точно съответствие на нивата; освен това основното състояние на C^{11} притежава абсолютна енергия (маса), която е с 1,982 MeV повече от енергията на основното състояние на B^{11}. Всички останали нива също по абсолютната стойност на енергията са по-големи със същото число. Така че силите не са съвсем точно равни. Но ние и без това добре знаем, че *пълната* големина на силите не е съвсем еднаква; между два протона действуват *електрични* сили, нали всеки от тях е зареден положително, а между неутроните такива сили няма. Може би различието между B^{11} и C^{11} се обяснява с факта, че в тези два случая електричните взаимодействия на протоните са различни? А може и минималната разлика, която остава в нивата, да се дължи на електрични ефекти? Щом ядрените сили са толкова силни в сравнение с електричните, електричните ефекти биха могли само леко да изменят енергиите на нивата.

За да проверим тази представа или по-добре е да се каже, за да изясним до какви следствия ще доведе, ние отначало ще разгледаме разликата в енергиите на основните състояния на двете ядра. За да бъде моделът съвсем прост, ще предположим, че ядрата са кълба с радиус r (който трябва да определим), съдържащи Z протона. Ако се счита ядрото кълбо с равномерно разпределен заряд, може да се очаква, че електростатичната енергия (от уравнение (8.7)) ще се окаже равна на

$$U = \frac{3}{5}\,\frac{(Zq_e)^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{8.22}$$

където q_e е елементарният заряд на протона. От това, че Z е равно за B^{11} на пет, а за C^{11} на шест, електростатичните енергии ще се различават.

Но при такова малко количество протони уравнението (8.22) не е съвсем правилно. Ако пресметнем електричната енергия на взаимодействие на всички двойки протони, разглеждани като точки, приблизително равномерно разпределени по кълбото, ще видим, че трябва да заменим величината Z^2 в (8.22) с $Z(Z-1)$, така че енергията ще бъде

$$U = \frac{3}{5}\cdot\frac{Z(Z-1)q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{3}{5}\,\frac{Z(Z-1)e^2}{r}. \tag{8.23}$$

Ако е известен радиусът r, можем да се възползуваме от израза (8.23), за да определим разликата в електростатичните енергии на ядрата B^{11} и C^{11}. Но ще направим обратното: от наблюдаваната разлика в енергиите ще изчислим радиуса, като считаме, че

цялата разлика, която съществува, е електростатична по произхода си.

Изобщо това не е съвсем вярно. Разликата в енергиите 1,982 MeV на двете основни състояния на B^{11} и C^{11} включва енергиите на покой, т. е. енергиите mc^2 на всички частици. Когато преминаваме от B^{11} към C^{11}, ние заместваме неутрона с протон, чиято маса е малко по-малка. Така че част от разликата в енергиите е разлика между масите на покой на неутрона и протона, равна на 0,784 MeV. Тази разлика, която трябва да сравняваме с електростатичната енергия, поради това е по-голяма от 1,982 MeV; тя е равна на

$$1{,}982 + 0{,}784 = 2{,}766 \text{ MeV}.$$

Като заместим тази енергия в (8.23) за радиуса на B^{11} или на C^{11}, ще получим

$$r = 3{,}12 \cdot 10^{-13} \text{ cm}. \tag{8.24}$$

Има ли това число някакъв смисъл? За да проверим това ще го сравним с резултата от други начини за определяне на радиусите на тези ядра. Например може да се определи радиусът на ядрото и като наблюдаваме как то разсейва бързи частици. В хода на тези измервания бе изяснено, че *плътността* на веществото във всички ядра е приблизително еднаква, т. е. обемите им са пропорционални на броя на частиците, които се съдържат в тях. Ако с A означим броя на протоните и неутроните в ядрото (число, почти пропорционално на масата му), оказва се, че, радиусът на ядрото се дава от израза

$$r = A^{1/3} r_0, \tag{8.25}$$

където

$$r_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-13} \text{ cm}. \tag{8.26}$$

От тези измервания ще получим, че радиусът на ядрото на B^1 (или C^{11}) трябва да бъде приблизително равен на

$$r = (1{,}2 \cdot 10^{-13})\ (11)^{1/3} = 2{,}7 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Като го сравним с израза (8.24), ще видим, че нашите предположения за електростатичния произход на разликата в енергиите на B^{11} и C^{11} не са толкова неверни: разликата едва ли достига 15% (а това не е толкова лошо за първо пресмятане по теорията на ядрото).

Причината за разликата по всяка вероятност се състои в следното. Съгласно със сегашните ни представи за ядрата четното количество ядрени частици (в случая на B^{11} пет неутрона и пет протона) образува особен вид *обвивка*; когато към тази обвивка се прибави още една частица, вместо да се погълне, тя започва да се върти около обвивката. Ако това е така, за добавъчния протон трябва да се вземе друга стойност на електростатичната енергия. Трябва да се счита, че излишъкът енергия на C^{11} спрямо B^{11} е точно равна на

$$\frac{Z-1}{4\pi\varepsilon_0 a}\, q_e^2,$$

т. е. равен на енергията, необходима за появяването на още един протон извън обвивката. Това число представлява 5/6 от величината, предсказвана от уравнението (8.23), така че новата стойност на радиуса ще бъде равна на 5/6 от (8.24). То много по-добре се съгласува с преките измервания.

Съгласието в цифрите довежда до два извода. *Първият*: законите на електричеството по всяка вероятност действуват и на такива малки разстояния от порядъка на 10^{-13} cm. *Вторият*: убедихме се в забележително съвпадение — неелектричната част на силите на взаимодействие на протон с протон, неутрон с неутрон и протон с неутрон е еднаква.

8-5. Енергията на електростатичното поле

Да разгледаме сега други методи за пресмятане на електростатичната енергия. Всички те могат да бъдат получени от основното съотношение (8.3) чрез сумиране (по всички двойки) на взаимните енергии на всяка двойка заряди. Преди всичко ние искаме да напишем израз за енергията на разпределение от заряди. Както обикновено ще считаме, че всеки елемент обем dV съдържа елемент заряд ρdV. Тогава уравнението (8.3) ще се запише така:

$$U=\frac{1}{2}\int_{\text{цялото пространство}}\frac{\rho(1)\,\rho(2)}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}\,dV_1\,dV_2. \tag{8.27}$$

Обърнете внимание на появата на множителя 1/2. Той възниква, поради това че в двойния интеграл по dV_1 и по dV_2 всяка двойка елементи на заряда се вземаше два пъти. (Не съществува удобен запис на интеграл, в който всяка двойка да влиза само по веднаж.) След това забележете, че интегралът по dV_2 в (8.27), е просто потенциалът в точката (1), т. е.

$$\int dV_2\,\frac{\rho(2)}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}=\varphi(1),$$

така че (8.27) може да се запише във вида

$$U=\frac{1}{2}\int\rho(1)\,\varphi(1)\,dV_1.$$

Тъй като точката (2) при това отпада, може да се напише просто

$$U=\frac{1}{2}\int\rho\varphi\,dV. \tag{8.28}$$

Това уравнение може да се изтълкува така. Потенциалната енергия на заряда $\rho\,dV$ е равна на произведението от този заряд и потенциала в същата точка. Поради това цялата енергия е равна на интеграла от $\rho\varphi dV$. Но освен това има множител 1/2. Той е все още необходим, защото енергията, пресметната по този начин, е два пъти по-голяма от действителната. Взаимната енергия на два заряда е равна на заряда на единия от тях по потенциала на другия в тази точка. Или на заряда на другия по потенциала от първия във втората точка. Така че за два точкови заряда може да се напише

$$U=q_1\,\varphi(1)=q_1\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

или

$$U=q_2\,\varphi(2)=q_2\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}.$$

Обърнете внимание, че същото може да се напише и така:

$$U=\frac{1}{2}\,[q_1\,\varphi(1)+q_2\,\varphi(2)]. \tag{8.29}$$

Интегралът в (8.28) отговаря на събиране на двете събираеми в скобите на израза (8.29). Ето защо бе нужен множителят 1/2.

Интересен е и такъв въпрос: къде се разполага електростатичната енергия? Наистина може вместо отговор да се запита: а не е ли все едно? Има ли смисъл от такъв въпрос? Ако съществува двойка взаимодействуващи си заряди, тяхното съчетание притежава някаква енергия. Нима е необходимо да се уточнява, че енергията е съсредоточена на този или онзи заряд, или и на двата едновременно, или между тях? Всички тези въпроси са лишени от смисъл, защото ние знаем, че всъщност се запазва само пълната, сумарна енергия. Представата, че енергията е съсредоточена *някъде*, не е твърде много необходима.

Все пак да предположим, че в това, енергията да е съсредоточена винаги в някакво определено място (подобно на топлинната енергия) наистина *има смисъл*. Тогава ние бихме могли да *разширим* нашия принцип за запазване на енергията, като го съединим с идеята, че ако в някакъв обем енергията се изменя, това изменение може да се отчете, като се наблюдава притокът или изтичането на енергия от обема. Нали разбирате, че нашето първоначално твърдение за запазване на енергията, както и по-рано, ще се изпълнява превъзходно, ако някаква енергия се губи в едно място и възниква някъде далеч в друго, а в пространството между тези две места нищо не се случва (нищо — значи не се случват някакви явления от особен вид). Поради това ние сега може да преминем към разширение на нашите идеи за запазването на енергията. Ще наречем това разширение принцип на *локално* (местно) запазване на енергията. Такъв принцип би гласил, че енергията вътре в произволен зададен обем се изменя само с количеството енергия, равно на притока (или загубата) на енергия в обема (или от него). И действително такова локално запазване на енергията е напълно възможно. Ако това е така, на наше разположение ще бъде далеч по-уточнен закон, отколкото простото твърдение за запазване на пълната енергия. И както се оказва, в природата *енергията действително се запазва локално, във всяко място различно*, и може да се напишат формули, които показват къде енергията е съсредоточена и как тя протича от едно място в друго.

Има и *физичен* резон в изискването да сме в състояние да укажем къде именно е съсредоточена енергията. По гравитационната теория всяка маса е източник на гравитационно привличане. А по закона $E=mc^2$ ние също знаем, че масата и енергията са напълно равностойни една на друга. Като че ли всяка енергия е източник на гравитационна сила. И ако ние не бихме могли да узнаем къде се намира енергията, не бихме могли да знаем къде е разположена масата. Ние не бихме могли да кажем къде са разположени източниците на гравитационното поле. И гравитационната теория би станала непълна.

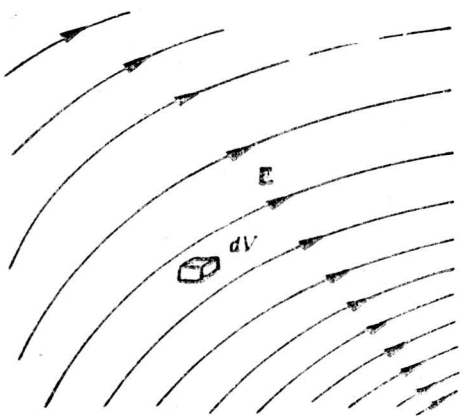
Разбира се, ако се ограничим с електростатиката, не притежаваме метод, с който да узнаем къде е съсредоточена енергията. Но пълната система максвелови уравнения на електродинамиката ще ни снабди с несравнимо по-пълна информация (макар че и тогава, строго казано, отговорът няма да бъде докрай определен). По-подробно този въпрос ще разгледаме по-късно. А сега само ще приведем резултата, който се отнася до частния случай на електростатиката. Енергията е съсредоточена в пространството, в което има електрично поле. Това очевидно е напълно разумно, защото е известно, че като се ускоряват, зарядите излъчват електрични полета. И когато светлината или радиовълните се разпространяват от точка в точка, те пренасят със себе си своята енергия. Но в тези вълни няма заряди. Така че на енергията ѝ се иска да бъде там, където е електромагнитното поле, а не там, където са зарядите, които създават това поле. И наистина ние можем да покажем, че уравнението (8.28) *числено* съвпада с

$$U=\frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\,dV. \tag{8.30}$$

Тази формула може да се тълкува в смисъл, че в мястото от пространството, където присъствува електрично поле, е съсредоточена и енергията; *плътността* ѝ (количеството енергия в единица обем)

$$u=\frac{\varepsilon_0}{2}\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}=\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \tag{8.31}$$

Та[3]и идея се илюстрира от фиг. 8-8.



Фиг. 8-8. Всеки елемент на обема $dV=dxdydz$ в електрично поле съдържа енергия $(\varepsilon_0/2)\,E^2dV$

За да покажем, че уравнението (8.30) се съгласува с нашите закони на електростатиката, ще започнем с това, че ще въведем

в уравнението (8.28) отношението между ρ и φ, получено в гл. 6:

$$\rho = -\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi.$$

Ще получим

$$U = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int \varphi \nabla^2 \varphi \, dV. \tag{8.32}$$

Като напишем по компоненти подинтегралния израз, ще видим, че

$$\varphi \nabla^2 \varphi = \varphi \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) -$$

$$- \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) - (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi). \tag{8.33}$$

Нашият интеграл на енергията тогава е

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi) \, dV - \frac{\varepsilon_0}{2} \int \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) \, dV.$$

С помощта на теоремата на Гаус вторият интеграл може да се преобразува в интеграл по повърхнина:

$$\int_{\text{Обем}} \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) \, dV = \int_{\text{Повърхнина}} (\varphi \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} \, da. \tag{8.34}$$

Този интеграл ще се пресметне за случая, когато повърхнината се простира до безкрайност (така че интегралът по обема се превръща в интеграл по цялото пространство), а всички заряди са разположени на крайно разстояние един от друг. Най-просто това може да се направи, като се вземе повърхност на сфера с огромеи радиус и център в координатното начало. Ние знаем, че далеч от зарядите φ се изменя както $1/R$, а $\nabla \varphi$ като $1/R^2$. (Или даже по-бързо, ако сумарният заряд е нула.) Лицето пък на повърхността на сферата расте само като R^2, така че интегралът по повърхността намалява с нарастването на радиуса на сферата като $(1/R)\ (1/R^2)\ R^2 = (1/R)$. И така, ако нашето интегриране обхваща цялото пространство ($R \to \infty$), повърхнинният интеграл клони към нула, когато радиусът на сферата клони към безкрайност и установяваме, че

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\substack{\text{Цялото} \\ \text{пространство}}} (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi) \, dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\substack{\text{Цялото} \\ \text{пространство}}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \, dV. \tag{8.35}$$

Виждаме, че съществува възможност да се представи енергията на произволно разпределени заряди във вид на интеграл от плътността на енергията, съсредоточена в полето.

8-6. Енергия на точков заряд

Новото съотношение (8.35) ни говори, че даже отделният точков заряд q има някаква електростатична енергия. Полето в този случай се дава от израза

$$E = \frac{q}{4 \pi \varepsilon_0 r^2},$$

така че плътността на енергията на разстояние r от заряда е

$$\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{q^2}{32 \pi^2 \varepsilon_0 r^4}.$$

За елемент от обема може да се приеме сферичен слой с дебелина dr и лице $4 \pi r^2$. Пълната енергия ще бъде

$$U = \int_{r=0}^{\infty} \frac{q^2}{8 \pi \varepsilon_0 r^2} \, dr = -\frac{q^2}{8 \pi \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \Bigg|_{r=0}^{r=\infty} \tag{8.36}$$

Горната граница не води до затруднения. Но щом зарядът е точков, ние имаме намерение да интегрираме до самата нула ($r=0$), а това означава безкрайност в интеграла. Уравнението (8.35) утвърждава, че в полето на един точков заряд се съдържа безкрайно много енергия, макар че ние започнахме с представата, че енергия има само *между* точкови заряди. В нашата първоначална форма за енергията на съвкупност от точкови заряди (8.3) ние не включихме никаква енергия на взаимодействие на заряда сам със себе си. Какво след това се случи? Ами това, че като преминавахме в уравнението (8.27) към непрекъснато разпределение на заряди, ние пресмятахме в общата сума взаимодействието на всеки *безкрайно малък* заряд с всички останали безкрайно малки заряди. Същото отчитане бе проведено и в уравнение (8.35), така че когато го прилагаме към *краен* точков заряд, ние включваме в интеграла енергията, която би била необходима, за да се събере този заряд от безкрайно малките части. И наистина вие бихте могли да забележите, че резултатът, който следва от уравнение (8.36), бихме могли да получим също от израза (8.11) за енергията на заредено кълбо, като направим неговият радиус да клони към нула.

Принудени сме да достигнем до заключението, че представата за енергията като съсредоточена в полето не се съгласува с предположението за съществуване на точкови заряди. Един път за преодоляване на тази трудност е да говорим, че елементарните заряди (такива като електрона) всъщност изобщо не са точки, а малки разпределения на заряди. Но може да се говори и обратното: неправилността се корени в нашата теория за електричеството на много малки разстояния или в нашата представа за запазване на енергията във всяко място поотделно. Но всяка подобна гледна точка в крайна сметка среща затруднения. И те никога не са били преодолени; те съществуват и до днес. Малко по-късно, когато се запознаем с някои допълнителни представи, такива като импулс на електромагнитното поле, ние по-подробно ще поговорим за тези основни трудности в нашето разбиране на природата.

9

Електричеството в атмосферата

9-1. Градиент на електричния потенциал в атмосферата

В обикновен ден над пустинна равнина или над морето електричният потенциал с изкачване във височина нараства на всеки метър приблизително със 100 V. Във въздуха има вертикално електрично поле **E** с големина 100 V/m. Знакът на полето отговаря на отрицателния заряд на земната повърхност. Това означава, че на улицата потенциалът на нивото на вашия нос е с 200 V по-висок, отколкото потенциала на нивото на вашите пети! Може, разбира се, да се запита: „Защо не се поставят два електрода във въздух на метър един от друг и не се използуват тези 100 V за електрично осветление?" Може и да се удиви човек: „Ако наистина между носа ми и петата ми има напрежение 200 V, защо не ме удря ток, щом изляза на улицата?"

Първо ще отговорим на втория въпрос. Вашето тяло е достатъчно добър проводник. Когато вие стоите на земята, вие заедно с нея образувате еквипотенциална повърхнина. Обикновено еквипотенциалните повърхнини са успоредни на земята (фиг. 9-1, *а*), но когато вие се окажете на земята, те се преместват и полето започва да изглежда приблизително така, както е показано на фиг. 9-1, *б*. Така че потенциалната разлика между вашето теме и петите е почти равно на нула. От земята към вашата глава преминават заряди и изменят полето около вас. Част от тях се компенсират от йоните на въздуха, но йонният ток е много малък, нали въздухът е лош проводник.

9-1. Градиент на електричния потенциал в атмосферата

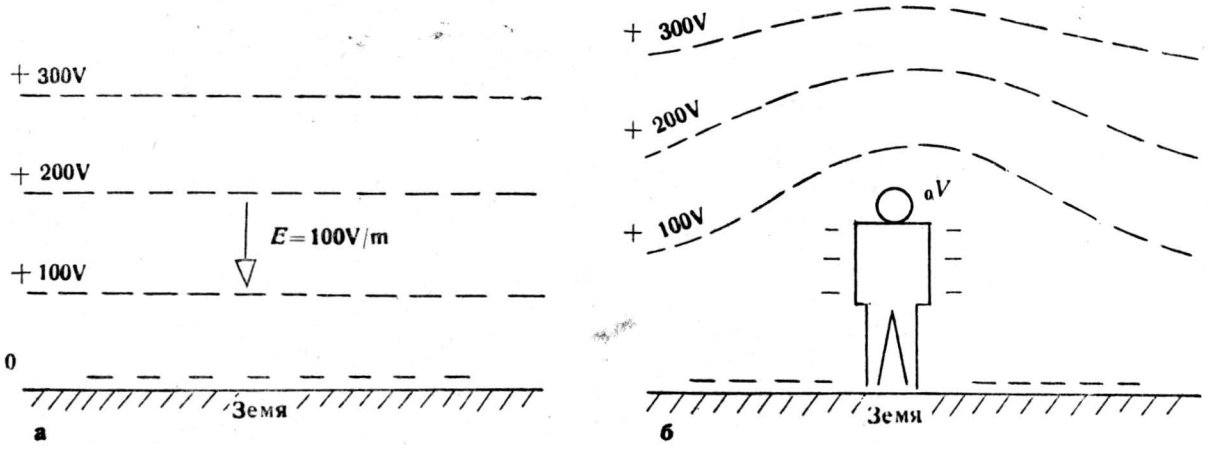
9-2. Електрични токове в атмосферата

9-3. Произход на токовете в атмосферата

9-4. Гръмотевични бури

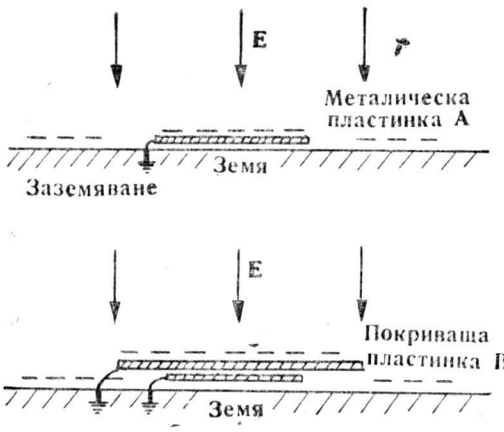
9-5. Механизъм на разпределение на зарядите

9-6. Мълния



Фиг. 9-1. Разпределение на потенциала:
а — над земята; *б* — около човек, който стои на равно място

Как да се измери такова поле, което се променя от всичко, което попадне в него? Има няколко начина. Един от тях е да се разположи изолиран проводник на някаква височина над земята и да не се пипа, докато не получи потенциала на въздуха. Ако се почака достатъчно дълго, даже при много малката проводимост на въздуха зарядите ще изтекат от проводника (или ще натечат в него), като изравняват потенциала му с потенциала на въздуха на това ниво. Тогава можем да го спуснем на земята и да измерим изменението на потенциала му. Друг по-бърз начин е в качеството



Фиг. 9-2. Заземената метална пластина притежава същия повърхнинен заряд, като земята (*а*); ако пластинката е покрита отгоре със заземен проводник, на нея няма заряди (*б*)

на проводник да се вземе кофичка вода, в която има малък отвор. Водата изтича и отнася излишъка от заряда и кофичката бързо достига потенциала на въздуха. (Зарядите, както вие знаете, се разполагат по повърхнината, а капките вода са изтичащи „парчета повърхнина".) Потенциалът на кофата може да се измери с електрометър.

Има още един начин за пряко измерване на *градиента* на потенциала. Щом съществува електрично поле, трябва да има и повърхнинен заряд на земята ($\sigma = \varepsilon_0 E$). Ако поставим до повърхността на земята плоска метална пластинка A и я заземим, на нея ще се появят отрицателни заряди (фиг. 9-2, *а*). Ако след това покрием пластинката с друга заземена проводяща пластинка B, зарядите ще се появят вече на пластинката B, а на пластината A ще изчезнат. Ако ние измерим заряда, който протича от пластината A на земята (да речем с помощта на галванометър във веригата на заземяващия проводник) в момента, когато A се покрива от другата пластина, ние ще намерим плътността на повърхнинния заряд, който е бил на А, а значи и електричното поле.

След като разгледахме начините за измерване на електричното поле в атмосферата, сега ще продължим неговото описание. Измерванията преди всичко показват, че с увеличаване на височината полето продължава да съществува, само че става по-слабо. На височина приблизително 50 km полето е вече едва-едва забележимо, така че голямата част от изменението на потенциала (интеграла от E) се пада на малките височини. Цялата потенциална разлика между повърхността на земята и върха на атмосферата е равна почти на 400000 V.

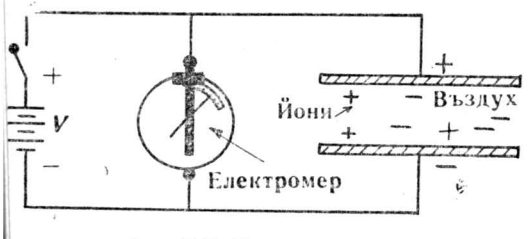
9-2. Електрични токове в атмосферата

Освен градиент на потенциала може да се измерва и друга величина — ток в атмосферата. Плътността му е малка: през всеки квадратен метър, успореден на земната повърхност, преминава около 10^{-6} μ А. Въздухът очевидно не е идеален изолатор; поради тази проводимост от небето към земята непрекъснато протича слаб ток, предизвикан от описаното от нас електрично поле.

Защо атмосферата има проводимост? Защото в нея между молекулите на въздуха попадат йони, например молекулите на кислорода, понякога снабдени с излишен електрон, понякога лишени от един от своите електрони. Тези йони не остават самотни; благодарение на електричното си поле те обикновено събират около себе си други молекули. Всеки йон тогава става малка топчица, която заедно с такива топчици дрейфува в полето, бавно се движи нагоре или надолу, като създава тока, за който говорихме.

Откъде се вземат *йоните*? Отначало мислехме, че йоните се създават от радиоактивността на земята. (Беше известно, че радиоактивното лъчене прави въздуха проводящ, като йонизира молекулите на въздуха.) Частиците, които излизат от атомното ядро, да речем β-лъчи, се движат така бързо, че откъсват електрони от атомите и оставят след себе си пътечка от йони. Такъв възглед, разбира се, предполага, че на големи височини йонизацията трябва да става по-малка, защото цялата радиоактивност—всичките следи на радий, уран, натрий и т. н. — се намира в земния прах.

За да проверят тази теория, физиците се издигаха на балони и измерваха йонизацията (Хес в 1912 г.). Изясни се, че всичко става точно обратно — йонизацията на единица обем *расте* с височината! (Уредът е бил подобен на показания на фиг. 9-3. Две пластини се зареждат до потенциал V. Вследствие на проводимостта на въздуха те бавно се разреждат; бързината на разряда се измерва с електрометър.) Този непонятен резултат бе най-потресаващото откритие в цялата история на атмосферното електричество. Откритието беше толкова важно, че предизвика отделянето на нова област на науката — физиката на космичните лъчи.



Фиг. 9-3. Измерване на проводимостта на въздуха, предизвикана от движението на йоните

А самото атмосферно електричество остана сред немного удивителните явления. Йонизацията вероятно се пораждаше от нещо извън Земята; търсенията на този неземен източник доведоха до откриването на космичните лъчи. Ние сега не ще говорим за тях и само ще кажем, че именно те поддържат снабдяването на въздуха с йони. Макар че йоните постоянно се отнасят, космичните частици, откъсвайки се от космичното пространство, създават нови йони.

За да бъдем точни, трябва да отбележим, че освен йони, съставени от молекули, има и други видове йони. Най-дребните топчици от почвата, подобно на извънредно тънките частички на праха, плават във въздуха и се зареждат. Тях понякога ги наричат „ядра". Да речем, когато в морето плискат вълни, дребни капчици излитат във въздуха. Когато такава капчица се изпари, във въздуха остава да плава малък кристал на NaCl. След това тези кристалчета могат да привлечат към себе си заряди и да станат йони; тях ги наричат „големи йони".

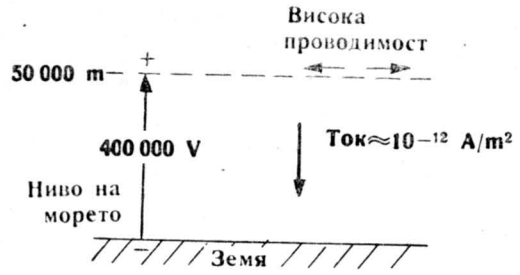
Малките йони, т. е. тези, които се създават от космичните лъчи, са най-подвижни. Поради това че те са много малки, бързо се пренасят из въздуха със скорост около 1 cm/s в поле 100 V/m или 1 V/cm. Големите и тежки йони се движат значително по-бавно. Оказва се, че ако „ядрата" са много големи, те прехващат заряди от малките йони. Тогава, тъй като „големите йони" се движат в полето много бавно, общата проводимост се намалява. Поради това проводимостта на въздуха е достатъчно променлива — тя е много чувствителна към неговото „замърсяване". Над сушата този „боклук" е много повече, отколкото над морето, вятърът повдига прах от земята, пък и човекът по всякакви начини замърсява въздуха. Няма нищо удивително в това, че от ден на ден, от момент до момент, от едно място към друго проводимостта на земната повърхнина значително се мени. Електричното поле във всяка точка на земната повърхност също се изменя, защото токът, който тече от горе на долу в различните места, е приблизително еднакъв, а измененията на проводимостта до земната повърхност довеждат до вариации на полето.

Проводимостта на въздуха, която възниква в резултат на дрейфа на йоните, също бързо се увеличава с височината. Това става по две причини. Първо, с височината расте йонизацията на въздуха от космичните лъчи. Второ, с намаляване на плътността на въздуха се увеличава свободният пробег на йоните, така че при удар те успяват да отидат по-далеч в електричното поле. В резултат на всичко това проводимостта на височина рязко се увеличава.

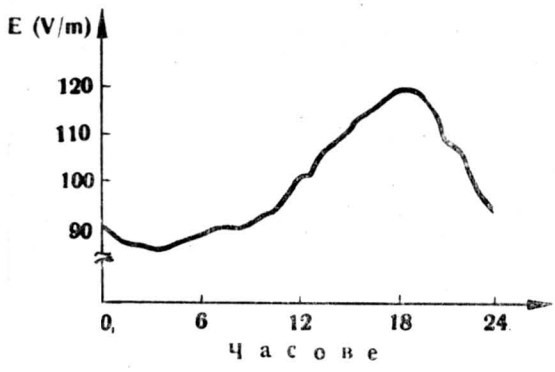
Самата плътност на електричния ток във въздуха е равна на няколко микроампера на квадратен метър, но нали на Земята има твърде много такива квадратни метри. Целият електричен ток, който достига земната повърхност, е равен приблизително на 1800 А. Този ток, разбира се, е „положителен", той пренася към Земята положителен заряд. Така се получава ток 1800 А при напрежение 400000 V. Мощността е 700 MW!

При такъв силен ток отрицателният заряд на Земята би трябвало скоро да изчезне. Фактически би бил необходим половин час, за да се разреди цялата Земя. Но от момента на откриването на електричното поле в атмосферата е изминало значително повече от половин час. Как все пак то се държи? От какво се поддържа напрежението? И между какво и какво е то? Единият електрод е Земята, а кой е другият? Могат да бъдат зададени много такива въпроси.

Земята е заредена отрицателно, а потенциалът във въздуха е положителен. На достатъчно голяма височина проводимостта е толкова голяма, че вероятността за изменение на напрежението по хоризонталата става равна на нула. Въздухът при този мащаб на време, за който сега става въпрос, фактически се превръща в проводник. Това става на височина около 50 km. Това още не е толкова високо както това, което наричат „йоносфера", където има много голямо количество йони, образувани за сметка на фото-



Фиг. 9-4. Типични характеристики на електричните свойства на чистата атмосфера



Фиг. 9-5. Средната денонощна вариация на градиента на потенциала на атмосферата в ясно време над океаните

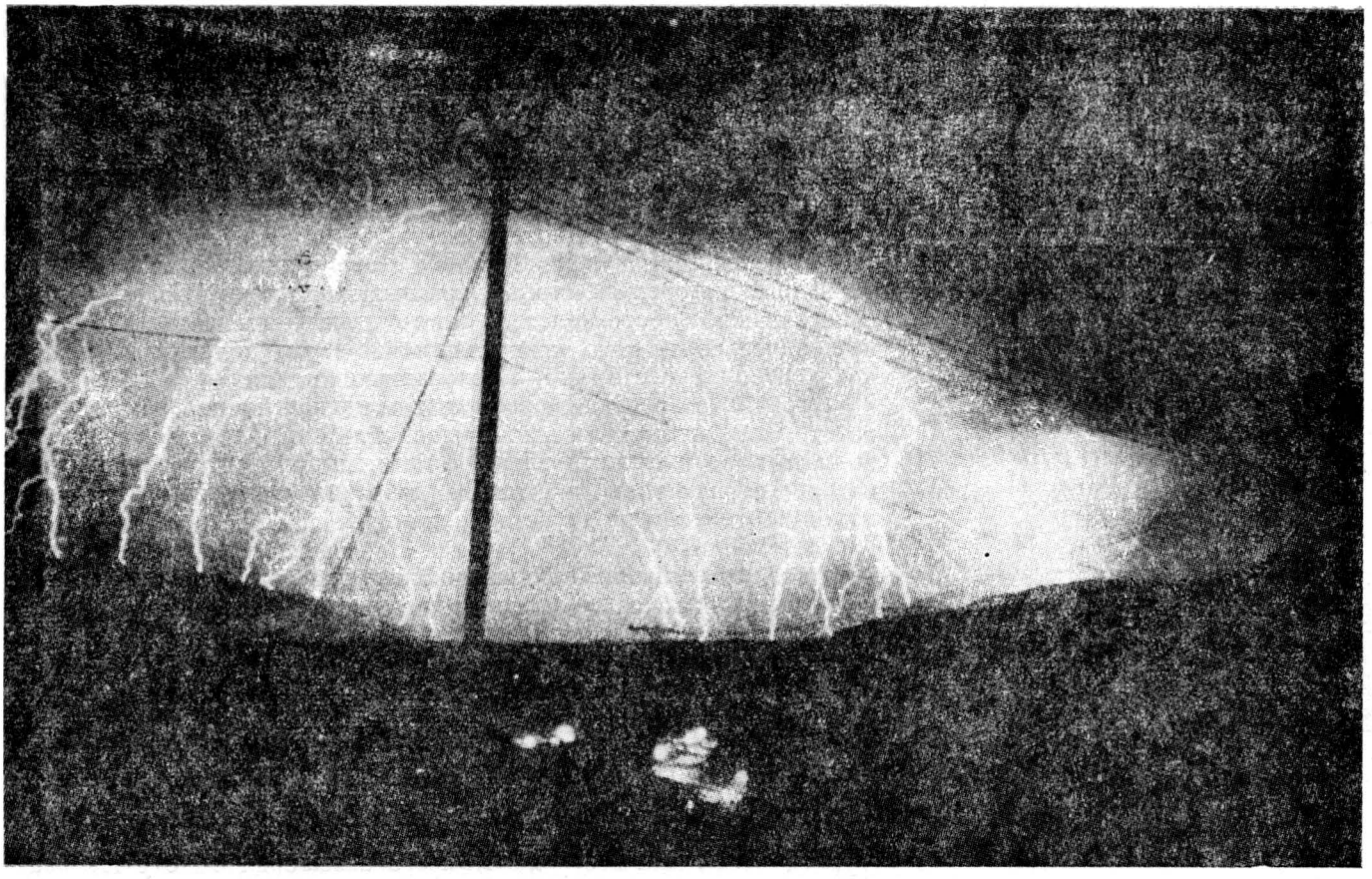
ефекта от слънчевите лъчи. За нашите цели обсъждането на свойствата на атмосферното електричество може да се счита, че на височина приблизително 50 km въздухът става достатъчно проводящ и там съществува практически проводяща сфера, от която изтичат токове надолу. Положението на нещата е показано на фиг. 9-4. Въпросът е как се удържа там положителен заряд. Как той се връща обратно? Щом той изтича на Земята, той трябва по някакъв начин да се връща обратно? Дълго време това беше една от главните загадки на атмосферното електричество.

Всяка информация в това отношение може да даде ключ към загадката или най-малко да съобщи нещичко за нея. Ето едно интересно явление: ако измерваме тока (а той, както знаем, е по-устойчив от градиента на потенциала) например над морето и при щателно спазване на предпазни мерки много акуратно усредним всичко и се избавим от всякакви грешки, установяваме, че все пак остават някакви денонощни вариации. Средното от много измерения над океаните притежава временна вариация, приблизително такава, каквато е показана на фиг. 9-5. Токът се изменя приблизително с $\pm 15\%$ и достига най-голяма стойност в 7 часа вечерта по лондонско време. Най-странно тук е, че *където и да измервате тока* — в Атлантическия ли океан, в Тихия или в Ледовития, — часовете му на пик са тогава, когато часовниците в *Лондон* показват 7 часа вечерта! Навсякъде по цялото земно кълбо токът достига максимум в 19.00 по лондонско време, а минимум — в 4.00 по същото време. С други думи, токът зависи от абсолютното земно време, а *не от местното време* в точката на наблюдението. В едно отношение това изобщо не е толкова странно; това напълно съвпада с нашите представи, че на самия връх има много голяма хоризонтална проводимост, която изключва местните изменения на потенциалната разлика между Земята и върха. Всички изменения на потенциала трябва да бъдат за цялото земно кълбо и това е точно така. И така, сега ние знаем, че напрежението „нагоре“ с изменението на абсолютното земно време ту се покачва, ту спада с 15%.

9-3. Произход на токовете в атмосферата

Сега трябва да се отговори на въпроса за източника на големите отрицателни токове, които трябва да текат от „върха“ към земната повърхност, за да поддържат отрицателния й заряд. Къде са тези батерии, които правят това? „Батерия“ е показана на фиг. 9-6. Това са гръмотевични бури или по-точно мълниите. Оказва се, че мълниите не „разреждат“ тази потенциална разлика, за която говорихме (и както би могло на пръв поглед да ни се струва). Мълниите *снабдяват* Земята с *отрицателни заряди*. Ако сме виждали мълния, може да се хванем на бас десет против едно, че тя е донесла на Земята голямо количество отрицателни заряди. Именно гръмотевичните бури зареждат Земята средно с ток 1800 A електричество, което след това се разпределя в районите с хубаво време.

На Земята всяко денонощие прогърмяват около 300 гръмотевични бури. Тях именно може да считаме за тези батерии, които връщат електричеството в горните слоеве на атмосферата и запазват потенциалната разлика. А сега отчетете географията — полудневни гръмотевични бури в Бразилия, тропически — в Африка и т. н. Учените са направили оценки колко мълнии падат ежесекундно на Земята; необходимо ли е да се говори, че техните оценки повече или по-малко се съгласуват с измерената на потенциалната разлика: общата степен на гръмотевични бури достига максимум по цялата Земя в 19.00 по лондонско време. Обаче оценката на гръмотевичните бури се прави много трудно; те бяха направени, *след* като стана известно, че такива вариации трябва да съществуват. Трудността се състои в това, че в океаните, пък и навсякъде по света не достигат наблюдения, те са



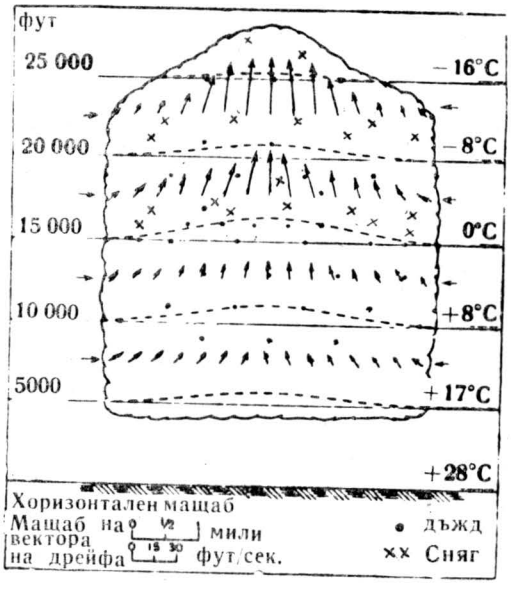
Фиг. 9-6. Механизмът, който създава електричното поле на атмосферата

малко, за да се установи точният брой на гръмотевичните бури. Но тези учени, които мислят, че са „отчели всичко правилно", уверяват, че максимумът на гръмотевичните бури е в 19.00 по гринвичко средно време.

За да разберем как работят тези батерии, ще се опитаме да вникнем по-дълбоко в същността на гръмотевичните бури. Какво става вътре в тях? Ще опишем гръмотевицата така, както сега я представят. Когато вникваме в същността на необикновено природно явление (а не в така изящно разгледани от нас идеални сфери от идеални проводници, поставени вътре в други сфери), ние откриваме, че не знаем чак толкова много. А всичко това е много интересно. Гръмотевичната буря не оставя човека равнодушен: тя го плаши или възхищава; изобщо възбужда в него някакви чувства. А там, където в природата се проявяват чувства, обикновено изведнаж изпъква и сложността на природата, и нейната тайнственост. Няма никаква възможност точно да опишем как се извършва гръмотевична буря, тъй като засега малко знаем за това. Но ние все пак ще се опитаме малко да разкажем за това, какво става.

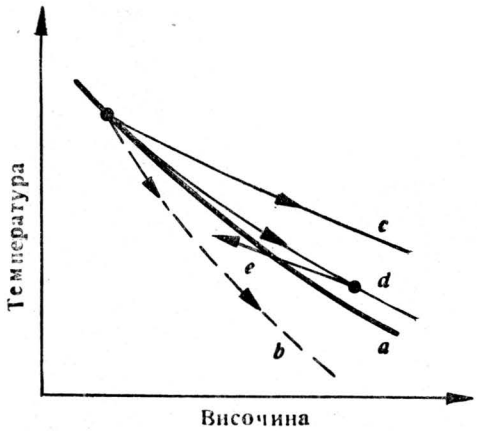
9-4. Гръмотевични бури

Преди всичко трябва да се каже, че обикновената гръмотевична буря се състои от голямо количество „ядра", които се допират тясно едно до друго, но са почти независими. Поради това е достатъчно да анализираме една от тях. Под „ядро" разбираме област (която има в хоризонтална посока ограничена дължина), в която протичат всички основни процеси. Обикновено има няколко ядра, разположени едно до друго, а във всяко от тях се извършва приблизително едно и също, но с някакво отместване по време. На фиг. 9-7 е представено в идеализиран вид ядро в началния стадий на гръмотевичната буря. Оказва се, че във въз-



Фиг. 9-7. Гръмотевично ядро в ранен стадий на развитие

духа в някакво място и при някакви условия (ние скоро ще ги опишем) съществува възходящ ток, който все повече се ускорява с изкачване във височина. Топлият и влажен въздух отдолу се издига, изстива и кондензира влагата. На фигурата кръстчетата означават сняг, а точките — дъжд, но тъй като възходящият ток е достатъчно голям, а капките твърде малки, на този стадий нито дъждът, нито снегът падат. Това е начален стадий и засега това все още не е гръмотевична буря в смисъл, че отдолу въобще не се вижда, че нещо изобщо става. Докато топлият въздух се издига нагоре, в ядрото нахлува въздух от всички страни (много важно обстоятелство, което дълго пренебрегваха). Така че повдига се не само въздухът, който е бил долу, но и някакво количество друг въздух — от различни страни.



Фиг. 9-8. Температура на атмосферата:

a — статична атмосфера; *b* — адиабатично охлаждане на сух въздух; *c* — адиабатично охлаждане на влажен въздух; *d* — влажен въздух с някакъв примес от обкръжаващия го въздух

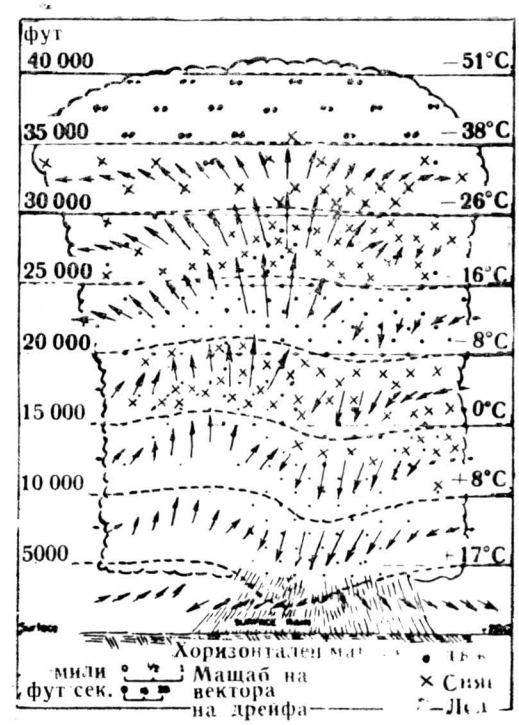
Поради каква причина въздухът се издига именно така? Както знаете, горе въздухът е по-студен. Слънцето нагрява почвата, а водната пара в горните слоеве на атмосферата излъчва топлината нагоре; поради това на големи височини въздухът е хладен, а отдолу е топъл. Вие можете да кажете: „Тогава всичко е много просто. Топлият въздух е по-лек от студения; поради това цялата тази комбинация е механично неустойчива и топлият въздух се издига." Разбира се, ако температурата на различни височини е различна, въздухът е *наистина термодинамично* неустойчив. Предоставен сам на себе си дълго време, целият въздух ще приеме еднаква температура. Но той не е предоставен сам на себе си, целия ден свети слънцето. Така че въпросът се отнася не само до термодинамично, но и до *механично* равновесие. Нека сме начертали както на фиг. 9-8 кривата на зависимостта на температурата на въздуха от височината. В обикновени условия се получава намаляване по крива от типа *а*; с изкачването температурата спада. Как все пак атмосферата може да бъде устойчива? Защо топлият въздух не се повдигне просто към хладния? Отговорът е, че ако въздухът би започнал да се издига, налягането в него би спаднало и като разглеждаме определена порция издигащ се въздух, бихме установили, че тя адиабатно се разширява. (Топлината не би излизала и влизала в нея, защото поради огромните размери не би стигнало време за предаване на големи количества топлина.) И така, порцията въздух при издигане ще се охлади. Такъв адиабатен процес би довел до зависимостта температура-височина, показана на фиг. 9-8 с кривата *в*. Всеки въздух, който се издига отдолу, би се оказал по-студен, отколкото температурата в мястото, накъдето той се насочва. Така че за топлия въздух няма резон да се издига отдолу нагоре; ако той би се издигнал, би се охладил и би станал по-студен от въздуха, който е там; той би се оказал по-тежък от този въздух и би му се приискало веднага да тръгне обратно надолу. В хубав, ясен ден, когато влажността не е голяма, се установява определена бързина на спадане на температурата с височината и тази бързина, изобщо казано, е по-ниска от „максималното устойчиво спадане", представено от кривата *в*. Въздухът се намира в устойчиво механично равновесие.

Но, от друга страна, ако вземем въздушно ядро, съдържащо много водни пари, кривата му на адиабатно охлаждане ще бъде съвсем друга. При разширяване и охлаждане на това ядро водната пара ще започне да се кондензира, а при кондензация се отделя топлина. Поради това влажният въздух изстива не толкова силно, колкото изстива сухият. Значи когато въздухът, чиято влажност е по-висока от средната, започне да се издига, температурата му ще следва кривата *с* на фиг. 9-8. Той малко се охлажда при издигането, и ще се окаже по-топъл от окръжаващия го на тази височина въздух. Ако има област от топъл и влажен въздух и по някакви причини започне да се издига, той през цялото време ще остава по-лек и по-топъл от окръжаващия го въздух и ще продължава да се издига, докато не достигне огромни височини. Ето механизмът, който заставя въздухът в ядрото на гръмотевичната буря да се издига.

В продължение на много години именно така обясняваха ядрото

на гръмотевична буря. След това измерванията показаха, че температурата на облака на различни нива над Земята не е толкова висока, както това следва от кривата *c*. Причината се състои в това, че когато „мехурът“ от влажен въздух изплува, той отнася със себе си въздух от окръжаващата го среда и се охлажда от него. Кривата „температура-височина“ прилича повече на кривата *d*, която е значително по-близко до първоначалната крива *a*, отколкото до *c*.

След като така описаната конвекция е започнала, напречният разрез на ядро на гръмотевична буря изглежда вече така, както е показан на фиг. 9-9. Това е така наречената „узряла“ гръмотевична буря. В нея действува много силна тяга нагоре, която достига на този стадий височина около 10—15 km, а по някога и по-високо. Куполът на гръмотевичната буря с извършващата се в него кондензация се натрупва над върволицата облаци с бързина, която достига обикновено 60 km/h. С издигането и кондензирането на водната пара възникват дребни капчици, които бързо се охлаждат до температура под нулата. Те трябва да замръзнат, но не правят това изведнаж — те „се прохлаждат“. Водата пък и другите течности обикновено лесно се охлаждат под точката си на замръзване, без да кристализират, стига около тях да няма „ядра“, които са необходими, за да започне кристализацията. Само ако има дребни частици от вещества, подобни на кристалчета NaCl, капчиците вода се превръщат в ледени кристалчета. Тогава равновесието ще доведе до изпарение на капките и до растеж на кристалите на леда. И така, в някакъв момент започва внезапно изчезване на водата и бързо образуване на лед. Освен това може да се извършват удари на водните капки с ледените кристалчета — удари, в които преохладената вода, докоснала се до кристалче лед, мигновено сама започва да кристализира. Изглежда, че в някакъв момент от развитието на облака в него се извършва бързо натрупване на големи частици от лед.



Фиг. 9-9. Узряване на гръмотевично ядро

И когато те станат достатъчно тежки, започват да падат през издигащия се въздух, защото са станали твърде тежки, за да може тягата да ги носи. Падайки, те увличат със себе си малко въздух. Започва противоположен поток на въздуха надолу. И лесно е да се разбере, че, колкото и да е странно това, щом противопотокът започне, той не може да бъде спрян. Въздухът сега с пълна сила се понася надолу!

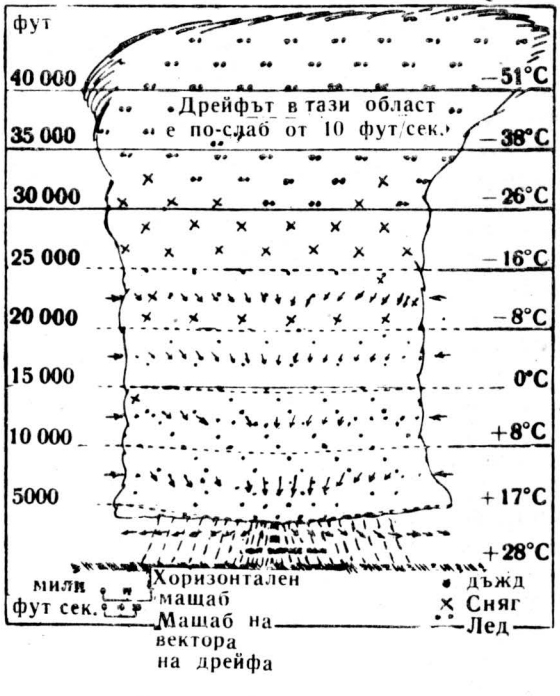
Вижте: кривата *d* на фиг. 9-8 (истинското разпределение на температурата във височината на облака) не е толкова стръмна както кривата *c* (която се отнася за влажния въздух). Значи, когато влажният въздух започне да пада, температурата му ще се повишава по крива, съответствуваща на кривината на линията *c*, т. е. при достатъчно силно падане ще се окаже *по-ниска* от температурата на окръжаващия въздух (както това се вижда от кривата *e*). И в момента, когато това се случи, той ще се окаже по-плътен от окръжаващия въздух, падането ще стане невъзвратимо.

Но вие ще кажете: „Не е ли вечно това движение? Отначало се говореше, че въздухът трябва да се издига, а когато го издигнахте, еднакво убедително се заемате да доказвате, че той трябва да пада.“ Не това не е вечно движение. Когато положението е неустойчиво и топлият въздух е принуден да се изкачва, тогава естествено нещо трябва да го замести. Не по-малко вярно е и това, че спускащият се хладен въздух би бил в състояние енергетически да замести топлия въздух. Но разберете, че това, което се е спуснало надолу, не е вече този въздух, който е бил в началото. Предишните разсъждения, в които ставаше дума за изолиран облак, отначало издигнал се, а след това спуснал се, съдържаха някаква загадка. Необходим бе дъжд, за да осигури спускането, а този начин бе малко правдоподобен. Но както току-що разбрахте, към възходящия въздух е примесен въздух, който е бил в началото на тази височина, откъдето е започнала тягата. Термодинамичните разсъждения ще ви покажат, че падането на хладен въздух, който плава първоначално на големи ви-

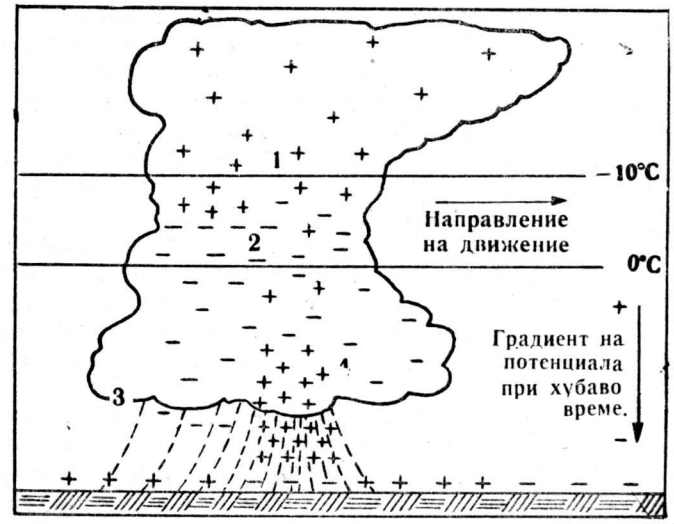
сочини, е също възможно. Това обяснява картината на активна гръмотевична буря, представена схематично на фиг. 9-9.

Когато въздухът достигне долу, от долната част на облака започва да вали дъжд. Освен това, когато не достигне земната повърхност, относително студеният въздух се разпръсква във всички посоки. Значи преди самата гръмотевична буря започва студен вятър, който ни предупреждава за предстоящата буря. Във време на самата буря се наблюдават резки и внезапни пориви на вятъра, облаците се натрупват и т. н. Но основното е, че отначало съществува ток, който тече нагоре, след това противоположен ток надолу — картината, изобщо казано, е много сложна.

В същия миг, когато започнат валежите, възниква и противоположният ток. В същия момент се забелязват електрични явления. Но преди да опишем мълнията, ще завършим с разказ, какво става в ядро на гръмотевична буря след половин или един час. То изглежда така, както е показано на фиг. 9-10. Тягата нагоре е прекратена — няма повече топъл въздух и няма какво да я поддържа. Известно време още продължават валежите, последните капки вода падат на земята, всичко става по-спокойно, макар част от ледените кристалчета да са останали във въздуха. На големи височини ветровете духат в различни посоки, поради което върхът на буреносния облак обикновено започва да приема вид на наковалня. Настъпва краят на ядрото.



Фиг. 9-10. По-късна фаза на гръмотевичното ядро



Фиг. 9-11. Разпределение на електричеството в узряващо гръмотевично ядро:

1 — център на положителните заряди; *2* — център на отрицателните заряди: *3* — област на отрицателен дъжд; *4*-малък център на положителен заряд в областта на силния дъжд

9-5. Механизъм на разпределение на зарядите

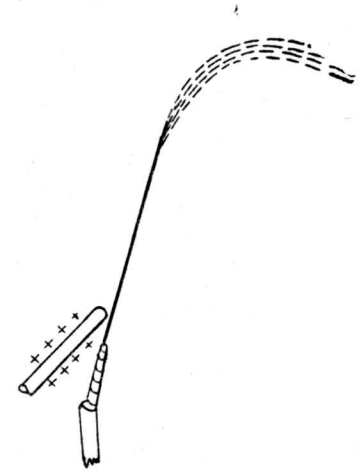
Сега искаме да разгледаме най-важната за нас страна на явлението — възникването на електрични заряди. Различни видове експерименти, включително полети пред фронта на гръмотевичната буря (пилотите, извършили тези полети, са истински храбреци!), изясниха, че разпределението на зарядите в ядрото на гръмотевичната буря прилича на изобразеното на фиг. 9-11. Върхът на гръмотевичния облак е зареден положително, а долният край — отрицателно с изключение на малък участък положителни заряди в долната част на облака, причинил не малко грижи на изследователите. Никой не знае защо той се появява там и доколко е важен, дали е вторичен ефект от положителния дъжд или е съществена част на целия механизъм. Ако това не беше,

всичко би изглеждало значително по-просто. Във всеки случай отрицателният заряд предимно е долу, а положителният — горе — това е точно разположението на полюсите на батерията, която може да зареди Земята отрицателно. Положителните заряди се намират на 6—7 km над Земята, където температурата достига —20°C, а отрицателните — на височина 3—4 km и температурата там е от 0 до —10°C.

Зарядите от долната част на облака стигат, за да се създаде между облака и земята потенциална разлика от 20, 30 и даже 100 млн. V — несравнимо повече от тези 0,4 млн. V напрежение, които съществуват между „небето" и Земята при ясно време. Тези огромни напрежения пробиват въздуха и създават гигантски буреносен разряд. При пробив отрицателният заряд от долната част на облака със зигзагите на мълнията се пренасят на Земята.

Сега с няколко думи ще опишем строежа на мълнията. Преди всичко има толкова високо напрежение, че във въздуха настъпва пробив. Мълнията бие между една част на облака и друга или между един облак и друг, или между облака и Земята. С всяко независимо избухване — с всеки удар на мълнията, който вие виждате, от небесата се смъкват 20—30 C електричество. Интересно е колко време губи облакът за възстановяване на тези 20—30 C, които го напускат заедно с мълнията? Това може да се изясни, като се измери далеч от облака електричното поле, предизвикано от диполния момент на облака. При такива измервания вие виждате внезапно спадане на полето при удара на мълнията, а след това експоненциално възвръщане към първоначалната му стойност с характерна временна константа от порядък на 5 s, която малко се изменя при различните случаи. Значи на гръмотевичната буря са достатъчни 5s, за да възстанови целия свой заряд. Но това, разбира се, не означава, че поредната мълния ще удари точно след 5s, защото се изменят и геометрията на облаците и други фактори. Избухванията следват едно след друго неравномерно, но е съществено, че връщането към началните условия винаги се извършва приблизително за 5s. Следователно в гръмотевичната динамомашина тече ток приблизително от порядъка на 4A. А това означава, че всеки модел, измислен да обясни как гръмотевичният вихър генерира електричество, трябва да бъде много мощен — трябва да бъде огромен бързодействуващ колос.

Преди да се предвижим по-нататък, да разгледаме някои неща, които вероятно почти нямат отношение към излагания въпрос, но въпреки това сами по себе си са интересни, тъй като те демонстрират влиянието на електричното поле върху водните капки. Ние говорим, че това може и да няма отношение, защото е свързано с опит, който можем да извършим в лаборатория със струйка вода и който показва достатъчно силното действие на електричеството върху капките. В гръмотевичните бури няма никакви водни струи; там просто има облак от кондензиран лед и капки вода. Така че, въпросът за механизмите, които действуват в гръмотевичната буря, съвсем не е свързан с всичко това, което ще видите в този прост опит. Поставете на водопроводния кран маркуч със стеснен край и насочете струята вода от него под ъгъл, близък до 90° (фиг. 9-12). Водата ще потече като тънка струйка и вероятно ще започне да се разпръсква на дребни капчици. Ако перпендикулярно на струята се постави електрично поле (да речем създадено от заредена пръчка), формата на струята ще се измени. При слабо електрично поле ще видите, че струята се разбива на няколко големи капки, а при силно поле струята се разбива на много-много дребни капчици, значително по-малки от преди.[1] Слабото електрично поле се стреми да възпрепятствува разбиването на струята на капки, а силното, напротив, се стреми да разбие потока.



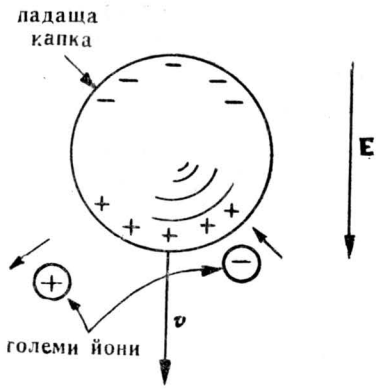
Фиг. 9-12. Струя вода с електрично поле, създадено близко до края на маркуча

Тези ефекти по всяка вероятност може да се обяснят по

[1] Удобен начин да се наблюдава размерът на капките е да се направи така, че капките да падат в голяма тава. От едрите капки ударите ще бъдат по-силни.

следния начин. Когато от маркуча тече вода и сме приложили перпендикулярно слабо поле, едната страна на струята може да се зареди малко по-положително, а другата — малко по-отрицателно. И след това, когато струята се разбива на капки, капките от едната страна на струята могат да станат положително заредени, а от другата — отрицателно заредени. Те ще започнат да се привличат и да се сливат в по-големи капки, отколкото преди. Струята няма да се разбие силно. Ако се увеличи полето, зарядът на всяка отделна капка ще стане много голям и *самият* заряд ще се стреми да направи капките по-дребни (поради отблъскването им). Всяка капка ще се раздели на по-дребни (и също заредени), те ще започнат да се отблъскват и ще падат дребни капчици. И така, при нарастване на полето струйката се разбива на все по-дребни капчици. Единственото, което ни се иска да подчертаем, е това, че при известни обстоятелства електричното поле може силно да влияе върху капките. Точният механизъм на това, което става в гръмотевичната буря, е неизвестен и съвсем не е необходимо да го свързваме с току-що описания. Ние включихме това описание само за да оценим сложността на явленията, които могат да играят някаква роля. В същност никой учен няма теория, основана на такава представа.

Ние бихме искали да приведем две теории, изобретени за обясняване на разделянето на зарядите в гръмотевичната буря. И двете се основават на представата, че върху падащата частица трябва да съществува един заряд, а във въздуха — противоположен. Тогава при движението на падащата частица (вода или лед) през въздуха възниква разделяне на електричните заряди. Въпросът е само от какво започва електризацията? Една от най-старите теории е теорията „за раздробяването на капките". Някой някога е установил, че ако в потока въздух капките се раздробяват на части, самите те се зареждат положително, а въздухът — отрицателно. Тази теория има няколко недостатъка, най-сериозният от които е, че не се полувава *верният* знак. Освен това при по-голямата част от гръмотевичните бури от умерения пояс, съпроводени от мълнии, валежите на големи височини са *не във вид* на вода, а във вид на лед.



Фиг. 9-13. Теорията на Ч. Уилсън за разпределението на зарядите в гръмотевичен облак

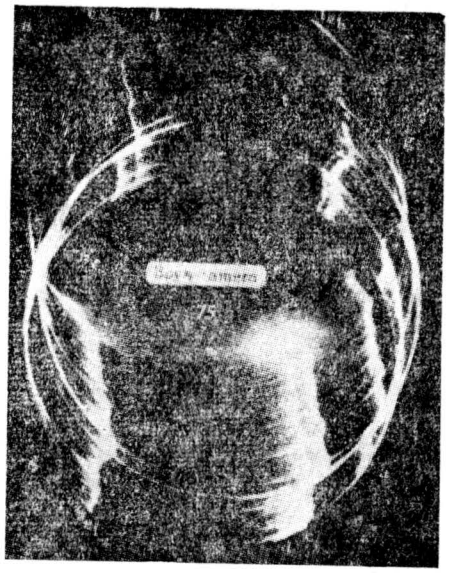
От току-що казаното следва, че ако бихме могли да си представим начин да направим така, че горе и долу капките да са наелектризирани различно и ако бихме видели някакъв резон за капките да се разбиват в бързия поток въздух на неравни части — голямата отпред, а малката отзад (е да речем поради движението през въздуха или поради нещо подобно), би се появила наша теория (различна от всички известни!). Тогава поради съпротивлението на въздуха едрите капки при падането ще изостават от дребните и би се получило разделяне на зарядите. Както виждате, може да се измислят всякакви възможности.

Една от най-остроумните теории, много по-задоволителна от теорията за раздробяващите се капки, принадлежи на Уилсън. Описвайки я, както и самия Уилсън, ще говорим за капки, макар че всичко се отнася с еднаква сила и за леда. Нека имаме водна капка, която пада в електрично поле с интензитет 100 V/m към отрицателно заредена земя. В капката ще се появи индуциран диполен момент — положителният заряд отдолу, отрицателният — отгоре (9-13). Освен това във въздуха има „ядра", за които вече говорихме — големи бавнодвижещи се йони. (Бързите йони тук не ще окажат забележимо влияние.) Да предположим, че по своя път надолу капката се приближава до голям йон. Ако самият той е положителен, положителният заряд на долната част на капката ще го отблъсне и той ще се отклони встрани. Така че капката всъщност даже няма да се докосне до него. Ако пък йонът се приближи към капката отгоре, той може да се привлече към нея. Но капката пада през въздух и въздухът се носи покрай нея нагоре, като отнася със себе си йоните само ако те се движат достатъчно бавно). Така че положителните йони не успяват да се докоснат до върха на капката. Всичко това се отнася, както виждате, само до едрите, малко подвижни йони. По-

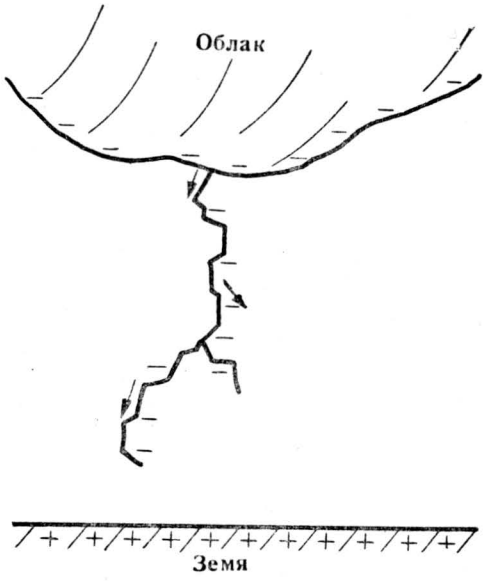
ложителните йони от този тип не могат да се докоснат нито до горната, нито до долната повърхност на летящата капка. Но когато едрите, бавни, *отрицателни* йони влизат в допир с капката, тя ги привлича към себе си и ги захваща. На капката се натрупва отрицателен заряд (знакът се определя от изходната потенциална разлика на цялата Земя и се получава тъкмо този, който ни е необходим). Отрицателният заряд ще бъде пренесен от капките в долната част на облака, а положителните йони, изхвърлени по пътя, ще бъдат отнесени към върха от различните възходящи потоци. Теорията изглежда доста мила и във всеки случай дава правилни знаци. На всичко отгоре тя не зависи от това град ли разглеждаме, или капки на дъжда. Ние ще видим, когато ще изучаваме полярицазията на диелектрици, че с ледените кристалчета трябва да стане същото. В електрично поле в краищата им също се появяват положителни и отрицателни заряди.

Обаче в тази теория остават някои неясноти. Първо, сумарният заряд на гръмотевичната буря е много голям. Достатъчно бързо запасът от големи йони се изразходва. Уилсън и други бяха принудени да предположат, че съществуват добавъчни източници на големи йони. Щом като започне разделянето на зарядите, развиват се много силни електрични полета и в тези полета може да има места, където въздухът се йонизира. Ако там има силно заредена точка или произволен малък обект, подобен на капка, те могат да концентрират около себе си поле, достатъчно голямо, за да възникне „коронен разряд". Когато има достатъчно силно поле, да речем положително, електроните ще попадат в това поле и ще успяват да наберат голяма скорост между ударите. Тя ще бъде толкова голяма, че като попадат в атомите, електроните ще откъсват атомните електрони от орбитите им, като оставят след себе си положителни йони. Тези нови електрони също ще наберат скорост и като се удрят, ще породят още повече нови електрони. Ще се извърши своеобразна верижна реакция или лавина, която ще предизвика бързо натрупване на йони. Положителните заряди остават недалеч от предишните си места, така че чистият ефект се състои в разпределяне на положителните заряди в областта около изходната точка. При това, разбира се, силното поле ще изчезне и процесът ще замре. Такъв е характерът на коронен разряд. Не е изключено полетата в гръмотевичния облак да могат да достигнат такива стойности, че да възникнат действително няколко коронни разряда; може да има и други механизми на йонизация, включвани щом започне гръмотевичната буря. Но никой точно не знае как те действуват. Така, че понастоящем не е ясен докрай произходът на мълнията. Ние знаем само, че мълниите се получават от гръмотевични бури (и знаем, разбира се, че гърмът се получава от мълнията — от топлинната енергия, освобождавана при избухването на мълнията).

Но в краен случай ние можем, макар и отчасти, да разберем произхода на атмосферното електричество. Поради това че през време на гръмотевична буря съществуват въздушни течения, йоните и капките вода на ледените кристалчета — положителни и отрицателни заряди — се разделят. Положителните заряди се отнасят нагоре, към облачния купол (вж. фиг. 9-11), а отрицателните при ударите на мълния се смъкват надолу към Земята. Положителните така и остават на върха на облака, влизат във високите слоеве от добре проводящ въздух и се разпределят над цялата Земя. В районите, където се задържа ясно време, положителните заряди в този слой бавно се пренасят към земната повърхност от йоните на въздуха — от йоните, образувани или от космическите лъчи, или от изпръскването на вълните и дейността на човека. Атмосферата — това е непрекъснато действуваща електрическа машина.



Фиг. 9-14. Снимка на избухване на мълния, направена с камера „Бойс"



Фиг. 9-15. Образуване на стъпаловиден лидер

9-6. Мълния

Първите сведения за това, какво става при избухване на мълния, са били получени от фотоснимки, направени с камера, която са държали с ръце и преместували при затворен затвор, прицелвайки се там, където се е очаквало избухване на мълния. Първите, получени по такъв начин фотографии, явно показаха, че обикновено ударите на мълниите са повтарящи се разряди по един и същ път. По-късно бе изобретена камерата „Бойс", в която *две* лещи са монтирани върху бързовъртящ се диск под ъгъл 180° една спрямо друга. Образът, даван от всяка леща, се движи перпендикулярно на лентата, картината се разгъва във времето. Ако да речем, ударът се повтори, на снимката ще се появят един до друг два образа. Като се сравнят образите от двете лещи, може да се изяснят различни детайли от временната последователност на избухванията. На фиг. 9-14 е показана снимка, направена с такава камера.

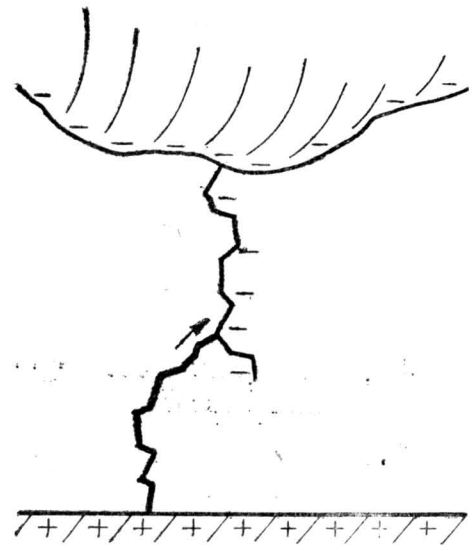
Ще разкажем за мълнията по-подробно, макар и да не разбираме как тя действува. Ние искаме да дадем качествено описание на това на *какво прилича*, но не ще влизаме в детайлите, защото става това, което се вижда, че става. Ще опишем обикновен случай на облак с отрицателно дъно, висящ над равнина. Неговият потенциал е много по-отрицателен от земната повърхност под него, така че отрицателните електрони ще се ускоряват по посока на Земята. А тук ето какво става. Всичко започва със светеща топчица, наричана „стъпаловиден лидер". Той не е толкова ярък, колкото самото избухване на мълнията. На снимките може да се види отначало малко светло петънце, което излиза от облака и много бързо се търкаля надолу със скорост 1/6 от скоростта на светлината. Но то преминава само около 50 m и спира. Следва пауза от около 50 μs, а след това прави следващата крачка. И след нея отново пауза и нова крачка и т. н. Така крачка след крачка петното се движи към Земята по път, подобен на показания на фиг. 9-15. В лидера има отрицателни заряди от облака; целият стълб е пълен с отрицателно електричество. Освен това въздух започва бързо да се йонизира от движещите се заряди, които образуват лидера, така че въздухът по отбелязания път става проводящ. В момента, когато лидерът докосне почвата, се получава проводяща „жичка", която се простира до самия облак и е пълна с отрицателно електричество. Сега накрая отрицателният заряд съвсем просто може да избяга от облака. Първи забелязват това електроните, които се намират в *най-долната част* на лидера; те прескачат на земята и остават след себе си положителен заряд, който привлича нови отрицателни заряди от по-горните части на лидера; те също се изсипват на земята и т. н. В края на краищата целият отрицателен заряд на тази част на облака бързо и енергично ще избяга по този канал надолу. Така че мълнията, която вие *виждате*, бие от земята *нагоре* (фиг. 9-16). И наистина този основен разряд — най-ярката част на разряда — се нарича *обратно избухване*. Тя предизвиква и ярко светене, и отделяне на топлина, което довежда до бързо разширение на въздуха, произвежда гръмовия удар.

Токът в пика на мълнията достига 10 000 А и се отнася около 20 С електричество.

Но ние още не сме свършили. След малък интервал време, може би няколко стотни от секундата, когато обратната мълния е вече изчезнала, надолу пикира нов лидер. Но този път вече без паузи, без спиране. Сега го наричат „тъмен лидер" и целият път от горе до долу преминава на един скок. Той се понася с пълна пара точно по предишната следа, защото по следата има достатъчно парчета от атоми, за да се окаже този път най-лекият от всички останали. Новият лидер отново е пълен с отрицателно електричество. И в мига, когато той докосва почвата — бум, — появява се обратна мълния, движеща се по същия път. И вие виждате как мълнията удря още веднъж и още веднъж и още. Понякога се наблюдават само един-два удара, от време на време

пет или десет (веднъж са видели 42 разряда по един и същ канал), но винаги бързо следващи един след друг.

Понякога всичко още повече се усложнява. Да речем, след едно от спиранията лидерът може да започне да се разклонява, като образува *две* стъпала — и двете водят надолу, но не съвсем в една посока (вж. фиг. 9-15). Какво ще се случи после, зависи от това, ще се докосне ли един от клоновете до земята по-рано от другия. Ако се докосне, ярката обратна мълния (избухването на отрицателните заряди, които се разреждат на земята) си прокарва път *нагоре* по клона, достигнал земята. Когато по своя път нагоре достига началото на другия клон, струва ни се, че ярката мълния бие *надолу* по другия клон. Защо? Защото отрицателното електричество се изсипва на земята, а това предизвиква избухване на мълния. Този заряд ще започне да се движи в началото на вторичния клон, като последователно изпразва по-далечните й участъци, така че ни се струва, че ярката мълния си прокарва път надолу по този клон в същото време, когато тя се движи нагоре. Ако обаче един от тези добавъчни клонове на лидера достигне почвата почти заедно със самия лидер, понякога може да се случи, че *тъмният* лидер на повторното избухване да си избере път по втория клон. Тогава вие ще видите първото главно избухване на едно място, а второто — на друго. Това е вариант на първоначалните представи.



Фиг. 9-16. Обратната мълния стремително се движи по следата, получена от лидера

Освен това нашето описание твърде много опростява явленията до самата земна повърхност. Когато стъпаловидният лидер се окаже приблизително на 100 m от почвата, оттам насреща му се издига разряд. Вероятно полето става толкова силно, че може да започне коронен разряд. Ако например в това място има някакъв изпъкнал предмет (къща с острие на върха), при приближаване на лидера полетата така нарастват, че започва разряд от това острие, който достига лидера. Мълнията се стреми да бие именно в такива остриета.

Това че мълнията бие във високи предмети, вероятно е било известно твърде отдавна. Известно е изказването на Артабан съветник на Ксеркс. Артабан дава на своя господар съвет за предполагаем поход срещу гърците, който има за цел да хвърли целия свят в краката на персите. Той казва: „Погледни как Бог с мълниите си винаги поразява едрите животни и не им позволява да стават дръзки, а същества с по-малки размери не Го дразнят. И как Неговите мълнии падат винаги на високите къщи и най-високите дървета.“ И след това обяснява причината: „Така очевидно Той обича да унищожава всички, които превъзнасят себе си.“

Вие как мислите сега, когато имате правилен възглед за мълнията, която поразява високите дървета, бихте ли могли да давате на кралете съвети по военни въпроси с по-голяма мъдрост, отколкото това е правил Артабан преди 2300 години? Кажете им да не превъзнасят себе си. Само че това при вас ще излезе не толкова поетично.

10

Диелектрици

10-1. Диелектрична проницаемост

10-2. Вектор на поляризацията

10-3. Поляризационни заряди

10-4. Уравнения на електростатиката за диелектрици

10-5. Полета и сили в присъствие на диелектрици

10-1. Диелектрична проницаемост

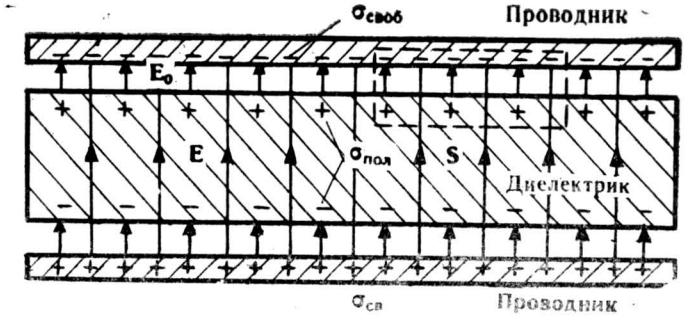
Сега ще разгледаме още едно характерно свойство на материята, което възниква под влиянието на електричното поле. В една от предишните глави ние разгледахме поведението на *проводниците*, в които зарядите под влиянието на електричното поле свободно течат в такива участъци, че полето вътре в проводника е нула. Сега ще говорим за *изолаторите*, т. е. за такива материали, които не провеждат електричество. Отначало би могло да се помисли, че в тях въобще нищо не става. Но Фарадей с помощта на прост електроскоп и кондензатор, състоящ се от две успоредни пластини, установил, че това не е така. Неговият опит показа, че ако между пластините се постави изолатор, капацитетът на такъв кондензатор *се увеличава*. Когато изолаторът изцяло запълва пространството между пластините, капацитетът нараства $\varkappa$ пъти, като $\varkappa$ зависи само от свойствата на изолиращия материал. Изолиращите материали ги наричат също *диелектрици*; тогава множителят $\varkappa$ характеризира свойствата на диелектрика и се нарича *диелектрична проницаемост*. Диелектричната проницаемост на вакуума е, разбира се, равна на единица.

Сега нашата задача е да обясним защо изобщо възниква електричен ефект, щом изолаторите фактически са изолатори и не провеждат електричество. Ще започнем с експерименталния факт, че капацитетът се увеличава и ще се опитаме да разберем какво може там да става. Ще разгледаме плосък кондензатор, на чиито проводящи пластини има заряди, да речем, на горната пластина отрицателни, а на долната — положителни. Нека разстоянието между пластините е равно на d, а лицето на всяка пластина на A. Както показахме по-рано, капацитетът е

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}, \tag{10.1}$$

а зарядът и потенциалът на кондензатора са свързани със отношението

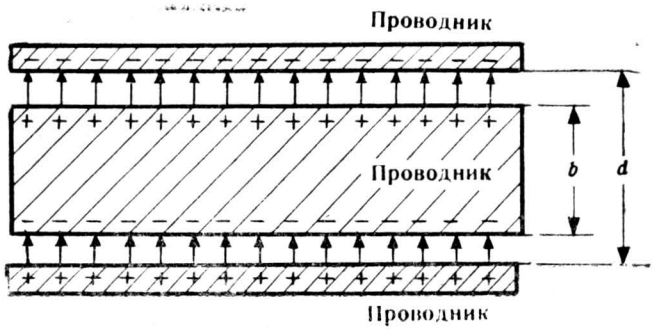
$$Q = C\,V. \tag{10.2}$$



Фиг. 10-1. Плосък кондензатор с диелектрик.
Показани са линиите на полето E

По-нататък експерименталният факт се състои в това, че ако поставим между пластините парче изолационен материал, например стъкло или плексиглас, капацитетът нараства. Това, разбира се, означава, че при същия заряд потенциалът намалява. Но потенциалната разлика е интеграл от електричното поле, взет перпендикулярно на кондензатора; оттук трябва да заключим, че електричното поле вътре в кондензатора е намаляло, макар че зарядите на пластините не са се изменили.

Но как може да стане това? Известна ни е теоремата на Гаус, която твърди, че пълният поток на електричното поле е пряко свързан с намиращите се вътре в обема електрични заряди. Да разгледаме влизащата в теоремата на Гаус повърхнина S, изобразена на фиг. 10-1 с пунктир. Тъй като електричното поле в присъствие на диелектрик се намалява, ние заключаваме, че пълният заряд, обкръжен от повърхността, трябва да бъде сега по-малък, отколкото преди внасянето на диелектрика. Остава да се направи единственият извод, че на повърхността на диелектрика трябва да се намират положителни заряди. Щом полето се е намалило, но все още не е станало нула, значи този положителен заряд е по-малък от отрицателния заряд на проводника. И така, това явление може да обясним, ако разберем защо на едната повърхност на диелектрика, поставен в електрично поле, се индуцира положителен заряд, а на другата — отрицателен.



Фиг. 10-2. Ако се постави пластинка от проводник вътре в плосък кондензатор, индуцираните заряди ще анулират полето в проводника

Всичко би било ясно, ако ставаше дума за проводник. Да допуснем например, че разполагаме с кондензатор, разстоянието между пластините на който е равно на d и поставим между тези пластини незареден проводник с дебелина b (фиг. 10-2). Електричното поле индуцира положителен заряд на горната повърхност и отрицателен заряд на долната повърхност, така че в резултат на това полето вътре в проводника се компенсира. Във всички останали места полето е такова, каквото е било без проводника, защото е равно на повърхнинната плътност на зарядите, делена на ε_0; но разстоянието, по което трябва да интегрираме, за да получим напрежението (потенциалната разлика), се е намалило.

Напрежението е

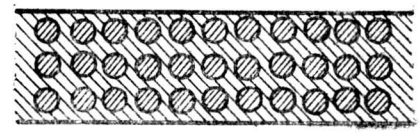
$$V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-b).$$

Окончателният израз за капацитета прилича на (10.1), където d трябва да се замести с разликата $(d-b)$:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d\,[1-(b/d)]}. \qquad (10.3)$$

Капацитетът се е увеличил известен брой пъти, което зависи от частта от обема b/d, зает от проводника.

Оттук ние получаваме модел за това, какво става в диелектриците; вътре в материала има множество малки проводящи слоеве. Бедата на такъв модел е, че в него трябва да има определена ос — перпендикулярна към всички слоеве, а повечето диелектрици нямат такава ос. Тази трудност обаче може да се отстрани, като се предположи, че всички изолиращи материали съдържат мънички проводящи топчета, отделени едно от друго с изолатор (фиг. 10-3). Появяването на диелектричната проницаемост тогава се обяснява с действието на зарядите, индуцирани във всяко топче. В това се състои и един от най-първите физични модели на диелектриците, предложен за обяснение на явлението, наблюдавано от Фарадей. По-точно, се предполагаше, че всеки атом на материала е идеален проводник, изолиран от останалите атоми. Диелектричната проницаемост тогава трябва да се определя от частта от обема, който заемат проводящите топчета. Сега обаче се използува друг модел.

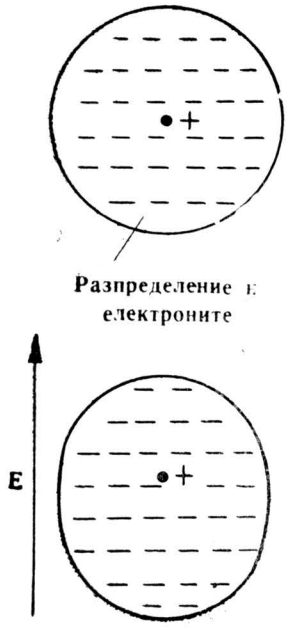


Фиг. 10-3. Модел на диелектрик: малки проводящи топчета, поставени в идеален изолатор

10-2. Вектор на поляризацията P

Като продължим нашия анализ, ще установим, че идеята за проводящите и непроводящите участъци не е толкова съществена Всеко от малките топчета действува като дипол, чийто момент се създава от външното поле. За разбирането на диелектриците съществена е идеята, че в материала се възбуждат множество малки диполи. Защо се възбуждат — дали защото в материала има проводящи топчета, или по някакви други причини — е абсолютно несъществено.

Защо полето трябва да индуцира диполен момент в атома, макар че атомът не е проводящо топче? Ние ще обсъдим този въпрос значително по-подробно в следващата глава, която ще бъде посветена на вътрешния механизъм на диелектричните материали. А сега ще дадем само един пример, за да илюстрираме възможния механизъм. Атомът има ядро с положителен заряд, окръжено от отрицателните електрони. В електричното поле ядрото се привлича на една страна, а електроните на друга. Орбитите или плътностите на вероятността (или каквато и да е друга картина, използувана в квантовата механика) малко се изкривяват (фиг. 10-4); центърът на тежестта на отрицателните заряди се премества и повече не съвпада с положителния заряд на ядрото. Ние обсъждахме такова разпределение на заряда. Ако се погледне на него отдалеч, подобна неутрална конфигурация в първо приближение е еквивалентна на малък дипол.



Фиг. 10-4. Разпределението на електроните на атома в електрично поле се премества спрямо ядрото

Ако полето не е твърде голямо, естествено е да се счита големината на индуцирания диполен момент пропорционална на полето. С други думи, слабото поле едва ще премести зарядите, а по-силното поле ще ги раздалечи повече — пропорционално на големината на полето, докато преместването не стане твърде голямо. До края на тази глава ще считаме, че диполният момент е точно пропорционален на полето.

Сега да предположим, че във всеки атом зарядите q са разделени на разстояние $\vec{\delta}$, така че $q\vec{\delta}$ е диполният момент на един атом. (Ние пишем $\vec{\delta}$, защото d е вече използувано за означаване на разстояние между пластини.) Ако в единица обем има N атома, *диполният момент в единица обем* е равен на $N\vec{q\delta}$. Този диполен момент в единица обем ще запишем във вид на вектор **P**. Не е необходимо да подчертаваме, че той лежи в посоката на всички отделни диполни моменти, т. е. в посоката на преместване на зарядите $\vec{\delta}$:

$$\mathbf{P} = Nq\vec{\delta}. \tag{10.4}$$

Изобщо казано, **P** ще се изменя в диелектрика от точка в точка. Но във всяка точка **P** е пропорционален на електричното поле **E**. Константата на пропорционалност, която се определя от това, колко лесно може да се премести електрон, зависи от вида на атомите в материала.

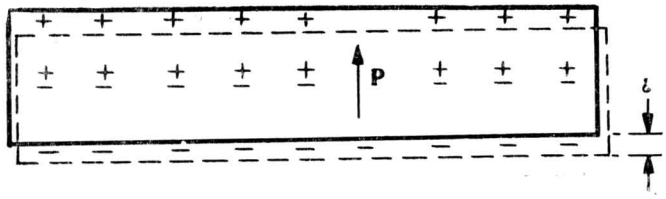
За това какво наистина определя поведението на тази константа и степента ѝ на постоянство за силни полета, а също и за това, какво става вътре в различните материали, ще поговорим по-късно. А засега просто ще предположим, че съществува някакъв механизъм, благодарение на който се индуцира диполен момент, пропорционален на електричното поле.

10-3. Поляризационни заряди

Да видим сега какво дава този модел за кондензатор с диелектрик. Да разгледаме отначало лист от материал, в който на единица обем се пада диполен момент **P**. Получава ли се в резултат някаква средна плътност на зарядите? Не, ако **P** е постоянен.

Ако положителните и отрицателните заряди, преместени един спрямо друг, имат една и съща средна плътност, самият факт на тяхното преместване не довежда до появяването на сумарен заряд вътре в обема. От друга страна, ако **P** би бил на едно място по-

голям, а на друго по-малък, това би означавало, че в някои области са попаднали повече заряди, отколкото оттам са излезли; тогава бихме могли да получим обемна плътност на заряда. В случая на плосък кондензатор ще предположим, че **P** е постоянна величина, защото ще ни бъде достатъчно да видим какво става на повърхностите. На едната повърхност отрицателните заряди (електроните) ефективно са се преместили на разстояние δ, а на другата те са се преместили навътре, оставяйки положителните заряди отвън на ефективно разстояние δ. Възниква, както е показано на фиг. 10-5, повърхнинна плътност на зарядите, която ние ще наричаме *поляризационен* заряд.



Фиг. 10-5. Диелектрик в хомогенно поле.

Положителните заряди са се преместили на разстояние δ спрямо отрицателните

Този заряд може да се пресметне по следния начин. Ако площта на пластинката е равен на A, броят на електроните, които ще се окажат на повърхността, е произведение на A и N (броя на електроните в единица обем), а също и на преместването δ, което, както ние предполагаме, е насочено перпендикулярно на повърхността. Пълният заряд ще се получи, като умножим със заряда на електрона q_e. За да намерим повърхнинната плътност на поляризационните заряди, индуцирани върху повърхността, ще разделим на A. Големината на повърхнинната плътност на зарядите е

$$\sigma_{\text{пол}} = Nq_e\delta.$$

Но тя е точно равна на големината P на вектора на поляризация **P** [формула (10.4)]:

$$\sigma_{\text{пол}} = P. \tag{10.5}$$

Поляризационната плътност на зарядите е равна на поляризацията вътре в материала. Повърхнинният заряд, разбира се, на едната повърхност е положителен, а на другата — отрицателен.

Да предположим сега, че нашата пластинка служи за диелектрик в плосък кондензатор. *Пластините* на кондензатора също имат повърхнинен заряд (който ние ще означим с $\sigma_{\text{своб}}$, защото зарядите в проводник могат да се движат „свободно", където искат). Разбира се, това е същият заряд, който ние сме предали на кондензатора при зареждането му. Трябва да се подчертае, че $\sigma_{\text{пол}}$ съществува само благодарение на $\sigma_{\text{своб}}$. Ако, като разредите кондензатора, се махне $\sigma_{\text{своб}}$, $\sigma_{\text{пол}}$ също изчезва, но той няма да изтече по проводника, който разрежда кондензатора, а ще се върне назад в материала за сметка на релаксацията на поляризацията в диелектрика.

Сега можем да приложим теоремата на Гаус към повърхността S, показана на фиг. 10-1. Електричното поле **E** в диелектрика е равно на *пълната* повърхнинна плътност на зарядите, разделена на ε_0. Очевидно е, че $\sigma_{\text{пол}}$ и $\sigma_{\text{своб}}$ имат различни знаци, така че

$$E = \frac{\sigma_{\text{своб}} - \sigma_{\text{пол}}}{\varepsilon_0}. \tag{10.6}$$

Забележете, че полето E_0 между металната пластинка и повърхността на диелектрика е по-голямо от полето E; то съответствува само на $\sigma_{\text{своб}}$. Но нас тук ни интересува полето вътре в диелектрика, което заема почти целия обем, ако диелектрикът

запълва почти цялата междина между пластините. Използувайки формулата (10.5), може да се напише

$$E = \frac{\sigma_{\text{своб}} - P}{\varepsilon_0}. \tag{10.7}$$

От това уравнение не можем да определим електричното поле, докато не знаем на какво е равен **P**. Тук ние обаче предполагаме, че **P** зависи от **E** и нещо повече — е пропорционален на **E**. Тази пропорционалност обикновено се записва във вида

$$\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E}. \tag{10.8}$$

Константата χ (гръцкото „хи") се нарича *диелектрична възприемчивост* на диелектрика.

Тогава изразът (10.7) добива вида

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_{\text{своб}}}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{1+\chi}, \tag{10.9}$$

откъдето получаваме множителя $1/(1+\chi)$, който показва колко пъти се е намалило полето.

Напрежението между пластините е интеграл от електричното поле. Щом полето е хомогенно, интегралът се свежда просто до произведение на **E** и разстоянието между пластините d. Ние получаваме

$$V = Ed = \frac{\sigma_{\text{своб}}\, d}{\varepsilon_0 (1+\chi)}.$$

Пълният заряд на кондензатора е $\sigma_{\text{своб}} A$, така че капацитетът, определян от формулата (10.2), се оказва равен на

$$C = \frac{\varepsilon_0 A (1+\chi)}{d} = \frac{\varkappa \varepsilon_0 A}{d}. \tag{10.10}$$

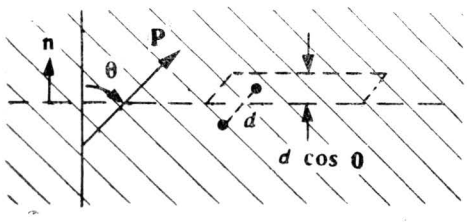
Ние обяснихме явление, наблюдавано опитно. Ако се запълни плосък кондензатор с диелектрик, капацитетът нараства с множителя

$$\varkappa = 1 + \chi, \tag{10.11}$$

който характеризира свойствата на дадения материал. Нашето обяснение, разбира се, ще остане непълно, докато не обясним (а това ще направим по-късно) как възниква атомната поляризация.

Да разгледаме сега малко по-сложен случай — когато поляризацията **P** не е навсякъде еднаква. Ние вече говорихме, че ако поляризацията не е постоянна, изобщо може да възникне обемна плътност на заряда, защото в малък обемен елемент може да влязат повече заряди, отколкото да излязат. Как да се определи колко заряда се губят или набавят в малък обем?

Ще пресметнем отначало колко заряда преминават през въображаема равнина, когато материалът се поляризира. Количеството заряд, което преминава през повърхнината, е просто P, умножен по площта на повърхнината, ако поляризацията е насочена *нормално* към повърхността. Разбира се, ако поляризацията е *допирателна* към повърхността, през нея няма да премине нито един заряд.



Фиг. 10-6. Количеството заряд, преминало през елемент на въображаема повърхнина в диелектрика, е пропорционално на нормалната към повърхнината компонента на **P**

Като се продължат предишните разсъждения, лесно е да се разбере, че количеството заряд, преминал през произволен елемент на повърхността, е пропорционално на *компонентата* на **P**, *перпендикулярна* на повърхността. Да сравним фиг. 10-6 и 10-5. Ще видим, че уравнението (10.5) в общия случай трябва да бъде записано така:

$$\sigma_{\text{пол}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}. \tag{10.12}$$

Ако имаме пред вид въображаем елемент от повърхността *вътре* в диелектрика, формулата (10.12) дава заряда, който е преминал през повърхнината, но не довежда до резултантен повърх-

нинен заряд, защото възникват равни и противоположно насочени приноси от диелектрика по двете страни на повърхнината.

Обаче преместването на зарядите може да доведе до появяване на *обемна* плътност на зарядите. Пълният заряд, изваден от обема V за сметка на поляризацията, е интеграл от външната нормална компонента на $\mathbf{P}$ по повърхността S, която обхваща обема (фиг. 10-7). Точно такъв заряд с противоположен знак остава вътре. Означавайки сумарния заряд вътре в V с $\Delta Q_{\text{пол}}$, ще напишем

$$\Delta Q_{\text{пол}} = -\int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}\, da. \qquad (10.13)$$

Ние можем да отнесем $\Delta Q_{\text{пол}}$ за сметка на обемното разпределение на заряд с плътност $\rho_{\text{пол}}$, така че

$$\Delta Q_{\text{пол}} = \int_V \rho_{\text{пол}}\, dV. \qquad (10.14)$$

Комбинирайки двете уравнения, ще получим

$$\int_V \rho_{\text{пол}} dV = -\int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}\, da. \qquad (10.15)$$

Ние получихме разновидност на теоремата на Гаус, която свързва плътността на зарядите на поляризиран материал с вектора на поляризация $\mathbf{P}$. Виждаме, че тя се съгласува с резултата, получен за повърхнинния поляризационен заряд или пък за диелектрик в плосък кондензатор. Уравнението (10.15) с гаусова повърхнина S, показана на фиг. 10-1, дава в дясната страна интеграл по повърхността, равен на $P\Delta A$, а в лявата страна зарядът вътре в обема се оказва равен на $\sigma_{\text{пол}}\Delta A$, така че ние отново получаваме $\sigma = P$.

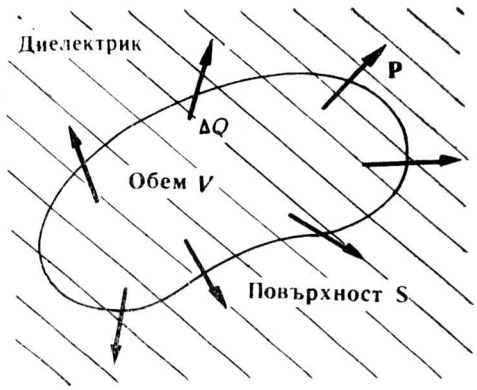
Точно по същия начин, както това правехме в случая на закона на Гаус за електростатиката, ние можем да преминем в уравнение (10.15) към диференциална форма, ползувайки се от математичната теорема на Гаус:

$$\int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \Delta \cdot \mathbf{P} dV$$

Ще получим

$$\rho_{\text{пол}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \qquad (10.16)$$

Ако поляризацията е нехомогенна, дивергенцията ѝ определя резултантна плътност на зарядите, която се появява в материала. Ще подчертаем, че това съвсем не е *истинската* плътност на зарядите; ние я наричаме „поляризационен заряд“, за да помним откъде се е получила.



Фиг. 10-7. Нехомогенната поляризация $\mathbf{P}$ може да доведе до появяване на резултантен заряд вътре в диелектрика

9-4. Уравнения на електростатиката за диелектрици

Нека сега свържем получените от нас резултати с това, което вече научихме в електростатиката. Основното уравнение има вида

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad (10.17)$$

където ρ е плътността на всички електрични заряди. Тъй като не е просто да се следи за поляризационните заряди, удобно е да се раздели ρ на две части. Ще означим отново с $\rho_{\text{пол}}$ зарядите, които се появяват за сметка на нехомогенна поляризация, а останалата част ще наречем $\rho_{\text{своб}}$. Обикновено $\rho_{\text{своб}}$ означава заряд, придаван на проводниците или разпределен по известен начин в пространството. В този случай уравнението (10.17) добива вида

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{пол}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{\text{своб}} - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0}$$

или

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}\right)=\frac{\rho_{\text{своб}}}{\varepsilon_0}. \tag{10.18}$$

Уравнението за ротация от **E**, разбира се, не се изменя:

$$\nabla \times \mathbf{E}=0. \tag{10.19}$$

Заместваики **P** от уравнението (10.8), получаваме по-просто уравнение:

$$\nabla \cdot [(1+\chi)\,\mathbf{E}]=\nabla \cdot (\varkappa \mathbf{E})=\frac{\rho_{\text{своб}}}{\varepsilon_0}. \tag{10.20}$$

Това са уравненията на електростатиката в присъствие на диелектрици. Те, разбира се, не дават нищо ново, но имат вид, по-удобен за пресмятания в случаите, когато $\rho_{\text{своб}}$ е известно, а поляризацията **P** е пропорционална на **E**.

Забележете, че ние не извадихме „константата" на диелектрична проницаемост $\varkappa$ пред знака на дивергенцията. Това е защото тя може да не бъде навсякъде еднаква. Ако тя навсякъде е еднаква, може да се отдели като множител и уравненията ще станат точно обикновените уравнения на електростатиката, където само $\rho_{\text{своб}}$ трябва да се раздели на $\varkappa$. В написаната от нас форма уравненията са валидни в общия случай, когато в различни места на полето са поставени различни диелектрици. В такива случаи понякога е много трудно да се решат уравненията.

Тук трябва да се отбележи един момент, който има историческо значение. В зората на раждане на електричеството атомният механизъм на поляризация не е бил все още известен и не са знаели за съществуването на $\rho_{\text{пол}}$. Зарядът $\rho_{\text{своб}}$ е считан за равен на цялата плътност на зарядите. За да се придаде на уравненията на Максвел прост вид, въвеждали са нов вектор **D** като линейна комбинация на **E** и **P**:

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}. \tag{10.21}$$

В резултат на това уравненията (10.18) и (10.19) са се записвали в много прост вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}=\rho_{\text{своб}}, \quad \nabla \times \mathbf{E}=0. \tag{10.22}$$

Може ли да се решат? Само когато е зададено трето уравнение, което свързва **D** и **E**. Ако е вярно уравнението (10.8), тази връзка е

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0(1+\chi)\,\mathbf{E}=\varkappa\,\varepsilon_0\mathbf{E}. \tag{10.23}$$

Последното уравнение обикновено се записва така

$$\mathbf{D}=\varepsilon\,\mathbf{E}, \tag{10.24}$$

където ε е още една константа, която описва диелектричните свойства на материалите. Тя също се нарича „проницаемост". (Сега вие разбирате защо в нашите уравнения се появи ε_0, това е „проницаемостта на празното пространство".)

Очевидно

$$\varepsilon=\varkappa\,\varepsilon_0=(1+\chi)\,\varepsilon_0. \tag{10.25}$$

Сега ще разгледаме тези неща от друга гледна точка, а именно че във вакуума винаги има най-прости уравнения и ако във всеки случай се отчетат всички заряди, каквато и да е причината за възникването им, те са винаги верни. Отделяйки част от зарядите било от съображения за удобство, било защото не искаме да вникваме в детайлите на процеса, ние винаги можем при желание да напишем уравненията в произволна удобна за нас форма.

Ще направим още една забележка. Уравнението $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ представлява опит да се опишат свойствата на веществото. Но веществото е изключително сложно по своята природа и подобно

уравнение всъщност е неправилно. Така, ако **E** стане много голямо, **D** престава да бъде пропорционално на **E**. В някои вещества пропорционалността се нарушава вече и при достатъчно слабо поле. Освен това „константата“ на пропорционалност може да зависи от това, колко бързо се изменя **E** във времето. Следователно уравнение от такъв тип е нещо като приближено уравнение от типа на закона на Хук. То не може да бъде дълбоко, основно уравнение. От друга страна, нашите основни уравнения за **E** (10.17) и (10.19) изразяват най-пълно и най-дълбоко разбиране на електростатиката.

10-5. Полета и сили в присъствие на диелектрици

Ще докажем сега редица общи теореми на електростатиката за случаите, когато има диелектрици. Ние вече видяхме, че капацитетът на плосък кондензатор при запълването му с диелектрик се увеличава определен брой пъти. Сега може да се покаже, че това е вярно за капацитети с *произволна* форма, ако цялата област около двата проводника е запълнена от хомогенен линеен диелектрик. В отсъствие на диелектрик уравненията, които трябва да се решат, са такива:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{\rho_{\text{своб}}}{\varepsilon_0} \qquad \text{и} \qquad \nabla \times \mathbf{E}_0 = 0.$$

Когато има диелектрик, първото от тези уравнения се изменя и ние получаваме

$$\nabla \cdot (\varkappa \mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{своб}}}{\varepsilon_0} \qquad \text{и} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{10.26}$$

По-нататък тъй като считаме $\varkappa$ навсякъде еднаква, последните две уравнения може да се запишат във вида

$$\nabla \cdot (\varkappa \mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{своб}}}{\varepsilon_0} \qquad \text{и} \qquad \nabla \times (\varkappa \mathbf{E}) = 0. \tag{10.27}$$

Следователно за $\varkappa\mathbf{E}$ се получават същите уравнения както за $\mathbf{E}_0$ и тогава те имат решение $\varkappa\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$. С други думи, полето навсякъде е $\varkappa$ пъти по-малко, отколкото при отсъствие на диелектрик. Тъй като потенциалната разлика е линеен интеграл от полето, тя ще се намали същия брой пъти. А тъй като зарядите на електродите на кондензатора и в двата случая е един и същ, уравнението (10.2) показва, че капацитетът се увеличава $\varkappa$ пъти в присъствие на хомогенен диелектрик.

Ще си зададеме въпроса, как взаимодействуват два заредени проводника в диелектрик? Ще разгледаме течен диелектрик, навсякъде хомогенен. Ние по-рано видяхме, че един от начините да намерим силата е да диференцираме енергията по съответното разстояние. Ако зарядите на проводниците са равни и противоположни по знак, енергията е $U = Q^2/2C$, където C е капацитетът. С помощта на принципа за виртуална работа всяка компонента на силата се получава с някакво диференциране; например

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{Q^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{C}\right). \tag{10.28}$$

Тъй като диелектрикът увеличава капацитета $\varkappa$ пъти, всичките сили се *намаляват* същото число пъти.

Обаче всичко това не е толкова просто. Казаното е вярно само ако диелектрикът е течен. Всяко преместване на проводниците, окръжени от твърди диелектрици, изменя условията на механичните напрежения в диелектрика и електричните му свойства, а също малко изменя и механичната енергия на диелектрика. Движението на проводниците в течност не изменя свойствата на течността. Течността протича на друго място, но електричните й свойства не се променят.

В много стари книги по електричество изложението започва с

„основния“ закон, по който силата, която действува между два заряда, е

$$F=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varkappa r^2}, \qquad (10.29)$$

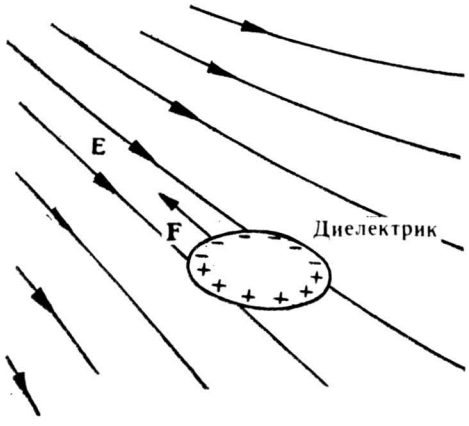
а тази гледна точка е абсолютно неприемлива. Първо, това не винаги е вярно; това е вярно само в свят, запълнен с течност; второ, така се получава само за постоянна стойност на $\varkappa$, което за повечето реални материали се изпълнява приблизително.

Значително по-лесно е да се започне с винаги верния (за неподвижни заряди) закон на Кулон за заряди във *вакуум*.

Какво става със зарядите в твърдо тяло? На това е трудно да се отговори, защото даже не е напълно ясно за какво става дума. Ако вие внасяте заряди в твърд диелектрик, възникват всякакъв вид налягания и напрежения. Вие не можете да считате работата виртуална, без да включвате също и механичната работа, необходима за свиването на тялото, а да се различат еднозначно електричните сили от механичните, които възникват за сметка на самия материал, изобщо казано, е много трудно. За щастие на никого не се налага да знае отговора на поставения въпрос. Понякога се налага да се знае големината на опъването, което може да възникне в твърдото тяло, а това може да се изчисли. Но тук резултатите се оказват значително по-сложни, отколкото простият отговор, получен от нас за течностите.

Неочаквано сложен се оказва следният проблем в теорията на диелектриците: защо зареденото тяло събира малки парченца диелектрик? Ако в сух ден се сресвате, вашият гребен лесно ще събира малки парченца хартия. Ако вие не сте се замисляли по този въпрос, вероятно ще считате, че на гребена зарядите са от един знак, а на хартията от противоположния. Но нали хартията е била отначало неутрална? Сумарният ѝ заряд е нула, а все пак се привлича. Наистина понякога хартийките подскачат към гребена, а след това отлитат изведнъж, отблъсквайки се от него Причината, разбира се, е, че като се докоснат до гребена, хартията е отнела от него малко отрицателни заряди, а едноименните заряди се отблъскват. Но това все още не дава отговор на първоначалния въпрос. Преди всичко защо хартийките изобщо се привличат от гребена?

Отговорът се заключава в поляризацията на диелектрик, поставен в електрично поле. Възникват поляризационни заряди от двата знака, привличани и отблъсквани от гребена. Обаче като резултат се получава привличане, защото полето, б'изко до гребена, е по-силно, отколкото далеч от него, нали гребенът не е безкраен. Зарядът му е локализиран. Неутралното парче хартия не ще се привлече нито към една от успоредните пластини на кондензатора. Изменението на полето съставлява съществената част от механизма на привличане.



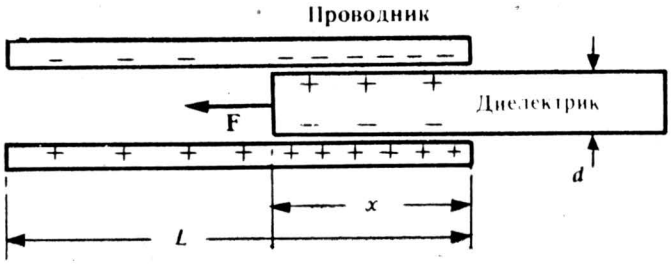
Фиг. 10-8. На диелектрик в нехомогенно поле действува сила, насочена към областта с по-голям интензитет на полето

Както е показано на фиг. 10-8, диелектрикът винаги се стреми от областта на слабото поле към областта, където полето е по-силно. Всъщност може да се покаже, че силата, която действува на дребни обекти, е пропорционална на градиента на *квадрата* на електричното поле. Защо тя зависи от квадрата на полето? Защото индуцираните поляризационни заряди са пропорционални на полетата, а за дадените заряди силите са пропорционални на полето. Обаче както ние вече показвахме, *резултантната* сила възниква само ако квадратът на полето се изменя от точка в точка. Следователно силата е пропорционална на градиента на квадрата на полето. Константата на пропорционалност включва освен всичко друго още и диелектричната проницаемост на даденото тяло и зависи също от размерите и формата на тялото.

Има още една близка задача, в която силата, която действува на диелектрика, може да бъде намерена точно. Ако вземе плосък кондензатор, в който пластината диелектрик е частично преместена (фиг. 10-9), възниква сила, която придвижва диелектрика навътре. Да се проведе детайлно изследване на силата е

много трудно; то е свързано с нехомогенностите на полето около краищата на диелектрика и пластините. Обаче ако не се интересуваме от детайлите, а просто използуваме закона за запазване на енергията, лесно е да се пресметне силата. Ние можем да определим силата с помощта на по-рано изведена формула. Уравнението (10.28) е еквивалентно на такова:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{V^2}{2}\frac{\partial C}{\partial x}. \qquad (10.30)$$



Фиг. 10-9. Силата, която действува на диелектрик в плосък кондензатор, може да бъде изчислена с помощта на закона за запазване на енергията

Остава ни да намерим само как се изменя капацитетът в зависимост от положението на пластината диелектрик.

Нека пълната дължина на пластините е L, ширината им е равна на W, разстоянието между пластините и дебелината на диелектрика е d, а разстоянието, на което е преместен диелектрикът, е x. Капацитетът е отношение на пълния свободен заряд на пластините към потенциалната разлика между пластините. Погоре видяхме, че при даден потенциал V повърхнинната плътност на свободните заряди е равна на $\varkappa\varepsilon_0 V/d$. Следователно пълният заряд на пластините е

$$Q = \frac{\varkappa\,\varepsilon_0 V}{d} xW + \frac{\varepsilon_0 V}{d}(L-x)\,W,$$

откъдето намираме капацитета

$$C = \frac{\varepsilon_0 W}{d}(\varkappa\, x + L - x). \qquad (10.31)$$

С помощта на (10.30) получаваме

$$F_x = \frac{V^2}{2}\frac{\varepsilon_0 W}{d}(\varkappa - 1). \qquad (10.32)$$

Но ползата от този израз не е много голяма, освен ако ви се налага да определите силата именно в такива условия. Ние искахме само да покажем, че понякога може да се избягват страшните усложнения при определянето на силите, които действуват на диелектриците, ако се ползуваме от енергията, както бе в разгледанията случай.

В нашето изложение на теорията на диелектриците ние имаме работа само с електрични явления, приемайки като факт, че поляризацията на веществото е пропорционална на електричното поле. Защо възниква такава пропорционалност е въпрос, който представлява може би още голям интерес за физиката. Стига да разберем механизма на възникване на диелектричната проницаемост от атомна гледна точка, ще можем да използуваме измерванията на диелектричната проницаемост в изменящи се условия за получаване на подробни сведения за строежа на атомите и молекулите. Тези въпроси частично ще бъдат изложени в следващата глава.

11

Вътрешен строеж на диелектриците

11-1. Молекулни диполи

11-2. Електронна поляризация

11-3. Полярни молекули; насочена поляризация

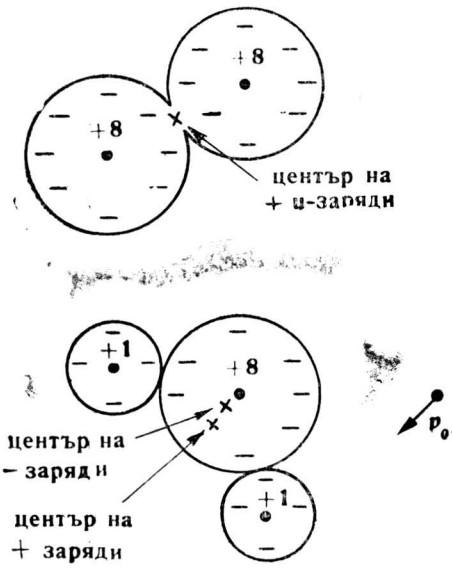
11-4. Електрични полета в кухини на диелектрика

11-5. Диелектрична проницаемост на течности; формула на Клаузиус-Мосоти

11-6. Твърди диелектрици

11-7. Сегнетоелектричество; бариев титанат

Да се повторят: гл. 31 (том I) „Как възниква коефициентът на пречупване“, гл. 40 (том I) „Принципи на статистическата механика“



Фиг. 11-1. (а) Молекулата на кислорода с нулев диполен момент. (б) Молекулата на водата с постоянен диполен момент $\mathbf{p}_0$

11-1. Молекулни диполи

В тази глава ще поговорим защо веществото бива диелектрик. В предишната глава посочихме, че свойствата на електричните системи с диелектрици биха могли да се разберат, като се предположи, че електричното поле, което действува на диелектрика, индуцира в атомите диполен момент. Именно ако електричното поле **E** индуцира среден диполен момент в единица обем P, диелектричната проницаемост $\varkappa$ се дава от израза:

$$\varkappa - 1 = \frac{P}{\varepsilon_0 E} \tag{11.1}$$

За приложенията на този израз ние вече говорихме: сега ни е необходимо да обсъдим механизма на възникване на поляризация вътре в материала под действието на електричното поле. Ще започнем с най-простия пример — поляризацията на газовете. Но даже и в газовете възникват трудности: съществуват два вида газове. Молекулите на някои газове, например кислорода, във всяка молекула на който има два симетрични атома, които са лишени от собствен диполен момент. Затова пък молекулите на други газове, като водната пара (в която атомите на водорода и кислорода образуват несиметрична молекула), притежават постоянен електричен диполен момент. Както отбелязахме в гл. 6 и 7, в молекулите на водната пара атомите на водорода средно имат положителен заряд, а атомите на кислорода — отрицателен. Тъй като центровете на тежестта на положителния и отрицателен заряд не съвпадат, разпределението на целия заряд в молекулата притежава диполен момент. Такава молекула се нарича полярна молекула. А при кислорода поради симетрията на молекулата центърът на тежестта и на положителните, и на отрицателните заряди е един и същ, така че това е *неполярна* молекула. Тя наистина може да стане дипол, ако се постави в електрично поле. Формите на тези два вида молекули са нарисувани на фиг. 11-1.

11-2. Електронна поляризация

Ще се заемем отначало с поляризацията на неполярните молекули. Ще започнем с най-простия случай на едноатомен газ (например хелий). Когато атомът на такъв газ се намира в електрично поле, електроните му се дърпат на една страна, а ядрото — на друга, както е показано на фиг. 10-4 (стр. 132). Макар че атомите имат много голяма твърдост по отношение на електричните сили, които можем да приложим към тях при експеримента, центровете на зарядите едва се преместват един спрямо друг и се индуцира диполен момент. В слаби полета големината на преместването, а следователно и на диполния момент е пропорционална на интензитета на електричното поле. Преместването на електронното разпределение, което довежда до такъв вид индуциран диполен момент, се нарича *електронна поляризация.*

Ние вече обсъждахме въздействието на електричното поле върху атома в гл. 31 (том I), когато се занимавахме с теорията на коефициента на пречупване. Като помислите малко, ще съобразите, че сега трябва да се направи същото както тогава. Само че сега ни безпокоят полета, които не се изменят във времето,

докато тогава коефициентът на пречупване бе свързан с полета, които зависят от времето. В гл. 31 (том I) ние предполагахме, че центърът на електронния заряд на атома, поставен в осцилиращо електрично поле, се подчинява на уравнението

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+m\omega_0^2x=q_eE. \tag{11.2}$$

Първият член е произведение от масата на електрона и ускорението му, а вторият — връщащата сила; отдясно стои силата, която действува от страна на външното електрично поле. Ако електричното поле се изменя с честота ω, уравнението (11.2) допуска решение

$$x=\frac{q_eE}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}, \tag{11.3}$$

което има резонанс при $\omega=\omega_0$. Когато по-рано намерихме това решение, интепретирахме ω_0 като честота, при която атомът поглъща светлина (тя лежи или в оптическата, или в ултравиолетовата област в зависимост от атома). За нашите цели обаче е достатъчен случаят на постоянни полета, т. е. $\omega=0$; поради това можем да пренебрегнем члена с ускорението в (11.2) и получаваме преместване

$$x=\frac{q_eE}{m\omega_0^2}. \tag{11.4}$$

Оттук намираме диполния момент p на един атом

$$p=q_ex=\frac{q_e^2E}{m\omega_0^2}. \tag{11.5}$$

При такъв подход диполният момент p наистина е пропорционален на електричното поле.

Обикновено пишат

$$\mathbf{p}=\alpha\varepsilon_0\mathbf{E}. \tag{11.6}$$

(Отново ε_0 е влязло по исторически причини.) Константата α се нарича *поляризуемост* на атома и има измерение L^3. Тя е мярка за това, доколко лесно се индуцира диполен момент в атома от електричното поле. Сравнявайки (11.5) и (11.6), получаваме, че в нашата проста теория

$$\alpha=\frac{q_e^2}{\varepsilon_0m\omega_0^2}=\frac{4\pi e^2}{m\omega_0^2}. \tag{11.7}$$

Ако в единица обем се съдържат N атоми, поляризацията (диполният момент в единица обем) се дава от формулата

$$\mathbf{P}=N\mathbf{p}=N\alpha\varepsilon_0\mathbf{E}. \tag{11.8}$$

Обединявайки (11.1) и (11.8), получаваме

$$\varkappa-1=\frac{P}{\varepsilon_0E}=N\alpha \tag{11.9}$$

или пред вид на (11.7)

$$\varkappa-1=\frac{4\pi Ne^2}{m\omega_0^2}. \tag{11.10}$$

С помощта на уравнение (11.9) може да се предскаже, че диелектричната проницаемост $\varkappa$ на различните газове трябва да зависи от плътността на газа и от резонансната честота ω_0.

Нашата формула, разбира се, е само грубо приближение, защото в уравнението (11.2) ние се възползувахме от модел, който игнорира тънкостите на квантовата механика. Например ние счи-

тахме, че атомът има само една резонансна честота, докато те всъщност са много. За да изчислим наистина поляризуемостта на атомите, необходимо е да се възползуваме от последователна квантовомеханична теория, обаче и класическият подход, изложен по-горе, дава напълно разумна оценка.

Да видим ще можем ли да получим правилен порядък за големината на диелектричната проницаемост на някакво вещество. Да вземем например водород. Ние вече оценявахме (том I, гл. 38) енергията, необходима за йонизацията на атома на водорода и получихме приблизително

$$E \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{me^4}{\hbar^2}. \tag{11.11}$$

За оценка на собствената честота ω_0 може да се положи тази енергия, равна на $\hbar\omega_0$ — енергията на атомния осцилатор със собствена честота ω_0. Получаваме

$$\omega_0 \approx \frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^3}.$$

Ползувайки се от тази величина в уравнение (11.7), намираме електронната поляризуемост

$$\alpha \approx 16\pi \left[\frac{\hbar^2}{me^2}\right]^3. \tag{11.12}$$

Величината $(\hbar^2/me^2)$ е радиусът на основната орбита на атома на Бор (вж. том I, гл. 38), равен на 0,528 Å. При нормално налягане и температура (1 atm, 0°C) в газа на 1 cm^3 се падат $2{,}69.10^{19}$ атома и уравнението (11.9) дава

$$\varkappa = 1 + (2{,}69.10^{19})\, 16\pi\, (0{,}528.10^{-8})^3 = 1{,}00020. \tag{11.13}$$

Опитно измерената диелектрична проницаемост е

$$\varkappa_{\text{експ}} = 1{,}00026.$$

Виждате, че нашата теория е почти правилна. По-добро не би могло и да се очаква, защото измерванията са извършвани с обикновен водород, който притежава двуатомни молекули, а не отделни атоми. Не трябва да се удивляваме, че поляризацията на атоми в молекула не е съвсем такава, каквато е поляризацията на отделните атоми. Всъщност молекулният ефект не е толкова голям. Точното квантово-механично пресмятане на величината α за атома на водорода дава резултат, който превишава (11.12) приблизително с 12% (вместо 16π се получава 18π), поради което той предсказва за диелектричната проницаемост стойност, по-близка до експериментално наблюдаваната. Във всеки случай съвършено очевидно е, че нашият модел на диелектрика е напълно добър.

Още една проверка на нашата теория. Ще се опитаме да приложим уравнението (11.12) към атоми с по-голяма честота на възбуждане. Например, за да се откъсне електрон от хелия, се изискват 24,5 V, докато за йонизацията на водорода са необходими 13,5 V. Поради това ще предположим, че честотата на поглъщане ω_0 за хелия трябва да бъде приблизително два пъти по-голяма, отколкото за водорода, а α трябва да бъде четири пъти по-малка. Ние очакваме, че

$$\varkappa_{\text{хелий}} \approx 1{,}000050,$$

а експериментално е получено

$$\varkappa_{\text{хелий}} = 1{,}000068,$$

така че нашите груби оценки показват, че ние сме на верен път. И така, ние разбрахме диелектричната поляризация на неполярен газ, но само качествено, защото засега още не сме използували правилната атомна теория за движението на атомните електрони.

11-3. Полярни молекули; насочена поляризация

Сега ще разгледаме молекула, която притежава постоянен диполен момент p_0, например молекулата на водата. В отсъствие на електрично поле отделните диполи са ориентирани в различни посоки, така че сумарният момент в единица обем е равен на нула. Но ако се приложи електрично поле, веднага стават две неща: първо, индуцира се добавъчен диполен момент поради силите, които действуват на електроните; тази част довежда до същата електронна поляризуемост, която намерихме за неполярната молекула. При много точно изследване, разбира се, е необходимо да се отчита този ефект, но засега ще го пренебрегнем. (Той винаги може да бъде добавен на края.) Второ, електричното поле се стреми да построи отделните диполи, създавайки резултантен момент в единица обем. Ако в газа биха се подредили всички диполи, поляризацията би била много голяма, но това не става. При обикновени температури и интензитети на полето ударите между молекулите при топлинното им движение не им позволяват да се подредят, както трябва. Но някакво подреждане все пак става, а оттук и малка поляризация (фиг. 11-2). Поляризацията, която възниква, може да бъде пресметната с помощта на методите на статистическата механика, описани в гл. 40 (том I).



Фиг. 11-2. (а) В газ от полярни молекули отделните моменти са ориентирани хаотично, средният момент в малък обем е равен на нула. (б) Под действието на електрично поле възниква някакво определено средно построяване на молекулите

За да се използува този метод, е необходимо да се знае енергията на дипола в електрично поле. Ще разгледаме дипол с момент $\mathbf{p}_0$ в електрично поле (фиг. 11-3). Енергията на положителния заряд е равна на $q\varphi(1)$, а енергията на отрицателния е $-q\varphi(2)$. Оттук получаваме енергията на дипола

$$U = q\varphi(1) - q\varphi(2) = q\mathbf{d} \cdot \nabla\varphi$$

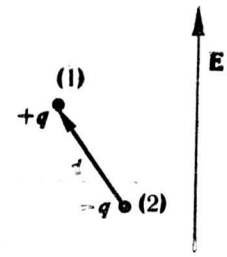
или

$$U = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E} = -p_0 E \cos\theta, \tag{11.14}$$

където θ е ъгълът между $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{E}$. Както и трябваше да се очаква енергията става по-малка, когато диполите се подреждат по полето.

Сега с помощта на методите на статистическата механика ще изясним доколко диполите се подреждат. В гл. 40 (том I) ние намерихме, че в състояние на топлинно равновесие относителният брой молекули с потенциална енергия U е пропорционален на

$$e^{-U/kT}, \tag{11.15}$$



Фиг. 11-3. Енергията на дипола $\mathbf{p}_0$ в полето $\mathbf{E}$ е равна на $-\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}$

където $U(x, y, z)$ е потенциалната енергия като функция на положението. Оперирайки със същите аргументи, може да се каже, че ако потенциалната енергия като функция на ъгъла има вида (11.14), броят на молекулите под ъгъл θ, който се пада на единица телесен ъгъл, е пропорционално на $\exp(-U/kT)$.

Полагайки броя на молекулите на единица телесен ъгъл, насочени под ъгъл θ, равно на $n(\theta)$, имаме

$$n(\theta) = n_0 e^{+p_0 E \cos\theta/kT}. \tag{11.16}$$

За обикновени температури и полета коефициентът на експонентата е малък и разлагайки експонентата, може да се възползуваме от приблизителния израз

$$n(\theta) = n_0\left(1 + \frac{p_0 E \cos\theta}{kT}\right). \tag{11.17}$$

Ще намерим n, като интегрираме по всички ъгли (11.17); резултатът трябва да бъде равен на N, т. е. на броя молекули в единица обем. Средната стойност на $\cos\theta$ при интегриране по всички ъгли е нула, така че интегралът е равен просто на n_0, умножено по пълния телесен ъгъл 4π. Получаваме

$$n_0 = \frac{N}{4\pi}. \tag{11.18}$$

От (11.17) се вижда, че по полето ще бъдат ориентирани повечето молекули ($\cos\theta = 1$), отколкото срещу полето ($\cos\theta = -1$). Поради това във всеки малък обем, който съдържа много молекули, възниква сумарен диполен момент на единица обем, т. е. поляризация P. За да се изчисли поляризацията P, е необходимо да се знае векторната сума на всички молекулни моменти в единица обем. Ние знаем, че резултатът ще бъде насочен по E, поради това е необходимо да се сумират само компонентите в тази посока (компонентите, перпендикулярни на E, при сумирането ще дадат нула):

$$P = \sum_{\text{по единичен обем}} p_0 \cos\theta_i.$$

Ние можем да оценим сумата, като интегрираме по ъгловото разпределение. Телесният ъгъл, който отговаря на θ, е $2\pi \sin\theta d\theta$; оттук

$$P = \int_0^{\pi} n(\theta)\, p_0 \cos\theta\, 2\pi \sin\theta\, d\theta. \tag{11.19}$$

Заместваики вместо $n(\theta)$ неговия израз от (11.17), имаме

$$P = -\frac{N}{2}\int_0^{\pi}\left(1 + \frac{p_0 E}{kT}\cos\theta\right) p_0 \cos\theta d(\cos\theta),$$

което лесно се интегрира и води до следния резултат:

$$P = \frac{N p_0^2 E}{3kT}. \tag{11.20}$$

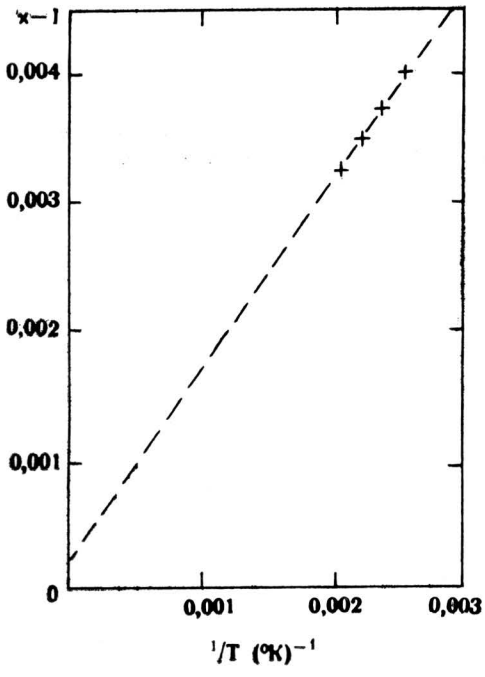
Поляризацията е пропорционална на полето E, поради което диелектричните свойства ще бъдат обикновени. Освен това, както и ние очакваме, поляризацията е обратно пропорционална на температурата, защото при по-високи температури ударите повече разрушават подредеността. Тази зависимост от вида $1/T$ се нарича *закон на Кюри*. Квадратът на постоянния момент p_0 се появява по следната причина: в даденото електрично поле подреждащата сила зависи от p_0, а средният момент, който възниква при подреждането, е отново пропорционален на p_0. Средният индуциран момент е пропорционален на p_0^2.

Сега ще видим доколко добре уравнението (11.20) се съгласува с експеримента. Да вземем водна пара. Тъй като не знаем на колко е равно p_0, не можем направо да изчислим и P, но уравнението (11.20) предсказва, че $\varkappa - 1$ трябва да се изменя обратно пропорционално на температурата и това трябва да проверим.

От (11.20) получаваме

$$\varkappa - 1 = \frac{P}{\varepsilon_0 E} = \frac{N p_0^2}{3\varepsilon_0 kT}, \tag{11.21}$$

така че $\varkappa - 1$ трябва да се изменя право пропорционално на плътността N и обратно пропорционално на абсолютната температура. Диелектричната проницаемост бе измерена при няколко стойности на налягане и температура, избрани по такъв начин, че броят на молекулите в единица обем да остава постоянен.[1] (Ще забележим, че ако всички измервания се извършваха при постоянно налягане, броят на молекулите в единица обем би се намалявал линейно с повишаване на температурата, а $\varkappa - 1$ би се изменял както T^{-2}, а не както T^{-1}.) На фиг. 11-4 са показани измерените стойности на $\varkappa - 1$ като функция на $1/T$. Зависимостта, предсказвана от формулата (11.21), се изпълнява добре.



Фиг. 11-4. Измерени стойности на диелектричната проницаемост на водна пара при няколко температури

[1] Sänger, Steiger, Gächter, Helvetica, Physica Acta. 5, 200 (1932).

Още една особеност на диелектричната проницаемост на полярните молекули — изменението ѝ в зависимост от честотата на външното поле. Благодарение на това че молекулите имат инерчен момент, за тежките молекули е необходимо определено време, за да се ориентират по посока на полето. Поради това, ако се използуват честоти от горната микровълнова зона или от още по-висока, полярният принос в диелектричната проницаемост започва да намалява, тъй като молекулите не успяват да следват полето. В противоположност на това електронната поляризуемост все още остава неизменна до оптичните честоти, тъй като инерцията на електроните е по-малка.

11-4. Електрични полета в кухини на диелектрик

Сега преминаваме към интересния, но сложен въпрос за диелектричната проницаемост на плътни вещества. Да вземем например течен хелий или течен аргон, или някое друго неполярно вещество. Ние, както и преди, очакваме, че те имат електронна поляризуемост. Но в плътни среди стойността на $\mathbf{P}$ може да бъде голяма, поради това в полето, което действува на отделния атом, принос в поляризацията ще дават атомите, съседни на дадения. Възниква въпросът, на какво е равно полето, което действува върху отделния атом?

Представете си, че между пластините на кондензатор се намира течност. Ако пластините са заредени, те създават в течността електрично поле. Но всеки атом има заряди и пълното поле $\mathbf{E}$ е сума от полетата на двата заряда. Това истинско електрично поле в течност се изменя много, много бързо от точка в точка. То е много голямо вътре в атомите, особено близо до ядрото, и сравнително малко между атомите. Потенциалната разлика е интеграл от това пълно поле. Ако пренебрегнем всички бързи изменения, можем да си представим някакво *средно* електрично поле E, точно равно на V/d. (Именно това поле ние използувахме в предната глава.) Това поле ние трябва да си представяме като средно за пространство, което съдържа много атоми.

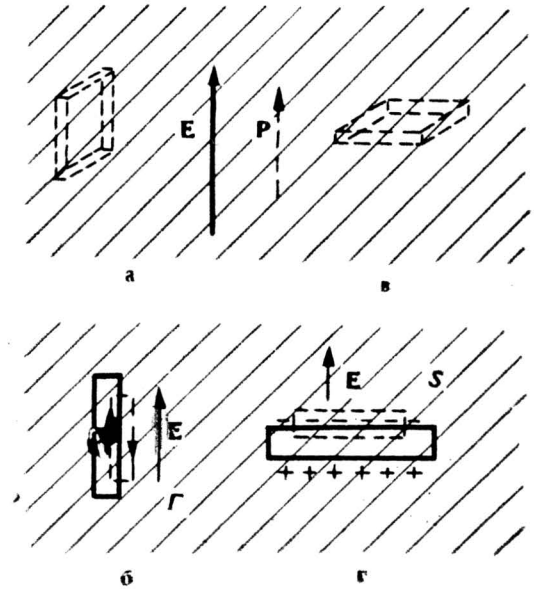
Вие може да помислите, че „средният" атом в „средно" положение ще почувствува именно това поле. Но всичко не е толкова просто и в това може да се убедите, като си представите, че в диелектрика има отвори с различна форма. Ще предположим, че в поляризиран диелектрик сме изрязали процеп, ориентиран успоредно на полето (11-5, *а*). Тъй като знаем, че $\nabla\times\mathbf{E}=0$, линейният интеграл от $\mathbf{E}$ по кривата Г, насочена така, както е показано на фиг. 11-5, *б*, трябва да бъде равен на нула. Полето вътре в процепа трябва да дава такъв принос, който точно да компенсира приноса от полето извън процепа. Поради това полето E_0 в центъра на дълъг тесен процеп е равно на E, т. е. на средното електрично поле, намерено в диелектрика.

Да разгледаме сега друг процеп, обърнат с широката си страна перпендикулярно на E (фиг. 11-5, *в*). В този случай полето E_0 в процепа не съвпада с E, защото на стените на процепа възникват поляризационни заряди. Като приложим закона на Гаус към повърхността S, показана на фиг. 11-5, *г*, намираме, че полето E_0 *вътре в процепа* се дава от израза

$$E_0=E+\frac{P}{\varepsilon_0}, \tag{11.22}$$

където E, както и по-рано, е електричното поле в диелектрика. (Гаусовата повърхнина обхваща повърхнинния поляризационен заряд $\sigma_{\text{пол}}=P$.) Ние отбелязахме в гл. 10, че ε_0E+P често се означава с D, поради което $\varepsilon_0E_0=D_0$ е равно на големината на D в диелектрика.

В ранния период на историята на физиката, когато се е считало много важно да се определя всяка величина с преки експерименти, физиците са били много доволни, като установили, че те могат да определят това, което разбират под E и D в ди-



Фиг. 11-5. Полето вътре в кухина, изрязана в диелектрика, зависи от формата и ориентацията ѝ

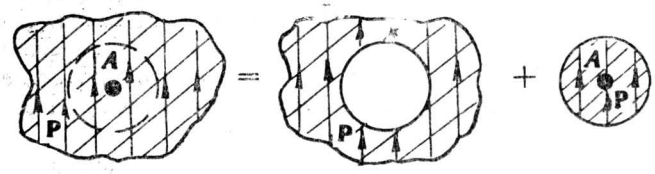
електрик, без да пълзят в междините между атомите. Средното поле **E** числено е равно на полето $\mathbf{E}_0$, измерено в процеп, успореден на полето. А полето **D** би могло да бъде измерено с помощта на E_0, намерено в процеп, перпендикулярен на полето. Но никой никога не го е измервал (във всеки случай по такъв начин), така че това е един от многото безплодни проблеми.

В повечето течности, не твърде сложни по строежа си, всеки атом средно така е обкръжен от другите атоми, че може с добра точност да се счита намиращ се в *сферична кухина*. И тогава ние ще запитаме: „На какво е равно полето в сферична кухина?" Ние забелязваме, че изрязването на сферична дупка в хомогенен поляризиран диелектрик е равносилно на отнемане на топче от поляризирания материал, така че можем да отговорим на този въпрос. (Ние трябва да си представим, че поляризацията е била „замразена", докато сме изрязвали дупката.) Обаче по силата на принципа на суперпозицията полето вътре в диелектрика, преди да е извадено топчето, е сума от полетата от всички заряди извън обема на топчето плюс полетата от зарядите вътре в поляризираното топче. Следователно, ако полето вътре в хомогенен диелектрик наречем E, можем да запишем

$$E = E_{\text{дупка}} + E_{\text{топче}}, \tag{11.23}$$

където $E_{\text{дупка}}$ е полето в дупката, а $E_{\text{топче}}$ — полето в хомогенно поляризираното топче (Фиг. 11-6). Полето на хомогенно поляризираното топче е показано на фиг. 11-7. Електричното поле вътре в топчето е хомогенно и равно на

$$E_{\text{топче}} = -\frac{P}{3\varepsilon_0} \tag{11.24}$$

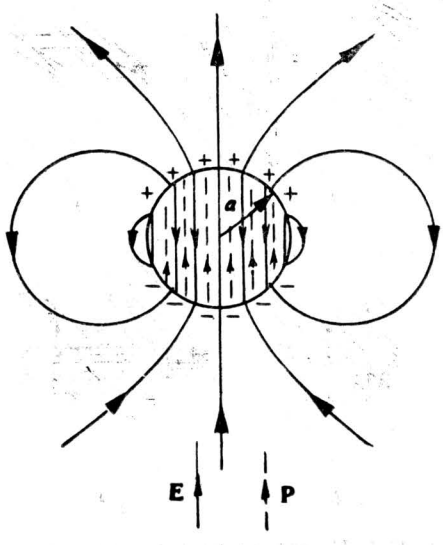


Фиг. 11-6. Полето във всяка точка A на диелектрика може да се представи като сума от полето на сферична дупка и полето на сферично кълбо от същия диелектрик

С помощта на (11.23) получаваме

$$E_{\text{дупка}} = E + \frac{P}{3\varepsilon_0}. \tag{11.25}$$

Полето в сферична кухина е по-голямо от средното поле с величината $P/3\varepsilon_0$. (Сферичната кухина дава поле, което се намира на 1/3 от пътя от полето на успоредния процеп към полето на перпендикулярния процеп.)



Фиг. 11-7. Електричното поле на хомогенно поляризирано топче

11-5. Диелектрична проницаемост на течности; формула на Клаузиус—Мосоти

В течности ние очакваме, че полето, което поляризира отделния атом, по-скоро прилича на $E_{\text{дупка}}$, отколкото на E. Ако се вземе $E_{\text{дупка}}$ от (11.25) като поляризиращото поле, което влиза в (11.6), уравнението (11.8) добива вида

$$P = N\alpha\varepsilon_0\left(E + \frac{P}{3\varepsilon_0}\right) \tag{11.26}$$

или

$$P = \frac{N\alpha}{1-(N\alpha/3)}\,\varepsilon_0 E. \tag{11.27}$$

Спомняйки си, че $\varkappa - 1$ е точно равна на $P/\varepsilon_0 E$, получаваме

$$\varkappa - 1 = \frac{N\alpha}{1-(N\alpha/3)}, \tag{11.28}$$

което определя диелектричната проницаемост на течността чрез атомната поляризуемост α. Това е *формулата на Клаузиус—Мосоти.*

Ако $N\alpha$ е много малко, както например е за газ (защото е малка плътността N), членът $N\alpha/3$ може да се пренебрегне в сравнение с 1 и ние получаваме нашия стар резултат — уравнение (11.9), т. е.

$$\varkappa - 1 = N\alpha. \tag{11.29}$$

Нека сравним уравнение (11.28) с някои експериментални данни. Отначало си струва да се обърнем към газовете, за които от измерването на $\varkappa$ може с помощта на уравнение (11.29) да се намери стойността на α. Така за въглероден дисулфид при нулева температура по Целзий диелектричната проницаемост е равна на 1,0029, така че $N\alpha = 0{,}0029$. Лесно е да се пресметне плътността на газа, а плътността на течностите може да се намери в справочниците. При 20°C плътността на течния CS_2 е 381 пъти по-висока от плътността на газа при 0°C. Това значи, че N е 381 пъти повече в течността, отколкото в газа, а оттук (ако се направи допускането, че изходната атомна поляризуемост на въглеродния дисулфид не се изменя при кондензацията му в течно състояние) $N\alpha$ в течността е 381 пъти по-голямо от 0,0029 или е равно на 1,11. Забележете, че $N\alpha/3$ е почти 0,4. С помощта на тези числа ние предсказваме, че големината на диелектричната проницаемост е равна на 2,76, което достатъчно добре се съгласува с наблюдаваната стойност 2,64.

В таблица 11-1 привеждаме редица експериментални данни за различни вещества, а също и стойностите на диелектричната проницаемост, изчислена, както току-що бе описано, по формулата (11.28). Съвпадението между опита и теорията за аргона и кислорода е даже по-добро, отколкото за CS_2 и не толкова добро за тетрахлорметан. Като цяло резултатите показват, че уравнението (11.28) работи с добра точност.

Таблица 11-1

Изчисляване на диелектричната проницаемост на течности и диелектричната проницаемост на газ

Вещество	Газ			Течност				
	$\varkappa_{\text{експ}}$	$N\alpha$	Плътност	Плътн.	Отношение	$N\alpha$	$\varkappa_{\text{пред.}}$	$\varkappa_{\text{експ}}$
CS_2	1,0029	0,0029	0,00339	1,293	381	1,11	2,76	2,64
O_2	1,000523	0,000523	0,00143	1,19	832	0,435	1,509	1,507
CCl_4	1,0030	0,0030	0,00489	1,59	325	0,977	2,45	2,24
Ar	1,000545	0,000545	0,00178	1,44	810	0,441	1,517	1,54

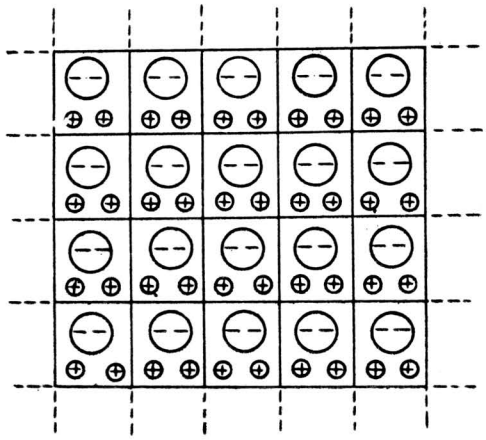
Нашият извод на уравнението (11.28) е верен само за *електронна* поляризация в течности. За полярни молекули от вида на H_2O той не е верен. Ако се проведат такива пресмятания за водата, за $N\alpha$ ще получим стойността 13,2, което означава, че диелектричната проницаемост на тази течност е *отрицателна*, докато опитната стойност на $\varkappa$ е равна на 80. Това е свързано с неправилната трактовка на постоянните диполи и Онзагер е показал правилния начин на решаване. Ние не можем сега да се спираме на този въпрос, но ако той ви интересува, подробното му обсъждане ще намерите в книгата на Кител „Увод във физиката на твърдо тяло“[1].

[1] Има превод на руски: Ч. Китель, „Введение в физику твердого тела“, М., 1962. — Заб. ред.

11-6. Твърди диелектрици

Да се обърнем сега към твърдите тела. Първият интересен факт относно твърдите тела се състои в това, че при тях има постоянна поляризация, която съществува даже и без прилагане на външно електрично поле. Примери може да се намерят при вещества от типа на восъка, който съдържа дълги молекули с постоянен диполен момент. Ако се разтопи малко восък и докато той не е успял да се втвърди, се приложи силно електрично поле, за да се подредят диполните моменти частично, те ще останат в такова положение и след като восъкът се втвърди. Твърдото вещество ще притежава постоянна поляризация, която остава и при отсъствие на полето. Такова вещество се нарича *електрет*.

На повърхността на електрета са разположени постоянни поляризационни заряди. Електретът е електричен аналог на магнита, обаче ползата от него е значително по-малка, защото свободните заряди на въздуха се привличат към повърхнините му и в края на краищата неутрализират поляризационните заряди. Електретът се „разрежда“ и не създава забележимо външно поле.



Фиг. 11-8. Сложната кристална решетка може да има постоянна вътрешна поляризация **P**

Постоянна вътрешна поляризация P се среща и в някои кристални вещества. В такива кристали всяка клетка на решетката притежава един и същ постоянен диполен момент (фиг. 11-8). Всички диполи са насочени в една посока даже при отсъствие на електрично поле. Много сложни кристали притежават такава поляризация; обикновено това ние не забелязваме, защото създаваното от тях външно поле, както и при електретите, се разрежда.

Ако обаче вътрешните диполни моменти на кристала се изменят, външното поле става забележимо, защото блуждаещите заряди не успяват да се съберат и неутрализират поляризационните заряди. Ако диелектрикът се намира в кондензатор, свободни заряди се индуцират на електродите. Моментите могат да се изменят например вследствие на топлинно разширение, ако се нагрее диелектрикът. Такъв ефект се нарича *пироелектричество*. Аналогично ако се изменят напреженията в кристала, например го свием, моментът може отново малко да се измени и тогава се установява слаб електричен ефект, наричан *пиезоелектричество*.

За кристали, които не притежават постоянен момент, може да се развие теория на диелектрична проницаемост, където да се включи електронната поляризуемост на атомите. Това се прави почти така както за течностите. Някои кристали имат вътрешни моменти и тяхното въртене също внася принос в $\varkappa$. В йонните кристали, такива като NaCl, възниква също и *йонна поляризуемост*. Кристалът се състои от положителни и отрицателни йони, разположени в шахматен ред и в електрично поле положителните йони се дърпат на една страна, а отрицателните на друга; възниква резултантно преместване на положителните и отрицателни заряди, а следователно и обемна поляризация. Ние бихме могли да оценим големината на йонната поляризация, като познаваме твърдостта на кристалите на солта, но няма да се спираме на този въпрос.

11-7. Сегнетоелектричество; бариев титанат

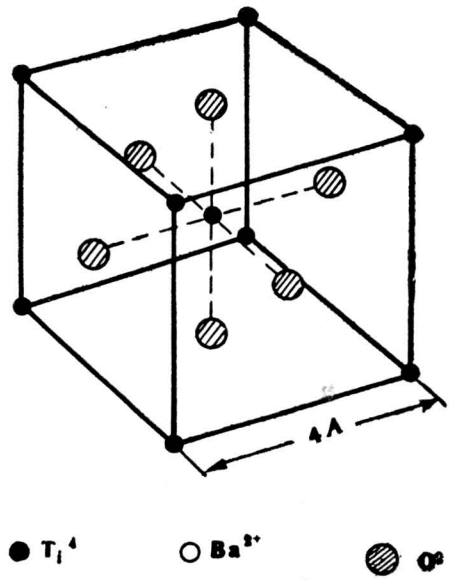
Тук ще опишем особен клас кристали, които, може да се каже, почти случайно притежават „вграден“ постоянен електричен момент. Ситуацията тук е толкова типична, че ако съвсем малко се увеличи температурата повече от определената, кристалът от този клас съвсем загубва постоянния момент. От друга страна, ако структурата на кристала е близка до кубичната, така че електричните моменти могат да се разполагат в различни посоки, може да се установят големи изменения на пълния момент при изменения на приложеното електрично поле. Всички моменти се насочват по посоката на полето и ние получаваме голям ефект.

Веществата, които притежават постоянен момент от този вид, се наричат *сегнетоелектрици*.[1]

Ние бихме искали да обясним механизма на сегнетоелектричеството в частния случай на някакъв сегнетоелектричен материал. Сегнетоелектричните свойства могат да възникнат по няколко начина; обаче ние ще разгледаме само един от тях, например в тайнствения бариев титанат ($BaTiO_3$). Това вещество притежава кристална решетка, чиято основна клетка е показана на фиг. 11-9. Оказва се, че при температура, по-висока от дадена (а именно 118° С), бариевият титанат е обикновен диелектрик с огромна диелектрична проницаемост, а под тази температура той неочаквано придобива постоянен момент.

При изчисляването на поляризацията на твърдите тела трябва отначало да намерим локалните полета във всяка елементарна клетка. При което е необходимо да се въведе полето на самата поляризация, както това се правеше в случая за течности. Но кристалът не е хомогенна течност, така че ние не можем да вземем за локално поле това, което получихме за сферична дупка. Ако направим това за кристала, ще се окаже, че множителят 1/3 в уравнението (11.24) малко ще се измени. (За прост кубичен кристал той е точно равен на 1/3.) Поради това ще предположим в нашето предварително обсъждане, че този множител за $BaTiO_3$ наистина е равен на 1/3.

По-нататък, когато писахме уравнението (11.28), на вас вероятно ви е било интересно да знаете какво ще се случи, ако $N\alpha$ стане по-голямо от 3. На пръв поглед величината $\varkappa$ трябва да стане отрицателна. Но това вероятно не може да се случи. Да видим какво ще стане, ако в някакъв определен кристал постепенно се увеличава стойността на α. С нарастването на α расте и поляризацията, като създава по-силни локални полета. Но увеличилото се локално поле ще поляризира атома още повече, което допълнително ще усили самото локално поле. Ако атомите са достатъчно „податливи", процесът продължава; възниква своеобразна обратна връзка, която довежда до неудържимо нарастване на поляризацията (ако се положи, че поляризацията на всеки атом се увеличава пропорционално на полето). Условието за „ускоряването" възниква при $N\alpha = 3$. Поляризацията, разбира се, не става безкрайна, защото при силни полета пропорционалността между индуцирания момент и електричното поле се нарушава, така че нашите формули стават неправилни. Получава се, че в решетката е „вградена" голяма вътрешна самопроизволна поляризация.



Фиг. 11-9. Елементарната клетка на $BaTiO_3$

Атомите всъщност запълват по-голямата част от пространството; показани са само положенията на центровете им

В случая на $BaTiO_3$ като добавка към електронната поляризация има достатъчно голяма йонна поляризация, обусловена, както предполагат, от йоните на титана, които могат слабо да се движат вътре в кубичната решетка. Решетката се съпротивлява на големи премествания, така че йонът на титана, като се премести на малко разстояние, се забавя и спира. Но тогава кристалната решетка придобива постоянен диполен момент.

При повечето сегнетоелектрични кристали действително възниква такава ситуация при всички достижими температури. Обаче бариевият титанат представлява особен интерес; той така деликатно е построен, че при най-малко намаляване на $N\alpha$ моментът „се освобождава". Тъй като N с повишаване на температурата се намалява (вследствие на топлинното разширение), може да се измени $N\alpha$, като се изменя температурата. Под критичната температура изведнъж се образува момент и тогава, като прилагаме външно поле, лесно е да се обърне поляризацията и се закрепи в необходимата посока.

Ще се опитаме по-подробно да разберем какво става. Ще наречем критична температура T_c, температурата при която $N\alpha$ е

[1] На английски сегнетоелектричеството се нарича ferroelectricity (фероелектричество); този термин е възникнал по аналогия с феромагнетизма: наличието на спонтанен момент (електричен в сегнетоелектриците, магнитен във феромагнетиците), точка на Кюри, хистерезис и т. н. Обаче физичната природа на тези групи явления е съвършено различна. — Заб. ред. рус. изд.

точно равно на 3. При увеличаване на температурата стойността на N малко се намалява поради разширяване на решетката. Тъй като разширението е малко, можем да кажем, че е близко до критичната температура

$$N\alpha = 3 - \beta(T - T_c), \tag{11.30}$$

където β е константа от порядъка на коефициента на топлинното разширение, т. е. около 10^{-5}—10^{-6} grad^{-1}. Като заместим това в израза (11.28), ще получим

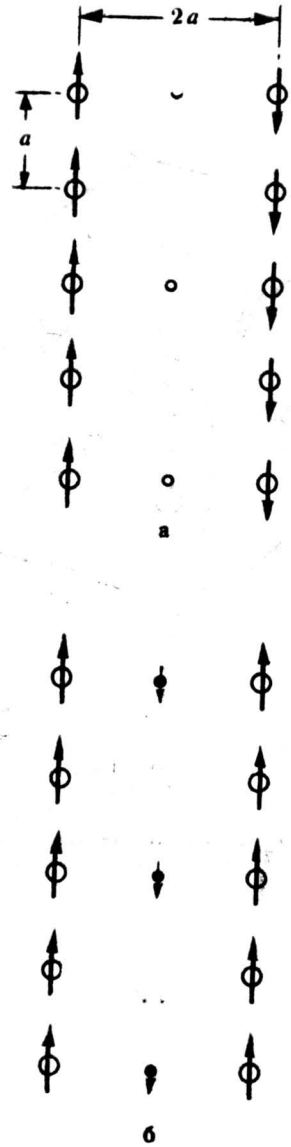
$$\varkappa - 1 = \frac{3 - \beta(T - T_c)}{\beta(T - T_c)/3}.$$

Тъй като ние считаме величината $\beta(T - T_c)$ малка в сравнение с единицата, може да се напише приблизително

$$\varkappa - 1 \approx \frac{9}{\beta(T - T_c)}. \tag{11.31}$$

Това, разбира се, е вярно само за $T > T_c$. Виждаме, че ако температурата е много малко по-висока от критичната, величината $\varkappa$ е огромна. Поради това че $N\alpha$ е толкова близка до 3, възниква грамаден ефект на усилване и диелектричната проницаемост лесно достига големина от 50 000 до 100 000. Тя също е твърде чувствителна към температурата. При увеличаване на температурата диелектричната проницаемост намалява обратно пропорционално на температурата, но за разлика от диполния газ, където разликата $\varkappa - 1$ е обратно пропорционална на *абсолютната* температура, при сегнетоелектриците тя се мени обратно пропорционално на разликата между абсолютната и критичната температури (този закон се нарича *закон на Кюри — Вайс*).

Какво се случва, когато намаляваме температурата до критичната стойност? Ако кристалната решетка се състои от елементарни клетки от вида, изобразен на фиг. 11-9, очевидно може да се избере верига от йони по вертикалните линии. Една от тях се състои от редуващи се йони на кислорода и титана. Има и други вериги, които се състоят или от йони на бария, или от йони на кислорода, но разстоянията между йоните по такива линии се оказват по-големи. Ще използуваме прост модел, като си мислим редица от йонни вериги (фиг. 11-10, *а*). По веригата, която ще наречем главна, разстоянието между йоните е равно на a, което представлява *половината* от константата на решетката; напречното разстояние между еднаквите вериги е равно на $2a$. В междините има по-малко плътни вериги, които ние засега няма да разглеждаме. За да опростим малко нашия анализ, ще предположим още, че всички йони на главната верига са еднакви. (Опростяването не е много значително, защото всички важни ефекти още остават. Това е просто една от хитростите на теоретичната физика. Отначало се решава видоизменена задача, защото така е по-лесно да се разбере, а след това, като се проумее как става всичко, се внасят всички усложнения.)



Фиг. 11-10. Модели на сегнетодиелектрик:
а — антисегнетоелектрик;
б — нормален сегнетоелектрик

Ще се опитаме да изясним какво ще става в нашия модел. Ще предположим, че диполният момент на всеки йон е равен на p и нека искаме да изчислим полето близо до един от йоните на веригата. Ние трябва да намерим сумата от полетата от всички останали йони. Отначало ще изчислим полето от диполите само в една вертикална верига; за останалите вериги ще поговорим по-късно. Полето на разстояние r от дипола по посока на оста му се дава от формулата

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2p}{r^3}. \tag{11.32}$$

За точка близо до произволен йон останалите диполи, разположени на еднакво разстояние нагоре и надолу от него, дават полета в една и съща посока, поради което за цялата верига получаваме

$$E_{\text{верига}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2}{a^3}\left(2 + \frac{2}{8} + \frac{2}{27} + \frac{2}{64} + \cdots\right) = \frac{p}{\varepsilon_0}\cdot\frac{0.383}{a^3}. \tag{11.33}$$

Лесно е да се покаже, че ако нашият модел би бил подобен на кубичен кристал, т. е. ако следващата идентична линия би преминавала на разстояние a, числото 0,383 би се превърнало в 1/3 ($\sim$0,333). С други думи, ако съседните линии биха се намирали на разстояние a, те биха внасяли в нашата сума принос едва — 0,050. Обаче следващата главна верига, която ще разгледаме, се намира на разстояние $2a$ и както вие помните от глава 7, полето, създадено от периодична структура, спада експоненциално с разстоянието. Поради това тези линии внасят в сумата значително по-малко от —0,050 и ние можем просто да пренебрегнем всички останали вериги.

Сега трябва да се изясни каква трябва да бъде поляризуемостта α, за да се приведе в действие механизмът на ускоряването. Ще предположим, че индуцираният момент p на всеки атом от веригата в съгласие с уравнение (11.6) е пропорционален на действуващото върху него поле. Поляризиращото поле, което действува върху атома, получаваме от $E_{\text{верига}}$ с помощта на формулата (11.32). И така, имаме две уравнения:

$$p = \alpha\varepsilon_0 E_{\text{верига}}$$

и

$$E_{\text{верига}} = \frac{0{,}383}{a^3} \cdot \frac{p}{\varepsilon_0}.$$

Имаме две решения: когато E и p са равни на нула и когато E и p не са равни на нула, но при условие че

$$\alpha = \frac{a^3}{0{,}383}.$$

По такъв начин ако α достигне стойността $a^3/0{,}383$, установява се постоянна поляризация, поддържана от собственото си поле. Това критично равенство за бариевия титанат трябва да се достигне точно при температура T_c. (Забележете, че ако поляризуемостта би била по-голяма от критичната стойност за слаби полета, тя се намалява при големи полета и в точката на равновесие се установява полученото от нас равенство.)

За $BaTiO_3$ междината a е равна на 2.10^{-8} cm и поради това трябва да очакваме за α стойността $21{,}8.10^{-24}$ cm^3. Ние можем да сравним тази стойност с известните стойности на поляризуемостта на отделни атоми. За кислорода $\alpha = 30{,}2.10^{-24}$ cm^3. (На верен път сме!) Но за титана $\alpha = 2{,}4.10^{-24}$ cm^3. (Твърде малко.) В нашия модел вероятно ние трябва да вземем средното. (Ние бихме могли да пресметнем отново верига за междинните атоми, но резултатът би бил отново същият.) И така $\alpha_{\text{сред}} = 16{,}3.10^{-24}$ cm^3, което е недостатъчно голямо за установяване на константата на поляризация.

Но почакайте. Ние досега нали събирахме само електронните поляризуемости. Има още и йонна поляризация, която възниква поради преместването на йона на титана. Обаче ще бъде необходима йонна поляризуемост със стойност $9{,}2.10^{-24}$ cm^3. (По-точното пресмятане с отчитане на междините атоми показва, че всъщност е необходима даже $11{,}9.10^{-24}$ cm^3.) За да разберем свойствата на $BaTiO_3$, ние трябва да предположим, че възниква именно такава йонна поляризуемост.

Защо йонът на титана в бариевия титанат има толкова голяма йонна поляризуемост, е неизвестно. Освен това непонятно е защо при ниски температури той се поляризира еднакво добре както по посока на диагонала на куба, така и по посока на диагоналите на стените. Ако изчислим истинските размери на топчетата на фиг. 11-9 и се опитаме да намерим достатъчно ли свободно титанът се държи в кутийката, образувана от съседните атоми на кислорода (а това би ни се искало, защото тогава би му било лесно да се придвижи), получава се съвсем противоположен отговор. Той седи много плътно закрепен. Атомите на бария са захванати много по-свободно, но ако се счита, че те именно се движат, нищо не се получава. Така че, както виждате, въпросът съв-

сем не е ясен; остават още загадки, които много ни се иска да отгатнем.

Като се върнем към нашия прост модел (вж. фиг. 11-10, *а*), виждаме, че полето от една верига ще предизвика поляризация на съседната верига в *противоположна* посока. Това значи, че макар и всяка верига да бъде замразена, постоянната поляризация в единица обем ще бъде равна на нула. (Тук не биха възникнали външни електрични проявления, но биха могли да се наблюдават определени термодинамични ефекти.) Такива системи съществуват и се наричат *антисегнетоелектрици*. Поради това нашето обяснение фактически се отнася за антисегнетоелектрици. Обаче в действителност бариевият титанат има строеж, който много прилича на показаното на фиг. 11-10, *б*. Всички кислородно-титанови вериги са поляризовани в една посока, защото между тях се намират междинни вериги от атоми. Макар че атомите в тези вериги не са поляризирани много силно и не са много близки разположени, те все пак ще бъдат малко поляризирани в еднакво направление и противоположна посока на кислородно-титановите вериги. Слаби полета, създадени в следващата кислородно-титанова верига, я заставят да се поляризира успоредно на първата. Поради това $BaTiO_3$ всъщност е сегнетоелектрик и това става благодарение на атомите, които се намират в междината. Вие можете да попитате: „А какво ще се получи с прякото взаимодействие между две вериги O — Ti?“ Ще си спомним обаче, че прякото взаимодействие намалява експоненциално с разстоянието; действието на верига от силни диполи на разстояние $2a$ може да бъде по-малко от действието на верига от слаби диполи на разстояние a.

С това ще завършим достатъчно подробното изложение на нашите сегашни познания за диелектричните свойства на газовете, течностите и твърдите тела.

12

Електростатични аналогии

12-1. Еднакви уравнения — еднакви решения

Цялата информация за физичния свят, натрупана от времето на зараждане на научния прогрес, е наистина огромна и се струва почти невероятно някой да е овладял голяма част от нея. Но фактически физикът може напълно да разбере общите свойства на физичния свят, без да става специалист в някаква тясна област. За това има три причини. *Първата.* Съществуват велики принципи, приложими към всички явления, такива като закона за запазване на енергията и момента на количество на движение. Дълбокото разбиране на тези принципи позволява веднага да се разберат извънредно много неща. *Втората.* Оказва се, че много сложни явления, като например свиване на твърди тела, главно се обуславят от електрични и квантовомеханични сили, така че, като се разберат основните закони на електричеството и квантовата механика, има възможност да се разберат много явления, които възникват в сложни условия. *Третата.* Има забележително съвпадение: *Уравненията за най-различни физични условия често имат точно еднакъв вид.* Използуваните символи, разбира се, могат да бъдат различни — вместо една буква стои друга, но математичната форма на уравненията е една и съща. Това значи, че като изучим една област, ние веднага получаваме много преки и точни сведения за решенията на уравненията за друга област.

Ние завършихме електростатиката и скоро ще преминем към изучаването на магнетизма и електродинамиката. Но преди това ни се иска да покажем, че като изучихме електростатиката, ние едновременно узнахме и за много други явления. Ние ще видим, че уравненията на електростатиката фигурират и в редица други области на физиката. Чрез пряко пренасяне на решенията (еднаквите математични уравнения трябва, разбира се, да имат еднакви решения) може да се решават задачи от други области със същата лекота (или със същия труд), както и в електростатиката.

Уравненията на електростатиката, както знаем, са такива

$$\nabla\cdot(\varkappa\mathbf{E})=\frac{\rho_{\text{своб}}}{\varepsilon_0}, \tag{12.1}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=0. \tag{12.2}$$

(Ние пишем уравненията на електростатиката в присъствие на диелектрици, за да отчетем общия случай.) Същото физично съдържание може да бъде изразено в друга математична форма:

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi, \tag{12.3}$$

$$\nabla\cdot(\varkappa\nabla\varphi)=-\frac{\rho_{\text{своб}}}{\varepsilon_0}. \tag{12.4}$$

И същността се заключава в това, че съществуват много физични проблеми, за които математичните уравнения имат точно същия вид. Тук влиза потенциал (φ), чийто градиент, умножен по скаларната функция ($\varkappa$), има дивергенция, равна на друга скаларна фунцкия ($-\rho_0/\varepsilon_0$).

Всико, което ни е известно от електростатиката, може незабавно да се пренесе върху друг обект и обратно. (Принципът, разбира се, работи в двете посоки; ако са известни някои характеристики на друг обект, може да се използуват тези сведения в съответната задача от електростатиката.) Ще разгледаме редица примери от различни области, когато има уравнения от такъв вид.

12-1. Еднакви уравнения — еднакви решения

12-2. Поток топлина; точков източник близо до безкрайна плоска граница

12-3. Опъната мембрана

12-4. Дифузия на неутрони; сферично-симетричен източник в хомогенна среда

12-5. Безвихрово течение на течности; обтичане на кълбо

12-6. Осветление; равномерно осветление на равнина

12-7. „Фундаменталното единство“ на природата

12-2. Пото к топлина; точков източник близо до безкрайна плоска граница

По-рано ние обсъждахме (гл.3-4) потока топлина. Представете си късче от някакъв материал, незадължително хомогенен (на различни места може да има различно вещество), в което температурата се променя от точка в точка. Като следствие на тези температурни изменения възниква поток топлина, който може да се означи с вектора $\mathbf{h}$. Той представлява количеството топлинна енергия, което преминава в единица време през единица площ, перпендикулярна на потока. Дивергенцията от $\mathbf{h}$ е скоростта на изтичане на топлина на дадено място за единица обем

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \text{скорост на изтичане на топлина на единица обем.}$$

(Ние бихме могли, разбира се, да запишем уравнението в интегрален вид, както постъпихме със закона на Гаус в електродинамиката, тогава то би изразявало факта, че потокът през повърхнината е равен на скоростта на изменение на топлинната енергия вътре в материала. Ние повече няма да превеждаме уравненията от диференциална форма в интегрална и обратно, това се прави точно така както в електростатиката.)

Скоростта, с която топлината се поглъща или се ражда в различни места, разбира се, зависи от условията на задачата. Ще предположим например, че източникът на топлина се намира вътре в материала (възможно е да бъде радиоактивен източник или съпротивление, през което се пуска ток). Ще означим с s топлинната енергия, произвеждана от този източник в единица обем за 1s. Освен това могат да възникнат загуби (или обратно, допълнително раждане) на топлинната енергия за сметка на преминаване в други видове енергия в дадения обем. Ако u е вътрешната енергия в единица обем, du/dt също ще играе ролята на „източник" на топлинна енергия. И така имаме

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = s - \frac{du}{dt} \tag{12.5}$$

Ние тук не се каним да обсъждаме пълното уравнение, чиито величини се изменят с времето, защото провеждаме аналогия с електростатиката, където нищо не зависи от времето. Ние разглеждаме само задачи с *постоянен топлинен поток*, в които постоянните източници създават състояние на равновесие. В такива случаи

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = s. \tag{12.6}$$

Разбира се, трябва да имаме още едно уравнение, което да описва как потокът тече в различните места. В много вещества топлинният поток е приблизително пропорционален на скоростта на изменение на температурата с положението: колкото по-голяма е температурната разлика, толкова по-голям е топлинният поток. Ние знаем, че векторът на топлинния поток е пропорционален на температурния градиент. Константата на пропорционалност K, която зависи от свойствата на материала, се нарича *коефициент на топлопроводност*

$$\mathbf{h} = -K\nabla T. \tag{12.7}$$

Ако свойствата на материала се менят от точка в точка, $K = K(x, y, z)$ и е функция на положението. (Уравнението (12.7) не е толкова основно, колкото (12.5), което изразява запазване на топлинната енергия, защото зависи от характерните свойства на веществото.) Като заместим сега уравнение (12.7) в (12.6), получаваме:

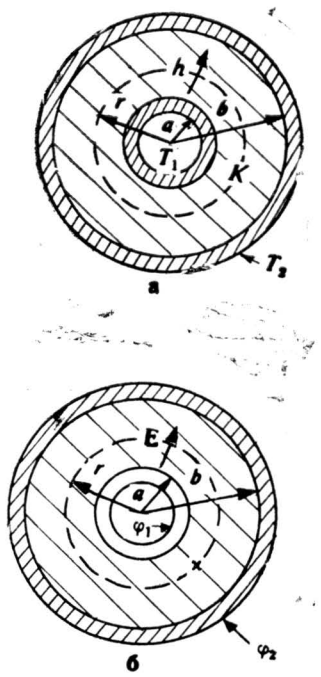
$$\nabla \cdot (K\nabla T) = -s, \tag{12.8}$$

което точно съвпада по форма с (12.4). *Задачите с постоянен топлинен поток и задачите на електростатиката са еднакви.* Векторът на топлинния поток $\mathbf{h}$ съответствува на $\mathbf{E}$, а темпера-

турата T съответствува на φ. Ние вече отбелязахме, че точков топлинен източник създава температурно поле, изменящо се като $1/r$, и топлинен поток, изменящ се като $1/r^2$. Това не е нищо друго освен просто пренасяне на твърденията на електростатиката, че точковият заряд дава потенциал, който се изменя като $1/r$ и електрично поле, което се изменя като $1/r^2$. Изобщо ние можем да решаваме статистическите топлинни задачи със същата лекота, както и задачите от електростатиката.

Да разгледаме прост пример. Нека има цилиндър с радиус a при температура T_1, която се поддържа за сметка на генериране на топлина в цилиндъра. (Например това може да бъде проводник, по който тече ток, или тръба с кондензация на пара вътре в цилиндъра.) Цилиндърът е покрит с концентрична обвивка от изолационен материал с топлопроводност K. Нека външният радиус на изолацията е b, а във външното пространство се поддържа температура T_2 (фиг. 12-1, *а*). Необходимо ни е да определим скоростта на загубите от топлина от проводника или паропровода (все едно на какво), което преминава по центъра на цилиндъра. Нека пълното количество топлина, загубено по дължината на тръбата L, е равно на G, него именно искаме да намерим.

Как трябва да се реши такава задача? Ние имаме диференциални уравнения, но тъй като те са същите, както в електростатиката, математичното им решение ни е известно. Аналогичната задача за електростатиката се отнася до проводник с радиус a при потенциал φ_1, отделен от друг проводник с радиус b при потенциал φ_2, чрез концентричен слой диелектрик между тях (фиг. 12-1, *б*). По-нататък, тъй като топлинният поток $\mathbf{h}$ съответствува на полето $\mathbf{E}$, нашата търсена величина G съответствува на поток на електричното поле от единица дължина (с други думи, на електричен заряд на единица дължина, делен на ε_0). Ние решавахме електростатичната задача с помощта на закона на Гаус. Нашата задача за топлинният поток ще решаваме по същия начин.



Фиг. 12-1. (а) Топлинният поток в случая на цилиндрична симетрия. (б) Съответната задача от електричество

От симетрията на задачата виждаме, че h зависи само от разстоянието до центъра. Поради това ще обкръжим тръбата с гаусова повърхнина — цилиндър с дължина L и радиус r. С помощта на закона на Гаус извеждаме, че топлинният поток $\mathbf{h}$, умножен по лицето на повърхнината $2\pi rL$, трябва да бъде равен на пълното количество топлина, раждано вътре, т. е. на това, което нарекохме G

$$2\pi r\,L\,h = G \qquad h = \frac{G}{2\pi rL}. \tag{12.9}$$

Топлинният поток е пропорционален на температурния градиент

$$\mathbf{h} = -K\nabla T$$

или в дадения случай големината на $\mathbf{h}$ е равна на

$$h = -K\frac{dT}{dr}.$$

Заедно с (12.9) това дава

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{G}{2\pi KLr}. \tag{12.10}$$

Като интегрираме от $r=a$ до $r=b$, получаваме

$$T_2 - T_1 = -\frac{G}{2\pi KL}\ln\frac{b}{a}. \tag{12.11}$$

Като решим спрямо G, намираме

$$G = \frac{2\pi KL\,(T_1 - T_2)}{\ln\,(b/a)}. \tag{12.12}$$

Този резултат точно съответствува на формулата за заряда на цилиндричен кондензатор:

$$Q = \frac{2\pi\varepsilon_0 L\,(\varphi_1 - \varphi_2)}{\ln\,(b/a)}.$$

Задачите са еднакви и имат еднакви решения. Като знаем електростатиката, ние знаем колко топлина губи изолираната тръба.

Ще разгледаме още един пример. Нека искаме да знаем топлинния поток в околността на точков източник, разположен недълбоко под повърхността на земята или пък близо до повърхността на голям металичен предмет. В качеството на локализиран източник на топлина може да бъде и атомна бомба, която се е взривила под земята и представлява мощен източник на топлина или пък малък източник на радиоактивност вътре в железен блок — има много възможности.

Ще разгледаме идеализираната задача за точков топлинен източник, чиято мощност е G, на разстояние a под повърхността на безкрайна хомогенна среда с коефициент на топлопроводност K. Топлопроводността на въздуха над повърхността на средата ще пренебрегнем. Ние искаме да определим разпределението на температурата върху повърхността на средата. Колко горещо ще бъде точно над източника и в различните места на повърхността?

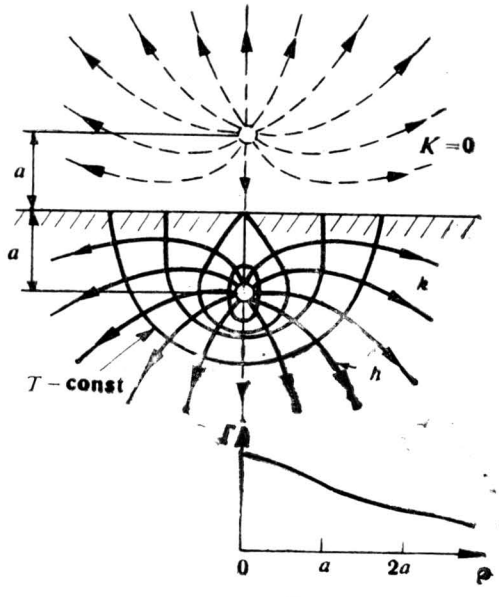
Как да се реши тази задача? Тя прилича на задачата по електростатика, в която има два материала с различна диелектрична проницаемост $\varkappa$ от двете страни на разделяща ги граница. Тук има нещо! Възможно е това да прилича на точков заряд близко до границата между диелектрик и проводник или нещо подобно. Да видим какво става близо до границата. Физичното условие е нормалната компонента на **h** на повърхността да бъде равна на *нула*, тъй като предположихме, че поток от блока няма. Ние трябва да зададем въпроса: в каква електростатична задача възниква условието нормалната компонента на електричното поле **E** (която представлява аналог на **h**) върху повърхността е равна на нула? Такава няма.

Това е един от случаите, към които трябва да се отнасяме с внимание. По физични причини могат да бъдат определени ограниченията на математичните условия, които възникват в някакъв случай. Поради това, ако анализираме диференциалното уравнение само за някои ограничени примери, напълно можем да пропуснем редица решения, който възникват при други физични условия. Например няма материал, който да притежава диелектрична проводимост, равна на нула, а топлопроводността на вакуума е нула. Поради това няма електростатичен аналог на идеалния топлоизолатор. Ние можем обаче да се възползуваме от същите *методи*. Ще се опитаме да си *представим* какво би станало, ако диелектричната проницаемост би *била* равна на нула. (Разбира се, в реални условия никога диелектричната проницаемост не е нула. Но може да се представи случай, когато веществото има много *голяма* диелектрична проницаемост, така че диелектричната проницаемост на въздуха извън средата да може да се пренебрегне.)

Как все пак да се намери електрично поле, което да няма компонента, перпендикулярна на повърхнината? С други думи, такова поле, което навсякъде е *допирателно* към повърхнината? Вие ще забележите, че тази задача е обратна на задачата за точков заряд близко до проводяща равнина. На нас ни трябва поле, *перпендикулярно* на повърхнината, защото проводникът навсякъде се намира при една и съща стойност на потенциала.

В задачата за електричното поле измислихме решение, като си представихме точков заряд зад проводящата равнина. Можем да се възползуваме отново от тази идея. Ще се опитаме да изберем такова „изображение“ на източника, което автоматично да прави чула нормалната компонента на полето близко до повърхнината. Решението е показано на фиг. 12-2. Електричният образ на източника *със същия знак* и същата големина, който се намира на разстояние a над повърхнината, дава поле, навсякъде хоризонтално на повърхнината. Нормалните компоненти от двата източника взаимно се унищожават.

И така, нашата задача за топлинния поток е решена. Температурата по цялото пространство е еднаква по непосредствената аналогия с потенциала от два еднакви точкови заряда. Темпера-



Фиг. 12-2. Топлинният поток и изотермите до точков източник на топлина, разположен на разстояние a под повърхността на тяло с добра топлопроводност

Извън тялото е показан недействителният образ на източника

турата T на разстояние r от дадения точков източник G в безкрайна среда е равна на

$$T = \frac{G}{4\pi Kr}. \tag{12.13}$$

(Това, разбира се, е напълно аналогично на $\varphi = q/4\pi\varepsilon_0 r$). Температурата на точковия източник и освен това на образа му е равна на

$$T = \frac{G}{4\pi Kr_1} + \frac{G}{4\pi Kr_2} \tag{12.14}$$

Тази формула ни дава температурата навсякъде вътре в блока. Няколко изотермични повърхнини са показани на фиг. 12-2. Показани са също и линиите на $\mathbf{h}$, които може да се получат от израза $\mathbf{h} = -K\nabla T$.

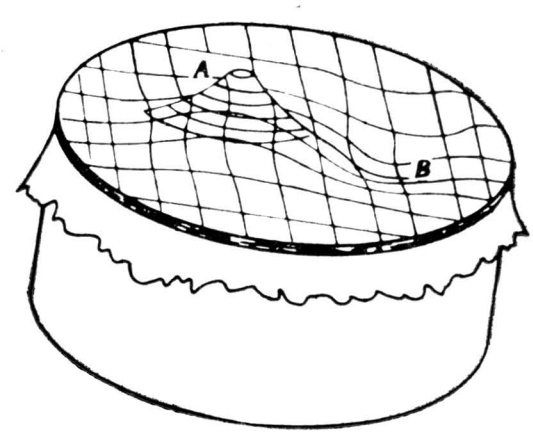
В самото начало ние се интересувахме от разпределението на температурата на повърхността. За точка на повърхнината, която се намира на разстояние ρ от оста, $r_1 = r_2 = \sqrt{\rho^2 + a^2}$, следователно

$$T_{\text{на повърхността}} = \frac{1}{4\pi K} \frac{2G}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}. \tag{12.15}$$

Тази функция е също показана на фиг. 12-2. Естествено температурата точно над източника е по-висока, отколкото далеч от него. На геофизиците често се налага да решават задачи от такъв вид. Сега ние виждаме, че това са същите задачи, които ние решавахме в електричеството.

12-3. Опъната мембрана

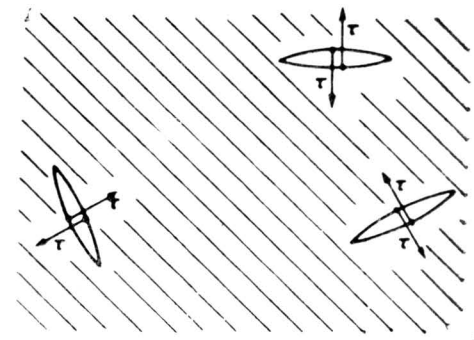
Да разгледаме сега съвсем друга област от физиката, в която ще достигнем отново до точно такива уравнения. Да вземем тънка каучукова ципа — мембрана, опъната на голяма хоризонтална рамка (подобно на кожата на барабана). Ще натиснем мембраната на едно място нагоре, а на друго — надолу (фиг. 12-3). Ще можем ли да опишем формата на повърхнината? Ще покажем как може да се реши тази задача, когато отклоненията на мембраната не са много големи.



Фиг. 12-3. Тънка гумена ципа, опъната на цилиндър (нещо подобно на барабан)

Каква форма ще има повърхнината, ако ципата се повдигне в точката A и се натисне в точката B?

В ципата действуват сили, защото тя е опъната. Ако се направи разрез на някое място на ципата, двата края на разреза ще се разделят (фиг. 12-4). Следователно в ципата има *повърхностно напрежение*, аналогично на едномерното напрежение на разтегната връв. Ще определим големината на повърхностното напрежение τ като сила *на единица дължина*, която точно би удържала заедно двата края на разреза (вж. фиг. 12-4).

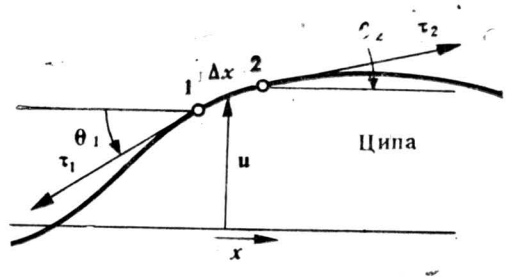


Фиг. 12-4. Повърхностното напрежение τ на опъната, гумена ципа е силата, отнесена към единица дължина и насочена перпендикулярно на линията на разреза

Сега ще предположим, че разглеждаме вертикално напречно сечение на мембраната. То ще има вид на някаква крива, подобна на показаната на фиг. 12-5. Нека u е вертикалното преместване на мембраната от нормалното ѝ положение, а x и y — координатите в хоризонталната равнина. (Показаното сечение е успоредно на оста x.)

Ще вземем малко парче от повърхността с дължина Δx и ширина Δy. На парчето действуват сили вследствие на повърхностното напрежение по посока на всеки край. Силата на страната 1 (вж. фиг. 12-5) ще бъде равна на $\tau_1 \Delta y$ и насочена по допирателната към повърхнината, т. е. под ъгъл θ_1 към хоризонталната линия. По страната 2 силата ще бъде равна на $\tau_2 \Delta y$ и насочена към повърхнината под ъгъл θ_2. (Подобни ще бъдат и силите на другите страни на парчето, но засега ще забравим за тях.) Резултантната сила от страните 1 и 2, която действува на парчето *нагоре*, е равна на

$$\Delta F = \tau_2 \Delta y \sin\theta_2 - \tau_1 \Delta y \sin\theta_1.$$



Фиг. 12-5. Напречното сечение на огънатата ципа

Ще се ограничим с разглеждането на малки деформации на мембраната, т. е. *малки издатини и вдлъбнатини*: тогава ще можем

да заменим $\sin\theta$ с $\operatorname{tg}\theta_1$ и да запишем като $\partial u/\partial x$. Силата при тези условия се дава от израза

$$\Delta F = \left[\tau_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 - \tau_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1\right] \Delta y .$$

Величината в скобите със същия успех може да бъде записана (за малки Δx) като

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau \frac{\partial u}{\partial x}\right) \Delta x ;$$

тогава

$$\Delta F = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tau \frac{\partial u}{\partial x}\right) \Delta x \, \Delta y .$$

Силите от другите две страни дават също своя принос в ΔF; пълната сила очевидно е равна на

$$\Delta F = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\tau \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \Delta x \, \Delta y . \qquad (12.16)$$

Изкривяванията на диафрагмата са предизвикани от външни сили. Нека f означава насочената *нагоре* сила на *единица площ* от ципата (своего рода „налягане“), която възниква *от външните сили*. Ако мембраната се намира в равновесие (*статичен* случай), тази сила трябва да се уравновесява от току-що изчислената вътрешна сила (уравнение (12.16)). С други думи,

$$f = -\frac{\Delta F}{\Delta x \, \Delta y} .$$

Уравнението (12.16) тогава може да бъде записано във вида

$$f = -\nabla \cdot (\tau \nabla u), \qquad (12.17)$$

където под знака ∇ сега ние разбираме двумерния оператор градиент $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$. Получихме диференциално уравнение, свързващо $u(x, y)$ с приложените сили $f(x, y)$ и повърхностното напрежение на ципата $\tau(x, y)$, което, изобщо казано, може да се мени от точка в точка. (Деформациите на тримерно еластично тяло също се подчиняват на такива уравнения, но ние ще се ограничим с двумерния случай.) Ще ни интересува само случая, когато напрежението τ е постоянно по цялата ципа. Тогава вместо (12.17) можем да напишем

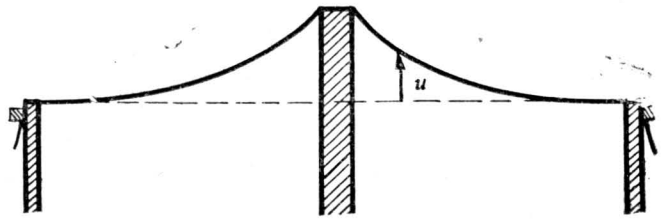
$$\nabla^2 u = -\frac{f}{\tau} . \qquad (12.18)$$

Отново получихме същото уравнение както в електростатиката! Но този път то се отнася до две измерения. Преместването u съответствува на φ, а f/τ съответствува на ρ/ε_0. Поради това онзи труд, който извършихме за безкрайни заредени равнини или за успоредни проводници с голяма дължина, или за заредени цилиндри, се прилага и за опънатата мембрана.

Да предположим, че ние опъваме мембраната в някои точки на определена *височина*, т. е. фиксираме величината u в редица точки. В електричния случай това е аналогично на задаването на определен *потенциал* в съответните места. Например можем да построим положителен „потенциал“, ако подпрем мембраната с предмет, който има същото сечение, каквото има и съответният цилиндричен проводник. Ако например ние подпрем мембраната с кръгла пръчка, повърхнината ще приеме формата, показана на фиг. 12-6. Височината u има същия вид, какъвто има и електричният потенциал φ на заредена цилиндрична пръчка. Тя спада както $\ln(1/r)$. (*Наклонът* на повърхнината, която съответствува на електричното поле $\mathbf{E}$, спада както $1/r$).

За решаването на сложни *електрични* задачи по експериментален път често се е използувала опънатата каучукова ципа. Аналогията се използува в обратна посока! За издигането на мембраната на височи-

на, която съответствува на потенциалите на целия набор от електроди, се поставят различни пръчки и ивици. След това измерването на височината дава електричния потенциал в електростатичната задача. Аналогията се провежда даже още по-нататък. Ако върху мембраната се поставят малки топчета, тяхното движение е приблизително подобно на движението на електроните в съответното електрично поле. По такъв начин нагледно може да се проследи дви-



Фиг. 12-6. Напречно сечение на опънатата гумена ципа, подпряна с кръгла пръчка

Функцията $u(x, y)$ е същата като потенциала $\varphi(x, y)$ от много дълга заредена пръчка

жението на „електроните" по техните траектории. Този метод бе използуван за проектирането на сложната система на много фотоумножители (такива например, каквито се използуват в сцинтилационния брояч или за управление с предни фарове в леките коли „Кадилак"). Методът се използува и до днес, но точността му не е много голяма. За по-точни пресмятания е по-добре да се намира полето чрез численно пресмятане с помощта на големите електронно-изчислителни машини.

12-4. Дифузия на неутрони; сферично-симетричен източник в хомогенна среда

Ще приведем още един пример, който дава уравнение от същия вид, но този път то се отнася до дифузията. В гл. 43 (т. I) ние разгледахме дифузията на йони в хомогенен газ и дифузията на един газ в друг. Сега ще вземем друг пример — дифузия на неутрони в материал от типа на графита. Ние избрахме графита (разновидност на чистия въглерод), защото въглеродът не поглъща бавни неутрони. Неутроните пътешествуват в него свободно. Те преминават средно няколко сантиметра по права, преди да се разсеят от ядро и да се отклонят. Така че, ако притежаваме голямо парче от графит с дебелина няколко метра, неутроните, които се намират отначало в едно място, ще преминават в други. Ще опишем тяхното усреднено поведение, т. е. техния *среден поток*.

Нека $N(x, y, z)\Delta V$ е броят неутрони в елемен от обема ΔV в точката (x, y). Движението на неутроните довежда до това, че едни напускат ΔV, а други попадат в него. Ако в една област неутроните се окажат повече, отколкото в съседната, оттук те ще преминават във втората област повече, отколкото обратно; в резултата на това възниква поток. Като повторим доказателствата, приведени в гл. 43 (т. I), може да се опише потокът с вектор на потока $\mathbf{J}$. Неговата компонента J_x е резултатният брой неутрони, което преминава през единица площ, перпендикулярна на оста x, в единица време. Тогава ще получим

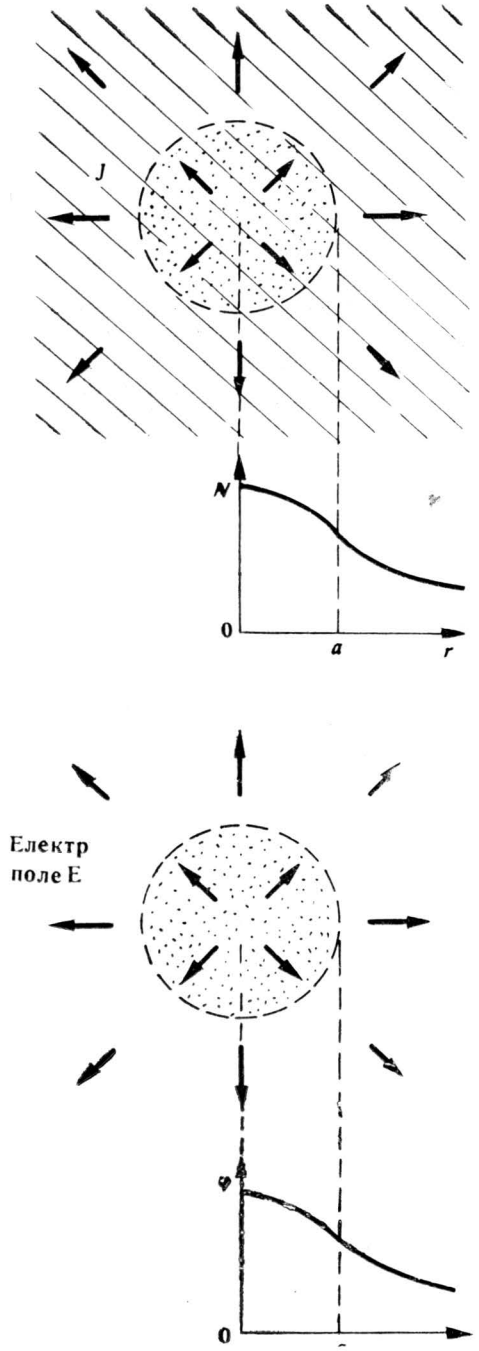
$$J_x = -D\frac{\partial N}{\partial x}, \tag{12.19}$$

където коефициентът на дифузия D се дава в термините на средната скорост v и средна дължина на свободен пробег между ударите l

$$D = \frac{1}{3} lv.$$

Векторното уравнение за $\mathbf{J}$ има вида

$$\mathbf{J} = -D\nabla N. \tag{12.20}$$



Фиг. 12-7. (*а*) Неутроните се раждат хомогенно вътре в сфера с радиус a в голям графитов блок и дифундират навън. Плътността на неутроните N е получена като функция на r, разстоянието от центъра на източника.

(*б*) Отдясно е показана електростатичната аналогия: хомогенно заредена сфера, като при това на N съответствува φ, а на **J** съответствува **E**

Скоростта, с която неутроните преминават през някакъв елемент на повърхнината da, е равна на $\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\ da$ (където **n** както обикновено е единичният вектор на нормалната). Резултантният поток от елементарния обем тогава е равен (като се ползуваме от обикновено гаусово доказателство) на $\nabla\cdot\mathbf{J}\ dV$. Този поток би довел до намаляване на броя неутрони на ΔV, ако не се генерират неутрони вътре в обема ΔV (с помощта на някаква ядрена реакция). Ако в обема присъствуват източници, които произвеждат S неутрона за единица време в единица обем, резултантният поток от ΔV ще бъде равен на $[S-(\partial N/\partial t)]\ \Delta V$. Тогава получаваме

$$\nabla\cdot\mathbf{J}=S-\frac{\partial N}{\partial t}. \tag{12.21}$$

Като комбинираме (12.21) и (12.20), получаваме *уравнението на дифузия на неутрони*

$$\nabla\cdot(-D\ \nabla N)=S-\frac{\partial N}{\partial t}. \tag{12.22}$$

В статичния случай, когато $\partial N/\partial t=0$, отново имаме уравнението (12.4)! Ние можем да се възползуваме от нашите знания в електростатиката за решаване на задачи по дифузия на неутрони. Нека пък решим някоя задача. (Може би вие недоумявате: *защо* да се решава нова задача, ако вече сме решили всички задачи в електростатиката? Този път можем да решаваме по-бързо именно затова, защото *наистина* електростатичните задачи *са вече решени*!)

Нека има блок от материал, в който неутроните (например за сметка на делението на урана) се раждат равномерно в сферична област с радиус a (фиг. 12-7). Ние бихме искали да знаем на какво е равна плътността на неутроните навсякъде? До колко е хомогенна плътността на неутроните в областта, където те се раждат? На какво е равно отношението на неутронната плътност в центъра към неутронната плътност на повърхността на областта на раждане? Лесно е да се намерят отговорите. Плътността на неутроните в източника S_0 стои вместо плътността на зарядите ρ, поради което нашата задача е същата, както задачата за хомогенно заредена сфера. Да се намери N е все едно да се намери потенциалът φ. Ние вече намерихме полетата вътре и вън от хомогенно заредена сфера; за получаване на потенциала можем да ги интегрираме. Извън сферата потенциалът е равен на $Q/4\pi\varepsilon_0 r$, където пълният заряд Q се дава от отношението $4\pi a^3\rho/3$. Следователно

$$\varphi_{\text{външно}}=\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r}. \tag{12.23}$$

За вътрешните точки принос в полето дават само зарядите $Q(r)$, които се намират вътре в сфера с радиус r: $Q(r)=4\pi r^3\rho/3$, следователно

$$E=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}. \tag{12.24}$$

Полето расте линейно с r. Като интегрираме E, получаваме φ

$$\varphi_{\text{вътре}}=-\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}+\text{константа}.$$

На разстояние, равно на радиуса a, $\varphi_{\text{външно}}$ трябва да съвпада с $\varphi_{\text{вътр.}}$ и поради това константата трябва да бъде равна на $\rho a^2/2\varepsilon_0$. (Ние предполагаме, че потенциалът φ е равен на нула на големи разстояния от източника, а това за неутроните ще отговаря на анулиране на N.) Следователно

$$\varphi_{\text{вътр}}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3a^2}{2}-\frac{r^2}{2}\right). \tag{12.25}$$

Сега ние веднага ще намерим плътността на неутроните в нашата дифузионна задача

$$N_{\text{външн.}} = \frac{Sa^3}{3Dr} \tag{12.26}$$

$$N_{\text{вътр.}} = \frac{S}{3D}\left(\frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right). \tag{12.27}$$

На фиг. 12-7 е представена зависимостта на N от r.

На какво все пак е равно отношението на плътността в центъра към плътността на края? В центъра ($r=0$) то е пропорционално на $3a^2/2$, а на края ($r=a$) е пропорционално на $2a^2/2$; поради това отношението на плътностите е равно на $3/2$. Хомогенният източник не дава хомогенна плътност на неутрони. Както виждате, нашите познания от електростатиката ни дават добра основа за изучаването на физиката на ядрените реактори.

Дифузията играе огромна роля в много физични явления. Движението на йони през течност или на електрони през полупроводник се подчинява все на същото уравнение. Ние отново и отново достигаме до едни и същи уравнения.

12-5. Безвихрово движение на течност; обтичане на кълбо

Сега ще разгледаме пример, който по същество не е толкова добър, защото уравненията, които ще използуваме, всъщност не описват новия обект напълно, а отговарят само на някои идеализирани условия. Това е задачата за *течене на водата*. Когато разглеждахме случая на опъната мембрана, нашите уравнения представляваха приближение, вярно само за *малки отклонения*. При разглеждането на теченето на водата ние използуваме друг вид приближение; трябва да приемем такива ограничения, които, изобщо казано, са неприложими към обикновената вода. Ние ще разгледаме само случая на постоянно течение на *несвиваема, невискозна и лишена от вихри течност*. След това ще опишем течението, като му зададем скоростта $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ като функция на положението $\mathbf{r}$. Ако движението е постоянно (единственият случай, за който има електростатична аналогия), $\mathbf{v}$ не зависи от времето. Ако ρ е плътността на течността, $\rho\mathbf{v}$ е масата на течността, която преминава в единица време през единица площ. От закона за запазване на веществото дивергенцията на $\rho\mathbf{v}$, изобщо казано, е равна на изменението на масата на веществото в единица обем с времето. Ние ще предположим, че процесите на непрекъснато раждане или унищожаване на веществото отсъствуват. Тогава запазването на веществото изисква да бъде изпълнено равенството $\nabla\cdot\rho\mathbf{v}=0$. (Изобщо казано, в дясната страна на това равенство би трябвало да стои $-\partial\rho/\partial t$, но тъй като нашата течност е несвиваема, ρ не може да се мени.) Тъй като ρ навсякъде е еднаква, тя може да се изнесе пред знака на дивергенцията и нашето уравнение ще се запише просто

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0.$$

Чудесно! Отново се получи електростатика (без заряди); уравнението съвсем прилича на $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$. Но не съвсем! В електростатиката *не просто* $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$. Има *две уравнения*. Едното уравнение още не ни дава всичко; необходимо е допълнително уравнение. За да се получи съвпадение с електростатиката, трябва и rot от $\mathbf{v}$ да бъде равен на нула. Но за истинските течности това изобщо не е така. В повечето от тях възникват вихри. Следователно ние се ограничаваме със случая, когато отсъствува циркулация на течността. Такова течение често се нарича *безвихрово*. И все пак, като приемем нашите предположения, можем да си *представим*

течение на течност, аналогично на електростатиката. И така, ние вземаме

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{12.28}$$

и

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0. \tag{12.29}$$

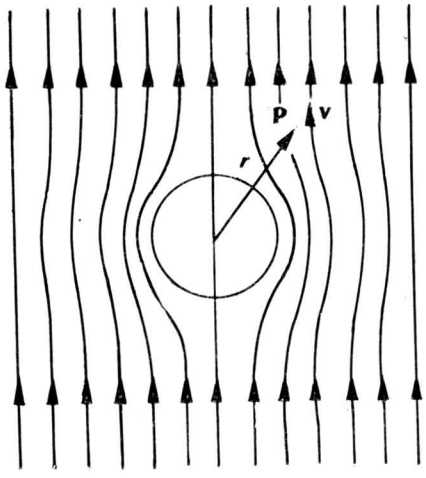
Ние искаме да подчертаем, че условията, при които течението на течността се подчинява на тези уравнения, не се срещат често, но все пак се срещат. Това трябва да бъдат случаите, когато повърхностното напрежение, свиваемостта и вътрешното триене могат да се пренебрегнат и когато течението може да се счита безвихрово. Тези условия се изпълняват за обикновената вода толкова рядко, че по повод на тези, които анализират уравненията (12.28) и (12.29), математикът Джон фон Нейман казва, че те изучават „сухата вода"! (Ние ще се върнем към задачата за течение на течност по-подробно в гл. 40 и 41.)

Тъй като $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, скоростта на „сухата вода" може да се напише като градиент на някакъв потенциал

$$\mathbf{v} = -\nabla\ \psi. \tag{12.30}$$

Какъв е физическият смисъл на ψ? Особено полезен смисъл няма. Скоростта може да се запише във вид на градиент на потенциала, защото течението е безвихрово. По аналогия с електростатиката ψ се нарича *потенциал на скоростите*, но той не е свързан с потенциалната енергия, така както това се получава за φ. Тъй като дивергенцията на $\mathbf{v}$ е равна на нула,

$$\nabla \cdot (\nabla\ \psi) = \nabla^2 \psi = 0. \tag{12.31}$$



Фиг. 12-8. Полето на скоростите на безвихрово обтичане на сфера от течност

Потенциалът на скоростите ψ се подчинява на същото диференциално уравнение, на което се подчинява електростатичният потенциал във вакуум ($\rho = 0$).

Нека изберем някаква задача за безвихрово течение и да видим ще можем ли да я решим с изучените методи. Ще разгледаме задачата за кълбо, падащо в течност. Ако то се движи твърде бавно, силите на вътрешно триене, които ние пренебрегвахме, ще бъдат съществени. Ако то се движи твърде бързо, след него ще се движат малки вихри (турболентност) и ще възникне циркулация на водата. Но ако кълбото се движи нито твърде бързо, нито твърде бавно, течението повече или по-малко ще отговаря на нашите предположения и ние ще можем да опишем движението на водата с нашите прости уравнения.

Удобно е процесът да се описва в координатната система, *свързана с кълбото*. В тази координатна система ние задаваме въпроса: как тече водата около неподвижно кълбо, ако течението на големи разстояния от него е хомогенно? С други думи, ако далеч от кълбото течението навсякъде е еднакво? Течението близко до кълбото ще има вид, подобен на показания с линиите на потока на фиг. 12-8. Тези линии, винаги успоредни на $\mathbf{v}$, съответствуват на линиите на интензитета на електричното поле. Ние искаме да получим количествено описание на полето на скоростите, т. е. израз за скоростта в произволна точка P.

Скоростта може да се намери като градиент от ψ и поради това отначало ще определим потенциала. Ние искаме да намерим потенциал, който би удовлетворявал навсякъде (12.31) при следните условия: 1) течението отсъствува в сферичната област зад повърхността на кълбото; 2) течението е постоянно на големи разстояния от кълбото. За да се изпълни първото ограничение, компонентата на $\mathbf{v}$, перпендикулярна на повърхнината на кълбото, трябва да се анулира. Това значи, че $\partial\psi/\partial r = 0$ при $r = a$. За изпълнение на второто ограничение трябва $\partial\psi/\partial z = \mathbf{v}_0$ навсякъде, където $r \gg a$. Строго казано, няма нито една електростатична задача, която точно да съответствува на нашата задача. Тя фактически съответствува на сфера с *нулева* диелектрична проницаемост, поставена в хомогенно електрично поле. Ако бихме имали решение-

то на задачата за сфера с диелектрична проницаемост $\varkappa$, като положим $\varkappa=0$, веднага бихме решили нашата задача.

Ние по-рано не разгледахме с всичките подробности такава електростатична задача; нека това направим сега. (Ние бихме могли да решим направо задачата за течност с $\mathbf{v}$ и ψ, но ще се ползуваме от $\mathbf{E}$ и φ, защото привикнахме с тях.)

Задачата се поставя така: да се намери такова решение на уравнението $\nabla^2\varphi=0$, че $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$ да е равно на константа, да речем $\mathbf{E}_0$, за големи r и освен това радиалната компонента на $\mathbf{E}$ да бъде равна на нула при $r=a$. С други думи,

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a}=0. \tag{12.32}$$

Нашата задача включва нов тип гранични условия — когато $\partial\varphi/\partial r$ е постоянно, а не когато потенциалът φ е постоянен на повърхнината. Това е малко по-друго условие. Да се получи отговор направо не е лесно. Преди всичко без кълбото φ би бил равен на $-E_0z$. Тогава $\mathbf{E}$ би бил насочен по z и би имал навсякъде постоянната големина E_0. Ние вече изследвахме случай на диелектрично кълбо, поляризацията на който вътре е постоянна и намерихме, че полето вътре в поляризирано кълбо е хомогенно, а извън него то съвпада с полето на точков дипол, разположен в центъра на кълбото. Нека напишем, че търсеното решение е суперпозиция на хомогенното поле плюс полето на дипола. Потенциалът на дипола (вж. гл. 6) е $pz/4\pi\varepsilon_0 r^3$. И така, ние предполагаме, че

$$\varphi=-E_0z+\frac{pz}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot \tag{12.33}$$

Тъй като полето на дипола спада както $1/r^3$, на големи разстояния ние имаме именно полето E_0. Нашето предположение автоматично удовлетворява формулираното по-горе второ условие (стр. 162). Но какво да вземем в качеството на сила на дипола p? За отговора трябва да използуваме друго условие [уравнението (12.32)]. Ние трябва да диференцираме φ по r, но, разбира се, това трябва да се направи при постоянен ъгъл θ и поради това е по-удобно да се изрази отначало φ чрез r и θ, а не чрез z и r. Тъй като $z=r\cos\theta$,

$$\varphi=-E_0r\cos\theta+\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot \tag{12.34}$$

Радиалната компонента на $\mathbf{E}$ е

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=+E_0\cos\theta+\frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot \tag{12.35}$$

Тя трябва да бъде равна на нула при $r=a$ за всички θ. Това ще бъде изпълнено, ако

$$p=-2\pi\varepsilon_0 a^3E_0. \tag{12.36}$$

Добре забележете, че ако двата члена на уравнението (12.35) биха зависели от θ по различен начин, ние не бихме могли да изразим p така, че (12.35) да се анулира при $r=a$ за всички ъгли. Фактът, че това се получи, означава, че ние сме били мъдри, когато написахме уравнението (12.33). Разбира се, когато се досещахме, поглеждахме напред; ние знаехме, че ще ни потрябва още един член, който, първо, би удовлетворявал $\nabla^2\varphi=0$ (всяко реално поле го удовлетворява), второ, би зависел от $\cos\theta$ и трето, би спадал до нула при големи r. Полето на дипола е единственото, което удовлетворява всичките три условия.

С помощта на (12.36) нашият потенциал добива вида:

$$\varphi=-E_0\cos\theta\left(r+\frac{a^3}{2r^2}\right)\cdot \tag{12.37}$$

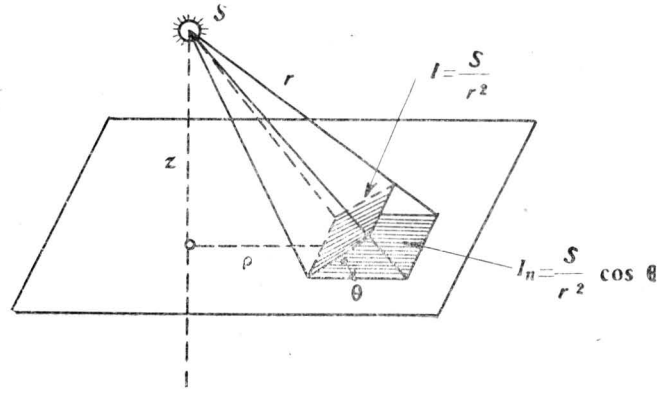
Решението на задачата за течението на течност просто може да бъде записано така:

$$\psi=-v_0\cos\theta\left(r+\frac{a^3}{2r^2}\right)\cdot \tag{12.38}$$

Оттук направо се намира $\mathbf{v}$. С този въпрос повече няма да се занимаваме.

12-6. Осветление; равномерно осветление на равнина

В този параграф ние ще се обърнем към съвсем друг физичен проблем — нали искаме да покажем голямото разнообразие от възможности. Този път ще направим нещо, което ще ни доведе до *интеграл* от същия вид, какъвто сме намерили в електростатиката. (Ако ни предстои да решим математична задача, която довежда до някакъв интеграл, а този интеграл вече ни е известен от друга задача, някои от неговите свойства са ни известни.) Ще вземем пример от техниката на осветлението. Нека на разстояния a над равнината има някакъв източник на светлина. Как ще се осветлява равнината? На какво е равна енергията на излъчване, която пада върху единица площ на равнината в единица време (фиг. 12-9)? Ние предполагаме, че източникът е сферично-симетричен, така че светлината се излъчва еднакво във всички посоки. Тогава количеството излъчена енергия, която преминава през единица площ, *перпендикулярна* на потока светлина, се изменя обратно пропорционално на квадрата на разстоянието.



Фиг. 12-9. Осветеността I_n на повърхността е равна на енергията на излъчване, която пада за единица време върху единица площ на повърхността

Очевидно е, че интензитетът на светлината в посоката на нормалата се дава от същата формула с каквато се определя електричното поле на точков източник. Ако светлинните лъчи падат на повърхнината под ъгъл θ спрямо нормалата, I, енергията, която пада на единица площ от повърхността, се намалява $\cos\theta$ пъти, защото същата енергия пада на площ $1/\cos\theta$ по-голяма. Ако означим с S силата на нашия източник, тогава I_n, осветеността на повърхнината, е равна на

$$I_n = \frac{S}{r^2}\,\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}, \tag{12.39}$$

където $\mathbf{e}_r$ е единичният вектор в посока от източника, а $\mathbf{n}$ — единичната нормала към повърхнината. Осветеността съответствува на нормалната компонента на електричното поле от точков източник със заряд $4\pi\varepsilon_0 S$. Като отчитаме това, ние виждаме, че за произволно разпределение на източници на светлина може да се намери отговор, като решим съответната задача на електростатиката. Ние изчисляваме вертикалната компонента на електричното поле на равнината от разпределението на зарядите точно по такъв начин както за източници на светлина.[1]

Ще разгледаме такъв пример. За някакъв експеримент необ-

[1] Тъй като ние говорим за *некохерентни* източници, чиито *интензитети* винаги се събират линейно, електричните заряди в аналогичната задача винаги ще имат еднакви знаци. Следва да се отчете, че нашата аналогия се прилага само за светлинна енергия, която пада на повърхността на непрозрачна равнина и поради това ние трябва да включим в интеграла само източниците, които излъчват над повърхността (разбира се, не тези, които са разположени под повърхнината).

ходимо ни е да направим така, че масата да се осветлява равномерно. Ние разполагаме с дългите тръби на флуоресцентни лампи, които излъчват равномерно по цялата си дължина. Нашата маса може да се освети, като се поставят флуоресцентните лампи в правилни редове на тавана, който се намира на височина z над масата. На какво трябва да бъде равно максималното разстояние b от тръба до тръба, ако ние искаме осветлението на повърхността да бъде равномерно с точност до една хилядна? *Отговор:* 1) намерете електричното поле на набор от равномерно заредени проводници с разстояние между тях, равно на b; 2) пресметнете вертикалната компонента на електричното поле; 3) определете на колко трябва да бъде равно b, така че неравномерността да не бъде по-голяма от една хилядна.

В гл. 7 ние видяхме, че електричното поле от редица заредени проводници може да бъде представено във вид на сума от членове, всеки от които дава синусно изменение на полето с период b/n, където n е цяло число. Амплитудата на кой и да е от тези членове се дава от уравнението (7. 44)

$$F_n = A_n e^{-2\pi nz/b}.$$

На нас ни е необходимо да вземем случая $n=1$, тъй като искаме да получим полето в точки, не много близки до проводниците. За да получим пълното решение, трябва да определим коефициентите A_n, които засега не сме намерили (макар те да се намират чрез пряко пресмятане). Тъй като ни е необходимо да знаем само A_1, може да се оцени големината му, като я считаме равна на средната големина на полето. Експоненциалният множител тогава веднага ни дава относителната амплитуда на измененията. Ако искаме този множител да бъде равен на 10^{-3}, b се оказва равно на $0{,}91\ z$.

Ако разстоянието между лампите се направи равно на 3/4 от разстоянието до тавана, тогава експоненциалният множител ще бъде равен на 1/4000 и ние имаме фактор на надеждност 4, така че ние можем да бъдем напълно уверени, че осветлението ще бъде постоянно с точност до една хилядна. (Точното пресмятане показва, че A_1 всъщност е два пъти по-голям от средното поле, така че точният отговор ще бъде $b=0{,}8\ z$.) Малко е неочаквано, че за толкова равномерно осветление допустимото разстояние между тръбите се оказа толкова голямо.

12-7. „Фундаменталното единство“ на природата

В тази глава ние искахме да покажем, че, като изучавате електростатиката, вие едновременно се учите да се ориентирате в много въпроси на физиката и че, помнейки това, може да се изучи почти цялата физика за няколко години.

Но на края естествено се налага въпросът: *защо уравненията за различните явления толкова си приличат?* Ние бихме могли да кажем: „В това се проявява фундаменталното единство на природата“. Но какво значи това? Какво би *могло* да означава такова изявление? Това би могло просто да означава, че уравненията за различните явления си приличат; но тогава, разбира се, ние не сме дали никакво обяснение. „Фундаменталното единство“ би могло да означава, че всичко е направено от един и същ материал и поради това се подчинява на едни и същи уравнения. Звучи като не лошо обяснение, но нека поразмислим. Електростатичният потенциал, дифузията на неутрони, потокът топлина — нима наистина имаме работа с един и същ материал? Можем ли всъщност да си представим, че електростатичният потенциал физически е идентичен на температурата или плътността на частиците? Навярно φ не е съвсем точно това, което е топлинната енергия на частиците. Преместването на мембраната явно не прилича на температурата. Откъде накъде тогава тук се проявява „фундаменталното единство“?

По-внимателен поглед към физиката на различните въпроси показва, че уравненията всъщност не са идентични. Уравнението, намерено от нас за дифузията на неутрони, е всичко на всичко само приближение, което се оказва добро, ако разстоянието, което ни интересува, е голямо в сравнение с дължината на свободния пробег. Ако ние се вгледаме по-внимателно, бихме видели как се движат отделните неутрони. Разбира се, движението на един неутрон и плавните изменения, които ние получаваме при решаване на диференциалното уравнение, са различни неща. Диференциалното уравнение е приближение, защото ние сме счели, че неутроните са разпределени равномерно в *пространството.*

Може би *в това* се състои и отговорът? Може би общото на всички явления *е пространството*, тези рамки, в които е поставена физиката? Докато всичко се изменя достатъчно плавно в пространството, важни фактори, които влизат в разглеждането, ще бъдат скоростите на изменението на величините в зависимост от положението в пространството. Ето защо ние винаги получаваме уравнение с градиент. Производните трябва да се появяват във вид на градиент или дивергенция; законите на физиката *не зависят от направлението* и поради това те се изразяват във вид на вектори. Уравненията на електростатиката са най-простите векторни уравнения, които включват само пространствените производни на величините, които въобще може да се запишат. Всеки друг *прост* проблем или опростяване на сложен проблем трябва да прилича на електростатиката. Общото за всички наши задачи е това, че те са свързани *с пространството* и това че ние *имитираме* истински сложните явления с прости диференциални уравнения.

Оттук възниква още един интересен въпрос. Не е ли вярно това твърдение и за уравненията на *електростатиката?* Може би и те са в сила само за изгладена имитация на всъщност значително по-сложен микросвят? И реалният ли свят се състои от малки X-они, които може да се различат само на *твърде* малки разстояния? А като провеждаме нашите измервания, ние винаги наблюдаваме всичко в такъв груб мащаб, че не можем да видим тези малки X-они и ето защо достигаме до диференциалните уравнения?

Нашата съвременна най-пълна теория на електродинамиката наистина изпитва трудности на много малки разстояния. Поради това принципно е възможно тези уравнения да представляват изгладени версии на нещо. Те се оказват правилни до разстояния от порядъка на 10^{-14} cm, но след това те започват да изглеждат неправилни. Възможно е да съществува засега все още неоткрит „механизъм“ и подробностите на вътрешно сложното устройство да са скрити в уравнения, които имат гладък вид, както това се получава в „гладката“ дифузия на неутроните. Но никой още не е съумял да формулира успешна теория, която би работила по такъв начин.

Колкото и да е странно това, оказва се (по причини, които ние още не сме разбрали), че комбинацията релативизъм и квантова механика, доколкото ги знаем, вероятно *забранява* измислянето на уравнения, фундаментално различни от (12.4) и в същото време свободни от противоречия. Забележете: не поради несъвпадение с експеримента, а от *вътрешни противоречия.* Такива, като да речем предсказанието, че сумата от вероятностите за всички възможни изходи да не е равна на единица или че енергиите се оказват комплексни числа или още някакви глупости. Никой още не е създал теория на електричеството, в която $\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0$ би се приемало като изгладено приближение към подълбок механизъм и която в крайна сметка не би довела до някакъв абсурд. Но трябва да се каже, че е правилно също и това, че предположението за верността на $\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0$ за всяко произволно малко разстояние също довежда до страшен абсурд (електричната енергия на електрона е безкрайна) — абсурд, от който никой не е успял да се избави.

13

Магнитостатика

13-1. Магнитно поле

13-2. Електричен ток; запазване на заряда

13-3. Магнитна сила, която действува на ток

13-4. Магнитно поле на постоянни токове; закон на Ампер

13-5. Магнитно поле на прав проводник и соленоид; атомни токове

13-6. Относителност на магнитните и електрични полета

13-7. Трансформация на токове и заряди

13-8. Суперпозиция; правило на дясната ръка

Да се повтори: гл. 15 (т. I) „Специална теория на относителността“

13-1. Магнитно поле

Силата, която действува върху електричен заряд, зависи не само от това, къде се намира той, но и от това, с каква скорост се движи. Всяка точка в пространството се характеризира с две векторни величини, които определят силата, която действува на произволен заряд. Първо, съществува *електрична сила*, която дава тази част от силата, която не зависи от движението на заряда. Ние я описваме с помощта на електричното поле **E**. Второ, има още една добавъчна компонента на силата, наричана *магнитна сила*, която зависи от скоростта на заряда. Тази магнитна сила има удивително свойство: във всяка дадена точка на пространството както *посоката*, така и *големината* на силата зависи от посоката на движение на частицата; във всеки момент силата винаги е перпендикулярна на вектора на скоростта; освен това във всяка точка силата винаги е перпендикулярна на *определено направление в пространството* (фиг. 13-1) и на края големината на силата е пропорционална на скоростта; перпендикулярно на това направление. Всички тези свойства може да се опишат, ако се въведе вектор на магнитното поле **B**, който определя избрана посока в пространството и едновременно служи за константа на пропорционалност между силата и скоростта и позволява магнитната сила да се запише във вида $q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Пълната електромагнитна сила, която действува върху заряда, тогава може да бъде записана така

$$\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}). \tag{13.1}$$

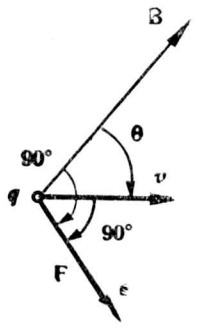
Тя се нарича *Лоренцова сила.*

Магнитната сила може лесно да се демонстрира, ако се поднесе магнит плътно до катодна тръба. Отклонението на електронния лъч показва, че магнитът възбужда сили, които действуват на електроните перпендикулярно на посоката на движението им (ние вече говорихме за това в т. I, гл. 12).

Единицата на магнитното поле **B** очевидно е 1 нютон-секунда, разделена на кулон-метър. Същата единица може да се напише като волт-секунда на квадратен метър. Наричат я още *вебер на квадратен метър.*[1]

13-2. Електричен ток; запазване на заряда

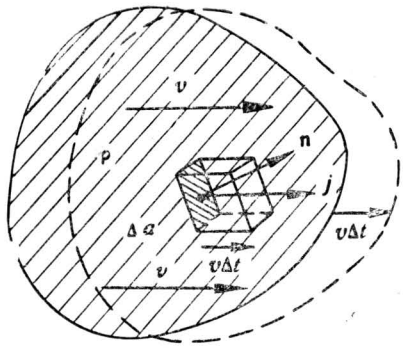
Сега да помислим по това защо магнитните сили действуват върху проводник, по който тече електричен ток. Затова ще определим какво се разбира под плътност на тока. Електричният ток се състои от движещи се електрони или други заряди, които образуват резултантно течение или поток. Ние можем да представим потока на зарядите като вектор, който определя количеството заряди, което преминава в единица време през единица площ, перпендикулярна на потока (точно както това правехме, когато определяхме топлинния поток). Ще наречем тази величина *плътност на тока* и ще означим вектора ѝ с **j**. Той е насочен по посоката на движение на зарядите. Ако се вземе малка площ Δa



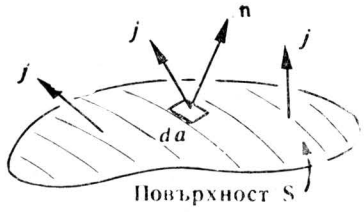
Фиг. 13-1. Компонента на силата на движещия се заряд, която зависи от скоростта, е насочена перпендикулярно на **v** и на вектора **B**.

Тя е пропорционална също и на компонентата на **v**, която е перпендикулярна на **B**, т. е. на $v\sin\theta$

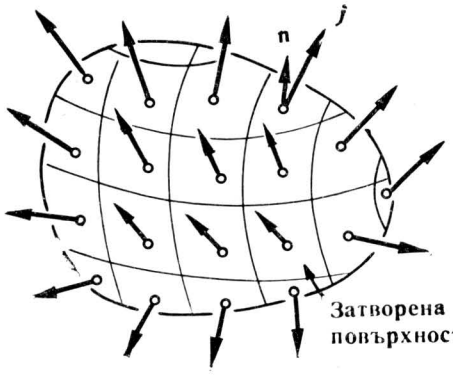
[1] Или по-кратко — тесла (Заб. ред. рус. изд.)



Фиг. 13-2. Ако разпределение на заряди с плътност ρ се движи със скорост $\mathbf{v}$, количеството заряд, което преминава за единица време през площадката Δa, е $\rho\mathbf{v}\,.\,\mathbf{n}\,\Delta a$



Фиг. 13-3. Токът I през повърхнината S е равен на $\int \mathbf{j}.\mathbf{n}da$



Фиг. 13-4. Интегралът от $\mathbf{j}\,.\,\mathbf{n}$ по затворена повърхнина е равен на скоростта на изменение на пълния заряд Q вътре

в дадено място на материала, количеството заряди, които текът през площадката в единица време, е равно на

$$\mathbf{j}\,.\,\mathbf{n}\Delta a, \tag{13.2}$$

където $\mathbf{n}$ е единичният нормален вектор към Δa.

Плътността на тока е свързана със средната скорост на течение на зарядите. Ще предположим, че има разпределение на заряди, които се движат със средна дрейфова скорост $\mathbf{v}$. Когато това разпределение преминава през елемент на повърхнината Δa, зарядът Δq, който преминава през Δa за време Δt, е равен на заряда, който се съдържа в паралелепипеда с основа Δa и височина $v\Delta t$ (фиг. 13-2). Обемът на паралелепипеда е произведение от проекцията на Δa, перпендикулярна на $\mathbf{v}$ с $v\Delta t$, а като го умножим по плътността на зарядите ρ, получаваме Δq. По такъв начин

$$\Delta q = \rho\,\mathbf{v}\,.\,\mathbf{n}\,\Delta a\,\Delta t.$$

Зарядът, който преминава в единица време, тогава е равен на $\rho\,\mathbf{v}\,.\,\mathbf{n}\,\Delta a$, откъдето получаваме

$$\mathbf{j} = \rho\,\mathbf{v}. \tag{13.3}$$

Ако разпределението на зарядите се състои от отделни заряди, да речем от електрони със заряд q, които се движат със средна скорост $\mathbf{v}$, плътността на тока е равна на

$$\mathbf{j} = Nq\mathbf{v}, \tag{13.4}$$

където N е броят на зарядите в единица обем.

Пълното количество заряд, което преминава в единица време през някаква повърхност S, се нарича *електричен ток* I. Той е равен на интеграла от нормалната компонента на потока по всички елементи на повърхнината (фиг. 13-3):

$$I = \int_S \mathbf{j}\,.\,\mathbf{n}da \tag{13.5}$$

Токът I от затворена повърхнина S представлява скоростта, с която зарядите напускат обема V, окръжен от повърхнината S. Един от основните закони на физиката гласи, че *електричният заряд е неунищожаем*; той никога не се губи и не се създава. Електричните заряди могат да се преместват от място на място, но никога не възникват от нищо. Ние казваме, че *зарядът се запазва*. Ако от затворена повърхнина възниква резултантен ток, количеството заряди вътре трябва съответно да се намалява (фиг. 13-4). Поради това можем да запишем закона за запазване на заряда в такъв вид:

$$\int_{\substack{\text{произволна}\\ \text{затворена}\\ \text{повърхнина}}} \mathbf{j}\,.\,\mathbf{n}\,da = -\frac{d}{dt}\,(Q_{\text{вътр.}}). \tag{13.6}$$

Зарядът вътре може да се запише като обемен интеграл от плътността на заряда

$$Q_{\text{вътр.}} = \int_{\substack{V\\ \text{вътре в } S}} \rho\,dV. \tag{13.7}$$

Като приложим (13.6) към малкия обем ΔV, може да се отчете, че интегралът отляво е $\nabla\,.\,\mathbf{j}\Delta V$. Зарядът вътре е равен на $\rho\Delta V$ и поради това запазването на заряда може още да се запише и така:

$$\nabla\,.\,\mathbf{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{13.8}$$

(отново теоремата на Гаус от математиката!).

13-3. Магнитна сила, която действува на ток

Сега ние сме достатъчно подготвени, за да определим силата, която действува върху намиращ се в магнитно поле проводник, по който тече ток. Токът се състои от заредени частици, които се движат по проводника със скорост $\mathbf{v}$. Всеки заряд чувствува напречна сила

$$\mathbf{F}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

(фиг. 13-5,а). Ако в единица обем има N такива заряди, техният брой в малък обем вътре в проводника ΔV е равен на $N\Delta V$. Пълната магнитна сила $\Delta\mathbf{F}$, която действува върху обема, е сума от силите, които действуват на отделните заряди

$$\Delta\mathbf{F}=(N\Delta V)(q\mathbf{v}\times\mathbf{B}).$$

Но $Nq\mathbf{v}$ е точно равно на $\mathbf{j}$, така че

$$\Delta\mathbf{F}=\mathbf{j}\times\mathbf{B}\Delta V \tag{13.9}$$

(фиг. 13-5, *б*). Силата, която действува на единица обем, е равна на $\mathbf{j}\times\mathbf{B}$.

Ако по проводник с напречно сечение A равномерно по сечението тече ток, може в качеството на елемент от обема да се вземе цилиндър с основа A и дължина ΔL. Тогава

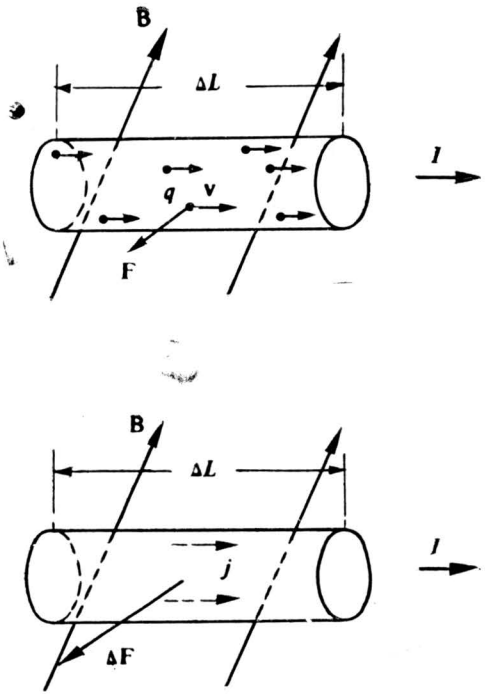
$$\Delta\mathbf{F}=\mathbf{j}\times\mathbf{B}A\Delta L. \tag{13.10}$$

Сега $\mathbf{j}A$ може да се нарича вектор на тока $\mathbf{I}$ в проводника. (Големината му е електричният ток в проводника, а посоката му съвпада с посоката на проводника.) Тогава

$$\Delta\mathbf{F}=\mathbf{I}\times\mathbf{B}\Delta L. \tag{13.11}$$

Силата, която действува на единица дължина от проводника, е $\mathbf{I}\times\mathbf{B}$.

Това уравнение съдържа важен резултат — магнитната сила, която действува на проводника и която възниква от движението на заряди в него. Тя зависи само от пълния ток, а не от големината на заряда, пренасян от всяка частица (и даже не зависи от знака му). Магнитната сила, която действува на проводник близо до магнита, лесно се намира по отклонението на проводника при включването на тока, както бе описано от нас в гл. 1 (вж. фиг. 1-6, стр. 17).



Фиг. 13-5. Магнитната сила на проводник с ток е равна на сумата от силите на отделните движещи се заряди

13-4. Магнитно поле на постоянен ток; закон на Ампер

Ние видяхме, че на проводник в магнитно поле, създадено например от магнит, действува сила. От закона, че действието е равно на противодействието, може да се очаква, че когато по проводника протича ток[1], възниква сила, която действува на източника на магнитното поле, т. е. на магнита. Такива сили действително съществуват; в това можем да се убедим по отклонението на стрелката на компаса близо до проводник с ток. Понататък ние знаем, че магнитите изпитват действие на сили от страна на други магнити, а оттук следва, че когато по проводника тече ток, той създава собствено магнитно поле. Значи движещите се заряди създават магнитно поле. Ще се опитаме да разберем законите, на които се подчиняват такива магнитни полета. Въпросът се поставя така: даден е ток, какво магнитно поле създава той? Отговорът на този въпрос е получен експериментално с три опита и е потвърден с блестящото теоретично доказателство на Ампер. Ние няма да се спираме на тази инте-

[1] По-късно ще видим, че такива предположения, изобщо казано, не са правилни за електромагнитните сили.

ресна история, а просто ще кажем, че голям брой експерименти нагледно показват валидността на уравненията на Максвел. Тях ще вземем за отправна точка. Като изпуснем в уравненията членовете с производни по времето, получаваме уравненията на *магнитостатиката*

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{13.12}$$

и

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}. \tag{13.13}$$

Тези уравнения са верни само при условие, че всички плътности на електричните заряди и всички токове са постоянни, така че електричните и магнитни полета не се изменят с времето — всички полета са „статични".

Тук може да се забележи, че да се вярва в съществуването на статично магнитно поле е доста опасно, защото въобще за получаването на магнитно поле са необходими токове, а токовете възникват само от движещи се заряди. Следователно „магнитостатиката" е само приближение. Тя е свързана с особения случай на динамиката, когато се движат *голям брой* заряди, които може приблизително да се опишат като *постоянен поток* заряди. Само в този случай може да се говори за плътност на тока $\mathbf{j}$, която не се изменя с времето. Тази област по-точно би трябвало да се нарече изучаване на постоянни токове. Като предположим, че всички полета са постоянни, ние пренебрегваме членовете с $\partial \mathbf{E}/\partial t$ и $\partial \mathbf{B}/\partial t$ в пълните уравнения на Максвел (уравненията (2.41)) и получаваме двете написани по-горе уравнения (13.12) и (13.13). Забележете също, че тъй като дивергенцията от ротация на всеки вектор винаги е нула, уравнението (13.13) изисква да бъде изпълнено $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. Като се вземе пред вид уравнение (13.8), това е вярно само ако $\partial \varphi/\partial t = 0$. Но това може да бъде изпълнено, ако $\mathbf{E}$ не се изменя с времето и следователно нашите предположения са вътрешно съгласувани.

Условието $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ означава, че ние можем да имаме само заряди, които текът по затворени пътища. Те могат например да текът по проводници, които образуват затворени кръгове, които се наричат *вериги*. Веригите, разбира се, могат да съдържат генератори или батерии, които поддържат тока на зарядите. Но в тях не трябва да има кондензатори, които се зареждат или губят заряда си. (Ние, разбира се, ще разширим теорията, като включим променливите полета, но отначало искаме да се заемем с по-простия случай на постоянни токове.)

Да се обърнем сега към уравненията (13.12) и (13.13) и видим какво означават те. Първото твърди, че дивергенцията на $\mathbf{B}$ е равна на нула. Като го сравним с аналогичното уравнение на електростатиката $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$, може да се заключи, че не съществува магнитен аналог на електричния заряд. Няма *магнитни заряди*, от които биха могли да започват силовите линии на $\mathbf{B}$. Ако се говори за „линии" на векторното поле $\mathbf{B}$, те никъде не започват и никъде не свършват. Но тогава откъде се вземат те? Магнитните полета „се появяват" в *присъствие* на токове; *ротацията*, взета от тях, е пропорционална на плътността на тока. Когато има токове, има и линии на магнитното поле, които образуват затворени линии около токовете. Тъй като линиите на $\mathbf{B}$ нямат нито начало, нито край, те често се връщат в изходна точка, като образуват затворени линии във формата на пръстен. Но могат да възникнат и по-сложни случаи, когато линиите не представляват прости пръстенообразни линии. Обаче както и да вървят, те никога не започват от точки. Никой никога не намирал никакви магнитни заряди и поради това $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Това именно твърдение е вярно не само за магнитостатиката, но е вярно *винаги* — даже и за динамичните полета.

Връзката между полето $\mathbf{B}$ и токовете се дава от уравнението (13.13). Положението тук е съвсем друго, коренно различно от електростатиката, където имахме $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Това уравнение оз-

начаваше, че линейният интеграл от $\mathbf{E}$ по произволен затворен път е равен на нула:

$$\oint_{\text{по затворен контур}} \mathbf{E} \,.\, d\mathbf{s} = 0.$$

Ние получихме този резултат с помощта на теоремата на Стокс съгласно с която интегралът по произволен затворен път от *произволно* векторно поле е равен на повърхнинния интеграл от нормалната компонента на ротацията на този вектор (интегралът се взема по произволна повърхнина, която обхваща дадения контур). Като прилагаме същата теорема към вектора на магнитното поле и като използуваме означенията, показани на фиг. 13-6, получаваме

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \,.\, d\mathbf{s} = \int_{S} (\nabla \times \mathbf{B}) \,.\, \mathbf{n}\, da. \tag{13.14}$$

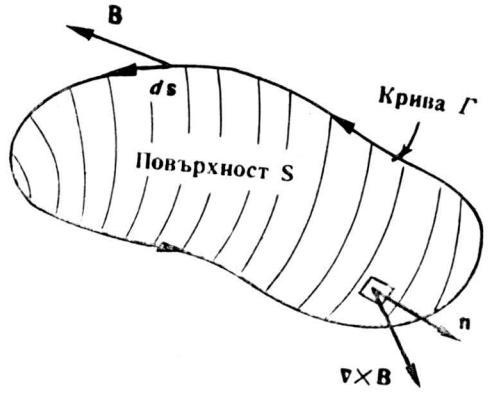
Като намерим $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ от уравнението (13.13), имаме

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \,.\, d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \int_{S} \mathbf{j} \,.\, \mathbf{n} da. \tag{13.15}$$

Интегралът от $\mathbf{j}$ по S съгласно (13.5) е пълният ток $\mathbf{I}$ през повърхнината S. Тъй като за постоянните токове токът през S не зависи от формата на S, ако тя е ограничена от кривата Г, обикновено говорят за „ток през затворената крива Г". По такъв начин имаме общ закон: циркулацията на $\mathbf{B}$ по произволна затворена крива е равна на тока I през затворената крива, делен на $\varepsilon_0 c^2$:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{B} \,.\, d\mathbf{s} = \frac{I_{\text{през}\Gamma}}{\varepsilon_0 c^2}. \tag{13.16}$$

Този закон, наричан *закон на Ампер*, играе такава роля в магнитостатиката, както законът на Гаус в електростатиката. Само законът на Ампер не определя $\mathbf{B}$ чрез токовете; изобщо казано ние трябва да използуваме също и $\nabla \,.\, \mathbf{B} = 0$. Но, както ще видим в следващия параграф, той може да бъде използуван за намиране на полетата в тези особени случаи, които притежават проста симетрия.



Фиг. 13-6. Контурният интеграт от тангенциалната компонента на $\mathbf{B}$ е равен на повърхнинния интеграл от нормалната компонента на вектора $(\nabla \times \mathbf{B})$

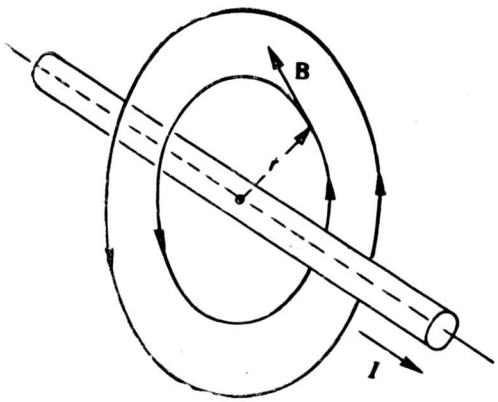
13-5. Магнитно поле на прав проводник и соленоиди; атомни токове

Може да се покаже как се използува законът на Ампер, като се определи магнитното поле близо до проводник. Ще зададем въпроса: на какво е равно полето извън дълъг праволинеен проводник с цилиндрично сечение? Ние ще направим едно предположение, може би не толкова очевидно, но въпреки това правилно: линиите на полето $\mathbf{B}$ около проводника са окръжности. Ако направим такова предположение, законът на Ампер (уравнението (13.16)) ни показва каква е големината на полето. Пред вид на симетрията на задачата полето $\mathbf{B}$ има еднаква стойност във всички точки на окръжността, концентрична с проводника (фиг. 13-7). Тогава лесно може да се пресметне линейният интеграл от $\mathbf{B} \,.\, d\mathbf{s}$. Той просто е равен на големината на $\mathbf{B}$, умножена по дължината на окръжността. Ако радиусът на окръжността е равен на r,

$$\oint \mathbf{B} \,.\, d\mathbf{s} = B \,.\, 2\pi r.$$

Пълният ток през затворения контур е просто токът I в проводника и поради това

$$B \,.\, 2\pi r = \frac{I}{\varepsilon_3 c^2} \qquad \text{или} \qquad B = \frac{1}{4\pi\, \varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{2I}{r}. \tag{13.17}$$



Фиг. 13-7. Магнитното поле извън дълъг проводник с ток I

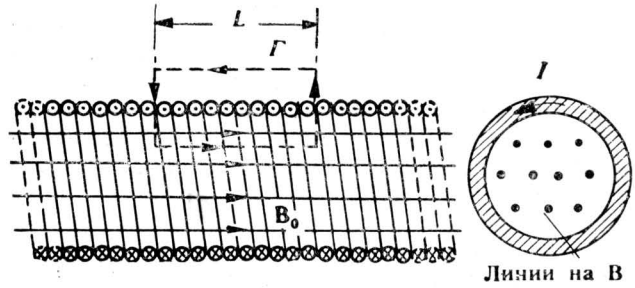
Интензитетът на магнитното поле намалява обратно пропорционално на r, разстоянието от проводника. При желание уравнението (13.17) може да се запише във векторна форма. Като си спомним, че **B** е перпендикулярно насочено както на **I**, така и на **r** имаме

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0 c^2}\,\frac{2\mathbf{I}\times\mathbf{e}_r}{r}\,. \tag{13.18}$$

Ние отделихме множителя $1/4\pi\,\varepsilon_0 c^2$, защото той често се появява. Струва си да се запомни, че той е точно равен на 10^{-7} в системата SI)[1], защото уравнение от вида (13.17) се използува а *определение* на единицата за тока, ампера. На разстояние 1 m ток 1A създава магнитно поле, равно на 2.10^{-7} вебер/m^2.

Щом токът създава магнитно поле, той ще действува с някаква сила на съседния проводник, по който също тече ток. В гл. 1 ние описахме прост опит, който показва силата между два проводника, по които тече ток. Ако проводниците са успоредни, всеки от тях е перпендикулярен на полето **B** на другия проводник; тогава проводниците ще се отблъскват или привличат един друг. Когато токовете текът в една посока, проводниците се привличат, когато токовете имат противоположни посоки, те се отблъскват.

Да вземем друг пример, който също може да се анализира с помощта на закона на Ампер, ако се добавят още някои сведения за характера на полето. Нека има дълъг проводник, навит във вид на тънка спирала, чието сечение е показано на фиг. 13-8. Такава спирала се нарича *соленоид*. Опитно наблюдаваме, че когато дължината на соленоида е много голяма в сравнение с диаметъра, полето извън него е много малко в сравнение с полето вътре. Като използуваме само този факт и закона на Ампер, може да се намери големината на полето вътре в соленоида.



Фиг. 13-8. Магнитното поле на дълъг соленоид

Доколкото полето *остава* вътре (и има нулева дивергенция), неговите линии трябва да са успоредни на оста, както е показано на фиг. 13-8. Ако това е така, ние можем да използуваме закона на Ампер за правоъгълната „крива" Г на фигурата. Тази крива преминава разстояние L вътре в соленоида, където полето например е равно на $\mathbf{B}_0$, след това върви под прав ъгъл към полето и се връща назад през външната област, където полето може да се пренебрегне. Линейният интеграл от **B** по тази крива е точно равен на $\mathbf{B}_0 L$ и това трябва да бъде равно на $1/\varepsilon_0 c^2$, умножено по пълния ток вътре в Г, т. е. на NI (където N е броят на навивките на соленоида на дължина L). Ние имаме

$$B_0 L = \frac{NI}{\varepsilon_0 c^2}.$$

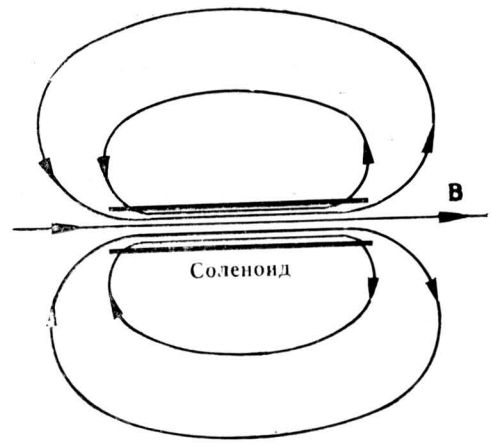
Или пък като въведем n-броя навивки в единица дължина от соленоида (така, че $n = N/L$), получаваме

$$B_0 = \frac{nI}{\varepsilon_0 c^2}\,, \tag{13.19}$$

---

[1] Това е магнитната проницаемост на вакуума. Вж. забележката на стр 49 — Заб. ред. рус. изд.

Какво става с линиите на **B**, когато те достигнат до края на соленоида? Вероятно те по някакъв начин стават разходящи и се връщат в соленоида от другия край (фиг. 13-9). Точно такова поле се наблюдава извън магнитна пръчка. Е *и какво* е всъщност магнит? Нашите уравнения показват, че полето **B** възниква от присъствието на токове. Ние знаем, че обикновените железни парчета (не батерии и не генератори) също създават магнитни полета. Вие бихте могли да очаквате, че в дясната страна на (13.12) или (13.13) би трябвало да бъдат други членове, които представляват „плътността на намагнитеното желязо“ или някаква подобна величина. Но такъв член няма. Нашата теория твърди, че магнитните ефекти на желязото възникват поради някакви вътрешни токове, вече отчетени с члена **j**.



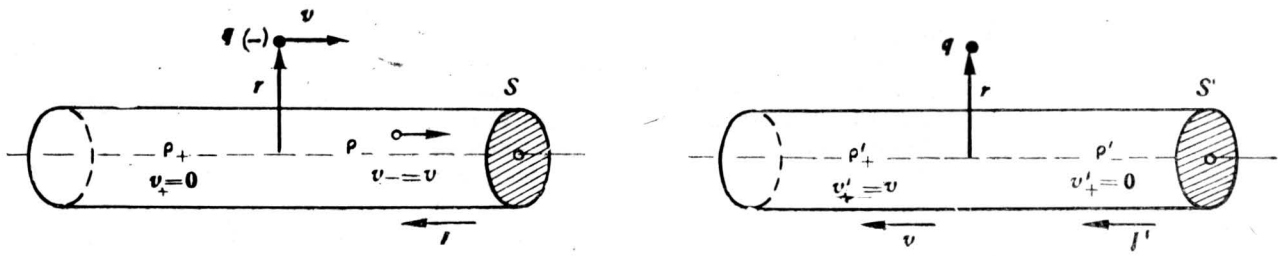
Фиг. 13-9. Магнитното поле извън соленоида

Веществото е построено много сложно, ако се разглежда от по-задълбочена гледна точка; в това ние вече се убедихме, когато се опитвахме да разберем диелектриците. За да не прекъсваме нашето изложение, ще отложим по-подробното обсъждане на вътрешния механизъм на магнитните материали от типа на желязото. Засега се налага да се приеме, че *всеки* магнетизъм възниква за сметка на токовете и че в постоянния магнит има вътрешни постоянни токове. В случая за желязото тези токове се създават от електрони, които се въртят около собствени оси. Всеки електрон има такъв спин, който съответствува на малък циркулационен ток. Един електрон, разбира се, не дава голямо магнитно поле, но в обикновеното парче вещество се съдържат милиарди и милиарди електрони. Обикновено те се въртят по произволен начин, така че сумарният ефект изчезва. Удивително е, че в малко вещества, подобни на желязото, по-голямата част от електроните се въртят около оси, насочени в една посока — при желязото два електрона от всеки атом вземат участие в това съвместно движение. В магнита има голям брой електрони, които се въртят в една посока и както ние ще видим, сумарният им ефект е еквивалентен на ток, който циркулира по повърхността на магнита. (Това много прилича на това, което намерихме в диелектриците — хомогенно поляризираният диелектрик е еквивалентен на разпределение на заряди по повърхността му.) Поради това не е случайно, че магнитната пръчка е еквивалентна на соленоида.

13-6. Относителност на магнитните и електрични полета

Когато казвахме, че магнитната сила на заряда е пропорционална на скоростта му, вие вероятно помислихте: „Каква скорост? По отношение на каква координатна система?“ От определението на **B**, дадено в началото на тази глава, всъщност е ясно, че този вектор ще бъде различен в зависимост от избора на координатната система, в която определяме скоростта на зарядите. Но ние нищо не казахме за това, каква именно система е подходяща за определянето на магнитното поле.

Оказва се, че е подходяща *всяка* инерциална система. Ние ще видим също, че магнетизмът и електричеството не са независими, те винаги трябва да бъдат взети като съвкупност, като едно пълно електромагнитно поле. Макар че в статичния случай уравненията на Максвел се разделят на две двойки: едната за електричеството и една за магнетизма без видима връзка между двете полета, в природата съществува много дълбока взаимна връзка между тях, която възниква от принципа на относителността. Исторически принципът на относителността бе открит след уравненията на Максвел. В действителност именно изучаването на електричеството и магнетизма доведе Айнщайн до откриване на принципа на относителността. Но ще видим какво ще ни подскаже нашето знание на принципа на относителността за магнитните сили, ако се предположи, че принципът на относителността е при-



Фиг. 13-10. Взаимодействие на продници с ток със заряд q, разглеждано в две координатни системи:
а — в системата S проводникът е в покой; *б* — в системата S' зарядът е в покой

ложим (и в действителност това е именно така) към електромагнетизма.

Нека да помислим какво ще стане с отрицателен заряд, който се движи със скорост v_0 успоредно на проводник, по който тече ток (фиг. 13-10). Ще се постараем да разберем това, което става, като използуваме две координатни системи: едната свързана с проводника както на фиг. 13-10, *а*, а другата — с частицата както на фиг. 13-10, *б*. Първата система ще наричаме S, а другата $\mathbf{S}'$.

В системата S на частицата явно действува магнитната сила. Силата е насочена към проводника и поради това, ако на заряда нищо не му пречи, траекторията му ще се закриви в посоката на проводника. Но в системата S' върху частицата няма да действува магнитна сила, защото скоростта на частицата е равна на нула. Следователно тя така и ще стои на едно място? Ще видим ли в различните системи различни неща? Принципът на относителността твърди, че в системата S' ние ще видим също как частицата се приближава към проводника. Ние трябва да се опитаме да разберем защо може да се случи такова нещо.

Да се върнем към нашето атомно описание на проводника, по който тече ток. В обикновения проводник, подобен на медта, електричните токове възникват за сметка на движението на част от електроните (наричани електрони на проводимостта), докато положителните ядрени заряди и останалите електрони остават закрепени вътре в материала. Нека плътността на електроните на проводимостта е ρ_-, а скоростта им в системата S е $\mathbf{v}$. Плътността на неподвижните заряди в системата S е ρ_+, която трябва да бъде равна на ρ_- с обратен знак, защото ние вземаме незареден проводник. Поради това извън проводника няма електрично поле и силата на движещата се частица е просто равна на

$$\mathbf{F}=q\,\mathbf{v}_0\times\mathbf{B}.$$

Като използуваме резултата, намерен от нас в уравнение (13.18) за магнитното поле на разстояние r от оста на проводника, ние заключаваме, че силата, която действува на частицата, е насочена към проводника и е равна по големина на

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{2Iqv_0}{r}.$$

С помощта на уравненията (13.4) и (13.5) токът I може да бъде записан като $\rho_+ v A$, където A е лицето на напречното сечение на проводника. Тогава

$$F=\frac{2q\rho_+ Avv_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}. \tag{13.20}$$

Ние бихме могли да продължим разглеждането на общия случай на произволни скорости v и v_0, но съвсем няма да бъде по-лошо, ако се вземе частен случай, когато скоростта v_0 на частицата съвпада със скоростта на електроните на проводимост. Поради това ние ще запишем $v=v_0$ и уравнението (13.20) добива вида

$$F=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\rho_+ A}{r}\,\frac{v^2}{c^2}. \tag{13.21}$$

Сега да се обърнем към това, което става в системата S', където частицата е в покой и проводникът бяга покрай нея (вляво на фиг. 13-10, *б*) със скорост v. Положителните заряди, които се движат заедно с проводника, ще създадат около частицата някакво магнитно поле B′. Но частицата *сега е в покой*, така че *магнитната сила* не й действува. Ако възниква някаква сила, тя трябва да се появи за сметка на електричното поле. Излиза, че движещият се проводник създава електрично поле. Но той може да направи това само ако е зареден; трябва да се получава така, че неутралният проводник с ток да изглежда зареден, ако се приведе в движение.

Трябва това да разберем. Ще се опитаме да изчислим плътността на зарядите в проводника в системата S', като се възползуваме от това, което знаем за нея в системата S. На пръв поглед би могло да се помисли, че плътностите са еднакви, но от гл. 15 (т. I) ние знаем, че при прехода от една координатна система в друга дължините се изменят, следователно обемите също се изменят. Тъй като *плътностите* на зарядите зависят от обема, зает от зарядите, те също се изменят.

Преди да се определят плътностите на зарядите в системата S', трябва да се знае какво става с електричния *заряд* на група електрони, когато зарядите се движат. Ние знаем, че видимата маса на частицата добива множителя $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Става ли нещо подобно със заряда й? Не. *Зарядите* никога *не се изменят* независимо от това движат ли се, или не. Иначе ние не бихме могли опитно да наблюдаваме запазването на пълния заряд.

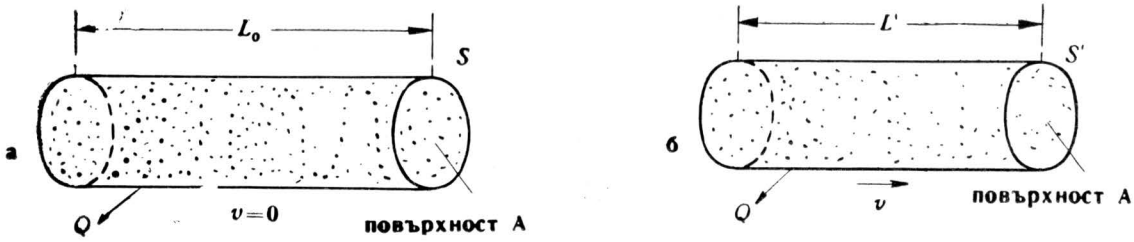
Да вземем парче вещество, например проводник, и нека в началото той да бъде незареден. Сега ще го нагреем. Тъй като масата на електроните е различна от тази на протоните, скоростите на електроните и протоните се изменят различно. Ако зарядът на частицата би зависел от скоростта на частицата, която го пренася, в нагрятото парче зарядите на електроните и протоните не биха се компенсирали. Парчето материал при нагряване би станало заредено. Ние видяхме по-рано, че много малко изменение на заряда у всеки от електроните в парчето би довело до огромни електрични полета. Нищо подобно никога не е наблюдавано.

Освен това може да се забележи, че средната скорост на електроните във веществото зависи от химичния му състав. Ако зарядът на електрона би се изменял със скоростта, сумарният заряд в парчето вещество би се изменял в хода на химичните реакции. Както и по-рано, прякото изчисление показва, че даже съвсем малка зависимост на заряда от скоростта би довела в най-простите химични реакции до огромни полета. Нищо подобно не е наблюдавано и ние достигаме до извода, че електричният заряд на отделна частица не зависи от състоянието на движение или покой.

И така, зарядът на частицата q е инвариантна скаларна величина, независеща от координатната система. Това означава, че във всяка система плътността на зарядите на някакво разпределение на електрони е просто пропорционално на броя електрони в единица обем. Ние само трябва да отчетем факта, че обемът *може* да се изменя поради релативисткото скъсяване на разстоянието.

Ще приложим сега тези идеи към нашия движещ се проводник. Ако се вземе проводник с дължина L_0, в който плътността на *неподвижните* заряди е ρ_0, в него ще се съдържа пълен заряд, равен на $Q=\rho_0 L_0 A_0$. Ако същите заряди се движат в друта система със скорост v, всичките те ще се намират в парче материал с *по-малка* дължина

$$L=L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \tag{13.22}$$



Фиг. 13-11. Ако разпределението на заредените частици има плътност ρ_0, от гледна точка на системата, която се движи с относителна скорост **v**, плътността на зарядите ще бъде равна на $\rho=\rho_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$

но със същото сечение A_0, тъй като размерите в посоки, перпендикулярни на движението, не се изменят (фиг. 13-11).

Ако с ρ се означи плътността на зарядите в системата, където те се движат, пълният заряд Q ще бъде ρLA_0. Но това също трябва да бъде равно на $\rho_0 L_0 A$, защото зарядът във всяка система е еднакъв, следователно $\rho L=\rho_0 L_0$ или с помощта на (13.22)

$$\rho=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{13.23}$$

Плътността на заряда на движеща се *съвкупност* от заряди се изменя по същия начин, както и релативистката маса на частицата.

Ще приложим сега този резултат към плътността на положителните заряди ρ_+ в нашия проводник. Тези заряди са в покой в системата S. Обаче в системата S', където проводникът се движи със скорост v, плътността на положителните заряди става равна на

$$\rho'_+=\frac{\rho_+}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{13.24}$$

Отрицателните заряди в системата S' са в покой и поради това тяхната плътност в тази система е „плътността на покоя“ ρ_0. В уравнението (13.23) $\rho_0=\rho_-$, защото плътността на зарядите им е равна на ρ_-, ако проводникът е в *покой*, т. е. в системата S, където скоростта на отрицателните заряди е равна на v. Тогава за електроните на проводимостта получаваме

$$\rho_-=\frac{\rho'_-}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{13.25}$$

или

$$\rho'_-=\rho_-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{13.26}$$

Сега ние можем да разберем защо в системата S' възникват електрични полета: защото в тази система в проводника резултантната плътност на заряди е ρ'

$$\rho'=\rho'_+ +\rho'_-.$$

С помощта на (13.24) и (13.26) имаме

$$\rho'=\frac{\rho_+}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\rho_-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Тъй като проводникът в покой е неутрален, $\rho_-=-\rho_+$, получаваме

$$\rho'=\rho_+\frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{13.27}$$

Нашият движещ се проводник е зареден положително и трябва да създава поле E' в точката, където се намира външната частица, която е в покой. Ние вече решавахме електростатичната задача за хомогенно зареден цилиндър. Електричното поле на разстояние r от оста на цилиндъра е

$$E' = \frac{\rho' A}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho_+ A v^2/c^2}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{(1-v^2/c^2)}}. \tag{13.28}$$

Силата, която действува на отрицателно заредената частица, е насочена към проводника. Ние имаме сила, насочена еднакво в двете системи; електричната сила в системата S' е насочена така, както магнитната сила в системата S.

Големината на силата в системата S' е равна на

$$F' = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_+ A}{r}\frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}. \tag{13.29}$$

Като сравним този резултат за F' с нашия резултат за F в уравнението (13.21), виждаме, че големините на силите от гледните точки на двамата наблюдатели са почти еднакви. По-точно

$$F' = \frac{F}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{13.30}$$

и поради това за малки скорости, които ние разглеждаме, двете сили са еднакви. Можем да кажем, че най-малко за малки скорости магнетизмът и електричеството са просто „две различни страни на едни и същи неща“.

Но се оказва, че всичко е всъщност даже още по-добре, отколкото ние казахме. Ако се вземе пред вид фактът, че *силите* също се трансформират при преминаване от една система в друга, ще се окаже, че двата начина на наблюдаване дават всъщност еднакви *физични* резултати при произволна скорост.

За да се види това, може например да се зададе въпросът: какъв напречен импулс придобива частица, на която в течение на определено време е действувала сила? Ние знаем от т. I, гл. 16, че напречният импулс на частицата трябва да бъде един и същ както в системата S, така и в системата S'. Да означим напречната координата с y и да сравним Δp_y и $\Delta p'_y$. Като използуваме релативистки правилното уравнение на движение $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, ние очакваме, че за време Δt нашата частица ще придобие напречен импулс Δp_y в системата S, даван от израза

$$\Delta p_y = F\Delta t. \tag{13.31}$$

В системата S' напречният импулс ще бъде

$$\Delta p'_y = F'\Delta t'. \tag{13.32}$$

Ние трябва да сравняваме Δp_y и $\Delta p'_y$, разбира се, за съответните интервали време Δt и $\Delta t'$. В гл. 15 (т. I) ние видяхме, че интервалите време, които се отнасят до движещата частица, изглеждат *по-дълги* от интервалите в системата на покой на частицата. Тъй като нашата частица първоначално е била в покой в системата S', ние очакваме, че за малки Δt

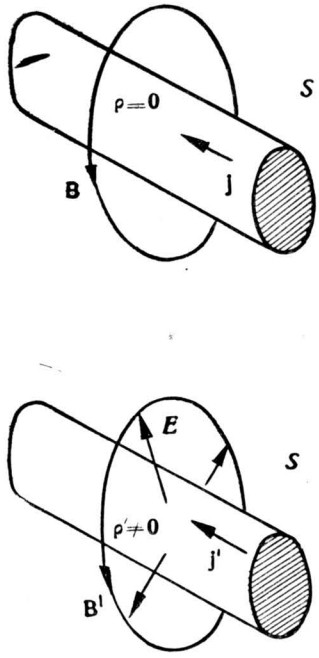
$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \tag{13.33}$$

и всичко се получава великолепно. Съгласно (13.31) и (13.32)

$$\frac{\Delta p'_y}{\Delta p_y} = \frac{F'\Delta t'}{F\Delta t}$$

и ако се комбинират (13.30) и (13.33), това отношение е равно на единица.

Излиза, че получаваме един и същ резултат независимо от това анализираме ли движението на летящата заедно с провод-



Фиг. 13-12. В системата S плътността на зарядите е нула, а плътността на тока е равна на $\mathbf{j}$. Има само магнитно поле. В системата S' плътността на зарядите е ρ', а плътността на тока — $\mathbf{j}'$. Магнитното поле тук е $\mathbf{B}'$ и съществува електрично поле $\mathbf{E}'$

ника частица в системата, в която проводникът е в покой, или в системата, в която частицата е в покой. В първия случай силата беше чисто „магнитна“, във втория — чисто „електрична“. Двата начина на наблюдение са показани на фиг. 13-12 (макар във втората система да има още и магнитно поле $\mathbf{B}'$, то не въздействува на неподвижната частица).

Ако бихме избрали още една координатна система, бихме намерили някоя друга смес на полетата $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Електричните и магнитни сили представляват части на *единно* физично явление — електромагнитното взаимодействие на частиците. Разделянето на това взаимодействие на електрична и магнитна части в голяма степен зависи от координатната система, в която описваме взаимодействието. Но пълното електромагнитно описание е инвариантно; електричеството и магнетизмът, взети заедно, се съгласуват с принципа на относителността, открит от Айнщайн.

Щом електричните и магнитни полета се проявяват в различни съотношения при изменение на координатната система, трябва да проявяваме внимание при работа с полетата $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Ако например говорим за „линиите“ на $\mathbf{E}$ или $\mathbf{B}$, не е необходимо да се преувеличава реалността на тяхното съществуване. Линиите могат да изчезнат, ако ние пожелаем да ги видим в друга координатна система. Например в системата S' има линии на електричното поле, обаче ние не ги *виждаме* „движещи се покрай нас със скорост $\mathbf{v}$ в системата S“. В системата S въобще няма линии на електричното поле! Поради това е безсмислено да се говори нещо подобно: „Когато аз движа магнита, той носи своето поле със себе си и поради това линиите на полето $\mathbf{B}$ също се движат.“ Няма никакъв начин да се направи изобщо смислено понятието за „скоростта на движещите се линии на полето“.

Полетата са начин на описание на това какво става в някоя точка на пространството. В частност $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ ни говорят за силите, които ще действуват на движещата се частица. Въпросът „на какво е равна силата, която действува върху заряд от страна на движещо се магнитно поле?“ няма някакво точно съдържание. Силите се дават от величините $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в точките на заряда и формулата (13.1) няма да се измени, ако източникът на полетата $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ се движи (изменят се тъкмо стойностите на $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в резултат на движението). Нашето математично описание се отнася само до полетата като функции на x, y, z и t, взети в някоя инерциална координатна система.

По-късно ще говорим за „вълна на електричното и магнитно полета, която се разпространява в пространството“, например за светлинната вълна. Но това е все едно да се говори за *вълна*, разпространяваща се по въженца. При това ние нямаме пред вид, че някаква част от *въжето* се движи по посоката на разпространение на вълната, а подразбираме, че преместването на въжето се появява отначало в едно място, а след това в друго. Аналогично за електромагнитната вълна — самата вълна се разпространява, а големината на полетата *се изменя*.

Така че в бъдеще, когато ние или някой друг говорим за „движещото се“ поле, вие трябва да разбирате, че става дума просто за кратък и удобен начин на описване на поле, което се изменя в определени условия.

13-7. Трансформация на токове и заряди

Вие вероятно бяхте обезпокоени от направеното от нас опростяване, когато взехме една и съща скорост $\mathbf{v}$ за частица и електроните на проводимостта в проводника. Би моглода се върнем назад и отново да направим анализ с две различни скорости, но по-лесно е просто да се забележи, че плътносттана заряда и тока са компоненти на четири вектора (вж. т. I, гл. 17).

Ние вече видяхме, че ако ρ_0 е плътността на зарядите в координатната система, в която те са в покой, в системата, където

те имат скорост **v**, плътността е

$$\rho=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}.$$

В тази система тяхната плътност на тока е

$$\mathbf{j}=\rho\mathbf{v}=\frac{\rho_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{13.34}$$

По-нататък ние знаем, че енергията U и импулсът p на частицата, която се движи със скорост **v**, се дават от изразите

$$U=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}, \qquad \mathbf{p}=\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}},$$

където m_0 е масата ѝ в покой. Ние знаем също, че U и **p** образуват релативистки четиривектор. Тъй като ρ и **j** зависят от скоростта **v** точно както U и **p**, може да се заключи, че ρ и **j** *са също* компоненти на релативистки четиривектор. Това свойство е ключът към общия анализ на полето на проводник, който се движи с произволна скорост, и ние бихме могли да го използуваме, ако пожелаем да решим отново задачата със скорост на частицата $\mathbf{v}_0$, неравна на скоростта на електроните на проводимостта.

Ако ни е необходимо да преведем ρ и **j** в координатната система, която се движи със скорост u в посока x, ние знаем, че те се трансформират точно както t и (x, y, z); поради това имаме (вж. т. I, гл. 15)

$$\begin{aligned}
x'&=\frac{x-ut}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}, & j'_x&=\frac{j_x-u\rho}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}},\\
y'&=y, & j'_y&=j_y,\\
z'&=z, & j'_z&=j_z,\\
t'&=\frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}, & \rho'&=\frac{\rho-uj_x/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}.
\end{aligned} \tag{13.35}$$

С помощта на тези уравнения може да се свържат зарядите и токовете в една система със зарядите и токовете в друга. Като вземем зарядите и токовете в някаква система, може да се реши електромагнитната задача в тази система, като се възползуваме от уравненията на Максвел. Резултатът, който ще получим *за движението на частиците,* ще бъде един и същ независимо от избраната координатна система. По-късно ще се върнем към релативистките трансформации на електромагнитните полета.

13-8. Суперпозиция; правило на дясната ръка

Ще завършим тази глава с още две забележки по въпросите на магнитостатиката. Първата: нашите основни уравнения за магнитното поле

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad \nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mathbf{j}}{c^2b\varepsilon_0}$$

са линейни спрямо **B** и **j**. Това означава, че принципът на суперпозицията (наслагването) е приложим и към магнитното поле. Полето, създадено от два различни постоянни тока, е сума от собствените полета на всеки ток, които действуват поотделно. Нашата втора забележка се отнася до правилото на дясната ръка, с което ние вече се срещнахме (правилото на дясната ръка за магнитно поле, създавано от ток). Ние посочвахме също, че на-

магнитването на железния магнит се обяснява с въртенето на електроните във веществото. Посоката на магнитното поле на въртящия се електрон е свързано с оста на въртенето му със същото правило на дясната ръка. Тъй като **B** се определя с правило на определена ръка (с помощта или на векторно произведение, или на ротация), той се нарича *аксиален* вектор. (Векторите, чиито посоки в пространството не зависят от цитиране на лява или дясна ръка, се наричат *полярни* вектори. Например преместването, скоростта, силата и **E** са полярни вектори.)

Физически наблюдаемите величини в електромагнетизма обаче *не са свързани* с лявата или дясна ръка. От гл. 52 (т. I) ние знаем, че електромагнитните взаимодействия са симетрични по отношение на отражението. При изчисляването на магнитните сили между два набора от токове резултатът винаги е инвариантен по отношение на смяна на ръцете. Нашите уравнения независимо от условието на дясната ръка довеждат до крайния резултат, че успоредните токове се привличат, а противоположните се отблъскват. (Опитайте се да изчислите силата с помощта на „правилото на лявата ръка“.) Привличането или отблъскването е полярен вектор. Така се получава, защото при описване на произволно пълно взаимодействие ние се ползуваме от правилото на дясната ръка два пъти — веднаж, за да намерим **B** от токовете, а след това, за да намерим силата, предизвикана от полето **B** върху втория ток. Два пъти да се ползува правилото на дясната ръка е все едно два пъти да се ползува правилото на лявата ръка. Ако бяхме се условили да преминем към система на лява ръка, всички наши полета **B** биха си изменили знака, но всички сили или (което е по-нагледно) наблюдаваните ускорения на обектите не биха се изменили.

Макар че физиците за свое удивление неотдавна откриха, че не всички закони на природата винаги са инвариантни по отношение на огледално отражение, въпреки това законите на електромагнетизма притежават тази фундаментална симетрия.

14

Магнитното поле в различни случаи

14-1. Векторен потенциал

14-1. Векторен потенциал

14-2. Векторен потенциал на зададени токове

14-3. Прав проводник

14-4. Дълъг соленоид

14-5. Поле на малка рамка; магнитен дипол

14-6. Векторен потенциал на верига

14-7. Закон на Био-Савар

В тази глава ще продължим разговора за магнитостатиката, т. е. за постоянните магнитни полета и постоянни токове. Магнитното поле и електричните токове са свързани с нашите основни уравнения:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{14.1}$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}. \tag{14.2}$$

Но този път е необходимо да решим тези уравнения математично по *най-общ начин,* а не да се позоваваме на някаква особена симетрия или на интуицията. В електростатиката ние намерихме пряк начин за изчисляване на полето, когато са известни положенията на всички електрични заряди: скаларният потенциал φ се дава просто от интеграл по зарядите както в уравнение (4.25) на стр. 55. Ако след това е необходимо да се знае електричното поле, получават го с диференциране на φ. Ние ще покажем сега, че за намирането на полето $\mathbf{B}$ съществува аналогична процедура, ако е известна плътността на тока $\mathbf{j}$ на всички движещи се заряди.

В електростатиката, както видяхме (поради това, че rot от $\mathbf{E}$ е навсякъде равна на нула), винаги може да се представи $\mathbf{E}$ във вид на градиент от скаларното поле φ. А ето, че rot от $\mathbf{B}$ *не е навсякъде* равна на нула и поради това, изобщо казано, е невъзможно да се представи $\mathbf{B}$ във вид на градиент. Обаче *дивергенцията* на $\mathbf{B}$ навсякъде е равна на нула, а това значи, че ние можем да представим $\mathbf{B}$ във вид на *ротация* от друго векторно поле. Защото, както видяхме в 2-8, дивергенцията на ротация е винаги равна на нула. Следователно ние винаги можем да изразим $\mathbf{B}$ чрез поле, което ще означим с $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{14.3}$$

Или написано в компоненти

$$B_x = (\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},$$

$$B_y = (\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$B_z = (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \tag{14.4}$$

Записването $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ гарантира изпълнението на (14.1), защото обезателно

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0.$$

Полето $\mathbf{A}$ се нарича *векторен потенциал.*

Да си спомним, че скаларният потенциал φ се оказва ненапълно определен. Ако сме намерили потенциала за някоя задача, винаги може да се намери също толкова добър потенциал φ', като добавим константа

$$\varphi' = \varphi + C.$$

Новият потенциал φ' дава същите електрични полета, защото градиентът ∇C е нула; φ' и φ отговарят на една и съща картина.

Точно така можем да имаме няколко векторни потенциала **A**, които довеждат до едни и същи магнитни полета. Отново, тъй като **B** се получава от **A** чрез диференциране, прибавянето към **A** на константа не изменя физиката на нещата. Но за **A** свободата е повече. Ние можем да прибавим към **A** произволно поле, което е градиент от някакво скаларно поле, без да изменяме при това физиката. Това може да се покаже по следния начин. Нека имаме **A**, което в някаква реална задача дава правилно поле **B**. Пита се при какви условия друг векторен потенциал **A**, ако бъде поставен в (14.3), дава *същото* поле **B**? Значи **A** и $\mathbf{A}_1$ имат еднаква ротация

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}'=\nabla\times\mathbf{A}.$$

Поради това

$$\nabla\times\mathbf{A}'-\nabla\times\mathbf{A}=\nabla\times(\mathbf{A}'-\mathbf{A})=0.$$

Но ако ротацията на вектора е нула, векторът трябва да бъде градиент от някакво скаларно поле, да речем ψ, така че $\mathbf{A}'-\mathbf{A}=\nabla\psi$. Това означава, че ако **A** е векторният потенциал, който отговаря на дадената задача, при всяко

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\psi \tag{14.5}$$

също ще бъде векторен потенциал, който в същата степен удовлетворява дадената задача и довежда до същото поле **B**.

Обикновено е удобно да се намали „свободата“ на **A**, като му налагаме произволно някое друго условие (почти по такъв начин ние считахме за удобно — доста често — да избираме потенциалът φ, равен на нула на големи разстояния). Ние можем например да ограничим **A**, като му наложим такова условие, че дивергенцията на **A** да бъде равна на нещо. Ние винаги можем да направим това, без да закачаме **B**. Така се получава, защото макар че **A**′ и **A** имат еднаква ротация и дават едно и също **B**, те съвсем не са длъжни да имат еднаква дивергенция. Всъщност $\nabla.\mathbf{A}'=\nabla.\mathbf{A}+\nabla^2\psi$ и като подберем съответно ψ, може да се придаде на $\nabla.\mathbf{A}'$ произволна стойност.

На какво трябва да се приравни $\nabla.\mathbf{A}'$? Изборът трябва да осигури най-голямо математично удобство и зависи от нашата задача. За *магнитостатиката* ще направим простия избор

$$\nabla.\mathbf{A}=0. \tag{14.6}$$

(По-късно, когато преминем към електродинамиката, ние ще изменим нашия избор.) И така, нашето пълно определение[1] на **A** в дадения момент е $\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{B}$ и $\nabla.\mathbf{A}=0$.

За да свикнем с векторния потенциал, ще видим отначало на какво е равен той за хомогенно магнитно поле $\mathbf{B}_0$. Като изберем оста z в посока на $\mathbf{B}_0$, ние трябва да имаме

$$B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=0,$$

$$B_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}=0,$$

$$B_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=B_0. \tag{14.7}$$

Като разгледаме тези уравнения, виждаме, че едно от възможните решения е

$$A_y=xB_0 \quad A_x=0 \quad A_z=0.$$

---

[1] Нашето определение все още не задава напълно **A**. За да бъде то единствено, ние трябва да кажем нещо за поведението на полето **A** на някаква граница или на големи разстояния. Понякога е удобно да се избере например поле, което намалява до нула на големи разстояния.

Или със същия успех можем да вземем

$$A_x = -yB_0 \quad A_y = 0 \quad A_z = 0.$$

Още едно решение е комбинация на първите две

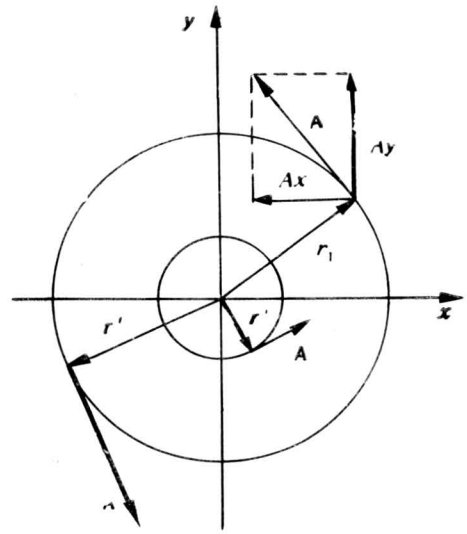
$$A_x = -\frac{1}{2} yB_0 \quad A_y = \frac{1}{2} xB_0 \quad A_z = 0. \tag{14.8}$$

Ясно е, че за всяко поле **B** векторният потенциал **A** не е единствен; съществуват много възможности.

Третото решение (уравнение (14.8)) притежава редица интересни свойства. Тъй като x-компонентата е пропорционална на $-y$, а y-компонентата е пропорционална на $+x$, векторът **A** трябва да бъде перпендикулярен на вектор, прекаран от оста z, който ние означаваме с $\mathbf{r}'$ (щрихът означава, че това *не е вектор* на разстоянието от началото). Освен това величината **A** е пропорционална на $\sqrt{x^2+y^2}$ и следователно е пропорционална на r'. Поради това **A** (за хомогенно поле) може да бъде записан просто

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}'. \tag{14.9}$$

Векторният потенциал **A** е равен по големина на $Br'/2$ и се върти около оста z, както е показано на фиг. 14-1. Ако например полето **B** е полето вътре в соленоида по оста му, векторният потенциал циркулира точно по такъв начин, както и токовете в соленоида.



Фиг. 14-1. Хомогенното магнитно поле **B**, насочено по оста z, съответствува на векторен потенциал **A** ($A = Br'/2$), който се върти около оста z

r' е разстоянието до оста z

Векторният потенциал на хомогенното поле може да бъде получен и по друг начин. Циркулацията на **A** по произволен затворен контур Г може да бъде изразена чрез повърхнинния интеграл от $\nabla \times \mathbf{A}$ с помощта на теоремата на Стокс (уравнение (3.38), стр. 47)

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{Вътре в } \Gamma} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} da. \tag{14.10}$$

Но интегралът отдясно е равен на потока на **B** през контура и поради това

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{вътре в } \Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da. \tag{14.11}$$

И така, циркулацията на **A** по *всеки* контур е равна на потока на **B** през контура. Ако вземем кръгъл контур с радиус r' в равнина, перпендикулярна на хомогенното поле **B**, потокът точно ще бъде равен на

$$\pi r'^2 B.$$

Ако се избере началото на координатната система в центъра на контура, така че **A** може да се счита насочен по допирателната и функция само на r', циркулацията ще бъде

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r' A = \pi r'^2 B.$$

Както и по-рано, получаваме

$$A = \frac{Br'}{2}.$$

В току-що разгледания пример ние изчисляваме векторния потенциал от магнитното поле, но обикновено постъпват обратно. В сложните задачи винаги е по-просто да се намери векторният потенциал, а след това вече от него да се намери магнитното поле. Сега ще покажем как може да се направи това.

14-2. Векторен потенциал на зададени токове

Щом **B** се определя от токовете, значи и **A** също. Ние искаме сега да изразим **A** чрез токовете. Ще започнем с нашето основно уравнение (14.2)

$$c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0},$$

откъдето, разбира се, следва

$$c^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}. \tag{14.12}$$

Това е уравнение за магнитостатиката; то прилича на уравнението

$$\nabla\cdot\nabla\,\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{14.13}$$

за електростатиката.

Нашето уравнение (14.12) за векторния потенциал ще прилича повече на уравнението за φ, ако се препише $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})$, като се използува векторното тъждество (вж. уравнение (2.58), стр. 35)

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}. \tag{14.14}$$

Тъй като сме избрали $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ (и сега вие виждате защо), уравнението (14.12) добива вида

$$\nabla^2\mathbf{A}=-\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2}. \tag{14.15}$$

Това векторно уравнение, разбира се, се разпада на три уравнения

$$\nabla^2A_x=-\frac{j_x}{\varepsilon_0c^2},\qquad \nabla^2A_y=-\frac{j_y}{\varepsilon_0c^2},\qquad \nabla^2A_z=-\frac{j_z}{\varepsilon_0c^2}, \tag{14.16}$$

и всяко от тези уравнения *математически* е идентично на уравнението

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{14.17}$$

Всичко, което знаем за намирането на потенциала за известно ρ, може да се използува за намирането на всяка компонента на **A**, когато е известно **j**.

В гл. 4 ние видяхме, че общото решение на уравненията на електростатиката (14.17) има вида

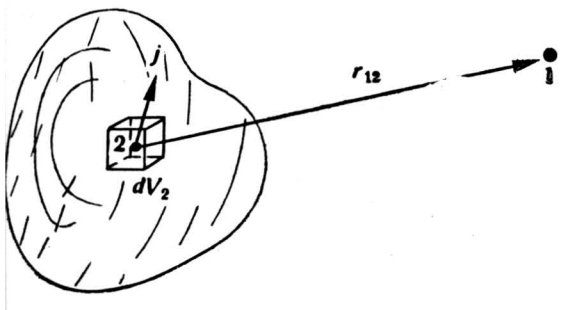
$$\varphi\,(1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\,(2)\,dV_2}{r_{12}}.$$

Тогава направо получаваме общото решение за A_x:

$$A_x\,(1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int\frac{j_x\,(2)\,dV_2}{r_{12}} \tag{14.18}$$

и аналогично за A_y и A_z. (Фиг. 14-2 ви напомня за приетите от нас означения за r_{12} и dV_2.) Ние можем да обединим всичките три решения във векторна форма:

$$\mathbf{A}\,(1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int\frac{\mathbf{j}\,(2)\,dV_2}{r_{12}}. \tag{14.19}$$



Фиг. 14-2. Векторният потенциал **A** в точката 1 се определя от интеграла по елементите на тока $\mathbf{j}dV$ във всички точки 2

(Вие можете при желание да проверите с пряко диференциране на компонентите, че този интеграл удовлетворява $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$, доколкото $\nabla\cdot\mathbf{j}=0$, а последното, както видяхме, трябва да се изпълнява за постоянните токове.)

По такъв начин ние имаме общ метод за изчисляване на магнитното поле от постоянните токове. Принципът е такъв: x-компонентата на векторния потенциал, която възниква от плътността на тока **j**, е точно такава като електричния потенцнал φ, който би се създал от плътност на зарядите ρ, равна на j_x/c^2, и

аналогично на y- и z- компонентите. (Този принцип действува само за декартови компоненти. Например „радиалната“ компонента“ на **A** не е свързана по същия начин с „радиалната“ компонента на **j**.) И така, от вектора на плътността на тока **j** може да се намери **A**, като се ползуваме от уравненията (14.19), т. е. ние намираме всяка компонента на **A**, като решаваме три въображаеми електростатични задачи за разпределенията на заряда $\rho_1 = j_x/c^2$, $\rho_2 = j_y/c^2$ и $\rho_3 = j_z/c^2$. След това намираме **B**, като изчислим различните производни от **A**, които влизат в $\nabla \times \mathbf{A}$. Малко по-сложно, отколкото в електростатиката, но идеята е същата. Сега ще илюстрираме теорията, като изчислим векторния потенциал в няколко частни случаи.

14-3. Прав проводник

Като първи пример отново ще изчислим полето на прав проводник, което намерихме в предишния параграф, като ползувахме уравнението (14.2) и съображенията за симетрия. Да вземем дълъг прав проводник с радиус a, по който тече постоянен ток I. За разлика от заряда в проводника в случая на електростатиката постоянният ток в проводника е разпределен равномерно по напречното сечение на проводника. При такъв избор на координатната система, какъвто е показан на фиг. 14-3, векторът на плътността на тока **j** има само z-компонента. По големина тя е

$$j_z = \frac{I}{\pi a^2} \tag{14.20}$$

вътре в проводника и на нула извън него.

Тъй като j_x и j_y са равни на нула, направо ще получим

$$A_x = 0, \quad A_y = 0.$$

За да се получи A_z, може да се възползуваме от нашето решение за електростатичния потенциал φ от проводник с хомогенна плътност на заряда $\rho = j_z/c^2$. За точки извън безкрайно дълъг зареден цилиндър електростатичният потенциал е равен на

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r',$$

където $r' = \sqrt{x^2 + y^2}$, а λ е зарядът на единица дължина $\pi a^2 \rho$. Следователно A_z трябва да бъде

$$A_z = -\frac{\pi a^2 j_z}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \ln r'$$

за точки извън дългия проводник с равномерно разпределен ток. Тъй като $\pi a^2 j_z = I$, може също да се напише

$$A_z = -\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \ln r'. \tag{14.21}$$

Сега може да се намери **B**, като използуваме (14.4). От шестте производни само две са различни от нула. Получаваме

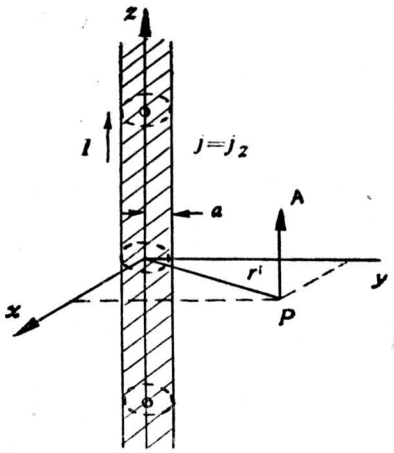
$$B_x = -\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial y} \ln r' = -\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{y}{r'^2}; \tag{14.22}$$

$$B_y = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial x} \ln r' = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{x}{r'^2}. \tag{14.23}$$

$$B_z = 0.$$

Ние получаваме същия резултат както и по-рано: **B** обхожда проводника по окръжност и по големина е равен на

$$B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{2I}{r'}. \tag{14.24}$$



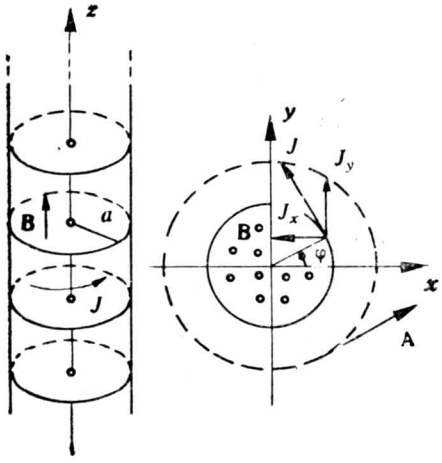
Фиг. 14-3. Дълъг цилиндричен проводник с хомогенна плътност на тока **j**, насочен по оста z

14-4. Дълъг соленоид

Още един пример. Ще разгледаме отново безкрайно дълъг соленоид с ток по окръжността равен на nI на единица дължина. (Ние считаме, че има n навивки на единица дължина, всяка от тях носи ток I и пренебрегваме малките промеждутъци между навивките.)

Точно така, както въвеждахме „повърхнинна плътност на заряда" σ, ще определим тук „повърхнинна плътност на тока" **J**, равна на тока на единица дължина по повърхнината на соленоида (което, разбира се, е просто средното от **j**, умножено по дебелината на тънката намотка). Величината **J** тук е равна на nI. Този повърхнинен ток (фиг. 14-4) има компоненти

$$J_x = -J\sin\varphi, \quad J_y = J\cos\varphi, \quad J_z = 0.$$



Фиг. 14-4. Дълъг соленоид с повърхнинна плътност на тока **J**

Сега трябва да намерим **A** за такова разпределение на токовете.

Преди всички ще намерим A_x в точки извън соленоида. Резултатът е същият както електростатичния потенциал извън цилиндър с повърхнинен заряд

$$\sigma = \sigma_0 \sin\varphi,$$

където $\sigma_0 = -J/c^2$. Ние не сме решавали случай с такова разпределение, но сме правили нещо подобно. Това разпределение на заряда е еквивалентно на два *нееластични* цилиндра, които се състоят от заряди, единият от положителни, другият от отрицателни; с малко относително преместване на осите им в посока y. Потенциалът на такава двойка цилиндри е пропорционален на производната по y от потенциала на един хомогенно зареден цилиндър. Ние, разбира се, можем да изчислим коефициента на пропорционалност, но засега няма да се занимаваме с това.

Потенциалът на зареден цилиндър е пропорционален на $\ln r'$; потенциалът на двойка (цилиндри) тогава е

$$\varphi \sim \frac{\partial \ln r'}{\partial y} = \frac{y}{r'^2}.$$

И така, ние знаем, че

$$A_x = -K\frac{y}{r'^2}, \tag{14.25}$$

където K е някаква константа. Като разсъждаваме точно по същия начин, ще намерим

$$A_y = K\frac{x}{r'^2}. \tag{14.26}$$

По-рано говорихме, че извън соленоида няма *магнитно* поле, а сега ние намираме, че полето **A** съществува и циркулира около оста z (вж. фиг. 14-4). Възниква въпросът: равна ли е на нула неговата ротация?

Очевидно B_x и B_y са равни на нула, а

$$B_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{x}{r'^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-K\frac{y}{r'^2}\right) =$$
$$= K\left(\frac{1}{r'^2} - \frac{2x^2}{r'^4} + \frac{1}{r'^2} - \frac{2y^2}{r'^4}\right) = 0.$$

И така, магнитното поле извън много дълъг соленоид е наистина равно на нула, макар че векторният потенциал не е равен на нула.

Ние можем да проверим нашия резултат, като прибегнем до други съображения. Циркулацията на векторния потенциал около соленоида трябва да е равна на потока B вътре в бобината [уравнение (14.11)]. Циркулацията е равна на $A \cdot 2\pi r'$ или тъй като $A = K/r'$, тя е равна на $2\pi K$. Забележете, че циркулацията не зависи от r'. Така и трябва да бъде, ако **B** извън соленоида е нула, защото потокът е просто големината на **B** *вътре* в соленоида, ум-

ножена по πa^2. Той е един и същ за всички окръжности с радиус $r' > a$. По-рано ние намерихме, че полето вътре е равно на $nI/\varepsilon_0 c^2$ и поради това можем да определим константата

$$2\pi K = \pi a^2 \frac{nI}{\varepsilon_0 c^2}$$

или

$$K = \frac{n I a^2}{2\varepsilon_0 c^2}.$$

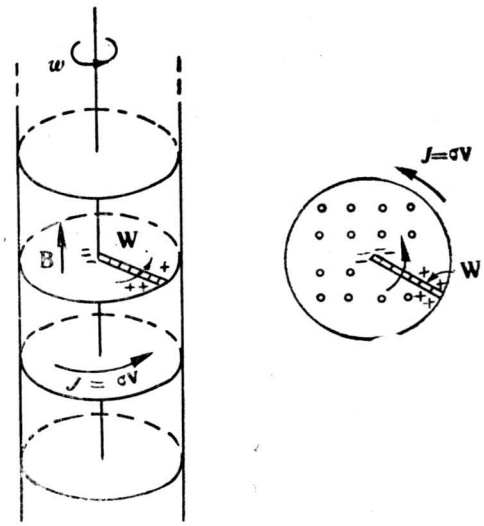
И така, векторният потенциал извън соленоида има големина

$$A = \frac{n I a^2}{2\varepsilon_0 c^2} \frac{1}{r'} \qquad (14.27)$$

и винаги е перпендикулярен на вектора $\mathbf{r}'$.

Ние говорихме за соленоидална бобина от проводник, но същото поле бихме могли да създадем, като въртим дълъг цилиндър с електростатичен потенциал на повърхнината. Ако имаме тънък цилиндричен слой с радиус a с повърхнинен заряд σ, въртенето на цилиндъра образува повърхнинен ток $J = \sigma v$, където $v = a\omega$ — скоростта на повърхнинния заряд. Вътре в цилиндъра тогава ще има магнитно поле $B = \sigma_a \omega/\varepsilon_0 c^2$.

Сега може да се постави интересен въпрос. Да предположим, че перпендикулярно на оста на цилиндъра сме поставили късо парче проводник W от оста до повърхнината и го прикрепим към цилиндъра така, че проводникът да се върти заедно с него (фиг. 14-5). Този проводник се движи в магнитно поле, така че силата $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ ще доведе до това, че краищата на проводника ще се заредят (те ще се зареждат, докато полето $\mathbf{E}$ на зарядите не уравновеси силата $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$). Ако цилиндърът е зареден положително, краят на проводника до оста ще има отрицателен заряд. Като изменяме заряда на края на проводника, ние бихме могли да определим скоростта на въртене на системата. Ние бихме получили „ъглов скоростомер“ (или „ъглов ситометър“).



Фиг. 14-5. Въртящият се зареден цилиндър създава вътре в себе си магнитно поле

Късият проводник, закрепен по радиуса, въртейки се заедно с цилиндъра, придобива на краищата си индуцирани заряди

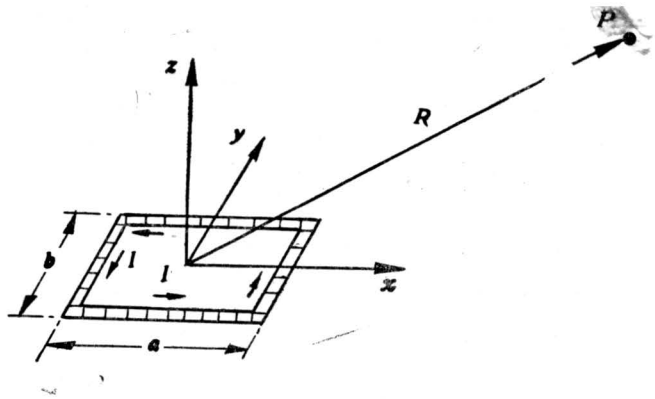
Но вие вероятно започвате да се съмнявате: „Какво ще стане, ако аз сам премина — ще кажете вие — в координатната система на въртящия се цилиндър? Там зареденият цилиндър е в покой, а аз знам от електростатичните уравнения, че вътре в цилиндъра *няма да има* никакво поле, няма да има и сили, които да тласкат зарядите към центъра. И поради това тук нещо не е в ред.“ Не. Всичко е правилно. „Относителност на въртенето“ не съществува. Въртящата се система не е инерциална система и законите на физиката в нея са други. Ние трябва да използуваме уравненията на електромагнетизма само в инерциални координатни системи.

Би било отлично, ако бихме могли да измерим абсолютното въртене на Земята с помощта на такъв зареден цилиндър, но ефектът за нещастие е толкова малък, че е невъзможно да се наблюдава даже с помощта на най-точните съвременни уреди.

14-5. Поле на малка рамка; магнитен дипол

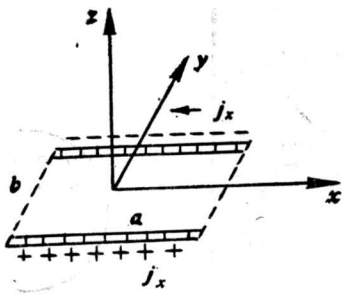
Ще се възползуваме от метода на векторния потенциал, за да намерим магнитното поле на малка рамка с ток. Както обикновено под думата „малка“ ние просто подразбираме, че нас ни интересуват полетата само на големи разстояния в сравнение с размера на рамка. Както ще видим, всяка рамка представлява „магнитен дипол“. Това означава, че тя създава магнитно поле, подобно на електричното поле от електричен дипол.

Да вземем за начало правоъгълна рамка и да изберем координатните оси, както е показано на фиг. 14-6. Токове в посока z няма и поради това A_z е равно на нула. Има токове в посока x по двете страни на правоъгълника с дължина a. Във всяка страна плътността на тока и токът са хомогенни. Поради това решението за A_x е точно подобно на електростатичен потенциал от две заредени пръчки (фиг. 14-7).



Фиг. 14-6. Правоъгълна рамка от проводници с ток I

На какво е равно магнитното поле в точката P? ($R \gg a$ и b)



Фиг. 14-7. Разпределението j_x в рамката, показана на фиг. 14-6

Тъй като пръчките имат противоположни заряди, техният електричен потенциал на големи разстояния е точно диполният потенциал (вж. гл. 6, § 5). В точката P на фиг. 14-6 потенциалът е

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_R}{R^2}, \tag{14.28}$$

където $\mathbf{p}$ е диполният момент на разпределението на зарядите. В дадения случай диполният момент е равен на пълния заряд на едната пръчка, умножен по разстоянието между тях

$$p = \lambda ab. \tag{14.29}$$

Диполният момент гледа в отрицателната посока на y и поради това косинусът от ъгъла между $\mathbf{R}$ и $\mathbf{p}$ е равен на $-y/R$ (където y е координатата на P). И така, ние имаме

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ab}{R^2}\frac{y}{R}.$$

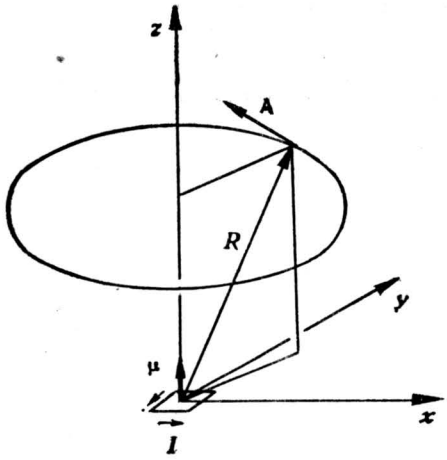
Като заменим λ с I/c^2, получаваме A_x

$$A_x = -\frac{Iab}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{y}{R^3}. \tag{14.30}$$

С помощта на същите разсъждения

$$A_y = \frac{Iab}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{x}{R^3}. \tag{14.31}$$

Отново A_y е пропорционално на x, а A_x е пропорционално на $-y$, така че векторният потенциал (на големи разстояния) върви по кръг около оста z, като циркулира по същия начин както тока I в рамката (фиг. 14-8).



Фиг. 14-8. Векторният потенциал на малка рамка с ток, разположена в началото на координатната система (в равнината xy)

Поле на магнитен дипол

Величината $\mathbf{A}$ е пропорционална на Iab, т. е. на тока, умножен по лицето на рамката. Това произведение се нарича магнитен диполен момент (или често просто „магнитен момент“) на рамката. Ще го означим с μ

$$\mu = Iab. \tag{14.32}$$

Векторният потенциал на малка плоска рамка с произволна форма (кръг, триъгълник и т. н.) също се дава от уравненията (14.30) и (14.31), ако се замени Iab с

$$\mu = I. \text{ Лицето на рамката.} \tag{14.33}$$

Предоставяме ви правото да докажете това.

На нашето уравнение може да се придаде векторна форма, ако се определи векторът $\vec{\mu}$ като нормала към равнината на рамката с положителна посока, определяна по правилото на дясната ръка (вж. фиг. 14-8). Тогава може да се напише

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\vec{\mu}\times\mathbf{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\vec{\mu}\times\mathbf{e}_R}{R^2}. \tag{14.34}$$

Необходимо ни е още да намерим **B**. Като се ползуваме от (14.33) и (14. 34), а също и от (14.4) получаваме

$$B_x=-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{x}{R^3}=\cdots\cdots\frac{3xz}{R^5} \tag{14.35}$$

(под многоточието разбираме $\mu/4\pi\varepsilon_0 c^2$),

$$B_y=\frac{\partial}{\partial z}\left(-\cdots\cdots\frac{y}{R^3}\right)=\cdots\cdots\frac{3yz}{R^5}$$

$$B_z=\frac{\partial}{\partial x}\left(\cdots\frac{x}{R^3}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\cdots\frac{y}{R^3}\right)=\cdots\left(\frac{1}{R^3}-\frac{3z^2}{R^5}\right) \tag{14.36}$$

Компонентите на полето **B** имат същото поведение както компонентите на полето **E** за дипол, ориентиран по оста z [вж. уравнения (6.14) и (6.15), а също фиг. 6-5, стр. 79]. Ето защо ние наричаме рамката магнитен дипол. Думата „дипол“ в приложение към магнитното поле малко обърква, защото няма отделни магнитни „полюси“, които да съответствуват на електричните заряди. Магнитното „диполно поле“ се създава не от два „заряда“, а от елементарна рамка с ток.

Изобщо е много интересно, че като започваме със съвсем различни закони, $\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0$ и $\nabla\times\mathbf{B}=\mathbf{j}/\varepsilon_0 c$ може да се достигне до полета от един и същ вид. Защо се получава така? Защото диполните полета възникват само когато се намираме далече от всякакви токове и заряди. Тогава в по-голямата част от пространството уравненията за **E** и **B** са еднакви: и на двете полета дивергенцията и ротацията са равни на нула. Следователно те дават едни и същи решения. Обаче източниците, чиято конфигурация описваме с помощта на диполните моменти, физически са съвършено различни. В единия случай това е циркулиращ ток, а в другия — двойка заряди, единият над, а другият под равнината на рамката за съответното поле.

14-6. Векторен потенциал на верига

Често ни интересува магнитното поле, което създава верига от проводници, в която диаметърът на проводниците е много малък в сравнение с размерите на цялата система. В такива случаи ние можем да опростим уравненията за магнитното поле.

За тънък проводник елементарния обем може да се запише във вида

$$dV=S\,ds,$$

където S е лицето на напречното сечение на проводника, а ds — елемент разстояние по проводника. В същност тъй като векторът $d\mathbf{s}$ има същата посока, както и **j** (фиг. 14-9), и ние можем да предположим, че **j** е постоянно по произволно дадено сечение, може да се напише векторното уравнение

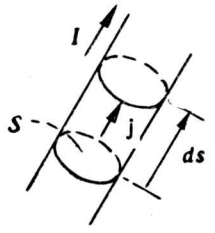
$$\mathbf{j}dV=j\,S\,d\,\mathbf{s}. \tag{1437}$$

Но jS е точно това, което ние наричаме ток I в целия проводник, така че нашият интеграл за векторния потенциал (14.19) става равен на

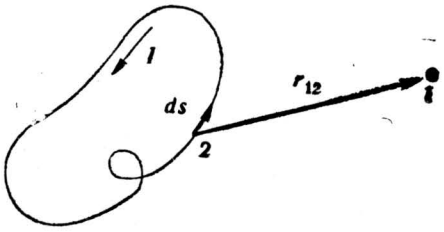
$$\mathbf{A}(1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int\frac{I d\mathbf{s}_2}{r_{12}}. \tag{14.38}$$

(фиг. 14-10). (Ние предполагаме, че I е един и същ по целия контур. Ако има няколко разклонения с различни токове, трябва, разбира се, да се вземе съответния ток във всеки клон.)

Както и по-рано, може да се намери полето с помощта на (14.38) или с пряко интегриране, или като решим съответната електростатична задача.



Фиг. 14-9. За тънък проводник $\mathbf{j}dV$ е едно и също с $Id\mathbf{s}$



Фиг. 14-10. Магнитното поле на проводник може да бъде получено чрез интегриране по цялата верига

14-7. Закон на Био-Савар

В хода на изучаването на електростатиката ние намерихме, че електричното поле на известно разпределение може да бъде получено направо във вид на интеграл [уравнение (4.16)]

$$\mathbf{E}(1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(2)\mathbf{e}_{12}dV_2}{r_{12}^2}.$$

Както видяхме, да се изчисли този интеграл (а те в същност са три, по един за всяка компонента) обикновено е по-трудно, отколкото да се изчисли интегралът за потенциала и да се вземе от него градиент.

Подобен интеграл свързва и магнитното поле с токовете. Ние вече имаме интеграл за **A** (уравнение 14.19)); можем да получим интеграл и за **B**, ако вземем ротация от двете части

$$\mathbf{B}(1)=\nabla\times\mathbf{A}(1)=\nabla\times\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int\frac{\mathbf{j}(2)dV_2}{r_{12}}\right]. \tag{14.39}$$

Сега ние трябва да бъдем бдителни. Операторът ротация означава вземане на производни от **A**(1), т. е. той действува само на координатите (x_1, y_1, z_1). Може да се внесе операторът $\nabla\times$ под интеграла, ако се помни, че той действува само на променливите означени с 1, които се появяват, разбира се, само в

$$r_{12}=[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^{1/2}. \tag{14.40}$$

Ние получаваме за x-компонентата на **B**

$$B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y_1}-\frac{\partial A_y}{\partial z_1}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int\left[j_z\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)-j_y\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)\right]dV_2=$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int\left[j_z\frac{y_1-y_2}{r_{12}^3}-j_y\frac{z_1-z_2}{r_{12}^3}\right]dV_2. \tag{14.41}$$

Величината в скобите е просто x-компонентата от

$$\frac{\mathbf{j}\times\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}=\frac{\mathbf{j}\times\mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2}.$$

Същите резултати се получават и за другите компоненти и имаме

$$\mathbf{B}(1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int\frac{\mathbf{j}(2)\times\mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2}dV_2. \tag{14.42}$$

Интегралът дава **B** направо чрез известните токове. Геометрията тук е точно такава, каквато е показана на фиг. 14-2.

Ако токовете текат само по тънки проводници, ние можем както в предишния параграф веднага да решим интеграла напречно на проводника, като заменим $\mathbf{j}\,dV$ с $I\,d\mathbf{s}$, където $d\mathbf{s}$ е елемента дължина на проводника. Тогава, като се ползуваме от означенията на фиг. 14-10, имаме

$$\mathbf{B}(1)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int\frac{I\mathbf{e}_{12}\times d\mathbf{s}_2}{r_{12}^2}. \tag{14.43}$$

(Знакът минус се появява, защото сменихме реда във векторното произведение.) Това уравнение за **B** се нарича *закон на Био-Савар* в чест на учените, които са го открили. Той дава формула за пряко пресмятане на магнитното поле, което е създадено от проводници с ток.

Вероятно вие се удивихте: „Каква е ползата от векторния потенциал, щом можем направо да намерим **B** във вид на векторен интеграл? В края на краищата **A** също се определя от три интеграла!“ Поради векторното произведение интегралите за **B** обикновено са по-сложни, както това се вижда от уравнението (14.41). Освен това тъй като интегралите за **A** приличат на електростатичните, не е необходимо да ги пресмятаме отново. На края ние ще видим, че по-трудните теоретични въпроси, такива като теория на относителността, в съвременното изложение на законите на механиката от вида на принципа на най-малкото действие, за който ще бъде разказано по-късно, в квантовата механика векторният потенциал играе важна роля.

15

Векторен потенциал

15-1. Сили, които действуват на рамка с ток; енергия на дипол

15-2. Механична и електрична енергия

15-3. Енергия на постоянни токове

15-4. B или A?

15-5. Векторният потенциал и квантовата механика

15-6. Кое е вярно за статиката, а не е вярно за динамиката?

15-1. Сили, които действуват на рамка с ток; енергия на дипол

В предишната глава ние изучавахме магнитното поле, което е създадено от малка правоъгълна рамка, по която тече ток. Намерихме, че това е поле на дипол с диполен момент,

$$\mu = IA, \tag{15.1}$$

където I е силата на тока, а A — площта на рамката. Посоката на момента е перпендикулярна към равнината на рамката, така че можем да напишем също

$$\vec{\mu} = IA\mathbf{n},$$

където $\mathbf{n}$ е единичният вектор на нормалата към площта A.

Рамка с ток — или магнитен дипол — не само създава магнитни полета, но също изпитва действието на сили, когато е поставена в магнитното поле на други токове. Да разгледаме най-напред силите, които действуват на правоъгълна рамка в хомогенно магнитно поле. Нека оста z е насочена по посоката на полето, а оста y лежи в равнината на рамката, която образува с равнината xy ъгъл θ (фиг. 15-1). Тогава магнитният момент на рамката, който е перпендикулярен на равнината ѝ, образува с магнитното поле също ъгъл θ.

Щом токовете по противоположните страни на рамката текат в противоположни посоки, силите също са противоположни и сумарната сила е равна на нула (когато полето е хомогенно). Но благодарение на силите, които действуват на двете страни, означени на фиг. 15-1 с *1* и *2*, възниква момент на въртене, който се стреми да завърти рамката около оста y. Големината на тези сили F_1 и F_2 е

$$F_1 = F_2 = IBb.$$

Тяхното рамо е

$$a\sin\theta,$$

така че моментът на въртене е

$$\tau = IabB\sin\theta$$

или, понеже Iab е магнитният момент на рамката,

$$\tau = \mu B\sin\theta.$$

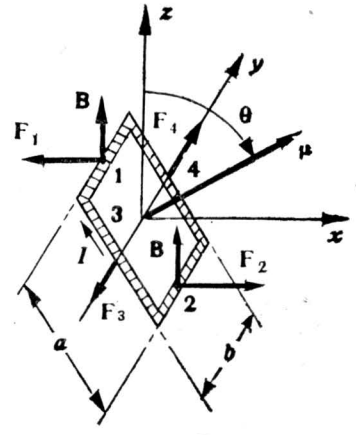
Моментът на въртене може да бъде записан и векторно

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \mathbf{B}. \tag{15.2}$$

Това, че моментът на въртене се дава с уравнение (15.2), ние засега показахме само за твърде частен случай. Но, както ще видим, този резултат е верен за малки рамки с каквато и да е форма. Вие ще си спомните, че и за момента на въртене, който действува на електричен дипол, получихме зависимост от подобен род

$$\vec{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

Сега ни интересува механичната енергия на нашата рамка, по която тече ток. Тъй като съществува момент на въртене, енергията естествено зависи от ориентацията на рамката. Принципът на виртуалната работа твърди, че моментът на въртене е скорост-



Фиг. 15-1. Правоъгълна рамка с ток I в хомогенно поле $\mathbf{B}$, насочено по оста z. Моментът на въртене, който ѝ действува, е $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \mathbf{B}$, където магнитният момент е $\mu = Iab$

та на изменението на енергията с изменянето на ъгъла, така че можем да напишем

$$dU = -\tau d\theta.$$

Като заместим $\tau = \mu B \sin\theta$ и интегрираме, можем да напишем за енергията израза

$$U = -\mu B \cos\theta + \text{някаква константа.} \quad (15.3)$$

(Знакът е отрицателен, понеже рамката се стреми да завърти своя момент по посока на полето; енергията е най-ниска, когато $\vec{\mu}$ и **B** са успоредни.)

По причини, за които ще говорим по-късно, тази енергия *не е* пълната енергия на рамка с ток. (Например не отчетохме енергията, която отива за поддържане на тока в рамката.) Затова ще я наричаме $U_{\text{мех.}}$, за да не забравим, че това е само част от енергията. И тъй като ние все едно изпускаме някои енергии, можем да приемем интеграционната константа в (15.3) равна на нула и да препишем уравнението така:

$$U_{\text{мех.}} = -\vec{\mu} \cdot \mathbf{B}. \quad (15.4)$$

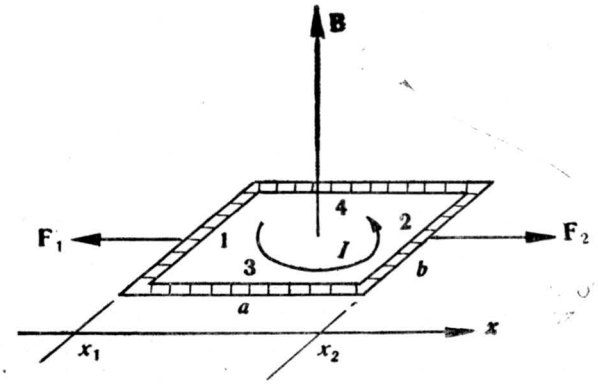
Отново това отговаря на нашия резултат за електричен дипол

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (15.5)$$

Само че в (15.5) електростатичната енергия е наистина енергия, а $U_{\text{мех.}}$ в (15.4) не е истинска енергия. Но въпреки това тя може да се използува за пресмятане на силите по принципа на виртуалната работа, като се предположи, че токът в рамката (или най-малко магнитният момент U) остава постоянен.

За нашата правоъгълна рамка можем да покажем, че $U_{\text{мех.}}$ съответствува също така на механичната работа, извършена, за да се внесе рамката в полето. Пълната сила, която действува на рамката, е равна на нула само в хомогенно поле, а в нехомогенно все пак ще останат някакви резултантни сили, действуващи на рамката с ток. Като внесем рамката в полето, ние ще бъдем принудени да я пренесем през места, където полето е нехомогенно, и там ще бъде извършена работа. За по-просто ще считаме, че рамката се внася в полето така, че моментът ѝ е насочен по полето. (На края, вече в полето, тя може да бъде завъртяна както трябва.)

Представете си, че искаме да движим рамката в посока x—към област, където полето е по-силно — и че рамката е ориентирана така, както е показано на фиг. 15-2. Ние ще тръгнем оттам, където полето е равно на нула, и ще интегрираме силата по разстоянието в зависимост от това, как рамката навлиза в полето.



Фиг. 15-2. Рамката се пренася през поле **B** (напречно на него) в посока x

Да пресметнем отначало работата за пренасянето на всяка страна поотделно, а след това всичко да съберем (вместо да събираме силите преди интегрирането). Силите, които действуват на страните *3* и *4*, са насочени перпендикулярно на движението, така че по тези страни работа не се върши. Силата, която действува на страна *2*, е насочена по x и е равна на $IbB(x)$; за да намерим

цялата работа срещу действието на магнитните сили, е нужно да интегрираме този израз по x от някоя стойност на x, където полето е равно на нула, да речем от $x=-\infty$ до сегашното положение x_2:

$$W_2=-\int_{-\infty}^{x_2} F_2\,dx=-Ib\int_{-\infty}^{x_2} B(x)dx. \qquad (15.6)$$

По същия начин и работата срещу силите, които действуват на страна *1*, е равна на

$$W_1=-\int_{-\infty}^{x_1} F_1 dx=Ib\int_{-\infty}^{x_1} B(x)dx. \qquad (15.7)$$

За да изчислим всеки интеграл, трябва да знаем как $B(x)$ зависи от x. Но страната *1* при движението на рамката е разположена през цялото време успоредно на страната *2* на едно и също разстояние от нея, така че в нейния интеграл влиза почти цялата работа, извършена за преместването на страна *2*. Сумата на (15.6) и (15.7) всъщност е точно

$$W=-Ib\int_{x_1}^{x_2} B(x)dx. \qquad (15.8)$$

Но, когато попаднем в област, където B на двете страни *1* и *2* е почти еднакво, ние имаме право да запишем интеграла във вида

$$\int_{x_1}^{x_2} B(x)dx=(x_2-x_1)\,B=aB,$$

където B е полето в центъра на рамката. Цялата вложена механична енергия се оказва равна на

$$U_{\text{мех.}}=W=-IabB=-\mu B. \qquad (15.9)$$

Това се съгласува с израза за енергията (15.4), който бяхме избрали преди.

Разбира се, същият извод би се получил, ако ние бяхме събрали всички сили, които действуват на рамката, преди интегрирането. Ако бяхме означили с B_1 полето при страната *1*, а с B_2 — полето при страната *2*, цялата сила, която действува в посоката x, би се оказала равна на

$$F_x=Ib(B_2-B_1).$$

Ако рамката е „тясна“, т. е. ако B_1 и B_2 не се различават твърде помежду си, би могло да се напише

$$B_2=B_1+\frac{\partial B}{\partial x}\Delta x=B_1+\frac{\partial B}{\partial x}a.$$

Така че силата би била равна на

$$F_x=Iab\frac{\partial B}{\partial x}. \qquad (15.10)$$

Цялата работа, извършена от *външните* сили върху рамката, би била равна на

$$-\int_{-\infty}^{x} F_x dx=-Iab\int\frac{\partial B}{\partial x}dx=-IabB,$$

а това е пак $-\mu B$. Но сега на нас ни става ясно защо се получава, че *силата*, която действува на малка рамка с ток, е пропорционална на производната на магнитното поле, както това следваше да се очаква от

$$F_x\,\Delta x=-\Delta U_{\text{мех.}}=-\Delta(-\vec{\mu}\cdot\mathbf{B}). \qquad (15.11)$$

Другият резултат се състои в следното. Макар че формулата $U_{\text{мех.}} = -\vec{\mu}.\mathbf{B}$ може би не включва всички видове енергия (нали това е просто някаква имитация на енергия), все пак можем да се ползуваме от нея, като прилагаме принципа на виртуалната работа, за да намерим какви сили действуват на рамка с постоянен ток.

15-2. Механична и електрична енергия

Сега искаме да поясним защо енергията $U_{\text{мех.}}$, за която се говори в предишния параграф, не е истинска енергия, свързана с постоянните токове, защо няма пряка връзка с пълната енергия на цялата Вселена. Наистина ние подчертахме, че тя може да се използува като енергия, когато изчисляваме силите от принципа на виртуалната работа, *при условие* че токът в рамката (и всички *други* токове) не се изменя. Да видим сега защо все пак всичко излиза така.

Да си представим, че рамката на фиг. 15-2 се движи в посока $+x$, а оста z приемем за посока на **B**. Електроните на проводимостта в страната *2* ще изпитат действието на сила, която ги тласка по проводника, в посока y. Но в резултат на тяхното движение по проводника тече електрически ток и има съставяща на скоростта v_y в същата посока, в която действува силата. Затова над всеки електрон всяка секунда ще се върши работа $F_y v_y$, където v_y е компонентата на скоростта на електрона, насочена по проводника. Тази работа, извършвана над електроните, ние ще наричаме *електрическа*. Оказва се, че когато рамката се движи в *хомогенно* поле, пълната електрическа работа е равна на нула, защото на едната част на рамката работата е положителна, а на другата — равна по големина и отрицателна. Но при движението на рамката в нехомогенно поле това не е така — тогава *остава* някакъв чист излишък от едната работа над другата. Изобщо тази работа се стреми да измени потока от електрони, но ако той се поддържа неизменен, енергията се поглъща или освобождава в батерията или в другия източник, поддържащ тока постоянен. Ето именно тази енергия не се отчиташе, когато ние изчислявахме $U_{\text{мех.}}$ в (15.9), защото в нашите пресмятания влизаха само механичните сили, които действуват на проводника.

Вие можете да помислите: но силата, която действува на електроните, зависи от това, доколко *бързо* се движи проводникът; може би ако проводникът се движеше достатъчно бавно, би могло изобщо да се пренебрегне тази електрична енергия. Действително, *скоростта*, с която се освобождава електричната енергия, е пропорционална на скоростта на проводника, но все пак пълната отделена енергия е пропорционална при това още и на *времето*, в течение на което се е проявявала тази скорост. В резултат пълната отделена електрична енергия е пропорционална на произведението на скоростта по времето, а това е точно изминатото разстояние. На всяко изминато в полето разстояние отговаря дадено и при това едно и също количество електрическа работа.

Да вземем парче проводник с единица дължина, по което тече ток I. Проводникът се движи перпендикулярно на себе си и на магнитното поле **B** със скорост $v_{\text{пров.}}$. Благодарение наличието на ток самите електрони имат скорост на дрейфа по проводника $v_{\text{дрейф.}}$. Компонентата на магнитната сила, която действува на всеки електрон по посока на дрейфа, е равна на $q_e v_{\text{пров.}} B$. Значи скоростта, с която се върши електрическа работа, е $Fv_{\text{дрейф.}} = (q_e v_{\text{пров.}} B)\, v_{\text{дрейф.}}$. Ако на единица дължина на проводника има N проводящи електрони, цялата големина на електрическата работа, вършена за една секунда, е

$$\frac{dU_{\text{ел}}}{dt} = N q_e v_{\text{пров.}} B v_{\text{дрейф.}}.$$

Но $Nq_e v_{\text{дрейф.}}$ е равно на тока I в проводника, така че

$$\frac{dU_{\text{ел}}}{dt} = Iv_{\text{пров.}} B.$$

И тъй като токът се поддържа неизменен, силите, които действуват на електроните на проводимостта, не ги ускоряват; електричната енергия преминава не към електроните, а към този източник, който запазва силата на тока постоянна.

Но забележете, че силата, която действува на проводника, е равна на IB; значи $IBv_{\text{пров.}}$ е *механичната работа*, извършвана над проводника за единица време, $dU_{\text{мех.}}/dt = IBv_{\text{пров.}}$. Оттук заключаваме, че механичната работа на преместването на проводника е равна точно на електричната работа, която се извършва върху източника на тока, така че енергията на рамката *остава постоянна*!

Това не е случайност. Това е следствие на закона, който ние вече знаем. Пълната сила, която действува на всеки от зарядите в проводника, е

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

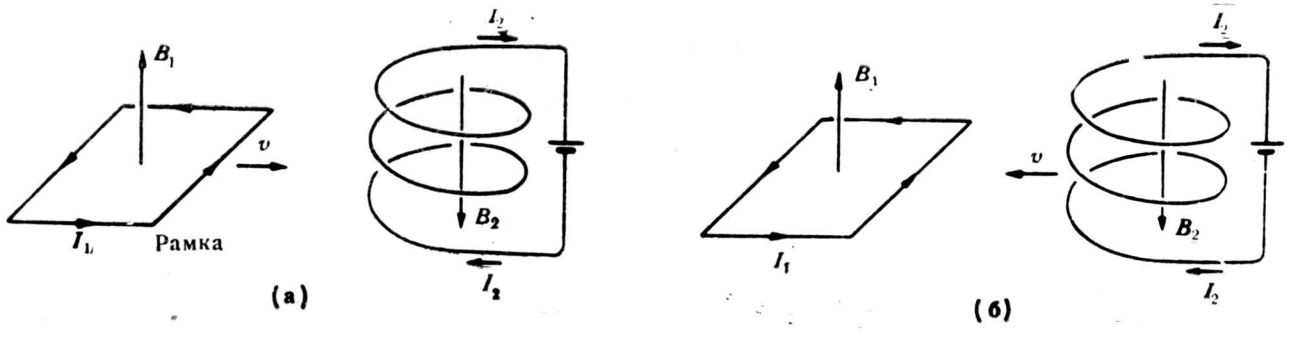
Скоростта, с която се извършва работата, е

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = q[\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})]. \qquad (15.12)$$

Ако няма електрично поле, остава само второто събираемо, което винаги е равно на нула. По-късно ние ще видим, че изменението на магнитните полета създава електрични полета, така че нашите разсъждения са приложими само към проводници в постоянни магнитни полета.

Но тогава защо принципът на виртуалната работа дава правилен отговор? Затова защото ние *засега* не отчитаме *пълната* енергия на Вселената. Ние не включваме в разглеждането енергията на тези токове, които *създават* магнитното поле, което присъствува от самото начало на нашите разсъждения.

Но да си представим пълна система като чертаната на фиг. 15-3 *а*, където рамката с ток I се вкарва в магнитното поле $\mathbf{B}_1$, създадено от тока I_2 в бобината. Токът I_1, който тече по рамката, също ще създава някакво магнитно поле $\mathbf{B}_2$ близо до бобината. Ако рамката се движи, полето $\mathbf{B}_2$ се изменя. В следващата глава ние ще видим, че изменящото се магнитно поле създава поле $\mathbf{E}$ и това поле наистина ще започне да действува на зарядите в бобината. Тази енергия сме длъжни да включим в нашия общ баланс на енергиите.



Фиг. 15-3. Изчисляване енергията на малка рамка в магнитно поле

Ние, разбира се, можехме да почакаме да говорим за този нов принос в енергията до следващата глава, но още сега можем да го оценим, ако използуваме съображенията на принципа на относителността. Когато движим рамката към неподвижната бобина, ние знаем, че електричната енергия на рамката е точно равна и противоположна по знак на извършената механична работа. С други думи,

$$U_{\text{мех.}} + U_{\text{ел}\,(\text{рамката})} = 0,$$

Сега да предположим, че ние гледаме на това, което става, от друга гледна точка: ще считаме, че рамката е в покой, а бобината се приближава към нея. Тогава бобината се движи в полето, създавано от рамката. Същите разсъждения ще доведат до израза

$$U_{\text{мех.}} + U_{\text{ел(бобината)}} = 0.$$

Механичната енергия в двата случая е една и съща — тя се определя само от силата, която действува между двата контура.

Събирането на двете уравнения дава

$$2U_{\text{мех.}} + U_{\text{ел(рамката)}} + U_{\text{ел(бобината)}} = 0.$$

Пълната енергия на цялата система е равна, разбира се, на сумата от двете електрични енергии и взетата само *един* път механична енергия. В резултат излиза

$$U_{\text{пълна}} = U_{\text{ел(рамката)}} + U_{\text{ел(бобината)}} + U_{\text{мех}} = -U_{\text{мех}}. \quad (15.13)$$

Пълната енергия на цялата система е всъщност $U_{\text{мех}}$ *със знак минус.* Ако ни е нужна да речем пълната енергия на магнитния дипол, трябва да напишем

$$U_{\text{пълна}} = +\vec{\mu}\cdot\mathbf{B}.$$

И само тогава, когато ние поискаме всички токове да остават постоянни, можем да използуваме само една от частите на енергията $U_{\text{мех}}$ (винаги равна на истинската енергия със знак минус) за изчисляване на механичните сили. В по-общите задачи трябва да внимаваме да не забравим нито една от енергиите.

Подобно положение се наблюдаваше и в електростатиката. Ние показахме там, че енергията на кондензатора е равна на $Q^2/2C$. Когато използуваме принципа на виртуалната работа, за да намерим силата, която действува върху плочите на кондензатора, изменението на енергията е равно на $Q^2/2$, умножено с изменението в $1/C$, т. е.

$$\Delta U = \frac{Q^2}{2}\Delta\left(\frac{1}{C}\right) = -\frac{Q^2}{2}\frac{\Delta C}{C^2} \quad (15.14)$$

Сега да предположим, че би трябвало да пресметнем работата, която се губи за приближаването на два проводника, но при друго условие — че напрежението между тях остава постоянно. Тогава правилната големина на силата бихме могли да получим от принципа на виртуалната работа, ако бихме постъпили по малко изкуствен начин. Тъй като $Q = CV$, пълната енергия е равна на $^1/_2CV^2$. Но ако ние бихме въвели условна енергия, равна на $-^1/_2CV^2$, принципът на виртуалната работа би могъл да се използува за получаване на силите, като положим изменението на тази условна енергия равно на механичната работа (при условие, че напрежението V се поддържа постоянно). Тогава

$$\Delta U_{\text{мех}} = \Delta\left(-\frac{CV^2}{2}\right) = -\frac{V^2}{2}\Delta C, \quad (15.15)$$

а това е същото, което е написано в уравнението (15.14). Ние получаваме правилен отговор, въпреки че пренебрегваме работата, която електричната система извършва за постоянното поддържане на напрежението. И тук електричната енергия е точно два пъти по-голяма от механичната и има обратен знак.

И така, ако правим пресмятането изкуствено, като пренебрегваме факта, че източникът на потенциал трябва да извършва работа, за да поддържа напрежението постоянно, все едно, ние ще стигнем до правилния резултат. Това точно съответствува на положението на нещата в магнитостатиката.

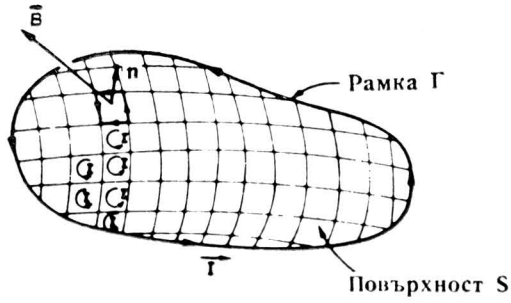
15-3. Енергия на постоянните токове

Като знаем, че $U_{\text{пълна}} = -U_{\text{мех.}}$, ще използуваме този факт, за да намерим истинската енергия на постоянните токове в магнитните полета. Можем да започнем с истинската енергия на малка рамка с ток. Като означим $U_{\text{пълна}}$ просто с U, ще напишем

$$U = -\vec{\mu}.\mathbf{B}. \tag{15.16}$$

Въпреки че тази енергия ние пресметнахме само за плоска правоъгълна рамка, всичко това е вярно и за малка плоска рамка с произволна форма.

Енергията на контур с произволна форма можем да намерим, като си представим, че той е съставен от малки рамки с ток. Да речем имаме проводник във формата на рамката Г (фиг. 15-4). Да опънем върху тази рамка повърхността S, а на нея да отбележим множество малки рамки, всяка от които можем да считаме плоска. Ако принудим тока I да циркулира по *всяка* рамчица, в крайна сметка ще се получи същото, както ако токът течеше само по рамка Г, тъй като токовете по всички вътрешни линии се унищожават взаимно. Системата от малки токове физически няма да се отличава от изходния контур и енергията трябва да бъде същата, т. е. трябва да бъде равна на сумата от енергиите на всички рамчици.



Фиг. 15-4. За енергия на голямата рамка в магнитно поле може да се счита сумата от енергиите на малките рамки

Ако площта на всяка рамчица е Δa, нейната енергия е равна на $I\Delta aB_n$, където B_n е компонентата на $\mathbf{B}$, перпендикулярна към Δa. Пълната енергия е равна на

$$U = \Sigma I B_n \Delta a.$$

В граничния случай, когато рамките стават безкрайно малки, сумата се превръща в интеграл и

$$U = I\int B_n da = I\int \mathbf{B}.\mathbf{n}da, \tag{15.17}$$

където $\mathbf{n}$ е единичният вектор на нормалата на da.

Ако положим $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$, повърхнинният интеграл може да бъде свързан с криволинеен (по теоремата на Стокс):

$$I\int_S \left(\nabla\times\mathbf{A}\right).\mathbf{n}da = I\oint_\Gamma \mathbf{A}.d\mathbf{s}, \tag{15.18}$$

където ds е елементарният линеен вектор на Г. И така, ние получихме енергията на контур с произволна форма:

$$U = I\oint_{\text{контур}} \mathbf{A}.d\mathbf{s}. \tag{15.19}$$

В този израз $\mathbf{A}$ означава, разбира се, векторния потенциал, възникващ вследствие на токовете (различни от тока I в проводника), които създават полето $\mathbf{B}$ около проводника.

По-нататък всякакво разпределение на постоянните токове може да считаме съставено от нишки, които вървят успоредно на тези линии, по които тече ток. За всяка двойка такива контури енергията се дава с израза (15.19), където интегралът е взет около единия от контурите, а векторният потенциал $\mathbf{A}$ е създаден от другия контур. Пълната енергия се получава чрез събиране на всички такива двойки. Ако вместо да следим за двойките, вземем пълната сума по всички нишки, всяка енергия ние ще отчетем два пъти (също такъв ефект наблюдавахме и в електростатиката) и пълната енергия може да бъде представена във вида

$$U = \frac{1}{2}\int \mathbf{j}.\mathbf{A}dV. \tag{15.20}$$

Това съответствува на получения за електростатичната енергия израз

$$U=\frac{1}{2}\int \rho\varphi dV. \tag{15.21}$$

Значи можем да разглеждаме **A**, ако пожелаем, като вид потенциална енергия на токовете в магнитостатиката. За съжаление тази представа не е много полезна, защото тя е вярна само за статични полета. В действителност, ако полетата се изменят с времето, нито изразът (15.20), нито изразът (15.21) дават правилната големина на енергията.

15-4. B или A?

В този параграф ни се иска да обсъдим такъв въпрос: какво е това векторен потенциал — просто полезно за пресмятанията приспособление (така в електродинамиката е полезен скаларният потенциал) или пък той като поле е напълно „реален"? Или пък „реално" е само магнитното поле, тъй като само то е отговорно за силата, която действува на движещата се частица?

Като начало трябва да се каже, че изразът „реално поле" няма реален смисъл. Първо, ние едва ли изобщо предполагаме, че магнитното поле е дори в някаква степен „реално", защото и самата идея за полето е нещо твърде отвлечено. Вие не можете да протегнете ръка и да опипате това магнитно поле. Освен това големината на магнитното поле също не е много определена; чрез избор на подходяща подвижна координатна система може например да се достигне изчезването на магнитното поле в дадена точка.

Под „реално" поле ние тук разбираме следното: реалното поле е математична функция, която ние използуваме, за да избегнем представата за далечно действие. Ако в точка P има заредена частица, върху нея оказват влияние други заряди, разположени на известно разстояние от P. Един начин, по който може да се опише взаимодействието, е да се говори, че останалите заряди създават някакви „условия" (какви — няма значение) в околността на P. Ако ние знаем тези условия (ние ги описваме, като задаваме електрично и магнитно поле), можем изцяло да определим поведението на частицата, без ни най-малко да се безпокоим след това какво именно е създало тези условия.

С други думи, ако тези останали заряди биха се изменили по някакъв начин, а условията в P, които се описват от електричното и магнитното поле в точка P, биха останали същите, движението на заряда също не би се изменило. „Реалното" поле тогава е съвкупност от числа, зададени така, че това, което става в *някоя точка*, зависи само от числата в *тази точка* и на нас повече не ни е необходимо да знаем какво става в другите места. Именно от такива позиции ние искаме да изясним явява ли се векторният потенциал „реално" поле.

Може да ви удиви фактът, че векторният потенциал не се определя по единствен начин, че може да го изменим, като добавим към него градиента на какъвто и да е скалар, а силите, които действуват на частицата, не се изменят. Това обаче няма нищо общо с въпроса за реалността в този смисъл, за който ние говорихме. Например магнитното поле се изменя някак при изменението на относителното движение (така както се изменят **E** и **A**). Но нас никак няма да ни тревожи това, че полето *може* да бъде изменяно по такъв начин. На нас това ни е безразлично; то никак не е свързано с въпроса, наистина ли векторният потенциал е „реално" поле, годно за описване на магнитните ефекти, или пък това е просто удобен математичен похват.

Трябва да направим още някои забележки за полезността на векторния потенциал **A**. Видяхме, че той може да се използува във формалната процедура за пресмятане на магнитните полета

на зададени токове точно така, както φ може да се използува за намиране на електричните полета. В електростатиката ние видяхме, че φ се дава със скаларния интеграл

$$\varphi(1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(2)}{r_{12}}\,dV_2. \tag{15.22}$$

От това φ ние получавахме трите компоненти на **E** с помощта на три диференцирания. Обикновено това беше по-лесно, отколкото да се изчисляват три интеграла във векторната формула

$$\mathbf{E}(1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(2)\mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2}\,dV_2. \tag{15.23}$$

Първо, те са три и, второ, всеки от тях изобщо е малко по-сложен, отколкото (15.22).

В магнитостатиката преимуществата не са така ясни. Самият интеграл за **A** е вече векторен:

$$\mathbf{A}(1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int\frac{\mathbf{j}(2)\,dV_2}{r_{12}}, \tag{15.24}$$

т. е. тук са написани три интеграла. Освен това, като изчисляваме ротацията на **A** за получаването на **B**, трябва да вземем шест производни и да ги разположим две по две. Отведнъж не е ясно по-просто ли е това, отколкото прякото изчисляване

$$\mathbf{B}(1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int\frac{\mathbf{j}(2)\times\mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2}\,dV_2. \tag{15.25}$$

В простите задачи често е по-трудно да се ползува векторният потенциал поради следната причина. Да предположим, че ни интересува магнитното поле **B** в само една точка, а задачата има някаква красива симетрия. Да речем, необходимо ни е да знаем полето в точка върху оста на кръгов ток. Вледствие на симетрията интегралът в (15.25) лесно се изчислява и веднага ще получите **B**. Обаче ако ние започнехме с **A**, би се наложило да изчисляваме **B** от *производните* на **A**, а за това би било нужно да знаем **A** във всички точки, *съседни* с тази, която ни интересува. По-голямата част от тях не лежат върху оста на симетрия и интегралът за **A** се усложнява. В задачата с пръстен например би се наложило да имаме работа с елиптични интеграли. В подобни задачи **A**, разбира се, не принася голяма полза. В много сложни задачи безспорно по-лесно е да се работи с **A**, но изобщо би било трудно да се доказва, че тези технически облекчения заслужават да се започне изучаването на още едно векторно поле.

Ние въведохме **A** затова, защото то *действително* има голямо физично значение. То не е просто свързано с енергиите на токовете (в което ние се убедихме в последния параграф), то е „реално“ физично поле в този смисъл, за който говорихме по-горе. В класическата механика силата, която действува на частицата, очевидно може да се напише във вида

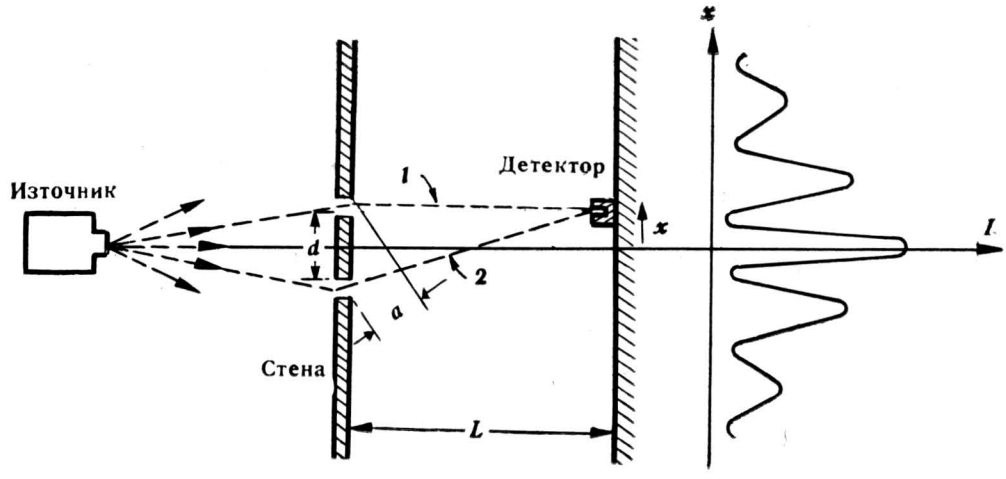
$$\mathbf{F}=q\,(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}), \tag{15.26}$$

така че, щом силите са зададени, движението става напълно определено. Във всяка област, където $\mathbf{B}=0$, макар **A** и да не е равно на нула (например извън соленоида), влиянието на **A** с нищо не се отразява. Затова дълго време се считаше, че **A** не е „реално“ поле. Оказва се обаче, че в квантовата механика съществуват явления, които свидетелствуват за това, че полето **A** наистина е напълно „реално“ поле в този смисъл, в който ние определихме тази дума. В следващия параграф ще покажем какво значи всичко това.

15-5. Векторният потенциал и квантовата механика

Когато преминаваме от класическата механика към квантовата, нашите представи за важността на едни или други понятия се изменят много. (Някои от тези понятия ние вече разглеждахме порано.) В частност постепенно изчезва понятието сила, а понятията за енергия и импулс придобиват първостепенна важност. Вместо за движение на частиците, както си спомняте, става дума вече за амплитудите на вероятностите, които се изменят в пространството и времето. В тези амплитуди влизат дължините на вълните, свързани с импулсите, и честотите, свързани с енергиите. Импулсите и енергиите определят фазите на вълновите функции и по тази причина са важни за квантовата механика. Вместо за сила сега става дума за това, по какъв начин взаимодействието изменя дължината на вълната. Представата за сила става вече второстепенна, ако въобще за нея още има смисъл да се говори. Даже когато например говорят за ядрени сили, всъщност като правило работят все пак с енергиите на взаимодействие на два нуклона, а не със силата на тяхното взаимодействие. На никого не идва наум да диференцира енергията, за да види каква е силата. В този параграф ние искаме да разкажем как възникват в квантовата механика векторният и скаларният потенциал. Оказва се, че именно заради това, че в квантовата механика главна роля играят импулсът и енергията, най-прекият път за въвеждане на електромагнитните ефекти в квантово описание е да се направи това с помощта на $\mathbf{A}$ и φ.

Трябва преди всичко бегло да напомним как действува квантовата механика. Ние отново ще се върнем към описания в гл. 37 (I том) въображаем опит, в който електроните изпитват дифракция от два процепа. На фиг. 15-5 е показано същото устройство. Електроните (всички те имат почти еднаква енергия) напускат източника и се движат към стена с два тесни процепа. Зад стената се намира „защитен“ вал — поглъщател с подвижен детектор. Този детектор е предназначен за измерване на честотата I, с която електроните попадат в малък участък на поглъщателя на раз-



Фиг. 15-5. Интерференчен опит с електрони

стояние x от оста на симетрия. Тази честота е пропорционална на вероятността отделен електрон, излетял от източника, да достигне този участък от „вала“. Вероятността има разпределение от сложен вид (то е показано на фигурата), която се обяснява с интерференцията на две амплитуди, по една от всеки процеп. Интерференцията на двете амплитуди зависи от разликата на фазите им. С други думи, когато амплитудите са равни на $Ce^{i\Phi_1}$ и $Ce^{i\Phi_2}$, фазовата разлика $\delta = \Phi_1 - \Phi_2$ определя интерференчната картина [виж т. I, гл. 29, уравнение (29.12)]. Ако разстоянието от

процепите до екрана е равно на L, а разликата в дължините на пътищата на електроните, които минават през двата процепа, е равна на a (както е показано на фигурата), фазовата разлика на двете вълни се дава с отношението

$$\delta = \frac{a}{\lambda}. \tag{15.27}$$

Както обикновено ние полагаме $\lambda = \lambda/2\pi$, където λ е дължината на вълната, която отговаря на пространственото изменение на амплитудата на вероятността. За по-просто ще разглеждаме само тези стойности на x, които са много по-малки от L; тогава може да се приеме

$$a = \frac{x}{L}\, d$$

и

$$\delta = \frac{x}{L}\ \frac{d}{\lambda}. \tag{15.28}$$

Когато x е равно на нула и δ е равно на нула; вълните се намират в еднаква фаза, а вероятността има максимум. Когато δ е равно на π, вълните са в противоположни фази, интерферират деструктивно и вероятността достига минимум. Така електронният интензитет получава вълнообразен вид.

Сега ние искаме да формулираме този закон, с който в квантовата механика се заменя законът за силата $\mathbf{F} = q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Този закон ще определя поведението на квантовомеханичните частици в електромагнитното поле. Тъй като всичко, което става, се определя от амплитудите, законът трябва да обясни как магнитното поле влияе на амплитудите; с ускоренията на частиците вече няма да имаме никаква работа. Този закон се състои в следното: присъствието на магнитно поле изменя фазата, с която амплитудата достига детектора, движейки се по някаква траектория, като големината на промяната на фазата е равна на интеграла от векторния потенциал по тази траектория, умножен с отношението на заряда на частицата към константата на Планк, т. е.

$$\begin{matrix}\text{Изменението на фазата под}\\ \text{влияние на магнитното поле}\end{matrix} = \frac{q}{\hbar}\int_{\substack{\text{Траек-}\\ \text{торията}}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}. \tag{15.29}$$

Ако нямаше магнитно поле, би се наблюдавала някаква определена фаза на пристигане. Ако пък някъде се появява магнитно поле, фазата на пристигане нараства с големината на интеграла в (15.29).

Въпреки че за нашите сегашни разсъждения това не е необходимо, все пак ще отбележим, че влиянието на електростатичното поле също се изразява в изменението на фазата, равно на интеграла *по времето* от скаларния потенциал φ със знак *минус*:

$$\begin{matrix}\text{Изменението на фазата под}\\ \text{влияние на електричното поле}\end{matrix} = -\frac{q}{\hbar}\int \varphi\, dt.$$

Тези два израза са валидни само за статични полета, но като ги обединим, ние ще получим правилен резултат за всяко статично или динамично електромагнитно поле. Именно този закон заменя формулата $\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$. Ние сега обаче ще говорим само за статично магнитно поле.

Да предположим, че опитът с двата процепа се провежда в магнитно поле. Ние искаме да узнаем с каква фаза достигат екрана две вълни, пътищата на които минават през два различни процепа. Тяхната интерференция определя мястото, където ще бъде максимумът на вероятността. Фазата на вълната, бягаща по траекторията (1), ние ще наречем Φ_1, а с $\Phi_1\ (B=0)$ ще означим фазата, когато няма магнитно поле. Тогава след включване на полето фазата ще достигне големината

$$\Phi_1 = \Phi_1(B=0) + \frac{q}{\hbar}\int_{(1)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}. \tag{15.30}$$

Аналогично фазата на траектория (2) е

$$\Phi_2 = \Phi_2 (B=0) + \frac{q}{\hbar} \int\limits_{(2)} \mathbf{A} \,.\, d\mathbf{s}. \tag{15.31}$$

Интерференцията на вълните в детектора зависи от фазовата разлика

$$\delta = \Phi_1 (B=0) - \Phi_2 (B=0) + \frac{q}{\hbar} \int\limits_{(1)} \mathbf{A} \,.\, d\mathbf{s} - \frac{q}{\hbar} \int\limits_{(2)} \mathbf{A}. \, d\mathbf{s}. \tag{15.32}$$

Фазовата разлика при отсъствие на поле ще означим с $\delta (B=0)$; това е същата тази разлика, която пресметнахме в уравнението (15.28). Освен това ние виждаме, че от двата интеграла може да се направи един, който отива напред по пътя (1), а назад — по пътя (2); този затворен път ще се означава с (1—2). Така че се получава

$$\delta = \delta (B=0) + \frac{q}{\hbar} \oint\limits_{(1-2)} \mathbf{A}. \, d\mathbf{s}. \tag{15.33}$$

Това уравнение ни показва как под действието на магнитното поле се изменя движението на електрона; с негова помощ ние можем да намерим новите положения на максимумите и минимумите на интензитета.

Преди да направим това, ние искаме обаче да поставим един интересен и важен въпрос. Вие помните, че във вектор-потенциалната функция има известен произвол. Две различни вектор-потенциални функции $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$, отличаващи се с градиента $\nabla\psi$ на някаква скаларна функция, представляват едно и също магнитно поле (защото ротацията от градиента е равна на нула). Затова те довеждат до една и съща класическа сила $q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Ако в квантовата механика всички ефекти зависят от векторния потенциал, то *коя* от многото възможни $\mathbf{A}$-функции е правилна?

Отговорът е, че в квантовата механика продължава да съществува същият произвол в $\mathbf{A}$. Ако в уравнението (15.33) ние заменим $\mathbf{A}$ с $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$, интегралът от $\mathbf{A}$ ще се превърне в

$$\oint\limits_{(1-2)} \mathbf{A}' . \, d\mathbf{s} = \oint\limits_{(1-2)} \mathbf{A} \,.\, d\mathbf{s} + \oint\limits_{(1-2)} \nabla\psi . d\mathbf{s}.$$

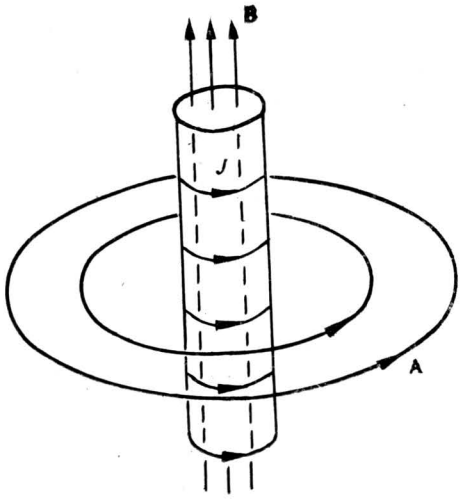
Интегралът от $\nabla\psi$ се изчислява по *затворения* път (1—2); но интегралът от допирателната компонента на градиента по затворен път е винаги равен на нула (по теоремата на Стокс). Затова както $\mathbf{A}$, така и $\mathbf{A}'$ довеждат до едни и същи разлики във фазите и до едни и същи квантовомеханични ефекти на интерференция. И в класическата, и в квантовата теория е важна само ротацията от $\mathbf{A}$; всяка функция $\mathbf{A}$, на която ротацията е такава, каквато трябва, довежда до правилна теория.

Същият извод става очевиден, ако ние използуваме резултатите, приведени в гл. 14-1. Там показахме, че криволинейният интеграл от $\mathbf{A}$ по затворен път е равен на потока $\mathbf{B}$ през контура, а в дадения случай — на потока между пътищата (1) и (2). Уравнението (15.33) може, ако искаме, да напишем така

$$\delta = \delta (B=0) + \frac{q}{\hbar} [\text{потока на } \mathbf{B} \text{ между (1) и (2)}], \tag{15.34}$$

където под потока на $\mathbf{B}$ както обикновено се разбира повърхнинният интеграл от нормалната компонента на $\mathbf{B}$. Резултатът зависи само от $\mathbf{B}$, т. е. само от ротацията от $\mathbf{A}$.

Но тъй като резултатът може да се изразява и чрез $\mathbf{B}$, и чрез $\mathbf{A}$, може да се създаде впечатлението, че $\mathbf{B}$ запазва своите позиции на „реално“ поле, а $\mathbf{A}$ все още изглежда изкуствено образование. Но определението за „реално“ поле, което ние отначало предложихме, се основаваше на идеята за това, че „реалното“ поле не би могло да действува на частицата от разстояние. Ние пък

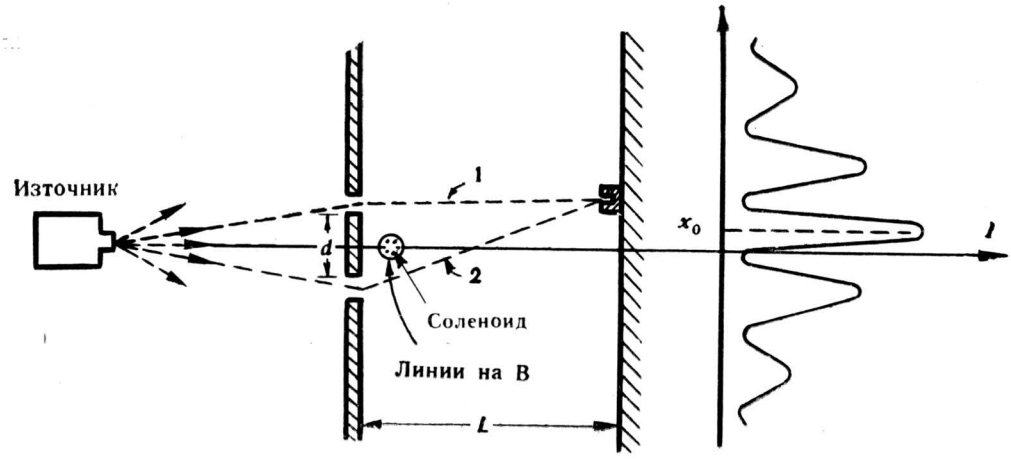


Фиг. 15-6. Магнитно поле и векторен потенциал на дълъг соленоид

се заемаме да приведем пример, в който **B** е равно на нула (или най-малко на колкото си искаме малко число) във всяко място, където могат да се окажат частиците, така че е невъзможно да си представим, че **B** *непосредствено* действува на тях.

Вие помните, че ако има дълъг соленоид, по който тече електричен ток, полето **B** съществува вътре в него, а отвън няма поле, въпреки че множество вектори **A** циркулират извън соленоида (фиг. 15-6). Ако ние създадем такива условия, че електроните да преминават само *извън* соленоида (само там, където има **A**), съгласно уравнението (15.33) соленоидът все пак ще влияе на движението им. А това е невъзможно според класическите представи. Според класическите представи силата зависи само от **B**. За да узнае тече ли по соленоида ток, частицата трябва да мине през него. А квантовата механика твърди, че наличието на магнитно поле в соленоида може да се установи, просто *заобикаляйки го*, даже без да се приближаваме плътно до него!

Представете си, че ние сме поставили един много дълъг соленоид с малък диаметър направо тук зад стената между двата процепа (фиг. 15-7). Диаметърът на соленоида трябва да бъде много по-малък от разстоянието d между процепите. При тези условия дифракцията на електроните от процепа няма да доведе до забележими вероятности електроните да се промъкнат някъде близо до соленоида. Как всичко това ще повлияе на нашия интерференционен експеримент?



Фиг. 15-7. Магнитното поле е способно да влияе на движението на електроните, даже когато то съществува само в област, където вероятността да се намери електрон е пренебрежимо малка

Да сравним двата случая: когато по соленоида тече ток и когато няма ток. Ако няма ток, няма нито **B**, нито **A** и се получава първоначалната картина на електронните интензитети покрай поглъщателя. Ако включим тока и създадем вътре в соленоида магнитно поле **B**, отвън ще се появи поле **A**. Ще се появи отместване във фазовите разлики, пропорционално на циркулацията на **A** извън соленоида, а това означава, че картината на максимумите и минимумите ще се отмести. Действително, тъй като потокът на **B** между кои да е два пътя е постоянен, също така постоянна е и циркулацията на **A**. За коя да е точка на пристигане фазата се променя еднакво; поради това цялата картина ще се отмести по x с определена стойност, да речем с x_0, Тази стойност x_0 може лесно да се изчисли. Максимален интензитет възниква там, където фазовата разлика на двете вълни е равна на нула. Като заместим δ с израза (15.32) или (15.33), а δ (**B** = 0) с израза (15.28), получаваме

$$x_0 = -\frac{L}{d}\lambda\,\frac{q}{\hbar}\oint_{(1-2)}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} \qquad (15.35)$$

или $$x_0 = -\frac{L}{d}\,\lambda\,\frac{q}{\hbar}\,[\text{потока на } \mathbf{B} \text{ между (1) и (2)}]. \qquad (15.36)$$

Картината при наличие на соленоид ще изглежда така[1], както е показано на фиг. 15-7. Най-малко така предсказва квантовата механика.

Неотдавна е бил направен точно такъв опит. Това е извънредно сложен опит. Дължината на вълната на електроните е много малка, затова уредът трябва да бъде миниатюрен, иначе интерференцията няма да се забележи. Процепите трябва да лежат плътно един до друг, а това означава, че е необходим извънредно тънък соленоид. Оказва се, че при някои условия кристалите на желязото израстват във вид на твърде дълги и микроскопично тънки нишки. Ако намагнитим тези железни нишки, те образуват малък соленоид, който отвън няма магнитно поле (то се проявява само в краищата). И ето, направен бил опит по интерференция на електроните с желязна нишка, поставена между двата процепа и предсказаното отместване на електронната картина се потвърдило.

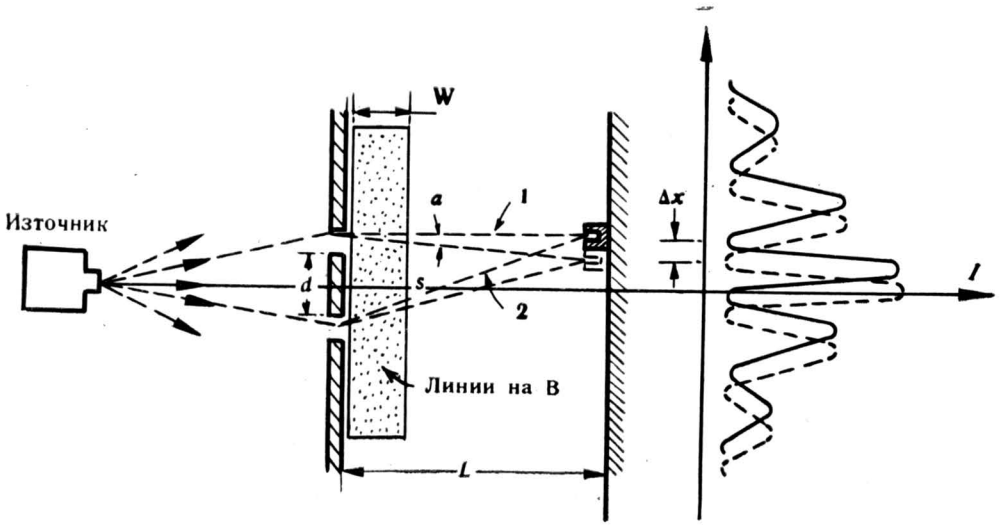
А в такъв случай полето **A** е вече „реално“ в нашия смисъл на думата. Вие можете да възразите: „Но нали там има магнитно поле“. Да, има, но припомнете си нашата изходна идея — „реално“ е само такова поле, което, за да определи движението на частицата, трябва да бъде зададено в *това място*, където тя се намира. Полето **B** в нишката действува от разстояние. Ако ние не искаме неговото влияние да изглежда като действие от разстояние, ние трябва да ползуваме векторния потенциал.

Този проблем има интересна история. Теорията, която ние изложихме, е била известна от самото възникване на квантовата механика в 1926 г. Самият факт, че векторният потенциал се появява във вълновото уравнение на квантовата механика (така нареченото уравнение на Шрьодингер), е бил очевиден от момента, в който то е било написано. В това, че той не може да бъде заменен с магнитното поле, са се убеждавали всички, които са се опитвали да направят това; един след друг всички се убеждаваха, че прост път за това не съществува. Това е ясно и от нашия пример, когато електронът се движи в област, където няма никакво поле и въпреки това се подлага на въздействие. Но тъй като в класическата механика **A** нямаше непосредствено, важно значение и освен това можеше да се изменя чрез добавяне на градиент, хората отново и отново повтаряха, че векторният потенциал не притежава пряк физически смисъл, че даже в квантовата механика „правà“ имат само електричните и магнитни полета. Когато погледнеш назад, струва ти се странно, че никой не е и помислил да обсъди този опит чак до 1956 г., когато Бом и Ааранов за пръв път го предложиха и направиха целия въпрос кристално ясен. Всичко това винаги се е подразбирало, но никой не му е обръщал внимание. И много бяха просто потресени, когато изплува този въпрос. Ето по тази причина някои счетоха за нужно да се направи опит и се убедят, че всичко това е действително така, макар че квантовата механика, в която ние вярваме вече толкова години, даваше напълно недвусмислен отговор. Забавно е, че подобни неща могат тридесет години да бъдат пред очите на всички, но поради определени предразсъдъци относно това кое е съществено и кое не, могат да се игнорират от всички.

Сега искаме да продължим малко нашия анализ. Ние ще демонстрираме връзката между квантовомеханичната и класическата формула, за да покажем защо се оказва, че при макроскопичен поглед върху нещата всичко изглежда така, като че ли частиците се управляват от сила, равна на произведението от $q\mathbf{v}$ и

---

[1] Ако полето **B** излиза от равнината на чертежа към нас, потокът в съответствие с неговото определение ще бъде отрицателен, а x_0 — положително.



Фиг. 15-8. Отместване на интерференчната картина поради наличието на ивичка магнитно поле

ротацията на **A**. За да получим класическата механика от квантовата, необходимо е да разгледаме случаи, когато всички дължини на вълните са малки в сравнение с разстоянията, на които се изменят забележимо външните условия (например полетата). Ние няма да доказваме резултата в най-общ вид, а само ще покажем всичко с твърде прост пример. Да се върнем отново към същия пример с процепите. Но сега вместо да напъхваме цялото магнитно поле в теснината между процепите, да си представим такова магнитно поле, което се е разпростряло зад процепите като широка лента (фиг. 15-8). Да вземем идеалния случай, когато в тясна лента с ширина w, много по-малка от L, магнитното поле е хомогенно. (Това е лесно да се направи, трябва само поглъщателят да се постави по-далеч.) За да пресметнем отместването по фаза, ние сме длъжни да решим двата интеграла от **A** по двете траектории (1) и (2). Както видяхме, разликата им е просто потокът на **B** между тези пътища. В нашето приближение потокът е равен на Bwd. Поради това фазовата разлика за двата пътя е равна на

$$\delta = \delta\,(B=0) + \frac{q}{\hbar} Bwd. \tag{15.37}$$

Ние забелязваме, че в приетото приближение отместването на фазите не зависи от ъгъла, така че отново ефектът се свежда към отместване на цялата картина нагоре с Δx. От формулата (15.28)

$$\Delta x = \frac{L\lambda}{d}\,\Delta\delta = \frac{L\lambda}{d}[\delta - \delta\,(B=0)].$$

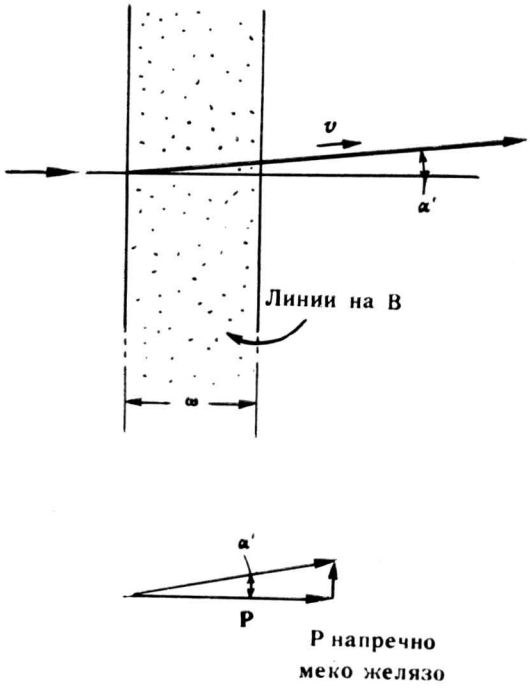
Като вземем $\delta - \delta\,(B=0)$ от (15.37), получаваме

$$\Delta x = L\lambda\,\frac{q}{\hbar} Bw. \tag{15.38}$$

Такова отместване е равностойно на отклонението на всички траектории на малък ъгъл α (виж фиг. 15-8), равен на

$$\alpha = \frac{\Delta x}{L} = \frac{\lambda}{\hbar} q\,Bw. \tag{15.39}$$

Според класическите възгледи ние би трябвало също да очакваме, че тясната ивица на магнитното поле ще отклони всички траектории на някакъв малък ъгъл, да речем α' (фиг. 15-9, а). Когато електроните минават през магнитното поле, те се подлагат на действието на напречна сила $q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ за време w/v. Измене-



Фиг. 15.9. Отклонение на частичката поради преминаването ѝ през магнитно поле

нието на техния напречен импулс е просто равно на самия него така че

$$\Delta p_x = qwB. \tag{15.40}$$

Ъгловото отклонение (фиг. 15-9, б) е равно на отношението на този напречен импулс към пълния импулс p. Ние получаваме

$$\alpha' = \frac{\Delta p_x}{p} = \frac{qwB}{p}. \tag{15.41}$$

Този резултат може да се сравни с уравнение (15.39), в което същата тази величина се изчисляваше по квантовомеханичен път. В това именно се състои връзката между класическата и квантовата механика — че на частица с импулс p се съпоставя квантова амплитуда, която се изменя като вълна с дължина $\lambda = \hbar/p$. В съответствие с това уравнение α и α' се оказват идентични; и класическите, и квантовите изчисления довеждат до едно и също.

От този анализ ние виждаме как става така, че векторният потенциал, който в квантовата механика се появява в явен вид, предизвиква класическа сила, зависеща само от неговите производни. В квантовата механика е съществена само интерференцията между съседните пътища; в нея винаги се оказва, че ефектът зависи само от това, колко силно се изменя полето **A** от точка в точка, а следователно само от производните на **A**, а не от самото поле. Въпреки това векторният потенциал **A** (заедно със съпровождащия го скаларен потенциал φ) изглежда, че води до по-пряко описване на физичните процеси. Колкото по-дълбоко проникваме в квантовата теория, толкова по-очевидно става това. В общата теория — квантовата електродинамика — в системата от уравнения, която замени уравненията на Максвел, векторните и скаларните потенциали вече се считат фундаментални величини. Векторите **E** и **B** постепенно изчезват от съвременното изразяване на физичните закони: тях ги изместват **A** и φ.

15-6. Кое е вярно за статиката, а е невярно за динамиката?

Нашето изследване на статичните полета се приближава към своя край. В тази глава ние се доближихме опасно близко до такова място, когато вече следва да си помислим за това, какво ще се случи, ако полетата започнат да се изменят с времето. Говорейки за магнитната енергия, на нас едва ни се удаде да избегнем това, и то защото се прикрихме с релативистични съображения. Даже при това нашата трактовка на проблема за енергията изглежда малко изкуствена и може би дори тайнствена, защото ние игнорирахме факта, че движещите се бобини трябва всъщност да създават изменящи се полета. Сега е моментът да преминем към изучаването на полетата, които се изменят с времето, към това, което съставя предмета на електродинамиката. Ние ще направим това в следващата глава. Обаче преди това следва да се подчертаят някои моменти.

Макар и да започнахме този курс с това, че представихме пълните и точни уравнения на електромагнетизма, ние веднага се заловихме да изучаваме някакви отделни части, защото така беше по-лесно. Голямо преимущество е възможността да се започне с простата теория на статичните полета и чак след това да се премине към по-сложната теория, която включва динамичните полета. При това от самото начало се налага да се учи помалко нов материал и остава време да се потренират мозъците, да раздвижим своите умствени мускули, преди да пристъпим към по-трудните задачи.

Но в такъв процес се крие една опасност — докато ние не сме чули целия разказ напълно, у нас може да се вкорени и да се представи за пълна тази непълна истина, която сме успели да усвоим; всичко в главата ще се объркa: това, което е вярно винаги, и това, което е вярно само от време на време. Затова в таб-

Таблица 15-1 **Списък на най-важните формули**

Не винаги вярно (а само в статиката)	Вярно винаги
$\mathbf{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$ (закон на Кулон)	$\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ (сила на Лоренц) $\rightarrow \nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (закон на Гаус)
$\nabla\times\mathbf{E}=0$ $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$ $\mathbf{E}(1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(2)\mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2}dV_2$ За проводниците $\mathbf{E}=0$, φ е постоянно, $Q=CV$	$\rightarrow \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ (закон на Фарадей) $\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ В проводника $\mathbf{E}$ създава токове
$c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}$ (закон на Ампер) $\mathbf{B}(1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int\frac{\mathbf{j}(2)\times\mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2}dV_2$	$\rightarrow \nabla\cdot\mathbf{B}=0$ (няма магнитни заряди) $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$ $\rightarrow c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}+\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$
$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (уравнение на Пуасон) и $\nabla^2\mathbf{A}=-\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0c^2}$, при условие $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$	$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ и $\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0c^2}$, при условие $c^2\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$
$\varphi(1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(2)}{r_{12}}dV_2$ и $\mathbf{A}(1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int\frac{\mathbf{j}(2)}{r_{12}}dV_2$	$\varphi(1,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(2,t')}{r_{12}}dV_2$ и $\mathbf{A}(1,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int\frac{\mathbf{j}(2,t')}{r_{12}}dV_2$, където $t'=t-\frac{r_{12}}{c}$
$U=\frac{1}{2}\int\rho\varphi\,dV+\frac{1}{2}\int\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}\,dV$	$U=\frac{1}{2}\int(\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}+\varepsilon_0c^2\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\,dV$

Със стрелка (→) са отбелязани уравненията на Максвел за празното пространство.

лица 15-1 ние даваме справка за най-важните формули, които смзасягали, като отделяме в нея тези, които са верни в общия слуе чай, от тези, които се съблюдават само в статиката, но са неверни в динамиката. Тази справка съдържа намек за това, накъде собствено ние с вас отиваме; изучавайки динамиката, ще трябва да развием детайлно това, което засега се налагаше да описваме без доказателства.

Може би тук трябва да направим няколко забележки по повод самата таблица. Преди всичко вие трябва да обърнете внимание на това, че уравненията, с които започнахме, са *правилните* уравнения, на това място ние не ви въвеждаме в заблуждение. Формулата за електромагнитната сила (често наричана *сила на Лоренц*) $\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ е също така *правилна*. Неверен е само законът на Кулон; той е годен само за статиката. Четирите уравнения на Максвел за $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ са също правилни. Уравненията, които приехме в статиката, са грешни, защото изхвърлихме от тях всички членове с производни по времето.

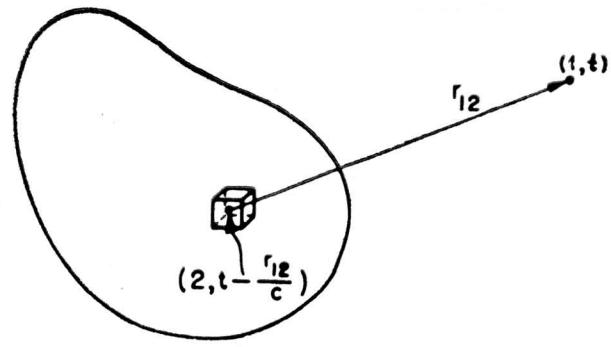
Законът на Гаус $\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0$ остава, но ротацията на $\mathbf{E}$ в общия случай *не е равна* на нула. Значи не може винаги да при-

равняваме **E** с градиента на скалар — електростатичния потенциал. Ние ще видим, че скаларният потенциал все пак остава, но това вече е величина, която се изменя във времето и трябва да се употребява за пълното описание на електричното поле само заедно с векторния потенциал. Разбира се, уравненията, които управляват този скаларен потенциал, също са нови.

Ние сме принудени да се простим също така с представата за това, че **E** в проводниците е равно на нула. Когато полетата се изменят, зарядите в проводниците, общо казано, не успяват да се престроят така, че полето през цялото време да се превръща в нула. Те се задвижват, но никога не достигат равновесие. Единственото общо твърдение е следното: електричните полета създават токове в проводниците. И така, в променливи полета проводниците *не са* еквипотенциални повърхности. Но оттук също така следва, че представата за капацитет не може да се направи универсална.

Тъй като магнитни заряди не съществуват, дивергенцията на **B** винаги е равна на нула. Така че **B** може винаги да се приравнява на $\nabla\times\mathbf{A}$. (Излиза, че не всичко се изменя!) Но **B** се генерира не само от токове; $\nabla\times\mathbf{B}$ е пропорционално на плътността на тока *плюс* новото събираемо $\partial\mathbf{E}/\partial t$. Това означава, че **A** е свързано с токовете посредством ново уравнение. То е свързано и с φ. Ако ние за собствено удобство се възползуваме от свободата на избора на $\nabla\cdot\mathbf{A}$, уравненията за **A** и φ могат да се запишат така, че да придобият прост и изящен вид. Затова ние поставяме изискването $c^2\nabla\cdot\mathbf{A}$ да бъде равно на $-\partial\varphi/\partial t$ и тогава диференциалните уравнения за **A** или за φ ще бъдат такива, каквито са в таблицата.

Потенциалите **A** и φ все още могат да се изразят във вид на интеграли от токовете и зарядите, но това вече *не са същите тези* интеграли, които бяха в статиката. Най-удивителното от всичко обаче е това, че правилният вид на интегралите прилича на предишния, статическия, но с едно малко видоизменение, което има ясен физичен смисъл. Когато ние пресмятаме интегралите, за да получим потенциалите в някоя точка, да речем в точка (*1*) на фиг. 15-10, ние сме длъжни да използуваме стойностите на **j** и ρ в точка (*2*) *за по-ранно време* $t'=t-r_{12}/c$. Както и следваше да се очаква, влиянието на точка (*2*) върху точка (*1*) се разпространява със скорост c. Това малко видоизменение позволява да се намират полетата на изменящите се токове и заряди, защото, щом като намерим **A** и φ, **B** се получава както и по-рано като $\nabla\times\mathbf{A}$, а $\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\partial\mathbf{A}/\partial t$.



Фиг. 15-10. Потенциалите в точка (*1*) в момент t се получават чрез сумиране на приносите от всеки елемент на източника на полето в текущата точка *(2)*, при условие че токовете и зарядите в тази точка се взимат в по-ранното време $t-r_{12}/c$

Накрая вие виждате от таблицата, че някои изводи, получени в статиката (например изводът за това, че плътността на енергията в електричното поле е равна на $\varepsilon_0E^2/2$), остават в сила и в електродинамиката. Не трябва да се лъжем и да мислим, че всичко това е естествено. Правилността на всяка формула, изведена в статичен случай, трябва в динамиката да се доказва отново. Например ние знаем, че обемният интеграл от $\rho\varphi$ също дава електростатичната енергия. Но това е вярно *само* в статиката.

Когато му дойде времето, ние детайлно ще анализираме всички тези въпроси; засега е полезно да помним тази таблица, за да знаем, кое не е грях да позабравим, и кое следва да смятаме вярно винаги.

16

Индуцирани токове

16-1. Мотори и генератори

16-1. Мотори и генератори

16-2. Трансформатори и индуктивности

16-3. Сили, които действуват на индуцираните токове

16-4. Електротехника

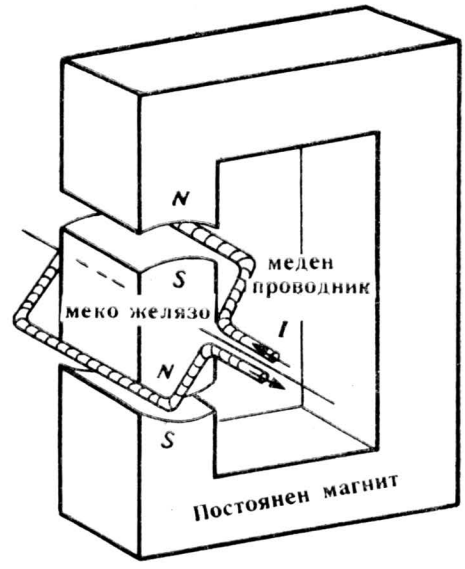
Откриването на тясната връзка между електричеството и магнетизма, станало в 1820 г., било наистина вълнуващо събитие— дотогава те са се считали съвършено независими. Отначало открили, че токовете в проводниците създават магнитни полета, а след това в същата година забелязали, че на проводниците в магнитно поле действуват сили.

Вълнението било предизвикано от това, че механичната сила, която възниква, може да се използува в машина за извършване на някаква работа. Веднага след това забележително откритие хората започнали да конструират електромотори, принуждавайки да работят за тях силите, които действуват върху проводниците с ток. Принципът на устройството на електромотора схематично е показан на фиг. 16-1. Постоянен магнит (обикновено в него има няколко части от меко желязо) създава магнитно поле вътре в два процепа. Краят на всеки процеп представлява северен или южен полюс, както е показано на схемата. Правоъгълна рамка от медна жица се поставя така, че попада във всеки процеп с по една от своите страни. Когато по рамката преминава ток, в двата процепа той тече в противни посоки, така че силите се оказват насочени противоположно и създават в рамката момент на въртене около показаната на схемата ос. Ако рамката е закрепена на оста така, че може да се върти, можем да я закрепим към предавателни шайби или зъбни колела и заставим да върши полезна работа.

Същата идея може да се използува и при конструиране на чувствителни прибори за електрични измервания. Така че незабавно след откриването на закона за силите точността на електричните измервания се увеличила много. Преди всичко моментът на въртене на такъв мотор може да бъде значително увеличен за даден ток, ако го заставим да протича по няколко навивки, а не по една. Освен това рамката може да се постави така, че да се върти под действието на много малък момент, като закрепим нейната ос в грижливо направени лагери или като я окачим на много тънка жица или кварцова нишка. Тогава даже извънредно слаб ток ще накара бобинката да се завърти и за малки ъгли големината на завъртането ще бъде пропорционална на тока. Ъгълът на завъртане може да се измери, като залепим към рамката стрелка или (за много фини прибори) като закрепим малко огледалце към рамката и отбелязваме преместването на неговия образ върху скалата. Такива прибори наричат галванометри. Волтметрите и амперметрите работят на същия принцип.

Същите идеи могат да бъдат използувани в голям мащаб за създаване на мощни мотори, извършващи механична работа. Рамката можем да заставим да се върти много, много пъти, ако с помощта на закрепени на оста контакти посоката на тока в нея се изменя на противоположна всеки половин оборот. Тогава моментът на силата ще бъде винаги насочен в една и съща посока. Малките мотори за постоянен ток са устроени именно така. В моторите с големи размери за постоянен или променлив ток постоянните магнити често се заменят с електромагнити и те се захранват от източника на електрична енергия.

Когато разбрали, че електричният ток поражда магнитно поле, мнозина веднага предположили, че така или иначе магнитите трябва също да създават електрични полета. За проверка на това пред-



Фиг. 16-1. Схема на прост електромагнитен мотор

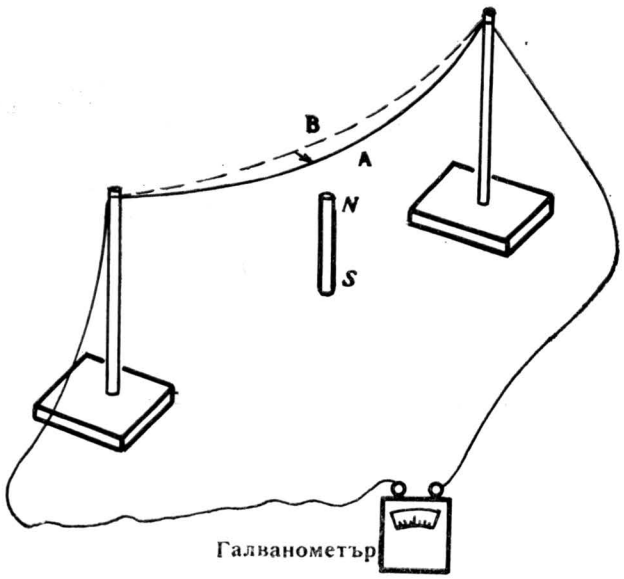
положение били направени различни експерименти. Например поставяли два проводника успоредно един на друг и по единия от тях пропускали ток, като се опитвали да открият ток в другия проводник. Идеята се заключавала в това, че магнитното поле би могло някак да промъкне електроните по втория проводник по закон, който би трябвало да се формулира например така: „еднаквото се стреми да се движи по еднакъв начин". Но пропускайки по единия проводник най-силен ток и използувайки най-чувствителен галванометър, не се удало да открият ток във втория проводник. Големите магнити също не давали никакъв ефект в разположените наблизо проводници. На края в 1840 г. Фарадей открил съществена особеност, която по-рано не взимали пред вид — електрични ефекти възникват само тогава, когато нещо *се изменя*. Ако в единия от двата проводника токът *се изменя*, в другия също се предизвиква ток или пък ако магнит *се движи* близко до електричен контур, там възниква ток. Ние сега казваме, че токовете в тези случаи се *индуцират*. В това се и състояло явлението индукция, открито от Фарадей. То преобразува доста скучната област на статичните полета в увлекателната динамична област, в която стават огромен брой удивителни явления. Тази глава е посветена на качественото описание на някои от тях. Както ще видим, може доста бързо да се попадне в много сложни ситуации. които трудно се поддават на подробен количествен анализ. Но това не е важно. Нашата главна задача в тази глава е отначало да ви запознаем с кръга на включващите се тук явления. Подробен анализ ще направим малко по-късно.

От това, което вече знаем, е лесно да разберем някои неща за магнитната индукция, това, което не е било известно по времето на Фарадей. Ние знаем за съществуването на действуваща на движещия се заряд сила $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, която е пропорционална на скоростта му в магнитното поле. Нека имаме жица, която се движи близо до магнит (фиг. 16-2), и нека ние сме включили краищата на жицата към галванометър. Когато жицата минава над полюсите на магнита, стрелката на галванометъра се отмества.

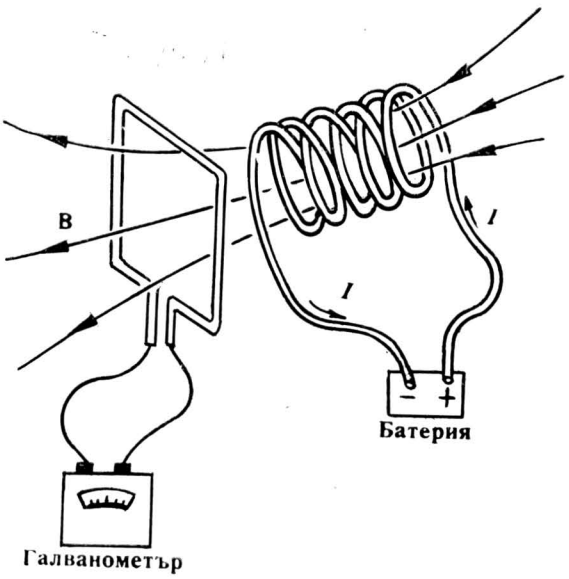
Магнитът създава вертикално магнитно поле и когато ние движим жицата напряко на полето, електроните в жицата чувствуват сила, която е *насочена настрани*, т. е. перпендикулярно на полето и посоката на движението. Силата тласка електроните по дължината на жицата. Но защо при това се задвижва стрелката на галванометъра, който е разположен толкова далеч от тази сила? Затова защото електроните, изпитващи магнитната сила, започват да се движат и тласкат (за сметка на електричното отблъскване) другите електрони, намиращи се малко по-далеч по проводника, а те на свой ред отблъскват още по-далечните електрони и така нататък на голямо разстояние. Любопитно нещо.

Това така удивило Гаус и Вебер, който построил за пръв път галванометър, че те се опитали да определят колко надалеч се разпространяват силите по жицата. Те протегнали жица през целия град и единия й край Гаус съединил с батерия (батериите са били известни по-рано от генераторите), а Вебер наблюдавал как се отмества стрелката на галванометъра. Те намерили начин да се предават сигнали на голямо разстояние — това е било раждането на телеграфа! Разбира се, това няма пряко отношение към индукцията, тук ставаше дума за начина за предаване на тока по жицата, за това, действително ли токът се придвижва за сметка на индукцията, или не.

Да предположим сега, че в постановката, изобразена на фиг. 16-2, ние оставяме жицата в покой, а движим магнита. И отново наблюдаваме на галванометъра ефект. Още Фарадей е открил, че движението на магнита под проводника (един начин) предизвиква също такъв ефект, както и движението на проводника над магнита (друг начин). Но когато се движи магнитът, върху електроните на проводника вече не действува силата $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Ето това представлява новото явление, което е открил Фарадей. Днес ние



Фиг. 16-2. Движението на проводник в магнитно поле създава ток (това регистрира галванометърът)



Фиг. 16-3. Бобина с ток индуцира ток в друга бобина, ако първата бобина се мести или ако токът в нея се изменя

можем да се опитаме да го разберем с помощта на принципа на относителността.

Ние вече разбрахме, че магнитното поле на магнитите възниква за сметка на неговите вътрешни токове. Затова ние очакваме появяването на също такъв ефект, ако вместо магнита на фиг. 16-2 вземем бобина от проводник, по който тече ток. Ако движим проводника край бобината, галванометърът ще открие ток точно така, както и в този случай, когато бобината се движи покрай проводника. Но съществува и още по-удивително нещо: ако изменяме магнитното поле на бобината *не за сметка* на движението ѝ, а за сметка на *изменението на тока в нея,* галванометърът отново ще покаже наличието на ефект. Например ако разположим рамка от проводник редом с бобината (фиг. 16-3), при което те и двете са неподвижни и изключим тока, през галванометъра ще мине импулс на ток. Ако отново включим тока в бобината, стрелката на галванометъра ще се люшне в противната посока.

Всеки път, когато през галванометъра в постановката, показана на фиг. 16-2 или 16-3, минава ток, в проводника в определена посока възниква резултантно налягане върху електроните В различни места електроните могат да бъдат тласнати в различни страни, но в една посока напорът се оказва по-голям, отколкото в друга. Трябва да се отчита само налягането на електроните, сумирано по цялата верига. Ние наричаме този резултантен напор на електроните *електродвижещо напрежение на веригата* (е. д. н.). По-точно електродвижещото напрежение се определя като тангенциалната сила, действуваща на един заряд, интегрирана по дължината на проводника по цялата верига. Откритието на Фарадей изцяло се е състояло в това, че електродвижещото напрежение в проводника може да се създаде по три начина: движейки проводника, движейки магнита близо до проводника или изменяйки тока в съседния проводник.

Да се обърнем отново към простия уред, който е показан на фиг. 16-1, само че сега няма да пропускаме ток през проводника, за да му придадем въртене, а ще завъртим рамката с помощта на външна сила, например с ръка или с помощта на водно колело. При въртене на рамката нейните проводници се движат в магнитно поле и ние откриваме във веригата на рамката електродвижещо напрежение. Моторът се превърна в генератор.

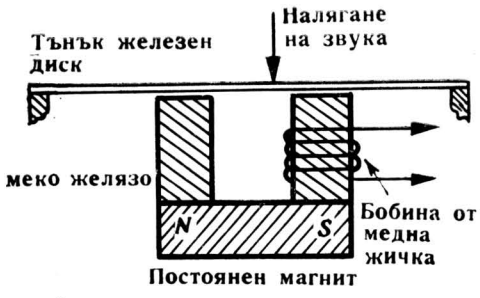
Индуцираното електродвижещо напрежение възниква в боби-

ната на генератора за сметка на движението ѝ. Големината на електродвижещото напрежение се дава с просто правило, открито от Фарадей. (Сега ние просто ще формулираме това правило, а малко по-късно ще го анализираме подробно.) Правилото е такова: ако магнитният поток, който минава през рамката (този поток е нормалната компонента на **B**, интегрирана по площта на рамката), се изменя с времето, електродвижещото напрежение е равно на скоростта на изменението на потока. По-нататък ние ще наричаме това „правило на потока". Вие виждате, че когато, бобината на фиг. 16-1 се върти, потокът през нея се изменя. Отначало, да речем, потокът върви в една посока, а когато бобината се обърне на 180°, същият поток минава през бобината другояче. Ако непрекъснато въртим бобината, потокът отначало ще бъде положителен, след това отрицателен, после отново положителен и т. н. Скоростта на изменение на потока трябва също да се изменя. Следователно в бобината възниква променливо електродвижещо напрежение. Ако съединим двата края на бобината с външни проводници посредством пълзящи контакти, които се наричат контактни пръстени (просто за да не се усукват проводниците), ние получаваме генератор за променлив ток.

С помощта на пълзящите контакти може да се направи и така че през всеки половин оборот съединението между краищата на бобината и външните проводници да става противоположно, така че когато електродвижещото напрежение измени своя знак и съединението да стане противоположно. Тогава импулсите на електродвижещото напрежение ще тласкат ток винаги в една посока по външната верига. Ние получаваме така наречения генератор за постоянен ток.

Уредът, който е показан на фиг. 16-1, може да бъде или мотор, или генератор. Връзката между моторите и генераторите се демонстрира добре с помощта на два еднакви „мотора" за постоянен ток с постоянни магнити, бобините на които са съединени с два медни проводника. Ако завъртим механически ръчката на единия от „моторите", той става генератор и задвижва втория като мотор. Ако пък въртим ръчката на втория, генератор вече става той, а първият работи като мотор. И така, тук ние се срещаме с интересен пример на нов род еквивалентност в природата: моторът и генераторът са еквивалентни. Количествената еквивалентност всъщност не е съвсем случайна. Тя е свързана със закона за запазване на енергията.

Друг пример за устройство, което може да работи за създаване на електродвижещо напрежение или да възприема действието на електродвижещото напрежение, представлява приемната част на обикновения телефон, т. е. „слухофон". Първият телефон на Бел се е състоял от два такива „слухофона", съединени с два дълги проводника. Основният принцип на това устройство е показан на фиг. 16-4. Постоянен магнит създава магнитно поле в две сърцевини от меко желязо и в тънък железен лист — мембрана, която се привежда в движение от звуковото налягане. При движение мембраната изменя големината на магнитното поле в сърцевината. Следователно потокът през бобината, намотан около една от сърцевините, се изменя, когато звуковата вълна попада на мембраната. Тогава в бобината възниква електродвижещо напрежение. Ако краищата на бобината са свързани към верига, в нея се появява ток, който представлява електричен образ на звука.



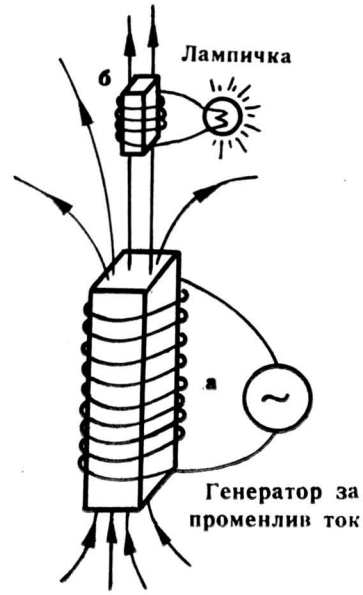
Фиг. 16-4. Приемащо или предаващо устройство на телефон

Ако краищата на бобината на фиг. 16-4 съединим с два проводника към друго също такова устройство, по втората бобина ще протече изменящ се ток. Този ток ще създаде изменящо се магнитно поле и ще застави да се изменя и силата на притегляне на желязната мембрана. Тя ще започне да трепти и ще породи звукови вълни, подобни на тези, които движеха първата мембрана. С помощта на малки парченца желязо и мед човешкият глас се предава по проводниците!

(Приемниците в съвременните домашни телефони приличат на току-що описания, но се използуват вече подобрени предаватели, за да се получи по-голяма мощност. Това са „микрофони с въглена мембрана“, в която звуковото налягане изменя електричния ток от батерия.)

16-2. Трансформатори и индуктивности

Една от най-интересните страни на откритието на Фарадей се състои съвсем не в това, че електродвижещото напрежение възниква в движещата се бобина, това ние можем да разберем с помощта на магнитната сила $q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Главното е в това, че изменението на тока в едната бобина създава електродвижещо напрежение във втората бобина. И вече съвсем удивително е, че големината на електродвижещото напрежение, предизвикано във втората бобина, се дава със същото това „правило на потока“: електродвижещото напрежение е равно на скоростта на изменение на магнитния поток през бобината. Да вземем например две бобини (фиг. 16-5), всяка от които е намотана на отделно снопче от железни пластинки (с тяхна помощ може да се създадат по-силни магнитни полета). Да включим сега една от бобините — бобина *a* — към генератор за променлив ток. Непрекъснато изменящият се ток създава непрекъснато изменящо се магнитно поле. Такова изменящо се магнитно поле генерира променливо електродвижещо напрежение във втората бобина — бобина *b*. Това електродвижещо напрежение например е способно да застави да гори електрическа лампичка.



Фиг. 16-5. Две бобини, намотани на снопчета железни пластинки, позволяват да запалим лампичката, без да я съединяваме пряко с генератора

В бобината *b* електродвижещото напрежение се изменя с честота, разбира се, равна на честотата на първия генератор. Но токът в бобината *b* може да бъде по-голям или по-малък от тока в бобината *a*. Токът в бобината *b* зависи от индуцираното в нея електродвижещо напрежение и от съпротивлението и индуктивността на останалата част от нейната верига. Това електродвижещо напрежение може да бъде по-малко от електродвижещото напрежение на генератора, ако, да речем, изменението на потока е малко. Или пък електродвижещото напрежение в бобината *b* може да се окаже по-голямо от електродвижещото напрежение на генератора, ако на бобината *b* навием много навивки, тъй като в този случай в даденото магнитно поле потокът през бобината ще бъде по-голям. (Може, ако искате, да кажете това иначе — във всяка навивка електродвижещото напрежение е едно и също и тъй като пълното електродвижещо напрежение е равно на сумата от електродвижещите напрежения на отделните навивки, по-голям брой навивки създава като цяло по-голямо електродвижещо напрежение.)

Такава комбинация от две бобини (обикновено с комплект от железни пластинки, които повишават магнитното поле) се нарича *трансформатор*. Той може да „трансформира“ едно електродвижещо напрежение в друго.

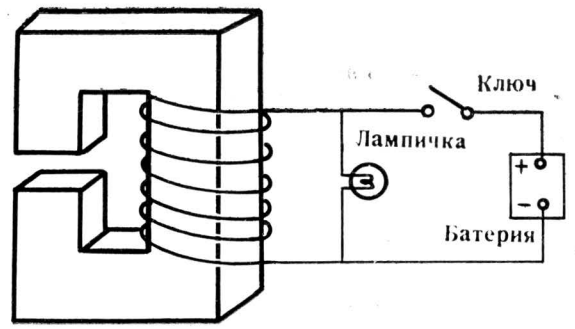
Ефектите на индукция възникват и в една отделна бобина. Например в постановката, която е показана на фиг. 16-5, изменящият се поток минава не само през бобина *b*, която запалва лампичката, но и през бобина *a*. Изменящият се ток в бобина *a* създава изменящо се магнитно поле вътре в самата нея и потокът на това поле непрекъснато се изменя, така че в бобината *a* се получава *самоиндуцирано електродвижещо напрежение.*

Електродвижещо напрежение, действуващо на тока, възниква тогава, когато неговото собствено магнитно поле расте или, в общия случай, ако неговото собствено магнитно поле се изменя по какъвто и да е начин. Този ефект се нарича *самоиндукция.*

Когато ние въведохме „правилото на потока“, утвърждаващо, че електродвижещото напрежение е равно на скоростта на изменение на потока, ние не определихме посоката на електродвижещото напрежение. Съществува просто правило (наричано правило на Ленц) за определяне посоката на електродвижещото напреже-

ние. Електродвижещото напрежение се стреми да *пречи за* всякакво изменение на потока. Другояче казано, посоката на индуцираното електродвижещо напрежение е винаги такава, че ако потечеше ток в посоката на електродвижещото напрежение, той би създал поток на полето **B**, който пречи за изменението на полето **B**, създаващо това електродвижещо напрежение. От правилото на Ленц можем да се ползуваме, за да намерим посоката на електродвижещото напрежение в генератора, показан на фиг. 16-1, или в намотката на трансформатора (фиг. 16-3).

В частност ако токът в отделна бобина (или в какъвто и да е отделен проводник) се изменя, възниква „обратно" електродвижещо напрежение във веригата. Това електродвижещо напрежение действува на зарядите, които текат в бобина *a* на фиг. 16-5, като пречи за изменението на магнитното поле и затова е насочено така, че да пречи за изменението на тока. То се стреми да запази тока постоянен; електродвижещото напрежение е противоположно на тока, когато токът се увеличава, и е насочено по посока на тока, когато той намалява. При самоиндукция токът притежава „инерция", защото ефектите на индукцията се стремят да запазят потока постоянен точно така, както механичната инерция се стреми да запази скоростта на тялото неизменна.



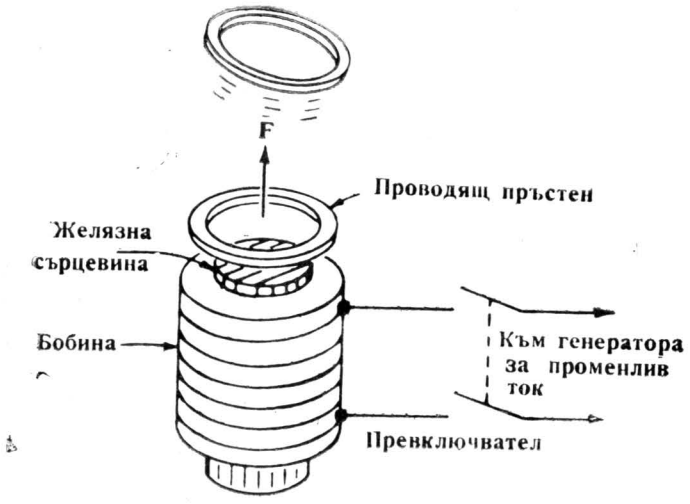
Фиг. 16-6. Включване на електромагнит във верига.

Лампичката отваря път на тока в момента на изключване, като пречи на възникването на прекалено голямо електродвижещо напрежение на контактите на ключа

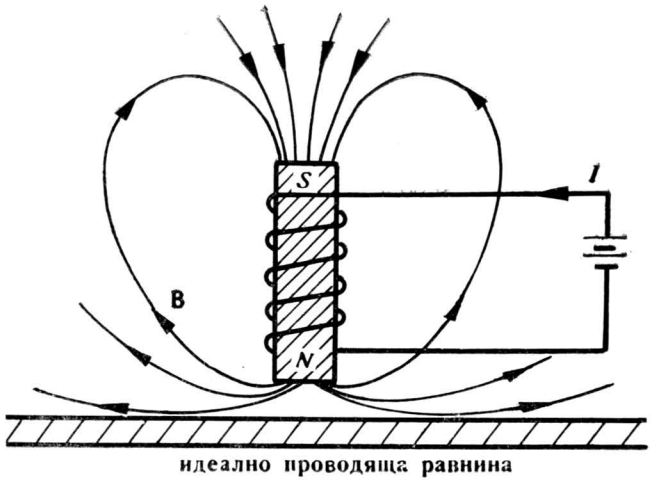
Всеки голям електромагнит притежава голяма самоиндукция. Нека например към бобината на голям електромагнит е свързана батерия (фиг. 16-6) и нека се е установило силно магнитно поле. (Токът достига постоянна големина, която се определя от напрежението на батерията и от съпротивлението на проводника на бобината.) Но сега да предположим, че ние се опитваме да изключим батерията, като отворим ключа. Ако ние наистина бяхме разкъсали веригата, токът бързо би намалял до нула и в процеса на намаляване би създал огромно електродвижещо напрежение. В повечето случаи такова електродвижещо напрежение се оказва напълно достатъчно, за да се образува волтова дъга между отворените контакти на ключа. Голямото напрежение, което възниква, би могло да нанесе вреда на бобината, а и на вас, ако именно вие бихте отваряли ключа! По тези причини електромагнитите обикновено се включват във веригата приблизително така както е показано на фиг. 16-6. Когато превключвателят е отворен, токът не се изменя бързо, а продължава да тече през лампата, оставайки постоянен за сметка на електродвижещото напрежение, от самоиндукцията на бобината.

16-3. Сили, които действуват на индуцираните токове

Вие вероятно сте наблюдавали великолепната демонстрация на правилото на Ленц с помощта на приспособлението, което е изобразено на фиг. 16-7. Това е точно такъв електромагнит, както бобина *a* на фиг. 16-5. На единия край на електромагнита се намира алуминиев пръстен. Ако с помощта на превключвател свържем бобината с генератор за променлив ток, пръстенът излетява във въздуха. Силата се поражда от токове, които се индуцират в пръстена. Фактът, че пръстенът отлетява настрани, показва, че



Фиг. 16-7. Проводящият пръстен се отблъсква силно от електромагнита, когато в него се изменя токът



Фиг. 16-8. Електромагнит близо до идеално проводяща равнина

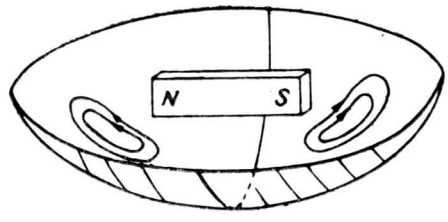
токовете в него пречат на изменението на полето, минаващо през пръстена. Когато северният полюс на магнита се намира от горната страна, индуцираният в пръстена ток създава северен полюс отдолу. Пръстенът и бобината се отблъскват точно така, както два магнита, допрени с еднакви полюси. Ако в пръстена направим тънък разрез по радиуса, силата изчезва — убедително доказателство за това, че тя действително е обусловена от токовете в пръстена.

Ако вместо пръстен в края на магнита поставим алуминиев или меден диск, и той се отблъсква; индуцираните токове циркулират в материала на диска и отново предизвикват отблъскване.

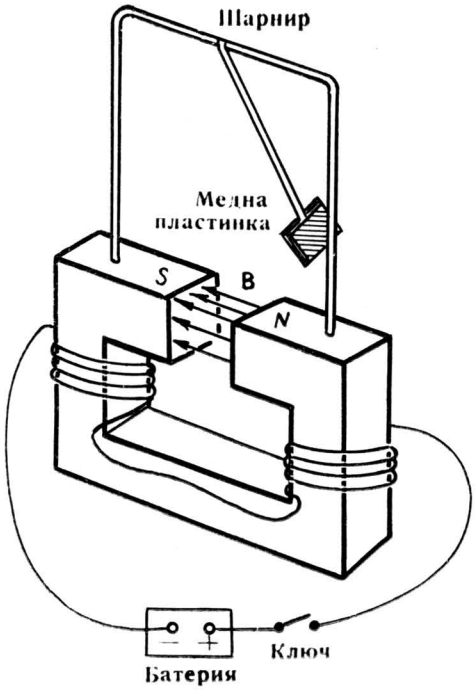
Интересен ефект, в основата си приличен на предишния, се получава с лист от идеален проводник. В „идеалния проводник" токът съвсем не среща съпротивление. Затова възникналите в него токове могат да текат, без да престават. Фактически и *най-малкото* електродвижещо напрежение би създало колкото искаме голям ток, а това на практика означава, че в него изобщо не може да има електродвижещо напрежение. Всеки опит да създадем магнитен поток, който да минава през такъв лист, ще предизвика токове, образуващи противоположно насочени полета **B** — всички с колкото искаме малки електродвижещи напрежения, така че никакъв поток няма да има.

Ако ние поднесем електромагнит към лист идеален проводник при включване на ток в магнита в листа възникват токове (наречени вихрови токове) и никакъв магнитен поток няма да мине. Линиите на полето ще имат вида, показан на фиг. 16-8. Същото ще се случи, ако към идеален проводник поднесем постоянен магнит. Тъй като вихровите токове създават противоположни полета, магнитите се отблъскват от проводника. Затова се оказва възможно да закачим постоянен магнит във въздуха над лист от идеален проводник, изготвен във формата на чиния (фиг. 16-9). Магнитът ще се поддържа във въздуха за сметка на отблъскването на индуцираните вихрови токове в идеалния проводник. При обикновени температури идеални проводници не съществуват, но някои материали при достатъчно ниски температури стават идеални проводници. Така при температура, по-ниска от 3,8°K, калаят става идеален проводник; тогава той се нарича свръхпроводник.

Ако проводникът, който е показан на фиг. 16-8, не е напълно идеален, възниква известно съпротивление на протичането на вихровите токове. Токовете ще замират постепенно и магнитът бавно ще се спусне. В неидеален проводник на вихровите токове е необходимо известно електродвижещо напрежение, за да текат по-нататък, а за възникването на електродвижещо напрежение потокът трябва непрекъснато да се мени. Потокът на магнитното поле постепенно прониква в проводника.



Фиг. 16-9. Магнитната пръчица се отблъсква от вихровите токове и увисва над чашата от свръхпроводник



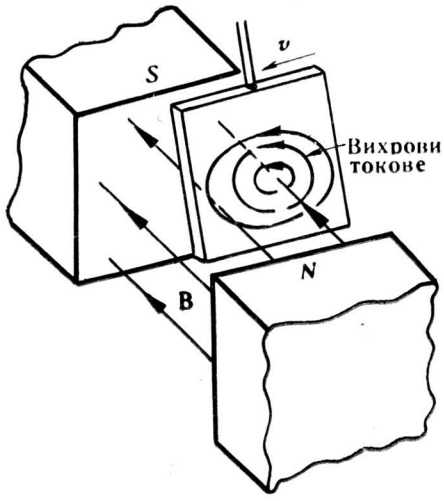
Фиг. 16.10. Спирането на махалото говори за сили, които възникват благодарение на вихровите токове

В обикновен проводник съществуват не само сили на отблъскване за сметка на вихровите токове, но може да има и странични сили. Например ако ние преместваме магнит над проводящ повърхност, вихровите токове създават спираща сила, защото ин дуцираните токове се противопоставят на изменението на потока. Такива сили са пропорционални на скоростта и приличат на силите на вискозитета.

Тези ефекти се наблюдават добре на прибора, който е показан на фиг. 16-10. Квадратната медна пластинка е закрепена на края на пръчка, образувайки махало. Пластинката се люлее назад и напред между полюсите на електромагнит. Когато електромагнитът се включва, движението на пластинката неочаквано се прекратява. Щом като металическата пластинка попадне в междината на магнита, в нея се индуцира ток, който се стреми да попречи на изменението на потока през пластинката. Ако пластинката беше идеален проводник, токовете биха били толкова големи, че те отново биха изтласкали пластинката и тя би отскочила назад. Но в медната пластинка има някакво съпротивление, затова токовете отначало заставят пластинката почти да замре неподвижно, когато тя започва да навлиза в полето. По-нататък, според това, как токовете замират, пластинката продължава бавно да се движи в магнитното поле и спира съвсем.

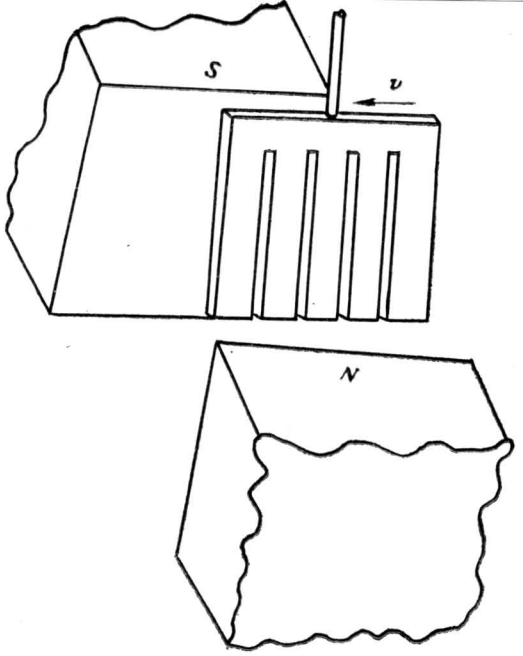
Схемата на вихровите токове в медното махало се пояснява от фиг. 16-11. Силата и разположението на токовете са твърде чувствителни към формата на пластинката. Ако, да кажем, вземем вместо медната пластинка друга, в която има редица тесни процепи (фиг. 16-12), ефектите на вихровите токове силно ще се намалят. Махалото минава през магнитното поле само с малка спираща сила. Причината е в това, че токовете във всяка част на пластинката се възбуждат от по-малки по големина потоци и следователно ефектите на съпротивление на всяка рамка се оказват по-големи. Колкото по-малки са токовете, толкова по-малко е и спирането. Вискозният характер на силата се проявява още по-нагледно, ако поставим медната пластинка между полюсите на магнита и след това я пуснем. Пластинката не пада, тя просто бавно се спуска. Вихровите токове оказват силно съпротивление на движението — буквално като лепкавото съпротивление на меда.

Ако ние не промъкваме проводника покрай магнита, а се опитаме да го въртим в магнитно поле, в него ще възникне в резултат на същите ефекти спиращ момент. И обратно, ако въртим магнит, като изменяме местата на неговите полюси близо до проводяща плоскост или пръстен, пръстенът ще се обърне след магнита. Токовете в пръстена ще създадат момент, който се стреми да завърти пръстена заедно с магнита.

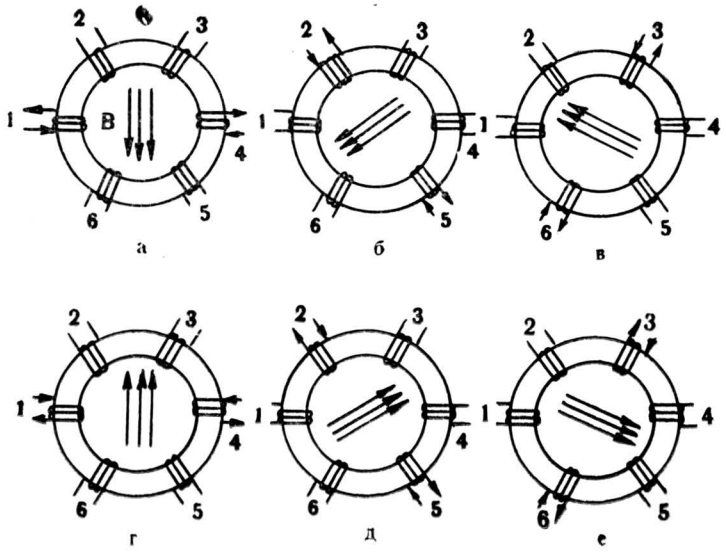


Фиг. 16-11. Вихровите токове в медното махало

Поле, което твърде прилича на полето на въртящ се магнит, може да се създаде с помощта на устройство от бобини (фиг 16-13). Ние взимаме железен тороид (т. е. железен пръстен във вид на геврек) и намотаваме на него шест бобини. Като насочим тока така, както е показано на фиг. 16-13, *а*, през намотките *1* и *4*, ние ще получим магнитно поле в посоката, показана със стрелките. Ако след това превключим тока към намотките *2* и *5*, магнитното поле ще бъде насочено вече другояче (фиг. 16-13, б). Като продължаваме да действуваме така, ние получаваме последователността от полета, показани на останалите части от нашата фигура. Ако процесът се провежда плавно, ще се получи „въртящо се“ магнитно поле. Като съединим бобините към мрежа с трифазен ток (а тя дава именно такава последователност на токовете), ние лесно ще получим исканата последователност на токовете. „Трифазният ток“ се създава от генератор, който използува принципа от фиг. 16-1 с това изключение, че на оста се закрепват симетрично *три* рамки, т. е. всяка под ъгъл 120° към съседната. Когато рамките се въртят като едно цяло, електродвижещото напрежение е максимално в едната рамка, след това в другата и т. н. в правилна последователност. Трифазният ток има много практически преимущества. Едно от тях се състои във възможността да получим въртящо се магнитно поле. Моментът, с



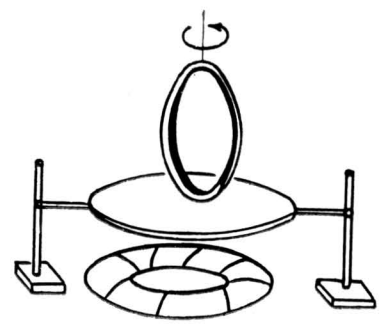
Фиг. 16-12. Ефектите от вихровите токове силно се намаляват, ако в пластинката се направят процепи



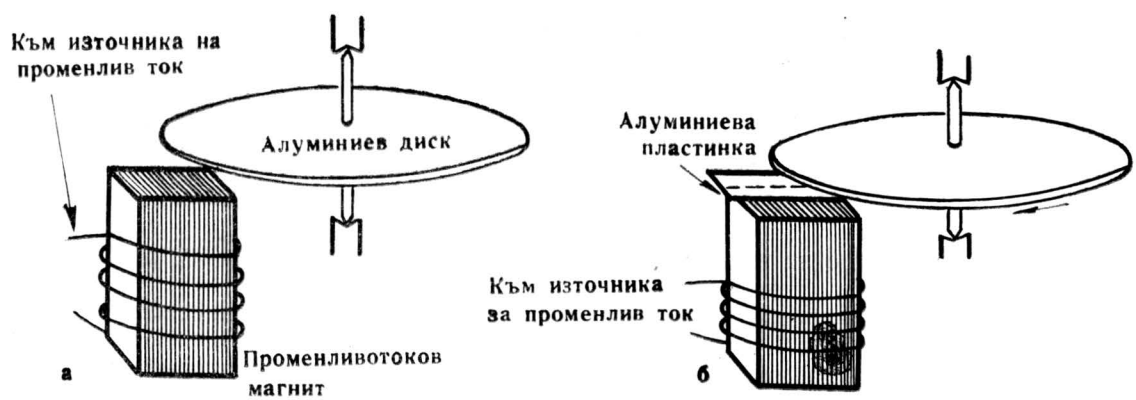
Фиг. 16-13. Създаване на въртящо се магнитно поле

който действува на проводника такова въртящо се магнитно поле, се забелязва лесно върху металически пръстен, поставен на изолирана поставка точно над тороида (фиг. 16-14). Въртящото се поле предизвиква въртене на пръстена около вертикалната ос. Тук се виждат същите основни елементи, които съществуват в големите промишлени трифазни индукционни мотори.

Друг тип индукционен мотор е показан на фиг. 16-15. Това устройство не е пригодно за практически високоефективни мотори, но илюстрира основния принцип. Електромагнитът *M*, който се състои от пачка валцувани железни листове, на които е навита спирална намотка, се захранва от генератор за променлив ток. Магнитът създава променлив поток на полето **B** през алуминиев диск. Ако имаме само тези две компоненти (виж фиг. 16-15, *а*), ние още нямаме мотор. В диска съществуват вихрови токове, но те са симетрични и момент не възниква. (Дискът ще се нагрява малко за сметка на индукционните токове.) Ако сега ние покрием само едната половина на магнитния полюс с алуминиева пластинка (фиг. 16-15, *б*), дискът ще започне да се върти и ние ще получим мотор. Неговото действие е свързано с два ефекта на вихровите токове. Първо, вихровите токове в алуминиевата пластинка пречат на изменението на потока през нея, затова магнитното поле над пластинката винаги изостава от полето над непокритата част на полюса. Този така наричан ефект на „засенчения полюс“ създава поле, което в засенчената“ област се изменя точно така, както и в „незасенчената“, с изключение на постоянното закъсняване по



Фиг. 16-14. С помощта на въртящо се магнитно поле може да се придаде момент на въртене на пръстена от проводник



Фиг. 16-15. Прост пример за индукционен мотор със засенчен полюс

време. Ефектът като цяло е такъв, като че ли съществува два пъти по-тесен магнит, който непрекъснато се премества от незасенчената област в засенчената. Второ, изменящите се полета взаимодействуват с вихровите токове в диска, създавайки в него момент на сила.

16-4. Електротехника

Когато Фарадей за пръв път публикувал своето забележително откритие, че изменението на магнитния поток създава електродвижещо напрежение, него го попитали (както питат впрочем всеки, който открива някакви нови явления): „Каква е ползата от това?“ Нали всичко, което той открил, било твърде странно — в проводника възниквал мъничък ток, когато той движел проводника около магнита. Каква „полза“ може да има от това? Фарадей отговорил: „Каква полза може да има от новороденото?“

А сега спомнете си за тези грамадни практически приложения, към които доведе неговото откритие. Всичко, което ние описвахме, съвсем не са играчки; това са примери, които са избрани в болшинството си така, че да представят принципа на тази или онази практическа машина. Например въртящият се пръстен във въртящо се поле — това е индукционен мотор. Съществува, разбира се, известна разлика между пръстена и практически използуемия индукционен мотор. Моментът на пръстена е твърде малък; протегнете ръката си и можете да го спрете. В добрия мотор детайлите трябва по-добре да пасват: магнитното поле не трябва така щедро „да се прахосва“ във въздуха. Първо, с помощта на желязо полето се концентрира. Ние не говорихме как прави това желязото, но то е способно да увеличи магнитното поле десетки и хиляди пъти в сравнение с полето само на бобината. Второ, междините между частите на желязото се правят малки; затова желязото даже се вгражда вътре във въртящия се пръстен. С една дума, всичко е насочено към това, да се получат най-големи сили и максимална ефективност, т. е. да се превърне електричната мощност в механична, и такъв „пръстен“ вече не може да се задържи с ръка.

Задачата за намаляване на междините и установяване на най-практичен режим на работа е задача на *инженерната* наука. Тя иска сериозно изучаване на проблема за конструирането, въпреки че никакви нови принципи за получаване на сила не съществуват. Но от основните принципи до практическото и икономично проектиране има дълъг път. И именно прецизната инженерно-конструкторска работа направи възможна такава грандиозна вещ, като хидростанцията Боулдер Дам и всичко, което е свързано с нея.

Какво е това Боулдер Дам? Огромна река, преградена с бетонна стена. Но каква стена! Огъната във вид на идеално плавна крива, щателно пресметната така, че колкото се може по-малко бетон да задържа напора на реката. Стената надолу става по-дебела, образувайки чудесна форма, на която се любуват художниците, но която са способни да оценят само инженерите, защото те разбират колко хубаво е това. Те знаят, че удебелението се определя от това, как расте налягането на водата в дълбочина. Но ние се отвлякохме от електричеството.

След това водата от реката се вмъква в огромна тръба. Даже само по себе си това е забележително инженерно съоръжение. По тръбата водата се предава към „водното колело“ — огромна турбина — и заставя колелото да се върти. (Още едно достижение на техниката.) Но защо въртят колелата? Те са присъединени към невероятно объркана смесица от желязо и мед (там всичко е усукано и преплетено). Цялото съоръжение се състои от две части — едната се върти, а другата стои. Цялото това сложно съоръжение е направено от малко материали, главно от желязо и мед, а също така от хартия и шеллак, служещи за изолация. Въртящо се чудовище. Генератор. Някъде от тази каша от желязо и мед излизат няколко медни края. Язовирът, турбината,

желязото, медта — всичко е събрано заедно, за да се появи на тези медни лентички нещо особено — електродвижещо напрежение. След това медните ленти минават неголям път и се обвиват няколко пъти около друго парче желязо, образувайки трансформатор; с това тяхната работа свършва.

Но около същото това парче желязо се намотава още един меден кабел, който не се съединява непосредствено с лентите, дошли от генератора; той минава близо до лентите и взима тяхното електродвижещо напрежение. Трансформаторът превръща енергията, която има сравнително ниско напрежение, необходимо за ефективната работа на генератора, в много високо напрежение, което най-добре подхожда за икономично предаване на електроенергията по дълги кабели.

И всичко това трябва да бъде изключително ефективно — не може да има нищо излишно, никакви загуби. Защо? През всички тези устройства протича цялата електрическа енергия, която се използува в страната. Ако пропадне само един или два процента енергия — помислете колко много ще бъде това. Ако в трансформатора остава само един процент енергия, тя трябва някъде да отиде. Ако например тя се отделяше във вид на топлина — цялото устройство би се разтопило.

От Боулдер Дам излизат във всички посоки няколко дузини медни пръчки — дълги, много дълги пръчки с дебелина може би колкото вашата ръка и дължина стотици мили. Тесни медни пътища, носещи енергията на гигантската река. След това тези пътища се разклоняват ... трансформаторите стават все повече ... понякога те отиват към големи генератори, които превръщат тока в други форми ... понякога към машини, които изпълняват важни промишлени работи ... към нови трансформатори ... След това все нови и нови разклонения и отклонения ... докато накрая реката не се разпредели по целия град; тя върти моторите, създава топлина, светлина, изготвя уреди. Чудо на раждането на горещия огън от студената вода на разстояние повече от 600 мили — и всичко това благодарение на сглобени по особен начин парчета от желязо и мед. Големи мотори за валцуване на стомана и съвсем малки моторчета за бормашина. Хиляди малки колелца, които се въртят под действието на голямото колело в Боулдер Дам. Спрете голямото колело и всички останали колелца ще замрат; огньовете ще изгаснат.

Но това е малко. Същите явления, които помагат да се вземе грандиозната мощ на реката и да се разпредели тя по цялата околност, докато накрая няколко капки от реката завъртят бормашината, отново идват на помощ при създаването на изключително фини прибори ... за определяне на неуловимо слаби токове ... за предаване на гласове, музика и образи ... за сметачни машини ... за автоматични машини с фантастична точност.

Всичко това е възможно, защото щателно е обмислено устройството от мед и желязо — ефективно са създадени магнитните полета ... железни блокове с диаметър два метра, които се въртят с междина 2 милиметра ... пресметнати са правилно пропорциите на медта, за да се получи оптимална ефективност ... измислени са странни форми, които служат на своите цели също както формата на стената.

Ако археолог от бъдещето някога разкопае Боулдер Дам, той навярно ще се възхити от красотата на линиите ѝ. А изследовател — гражданин на някоя велика цивилизация на Бъдещето, като погледне генераторите и трансформаторите, ще каже: „Забележете колко са красиви формите на всеки железен детайл. Помислете колко мисъл е вложено във всяко парче мед."

Тук се проявява съчетанието на могъществото на техниката и прецизното пресмятане. В генератора се осъществява това, което повече никъде в природата не се среща. Наистина силите на индукция се появяват и в други случаи. Несъмнено някъде около Слънцето и звездите действуват ефектите на електромагнитната индукция. Възможно е (макар и не напълно) магнитното поле на Земята да се поддържа от някакъв гигантски аналог на електри-

чески генератор, който работи от токовете, циркулиращи в недрата на Земята. Но никъде няма такова съчетание на движещи се части, което би могло да поражда електрична енергия, както това става в генератора — непрекъснато и много икономично.

Вие вероятно мислите, че конструирането на електрически генератори вече не представлява интерес, че това е вече мъртва наука, нали всички те са отдавна създадени. Почти съвършени генератори или мотори можем да вземем направо от полицата. Но даже и ако това би било така, трябва да се възхищаваме от чудесната завършеност на решението на проблема. Обаче остават и немалко нерешени задачи. Даже и генераторите, и моторите отново стават проблем. Възможно е скоро за решението на проблема за разпределението на електричната енергия да се наложи използуване на цялата област на ниски температури и свръхпроводници. Ще бъдат създадени нови оптимални устройства, при които са взети под внимание радикално нови фактори. Може би енергетичните мрежи на бъдещето малко ще приличат на днешните.

И така, вие виждате, че при изучаване на законите на индукцията можем да се заловим с безчислено множество на приложения и проблеми. Конструирането на електрически машини само по себе си може да стане задача за цял живот. Ние няма да се задълбочаваме много в този въпрос, но сме длъжни да осъзнаем, че откриването на закона за индукцията е свързало неочаквано теорията с огромен брой практически приложения. Тази област принадлежи на инженерите и на тези учени на приложната наука, които се занимават с детайлното разработване на различните приложения. Физиката им дава само основата — основните закони, които не зависят от това, към какво се прилагат. (Създаването на тази основа далеч още не е завършено, защото още предстои подробно да се разгледат свойствата на желязото и медта. Малко по-късно ние ще видим, че физиката може нещо да каже и за тях.)

Съвременната електротехника започва от откритията на Фарадей. Безполезното новородено се превърна във великан и измени облика на Земята така, както неговият горд баща не можеше и да си представи.

17

Закони на индукцията

17-1. Физика на индукцията

17-1. Физика на индукцията

17-2. Изключения от „правилото на потока“

17-3. Ускорение на частиците в индуцирано електрично поле; бетатрон

17-4. Парадокс

17-5. Генератор за променлив ток

17-6. Взаимна индукция

17-7. Самоиндукция

17-8. Индуктивност и магнитна енергия

В предишната глава ние описахме голям брой явления, които показаха, че ефектите на индукцията са твърде сложни и интересни. Сега искаме да обсъдим основните закони, които управляват тези ефекти. Ние вече определихме електродвижещото напрежение в проводящата верига като пълната сила, която действува на зарядите, сумирана по цялата дължина на веригата. По-точно това е тангенциалната компонента на силата върху единичен заряд, интегрирана по целия проводник по дължината на веригата. Следователно тази величина е равна на пълната работа, която се извършва над единичен заряд, когато той обикаля един път по веригата.

Ние дадохме също така „правилото на потока“, което твърди, че електродвижещото напрежение е равно на скоростта на изменение на магнитния поток през такава верига от проводници. Да видим можем ли да разберем защо това е така. Преди всичко да разгледаме случая, когато потокът се изменя, поради това че веригата се движи в постоянно поле.

На фиг. 17-1 е показана проста рамка от проводник, размерите на която могат да се менят. Рамката се състои от две части — неподвижна U-образна част (*а*) и подвижна свръзка (*б*), която може да се плъзга по двете рамена на U. Веригата винаги е затворена, но площта ѝ може да се мени. Да предположим, че ние поставяме тази рамка в хомогенно магнитно поле така, че равнината ѝ се оказва перпендикулярна на полето. Според правилото при движение на свръзката в рамката трябва да възниква електродвижещо напрежение, пропорционално на скоростта на изменение на потока през рамката. Това електродвижещо напрежение ще поражда в рамката ток. Ние ще предположим, че съпротивлението на жицата е достатъчно голямо, така че токовете са малки. Тогава можем да пренебрегнем магнитното поле от този ток.

Потокът през рамката е равен на wLB, затова „правилото на потока“ би дало за електродвижещо напрежение (ще го означим с $\mathcal{E}$)

$$\mathcal{E} = -wB\frac{dL}{dt} = -wBv,$$

където v е скоростта на преместване на свръзката.

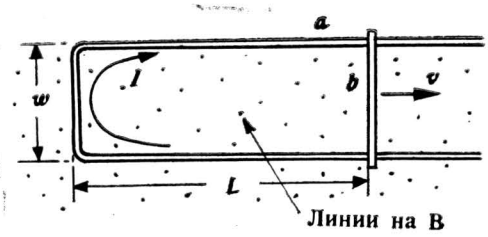
Ние имаме възможност да разгледаме този резултат и от друга гледна точка, като се отправим от магнитната сила $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, действуваща на зарядите в движещата се свръзка. Тези заряди ще чувствуват сила, допирателна към жицата и равна на vB за единичен заряд. Тя е постоянна по дължината w на свръзката и е равна на нула в останалите места, затова интегралът е равен на

$$\mathcal{E} = -wvB,$$

което точно съвпада с резултата, получен от скоростта на изменение на потока.

Приведеното доказателство можем да разпространим върху всеки случай, когато магнитното поле е постоянно и проводниците се движат. Може в общ вид да се докаже, че за всяка верига, частите на която се движат в постоянно магнитно поле, електродвижещото напрежение е равно на производната на потока по времето независимо от формата на веригата.

Да, а какво ще стане, ако рамката бъде неподвижна, а магнитното поле се измени? На този въпрос ние не можем да от-



Фиг. 17-1. В рамката се индуцира електродвижещо напрежение, ако потокът се изменя за сметка на площта на рамката при преместване на съединителната част *b*

говорим с помощта на същите аргументи. Фарадей е открил (като направил опит), че „правилото на потока“ остава вярно независимо от това, защо се изменя потокът.

Силата, която действува на електричните заряди, в общия случай се дава с формулата $\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$; нови особени „сили за сметка на изменението на магнитното поле“ не съществуват. Всички сили, които действуват на неподвижните заряди в неподвижен проводник, възникват за сметка на $\mathbf{E}$. Наблюденията на Фарадей довели до откриване на нов закон за връзката на електричното и магнитното поле: в областта, където магнитното поле се изменя с времето, се генерират електрични полета. Именно това електрично поле гони електроните по проводника и по такъв начин именно то е отговорно за появяване на електродвижещо напрежение в неподвижен проводник, когато се изменя магнитният поток.

Общият закон за електричното поле, свързано с изменящото се магнитно поле, е такъв:

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \tag{17.1}$$

Ние ще го наречем закон на Фарадей. Той е бил открит от Фарадей, но за пръв път в диференциална форма записан от Максвел като едно от неговите уравнения. Дайте да видим как от това уравнение се получава „правилото на потока“ за веригите.

Като използуваме теоремата на Стокс, този закон можем да запишем в интегрална форма

$$\oint_{\Gamma}\mathbf{E}\,.\,d\mathbf{s}=\int_{S}(\nabla\times\mathbf{E})\,.\,\mathbf{n}da=-\int_{S}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,.\,\mathbf{n}da, \tag{17.2}$$

където както обикновено Γ е произволна затворена крива, а S — всяка повърхност, ограничена от тази крива. Ще напомним, че тук Γ е *математична* крива, зафиксирана в пространството, а S — фиксирана повърхност. Тогава производната по времето може да се изнесе пред знака на интеграла:

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma}\mathbf{E}\,.\,d\mathbf{s}&=-\frac{\partial}{\partial t}\int_{S}\mathbf{B}\,.\,\mathbf{n}da\\&=-\frac{\partial}{\partial t}\ (\text{потока през } S).\end{aligned} \tag{17.3}$$

Като приложим това съотношение към крива Γ, която върви по *неподвижната* верига от проводници, ние получаваме отново „правилото на потока“. Интегралът отляво — това е електродвижещото напрежение, а в дясната част стои с обратен знак скоростта на изменение на потока, който минава вътре в контура. И така, уравнението (17.1), приложено за неподвижен контур, е еквивалентно на „правилото на потока“.

По такъв начин „правилото на потока“, според което електродвижещото напрежение в контура е равно на взетата с обратен знак скорост, с която се изменя магнитният поток през контура, е приложимо, когато потокът се изменя за сметка на изменението на полето или когато се движи контурът (или когато става и едното, и другото). Двете възможности — „контурът се движи“ или „полето се изменя“ — са неразличими във формулировката на правилото. Въпреки това за обяснение на правилото в тези два случая ние се ползувахме от два съвършено различни закона: $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ за „движещ се контур“ и $\nabla\times\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t$ за „изменящо се поле“.

Ние не знаем във физиката нито един друг такъв пример, когато прост и точен общ закон изисква за неговото истинско разбиране анализ с термините на *две различни явления*. Обикновено едно толкова красиво обобщение се оказва произлизащо от единен с дълбок смисъл принцип. Но в този случай някакъв особено дълбок принцип не се вижда. Ние трябва да възприе-

маме „правилото“ като съвместен ефект на две съвършено различни явления.

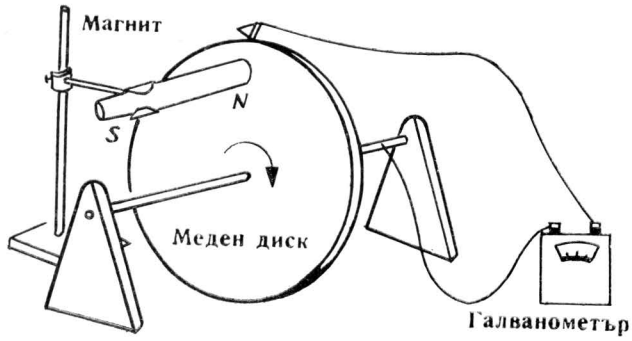
На „правилото на потока“ трябва да погледнем по следния начин. Най-общо казано, силата върху единичен заряд е равна на $\mathbf{F}/q=\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. В движещи се проводници силата възниква за сметка на $\mathbf{v}$. Освен това, ако някъде се изменя магнитното поле, възниква поле $\mathbf{E}$. Тези ефекти са независими, но електродвижещото напрежение по рамка от проводник винаги е равно на скоростта на изменението на магнитния поток през рамката.

17-2. Изключения от „правилото на потока“

Тук ще приведем няколко примера, частично известни на Фарадей, които показват колко важно е ясно да се разбира разликата между двата ефекта, отговорни за възникването на индуцираното електродвижещо напрежение. Нашите примери включват тези случаи, когато „правилото на потока“ е неприложимо или защото въобще няма никакви проводници, или защото пътят, който избират индуцираните токове, минава вътре в обема на проводника.

Отначало ще направим важна забележка: тази част на електродвижещото напрежение, която възниква за сметка на полето $\mathbf{E}$, не е свързана със съществуването на физически проводник (за разлика от частта $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$). Полето $\mathbf{E}$ може да съществува в празно пространство и линейният интеграл от него по която и да е въображаема линия в пространството е скоростта на изменение на потока на $\mathbf{B}$ през тази линия. (Забележете, че това никак не прилича на полето $\mathbf{E}$, което се създава от статични заряди, тъй като в електростатиката линейният интеграл от $\mathbf{E}$ по затворена крива винаги е равен на нула.)

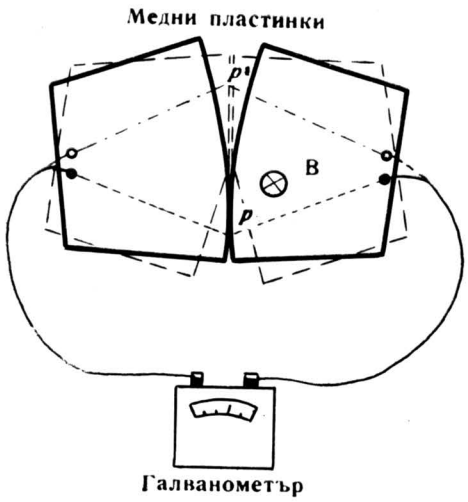
Сега ще опишем случай, когато потокът през контура не се изменя, а електродвижещо напрежение въпреки това съществува. На фиг. 17-2 е показан проводящ диск, който е поместен в магнитно поле и който може да се върти върху неподвижна ос.



Фиг. 17-2. При въртенето на диска събираемото $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ поражда електродвижещо напрежение, но потокът през веригата не се изменя

Единият контакт е прикрепен към оста, а другият се трие по външния край на диска. Веригата се затваря през галванометър. Когато дискът се върти, „контурът“ (в смисъл на място в пространството, където текат токовете) винаги остава един и същ. Но част от „контура“ минава през диска, в движещия се материал. Въпреки че потокът на контура е постоянен, все пак има електродвижещо напрежение, в това можем да се убедим по отклонението на галванометъра. Ясно е, че тук пред нас е случай, когато за сметка на силата $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ в движещия се диск възниква електродвижещо напрежение, което не може да бъде равно на изменението на потока.

Като обратен пример сега ще разгледаме малко необикновен случай, когато потокът през „контура“ (отново в смисъл на това място, където текат токовете) се изменя, а електродвижещо напрежение *отсъствува*. Да си представим две метални пластини с леко изгънати краища (фиг. 17-3), които са поставени в хомогенно магнитно поле, перпендикулярно на равнината им. Всяка



Фиг. 17-3. При завъртането на пластинките в хомогенно магнитно поле потокът може силно да се изменя, но електродвижещо напрежение не възниква

пластина е съединена с един от полюсите на галванометър, както е показано на фигурата. Пластините образуват контакт в една точка P, така че веригата е затворена. Ако сега завъртим пластините на малък ъгъл, точката на контакта ще се премести в P'. Ако си представим, че „веригата“ е затворена вътре в пластините по пунктираната линия, със завъртането на пластините назад и напред магнитният поток през този контур силно се изменя. Но завъртането може да стане от незначително движение, тогава $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ е много малко и електродвижещо напрежение практически отсъствува. В този случай „правилото на потока“ е безсилно. То е вярно само за контури, *материалът* на които остава неизменен. Когато материалът на контура се изменя, налага се да се обръщаме отново към основните закони. *Правилното* физично съдържание винаги се дава от двата основни закона

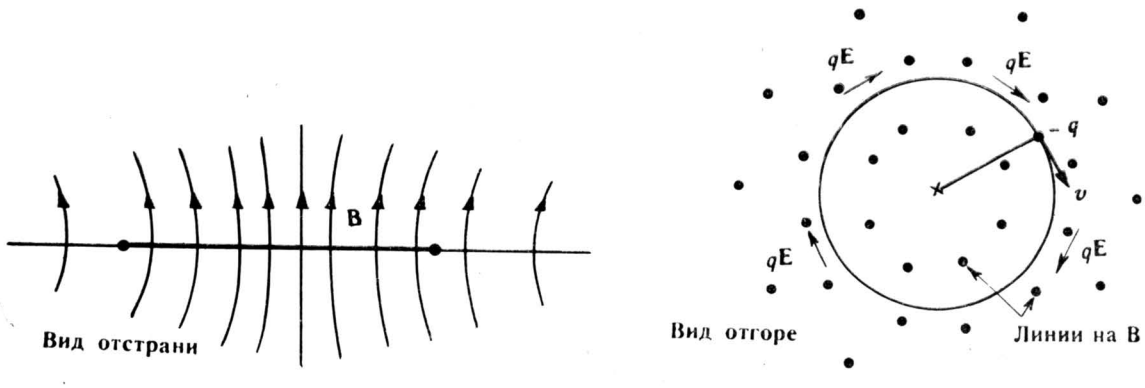
$$\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.$$

17-3. Ускорение на частиците в индуцирано електрично поле; бетатрон

Ние вече говорихме, че електродвижещото напрежение, създадено от изменящо се магнитно поле, може да съществува даже при отсъствие на проводници; т. е. магнитна индукция е възможна без проводници. Ние можем да си представим електродвижещото напрежение по произволна математична крива в пространството. То се определя като тангенциална компонента на $\mathbf{E}$, интегрирана по кривата. Законът на Фарадей гласи, че този криволинеен интеграл е равен на скоростта на изменение на магнитния поток през затворената крива [уравнение (17.3)].

Като пример за действието на такова индуцирано електрично поле сега ще разгледаме движението на електрон в изменящо се магнитно поле. Да си представим магнитно поле, което навсякъде в равнината е насочено по вертикалата (фиг. 17-4). Магнитното поле се създава от електромагнит, но нас тук няма да ни интересуват детайлите. В нашия пример ще предположим, че магнит-



Фиг. 17-4. Електронът се ускорява в аксиално-симетрично магнитно поле, което зависи от времето

ното поле е симетрично относно някаква ос, т. е. интензитетът на магнитното поле зависи само от разстоянието до оста. Магнитното поле се изменя също така и с времето. Да си представим сега, че в това поле се движи електрон по кръгова траектория с постоянен радиус, чийто център е върху оста на полето. (По-късно ние ще видим как може да се създаде такова движение.) Изменящото се магнитно поле създава електрично поле $\mathbf{E}$, допирателно към орбитата на електрона, което ще го движи по

окръжността. Вследствие на симетрията това електрично поле има навсякъде по окръжността една и съща големина. Ако орбитата на електрона има радиус r, линейният интеграл от $\mathbf{E}$ по орбитата е равен на скоростта на изменение на магнитния поток през окръжността. Линейният интеграл от $\mathbf{E}$ е равен просто на големината на E, умножена по дължината на окръжността $2\pi r$. Магнитният поток, изобщо казано, се дава с интеграл. Да означим с B_{cp} средното магнитно поле вътре в окръжността; тогава потокът е равен на това средно магнитно поле, умножено по лицето на кръга. Ние ще получим (като се абстрахираме от знака)

$$2\pi rE = \frac{d}{dt}(B_{cp}\pi r^2).$$

Тъй като ние предположихме, че r е постоянна величина, E е пропорционално на производната по времето от средното поле

$$E = \frac{r}{2}\frac{dB_{cp}}{dt}. \tag{17.4}$$

Електронът ще изпитва електрична сила $q\mathbf{E}$ и ще се ускорява от нея. Като помним, че въз основа на точното релативистко уравнение на движението скоростта на изменение на импулса е пропорционална на силата, имаме

$$qE = \frac{dp}{dt}. \tag{17.5}$$

За приетата от нас кръгова орбита електричната сила, която действува на електрона, е насочена винаги по движението, затова пълният импулс ще расте със скоростта, която се дава с равенството (17.5). Като комбинираме (17.5) и (17.4), можем да свържем скоростта на изменение на импулса с изменението на средното магнитно поле

$$\frac{dp}{dt} = \frac{qr}{2}\frac{dB_{cp}}{dt}. \tag{17.6}$$

Интегрирайки по t, получаваме следния израз за импулса на електрона

$$p = p_0 + \frac{qr}{2}\Delta B_{cp}, \tag{17.7}$$

където p_0 е импулсът, с който електронът започва да се движи, а ΔB_{cp} — последвалото изменение на B_{cp}. Работата на *бетатрона* — машина, която ускорява електроните до големи енергии, е основана именно на тази идея.

За да разберем как работи бетатронът, е необходимо да си представим принципа на движение на електрона по окръжността. В гл. 11 (т. I) ние вече обсъждахме този принцип. Ако на орбитата на електрона създадем магнитно поле $\mathbf{B}$, ще възникне напречна сила $q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, която при съответствуващ избор на $\mathbf{B}$ може да застави електрона да се движи по предполагаемата орбита. В бетатрона тази напречна сила предизвиква движение на електрона по кръгова орбита с постоянен радиус. Ние можем да определим какво трябва да бъде магнитното поле на орбитата пак с помощта на релативистското уравнение на движението, но този път за напречната компонента на силата. В бетатрона (виж фиг. 17-4) полето $\mathbf{B}$ е перпендикулярно на $\mathbf{v}$, затова напречната сила е равна на qvB. По такъв начин силата е равна на скоростта на изменение на напречната компонента на импулса p_t

$$qvB = \frac{dp_t}{dt}. \tag{17.8}$$

Когато частицата се движи по окръжността, скоростта на изменение на напречния импулс е равна на големината на пълния

импулс, умножена по ω-ъгловата скорост на въртене (съгласно аргументите, приведени в гл. 11, т. I)

$$\frac{dp_t}{dt} = \omega p, \tag{17.9}$$

където, тъй като движението е кръгово,

$$\omega = \frac{v}{r}. \tag{17.10}$$

Като положим магнитната сила равна на напречното ускорение, имаме

$$qvB_{орб} = p\frac{v}{r}, \tag{17.11}$$

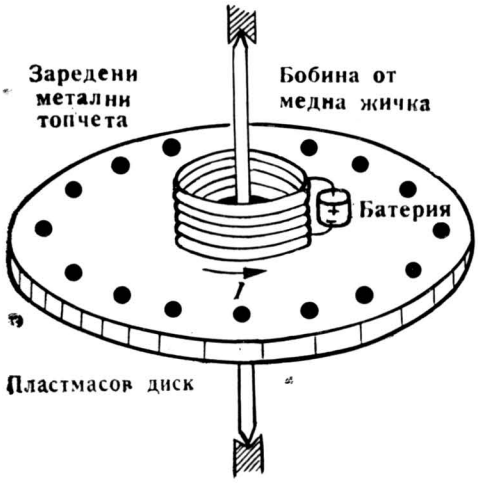
където $B_{орб}$ е полето при радиус r.

В пуснатия в действие бетатрон импулсът на електрона съгласно израза (17.7) расте пропорционално на $B_{ср}$ и за да продължи електронът да се движи по собствената окръжност, трябва равенството (17.11) да се изпълнява както преди заедно с нарастването на импулса на електрона. Големината на $B_{орб}$ трябва да расте пропорционално на импулса p. Като сравним (17.11) с (17.7), определящ p, ние виждаме, че трябва да се изпълнява следното отношение между $B_{ср}$ — средното магнитно поле вътре в орбитата с радиус r и магнитното поле $B_{орб}$ на орбитата

$$\Delta B_{ср} = 2\Delta B_{орб}. \tag{17.12}$$

За правилната работа на бетатрона е необходимо средното магнитно поле вътре в орбитата да расте два пъти по-бързо от магнитното поле на самата орбита. При тези условия с нарастването на енергията на частицата, която се увеличава за сметка на индуцираното електрично поле, магнитното поле на орбитата расте точно със скорост, необходима да задържи частицата по окръжността.

Бетатронът се използува за ускоряване на електроните до енергии десетки или даже стотици електронволта. Обаче по ред причини за ускоряване на електроните до енергии, много по-големи от няколкостотин електронволта, тази машина става неизгодна. Една от тези причини е трудността да се достигне на практика исканата голяма стойност на средното магнитно поле вътре в орбитата, а втора — неточността на формулата (17.6) за много високи енергии, тъй като в нея не се отчита загубата на енергия от частицата за сметка на излъчването на електромагнитна енергия (така наричаното синхротронно излъчване, вж. гл. 34, т. I). По тези причини ускорението на електрони до най-високи енергии — до много милиарди електронволта — се извършва посредством машина от друг род, наричана синхротрон.



Фиг. 17-5. Ще се завърти ли дискът, ако се прекъсне токът I?

17-4 Парадокс

Сега ние бихме искали да ви предложим един привиден парадокс. Парадокс възниква тогава, когато при един начин на разсъждаване се получава един отговор, а при друг начин — съвсем различен, така че оставаме в неизвестност какво пък собствено трябва да бъде наистина. Разбира се, във физиката никога няма истински парадокси, защото съществува само един правилен отговор; най-малкото ние вярваме, че природата постъпва само по един единствен начин (и именно този начин е, разбира се, *правилният*). Затова във физиката парадоксът е всичко на всичко обърквание в нашето собствено разбиране. И така, ето нашият парадокс.

Да си представим, че конструираме прибор (фиг. 17-5), в който има тънък пластмасов диск, закрепен концентрично на ос с добри лагери, така че той се върти съвършено свободно. Върху диска има бобина от проводник — къс соленоид, концентричен по отношение на оста на въртене. През този соленоид тече пос-

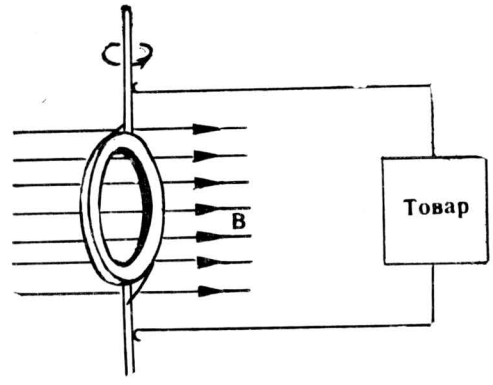
тоянен ток I от малка батерия, също закрепена на диска. Близо до края на диска по окръжност на равни разстояния са поставени малки метални топчета, които са изолирани едно от друго и от соленоида чрез пластмасовия материал на диска. Всяко едно от тези проводящи топчета е заредено с еднакъв заряд Q. Цялата картина е стационарна и дискът е неподвижен. Да предположим, че случайно, а може би и нарочно, токът в соленоида е прекъснат, но без всякаква външна намеса, разбира се. Докато през соленоида минаваше ток, повече или по-малко преминаваше магнитен поток успоредно на оста на диска. След като токът е прекъснат, този поток трябва да намалее до нула. Затова трябва да възниква индуцирано електрично поле, което ще циркулира по окръжности с център върху оста на диска. Всички заредени топчета по периферията на диска ще изпитват действието на електричното поле, допирателно към външната окръжност на диска. Тази електрична сила е насочена за всички заряди еднакво и следователно ще предизвика в диска момент на въртене. От тези съображения може да се очаква, че когато токът в соленоида изчезне, дискът ще започне да се върти. Ако са ни известни моментът на инерция на диска, токът в соленоида и зарядът на топчетата може да се изчисли резултантната ъглова скорост.

Но може да се разсъждава и по друг начин. Използувайки закона за запазване на момента на количеството на движение, ние бихме могли да кажем, че моментът на диска с всички негови пристройки отначало е равен на нула, затова моментът на цялата система трябва да остава нулев. Никакво въртене при спирането на тока не трябва да има. Кое от доказателствата е правилно? Ще се завърти ли дискът, или не? Ние ви предлагаме да помислите над тези въпроси.

Бихме искали да ви предупредим, че правилният отговор не зависи от разни несъществени фактори, такива като несиметричното положение на батерията например. Наистина вие можете да си представите, да речем, такъв идеален случай: соленоидът е направен от свръхпроводник, през който тече ток. След като дискът е щателно нагласен неподвижен, започват бавно да повишават температурата на соленоида. Когато температурата на проводника достигне преходната стойност между свръхпроводимостта и нормалната проводимост, токът в соленоида ще стане равен на нула вследствие съпротивлението на проводника. Потокът, както и по-рано, ще спадне до нула и около оста ще възникне електрично поле. Ние бихме искали също да ви предупредим, че решението не е просто, но не е и измама. Когато се ориентирате в това, ще откриете един важен закон на електромагнетизма.

17-5. Генератор за променлив ток

В останалата част на тази глава ще използуваме принципите, които са изложени в § 1 за анализ на редица явления, обсъждани в гл. 16. Отначало ще разгледаме подробно генератора за променлив ток. Такъв генератор в основата си се състои от проводникова намотка, която се върти в хомогенно магнитно поле. Същият резултат може да бъде достигнат с помощта на неподвижна бобина в магнитно поле, чиято посока се върти по начина, описан в предната глава. Ние ще разгледаме само първия случай. Нека има кръгла бобина от проводник, която може да се върти около ос, минаваща през един от диаметрите ѝ. И нека тази бобина е поставена в магнитно поле, перпендикулярно на оста на въртене (фиг. 17-6). Да си представим, че двата края на бобината са изведени към външната верига с помощта на някакви пълзящи контакти.



Фиг. 17-6. Бобина от проводник, която се върти в хомогенно магнитно поле — това е основната идея на генератора за променлив ток

Благодарение на въртенето на бобината магнитният поток ще се изменя през нея. Затова във веригата на бобината ще се появи електродвижещо напрежение. Нека S е лицето на бобината, а

θ— ъгълът между магнитното поле и нормалата към равнината на бобината[1]. Тогава потокът през бобината е равен на

$$BS\cos\theta. \tag{17.13}$$

Ако бобината се върти с постоянна ъглова скорост ω, θ се изменя с времето като ωt. Тогава електродвижещото напрежение в бобината е

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\text{ на потока} = -\frac{d}{dt}(BS\cos\omega t)$$

или

$$\mathcal{E} = BS\,\omega\sin\omega t. \tag{17.14}$$

Ако ние изведем проводниците от генератора на някакво разстояние от въртящата се бобина в място, където магнитното поле е равно на нула или поне не се изменя с времето, ротацията на **E** в тази област ще бъде равна на нула и ние ще можем да определим електричния потенциал. Наистина ако токът не излиза от генератора, потенциалната разлика V между двата проводника ще бъде равна на електродвижещото напрежение на въртящата се бобина, т. е.

$$V = BS\,\omega\sin\omega t = V_0\sin\omega t.$$

Потенциалната разлика в проводниците се изменя като $\sin\omega t$. Такава изменяща се потенциална разлика се нарича *променливо напрежение*.

Тъй като между проводниците има електрично поле, те трябва да бъдат електрически заредени. Ясно е, че електродвижещото напрежение на генератора изтласква излишните заряди в проводниците, докато тяхното електрично поле не стане достатъчно силно, за да уравновеси точно силата на индукцията. Ако погледнем генератора отстрани, ще ни се стори, като че ли двата проводника електростатично са заредени до потенциална разлика V, а зарядите като че ли се изменят с времето, създавайки променлива потенциална разлика. Има и още едно отличие от това, което се наблюдава в електростатиката. Ако включим генератора към външна верига, по която може да тече ток, ние ще открием, че електродвижещото напрежение не позволява на проводниците да се разреждат, а продължава да ги подхранва със заряди, когато от тях се изразходва ток, стремейки се да запази на проводниците една и съща потенциална разлика. Ако генераторът е включен във верига, пълното съпротивление на която е R, токът във веригата ще бъде пропорционален на електродвижещото напрежение на генератора и обратно пропорционален на R. Тъй като електродвижещото напрежение се изменя синусоидално с времето, и токът прави същото. Възниква променлив ток

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{V_o}{R}\sin\omega t.$$

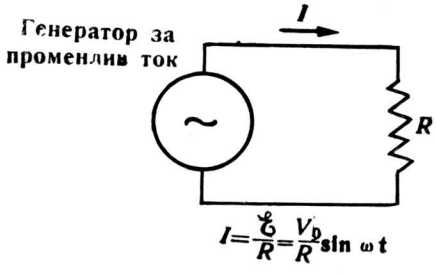
Схемата на такава верига е дадена на фиг. 17-7.

Ние можем също така да забележим, че електродвижещото напрежение определя количеството енергия, доставяно от генератора. Всеки заряд в проводника получава в единица време енергия, равна на **F.v**, където **F** е силата, която действува на заряда, а **v** — неговата скорост. Нека сега количеството движещи се заряди на единица дължина на проводника е равно на n; тогава мощността, която се отделя в елемента ds от проводника, е

$$\mathbf{F}\,.\,\mathbf{v}\,n\,ds.$$

В проводника скоростта **v** винаги е насочена по $d\mathbf{s}$, така че мощността може да се напише във вида

$$n\mathbf{v}\ \mathbf{F}\,.\,d\mathbf{s}.$$



Фиг. 17-7. Верига с генератор за променлив ток и съпротивление

[1] Сега използуваме буквата A за означаване на векторния потенциал, затова лицето предпочитаме да означаваме с S.

Пълната мощност, която се отделя във веригата, е интегралът от този израз по целия контур

$$\text{Мощността} = \oint nv\ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \tag{17.15}$$

Сега да си спомним, че qnv е токът I и че електродвижещото напрежение се определя като интеграл от F/q по цялата верига. Получаваме

$$\text{Мощността, давана от генератора} = \mathcal{E}I. \tag{17.16}$$

Когато в бобината на генератора има ток, върху нея непременно действуват механични сили. Наистина ние знаем, че моментът на въртене, който действува на бобината, е пропорционален на магнитния ѝ момент, интензитета на магнитното поле B и синуса на ъгъла между тях. Магнитният момент е равен на тока в бобината, умножен по нейното лице. Затова моментът на въртене е

$$\tau = ISB \sin\theta. \tag{17.17}$$

Скоростта, с която трябва да се извършва механичната работа, за да се поддържа въртенето на бобината, е равна на ъгловата скорост ω, умножена с момента на въртене на силата

$$\frac{dW}{dt} = \omega\tau = \omega\, ISB \sin\theta. \tag{17.18}$$

Като сравним този израз с (17.14), ние виждаме, че загубите на механична работа за единица време, които са нужни за въртенето на бобината срещу магнитните сили, са точно равни на $\mathcal{E}I$ — електричната енергия, доставяна от електродвижещото напрежение на генератора за единица време. Цялата механична енергия, която се изразходва в генератора, се появява във вид на електрична енергия във веригата.

Като друг пример за токовете и силите, обусловени от индуцирано електродвижещо напрежение, ще анализираме какво точно става в постановката, показана на фиг. 17-1. Имаме $\cup$-образен проводник и пълзяща свръзка, които са разположени в хомогенно магнитно поле, перпендикулярно на равнината на успоредните проводници. Сега да предположим, че „дъното“ на $\cup$ (лявата част на фиг. 17-1) е направено от проводник с голямо съпротивление, докато двата странични проводника са направени от добър проводник като медта — в този случай не трябва да се безпокоим за изменението на съпротивлението на веригата при движението на свръзката. Както и по-рано, електродвижещото напрежение на веригата е

$$\mathcal{E} = -vBw. \tag{17.19}$$

Токът във веригата е пропорционален на това електродвижещо напрежение и обратно пропорционален на съпротивлението на веригата

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{vBw}{R}. \tag{17.20}$$

Благодарение на този ток върху свръзката ще действува магнитна сила, пропорционална на дължината на свръзката, тока в нея и магнитното поле:

$$F = BIw. \tag{17.21}$$

Като заместим I от (17.20), получаваме за силата

$$F = -\frac{B^2w^2}{R}\, v. \tag{17.22}$$

Ние виждаме, че силата е пропорционална на скоростта на преместване на свръзката. Посоката на силата, както е лесно да се разбере, е противоположна на скоростта. Такава „пропорционална

на скоростта“ сила, която прилича на силата на вискозитета, се получава всеки път, когато движещите се проводници създават в магнитно поле индуцирани токове. Вихровите токове, за които говорихме в предишната глава, водят също така към сили, действуващи на проводниците и пропорционални на скоростта на проводника, въпреки че такива случаи, общо взето, дават по-сложни разпределения на токовете, които е трудно да се анализират.

При конструирането на механични системи често е удобно да се разполага със спиращи сили, пропорционални на скоростта. Вихровите токове дават един от най-удобните начини за получаване на такива зависещи от скоростта сили.

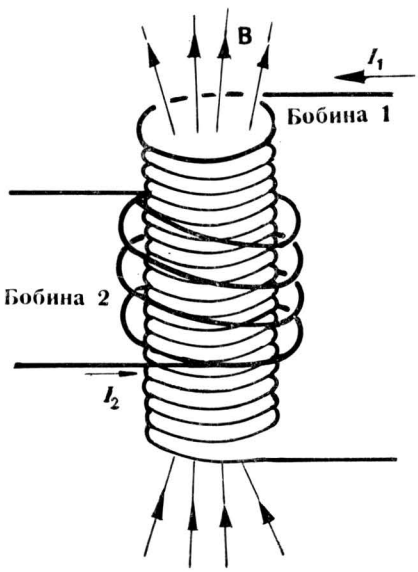
Пример за приложението на подобни сили може да се намери в обикновения домашен брояч — ватметъра. Там има тънък алуминиев диск, който се върти между полюсите на постоянен магнит. Този диск се движи от малък електромотор, моментът на въртене на който е пропорционален на мощността, консумирана в електричната мрежа на квартирата. Вихровите токове в диска предизвикват сила на съпротивление, пропорционална на скоростта. Следователно скоростта на диска става пропорционална на скоростта на потребление на електроенергия. С помощта на брояч, който е съединен към въртящия се диск, се преброява броят на оборотите на диска. Така се определя пълната изразходвана енергия, т. е. броят на използуваните ват-часове.

Съгласно с формула (17.22) силата, получавана от индуцираните токове, т. е. всяка сила, получена от вихрови токове, е обратно пропорционална на съпротивлението. Силата е толкова по-голяма, колкото електропроводността на материала е по-добра. Причината, разбира се, е в това, че при малко съпротивление електродвижещото напрежение създава по-голям ток, а по-големите токове дават по-големи механични сили.

От нашите формули можем да видим как механичната енергия се превръща в електрична енергия. Както и по-рано, електричната енергия, която се отделя в съпротивлението на веригата, е произведението $\mathcal{E}I$. Работата, която се извършва при движението на свръзката за единица време, е произведението на силата, действуваща на свръзката, по скоростта ѝ. Като използуваме за силата израза (17.21), получаваме работата за единица време

$$\frac{dW}{dt} = \frac{v^2B^2w^2}{R}.$$

Ние виждаме, че тя действително е равна на произведението $\mathcal{E}I$, което получаваме от (17.19) и (17.20). Отново механичната работа се появява във вид на електрична енергия.



Фиг. 17-8. Токът в бобина *1* създава магнитно поле, което минава през бобина *2*

17-6. Взаимна индукция

Сега трябва да разгледаме случай, когато бобините от жица остават неподвижни, а се изменят магнитните полета. Описвайки образуването на магнитно поле от токове, ние разглеждахме само случай на постоянни токове. Но ако токовете се изменят бавно, магнитното поле във всеки момент ще бъде приблизително такова, каквото е магнитното поле на постоянния ток. Ние ще считаме в този параграф, че токовете винаги се изменят достатъчно бавно и може да се каже, че това твърдение е вярно.

На фиг. 17-8 е показано приспособление от две бобини, с помощта на които може да се демонстрират основните ефекти, на които се дължи работата на трансформатора. Бобината *1* представлява дълъг соленоид от навит проводник. Около тази бобина и изолирано от нея е навита бобината *2*, състояща се от няколко навивки. Ако по бобината *1* пропуснем ток, както знаем, вътре в нея ще се появи магнитно поле. Това магнитно поле минава също така и през бобина *2*. Когато токът в бобина *1* се изменя, магнитният поток също ще се изменя и в бобина *2* ще

се появи индуцирано електродвижещо напрежение. Това индуцирано електродвижещо напрежение сега ще изчислим.

В гл. 13-5 видяхме, че магнитното поле вътре в дългия соленоид е хомогенно и равно на

$$B=\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{N_1 I_1}{l}, \tag{17.23}$$

където N_1 е броят на навивките в бобина *1*, I_1 — токът в нея, а l — дължината ѝ. Нека напречното сечение на бобина *1* е равно на S, тогава потокът на полето **B** е равен на големината му, умножена с S. Ако в бобина *2* има N_2 навивки, потокът минава по бобината N_2 пъти. Затова електродвижещото напрежение в бобина *2* се дава с израза за

$$\mathcal{E}_2=-N_2 S\frac{dB}{dt}. \tag{17.24}$$

Единствената изменяща се с времето величина в (17.23) е I_1. Затова електродвижещото напрежение се дава с израза

$$\mathcal{E}_2=-\frac{N_1 N_2 S}{\varepsilon_0 c^2 l}\frac{dI_1}{dt}. \tag{17.25}$$

Ние виждаме, че електродвижещото напрежение в бобина *2* е пропорционално на скоростта на изменение на тока в бобина *1*. Константата на пропорционалност — по същество геометричният фактор на двете бобини, се нарича коефициент на взаимна индукция и се означава обикновено с $\mathfrak{M}_{21}$.
Тогава (17.25) се записва вече във вида

$$\mathcal{E}_2=\mathfrak{M}_{21}\frac{dI_1}{dt} \tag{17.26}$$

Сега да предположим, че ни е необходимо да пропуснем ток през бобина *2* и ни интересува на какво е равно електродвижещото напрежение в бобина *1*. Ние бихме изчислили магнитното поле, което навсякъде е пропорционално на тока I_2. Потокът през бобина *1* би зависел от геометрията, но би бил пропорционален на тока I_2. Затова електродвижещото напрежение в бобина *1* отново би било пропорционално на dI_2/dt. Ние можем да напишем

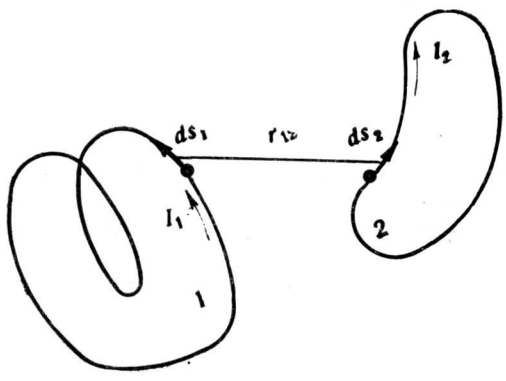
$$\mathcal{E}_1=\mathfrak{M}_{12}\frac{dI_2}{dt} \tag{17.27}$$

Изчисляването на $\mathfrak{M}_{12}$ би било по-трудно, отколкото изчисленията, които направихме за $\mathfrak{M}_{21}$. Ние няма сега да се занимаваме с него, защото по-нататък в тази глава ще докажем, че $\mathfrak{M}_{12}$ е непременно равно на $\mathfrak{M}_{21}$.

Тъй като полето на *всяка* бобина е пропорционално на тока, който тече в нея, също такъв резултат би се получил и за каквито и да е две бобини от проводник. Изразите (17.26) и (17.27) биха приели същата форма и само константите $\mathfrak{M}_{12}$ и $\mathfrak{M}_{21}$ биха били други. Техните стойности ще зависят от формата на бобините и от тяхното относително положение.

Да предположим, че ни е необходимо да намерим коефициента на взаимна индукция между две произволни бобини, например показаните на фиг. 17-9. Ние знаем, че общият израз за електродвижещото напрежение в бобина *1* може да се запише така

$$\mathcal{E}_1=-\frac{d}{dt}\int_{(1)}\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da,$$



Фиг. 17.9. Каквито и да са две бобини притежават взаимна индукция $\mathfrak{M}$ пропорционална на интеграл от $d\mathbf{s}_1.d\mathbf{s}_2\,.\,(1/r_{12})$

където **B** е магнитното поле, а интегралът се изчислява по повърхността, ограничена от контура *1*. В гл. 14-1 видяхме, че повърхнинният интеграл от **B** може да се сведе към криволинеен интеграл от векторния потенциал. В нашия случай

$$\int_{(1)} \mathbf{B}.\mathbf{n}\, da = \oint_{(1)} \mathbf{A}.d\mathbf{s}_1,$$

където **A** е векторният потенциал, а $d\mathbf{s}_1$ — елемент на веригата *1*. Криволинейният интеграл се изчислява по контура *1*, затова електродвижещото напрежение в тази бобина може да бъде записано във вида

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt}\oint_{(1)} \mathbf{A}.d\mathbf{s}_1. \tag{17.28}$$

Сега да предположим, че векторният потенциал на верига *1* възниква за сметка на токовете във верига *2*. Тогава можем да го запишем като криволинеен интеграл по контура на веригата *2*

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\oint_{(2)} \frac{I_2 d\mathbf{s}_2}{r_{12}}, \tag{17.29}$$

където I_2 е токът във верига *2*, а r_{12} — разстоянието от елемента на веригата $d\mathbf{s}_2$ до точката на контур *1*, в която ние изчисляваме векторния потенциал (виж фиг. 17-9). Като комбинираме (17.28) и (17.29), можем да изразим електродвижещото напрежение във верига *1* като двоен криволинеен интеграл

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{d}{dt}\oint_1\oint_2 \frac{I_2 d\mathbf{s}_2}{r_{12}}.d\mathbf{s}_1.$$

В този израз всички интеграли се изчисляват по неподвижни контури. Единствена променлива величина е токът I_2, който не зависи от променливите на интегрирането. Затова той може да се изнесе пред знака за интегриране. Тогава електродвижещото напрежение може да се запише като

$$\mathcal{E}_1 = \mathfrak{M}_{12}\frac{dI_2}{dt},$$

където коефициентът $\mathfrak{M}_{12}$ е

$$\mathfrak{M}_{12} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\oint_{(1)}\oint_{(2)} \frac{d\mathbf{s}_2 . d\mathbf{s}_1}{r_{12}}. \tag{17.30}$$

От този интеграл е очевидно, че $\mathfrak{M}_{12}$ зависи само от геометрията на веригите; той зависи от някакво средно разстояние между двете вериги, при което в това средно с най-голяма тежест влизат успоредните отрязъци на проводниците от двете бобини. Нашата формула може да се използува за изчисляване на коефициента на взаимна индукция на каквито и да са две вериги с произволна форма. Освен това тя показва, че интегралът за $\mathfrak{M}_{12}$ е тъждествен с интеграла за $\mathfrak{M}_{21}$. По такъв начин показахме, че двата коефициента са еднакви. За системи само с две бобини често означават коефициентите $\mathfrak{M}_{12}$ и $\mathfrak{M}_{21}$ само с $\mathfrak{M}$ без индекси и наричат просто *коефициент на взаимна индукция*

$$\mathfrak{M}_{21} = \mathfrak{M}_{21} = \mathfrak{M}.$$

17-7. Самоиндукция

При обсъждането на индуцираните електродвижещи напрежения в двете бобини на фиг. 17-8 и 17-9 разгледахме само случая, когато токът минава или през едната бобина, или през другата.

Ако има ток едновременно в двете бобини, магнитният поток, който пронизва всяка бобина, ще представлява сумата на двата потока, съществуващи и поотделно, тъй като към магнитните полета е приложим принципът на суперпозиция. Затова електродвижещото напрежение във всяка бобина ще бъде пропорционално не само на изменението на тока в другата бобина, но и на изменението на тока в нея самата. По такъв начин пълното електродвижещо напрежение в бобина *2* следва да се запише във вида[1]

$$\mathcal{E}_2 = \mathfrak{M}_{21}\frac{dI_1}{dt} + \mathfrak{M}_{22}\frac{dI_2}{dt} \tag{17.31}$$

Аналогично електродвижещото напрежение в бобина *1* ще зависи не само от изменящия се ток в бобина *2*, но и от изменящия се ток в нея самата

$$\mathcal{E}_1 = \mathfrak{M}_{12}\frac{dI_2}{dt} + \mathfrak{M}_{11}\frac{dI_1}{dt} \tag{17.32}$$

Коефициентите $\mathfrak{M}_{22}$ и $\mathfrak{M}_{11}$ са винаги отрицателни. Обикновено пишат

$$\mathfrak{M}_{11} = -\mathscr{L}_1, \qquad \mathfrak{M}_{22} = -\mathscr{L}_2, \tag{17.33}$$

където $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ наричат коефициенти на *самоиндукция* на двете бобини (или индуктивности).

Разбира се, електродвижещото напрежение на самоиндукцията ще съществува даже за една бобина. Всяка бобина сама за себе си притежава коефициент на самоиндукция $\mathscr{L}$ и нейното електродвижещо напрежение ще бъде пропорционално на скоростта на изменение на тока в бобината. Обикновено считат, че електродвижещото напрежение и токът на една бобина са положителни, ако са насочени еднакво. При това условие за отделна бобина може да се напише

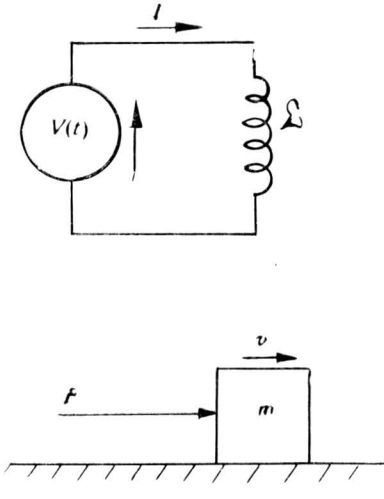
$$\mathcal{E} = -\mathscr{L}\frac{dI}{dt}. \tag{17.34}$$

Знакът минус показва, че електродвижещото напрежение противодействува на изменението на тока, често го наричат „обратно електродвижещо напрежение".

Тъй като всяка бобина има самоиндукция, която противодействува на изменението на тока, токът в бобината притежава своего рода инерция. Действително ако искаме да изменим тока в бобината, трябва да преодолеем тази инерция, като включим бобината към някакъв външен източник, например батерия или генератор (фиг. 17-10, *а*). В такава верига токът I е свързан с напрежението $\mathcal{V}$ с отношението

$$\mathcal{V} = \mathscr{L}\frac{dI}{dt}. \tag{17.35}$$

Това отношение има формата на уравнението на Нютон за движение на частица в едно измерение. Затова ние можем да го изследваме по принципа „еднаквите уравнения имат еднакви решения". По такъв начин, ако поставим в съответствие напрежението $\mathcal{V}$ от външния източник на приложената външна сила $\mathscr{L}$, а тока I в бобината на скоростта v на частицата, коефициентът на индукция на бобината $\mathscr{L}$ ще съответствува на масата m на частицата[2] (фиг. 17-10, *б*).



Фиг. 17-10. Верига с източник на напрежение и индуктивност *(а)* и аналогична на нея механична система *(б)*

[1] Знакът на $\mathfrak{M}_{12}$ и $\mathfrak{M}_{21}$ в (17.31) и (17.32) зависи от избора на положителната посока на тока в двете бобини.

[2] Между другото това *не е единственият* начин за намиране на съответствие между механичните и електричните величини.

Съпоставими величини

Таблица 17-1

Частица	Бобина
F (сила) v (скорост) x (отместване)	$\mathcal{U}$ (потенциална разлика) I (ток) q (заряд)
$F=m\frac{dv}{dt}$	$\mathcal{U}=\mathcal{L}\frac{dI}{dt}$
mv (импулс)	$\mathcal{L}I$
$\frac{1}{2}mv^2$ (кинетична енергия)	$\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$ (магнитна енергия)

17-8. Индуктивност и магнитна енергия

Продължавайки аналогията от предишния параграф, ние отбелязахме в таблицата, че в съответствие с механичния импулс $p=mv$ (скоростта на изменение на който е равна на приложената сила) трябва да съществува аналогична величина, равна на $\mathcal{L}I$, скоростта на изменение на която е $\mathcal{U}$. Разбира се, ние нямаме право да говорим, че $\mathcal{L}I$ е истинският импулс на веригата; на практика това съвсем не е така. Цялата верига може да бъде неподвижна и въобще да няма импулс. Просто $\mathcal{L}I$ е аналогично на импулса mv в смисъл на удовлетворяване на аналогични уравнения. Точно така на кинетичната енергия $^1/_2mv^2$ тук съответствува аналогична величина $^1/_2\mathcal{L}I^2$. Но тук ни очаква сюрприз. Величината $^1/_2\mathcal{L}I^2$ действително е енергия и в електричния случай. Това се получава, защото работата, която се извършва за единица време над индуктивността, е равна на $\mathcal{U}I$, а в механичната система тя е равна на Fv — на съответстващата величина. Затова в случая на енергиите величините не само съответствуват една на друга в математичен смисъл, но имат още и еднакво физично значение.

Ние можем да проследим това по-подробно. В (17.16) намерихме, че електричната работа за единица време за сметка на силите на индукцията е равна на произведението на електродвижещото напрежение и тока

$$\frac{dW}{dt}=\mathcal{E}I.$$

Като заместим $\mathcal{E}$, изразена чрез токовете, от (17.34) получаваме

$$\frac{dW}{dt}=-\mathcal{L}I\ \frac{dI}{dt}. \tag{17.36}$$

Интегрирайки това уравнение, намираме, че енергията, която се взема от външния източник, за да се преодолее електродвижещото напрежение на самоиндукцията и създаде ток[1] (което трябва да се равнява на натрупаната енергия U), е

$$-W=U=\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2. \tag{17.37}$$

Затова енергията, която е натрупана в индуктивността, е равна на $^1/_2\mathcal{L}I^2$.

Като използуваме същите разсъждения за двойката бобини,

[1] Ние пренебрегваме всички топлинни загуби на енергия в съпротивлението на бобината. Тези загуби изискват допълнително изразходване на енергия от източника, но не изменят енергията, която се изразходва за индуктивността.

показани на фиг. 17-8 или 17-9, можем да покажем, че пълната електрична енергия на системата се дава с израза

$$U=\frac{1}{2}\mathscr{L}_1 I_1^2+\frac{1}{2}\mathscr{L}_2 I_2^2-\mathfrak{M} I_1 I_2. \qquad (17.38)$$

Наистина, започвайки с ток $I=0$ в двете бобини, може отначало да включим ток I_1 в бобина *1*, като оставим $I_2=0$. Извършената работа е точно равна на $^1/_2\mathscr{L}_1 I_1^2$. Но сега, като включим I_2, ние извършваме не само работата $^1/_2\mathscr{L}_2 I_2^2$ срещу електродвижещото напрежение във верига *2*, но още и добавъчно количество работа — $\mathfrak{M} I_1 I_2$, която е интеграл от електродвижещото напрежение $\mathfrak{M}(dI_2/dt)$ във верига *1*, умножен със сега вече *постоянния* ток I_1 в тази верига.

Нека сега ни е необходимо да намерим силата между каквито и да е две бобини, по които текат токове I_1 и I_2. Преди всичко ние бихме могли да използуваме принципа на виртуалната работа, като вземем вариацията от енергията (17.38). Ние трябва да помним, разбира се, че при изменение на относителното положение на бобините единствената изменяща се величина е коефициентът на взаимна индукция $\mathfrak{M}$. Тогава ние бихме могли да запишем уравнението на виртуалната работа във вида

$$-F\Delta x=\Delta U=-I_1 I_2\Delta\mathfrak{M} \text{ (неправилно).}$$

Това уравнение е грешно, защото, както видяхме по-рано, в него е включено само изменението на енергията на двете бобини и не е включена енергията на източниците, които поддържат постоянни токовете I_1 и I_2. Ние сега разбираме, че тези източници трябва да доставят енергия за компенсация на индуцираните електродвижещи напрежения в бобините през време на тяхното движение. Ако искаме правилно да приложим принципа на виртуалната работа, трябва да включим и тези енергии. Но ние видяхме, че може да се действува и по-кратко — да се използува принципът на виртуалната работа, помнейки, че пълната енергия — това е взетата с обратен знак енергия $U_{\text{мех}}$ (това, което ние наричаме „механична енергия"). Затова силата може да се запише във вида

$$-F\Delta x=\Delta U_{\text{мех}}=-\Delta U. \qquad (17.39)$$

Тогава силата между бобините се дава с израза

$$F\Delta x=-I_1 I_2\Delta\mathfrak{M}.$$

Да се възползуваме от израза (17.38) за енергията на система от две бобини, за да покажем какво интересно неравенство съществува между взаимната индукция $\mathfrak{M}$ и коефициентите на самоиндукция $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ на две бобини. Ясно е, че енергията на двете бобини трябва да бъде положителна. Ако ние започваме с нулеви токове в двете бобини и увеличаваме тези токове до някакви стойности, с това увеличаваме енергията на цялата система. В противен случай токовете самопроизволно ще нараснат и ще отдават енергия на останалия свят — нещо невероятно! Сега можем със същия успех да запишем нашия израз за енергията (17.38) в следната форма

$$U=\frac{1}{2}\mathscr{L}_1\left(I_1-\frac{\mathfrak{M}}{\mathscr{L}_1}I_2\right)^2+\frac{1}{2}\left(\mathscr{L}_2-\frac{\mathfrak{M}^2}{\mathscr{L}_1}\right)I_2^2 \qquad (17.40)$$

Това е просто алгебрично преобразуване. Тази величина трябва да бъде винаги положителна при всякакви значения на I_1 и I_2. В частност тя трябва да бъде положителна, когато I_2 изведнъж приеме особената стойност

$$I_2=\frac{\mathscr{L}_1}{\mathfrak{M}}I_1. \qquad (17.41)$$

Но при такава стойност на I_2 първото събираемо в (17.40) е равно на нула. Ако енергията е положителна, второто събираемо

в (17.40) трябва да бъде по-голямо от нула. Получаваме условието, че

$$\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2 > \mathfrak{M}^2.$$

По такъв начин доказахме общото съотношение, че големината на взаимната индукция $\mathfrak{M}$ на каквито и да са две бобини непременно е по-малка или равна на средната геометрична от двата коефициента на самоиндукция (самият коефициент $\mathfrak{M}$ може да бъде положителен или отрицателен в зависимост от избора на знаците за токовете I_1 и I_2)

$$\mathfrak{M} < \sqrt{\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2}. \tag{17.42}$$

Съотношението между $\mathfrak{M}$ и коефициентите на самоиндукция обикновено записват така

$$\mathfrak{M} = k\sqrt{\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2}. \tag{17.43}$$

Константата k наричат *коефициент на връзката*. Ако голяма част на потока от едната бобина минава през другата бобина, коефициентът на връзката е близък до единица; ние казваме, че бобините са „силно свързани". Ако бобините са значително отдалечени една от друга или пък всичко е устроено така, че взаимното проникване на техните потоци е твърде малко, коефициентът на връзката става близък до нула, а коефициентът на взаимната индукция — много малък.

За изчисляване взаимната индукция на две бобини ние дадохме формулата (17.30), която представлява двоен криволинеен интеграл по двете вериги. Ние бихме могли да помислим, че същата формула е приложима и за извеждане на коефициента на самоиндукция на една бобина, ако и двете интегрирания проведем по една и съща бобина. Обаче това не е така, защото при интегрирането по двете бобини знаменателят r_{12} под знака на интеграла се стреми към нула, когато два линейни елемента се намират в една точка. Коефициентът на самоиндукция, който се получава по тази формула, се оказва безкрайно голям. Това става, защото нашата формула е приблизителна и е в сила само за напречни сечения на проводниците в двете вериги, малки в сравнение с разстоянието от едната верига до другата. Ясно е, че това приближение за отделна бобина не е годно. Всъщност се оказва, че индуктивността на отделна бобина се стреми логаритмически към безкрайност, когато диаметърът на нейния проводник става все по-малък и по-малък.

Значи ние трябва да потърсим друг начин за изчисляване коефициента на самоиндукцията на една бобина. При това трябва да се вземе под внимание разпределението на токовете вътре в проводника, защото неговите размери са важен параметър. Но ние няма да изчисляваме пълната индуктивност, а ще пресметнем само тази ѝ част, която е свързана с разположението на проводниците, и няма да вземаме под внимание частта, свързана с разпределението на токовете. Изглежда, че най-простият начин да се намери такава индуктивност е да се използува магнитната енергия. По-рано в гл. 15-3 ние намерихме израз за магнитната енергия на разпределение на стационерни токове

$$U = \frac{1}{2}\int \mathbf{j}\,.\,\mathbf{A}\,dV. \tag{17.44}$$

Ако е известно разпределението на плътността на тока $\mathbf{j}$, може да се изчисли векторният потенциал $\mathbf{A}$, а след това, като оценим интеграла (17.44), да получим енергията. Тази енергия е равна на магнитната енергия на самоиндукцията, $^1/_2\ \mathscr{L}I^2$. Като ги приравним, получаваме формулата за индуктивността:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{I^2}\int \mathbf{j}\,.\,\mathbf{A}\,dV. \tag{17.45}$$

Разбира се, ние очакваме, че индуктивността е число, което зависи само от геометрията на веригата, а не от тока I във веригата. Формулата (17.45) наистина довежда до такъв резултат, защото интегралът в нея е пропорционален на квадрата на тока — токът влиза един път от $\mathbf{j}$ и още един път от векторния потенциал $\mathbf{A}$. Интегралът, разделен на I^2, зависи от геометрията на веригата, но не и от тока I.

На израза (17.44) за енергията на разпределение на токове може да се даде съвсем друга форма, понякога по-удобна за изчисления. Освен това, както ще видим по-късно, именно тази форма е важна, защото тя е вярна в по-общия случай. Във формулата (17.44) и $\mathbf{A}$, и $\mathbf{j}$ може да се свържат с $\mathbf{B}$, затова можем да се надяваме, че енергията ще се изрази чрез магнитното поле — точно така, както ни се удаде да свържем електричната енергия с електричното поле. Да започнем със заместването $\varepsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B}$ вместо $\mathbf{j}$. Ние не можем със същата лекота да заменим $\mathbf{A}$, защото $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ не може да се обърне, за да изразим $\mathbf{A}$ чрез $\mathbf{B}$. Можем само да запишем

$$U = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} dV \tag{17.46}$$

Любопитно е, че при някои ограничения този интеграл може да се превърне в

$$U = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \int \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\, dV \tag{17.47}$$

За да видим това, ще напишем подробно типичния множител. Да предположим, че сме взели множителя $(\nabla \times \mathbf{B})_z A_z$, влизащ в интеграла (17.46). Като напишем изцяло компонентите, получаваме

$$\int \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) A_z dx dy dz$$

(има, разбира се, още два интеграла от същия вид). Да интегрираме сега първия множител по x, като интегрираме по части, т. е.

$$\int \frac{\partial B_y}{\partial x} A_z dx = B_y A_z - \int B_y \frac{\partial A_z}{\partial x}\, dx.$$

Сега да предположим, че нашата система (имайки предвид източниците и полетата) е крайна, така че, когато ние се отдалечаваме на големи разстояния, всички полета се стремят към нула. Тогава при интегриране по цялото пространство заместването $B_y A_z$ на границите на интеграла дава нула. У нас остава само $B_y (\partial A_z / \partial x)$; това очевидно е част от $B_y (\nabla \times \mathbf{A})_y$ и значи от $\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$. Ако напишете останалите пет множителя, ще видите, че (17.47) в действителност е еквивалентен на (17.46).

А сега можем да заменим $(\nabla \times \mathbf{A})$ с $\mathbf{B}$ и да получим

$$U = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}\, dV \tag{17.48}$$

Ние изразихме енергията в магнитостатичния случай само чрез магнитното поле. Изразът е тясно свързан с формулата, която намерихме за електростатичната енергия

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}\, dV. \tag{17.49}$$

Тези две формули за енергията са отделени, затова защото понякога те са по-удобни за използуване. Обикновено има и по-важна причина: оказва се, че за динамични полета (когато $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ се изменят с времето) двата израза (17.48) и (17.49) остават в сила, докато другите формули за електрична и магнитна енергия, които дадохме, престават да бъдат верни — те са верни само за статични полета.

Ако ни е известно магнитното поле на отделна бобина, ние можем да намерим коефициента на самоиндукцията, като приравним

израза за енергията (17.48) и $^1/_2\mathscr{L}I^2$. Да видим какъв резултат ще се получи за индуктивността на дълъг соленоид. По-рано ние видяхме, че магнитното поле в соленоида е хомогенно и $\mathbf{B}$ отвън е равно на нула. Големината на полето вътре е $B=nI/\varepsilon_0c^2$, където n е броят на навивките на единица дължина на намотката, а I — токът. Ако радиусът на бобината е r, а дължината ѝ е L (ние смятаме, че L е много голяма, за да можем да пренебрегнем граничните ефекти, т. е. $L\gg r$), вътрешният обем е равен на πr^2L. Следователно магнитната енергия е

$$U=\frac{\varepsilon_0c^2}{2}B^2\,.\,(\text{обема})=\frac{n^2I^2}{2\varepsilon_0c^2}\,\pi r^2L,$$

което е равно на $^1/_2\,\mathscr{L}\,I^2$. Или

$$\mathscr{L}=\frac{\pi\,r^2n^2}{\varepsilon_0c^2}L. \tag{17.50}$$

18

Уравнения на Максвел

18-1. Уравнения на Максвел

18-1. Уравнения на Максвел

18-2. Какво дава добавката

18-3. Всичко за класическата физика

18-4. Преместващо се поле

18-5. Скорост на светлината

18-6. Решение на уравненията на Максвел; потенциали и вълново уравнение

В тази глава ние ще се върнем към пълната система от четирите уравнения на Максвел, които приехме като отправен пункт в гл. 1. Досега ние изучавахме уравненията на Максвел на малки части, на късчета; сега вече е време да прибавим последната част и ги съединим всички заедно. Тогава ще имаме пълно и точно описание на електромагнитните полета, които могат да се изменят с времето по произволен начин. Всичко казано в тази глава, даже ако то противоречи на нещо казано по-рано, е правилно, а това, което се говореше по-рано в тези случаи, не е вярно, защото всичко изречено по-рано се прилагаше за такива частни случаи, както, да речем, случаите на постоянен ток или фиксирани заряди. Въпреки че всеки път, когато записвахме уравнение, ние твърде старателно посочвахме ограниченията, лесно е да се позабравят всички тези уговорки и прекалено добре да се заучат грешните уравнения. Сега ние можем да изложим цялата истина, без всякакви ограничения (или почти без тях).

Всички уравнения на Максвел са записани в табл. 18-1 както с думи, така и с математични символи. Този факт, че думите са еквивалентни на уравненията, трябва сега вече да ви е познат — вие трябва да умеете да обръщате едната форма в другата и обратно.

Таблица 18-1 **Класическа физика**

Уравнения на Максвел

I. $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Потокът на **E** през затворена повърхност)= (Заряда вътре в нея) $/\varepsilon_0$

II. $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (Интегралът от **E** по затворена крива) $= -\frac{d}{dt}$ (Потока на **B** през кривата)

III. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (Потокът на **B** през затворена повърхност)$=0$

IV. $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ c^2 (Интеграла от **B** по кривата)=(Тока в контура)$/\varepsilon_0 + \frac{\partial}{\partial t}$ (Потока на **E** през контура)

Запазване на заряда
(следва от I и IV)

$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (Потокът на заряда през затворена повърхност) $= -\frac{\partial}{\partial t}$ (Заряда вътре в нея)

Закон за силата

$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

Закон за движението

$\frac{d}{dt}(\underline{\mathbf{p}}) = \mathbf{F}$, където $\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (Законът на Нютон, поправен от Айнщайн)

Гравитация

$\mathbf{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\mathbf{e}_r$

Първото уравнение — дивергенцията на **E**, е равна на плътността на заряда, делена на ε_0, — е правилно винаги. Законът на Гаус е верен винаги както в динамичните, така и в статичните полета. Потокът на **E** през каквато и да е затворена повърхност е пропорционален на затворения вътре заряд. Третото уравнение е съответствуващият общ закон за магнитните полета. Тъй като няма магнитни заряди, потокът на **B** през всяка затворена повърхност винаги е равен на нула. Второто уравнение $\nabla\times\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t$ е законът на Фарадей, той се обсъждаше в последните две глави. Той също е верен в общия случай. Но последното уравнение съдържа нещо ново. По-рано ние се срещахме само с неговата част, която е годна за постоянните токове. В този случай говорехме, че ротацията на **B** е равна на $\mathbf{j}/\varepsilon_0 c^2$, но правилното общо уравнение има нов член, който е бил открит от Максвел.

До появяването на работата на Максвел известните закони за електричеството и магнетизма са били същите както тези, които ние изучавахме в гл. 3—14 и гл. 15—17. В частност уравнението за магнитното поле на постоянните токове е било известно само във вида

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2}. \tag{18.1}$$

Максвел започнал с разглеждането на тези известни закони и ги изразил във вид на диференциални уравнения, така както ние постъпихме тук. (Въпреки че символът ∇ още не е бил измислен, за пръв път главно благодарение на Максвел станала очевидна важността на такива комбинации на производните, които днес наричаме ротация и дивергенция.) Максвел тогава забелязал, че в уравнението (18.1) има нещо странно. Ако вземем дивергенция от това уравнение, лявата страна ще стане нула, защото дивергенцията на ротацията винаги е равна на нула. По такъв начин това уравнение изисква дивергенцията на **j** също да е равна на нула. Но ако дивергенцията на **j** е равна на нула, пълният ток през всяка затворена повърхност също е равен на нула.

Пълният ток през затворена повърхност е равен на намаляването на зарядите вътре в тази повърхност. Той сигурно не може да бъде винаги равен на нула, тъй като ние знаем, че зарядите могат да се преместват от едно място в друго. Уравнението

$$\nabla\cdot\mathbf{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{18.2}$$

фактически е нашето определение на **j**. Това уравнение изразява най-фундаменталния закон — запазването на електричния заряд: всеки поток на заряда трябва да идва от някакъв запас. Максвел забелязал тази трудност и, за да я избегне, предложил да се добави $\partial\mathbf{E}/\partial t$ в дясната част на уравнение (18.1); тогава той получил уравнението IV в табл. 18.1:

$$c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}+\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

По времето на Максвел още не са били привикнали да мислят с термините на абстрактните полета. Максвел обсъждал своите идеи с помощта на модел, в който вакуумът е бил подобен на пъргаво тяло. Той се опитвал също да обясни смисъла на своето ново уравнение с помощта на механичен модел. Теорията на Максвел се приемала твърде неохотно, първо, заради модела и второ, защото отначало нямало експериментално потвърждение. Сега по-добре разбираме, че работата е в самите уравнения, а не в модела, с помощта на който те са били получени. Ние можем само да зададем въпроса, правилни ли са тези уравнения, или са погрешни. Отговор дава експериментът. И уравненията на Максвел са били потвърдени в безбройни експерименти. Ако ние отхвърлим всички скели, с които си е служил Максвел, за да построи уравненията, ние ще дойдем до заключението, че прекрасното здание, създадено от Максвел, се държи от самосебе си. Той

свързал заедно всички закони на електричеството и магнетизма и създал завършена и прекрасна теория.

Нека да покажем, че добавъчният член има същия този вид, който се иска, за да се преодолее откритата от Максвел трудност. Като вземем дивергенцията от неговото уравнение (IV в табл. 18-1), ние трябва да получим, че дивергенцията на дясната част е равна на нула

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \tag{18.3}$$

Във второто събираемо можем да разместим реда на диференциране по координатите и по времето, така че уравнението може да бъде преписано във вида

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \tag{18.4}$$

Но съгласно първото от уравненията на Максвел дивергенцията на $\mathbf{E}$ е равна на ρ/ε_0. Като поставим това равенство в (18.4), ще дойдем до уравнение (18.2), което, както знаем, е правилно. И обратно, ако приемаме уравненията на Максвел (а ние ги приемаме, защото никой никога не е намерил експеримент, който би ги опровергал), трябва да стигнем до извода, че зарядът винаги се запазва.

Законите на физиката не дават отговор на въпроса, „Какво ще стане, ако внезапно възникне заряд в тази точка, какви ще бъдат електромагнитните ефекти при това?“ Отговор не може да се даде, защото нашите уравнения утвърждават, че това не се случва. Ако това би се случило, на нас биха ни потрябвали нови закони, но не можем да кажем какви биха били те. Не ни се е случвало да наблюдаваме как се държи светът без запазване на заряда. Според нашите уравнения ако внезапно поставите заряд в някоя точка, вие трябва да го донесете там отнякъде другаде. В такъв случай ние можем да говорим за това, какво е станало.

Когато добавихме новия член в уравнението за ротацията на $\mathbf{E}$, открихме, че с него се описва цял нов клас явления. Ние ще видим също така, че малката добавка на Максвел към уравнението за $\nabla \times \mathbf{B}$ има далеч отиващи последици. Ние ще засегнем само някои от тях в тази глава.

18-2. Какво дава добавката

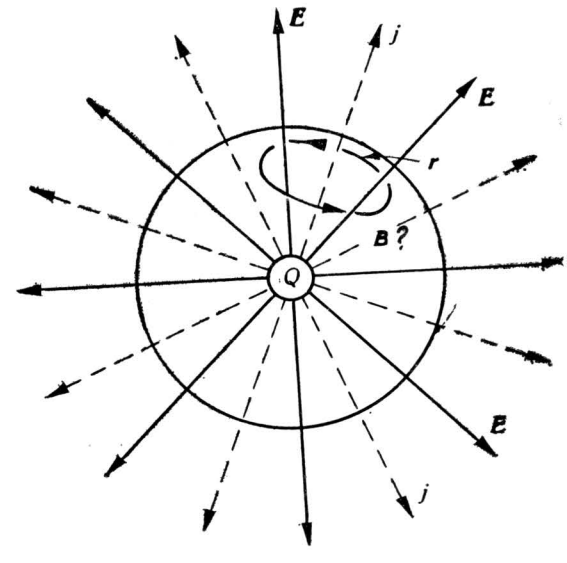
Като наш пръв пример ще разгледаме какво става при сферично симетрично радиално разпределение на тока. Да си представим малка сфера с нанесено на нея радиоактивно вещество. Това радиоактивно вещество изпуска навън заредени частици. (Ние можем да си представим също така голямо парче желе с малка кухина в центъра, в което с помощта на спринцовка се впръскват някакви заряди и от което зарядите бавно се просмукват.) Във всеки случай ние бихме имали ток, който навсякъде е насочен по радиуса навън. Ще считаме, че големината му е еднаква във всички посоки.

Нека пълният заряд в сфера с произволен радиус r е $Q(r)$. Ако плътността на радиалния ток при също такъв радиус е $\mathbf{j}(r)$, уравнението (18.2) изисква Q да намалява със скорост

$$\frac{\partial Q(r)}{\partial t} = -4\pi r^2 j(r). \tag{18.5}$$

Да попитаме сега за магнитното поле, създавано от токовете в този случай. Да предположим, че сме начертали някаква затворена крива Г на сферата с радиус r (фиг. 18-1). През кривата минава някакъв ток, затова може да се очаква, че магнитното поле циркулира в посоката, която е показана на фигурата.

И веднага възниква затруднение. Как може полето $\mathbf{B}$ да има някаква особена посока върху сферата? При друг избор на кри-



Фиг. 18-1. Какво е магнитното поле на сферически симетричен ток?

вата Г ние бихме заключили, че нейната посока е точно противоположна на показаната. Затова *възможна ли* е някаква циркулация на **B** около токовете?

Спасяват ни уравненията на Максвел. Циркулацията на **B** зависи не само от пълния ток, който минава през кривата Г, но и от скоростта на промяната на *електричният поток* през нея с времето. Трябва да бъде така, че тези две части точно да се анулират. Да видим получава ли се това.

Електричното поле на разстояние r трябва да бъде равно на $Q(r)/4\pi\varepsilon_0 r^2$, докато, както предположихме, зарядът е разпределен симетрично. Полето е радиално и скоростта на изменението му тогава е

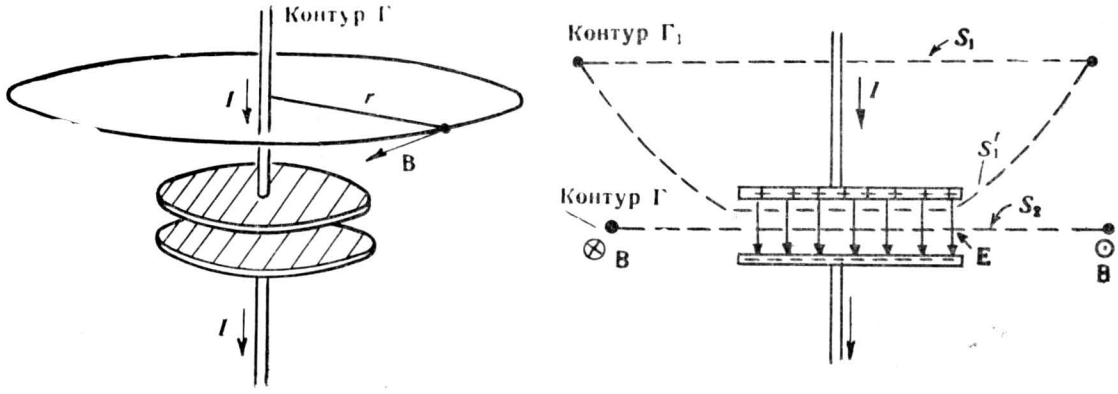
$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{18.6}$$

Като сравним това с (18.5), ние виждаме, че за всяко разстояние

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{j}{\varepsilon_0}. \tag{18.7}$$

В уравнение IV (табл. 18-1) двата члена от източника се анулират и ротацията на **B** е равна винаги на нула. Магнитно поле в нашия пример няма.

В качеството на втори наш пример ще разгледаме магнитното поле на проводник, който се използува за зареждане на плосък кондензатор (фиг. 18-2). Ако зарядът Q на плочите се изменя с времето (но не твърде бързо), токът в проводника е равен на dQ/dt. Ние очакваме, че този ток ще създаде магнитно поле, което обкръжава проводника. Разбира се, близо до проводника токът трябва да създава обикновено магнитно поле и то не може да зависи от това, къде тече токът.



Фиг. 18-2. Магнитното поле близо до зареждан кондензатор

Да предположим, че сме избрали кривата Γ_1 във вид на окръжност с радиус r (фиг. 18-2, *а*). Криволинейният интеграл от магнитното поле ще бъде равен на тока I, разделен на $\varepsilon_0 c^2$.

$$2\pi rB = \frac{I}{\varepsilon_0 c^2}. \tag{18.8}$$

Всичко това бихме получили за постоянен ток, но резултатът няма да се измени, ако отчетем добавката на Максвел, защото за плоската повърхност S вътре в окръжността няма електрично поле (като считаме, че проводникът е много добър проводник). Повърхнинният интеграл от $\partial \mathbf{E}/\partial t$ е равен на нула.

Да предположим обаче, че сега бавно придвижваме кривата Γ_1 надолу. Ние ще получаваме винаги същия този резултат дотогава, докато не начертаем кривата наравно с плочите на кондензатора. Тогава токът I ще се стреми към нула. Ще изчезне ли при това магнитното поле? Това би било много странно. Нека да погледнем какво казва уравнението на Максвел за кривата Г,

която представлява окръжност с радиус r, равнината на която минава между плочите на кондензатора (фиг. 18-2, *б*). Криволинейният интеграл от **B** по кривата Γ е $2\pi rB$. Той трябва да бъде равен на производната по времето от потока на **E**, който минава през плоската повърхност на кръга S_2. Този поток на **E**, както знаем от закона на Гаус, трябва да бъде равен на произведението на заряда Q на едната от плочите на кондензатора и $1/\varepsilon_0$

$$c^2\,2\pi rB = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{\varepsilon_0}\right). \qquad (18.9)$$

Това е много хубаво. Резултатът е същият, който намерихме в (18.8). Интегрирането по изменящото се магнитно поле дава същото магнитно поле, както и интегрирането по тока в проводника. Разбира се, точно това казва уравнението на Максвел. Лесно е да се види, че така трябва да бъде винаги, ако приложим нашите разсъждения към двете повърхности S_1 и S_1', ограничени с една и съща окръжност Γ_1 на фиг. 18-2, *б*. През S_1 минава ток I, но няма електричен поток. През S_1' няма ток, но има електричен поток, който се изменя със скорост I/ε_0. Същото поле **B** ще се получи, ако ние приложим уравнение IV (табл. 18-1) към всяка повърхност.

От нашето обсъждане за добавката, въведена от Максвел, у вас може да се получи впечатление, че тя прибавя малко — просто леко поправя уравнението в съответствие с това, което ние вече очаквахме. Това е вярно, докато ние разглеждаме уравнение IV *само за себе си*, нищо особено ново не се появява. Думите *само за себе си* обаче са твърде важни. Малкото изменение, въведено от Максвел в уравнение IV, *в съчетание с другите уравнения* наистина дава много ново и важно. Но преди да се заемем с този въпрос да поговорим по-подробно за табл. 18-1.

18-3. Всичко за класическата физика

В табл. 18-1 е събрано всичко, което е знаела фундаменталната класическа физика, т. е. онази физика, която е била известна до 1905 г. В тази единствена таблица има всичко. С помощта на тези уравнения може да се разберат всички достижения на класическата физика.

Преди всичко имаме уравненията на Максвел, записани както в разширен вид, така и в кратка математична форма. След това има запазването на заряда, което е записано в скобки, защото запазването на заряда може да се изведе от наличните пълни уравнения на Максвел. Така че в таблицата има даже малки излишъци. По-нататък записахме закона за силата, тъй като всички налични електрични и магнитни полета нищо не ни говорят дотогава, докато не знаем как те действуват на зарядите. Обаче като знаем **E** и **B**, можем да намерим силата, действуваща на обект със заряд q, който се движи със скорост **v**. Накрая наличната сила нищо не ни говори, докато не знаем какво става, когато силата ускорява нещо; необходимо ни е да знаем закона за движението, който гласи, че силата е равна на скоростта на промяната на импулса. (Помните ли? За това се говори в началото на курса.) Ние даже включихме ефектите на теорията на относителността, като записахме импулса във вида $\mathbf{p} = m_0\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

Но ако действително искаме завършеност, следва да добавим още един закон — закона на Нютон за привличането, и го поставихме в края.

И така, в една малка таблица събрахме всички фундаментални закони на класическата физика, даже стигна място да ги напишем с думи и още с някакъв излишък. Това е велик момент. Покорихме голяма височина. Ние сме на върха К-2[1], ние сме

[1] К-2 е вторият по височина връх в света в северозападните разклонения на Хималаите, наричани Каракорум.

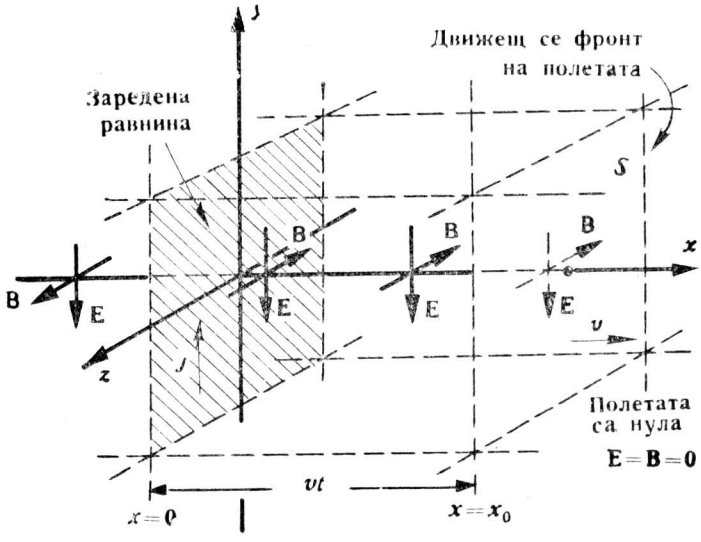
почти подготвени да покорим сега Еверест, т. е. квантовата механика.

Ние се опитвахме главно да се научим да разбираме тези уравнения. А сега, когато ги събрахме заедно, се каним да разберем какво означават тези уравнения, какво ново ще кажат те за това, което ние още не сме разбрали. Много се потрудихме, за да се покатерим на тази точка. Това изискваше големи усилия, а сега се каним да започнем приятно пътешествие — спускане от планината в долината; там ние ще видим всичко, което сме достигнали.

18-4. Преместващо се поле

А сега за новите следствия. Те възникват от съпоставянето на всички уравнения на Максвел. Нека отначало да видим какво би станало при съвсем прост случай. Да предположим, че се изменя само едната координата във всички величини, т. е. да разгледаме задачата с едно измерение.

Този случай е показан на фиг. 18-3. Пред нас е зареден лист поместен в равнината yz. Отначало той е неподвижен, а след това мигновено придобива скорост u в посока y и се движи с тази постоянна скорост. Вас може да ви безпокои присъствието на такова „безкрайно“ ускорение, но фактически това няма значение; просто си представете, че скоростта достига стойността u много бързо. И така, внезапно получаваме повърхнинен ток J (J е токът на единица широчина в посока z). За да опростим проблема, да предположим, че има още и неподвижен лист, зареден противоположно и наложен на равнината yz, така че електростатичните ефекти отсъствуват. Да си представим също така (въпреки че на фигурата сме показали само това, което става в крайна област), че листът се простира до безкрайност в посоките $\pm y$ и $\pm z$. С други думи, тук ние имаме случай, когато няма ток, а след това се появява хомогенен лист с ток. Какво ще стане?



Фиг. 18.3. Безкрайната заредена равнина неочаквано се привежда в постъпателно движение

Възникват магнитно и електрично поле, които се разпространяват от равнината с постоянна скорост

Знаем, че когато има лист с ток в положителната y-посока, ще възникне магнитно поле, насочено в отрицателната z-посока при $x>0$ и в положителната z-посока при $x<0$. Бихме могли да намерим големината на **B**, като използуваме този факт, че линейният интеграл от магнитното поле ще бъде равен на тока, разделен с $\varepsilon_0 c^2$. Бихме получили, че $B=J/2\varepsilon_0 c^2$ (тъй като токът I в ивицата с широчина w е равен на Jw, а линейният интеграл от **B** е $2Bw$).

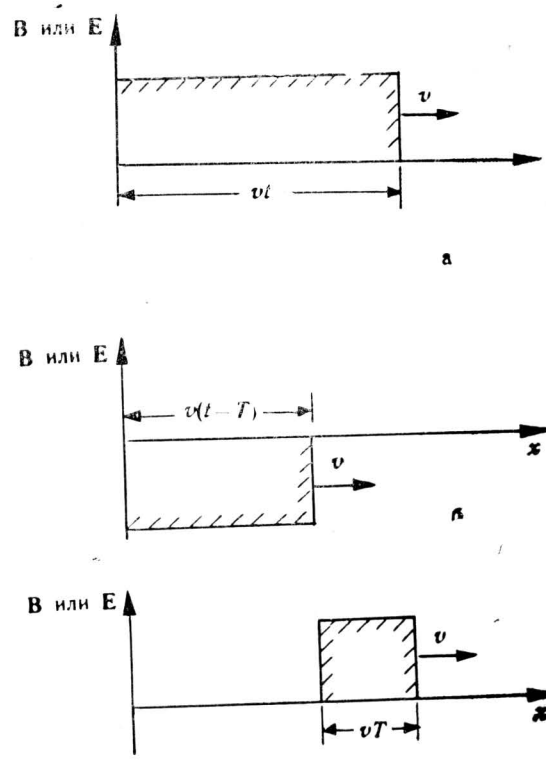
Така ние определяме полето близо до листа за малки стойности на x, но тъй като считаме листа безкраен, желателно е да получим с помощта на същите разсъждения и магнитното поле по-надалеч (за големи стойности на x). Обаче това би означавало,

че в момента, когато ние включваме тока, магнитното поле внезапно се изменя навсякъде от нула до крайна стойност. Но почакайте! При внезапно изменение на магнитното поле възникват огромни електрични ефекти. (Електричните ефекти ще възникнат *както и да се изменя то*.) Така че в резултат на движението на зареден лист се създава изменящо се магнитно поле и следователно трябва да възникнат електрични ефекти. Ако са се образували електрични полета, те трябва да започват от нула и да се изменят до някаква стойност. Ще възникне някаква производна $\partial \mathbf{E}/\partial t$, която ще допринася заедно с тока J за създаването на магнитното поле. Така разните уравнения се закачват едно за друго и ние трябва да се опитаме да намерим решение за всички полета наведнъж.

Като разглеждаме уравненията на Максвел поотделно, не е лесно да се получи решение. Затова отначало ще ви съобщим отговора, а след това вече ще проверим действително ли той удовлетворява уравненията. *Отговор*: Полето **B**, което пресметнахме, действително се създава направо близо до листа с ток (за малки x). Така и трябва да бъде, защото ако ние прекараме мъничка затворена крива около листа, в нея няма да има място за минаване на електричния поток. Но полето **B** по-надалеч (за големи x) отначало е равно на нула. В течение на известно време то остава нулево, а след това внезапно се включва. Накратко казано, ние включваме тока и незабавно близо до него се включва магнитно поле с постоянна стойност **B**; след това включеното поле **B** се разпространява от областта на източника. След известно време се появява хомогенно магнитно поле навсякъде, чак до някаква стойност на x, а след нея то е равно на нула. Вследствие на симетрията то се разпространява както в положителната, така и в отрицателната x-посока.

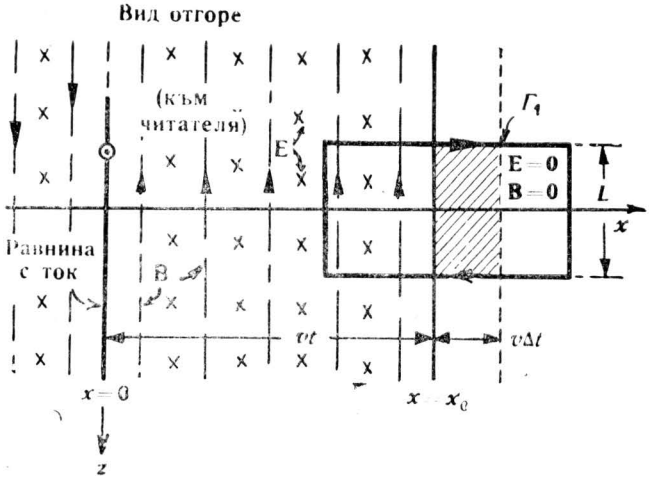
Полето **E** прави същото. До момента $t=0$ (когато ние включваме тока) полето навсякъде е равно на нула. После след време t както **E**, така и **B** са постоянни чак до разстоянието $x=vt$, а след него са равни на нула. Полетата се придвижват напред подобно на приливна вълна, при това фронтът им се движи с постоянна скорост, която се оказва равна на c, но засега ние ще я наричаме v. Зависимостта на величината **E** или **B** от x (както те изглеждат в момент t) е показана на фиг. 18-4, *а*. Ако отново погледнем фиг. 18-3 в момента t, ще видим, че областта между $x=\pm vt$ „е заета“ от полетата, но те още не са достигнали областта след нея. Отново подчертаваме — ние предполагаме, че листът е зареден, а следователно и полетата **E** и **B** се простират безкрайно далеч в y- и z-направления. (Ние не можем да изобразим безкраен лист, затова показваме само това, което става в крайна област.)

Сега искаме да анализираме количествено това, което става. За да направим това, ще разгледаме два напречни разреза: изглед отгоре, ако се гледа надолу по оста y (фиг. 18-5) и изглед от-

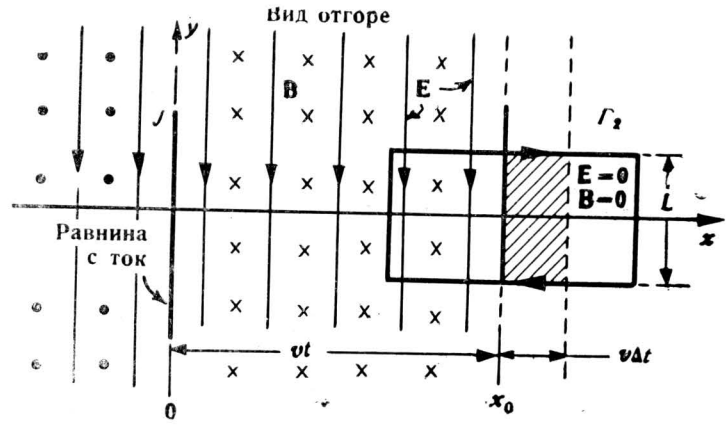


Фаг. 18.4. Зависимост на големината на **B** (или **E**) от x:

а — след време t от началото на движение на зареденатa равнина; *б* — полетата от зареденатa равнина, започнала да се движи в момент $t=T$ в посоката на отрицателните y; *в* — сумата на *а* и *б*



Фиг. 18-5. Същото както на фиг. 18-3 (вид отгоре)



Фиг. 18-6. Същото както на фиг. 18-3 (вид отстрани)

страни, ако се гледа назад по оста z (фиг. 18-6). Да започнем с изгледа отстрани. Ние виждаме зареден лист, движещ се нагоре; магнитното поле е насочено навътре към страницата за $+x$ и от страницата към нас за $-x$, а електричното поле е насочено надолу навсякъде, чак до $x=\pm vt$.

Да видим съгласуват ли се такива полета с уравненията на Максвел. Отначало да нарисуваме една от тези затворени криви, от които се ползувахме за изчисляване на криволинейния интеграл, да речем правоъгълника Γ_2 на фиг. 18-6. Забележете, че едната страна на правоъгълника минава в област, до която полетата още не са дошли. През тази крива минава някакъв магнитен поток. Ако той се изменя, трябва да се появи електродвижещо напрежение по кривата. Ако фронтът на вълната се движи, ще имаме изменящ се магнитен поток, тъй като повърхността, вътре в която съществува поле $\mathbf{B}$, непрекъснато се увеличава със скорост v. Потокът вътре в Γ_2 е равен на произведението на $\mathbf{B}$ и тази част на повърхността в Γ_2, където има магнитно поле. Скоростта на изменение на потока (тъй като големината на $\mathbf{B}$ е постоянна) е равна на големината на полето, умножена със скоростта на изменението на повърхността. Скоростта на изменение на повърхността лесно се намира. Ако широчината на правоъгълника Γ_2 е равна на L, повърхността, в която $\mathbf{B}$ съществува, се изменя както $Lv\Delta t$ за интервала от време Δt (виж фиг. 18-6). Скоростта на изменението на потока тогава е равна на BLv. По закона на Фарадей тя трябва да бъде равна на криволинейния интеграл от $\mathbf{E}$ по кривата Γ_2, който е просто EL. Получаваме равенството

$$E=vB. \tag{18.10}$$

По такъв начин ако отношението на E към B е равно на v, разглежданите полета ще удовлетворяват уравнението на Фарадей.

Но това не е единственото уравнение; ние имаме още едно, което свързва $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$:

$$c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}+\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{18.11}$$

За да приложим това уравнение, да погледнем на изгледа отгоре, който е изобразен на фиг. 18-5. Ние вече видяхме, че това уравнение дава стойността на B близо до заредения лист. Освен това, за всяка крива, нарисувана извън листа, но зад фронта на вълната, няма нито ротация на $\mathbf{B}$, нито $\mathbf{j}$ или изменящо се поле $\mathbf{E}$, така че уравнението там е в сила. А сега да видим какво става в кривата Γ_1, която пресича фронта на вълната, както е показано на фиг. 18-5. Тук няма токове, затова уравнението (18.11) може да се запише в интегрална форма така:

$$c^2\oint_{\Gamma_1}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\frac{d}{dt}\int_{\text{Вътре в }\Gamma_1}\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da. \tag{18.12}$$

Криволинейният интеграл от $\mathbf{B}$ е просто произведението на B и L. Скоростта на изменение на потока на $\mathbf{E}$ възниква само благодарение на придвижващия се фронт на вълната. Областта в Γ_1, където $\mathbf{E}$ не е равно на нула, се увеличава със скорост vL. Дясната страна на (18.12) тогава е равна на vLE. Това уравнение приема вида

$$c^2B=Ev. \tag{18.13}$$

Ние имаме решение, когато полетата $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ са постоянни зад фронта, при това и двете са насочени под прав ъгъл към посоката, в която се движи фронтът, и под прав ъгъл едно към друго. Уравненията на Максвел определят отношението на E към B. От (18.10) и (18.13) получаваме

$$E=vB \text{ и } E=\frac{c^2}{v}B.$$

Но една минута! Ние намерихме *два различни* израза за отноше-

нието E/B. Може ли такова поле, каквото ние описваме, действително да съществува? Има само една скорост v, за която двете уравнения могат да бъдат в сила, а именно $v=c$. Фронтът на вълната трябва да се придвижва със скорост c. Ето пример когато електричното влияние на тока се разпространява с определена крайна скорост c.

А сега да попитаме какво ще стане, ако ние внезапно спрем заредения лист, след като той се е движил в течение на кратко време T? С помощта на принципите на суперпозицията може да се види какво ще се случи. Имахме ток, равен на нула, а след това внезапно го включихме. Знаем решението за този случай. Сега се каним да прибавим друга редица полета. Вземаме друг лист и внезапно започваме да го движим в противоположна посока със същата скорост, само че след време T от началото на движението на първия лист. Пълният ток от двата листа заедно отначало е равен на нула, после се включва в течение на време T, след това се изключва отново, защото двата тока се погасяват. Така ние получаваме правоъгълен „импулс“ на ток.

Новият отрицателен ток създава същите полета, както и положителния, но с обратни знаци и, разбира се, със закъснение по време T. Фронтът на вълната както по-рано се движи със скорост c. В момент t той достига разстоянието $x=\pm c\,(t-T)$ (виж фиг. 18-4, б). И така, ние имаме два „къса“ полета, които се преместват със скорост c (виж фиг. 18-4, *а* и *б*). Съединените полета ще бъдат такива, както е показано на фиг. 18-4, *в*. За $x>ct$ полетата са равни на нула, между $x=c\,(t-T)$ и $x=ct$ те са постоянни (със стойностите, които намерихме по-горе) и за $x<c(t-T)$ те отново са равни на нула.

Накратко казано, ние получаваме малко парче поле с дебелина cT, което е напуснало заредения лист и се придвижва през цялото пространство само по себе си. Полетата са се „откъснали“; те се разпространяват свободно в пространството и вече не са свързани по някакъв начин с източника. Какавидата се превърна в пеперуда!

Как пък тези съвкупности на електричното и магнитното поле могат да запазват сами себе си? *Отговор*: За сметка на съчетаването на ефектите от закона на Фарадей $\nabla\times\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t$ и новия член, прибавен от Максвел, $c^2\nabla\times\mathbf{B}=\partial\mathbf{E}/\partial t$. Те не могат да не се запазват. Да предположим, че магнитното поле изчезне. Тогава би се появило изменящо се магнитно поле, което би създавало електрично поле. Ако това електрично поле би се опитало да изчезне, изменящото се електрично поле би създало отново магнитно поле. Следователно за сметка на непрекъснатото взаимодействие — преливане натам и обратно от едното поле към другото — те са длъжни да се запазват вечно. Те не могат да изчезнат[1]. Те се запазват, въвлечени в общ танц — едното поле създава другото, а второто създава първото, — като се разпространяват все по-далеч и по-далеч в пространството.

18-5. Скорост на светлината

Ние имаме вълна, която се отдалечава от материалния източник и се движи със скорост c (това е скоростта на светлината). Да се върнем малко назад. Исторически не е било известно, че коефициентът c в уравненията на Максвел е същото, каквото и скоростта на разпространение на светлината. Това е било просто константа в уравненията. Ние я нарекохме c от самото начало, тъй като знаехме какво в края на краищата трябва да се получи. Ние не мислим, че би било разумно отначало да ви заставим да заучите формулите с разни константи, а после да се върнем об-

[1] Това не е съвсем така. Полетата могат да бъдат „погълнати“, ако попаднат в област, в която има заряди. Това означава, че някъде могат да бъдат създадени други полета, които ще се наслагват с тези полета и ще ги „погасят“ в резултат на деструктивна интерференция (виж гл. 31).

ратно и да поставим c навсякъде, където то трябва да стои. От гледна точка на електричеството и магнетизма обаче ние направо започваме с две константи ε_0 и c^2, които се появяват в уравненията на електростатиката и магнитостатиката:

$$\nabla.\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{18.14}$$

и

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2}. \tag{18.15}$$

Ако вземем каквото и да е *произволно* определение на единица заряд, може експериментално да се определи константата ε_0, която влиза в уравнение (18.14), да речем, като измерим силата между два неподвижни единични заряда по закона на Кулон. Трябва също така да определим експериментално константата $\varepsilon_0 c^2$, която се появява в уравнение (18.15); това може да се направи, например като измерим силата между два единични тока. (Единичен ток означава единичен заряд в секунда.) Отношението на тези две експериментални константи е c^2 — точно другата „електромагнитна константа".

Сега ще отбележим, че константата c^2 се получава винаги една и съща, независимо от това, каква е избраната единица заряд. Ако ние изберем „заряд" два пъти по-голям (например удвоения заряд на протона), в нашата „единица" на заряда ε_0 трябва да се намали четири пъти. Когато пропускаме два такива „единични" тока по два проводника, във всеки проводник има два пъти повече „заряда" в секунда, така че силите между двата проводника ще бъдат четири пъти по-големи. Константата $\varepsilon_0 c^2$ трябва да се намали четири пъти. Но отношението $\varepsilon_0 c^2/\varepsilon_0$ не се изменя.

Следователно непосредствено от експериментите със заряди и токове ние намираме числото c^2, което се оказва равно на квадрата на скоростта на разпространение на електромагнитните възбуждания. От статични измервания (като измерваме силата между два единични заряда и между два единични тока) ние намираме, че $c = 3{,}00.10^8$ m/s. Когато Максвел за пръв път направил това изчисление със своите уравнения, той казал, че съвкупността на електричното и магнитното поле ще се разпространява с тази скорост. Той отбелязъл също тайнственото съвпадение, че тази скорост е равна на скоростта на светлината. „Ние едва ли можем да избегнем заключението — казва Максвел, че светлината е напречно вълнообразно движение на същата тази среда, която предизвиква електричните и магнитните явления."

Така Максвел извършил едно от великите обобщения на физиката! До него е имало светлина, имало е електричество, имало е и магнетизъм. При това двете последни явления били обединени от експерименталните работи на Фарадей, Оерщед и Ампер. След това внезапно светлината не била вече „още нещо", а станала електричество и магнетизмът в нова форма, малки късчета на електричното и магнитното поле, които се разпространяват в пространството самостоятелно.

Ние обръщахме вашето внимание върху някои черти на това особено решение, които обаче са верни за *всякаква* електромагнитна вълна: магнитното поле е перпендикулярно на посоката на движението на фронта на вълната; електричното поле също е перпендикулярно на посоката на движението на фронта на вълната; и двата вектора **E** и **B** са перпендикулярни един към друг. По-нататък големината на електричното поле E е равна на произведението на c и големината на магнитното поле B. Тези три факта — че двете полета са напречни на посоката на разпространението, че **B** е перпендикулярно на **E** и че $E = cB$ — са верни изобщо за всяка електромагнитна вълна. Нашият частен случай е добър пример, той показва всички основни свойства на електромагнитните вълни.

18-6. Решение на уравненията на Максвел; потенциали и вълново уравнение

Сега си струва да се заемем малко с математика; ще запишем уравненията на Максвел в по-проста форма. Вие навярно ще сметнете, че ние ги усложняваме, но ако се запасите с малко търпение, внезапно ще откриете тяхната голяма простота. Въпреки че вие вече сте напълно привикнали към всяко от уравненията на Максвел, има все пак много части, които си струва да съберем в едно. Ето с това ще се заемем.

Ще започнем с $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ — най-простото от уравненията. Ние знаем, от него се подразбира, че $\mathbf{B}$ е ротация на нещо. Затова, ако вие сте записали

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}, \tag{18.16}$$

смятайте, че вече сте решили едно от уравненията на Максвел. (Между другото забележете, че то остава вярно за друг вектор $\mathbf{A}'$, ако $\mathbf{A}'=\mathbf{A}\times\nabla\psi$, където ψ е всякакво скаларно поле, защото ротация от $\nabla\psi$ е нула, а $\mathbf{B}$ както по-рано е същото. Ние говорихме за това по-рано.)

Сега да разгледаме закона на Фарадей $\nabla\times\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t$, защото той не съдържа никакви токове или заряди. Ако ние запишем $\mathbf{B}$ като $\nabla\times\mathbf{A}$ и диференцираме по t, ще можем да препишем закона на Фарадей във вида

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\,\nabla\times\mathbf{A}.$$

Тъй като можем да диференцираме отначало или по времето, или по координатите, можем да напишем това уравнение също във вида

$$\nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0. \tag{18.17}$$

Ние виждаме, че $\mathbf{E}+\partial\mathbf{A}/\partial t$ е вектор, ротацията на който е равна на нула. Затова такъв вектор е градиент на нещо. Когато се занимавахме с електростатика, имахме $\nabla\times\mathbf{E}=0$ и тогава решихме, че $\mathbf{E}$ е градиент на нещо. Нека това е градиент от $-\varphi$ (минус за технически удобства). Същото ще направим и за $\mathbf{E}+\partial\mathbf{A}/\partial t$; полагаме

$$\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi. \tag{18.18}$$

Използуваме същото означение φ, така че в електростатичния случай, когато нищо не се изменя с времето и $\partial\mathbf{A}/\partial t$ изчезва, $\mathbf{E}$ ще бъде нашето старо $-\nabla\varphi$. И така, законът на Фарадей може да се представи във формата

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial A}{\partial t}. \tag{18.19}$$

Ние вече решихме две от уравненията на Максвел и намерихме, че за описване на електромагнитните полета $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ са необходими четири потенциални функции: скаларният потенциал φ и векторният потенциал $\mathbf{A}$, който, разбира се, представлява три функции.

И така, $\mathbf{A}$ определя част от $\mathbf{E}$, също както и $\mathbf{B}$. Какво ще стане, когато ние заменим $\mathbf{A}$ с $\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\psi$? Общо взето, $\mathbf{E}$ би трябвало да се измени, ако не вземем особени мерки. Можем обаче да допуснем, че $\mathbf{A}$ се изменя така, че да не влияе на полетата $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ (т. е. без да изменя физиката им), ако винаги изменяме $\mathbf{A}$ и φ *заедно* по правилата

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\psi,\quad \varphi'=\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{18.20}$$

Тогава нито $\mathbf{B}$, нито $\mathbf{E}$, получени от уравнение (18.19), не се изменят.

По-рано избирахме $\nabla.\mathbf{A}=0$, за да опростим някак уравненията на статиката. Сега не смятаме така да постъпим; искаме да направим друг избор. Но почакайте малко, преди да кажем какъв е този избор, защото по-късно ще стане ясно *защо* изобщо се прави избор.

Сега ще се върнем към останалите две уравнения на Максвел, които ще свържат потенциалите и източниците ρ и $\mathbf{j}$. Щом можем да определим $\mathbf{A}$ и φ от токовете и зарядите, можем винаги да получим $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ от уравненията (18.16) и (18.19) и ще имаме другата форма на уравненията на Максвел.

Да започнем със заместването на уравнение (18.19) в $\nabla.\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0$; получаваме

$$\nabla\cdot\left(-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0};$$

това можем да запишем още във вида

$$-\nabla^2\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{18.21}$$

Такова е първото уравнение, което свързва φ и $\mathbf{A}$ с източниците.

Нашето последно уравнение ще бъде най-трудно. Ще започнем с това, че ще препишем четвъртото уравнение на Максвел:

$$c\nabla\times\mathbf{B}-\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0},$$

а след това ще изразим $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ чрез потенциалите, като използуваме уравнения (18.16) и (18.19):

$$c^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})-\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}.$$

Първият член може да се препише, като се използува алгебричното тъждество $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$; получаваме

$$-c^2\nabla^2\mathbf{A}+c^2\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi+\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}. \tag{18.22}$$

Това не е много просто!

За щастие сега ние можем да използуваме нашата свобода в произволния избор на дивергенцията на $\mathbf{A}$. Сега се каним да направим такъв избор, че уравненията за $\mathbf{A}$ и за φ да се разделят, но да имат една и съща форма. Ние можем да направим това, като изберем[1]

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{18.23}$$

Когато ние постъпваме така, второто и третото събираемо в уравнение (18.22) се унищожават и то става много по-просто

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0c^2}. \tag{18.24}$$

И нашето уравнение за φ (18.21) приема също такава форма

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{18.25}$$

Какви красиви уравнения! Те са великолепни преди всичко затова, защото добре се разделиха — с плътността на заряда стои φ, а с тока стои $\mathbf{A}$. По-нататък, въпреки че лявата страна изглежда малко нелепо — лапласиан заедно с $(\partial/\partial t)^2$, когато я развием, ще получим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{18.26}$$

---

[1] Изборът на $\nabla\cdot\mathbf{A}$ се нарича „избор на калибровката“. Изменението на $\mathbf{A}$ за сметка на добавянето на $\nabla\psi$ се нарича „калибровъчно преобразуване“. Изборът (18.23) наричат „калибровка на Лоренц“.

Това уравнение има приятна симетрия по x, y, z, t; тук $(-1/c^2)$ е необходимо, разбира се, защото времето и координатите се различават; те имат различни единици.

Уравненията на Максвел ни доведоха до нов тип уравнение за потенциалите φ и $\mathbf{A}$, но с една и съща математична форма за всички четири функции φ, A_x, A_y и A_z. Щом се научихме да решаваме тези уравнения, можем да получим $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ от $\nabla\times\mathbf{E}$ и $-\nabla\varphi-\partial\mathbf{A}/\partial t$. Ние стигаме до друга форма на електромагнитните закони, точно еквивалентна на уравненията на Максвел; в много случаи с тази нова форма е много по-лесно да си служим.

Фактически ние вече решавахме уравнение, твърде приличащо на (18.26). Когато изучавахме звука в гл. 47 (т. I), имахме уравнение във формата

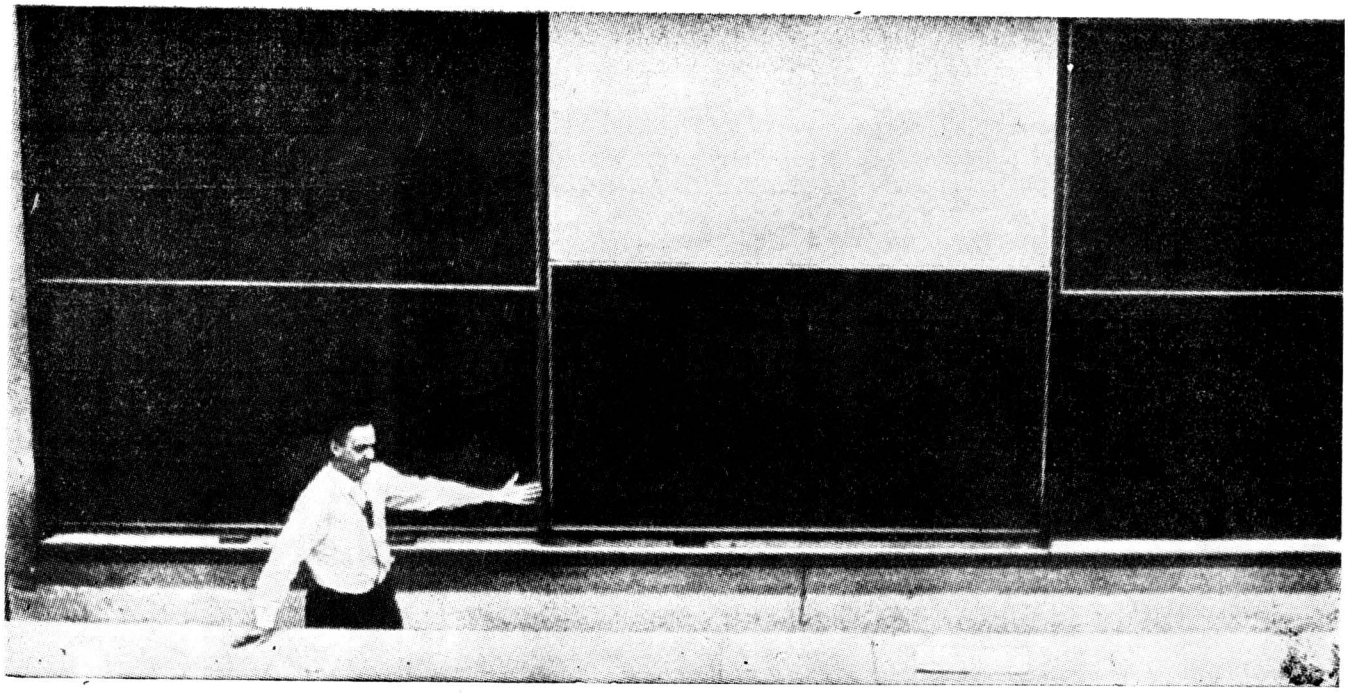
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

и видяхме, че то описва разпространението на вълни в x-направление със скорост c. Уравнение (18.26) е съответстващото вълново уравнение за три измерения. Затова в област, където повече няма заряди и токове, решението на тези уравнения не означава, че φ и $\mathbf{A}$ са нули. (Въпреки че в действителност нулевото решение е едно от възможните решения.) Има решения, представляващи някаква съвкупност на φ и $\mathbf{A}$, които се изменят с времето, но винаги се движат със скорост c. Полетата се придвижват напред през свободното пространство, както в нашия пример в началото на главата.

С новия член, добавен от Максвел в уравнение IV, ние можахме да запишем уравненията на полето чрез термините $\mathbf{A}$ и φ във форма, която е проста и веднага позволява да се разкрие съществуването на електромагнитни вълни. За много практически цели ще бъде удобно да се използуват също първоначалните уравнения с термините $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Но те са от онази страна на планината, на която ние вече се покатерихме. Сега можем да погледнем наоколо. Всичко ще изглежда иначе — очакват ни нови прекрасни пейзажи.

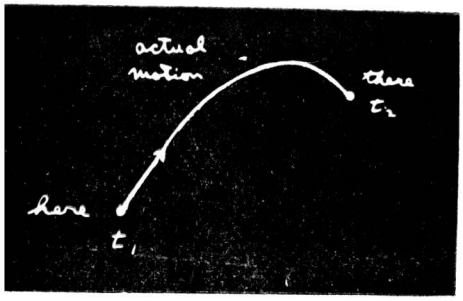
19

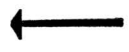
Принцип на най-малкото действие[1]



Когато аз се учех в училище, нашият учител по физика на име Бадер ме повика веднъж при себе си след урока и каза: „Ти имаш такъв вид, като че ли всичко ти е омръзнало; я послушай за едно интересно нещо.“ И той ми разказа нещо, което ми се видя наистина завладяващо. Даже сега, въпреки че оттогава мина вече много време, това продължава да ме увлича. Всеки път, когато си спомням за разказаното, аз отново се залавям за работа. И този път, готвейки се за лекцията, аз схванах, че отново анализирам все същото. И вместо да се готвя за лекцията, аз се заех с решаване на нова задача. Предметът, за който говоря, е *принципът на най-малкото действие.*

Ето какво ми каза тогава моят учител Бадер: „Нека например ти имаш частица в полето на тежестта; тази частица, излизайки отнякъде, свободно се движи към някоя друга точка. Ти си я подхвърлил, да речем, нагоре и тя е излетяла, а после паднала.

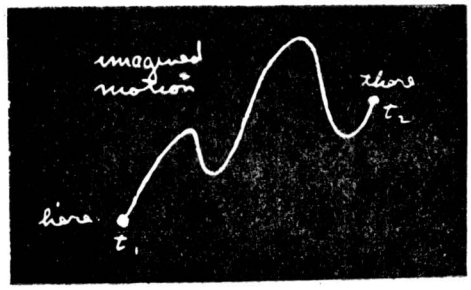




тук ● истинско движение ● там

[1] Тази лекция не е свързана с всички останали. Тя е прочетена само за да се отвлечем от основната тема и отдъхнем малко. (Преводът на надписите, направени на дъската, е даден до рисунките, под стрелките. — Заб. на руск. ред.)

От изходното място до крайното тя е преминала за някакво време. Опитай сега някакво друго движение. Нека, за да мине „оттук дотук“, тя се е движила вече не така, както по-рано, а ето така





тук ● въображаемо движение ● там

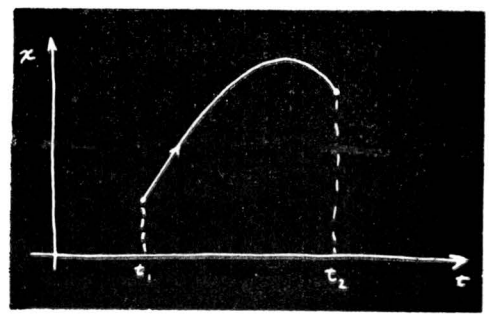
но все едно се е отзовала на необходимото място в същия момент от времето, както и по-рано.“

„И ето — продължаваше учителят, — ако ти пресметнеш кинетичната енергия във всеки момент от времето по пътя на частицата, извадиш от нея потенциалната енергия и интегрираш разликата по цялото това време, когато е ставало движението, ще видиш, че числото, което ще се получи, ще бъде по-голямо, отколкото при истинското движение на частицата.

С други думи, законите на Нютон могат да се формулират не във вида $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$, а ето как: средната кинетична енергия минус средната потенциална енергия достига своята най-малка стойност по онази траектория, по която предметът се движи в действителност от едно място към друго.

Ще се опитам да ти обясня това малко по-разбрано.

Ако вземем полето на тежестта и означим траекторията на частичката с $x(t)$, където x е височината над земята (засега ще минем само с едно измерение; нека траекторията минава само нагоре и надолу, а не встрани), кинетичната енергия ще бъде $^1/_2 m(dx/dt)^2$, а потенциалната енергия в произволен момент от времето ще бъде равна на mgx.



Сега за някакъв момент на движението по траекторията аз вземам разликата от кинетичната и потенциалната енергия и интегрирам по цялото време от началото до края. Нека в началния момент на времето t_1 движението е започнало от някаква височина и е завършило в момент t_2 на друга определена височина

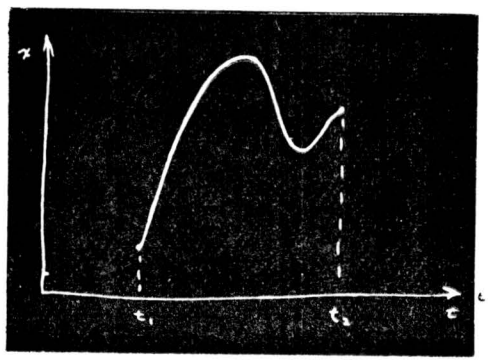


Тогава интегралът е равен на

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-mgx\right]dt.$$

Истинското движение се извършва по някаква крива (като функция от времето тя е парабола) и води до някаква определена стойност на интеграла. Но *може да си представим* някакво друго движение: отначало рязко изкачване, а след това някакви чудновати колебания.

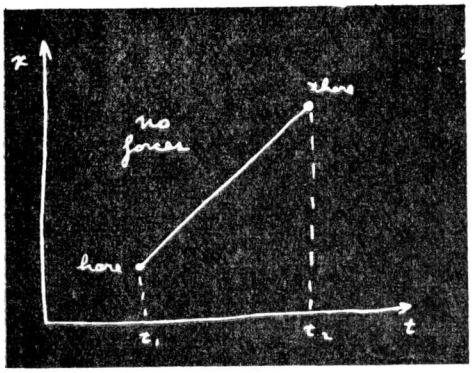


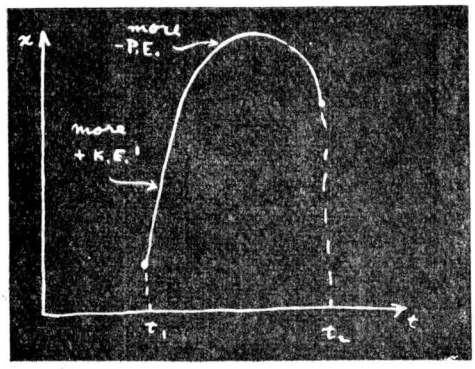


Може да се пресметне разликата на потенциалната и кинетичната енергия по такъв път... или по всеки друг. И най-поразителното е, че истинският път е онзи, по който този интеграл е най-малък.

Нека да проверим това. Отначало да разгледаме такъв случай: свободната частичка няма никаква потенциална енергия. Тогава правилото казва, че при прехода от една точка в друга за дадено време интегралът от кинетичната енергия трябва да бъде най-малък. А това означава, че частичката трябва да се движи равномерно. (И това е вярно, ние с тебе знаем, че скоростта при такова движение е постоянна.) А защо равномерно? Да видим това. Ако би било иначе, от време на време скоростта на частичката би превишавала средната, а от време на време би била по-ниска от нея, а средната скорост би била еднаква, защото на частичката е необходимо да дойде „оттук дотук“ за установено време. Например ако ти е нужно да стигнеш от къщи до училището със своята кола за определено време, това може да се направи по различен начин: ти можеш отначало да караш като луд, а в края да позабавиш или да пътуваш с еднаква скорост, или отначало можеш даже да тръгнеш в обратната посока, а вече след това да обърнеш към училището и т. н. Във всички случаи, раз-

бира се, средната скорост трябва да бъде една и съща — частното от делението на разстоянието от къщи до училището на времето. Но и при дадена средна скорост ти понякога си се движил твърде бързо, а понякога прекалено бавно. А средната *квадратична* на нещо, което се отклонява от средната стойност, както е известно, винаги е по-голяма от средната стойност на квадрат; значи интегралът от кинетичната енергия при колебания на скоростта на движението винаги ще бъде по-голям, отколкото при движение с постоянна скорост. Ти виждаш, че интегралът ще достигне минимум, когато скоростта бъде постоянна (при отсъствие на сили). Правилният път е такъв.





тук ● няма сили ● там

А предмет, хвърлен нагоре в полето на тежестта, отначало се изкачва бързо, а след това все по-бавно. Това, става, защото той притежава и потенциална енергия, а *разликата* между кинетичната и потенциалната енергия трябва да достига най-малка стойност. Понеже потенциалната енергия нараства с издигането, по-малка *разлика* ще се получи, ако се достигнат колкото се може по-бързо онези височини, където потенциалната енергия е голяма. Тогава, като извадим от кинетичната енергия този голям потенциал, ще получим намаляване на средната стойност. Така че по-изгоден е такъв път, който отива нагоре и дава голяма отрицателна част за сметка на потенциалната енергия.

повече + кин. ен. ● повече — пот. ен.

Но, от друга страна, не трябва нито да се движим прекалено бързо, нито да се изкачим прекалено високо, защото за това ще трябва твърде много кинетична енергия. Трябва да се движим достатъчно бързо, за да се издигнем и спуснем за определеното време, с което разполагаме. Така че не трябва да се стараем да излетим много високо, а просто трябва да достигнем някаква разумна височина. В резултат се оказва, че решението е своего рода равновесие между желанието да се придобие колкото се може повече потенциална енергия и желанието колкото може повече да се намали количеството кинетична енергия — стремеж да се достигне максимално намаляване разликата на кинетичната и потенциалната енергия.“

Ето всичко, което ми каза моят учител, защото той беше много добър учител и знаеше кога трябва да спре. Самият аз уви не съм такъв. Трудно ми е да се спра навреме. И затова вместо просто да разпаля във вас интерес със своя разказ, аз искам да ви наплаша, искам да ви се повдигне от сложността на живота — ще се опитам да ви докажа това, за което разказах. Математичната задача, която ще решаваме, е много трудна и своеобразна. Има някаква величина S, наричана *действие*. Тя е равна на кинетичната енергия минус потенциалната, интегрирана по времето:

$$\text{Действието } = S = \int_{t_1}^{t_2} (\text{к. е.} - \text{п. е.})\, dt.$$

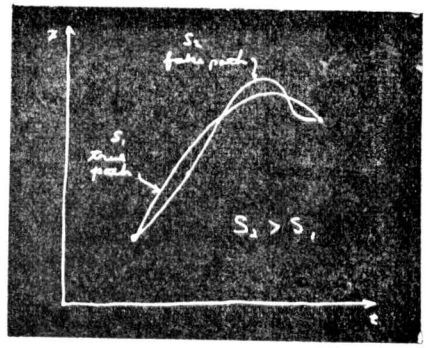
Не забравяйте, че и п. е. и к. е. са функции на времето. За всеки нов мислим път това действие приема своя определена стойност. Математичната задача се състои в това да определим за каква крива това число е по-малко, отколкото за другите.

Вие ще кажете: „О, това е просто обикновен пример за максимум и минимум. Трябва да пресметнем действието, да го диференцираме и да намерим минимума.“

Но почакайте. Обикновено ние имаме функция на някаква променлива и трябва да намерим стойността на *променливата*, при която функцията става най-малка или най-голяма. Например имаме пръчка, нагрята в средата. По нея се разпространява топлина и във всяка точка на пръчката се установява определена температура. Трябва да намерим точката, където температурата е най-висока. Но при нас става дума съвсем за друго: *на всеки път в пространството* отговаря определено число и смятаме да намерим онзи *път*, за който това число е минимално. Това е съвсем друга област на математиката. Това не е обикновено смятане, а *вариационно* (така го наричат).

В тази област на математиката има много такива задачи. Например обикновено определят окръжността като геометрично място на точки, разстоянията до които от дадена точка са еднакви, но окръжността може да се определи и иначе: това е онази от кривите с *дадена дължина*, която ограничава най-голяма площ. Всяка друга крива със същия периметър ограничава по-малка площ от окръжността. Така че, ако поставим задачата: да се намери крива с даден периметър, която ограничава най-голяма площ, пред нас ще стои задача от вариационното смятане, а не от това смятане, с което вие сте свикнали.

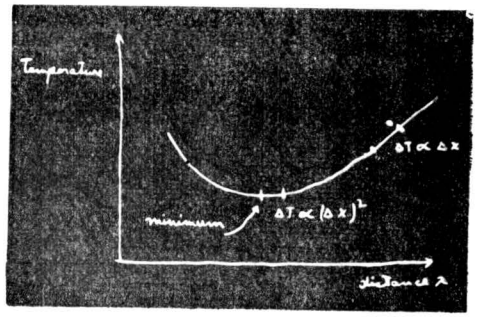
И така, ние искаме да пресметнем интеграл по пътя, изминат от тялото. Това ще направим така. Цялата работа е в това, да си въобразим, че съществува истински път и че всяка друга крива, която ние прекараме, не е истински път, така че ако пресметнем за нея действието, ще се получи число, превишаващо числото, което ние ще получим за действието, съответстващо на истинския път.



верен път ● неверен път

И така, задачата е: да се намери истинският път. Къде минава той? Един от начините, разбира се, би могъл да се състои в това, да се пресметне действието за милиони и милиони пътища и след това да се види при какъв път това действие е най-малко. Ето този път, при който действието е минимално, ще бъде истинският.

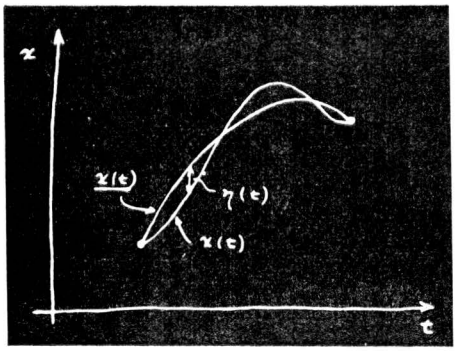
Такъв начин е напълно възможен. Обаче може да се направи по-просто. Ако има величина, която притежава минимум (от обикновените функции, например температурата), едно от свойствата на минимума е, че при отдалечаване от него на малко разстояние от *първи* порядък функцията се отклонява от своята минимална стойност само на величина от *втори* порядък. А във всяко друго място на кривата отклонението на малко разстояние изменя стойността на функцията също на малка величина от първи порядък. Но в минимума леките отклонения настрани в първо приближение не водят до изменение на функцията.



температура ● минимум ● разстояние

Ето това свойство ние се каним да използуваме за пресмятане на истинския път. Ако пътят е правилният, кривата, едва-едва различна от него, няма да доведе в първо приближение до изменение на големината на действието. Всички изменения, ако това е действително минимум, ще възникнат само във второ приближение.

Това е лесно да се докаже. Ако при някакво отклонение от кривата възникват изменения от първи порядък, то тези изменения в действието *са пропорционални* на отклонението. Те по всяка вероятност ще увеличат действието; иначе това не би било минимум. Но тъй като измененията са *пропорционални* на отклонението, промяната на знака на отклонението ще намали действието. Излиза, че при отклонение в една посока действието нараства, а при отклонение в обратната посока — намалява. Един-



ствената възможност това действие да бъде минимум е да не стават никакви изменения в първо приближение и измененията да бъдат пропорционални на квадрата на отклонението от истинския път.

И така, ние ще тръгнем по следния път: ще означим с $x(t)$ (с черта отдолу) истинския път — този, който ние искаме да намерим. Ще вземем някакъв пробен път $x(t)$, отличаващ се от търсения с малка величина, която ще означим с $\eta(t)$.

Идеята се състои в това, че ако ние пресметнем действието S по пътя $x(t)$, разликата между това S и онова действие, което сме изчислили за пътя $\underline{x}(t)$ (за по-просто то ще бъде означено с $\underline{S}$), или разликата между $\underline{S}$ и S трябва да бъде нула в първо приближение по η. Те могат да се различават във второ приближение, но в първо разликата е длъжна да бъде нула.

И това трябва да се спазва за всяко η. Впрочем не съвсем за всяко. Методът изисква да се вземат под внимание само онези пътища, които започват и завършват в една и съща двойка точки, т. е. всеки път трябва да започва в определена точка в момент t_1 и завършва в друга определена точка в момент t_2. Тези точки и моменти се фиксират. Така че нашата функция η (отклонението) трябва да бъде равна на нула на двата края: $\eta(t_1)=0$ и $\eta(t_2)=0$. При това условие нашата математична задача става напълно определена.

Ако не знаехте диференциално смятане, вие бихте могли да направите същото нещо за намиране минимума на обикновена функция $f(x)$. Вие бихте се замислили над това, какво ще стане, ако се вземе $f(x)$ и се прибави към x малка величина h и бихте доказвали, че поправката към $f(x)$ в първо приближение по h трябва в минимума да бъде равна на нула. Вие бихте поставили $x+h$ вместо x и бихте разложили $f(x+h)$ с точност до първата степен на h . . . , с една дума, бихте повторили всичко това, което ние се каним да направим с η.

И така, нашата идея се състои в това, че ние заместваме $x(t)=\underline{x}(t)+\eta(t)$ във формулата за действието

$$S=\int\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-V(x)\right]dt,$$

където с $V(x)$ е означена потенциалната енергия. Производната dx/dt е естествено производната от $\underline{x}(t)$ плюс производната от $\eta(t)$, така че за действието аз получавам такъв израз:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{d\underline{x}}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\right)^2-V(\underline{x}+\eta)\right]dt.$$

Сега това е необходимо да се развие по-детайлно. За квадратичното събираемо аз ще получа

$$\left(\frac{d\underline{x}}{dt}\right)^2+2\,\frac{d\underline{x}}{dt}\,\frac{d\eta}{dt}+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2.$$

Но почакайте! Ами че на мене не ми е необходимо да се грижа за членовете от порядък, по-висок от първия. Аз мога да махна всички събираеми, в които има η^2 и по-висши степени, и да ги насипя в кутия с надпис „членове от втори и по-висш порядък.“ От този израз там ще попадне само една втора степен, но от някой друг могат да влязат и по-висши. И така, частта, свързана с кинетичната енергия, е:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{d\underline{x}}{dt}\right)^2+m\,\frac{d\underline{x}}{dt}\,\frac{d\eta}{dt}+\text{(Членове от втори и по-висш порядък).}$$

Освен това нужен ни е потенциалът V в точките $\underline{x}+\eta$. Аз считам η малко и мога да разложа $V(x)$ в ред на Тейлор. Приближено това ще бъде $V(\underline{x})$; в следващото приближение (поради

това, че тук стоят обикновени производни) поправката е равна на η, умножена със скоростта на изменението на V по отношение на x и т. н.:

$$V(\underline{x}+\eta)=V(\underline{x})+\eta V'(\underline{x})+\frac{\eta^2}{2}V''(\underline{x})+\cdots$$

За икономия на място аз означих с V' производната на V по x.* Събираемото с η^2 и всички, които стоят след него, попадат в категорията „членове от втори и по-висш порядък“. И за тях повече няма какво да се безпокоим. Да обединим всичко, което остана

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{d\underline{x}}{dt}\right)^2-V(\underline{x})+m\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{d\eta}{dt}-\right.$$

$$\left.-\eta V'(\underline{x})+\ \text{(членове от втори и по-висш порядък)}\right]dt.$$

Ако сега разгледаме внимателно този израз, ще видим, че двата първи члена, написани тук, отговарят на онова действие S, което аз бих написал за търсения истински път x. Аз искам да съсредоточа вашето внимание върху изменението на S, т. е. върху разликата между S и онова S, което би се получило за истинския път. Тази разлика ще записваме като δS и ще я наречем вариация на S. Като отхвърлим „членовете от втори и по-висш порядък“, получаваме за δS

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left[m\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{d\eta}{dt}-\eta V'(\underline{x})\right]dt.$$

Сега задачата изглежда така. Ето пред мене е някакъв интеграл. Аз още не зная какво е това x, но аз сигурно зная, че, каквото и η да взема, този интеграл трябва да бъде равен на нула. „Е и какво, ще помислите вие, единствената възможност за това е множителят пред η да бъде равен на нула.“ Но какво ще стане с първото събираемо, където има $d\eta/dt$? Вие ще кажете: „Ако η се обръща в нищо, то и производната й е също такова нищо; значи коефициентът при $d\eta/dt$ също трябва да бъде нула.“ Да, но това не е съвсем вярно, защото между отклонението η и неговата производна има връзка; те не са напълно независими, защото $\eta(t)$ трябва да бъде нула и при t_1, и при t_2.

При решаването на всички задачи на вариационното смятане винаги се ползуват от един и същ общ принцип. Вие съвсем малко измествате това, което искате да варирате (също така, както направихме, като добавихме η), хвърляте поглед на членовете от първи порядък, *след това* подреждате всичко така, че да се получи интеграл в такъв вид: „изместването (η), умножено на това, което се получава“, но в него да няма никакви производни от η (никакви $d\eta/dt$). Непременно трябва да се преобразува всичко така, че да остане „нещо“, умножено по η. Сега вие ще разберете защо това е така важно. (Съществуват формули, които ще ви подскажат как в някои случаи това може да се направи без всякакви изчисления; но те не са така общи, че да си струва да ги заучаваме; най-добре е да се правят сметките така, както това правим ние.)

Как мога да преработя члена $d\eta/dt$, за да се появи в него η? Аз мога да постигна това, като интегрирам по части. Оказва се, че във вариационното смятане целият фокус се състои в това, да се напишат всички членове на вариацията на S и след това да се интегрира по части така, че да изчезнат производните от η. Във всички задачи, в които се появяват производни, се прави също такъв фокус.

Припомнете си общия принцип за интегриране по части. Ако

имате произволна функция f, умножена по $d\eta/dt$ и интегрирана по t, написвате производната от ηf така:

$$\frac{d}{dt}(\eta f)=\eta\frac{df}{dt}+f\frac{d\eta}{dt}.$$

В интересуващия ви интеграл стои тъкмо последното събираемо, така че

$$\int f\frac{d\eta}{dt}\,dt=\eta f-\int\eta\frac{df}{dt}\,dt.$$

В нашата формула за δS за функция f се приема произведението m по dx/dt; затова аз получавам за δS израза

$$\delta S=m\frac{dx}{dt}\eta(t)\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right)\eta(t)\,dt-\int_{t_1}^{t_2}V'(x)\eta(t)\,dt.$$

В първия член трябва да се поставят границите на интегрирането t_1 и t_2. Тогава аз ще получа под интеграла член от интегрирането по части и последния член, който остава неизменен при преобразуването.

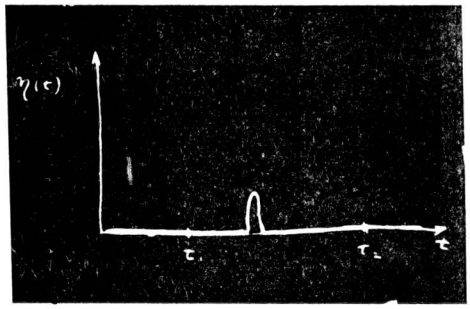
А сега става това, което става винаги — интегрираната част изчезва. (А ако не изчезва, трябва да се преформулира принципът, като се добави условие, което осигурява такова изчезване!) Ние вече говорихме, че η на краищата на пътя трябва да бъде равна на нула. Ами в какво се състои нашият принцип? В това, че действието е минимално при условие, че кривата, която променяме, започва и свършва в избрани точки. Това значи, че $\eta(t_1)=0$ и $\eta(t_2)=0$. Затова интегрираният член се получава равен на нула. Ние събираме заедно останалите членове и пишем

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left[-m\frac{d^2x}{dt^2}-V'(x)\right]\eta(t)\,dt.$$

Вариацията на S сега е придобила такъв вид, какъвто искахме да ѝ придадем: нещо стои в скобки (да го означим с F) и всичко това е умножено по $\eta(t)$ и се интегрира от t_1 до t_2.

Получихме, че интегралът от някакъв израз, умножен по $\eta(t)$ е винаги равен на нула:

$$\int F(t)\eta(t)\,dt=0.$$



Стои някаква функция от t; умножавам я по $\eta(t)$ и интегрирам от началото до края. И каквато и да е η, аз получавам нула. Това означава, че функцията $F(t)$ е равна на нула. Общо взето, това е очевидно, но за всеки случай аз ще ви покажа един от начините за доказателство.

Нека за $\eta(t)$ аз избера нещо, което е равно на нула навсякъде, при всички t с изключение на една предварително избрана стойност на t. То остава нула, докато аз не стигна до това t,



след това то подскача за миг и веднага отстъпва обратно. Ако вие изчислявате интеграл от това η, умножено по някаква функция F, единственото място, в което ще получите нещо отлично от нула, е там, където $\eta(t)$ е подскачало; и вие ще получите стойността на F в това място, умножена с интеграла по скока. Сам по себе си интегралът по скока не е равен на нула, но след умножението с F той трябва да даде нула. Следователно в това място, където е бил скокът, функцията трябва да е нула. Но нали би могло да се направи скок във всяко място; значи F трябва да бъде нула навсякъде.

Ние виждаме, че ако нашият интеграл е равен на нула при каквато и да е η, коефициентът пред η трябва да стане нула. Интегралът на действието достига минимум по този път, който

ще удовлетворява следното сложно диференциално уравнение:

$$\left[-m\frac{d^2x}{dt^2}-V'(x)\right]=0.$$

Всъщност то не е така сложно; вие вече сте го срещали преди. Това е просто $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$. Първият член е масата, умножена по ускорението; вторият е производната от потенциалната енергия, т. е. силата.

И така, показахме (най-малкото за консервативна система), че принципът на най-малкото действие довежда до правилен отговор; той твърди, че път, който има минимум действие, е път, който удовлетворява закона на Нютон.

Трябва да се направи още една забележка. Аз не доказах, че това е *минимум*. Може би това е максимум. Всъщност не е и задължително това да бъде минимум. Тук всичко е така, както в „принципа на най-краткото време", който ние обсъждахме, изучавайки оптиката. Там също отначало говорехме за „най-кратко" време. Обаче се изясни, че има положения, в които това време не е обезателно „най-краткото". Фундаменталният принцип се заключава в това, че за каквито и да е *отклонения от първи порядък* от оптичния път *измененията* във времето да бъдат равни на нула; тук е същата история. Под „минимум" ние в действителност подразбираме, че в приближение от първи порядък измененията на величината S при отклонения от пътя трябва да бъдат равни на нула. И това не е обезателно „минимум".

Сега аз искам да премина към някои обобщения. Преди всичко цялата тази история би могла да се направи и в три измерения. Вместо само x тогава бих имал x, y и z като функции на t и действието би изглеждало по-сложно. При тримерно движение вие трябва да използувате пълната кинетична енергия: $(m/2)$, умножена с квадрата на цялата скорост. Другояче казано,

$$\text{к. е.}=\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right].$$

Освен това потенциалната енергия сега е функция на x, y и z. А какво може да се каже за пътя? Пътят е някаква крива от общ вид в пространството; нея не е така лесно да начертаем, но идеята остава предишната. А как стои работата с η? Какво пък и η има три компоненти. Пътя можем да местим и по x, и по y, и по z или във всички три посоки едновременно. Така че η сега е вектор. От това големи усложнения не се получават. Тъй като на нула трябва да бъдат равни само вариациите от *първи порядък,* може да се извърши пресмятане последователно с трите отмествания. Отначало може да се отмести η само в посока x и да се каже, че коефициентът трябва да стане нула. Ще се получи едно уравнение. После ще отместим η в посока y и ще получим второ. След това ще отместим в посока z и ще получим трето. Ако искате, може всичко да направим в друг ред. Във всеки случай ще възникне тройка уравнения. Но нали законът на Нютон е също три уравнения в три измерения, по едно за всяка компонента. Предоставя ви се сами да се убедите, че всичко това действува и в три измерения (работа тук много няма). Между впрочем може да се вземе каквато и да е координатна система, полярна, всякаква и веднага ще се получат законите на Нютон спрямо тази система, като разглеждаме какво ще се получи, когато стане отместване на η по радиуса или по ъгъла и т. н.

Методът може да бъде обобщен и за произволен брой частички. Ако да речем, вие имате две частички и между тях действуват някакви сили и има взаимна потенциална енергия, вие просто събирате техните кинетични енергии и изваждате от сумата потенциалната енергия на взаимодействие. А какво варирате? Пътищата на *двете* частички. Тогава за две частички, които се движат в три измерения, възникват шест уравнения. Вие можете да варирате положението на частичка *1* в посока x, в посока y и в посока z и същото да направите с частичка *2*, така че още-

ствуват шест уравнения. Така и трябва да бъде. Три уравнения определят ускорението на частичка *1* чрез силата, която й действува, а трите други — ускорението на частичка *2* поради силата, която й действува. Следвайте винаги същите правила на играта и вие ще получите закона на Нютон за произволен брой частички.

Аз казах, че ние ще получим закона на Нютон. Това не е съвсем вярно, защото в закона на Нютон влизат и неконсервативни сили, например триене. Нютон твърдял, че $m\mathbf{a}$ е равно на всякаква сила. Принципът на най-малкото действие пък е в сила само за *консервативни* системи, такива, където всички сили могат да бъдат получени от потенциалната функция. Но нали знаете, че на микроскопично ниво, т. е. на най-дълбокото физично ниво, неконсервативни сили не съществуват. Неконсервативните сили (такива като триене) се появяват само от това, че пренебрегваме микроскопично сложните ефекти: просто твърде много частици се налага да анализираме. Но *фундаменталните* закони *могат* да бъдат изразени във вида на принципа на най-малкото действие.

Позволете да преминем към по-нататъшни обобщения. Да предположим, че ни интересува какво ще стане, когато частичката се движи релативистко. Досега не сме получили правилно релативистко уравнение на движение; $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ е вярно само в нерелативистките движения. Възниква въпросът: съществува ли в релативисткия случай съответстващ принцип на най-малкото действие? Да, съществува. Формулата в релативисткия случай е такава:

$$S=-m_0c^2\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt-q\int_{t_1}^{t_2}[\varphi(x,y,z,t)-\mathbf{v}\,.\,\mathbf{A}(x,y,z,t)]\,dt.$$

Първата част на интеграла на действието е произведението на масата в покой m_0 с c^2 и с интеграла от функцията на скоростта $\sqrt{1-v^2/c^2}$. После вместо да изваждаме потенциалната енергия, имаме интеграли от скаларния потенциал φ и от векторния потенциал $\mathbf{A}$, умножен по $\mathbf{v}$. Разбира се, тук са взети под внимание само електромагнитните сили. Всички електрични и магнитни полета са изразени чрез термините φ и $\mathbf{A}$. Такава функция на действието дава пълната теория на релативисткото движение на отделна частица в електромагнитно поле.

Естествено вие трябва да разбирате, че навсякъде, където аз съм написал $\mathbf{v}$, преди да се правят изчисления, следва да се постави dx/dt вместо v_x и т. н. Освен това там, където аз писах просто x, y, z, вие трябва да си представите точки в момент t: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Собствено само след такива замествания и сменянето на $\mathbf{v}$ ще получите формулата за действието на релативистката частица. Нека най-умелите от вас се опитат да докажат, че тази формула за действието действително дава правилните уравнения на движението на теорията на относителността. Позволете само да посъветвам отначало да изхвърлите $\mathbf{A}$, т. е. да минете засега без магнитни полета. Тогава трябва да получите компонентите на уравнението на движение $d\mathbf{p}/dt=-q\nabla\varphi$, където, както вероятно помните, $\mathbf{p}=m\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

Да се включи в разглеждането векторният потенциал $\mathbf{A}$ е много по-трудно. Вариациите тогава стават несравнено по-сложни. Но на края силата става равна на това, на което трябва: $q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$. Но позабавлявайте се с това сами.

Бих искал да подчертая, че в общия случай (например в релативистката формула) под интеграла в действието вече не стои разликата на кинетичната и потенциалната енергия. Това беше в сила само за нерелативистко приближение. Например членът $m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}$ не е това, което наричат кинетична енергия. Въпросът за това, какво трябва да бъде действието за произволен частен случай, може да бъде решен след известен брой проби и грешки. Вие просто трябва да си поиграете с известните ви уравнения и да погледнете може ли да ги напишете във вида на принципа на най-малкото действие.

Още една забележка по повод на терминологията. Тази функция, която интегрират по времето, за да се получи действието S, наричат *лагранжиан* $\mathcal{L}$. Това е функция, която зависи само от скоростите и положенията на частичките. Така че принципът на най-малкото действие се записва също във вида

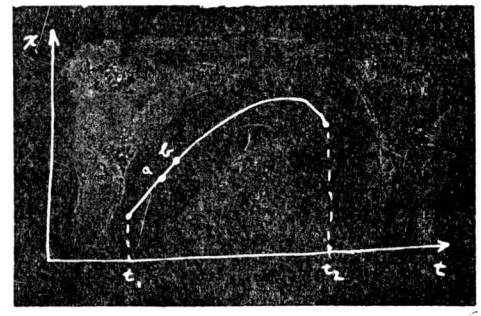
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x_i, v_i)\, dt,$$

където под x_i и v_i се подразбират всички компоненти на координатите и скоростите. Ако някога чуете, че някой говори за „лагранжиан", знайте, че става дума за функцията, която се използува за получаване на S. За релативисткото движение в електромагнитно поле

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q(\varphi + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}).$$

Освен това трябва да отбележа, че най-придирчивите и педантични хора не наричат S действие. Именуват го „първа главна функция на Хамилтон". Но да чета лекция за „принципа на най-малката първа главна функция на Хамилтон" беше свръх силите ми. Аз нарекох това „действие". При това все повече и повече хора наричат това „действие". Виждате ли, исторически действие било наречено нещо друго, не така полезно за науката, но аз мисля, че по-разумно е да се измени определението. Сега и вие ще започнете да наричате новата функция действие, а скоро въобще всички ще започнат да я наричат с това просто име.

Сега аз искам да ви съобщя по повод на нашата тема някои неща, прилични на тези разсъждения, които правих по повод принципа на най-краткото време. Съществува разлика в самото същество на закона, който твърди, че някакъв интеграл, изчислен от една точка до друга, има минимум — законът, който ни съобщава нещо за целия път изведнъж, и законът, който казва, че когато се движите, има сила, която води до ускорение. Вторият подход ви докладва за всяка ваша крачка, той проследява вашия път педя след педя, а първият дава веднага някакво общо твърдение за целия изминат път. Беседвайки за светлината, ние говорихме за връзката на тези два подхода. Сега аз искам да ви обясня защо трябва да съществуват диференциални закони, ако има такъв принцип — принципът на най-малкото действие. Причината е ето в какво: да разгледаме действително изминат в пространството и времето път. Както и по-рано, ще се задоволим с едно измерение, така че може да се начертае графиката на зависимостта на x от t. По истинския път S достига минимум. Да предположим, че имаме този път и че той минава през някаква точка a на пространството и времето и през друга съседна точка b.



Сега, ако целият интеграл от t_1 до t_2 е достигнал минимум, трябва интегралът по малкия участък от a до b също да бъде минимален. Не е възможно частта от a до b, макар и малко, да надвишава минимума. Иначе бихте могли да преместите насамнатам кривата в този малък участък и да намалите малко стойността на целия интеграл.

Значи всяка част от пътя също трябва да дава минимум. И това е вярно за каквито и да е малки отрязъци от пътя. Затова този принцип, че целият път трябва да дава минимум, може да се формулира, като се каже, че безкрайно малко късче от пътя е също такава крива, по която действието е минимално. И ако вземем достатъчно къс отрязък от пътя—между много близки една към друга точки a и b, вече не е важно как се изменя потенциалът от точка към точка далеч от това място, защото, минавайки целия ваш къс отрязък, вие почти не се мърдате. Единственото, което ви е необходимо да вземате пред вид, е малкото изменение от първи порядък в потенциала. Отговорът може да зависи само от производната на потенциала, а не от потенциала в дру-

гите места. Така твърдението за свойството на целия път като цяло става твърдение за това, какво става на малък участък от пътя, т. е. диференциално твърдение. И тази диференциална формулировка включва производните от потенциала, т. е. силата в дадена точка. Такова е качественото обяснение на връзката между закона като цяло и диференциалния закон.

Когато говорихме за светлината, обсъждахме също така въпроса: как все пак частицата намира правилния път? От диференциална гледна точка това е лесно да се разбере. Във всеки момент частицата изпитва ускорение и знае само това, което трябва да прави в този миг. Но всички ваши инстинкти за причините и следствията настръхват, когато вие чувате, че частицата „решава" какъв път да избере, стремейки се към минимум действие. Да не би да „души" съседните пътища, пресмятайки към какво ще доведат — към по-голямо или към по-малко действие? Когато на пътя на светлината поставяхме екран, така че фотоните да не могат да изпробват всички пътища, изяснихме, че те не могат да решат по какъв път да вървят и получихме явлението дифракция.

Но вярно ли е това и за механиката? Истина ли е, че частицата не просто „върви по верен път", а преразглежда всички други мислими траектории? И какво ще стане, ако поставяйки прегради на пътя ѝ, не ѝ дадем да поглежда напред, ще получим ли някой аналог на явлението дифракция? Най-чудесното във всичко това е, че всичко действително е така. Именно това твърдят законите на квантовата механика. Така че нашият принцип на най-малкото действие не е формулиран докрай. Той се състои не в това, че частицата избира пътя на най-малкото действие, а в това, че тя „долавя" всички съседни пътища и избира този, по който действието е минимално и начинът на този избор прилича на онзи, по който светлината избира най-краткото време. Вие помните, че начинът, по който светлината избира най-краткото време, е такъв: ако светлината тръгне по път, който изисква друго време, тя ще пристигне с друга фаза. А пълната амплитуда в някоя точка е сума от приносите на амплитудите за всички пътища, по които светлината може да я достигне. Всички тези пътища, на които фазите рязко се различават, не дават нищо след събирането. Но ако успеете да намерите цялата последователност на пътищата, чиито фази са почти еднакви, дребните приноси ще се съберат и в точката на пристигането пълната амплитуда ще получи забележима стойност. Най-важен път става този, около който има множество близки пътища, които дават същата фаза.

Точно това става и в квантовата механика. Завършената квантова механика (нерелативистка и пренебрегваща спина на електрона) работи така: вероятността за това, че частицата, като излезе от точка *1* в момент t_1, ще достигне точка *2* в момент t_2, е равна на квадрата на амплитудата на вероятността. Пълната амплитуда може да бъде записана във вид на сума от амплитудите на всички възможни пътища — за който и да е път на пристигане. За всяко $x(t)$, което би могло да възникне за всяка въображаема траектория е нужно да се пресметне амплитудата. След това е нужно всички те да се съберат. Какво ще приемем за амплитуда на вероятността за някакъв път? Нашият интеграл на действието ни показва каква трябва да бъде амплитудата на отделния път. Амплитудата е пропорционална на $e^{iS/\hbar}$, където S е действието по този път. Това означава, че ако ние представим фазата на амплитудата като комплексно число, фазовият ъгъл ще бъде равен на $S/\hbar$. Действието S има размерност енергия върху време и в константата на Планк размерността е също такава. Това е константа, която определя кога е необходима квантовата механика.

И ето как всичко това започва да действува. Нека за всички пътища действието S да бъде твърде голямо в сравнение с числото $\hbar$. Нека някакъв път да е довел към някаква стойност на амплитудата. Фазата на пътя, прокаран близко до разглеждания, ще се окаже съвършено друга, защото при огромно S даже незначителни изменения на S рязко изменят фазата (нали $\hbar$ е извън-

редно малко). Значи пътищата, които лежат близко един до друг, при събиране обикновено унищожават своите приноси. Само в една област това не е така — в тази, където и пътят, и неговият съсед — и двата в първо приближение имат една и съща фаза (или по-точно почти едно и също действие, изменящо се в пределите на $\hbar$). Само такива пътища се вземат пред вид. А в граничния случай, когато константата на Планк се стреми към нула, може да се сумират правилните квантовомеханични закони, като се каже: „Забравете за всички тези амплитуди на вероятностите. Частицата действително се движи по особен път — именно по този, по който S в първо приближение не се изменя.“ Такава е връзката между принципа на най-малкото действие и квантовата механика. Обстоятелството, че по такъв начин може да се формулира квантовата механика, било открито през 1942 г. от ученика на същия този учител, мистер Бадер, за който аз ви разказвах. [Първоначално квантовата механика била формулирана с помощта на диференциалното уравнение за амплитудите (Шрьодингер), а също така с помощта на известна матрична математика (Хайзенберг).]

Сега аз искам да поговоря за другите принципи на минимума във физиката. Има твърде много интересни принципи от такъв род. Аз няма да ги изброявам всичките, а ще посоча само още един. По-късно, когато стигнем до едно физическо явление, за което съществува превъзходен принцип на минимум, аз ще ви разкажа за него. А сега искам да покажа, че не е необходимо да се описва електростатиката с помощта на диференциалното уравнение за полето; може вместо това да се поиска някой интеграл да притежава максимум или минимум. Като начало ще вземем случай, когато плътността на зарядите е известна навсякъде, а трябва да се намери потенциалът φ във всяка точка на пространството. Вие вече знаете, че отговорът трябва да бъде такъв:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Друг начин да се твърди същото се заключава в следното: трябва да се изчисли интегралът U^*

$$U^* = \frac{\varepsilon_0}{2}\int(\nabla\varphi)^2\,dV - \int\rho\varphi\,dV;$$

това е обемен интеграл. Той се изчислява по цялото пространство. При правилно разпределение на потенциала $\varphi(x, y, z)$ този израз достига минимум.

Ние можем да покажем, че и двете твърдения са еквивалентни за електростатиката. Да предположим, че сме избрали произволна функция φ. Искаме да покажем, че когато в качеството на φ вземем правилната стойност на потенциала $\underline{\varphi}$ плюс малко отклонение f, в първо приближение изменението ще бъде равно на нула. Така че ние пишем

$$\varphi = \underline{\varphi} + f;$$

тук $\underline{\varphi}$ е това, което търсим; но ние ще варираме φ, за да видим какъв трябва да бъде той, че вариацията на U^* да се окаже малка от първи порядък. В първия член на U^* ни е необходимо да напишем

$$(\nabla\varphi)^2 = (\nabla\underline{\varphi})^2 + 2\nabla\underline{\varphi}\cdot\nabla f + (\nabla f)^2.$$

Единственият член от първи порядък, който ще се изменя, е такъв:

$$2\nabla\underline{\varphi}\cdot\nabla f.$$

Във втория член на U^* подинтегралният израз ще приеме вида

$$\rho\varphi = \rho\underline{\varphi} + \rho f;$$

изменящата се част тук е равна на ρf. Като оставим само членовете, които се изменят, ще получим интеграла

$$\Delta U^* = \int (\varepsilon_0 \nabla \varphi \cdot \nabla f - \rho f)\, dV.$$

По-нататък, като се ръководим от нашето старо общо правило трябва да очистим интеграла от всички производни на f. Да видим що за производни са това. Скаларното произведение е равно на

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Този израз трябва да се интегрира по x, y и по z. И тук се натрапва същият фокус: за да се избавим от $\partial f/\partial x$, ние ще интегрираме по x на части. Това ще доведе до добавъчно диференциране на φ по x. Тъй е същата основна идея, с помощта на която се избавихме от производните по t. Ние се ползуваме от равенството

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\, dx = f\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \int f\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\, dx.$$

Интегрираният член е равен на нула, тъй като считаме f равно на нула в безкрайността. (Това отговаря на обръщането на η в нула при t_1 и t_2. Така че нашият принцип се формулира по-точно по следния начин: U^* за правилния φ е по-малко, отколкото за всеки друг $\varphi(x, y, z)$, който притежава същите стойности в безкрайността.) След това ще направим същото с y и със z. Нашият интеграл ΔU^* ще се превърне в

$$\Delta U^* = \int (-\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi - \rho) f dV.$$

За да бъде тази вариация равна на нула при всяко произволно f, коефициентът пред f трябва да бъде равен на нула. Значи

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Върнахме се към нашето старо уравнение. Значи нашето „минимално" предположение е вярно. То може да се обобщи, ако леко изменим изчисленията. Да се върнем назад и интегрираме по части, без да развиваме всичко по компоненти. Да започнем с написването на следното равенство:

$$\nabla \cdot (f \nabla \varphi) = \nabla f \nabla \varphi + f \nabla^2 \varphi.$$

Като диференцирам лявата част, аз мога да покажа, че тя е точно равна на дясната. Това уравнение подхожда, за да се извърши интегрирането по части. В нашия интеграл ΔU^* заменяме $\nabla \varphi . \nabla f$ с $-f \nabla^2 \varphi + \nabla \cdot (f \nabla \varphi)$ и след това интегрираме по обема. Членът с дивергенцията след интегрирането по обема се заменя с интеграл по повърхност

$$\int \nabla \cdot (f \nabla \varphi)\, dV = \int f \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}\, da.$$

Тъй като ние интегрираме по цялото пространство, повърхността в този интеграл лежи в безкрайността. Значи $f = 0$ и получаваме предишния резултат.

Едва сега започваме да разбираме как да решаваме задачи, в които *не знаем* къде са разположени всички заряди. Нека имаме проводници, по които са разпределени някак заряди. Ако потенциалите на всички проводници са фиксирани, все още се разрешава да се използува нашият принцип за минимума. Интегрирането в U^* ще извършим само по областта, лежаща извън всички проводници. Но тъй като не можем да меним φ по проводниците, на тяхната повърхност $f = 0$ и повърхностният интеграл

$$\int f \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} da$$

също е равен на нула. Обемното интегриране

$$\Delta U^* = \int (-\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi - \rho) f dV$$

трябва да се прави само в междините между проводниците. И ние, разбира се, отново получаваме уравнението на Пуасон

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

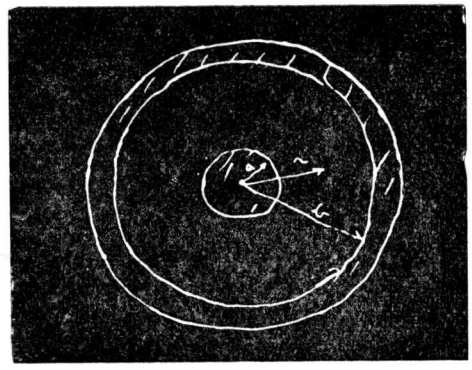
Излиза, както показахме, че нашият първоначален интеграл U^* достига минимум и тогава, когато се изчислява в пространството между проводници, всеки от които се намира при фиксиран потенциал [това означава, че всяка пробна функция $\varphi(x, y, z)$ трябва да се равнява на зададения потенциал на проводника, когато (x, y, z) са точки от повърхността на проводника].

Съществува интересен частен случай, когато зарядите са разположени само върху проводниците. Тогава

$$U^* = \frac{\varepsilon_0}{2}\int(\nabla\varphi)^2 dV$$

и нашият принцип на минимума ни казва, че в случая, когато всеки проводник има свой предварително зададен потенциал, потенциалите в междините между тях ще се нагодят така, че интегралът U^* се оказва колкото може по-малък. А що за интеграл е това? Членът $\nabla\varphi$ е електричното поле. Значи интегралът е електростатичната енергия. Истинско е това единствено поле, което от всички полета, получавани като градиент на потенциала, се отличава с най-малка пълна енергия.

Аз бих искал да се възползувам от този резултат, за да реша някоя частна задача и да ви покажа, че всички тези неща имат реално практическо значение. Да предположим, че съм взел два проводника във формата на цилиндричен кондензатор.



На вътрешния проводник потенциалът е равен, да речем, на V, а на външния — на нула. Нека радиусът на вътрешния проводник да бъде равен на a, а на външния — на b. Сега ние можем да предположим, че разпределението на потенциалите между тях е *каквото и да е*. Ако ние вземем *правилната* стойност φ и изчислим $(\varepsilon_0/2)\int(\nabla\varphi)^2\,dV$, трябва да се получи енергията на системата $^1/_2\,CV^2$. Така че с помощта на нашия принцип може да се пресметне и капацитетът C. Ако пък вземем неправилно разпределение на потенциала и се опитаме чрез този метод да сметнем капацитета на кондензатора, ще дойдем до прекалено голяма стойност на капацитета при фиксирано V. Всеки предполагаем потенциал φ, който не съвпада точно с истинския, ще доведе до невярна стойност на C, по-голяма, отколкото трябва. Но дори невярно избраният потенциал φ да е грубо приближение, капацитетът C ще се получи с добра точност, защото грешката в C е величина от втори порядък в сравнение с грешката във φ.

Да предположим, че не ми е известен капацитетът на цилиндричния кондензатор. Тогава, за да го узная, аз мога да се възползувам от този принцип. Аз просто ще опитвам в качеството на потенциал разни функции φ дотогава, докато не достигна най-ниската стойност на C. Да допуснем например, че аз съм избрал потенциал, който отговаря на постоянно поле. (Вие, разбира се, знаете, че в действителност полето тук не е постоянно; то се мени като $1/r$.) Ако полето е постоянно, това означава, че потенциалът зависи линейно от разстоянието. За да бъде напрежението на проводниците каквото е нужно, функцията φ трябва да има вида

$$\varphi = V\left(1 - \frac{r-a}{b-a}\right).$$

Тази функция е равна на V при $r=a$, на нула при $r=b$, а между тях има постоянен наклон, равен на $-V/(b-a)$. Значи, за да определим интеграла U^*, трябва само да умножим квадрата на този градиент по $\varepsilon_0/2$ и да интегрираме по целия обем. Да направим това пресмятане за цилиндър с единична дължина. Обемният еле-

мент при радиус r е равен на $2\pi r dr$. Като извърша интегрирането аз намирам, че моята първа проба дава такъв капацитет:

$$\frac{1}{2}CV^2 \quad (\text{първа проба}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^b \frac{V^2}{(b-a)^2}\,2\pi\, r dr.$$

Интегралът тук е равен просто на

$$\pi V^2\left(\frac{b+a}{b-a}\right).$$

Така аз получавам формула за капацитета, която, макар и неправилна, е някакво приближение:

$$\frac{C}{2\pi\varepsilon_0} = \frac{b+a}{2(b-a)}.$$

Разбира се, тя се отличава от правилния отговор $C=2\pi\varepsilon_0/\ln(b/a)$, но, общо взето, тя не е така лоша. Нека се опитаме да я сравним с правилния отговор за няколко стойности на b/a. Изчислените от мене числа са приведени в следната таблица.

$\frac{b}{a}$	$\frac{C_{\text{истинско}}}{2\pi\varepsilon_0}$	$\frac{C_{\text{първо прибл.}}}{2\pi\varepsilon_0}$
2	1,4423	1,500
4	0,721	0,833
10	0,434	0,612
100	0,267	0,51
1,5	2,4662	2,50
1,1	10,492070	10,500000

Даже когато $b/a=2$ (а това вече довежда до доста големи различия между постоянното и линейното поле), аз все още получавам достатъчно сносно приближение. Отговорът, разбира се, както се и очакваше, е малко завишен. Но ако тънка жичка поставим вътре в голям цилиндър, всичко изглежда вече много полошо. Тогава полето се изменя много силно и неговата замяна с постоянно поле не води към нищо хубаво. При $b/a=100$ завишаваме отговора почти двойно. За малки b/a положението изглежда много по-добре. В противоположния граничен случай, когато междината между проводниците не е много широка (да речем при $b/a=1{,}1$), постоянното поле се оказва доста добро приближение, дава стойността на C с точност до десети от процента.

А сега аз ще ви разкажа как да се усъвършенствува това пресмятане. (Отговорът за цилиндъра, разбира се, *е известен*, но същият начин е приложим и за някои други кондензатори с необикновени форми, за които правилният отговор може и да не ви е известен.) Следваща крачка ще бъде да намерим по-добро приближение за неизвестния ни действителен потенциал φ. Например може да се изпробва константа плюс e^{φ} и т. н. Но как ще узнаете, че у вас се е получило по-добро приближение, ако не знаете действителния φ? *Отговор:* Пресметнете C; колкото той е по-нисък, толкова е по-близко до истината. Нека да проверим тази идея. Нека потенциалът да не бъде линеен, а да речем квадратичен по r, а електричното поле не постоянно, а линейно. Най-*общата* квадратична форма, която се обръща във $\varphi=0$ при $r=b$ и във $\varphi=V$ при $r=a$, е такава

$$\varphi = V\left[1+\alpha\left(\frac{r-a}{b-a}\right)-(1+\alpha)\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^2\right],$$

където α е постоянно число. Тази формула е малко по-сложна от предишната. В нея влиза и квадратичен член, и линеен. От нея е много лесно да се получи полето. То е просто

$$E=-\frac{d\varphi}{dr}=-\frac{\alpha V}{b-a}+2(1+\alpha)\frac{(r-a)V}{(b-a)^2}.$$

Сега това трябва да се повдигне в квадрат и да се интегрира по обема. Но почакайте за минутка. Какво да приема за α? За φ аз мога да приема парабола, но каква? Ето какво ще направя: ще пресметна капацитета при *произволно* α. Ще получа

$$\frac{C}{2\pi\varepsilon_0} = \frac{a}{b-a}\left[\frac{b}{a}\left(\frac{\alpha^2}{6}+\frac{2\alpha}{3}+1\right)+\frac{1}{6}\alpha^2+\frac{1}{3}\right].$$

Това изглежда малко забъркано, но така се получава след интегриране квадрата на полето. Сега аз мога да си избера α. Аз зная, че истината лежи по-ниско, отколкото всичко, което смятам да изчисля. Каквото и да поставя вместо α, отговорът все едно ще се получи прекалено голям. Но ако аз продължа своята игра с α и се постарая да достигна до най-ниската възможна стойност на C, тази най-ниска стойност ще бъде по-близко до истината, отколкото всяка друга стойност. Следователно сега ми е необходимо да подбера α така, че стойността на C да достигне своя минимум. Като се обърна към обикновеното диференциално смятане, аз се убеждавам, че минимумът на C ще се получи тогава, когато $\alpha=-2b/(b+a)$. Като заместя тази стойност във формулата, аз получавам за най-малкия капацитет

$$\frac{C}{2\pi\varepsilon_0}=\frac{b^2+4ab+a^2}{3\,(b^2-a^2)}.$$

Аз пресметнах какво дава тази формула за C при различни стойности на b/a. Тези числа нарекох C (квадратични). Привеждам таблица, в която се сравняват C (квадратични) с C (действителни).

$\frac{b}{a}$	$\frac{C_{\text{действително}}}{2\pi\varepsilon_0}$	$\frac{C_{\text{квадратично}}}{2\pi\varepsilon_0}$
2	1,4423	1,444
4	0,721	0,733
10	0,434	0,475
100	0,267	0,346
1,5	2,4662	2,4667
1,1	10,492070	10,492065

Например когато отношението на радиусите е равно на 2:1, аз получавам 1,444. Това е много добро приближение до правилния отговор 1,4423. Даже при големи b/a приближението остава достатъчно добро — то е много по-добро от първото приближение. То остава сносно (завишение само с 10%) даже при $b/a=10:1$. Голямо различие настъпва само при отношение 100:1. Аз получавам C, равно на 0,346 вместо 0,267. От друга страна, при отношение на радиусите 1,5 съвпадението е превъзходно, а при $b/a=1{,}1$ отговорът се получава 10,492065 вместо полагащото се 10,492070. Там където следва да се очаква добър отговор, той се оказва много, много добър.

Аз приведох всички тези примери, първо, за да демонстрирам теоретичната ценност на принципа на минималното действие и въобще на всякакви принципи на минимума и, второ, за да ви покажа тяхната практическа полезност, а съвсем не затова, за да пресметна капацитета, който ние и без това прекрасно знаем. За всяка друга форма можете да изпробвате приближено поле с няколко неизвестни параметри (подобно на α) и да ги натъкмите към минимума. Вие ще получите превъзходни числени резултати в задачи, които по друг начин не се решават.

Добавка, направена след лекцията

На лекцията не ми стигна времето, за да кажа за още едно нещо (нали винаги се готвиш да разкажеш повече, отколкото успяваш). И аз искам да направя това сега. Аз вече споменах, че, като се готвех за тази лекция, се заинтересувах от една задача.

Иска ми се да ви разкажа каква беше задачата. Аз забелязах, че голяма част от принципите на минимум, за които ставаше дума, в една или друга форма произтича от принципа за най-малкото действие в механиката и електродинамиката. Но съществува още и клас принципи, които не произтичат оттам. Ето пример. Ако се направи така, че токовете да протичат през масата на вещество, което удовлетворява закона на Ом, токовете ще се разпределят в тази маса така, че скоростта, с която се генерира в нея топлина, да бъде най-малка. Може също да се каже иначе (ако температурата се поддържа постоянна): че скоростта на отделянето на енергия е минимална. Този принцип съгласно с класическата теория се изпълнява даже в разпределението на скоростите на електроните вътре в метала, по който тече токът. Разпределението на скоростите не е съвсем равновесно [виж гл. 40 (т. I), уравнение (40.6)], защото те бавно дрейфуват встрани. Новото разпределение може да се намери от принципа: при даден ток то трябва да бъде такова, че ентропията, която се получава в една секунда за сметка на сблъскванията, да се намали дотолкова, доколкото това е възможно. Впрочем правилното описание на поведението на електроните трябва да бъде квантовомеханично. Така че ето в какво се състои въпросът: трябва ли същият този принцип на минимума на развиващата се ентропия да се съблюдава и тогава, когато положението на нещата се описва от квантовата механика? Засега това не ми се удаде да изясня.

Този въпрос е интересен, разбира се, и сам по себе си. Подобни принципи възбуждат въображението и винаги си струва да се опитаме да изясним доколко те са общи. Но на мене ми е *необходимо* да зная това и от по-практическа причина. Заедно с няколко колеги аз публикувах работа, в която с помощта на квантовата механика приблизително пресметнахме електричното съпротивление, изпитвано от електрона, когато той се промъква през йонен кристал, подобен на NaCl. [Статията върху това беше напечатана във Physical Review, 127, 1004 (1962) и се нарича „Подвижност на бавни електрони в полярни кристали“.] Но ако би съществувал принцип за минимум, ние бихме могли да се възползуваме от него, за да направим резултата много по-точен, аналогично на това както принципът за минимума на капацитета на кондензатора ни позволи да достигнем толкова висока точност за капацитета, въпреки че нашите сведения за електричното поле бяха твърде неточни.

20

Решения на уравненията на Максвел в празно пространство

20-1. Вълни в празното пространство; плоски вълни

В гл. 18 ние постигнахме това, че уравненията на Максвел се появиха в пълен вид. Всичко, което съществува в класическата теория на електричните и магнитните полета, произтича от четирите уравнения:

$$\text{I. } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \text{II. } \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\text{III. } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \text{IV. } c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (20.1)$$

Когато събрахме всички тези уравнения заедно, открихме ново знаменателно явление: полетата, създавани от движещи се заряди, могат да напуснат източника и да се отправят да пътешестват в пространството. Ние разгледахме частния случай, когато внезапно се включва цяла безкрайна равнина. След като в течение на време t е текъл ток, възникват еднородни електрични и магнитни полета, които се простират на разстояние ct от равнината. Да предположим, че по равнината yz тече ток в посока $+y$ с повърхностна плътност J. Електричното поле ще има само y-компонента, а магнитното—само z-компонента. Стойността на компонентите на полето ще бъде равна на

$$E_y = cB_z = -\frac{J}{2\varepsilon_0 c} \qquad (20.2)$$

за положителни x, по-малки от ct. За по-големи x полетата са равни на нула. Равни по стойност полета се простират на същото разстояние от равнината в посока на отрицателните y. На фиг. 20-1 е показана графично зависимостта на стойностите на полетата от x в момент t. С течение на времето „фронтът на вълната“ в ct се разпространява по x с постоянна скорост c.

Сега да си представим такава последователност от събития. За миг ние включваме ток със сила единица, а след това внезапно увеличаваме силата му тройно и го поддържаме на това ниво. Как ще изглеждат сега полетата? Това може да се узнае по такъв начин. Първо, трябва да си представим ток със сила единица, включен при $t=0$, който повече не се изменя. Тогава полетата при положителни x ще имат вида, показан на фиг. 20-2, *а*. След това трябва да си зададем въпроса, какво ще стане, ако в момент t_1 включим постоянен ток със сила две единици?

В този случай полетата ще станат двойно по-големи, отколкото преди, но ще се отместят по x само на разстояние $c(t-t_1)$ (фиг. 20-2, *б*). Като съберем тези две решения (по принципа на суперпозицията), получаваме, че сумата на източниците е ток със сила единица от момента нула до момента t_1 и ток три единици в по-късните моменти. В момента t полетата се изменят по x така, както е показано на фиг. 20-2, *в*.

Да вземем сега по-сложна задача. Да разгледаме ток, който има отначало сила единица, а след това достига сила три единици и се изключва. Какви ще бъдат полетата от такъв ток? Решението може да се получи точно така, както и по-рано, т. е. като съберем решенията на три различни задачи. Отначало ще намерим полетата на постоянен ток със сила единица (тази задача вече решавахме). После ще узнаем полетата от тока с двойна сила. И накрая ще вземем решението за полетата на токове

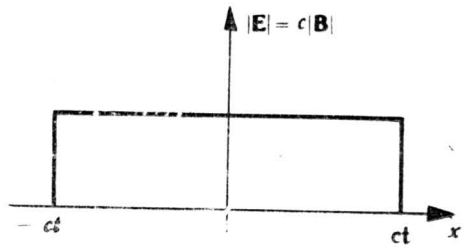
20-1. Вълни в празното пространство; плоски вълни

20-2. Тримерни вълни

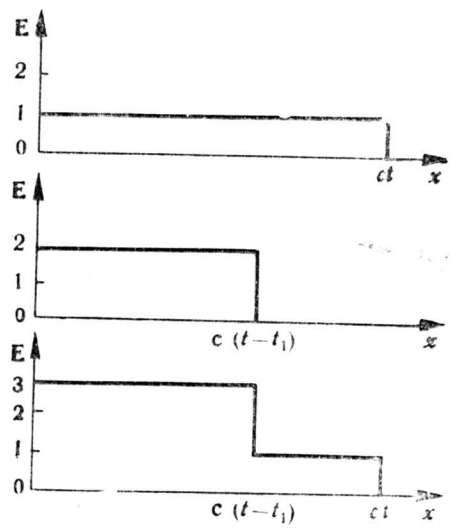
20-3. Научно въображение

20-4. Сферични вълни

Да се повтори: гл. 47 (т. I) „Звук. Вълново уравнение“; гл. 28 (т. I) „Електромагнитно излъчване“

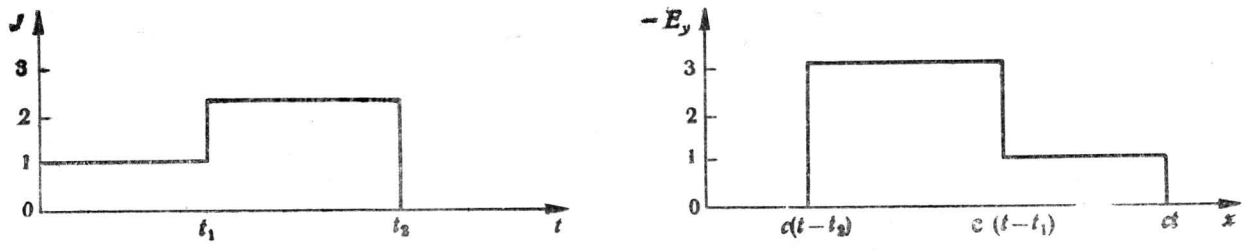


Фиг. 20-1. Зависимостта на електричното и магнитното поле от x след ts от момента, когато е била включена заредената равнина



Фиг. 20-2. Електричното поле на равнина с ток:

а — една единица ток е включена в момент $t=0$; *б* — две единици ток са включени в момент $t=t_1$; *в* = суперпозиция на *а* и *б*



Фиг. 20-3. Ако силата на източника на ток се изменя така както на рисунката *(а)*, в момент t електричното поле като функция от x придобива друг вид *(б)*

със сила *минус* три единици. Като съберем всичките три решения, ще получим ток със сила единица от $t=0$ до някакъв покъсен момент, да речем до t_1, след това ток със сила три единици до момент t_2, а после ток, равен на нула, т. е. изключен. Графиката на зависимостта на тока от времето е показана на фиг. 20-3, *а*. Като съберем трите решения за електричното поле, виждаме, че неговите изменения с разстоянието x в даден момент t са подобни на показаното на фиг. 20-3, *б*. Полето точно изобразява тока. Разпределението на полетата в пространството е точно отражение на измененията на тока с времето, само че нарисувано отзад напред. С течение на времето цялата картина се премества навън със скорост c, така че се получава резенче от полета, което се движи към положителните x и пази в себе си цялата история на промените на тока. Ако се намирахме някъде на разстояние много километри, ние бихме могли само по изменението на електричното или магнитното поле да разкажем без грешка как се е изменял токът в източника.

Забележете също така, че даже след като се е прекратила цялата дейност в източника и всички заряди са изчезнали, а токовете са станали нула, нашето резенче от полета продължава своето пътешествие през пространството. Получава се разпределение на електричните и магнитните полета, което съществува независимо от токовете и зарядите. Ето това е този нов ефект, който следва от пълната система на уравненията на Максвел. Ние можем, ако е необходимо, да представим току-що направения анализ в строго математична форма, като напишем, че електричното поле в дадено място е пропорционално на тока в източника, но не в *същото* време, а в *по-ранен* период $[t-(x/c)]$. Може да се напише

$$E_y(t)=-\frac{J(t-x/c)}{2\varepsilon_0 c}. \tag{20.3}$$

Вие ще се удивите, ако кажа, че вече извеждахме това уравнение по-рано (от друга гледна точка), когато говорехме за теорията на показателя на пречупване. Тогава ни беше необходимо да си представим какви полета ще създаде слой от трептещи диполи в тънък плосък диелектрик, ако диполите се привеждат в движение от електричното поле на падаща електромагнитна вълна. Нашата задача се състоеше в изчисляване на комбинираното поле на началната вълна и вълните, които се излъчват от трептящите диполи. Как можахме тогава да пресметнем полетата, създавани от движещите се заряди, без да знаем уравненията на Максвел? Тогава приехме като изходна (без извод) формулата за полетата на излъчване, създавани на големи разстояния от ускорявания точков заряд. Ако погледнете в гл. 31 (т. I), ще видите, че изразът (31.10) е точно нашия израз (20.3), който току-що написахме. Макар че предишният ни извод се отнасяше само за големи разстояния от източника, сега виждаме, че същият резултат е верен и близо до източника.

Сега искаме да разгледаме в общ вид поведението на електричните и магнитните полета в празното пространство далеч от източниците, т. е. от токовете и зарядите. Много близко до тях (така близко, че източниците не успяват силно да се изменят за

времето на закъсняване на предаването) полетата са твърде прилични на тези, които получихме в електростатиката или магнитостатиката. Но ако се премине към такива големи разстояния, че закъсняването да стане забележимо, природата на полетата може радикално да се отличава от тези решения, които намерихме. Когато полетата се отдалечат значително от всички източници, те започват в известен смисъл да придобиват свой собствен характер. Така че ние имаме право да пристъпим към обсъждане на поведението на полетата в област, където няма нито токове, нито заряди.

Да предположим, че ни интересува този род полета, които могат да съществуват в областите, където и ρ, и $\mathbf{j}$ са равни на нула. В гл. 18 ние видяхме, че физиката на уравненията на Максвел може също да се изрази на езика на диференциалните уравнения за скаларния и векторния потенциали:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{20.4}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2}. \tag{20.5}$$

Ако ρ и $\mathbf{j}$ са равни на нула, тези уравнения се опростяват

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \tag{20.6}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{20.7}$$

Излиза, че в празното пространство и скаларният потенциал φ, и всяка компонента на векторния потенциал $\mathbf{A}$ удовлетворяват едно и също математично уравнение. Нека с буквата ψ (пси) да сме означили която и да е от четирите величини φ, A_x, A_y, A_z; тогава трябва да изучим общите решения на уравнението

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \tag{20.8}$$

Наричат го тримерно вълново уравнение — тримерно затова защото функцията може в общия случай да зависи от x, y, z и трябва да се отчитат измененията по всяка от тези три координати. Това става ясно, ако ние напишем явно трите члена на оператора на Лаплас:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \tag{20.9}$$

В празното пространство електричните и магнитните полета $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ също удовлетворяват вълновото уравнение. Например тъй като $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$, диференциалното уравнение за $\mathbf{B}$ може да се получи, като се вземе ротация от уравнението (20.7). Понеже лапласианът е скаларен оператор, редът на операциите за пресмятане на лапласиана и ротацията може да се измени:

$$\nabla\times(\nabla^2\mathbf{A}) = \nabla^2(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla^2\mathbf{B}.$$

Също така може да се размени и изчисляването на rot и $\partial/\partial t$:

$$\nabla\times\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla\times\mathbf{A}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

От това получаваме следното диференциално уравнение за $\mathbf{B}$:

$$\nabla^2\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{20.10}$$

С това става ясно, че компонентата на магнитното поле $\mathbf{B}$ удовлетворява тримерното вълново уравнение. По подобен начин от факта, че $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - d\mathbf{A}/dt$, следва, че електричното поле $\mathbf{E}$ в празното пространство удовлетворява тримерното вълново уравнение

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{20.11}$$

Всички наши електромагнитни полета се подчиняват на едно и също уравнение (20.8). Може още да се попита какво е най-общото решение на това уравнение? Обаче преди да решаваме този труден въпрос, отначало да видим какво може да се каже в общия случай за тези решения, в които по y и по z нищо не се изменя. (Винаги отначало се заемайте с простите случаи, за да се види какво би трябвало да се очаква, а след това вече можете да преминете към по-сложни случаи.) Да предположим, че големината на полетата зависи само от x, така че по y и по z полетата *не се изменят*. Следователно пак разглеждаме плоски вълни и сме длъжни да очакваме същите резултати, както и в предишната глава. И ние действително ще получим точно същите тези отговори. Вие можете да попитате: „Но защо отново да правим същото?“ Това е важно, първо, защото не сме доказали, че намерените от нас вълни представляват най-общото решение за плоски вълни и, второ, защото нашите полета са произлезли от източник на ток от особен вид. Сега бихме искали да изясним такъв въпрос: какъв е най-общият вид на едномерна вълна в празното пространство? Ние няма да узнаем това, ако разглеждаме този или онзи източник от особен вид, необходима ни е по-голяма общност. Освен това този път ще работим не с интегралната форма на уравненията, а с диференциалната. Въпреки че резултатът е еднакъв, това е прекрасен случай да се поупражняваме в пресмятанията и да се убедим в това, че няма значение по кой път вървим. Вие трябва да умеете да действувате по всякакъв начин, защото, като се натъкнете на трудна задача, вие често откривате, че е приложим само един от многото начини на пресмятане.

Би могло направо да се разгледа решение на вълновото уравнение за някоя от електромагнитните величини. Вместо това ние ще започнем направо от началото, от уравненията на Максвел за празното пространство и вие ще се убедите в тяхната тясна връзка с електромагнитните вълни. Така че ние тръгваме от уравненията (20.1), като предполагаме, че в тях токовете и зарядите са равни на нула. Те се превръщат в

$$\begin{aligned} &\text{I.} && \nabla\cdot\mathbf{E}=0,\\ &\text{II.} && \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\\ &\text{III.} && \nabla\cdot\mathbf{B}=0,\\ &\text{IV.} && c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{20.12}$$

Да изпишем първото уравнение по компоненти:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\partial\mathbf{E}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{E}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathbf{E}_z}{\partial z}. \tag{20.13}$$

Ние предположихме, че по y и z полето не се изменя, така че двата последни члена са равни на нула. Тогава съгласно (20.13)

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0. \tag{20.14}$$

Неговото решение е постоянно в пространството E_x (компонентата на електричното поле в посока x). Като погледнете уравнение IV в (20.12) и предположите, че $\mathbf{B}$ също не се изменя по y и z, вие ще се убедите, че E_x е постоянно и във времето. Такова поле може да бъде постоянното поле от някакъв зареден кондензатор далеч от този кондензатор. Нас сега не ни интересуват такива неинтересни статични полета; ние се интересуваме само от динамично изменящи се полета. А за *динамичните* полета $E_x=0$.

И така, ние стигнахме до важния резултат, че при разпространение на плоските вълни в произволна посока *електричното поле трябва да се разполага напречно на направлението на*

своето разпространение. Разбира се, то има още възможността да се изменя по някакъв сложен начин по координатата x.

Напречното поле **E** може винаги да се разбие на две компоненти, да речем по y и z. Така че отначало да анализираме случая, когато електричното поле има само една напречна компонента. За начало да вземем електрично поле, насочено по y, т. е. с нулева z-компонента. Ясно е, че като решим тази задача, винаги можем да разгледаме и онзи случай, когато електричното поле навсякъде е насочено по z. Общото решение може винаги да се представи като суперпозиция на две такива полета.

Колко прости станаха сега нашите уравнения! Сега единствената ненулева компонента на електричното поле е E_y и всички производни (освен производните по x) са също равни на нула. Остатъците от уравненията на Максвел изглеждат извънредно просто.

Да разгледаме сега второто от уравненията на Максвел [т. е. II от (20. 12)]. Като изпишем компонентите на rot **E**, получаваме

$$\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)_x=\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=0,$$

$$\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)_y=\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial Ez}{\partial x}=0,$$

$$\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)_z=\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=\frac{\partial E_y}{\partial x};$$

тук x-компонентата на $\nabla\times\mathbf{E}$ е равна на нула, защото са равни на нула производните по y и z; y-компонентата също е равна на нула: първият член защото всички производни по z са равни на нула, а вторият — защото $E_z=0$. Единствената отлична от нула компонента на rot **E** е z-компонентата, тя е равна на $\partial E_y/\partial x$. Като положим трите компоненти на $\nabla\times\mathbf{E}$, равни на съответните компоненти на $-\partial\mathbf{B}/\partial t$, заключаваме, че

$$\frac{\partial B_x}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial B_y}{\partial t}=0, \tag{20.15}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t}=-\frac{\partial E_y}{\partial x}. \tag{20.16}$$

Тъй като производните по времето както на x-компонентата на магнитното поле, така и на y-компонентата на магнитното поле са равни на нула, тези две компоненти са просто постоянни полета и отговарят на намерените по-рано магнитостатични решения. Ами че някой би могъл да остави постоянен магнит около това място, където се разпространяват вълните, ние ще игнорираме тези постоянни полета и ще предположим, че B_x и B_y са равни на нула.

Между впрочем за това, че x-компонентата на полето **B** е равна на нула би трябвало да заключим и по друга причина. Тъй като дивергенцията на **B** е равна на нула (по третото уравнение на Максвел), като използуваме при разглеждането на електричното поле същите доводи, както и по-горе, би трябвало да стигнем до извода, че надлъжната компонента на магнитното поле не може да се изменя по дължината на x. Ако пренебрегваме такива еднородни полета в нашите вълнови решения, би следвало да предположим, че B_x е равно на нула. В плоските електромагнитни вълни полето **B**, както и полето **E**, трябва да бъде насочено напреко на направлението на разпространение на самите вълни.

Равенството (20.16) дава допълнително потвърждение за това, че ако електричното поле има само y-компонента, магнитното поле има само z-компонента. Значи **E** и **B** са *перпендикулярни* едно на друго. Именно това се наблюдаваше в тази вълна от особен тип, която вече разгледахме.

Сега сме готови да използуваме последното от уравненията на Максвел за празното пространство [т. е. IV от (20.12)]. Като разпишем по компоненти, имаме

$$c^2\Big(\nabla\times\mathbf{B}\Big)_x=c^2\frac{\partial B_z}{\partial y}-c^2\frac{\partial B_y}{\partial z}=\frac{\partial E_x}{\partial t},$$

$$c^2\Big(\nabla\times\mathbf{B}\Big)_y=c^2\frac{\partial B_x}{\partial z}-c^2\frac{\partial B_z}{\partial x}=\frac{\partial E_y}{\partial t}, \qquad (20.17)$$

$$c^2\Big(\nabla\times\mathbf{B}\Big)_z=c^2\frac{\partial B_y}{\partial x}-c^2\frac{\partial B_x}{\partial y}=\frac{\partial E_z}{\partial t}$$

От шестте производни на компонентите на **B** само $\partial B_z/\partial x$ не е равна на нула. Така че триге уравнения дават просто

$$-c^2\frac{\partial B_z}{\partial x}=\frac{\partial E_y}{\partial t}. \qquad (20.18)$$

Резултатът от цялата наша дейност се състои в това, че отлични от нула са само по една компонента на електричното и магнитното поле и тези компоненти трябва да удовлетворяват уравненията (20.16) и (20.18). Тези две уравнения могат да се обединят в едно, ако първото от тях диференцираме по x, а второто по t; тогава левите страни на уравненията ще съвпаднат (с точност до множителя c^2). И ние намираме, че E_y се подчинява на уравнението

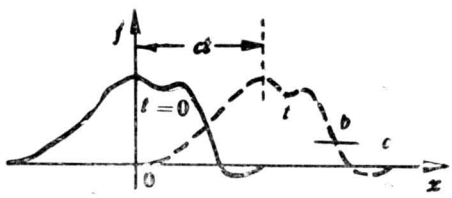
$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}=0. \qquad (20.19)$$

Ние вече срещахме това диференциално уравнение, когато изучавахме разпространението на звука. Това е вълново уравнение за едномерни вълни.

Забележете, че в процеса на извода ние получихме повече, отколкото се съдържа в (20.11). Уравненията на Максвел ни дадоха информация и за това, че електромагнитните вълни имат само компоненти на полето, разположени под прав ъгъл към направлението на разпространение на вълните.

Да си спомним всичко, което ни е известно за решенията на едномерното вълново уравнение. Ако някаква величина ψ удовлетворява едномерното вълново уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0, \qquad (20.20)$$



Фиг. 20-4. Функцията $f(x—ct)$ представлява неизменяем „контур", който се движи в посоката на нарастване на x със скорост c

едно от възможните решения е функцията $\psi(x, t)$, която има вида

$$\psi(x, t)=f(x-ct), \qquad (20.21)$$

т. е. функция на *една единствена* променлива $(x—ct)$. Функцията $f(x—ct)$ представлява „твърдо" образуване по оста x, което се движи по посока към положителните x със скорост c (фиг. 20-4). Така, ако максимумът на функцията f е при нулевата стойност на аргумента, то при $t=0$ максимумът на ψ е при $x=0$. В по-късен момент, да речем при $t=10$, максимумът на ψ ще е в точката $x=10c$. Когато времето се движи, максимумът също се движи в посока на нарастването на x със скорост c.

Понякога е по-удобно да се счита, че решението на едномерното вълново уравнение е функция от $(t—x/c)$. Обаче всъщност това е едно и също, защото всяка функция от $(t—x/c)$ е също така функция от $(x—ct)$

$$F\Big(t-\frac{x}{c}\Big)=F\Big(-\frac{x-ct}{c}\Big)=f\Big(x-ct\Big).$$

Ще покажем, че $f(x—ct)$ действително е решение на вълновото уравнение. Тъй като f зависи само от една променлива — променливата $(x—ct)$, ще означаваме с f' производната на f по тази променлива, а с f'' — втората производна. Като диференцираме (20.21) по x, ние получаваме

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=f'\Big(x-ct\Big),$$

защото производната от $(x—ct)$ по x е равна на единица. Втората производна от ψ по x е

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=f''\left(x-ct\right). \tag{20.22}$$

Производните на ψ по t дават

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=f'\left(x-ct\right)\left(-c\right),$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=+c^2f''\left(x-ct\right). \tag{20.23}$$

Ние се убеждаваме, че ψ действително удовлетворява едномерното вълново уравнение.

Вие недоумявате: „Откъде пък вие взехте, че решение на вълновото уравнение е $f(x-ct)$? На мене тази проверка със стара дата никак не ми се харесва. Няма ли *прав* път за намиране на решението?“ Добре, ето ви пряк път: да се знае решението. Може, разбира се, „да опечем“ съвсем научно преки математични аргументи, още повече че знаем какво трябва да бъде решението, но за такова просто уравнение като нашето не си струва труда. С течение на времето вие сами ще стигнете до това, че само като видите уравнение (20.20), веднага ще си представяте $f(x-ct)=\psi$ като решение. (Подобно на това, както сега при вида на интеграла от x^2dx у вас веднага изплува отговорът $x^3/3$.)

В действителност вие трябва да си представяте малко повече. Решение е не само всяка функция от $(x-ct)$, но и функция от $(x+ct)$. Поради това че във вълновото уравнение c се среща само във вида c^2, изменянето на знака на c нищо не променя. И действително най-общото решение на едномерното вълново уравнение е сумата от две произволни функции, едната от аргумента $(x-ct)$, а другата от $(x+ct)$:

$$\psi=f(x-ct)+g(x+ct). \tag{20.24}$$

Първото събираемо дава вълна, която се движи в посока на положителните x, а второто — произволна вълна, бягаща към отрицателните x. Общото решение се получава чрез наслагване на две такива вълни, които съществуват едновременно.

Следващия забавен въпрос решете сами. Да вземем функция ψ от вида

$$\psi=\cos kx\cos kct.$$

Тази функция няма вида $f(x-ct)$ или $g(x+ct)$. Но чрез пряко заместване в (20.20) е лесно да се убедим, че тя удовлетворява вълновото уравнение. Но как тогава смеем да говорим, че общото решение има вида (20.24)?

Като използуваме тези изводи за решението на вълновото уравнение за y-компонентата на електричното поле E_y, заключаваме, че E_y може да се изменя по x по произволен начин. Всяко поле може винаги да се разглежда като сума от две картини. Едната вълна плува през пространството в някаква посока със скорост c, при което свързаното с нея магнитно поле е перпендикулярно на на електричното; другата вълна бяга в противоположна посока със същата скорост. Такива вълни отговарят на добре известните ни електромагнитни вълни — на светлината, радиовълните, инфрачервеното излъчване, ултравиолета, рентгеновите лъчи и т. н. Ние вече изучавахме много подробно излъчването на светлината. Тъй като всичко, на което тогава се научихме, е приложимо към всякакви електромагнитни вълни, сега няма нужда да разглеждаме подробно поведението на тези вълни.

Може би си струва само да направим няколко забележки за поляризацията на електромагнитните вълни. По-рано решихме да

разгледаме частния случай на електрично поле само с y-компонента. Разбира се, има и друго решение за вълните, които бягат в посока $+x$ или $-x$, т. е. решение, при което електричното поле има само z-компонента. Тъй като уравненията на Максвел са линейни, общото решение за едномерни вълни, които се разпространяват в посока x, е сума от вълните E_y и вълните E_z. Общото решение се сумира от следните формули:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}=(0,\ E_y,\ E_z),\\
&E_y=f(x-ct)+g(x+ct),\\
&E_z=F(x-ct)+G(x+ct),\\
&\mathbf{B}=(0,\ B_y,\ B_z),\\
&cB_y=f(x-ct)-g(x+ct),\\
&cB_z=-F(x-ct)+G(x+ct).
\end{aligned} \tag{20.25}$$

В подобни електромагнитни вълни направлението на вектора $\mathbf{E}$ не е неизменно: то някак произволно се измества по спирала в равнината yz. Но във всяка точка магнитното поле е винаги перпендикулярно към електричното и към посоката на разпространение.

Ако присъствуват само вълни, които бягат в една посока (да речем, в положителната посока на x), има просто правило, което говори за относителната ориентация на електричното и магнитното полета. Правилото се състои в това, че векторното произведение $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ (което, както е известно, е вектор, перпендикулярен и на $\mathbf{E}$, и на $\mathbf{B}$) показва посоката, в която бяга вълната. (По-късно ще видим, че векторът $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ има особен физически смисъл: това е векторът, който описва течението на енергията в електромагнитното поле.

20-2. Тримерни вълни

А сега да се обърнем към тримерните вълни. Вече знаем, че векторът $\mathbf{E}$ удовлетворява вълновото уравнение. До същия извод е лесно да се стигне, като тръгнем направо от уравненията на Максвел. Да предположим, че ние изхождаме от уравнението

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

и взимаме ротация от двете части:

$$\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\mathbf{B}\right). \tag{20.26}$$

Вие помните, че ротация от ротацията на всеки вектор може да бъде записана във вида на сума от два члена, единият от които съдържа дивергенция, а другият — лапласиан:

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=\nabla(\nabla.\mathbf{E})-\nabla^2\mathbf{E}.$$

Но в празното пространство дивергенцията на $\mathbf{E}$ е равна на нула, така че остава само членът с лапласиана. По-нататък от четвъртото уравнение на Максвел в празното пространство [виж (20.12)] производната по времето от $c^2(\nabla\times\mathbf{B})$ е равна на втората производна на $\mathbf{E}$ по t:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)=\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Тогава (20.26) се превръща в

$$\nabla^2\mathbf{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Ето това е тримерното вълново уравнение. Изписано в цялото си великолепие, то изглежда така:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}=0. \qquad (20.27)$$

Как ли да намерим общото решение на това уравнение? Отговорът е такъв: всички решения на тримерното вълново уравнение могат да бъдат представени като суперпозиция на вече намерените от нас едномерни решения. Ние получихме уравнение за вълните, бягащи в посока x, като предположихме, че полето не зависи от y и z. Разбира се, има и други решения, в които полетата не зависят от x и z—това са вълни, бягащи в посока y. Освен това съществуват решения, които не зависят от x и y; те представляват вълни, които се движат в посока z. Или в общия случай, понеже ние записахме нашите уравнения във векторна форма, тримерното вълново уравнение може да има решения, които са плоски вълни, бягащи, общо казано, в каквото и да е направление. Освен това, тъй като уравненията са линейни, едновременно може да се разпространяват колкото искаме плоски вълни, бягащи в каквито искаме посоки. По такъв начин най-общото решение на тримерното вълново уравнение е суперпозицията на всички видове плоски вълни, бягащи във всички възможни посоки.

Опитайте се да си представите как изглеждат сега електричните и магнитните полета в нашата аудитория. Преди всичко тук има постоянно магнитно поле; то е възникнало от токовете вътре в нашата Земя, от постоянния земен магнетизъм. После тук има някакви неправилни, почти статични електрични полета. Те най-вероятно са създадени от електричните заряди, които се появяват поради това, че някой се върти на стола си или трие ръкавите си в масата (с една дума, в резултат на триене). Освен това тук има още и други магнитни полета, които са предизвикани от променливите токове в електричната мрежа — полета, които се изменят с честота 50 Hz в такт с работата на генератора в градската електростанция. Но по-голям интерес представляват електричните и магнитните полета, които се изменят с много по-голяма честота. Например там, където от прозореца пада светлина, осветявайки стените и пода, има малки промени на електричното и магнитното поле, преместващи се за секунда на 300 000 km. По стаята се разпространяват още инфрачервени вълни, които вървят от вашите горещи глави към студената дъска с формули. Да! Ние забравихме още за ултравиолетовата светлина, за рентгеновите лъчи и за радиовълните, които прелитат по стаята.

През стаята пълзят електромагнитни вълни, които носят в себе си джазова музика. Прелитат и вълни, модулирани от серия импулси, представляващи картини на събития, които стават сега в други места на света, или картини на въображаеми явления, ставащи при разтваряне на въображаеми аспирини във въображаеми стомаси. За да се убедим в реалността на тези вълни, достатъчно е просто да включим електронната апаратура, която превръща тези вълни в образи и звуци.

Ако ние се заемем с по-нататъшен анализ на още по-слабите трептения, ще забележим най-малките електромагнитни вълни, дошли в нашата стая от огромни разстояния. В нея съществуват най-малки трептения на електричното поле, гребените на които отстоят един от друг примерно на фут, а източникът им е отдалечен оттук на милиони мили. Тези вълни се предават на Земята от междупланетната станция Маринър II, която точно сега минава някъде покрай Венера. Нейните сигнали носят сведение за цялата информация, която й се е отдало да улови от планетата (информация, получена от електромагнитните вълни, дошли от Венера към станцията).

Тук има още едва забележими трептения на електричните и магнитните полета от вълни, възникнали на милиарди светлинни години оттук, в галактиките, намиращи се в най-отдалечените ъгълчета на Вселената. Че това е действително така, се убедили, „запълняйки стаята с жица“, т. е. като направили антени, големи колкото тази стая. Така били забелязани радиовълни, дошли до нас от места, които се намират извън границите на достижимост

на най-големите оптични телескопи. Между другото даже тези оптични телескопи са всичко на всичко прости събирачи на електромагнитни вълни. А това, което наричаме звезди, са само заключения — заключения, изведени от единствената физическа реалност, която досега получавахме от тях, от щателното изучаване на безкрайно сложните вълнови движения на електричните и магнитните полета, които достигат Земята.

В аудиторията има, разбира се, още и други различни полета — от мълнии, блясващи някъде далеч оттук, от заредените частици в космичните лъчи в този момент, когато те профучават през стаята, и още полета, и още . . . Представяте ли си какво сложно нещо са всички тези електрични полета в пространството около нас! И всички те се подчиняват на тримерното вълново уравнение.

20-3. Научно въображение

Аз ви молих да си представите електричните и магнитните полета. Какво направихте вие за това? Знаете ли как това трябва да се направи? И как аз сам си представям електричното и магнитното поле? Какво *на практика* виждам при това? Какво се иска от научното въображение? Отличава ли се то с нещо от опита да си представим стая, пълна с невидими ангели? Не, това не прилича на такъв опит.

За да се получи представа за електромагнитното поле, се иска по-висока степен на въображение. Защо? Защото, за да могат невидимите ангели да станат достъпни за разбиране, на мене ми е нужно само *едва-едва* да изменя техните свойства — аз ги правя съвсем леко видими и тогава вече мога да видя формата на крилете им и телата им, и ореолите им. Щом успях да си представя видим ангел, необходимата за по-нататък абстракция (която се състои в това, че почти невидимите ангели да си представим съвършено невидими) се оказва сравнително лесна работа.

Вие можете да кажете: „Професоре, дайте ми, моля, приблизително описание на електромагнитните вълни, нека бъде дори малко неточно, за да мога да ги видя така, както мога да видя почти невидимите ангели. И аз ще видоизменя тази картина до нужната абстракция."

Уви, аз не мога да направя за вас това. Просто не зная как. Аз нямам картина на електромагнитно поле, която да бъде макар в някаква степен точна. Аз узнах за електромагнитното поле много отдавна, преди 25 години, когато бях на вашето място и имам с 25 години повече опит на размишления за тези трептещи вълни. Когато аз започвам да описвам магнитното поле, което се движи през пространството, говоря за полета **E** и **B**, правя с ръце вълнисти движения и вие можете да си помислите, че съм способен да ги виждам. А в действителност какво виждам при това? Виждам някакви смътни, мъгливи, вълнисти линии, на тях тук и там е надписано **E** и **B**, а други линии имат сякаш някакви стрелки, ту тук, ту там на тях има стрелки, които изчезват, щом като се вгледаш в тях. Когато разказвам за полетата, които преминават през пространството, в главата ми катастрофално се объркват символите, необходими за описване на обектите и самите обекти. Аз не съм в състояние да дам картина, която, макар и приблизително, да прилича на истинските вълни. Така че, ако вие се сблъсквате със същите затруднения при опитите да си представите полето, не се терзайте, обикновена работа е.

Нашата наука предявява към въображението немислими изисквания. Степента на въображение, която сега се иска в науката, несравнимо превъзхожда това, което се е искало за някои предишни идеи. Много по-трудно е да си представим сегашните идеи. Наистина ние използуваме за това множество средства. Пускат се в ход математични уравнения и правила, рисуват се различни картинки. Ето сега аз ясно осъзнавам, че винаги, когато започвам разговор за електромагнитното поле в пространството,

пред погледа ми фактически застава своего рода суперпозиция на всички онези диаграми по тази тема, които аз някога съм виждал. Аз не си представям малки снопчета от линии на полето, които сноват насам-натам; те не ми харесват, защото ако аз бих се движил с друга скорост, те биха изчезнали. Аз не винаги виждам и електричните, и магнитните полета, защото от време на време ми се струва, че много по-правилна би била картина, която включва векторния и скаларния потенциал, тъй като последните може би имат по-голям физически смисъл, отколкото трептенията на полето.

Може би вие смятате, че единствената надежда е в математичната гледна точка. Но какво е това математична гледна точка? От математична гледна точка във всяко място на пространството съществува вектор на електричното поле и вектор на магнитното поле, т. е. с всяка точка са свързани шест числа. Способни ли сте да си представите шест числа, свързани с всяка точка на пространството? Това е твърде трудно. А можете ли да си представите поне едно число, свързано с всяка точка на пространството? Аз лично не мога! Аз съм способен да си представя такова нещо, като температурата във всяка точка от пространството. Но това изглежда е изобщо нещо представимо: има топлина и студ, които се изменят от място в място. Но честна дума аз не съм способен да си представя число във всяка точка.

Може би затова си струва да се постави въпросът така: не може ли да си представим електричното поле във вида на нещо приличащо на температура, или приличащо на изместването на парче пихтия? Отначало да си въобразим, че светът е изпълнен с тънка пихтиеста маса, а полетата представляват някакви изкривявания (да речем, разтягания или завои) на тази маса. Ето тогава би могло мисленно да си въобразим полето. А след като „видяхме“ на какво прилича то, ние можем да се абстрахираме от пихтията. Именно това са се опитвали да правят доста дълго време много хора. Максвел, Ампер, Фарадей и други са опитвали по такъв начин да разберат електромагнетизма. (Понякога те са наричали абстрактната пихтия „ефир“.) Но се оказало, че опитите да се представи електромагнитното поле по подобен начин на практика пречи на прогреса. За съжаление нашите способности за абстракция, за използуване на прибори за откриване на полето за използване на математични символи за неговото описание и т. н. са ограничени. Обаче полетата в известен смисъл са нещо напълно реално, понеже, като завършим разправията с математичните уравнения (все едно с илюстрации или без, с чертежи или без тях, опитвайки се да представим полето наяве или без да правим такива опити), ние все пак можем да създадем уреди, които ще хванат сигнали от космичната ракета или ще открият галактика на милиард светлинни години от нас и така нататък.

Въпросът за въображението в науката се натъква често на неразбиране у хората от други специалности. Те се залавят да изпробват нашето въображение по следния начин. Те казват: „Ето, пред вас са показани няколко души в някаква ситуация. Как си представяте какво ще се случи сега с тях?“ Ако вие отговорите: „Не мога да си представя“, те могат да ви сметнат за човек със слабо въображение. Те няма да видят при това факта, че всичко което в науката се *допуска* да се въобразява, трябва *да се съгласува с всичко останало, което ни е известно:* че електричните полета и вълни, за които говорим, не са просто удачни мисли, които ние извикваме у себе си, ако това ни се иска, а идеи, които трябва да се съгласуват с всички известни закони на физиката. Недопустимо е сериозно да си въобразяваме това, което по очевиден начин противоречи на известните закони на природата. Така че нашият род въображения е твърде трудна игра. Трябва да се има достатъчно въображение, за да се мисли за нещо никога преди не видяно, никога преди не чувано. В същото време се налага, така да се каже, да се облича на мислите усмирителна риза, да ги ограничаваме с условия, които следват от нашите

знания за това, по какъв път наистина върви природата. Проблемът за създаване на нещо, което е съвсем ново и в същото време се съгласува с всичко, което сме видяли по-рано, е извънредно труден проблем.

Но понеже вече стана дума, аз искам да се спра на това, в състояние ли сме да си представим *красота*, която не можем *да видим*. Това е интересен въпрос. Когато ние гледаме дъгата, тя ни се струва прекрасна. Всеки, който я види, ще възкликне: „О, дъга!“. (Вижте так научно подхождам към въпроса. Аз се пазя да нарека нещо възхитително, докато няма експериментален начин да да се определи това.) Е, а как бихме описвали дъгата, ако бяхме слепи? А нали ние *сме слепи*, когато измерваме коефициента на отражение на инфрачервените лъчи от натриевия хлорид или когато говорим за честотата на вълните, дошли от някоя невидима за окото галактика. Тогава ние чертаем графика, рисуваме диаграма. Например за дъгата подобна графика би била зависимостта на интензитета на излъчването от дължината на вълната, измерена със спектрофотометър под всевъзможни ъгли към хоризонта. Изобщо казано, подобни измервания би трябвало да водят към доста полегати криви. И ето в един прекрасен ден някой би открил, че при някакво определено време, под някакви ъгли към хоризонта спектърът на интензитета като функция на дължината на вълната е започнал да се държи странно — у него се е появил пик. Ако ъгълът на наклона би се изменил едва-едва, максимумът на пика би преминал от една дължина на вълната към друга. И ето след известно време във физическото списание за слепите би се появила техническа статия под название „Интензитетът на излъчването като функция от ъгъла при някои метеоусловия“. В тази статия би имало графика от типа, показан на фиг. 20-5. „Авторът е забелязал — би се говорило може би в статията, че под по-големи ъгли основната част на радиацията се пада на дългите вълни, а под по-малките максимумът на излъчването се измества към късите вълни“. (Е, а ние бихме казали, че под ъгъл 40° светлината е предимно зелена, а под ъгъл 42° — червена.)



Фиг. 20-5. Зависимост на интензивността на електромагнитните вълни от дължината на вълната под три ъгъла (отчитани от посока, противоположна на посоката към Слънцето)

Наблюдението е достъпно само при определени метеорологични условия

Но намирате ли вие графиката, приведена на фиг. 20-5, възхитителна? В нея се съдържат съществено повече различни детайли, отколкото ние сме в състояние да видим, когато гледаме дъгата: нашите очи не могат да схванат истинската форма на спектъра. А ето за очите дъгата все пак се струва възхитителна. Стига ли ни въображение, за да видим в спектралните криви всичката тази красота, която виждаме, гледайки дъгата? На мене не.

Но да си представим, че аз имам графика на зависимостта на коефициента на отражение на кристалите на натриевия хлорид от дължината на вълната в инфрачервения участък на спектъра и от ъгъла. Аз мога да си въобразя как това би ми изглеждало, ако моите очи имаха способността да виждат в инфрачервена светлина. Навярно това би бил някакъв ярък, наситен „зелен“ цвят, на който биха се наслагвали отражения от повърхности с „металически червени“ тонове. Това би изглеждало наистина великолепно, но не зная способен ли съм, като погледна на гра-

фиката на коефициента на отражение на NaCl, снета с някакъв уред, да кажа, че тя е също толкова прелестна.

Но, от друга страна, макар че ние не можем да виждаме красотата на тези или онези частни измервания, можем да твърдим, че постигаме своеобразната красота на уравненията, описващи всеобщите физически закони. Например във вълновото уравнение (20.9) е много красива тази правилност, с която са разположени в него x, y, z и t. И тази приятна симетрия на появяването на x, y, z и t намеква за онази величествена красота, която се таи в четирите разнозначни координати, във възможността в пространството да има четиримерна симетрия, във възможността да я анализираме и да развием специалната теория на относителността. Така че съществува още интелектуална красота, която се асоциира с уравненията.

20-4. Сферични вълни

Видяхме, че съществуват решения на вълновото уравнение, които отговарят на плоски вълни и че всяка електромагнитна вълна може да бъде описана като суперпозиция на много плоски вълни. В определени случаи обаче е по-удобно да се описва вълновото поле в друга математична форма. Аз бих искал сега да разгледам теорията на сферичните вълни — вълни, които съответствуват на сферични повърхнини, разпространяващи се от някакъв център. Когато вие хвърляте в езеро камък, по водната повърхност ще побягнат бръчки във вид на кръгови вълни — това са двумерни вълни. Сферичните вълни приличат на тях, само че те се разпространяват във всичките три измерения.

Преди да започнем описанието на сферичните вълни, ще се заемем малко с математика. Нека съществува функция, която зависи само от радиалното разстояние на точката от началото на координатите, с други думи, сферично симетрична функция. Ще я означим с $\psi(r)$, където под r се подразбира

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

т. е. разстоянието от началото на координатите. За да узнаем какви функции $\psi(r)$ удовлетворяват вълновото уравнение, ще ни бъде необходим изразът за лапласиана на ψ. Значи нужно ни е да намерим сумата на вторите производни на ψ по x, по y и по z. С $\psi'(r)$ ще означим първата производна на ψ по r, а с $\psi''(r)$ — втората.

Отначало да намерим производните по x. Първата производна

$$\frac{\partial\psi(r)}{\partial x}=\psi'(r)\frac{\partial r}{\partial x}.$$

Втората производна по x е

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\psi''\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\psi'\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\right).$$

Частните производни на r по x могат да се получат от

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{1}{r}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right).$$

Така че втората производна на ψ по x приема вида

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^2}\psi''+\frac{1}{r}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\psi'. \tag{20.28}$$

Точно така и

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^2}\psi''+\frac{1}{r}\left(1-\frac{y^2}{r^2}\right)\psi', \tag{20.29}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{z^2}{r^2}\psi''+\frac{1}{r}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)\psi'. \tag{20.30}$$

Лапласианът е равен на сумата на тези три производни. Като си спомним, че $x^2+y^2+z^2=r^2$, получаваме

$$\nabla^2\psi(r)=\psi''(r)+\frac{2}{r}\psi'(r). \tag{20.31}$$

Често е по-удобно да се записва уравнението в следната форма

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\psi). \tag{20.32}$$

Като извършите диференцирането, указано в (20.32), вие ще се убедите, че дясната част тук е също такава, както и в (20.31).

Ако ние искаме да разглеждаме сферично симетрични полета, които могат да се разпространяват като сферични вълни, величините, описващи полетата, трябва да бъдат функции както на r, така и на t. Да предположим, че ни е необходимо да знаем, какви функции $\psi(r, t)$ са решения на тримерното вълново уравнение

$$\nabla^2\psi(r, t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(r, t)=0. \tag{20.33}$$

Тъй като $\psi(r, t)$ зависи от пространствените координати само чрез r, в качеството на лапласиан може да се използува изразът (20.32). Но за точност, понеже ψ зависи също така и от t, е необходимо диференцирането по r да се записва във вид на частна производна. Вълновото уравнение се обръща в

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi=0.$$

Ето него ни предстои да решаваме. То изглежда по-сложно, отколкото в случая на плоски вълни. Но забележете, че ако умножим това уравнение по r, ще се получи

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi)=0. \tag{20.34}$$

Това уравнение ни говори, че функцията $r\psi$ удовлетворява едномерното вълново уравнение по променливата r. Като използуваме често подчертавания от нас общ принцип, че при едни и същи уравнения решенията са едни и същи, ние идваме до извода, че ако $r\psi$ се окаже функция само на $(r-ct)$, тази функция ще е решение на уравнение (20.34). И така, откриваме, че сферичните вълни трябва да имат вида

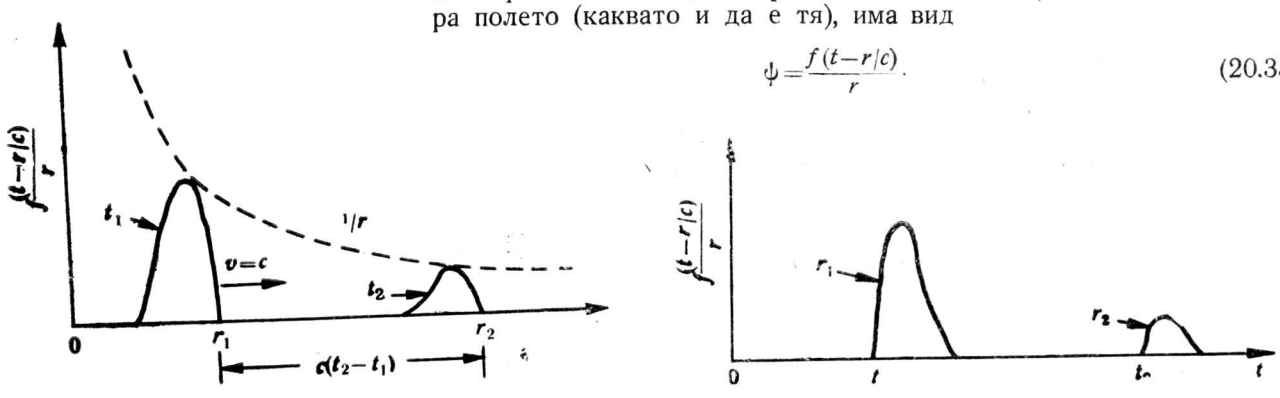
$$r\psi(r, t)=f(r-ct).$$

Или, както видяхме по-рано, може в същата степен да се счита, че $r\psi$ има формата

$$r\psi=f\left(t-\frac{r}{c}\right).$$

Като разделим на r, намираме, че величината ψ, която характеризира полето (каквато и да е тя), има вид

$$\psi=\frac{f(t-r/c)}{r}. \tag{20.35}$$



Фиг. 20-6. Сферична вълна $\psi=f(t-r/c)/r$:

а — зависимост на ψ от r при $t=t_1$ и същата вълна в по-късен момент на времето t_2; *б* — зависимост на ψ от t при $r=r_1$ и същата тази вълна на разстояние r_2

Такава функция представлява сферична вълна от общ вид, която се разпространява от началото на координатната система със скорост c. Ако за минута забравим за r в знаменателя, амплитудата на вълната като функция от разстоянието до началото на координатите във всеки даден момент притежава определена форма, която се разпространява със скорост c. Обаче r в знаменателя ни говори, че колкото се отдалечава вълната, амплитудата ѝ намалява пропорционално на $1/r$. С други думи, за разлика от плоската вълна, амплитудата на която остава при движението една и съща, амплитудата на сферичната вълна непрекъснато спада (фиг. 20-6). Този факт е лесно да се разбере от прости физични съображения.

Ние знаем, че плътността на енергията във вълната зависи от квадрата на амплитудата на вълната. Когато вълната се отдалечава от центъра, енергията ѝ се разлива на все по-голяма площ, пропорционална на квадрата на радиуса на вълната. Ако пълната енергия се запазва, плътността на енергията трябва да намалява като $1/r^2$, а амплитудата — като $1/r$. Затова формула (20.35) за сферичната вълна е напълно „разумна".

Ние игнорирахме другото възможно решение на едномерното вълново уравнение

$$r\psi = g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

или

$$\psi = \frac{g(t + r/c)}{r}.$$

Това е също сферична вълна, но бягаща *навътре*, от големите r към началото на координатната система.

С това ние правим едно специално предположение. Ние твърдим (без всякакво доказателство), че вълните създавани от източника, винаги бягат само *от* него. Понеже знаем, че вълните се предизвикват от движение на заряди, ние се настройваме на това, че вълните бягат от зарядите. Би било доста странно да си представяме, че преди зарядите да са били приведени в движение, сферичната вълна е вече излязла от безкрайността и е пристигнала до зарядите точно в този момент, когато те са започнали да се движат. Такова решение е възможно, но опитът показва, че когато зарядите се ускоряват, вълните се разпространяват *от* зарядите, а не към тях. Макар уравненията на Максвел да предоставят на двете вълни равни възможности, ние привличаме *допълнителния факт*, основан на опита, че „физичен смисъл" има само разходящата се вълна.

Необходимо е обаче да се отбележи, че от това допълнително предположение произтича интересно следствие: ние губим при това симетрията относно времето, която съществува в уравненията на Максвел. Както изходните уравнения за **E** и **B**, така и произтичащите от тях вълнови уравнения при изменяне знака на t не се изменят. Тези уравнения твърдят, че на всяко решение, което отговаря на вълна, бягаща в една посока, отговаря също толкова правилно решение за вълна, бягаща в обратната посока. И като твърдим, че възнамеряваме да взимаме пред вид само разходящите се сферични вълни, ние правим с това важно допълнително предположение. (Много щателно се изучаваше такава електродинамика, в която минават без това допълнително предположение. Колкото и да е удивително, но в много случаи тя *не довежда* до физични абсурдни резултати. Обсъждането обаче на тези идеи сега би ни отвлекло много настрани. Ние ще поговорим по-подробно за това в гл. 28.)

Трябва да се спомене за още един важен факт. В нашето решение за разбягваща се вълна (20.35) функцията ψ в началото на координатите е безкрайна. Това е някак необичайно. Ние бихме предпочели да имаме такива вълнови решения, които да са гладки навсякъде. Нашето решение физически се отнася към такава ситуация, когато в началото на координатите се разполага източни-

кът. Значи ние неумишлено сме направили една грешка: Нашата формула (20.35) не е решение на свободното вълново уравнение *навсякъде*; уравнение (20.33) с нула в дясната част е решено навсякъде освен в началото на координатите. Грешката се е вмъкнала, поради това че някои действия при извода на уравнението при $r=0$ са „незаконни".

Ще покажем, че същата тази грешка е лесно да се направи и в електростатиката. Да допуснем, че ни е необходимо да решим уравнението за електростатичния потенциал в празното пространство $\nabla^2\varphi=0$. Лапласианът е равен на нула, защото ние сме предположили, че никъде няма никакви заряди. Но как стои работата със сферично симетричното решение на уравнението, т. е. с функцията φ, зависеща само от r? Като използуваме за лапласиана формула (20.32), получаваме

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\varphi)=0.$$

Като умножим този израз по r, стигаме до вече интегрируемо уравнение

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\varphi)=0.$$

Като интегрираме един път по r, ще видим, че първата производна на $r\varphi$ е равна на константа, която ще означим с a

$$\frac{d}{dr}(r\varphi)=a.$$

Като интегрираме още един път, ще получим за $r\varphi$ формулата

$$r\varphi=ar+b,$$

където b е друга интеграционна константа. И така, ние намерихме, че решението за електростатичния потенциал в празното пространство има вида

$$\varphi=a+\frac{b}{r}.$$

Нещо тук явно не е в ред. Нали ние знаем решението за електростатичния потенциал в област, където няма електрични заряди: потенциалът навсякъде е постоянен. Това съответствува на първото събираемо в решението. Но има още и втори член, който ни подсказва, че в потенциала дава принос нещо, изменящо се като $1/r$. Ние знаем обаче, че подобен потенциал съответствува на точков заряд в началото на координатната система. Излиза, макар ние да мислихме, че сме намерили решение за потенциала в празното пространство, че нашето решение фактически ни дава също така полето на точков източник в началото на координатната система. Вие забелязвате ли сходството между това, което се получи сега и това, което стана тогава, когато търсехме сферично симетрично решение на вълновото уравнение? Ако в началото на координатната система действително нямаше нито заряди, нито токове, не биха възникнали сферично разбягващи се вълни. Сферичните вълни трябва да се предизвикват от източници в началото на координатите. В следващата глава ще изследваме връзката между излъчваните електромагнитни вълни и токовете и напреженията, които ги предизвикват.

21

Решения на уравненията на Максвел с токове и заряди

21-1. Светлина и електромагнитни вълни

В предишната глава видяхме, че сред решенията на уравненията на Максвел има електромагнитни вълни. Тези вълни в зависимост от дължината на вълната съответствуват на светлина, радио, рентгенови лъчи и т. н. Ние вече подробно изучавахме различните явления, свързани със светлината. В тази глава искаме да свържем двата въпроса и да покажем, че уравненията на Максвел действително можеха да служат като основа за изучаване свойствата на светлината.

Изучаването на светлината ние започнахме с това, че написахме уравнението за електричното поле, създавано от заряд, който можеше някак си произволно да се движи. Уравнението имаше вида

$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2}+\frac{r'}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{e}_{r'}\right],$$

$$c\mathbf{B}=\mathbf{e}_{r'}\times\mathbf{E} \qquad (21.1)$$

[виж гл. 28 (т. I), извраз (28.3)][1].

Ако зарядът се движи по произволен начин, електричното поле, което съществува в дадена точка, в *даден* момент зависи само от положението и движението на заряда в *по-ранен* момент на времето, който изостава с времето, необходимо на светлината, движейки се със скорост c, да премине разстоянието r' от заряда до точката на полето. С други думи, ако ви е нужно да знаете електричното поле в точка (*1*) в момент t, вие трябва да пресметнете положението (*2'*) на заряда и неговото движение в момента $(t-r'/c)$, където r' е разстоянието до точка (*1*) от положението на заряда (*2'*) в момента $(t-r'/c)$. Примовете тук ви напомнят, че r' е така нареченото „закъсняващо разстояние“ от точка (*2'*) до точка (*1*), а не сегашното разстояние между точка (*2*) — положението на заряда в момент t — и точката (*1*) на полето (фиг. 21-1). Забележете, че сега по друг начин се определя *посоката* на единичния вектор $\mathbf{e}_{r'}$. В гл. 28 и 34 (т. I) ние се уговаряхме, че $\mathbf{r}$ (следователно и $\mathbf{e}_{r'}$) ще сочи *към* източника. Сега пък ние следваме определението, което се използува във формулировката на закона на Кулон, по което $\mathbf{r}$ е насочено *от* заряда в точка (*2*) *към* точка (*1*) на полето. Единствената разлика е в това, че новото $\mathbf{r}$ (и $\mathbf{e}_{r'}$) е противоположно на старото.

Ние видяхме също така, че ако скоростта на заряда v е винаги много по-малка от c и ако се разглеждат само точки, силно отдалечени от заряда, така че в (21.1) е съществено само последното събираемо, полето можем също така да запишем във вида

$$\mathbf{E}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r'}\left[\begin{array}{l}\text{проекцията на ускорението на заряда}\\ \text{в момент } t-\dfrac{r'}{c} \text{ върху направлението,}\\ \text{напречно към } r'\end{array}\right] \qquad (21.1')$$

и

$$c\mathbf{B}=\mathbf{e}_{r'}\times\mathbf{E}.$$

[1] С обратен знак. Виж по-нататък. (Заб. на руския ред.)

21-1. Светлина и електромагнитни вълни

21-2. Сферични вълни от точков източник

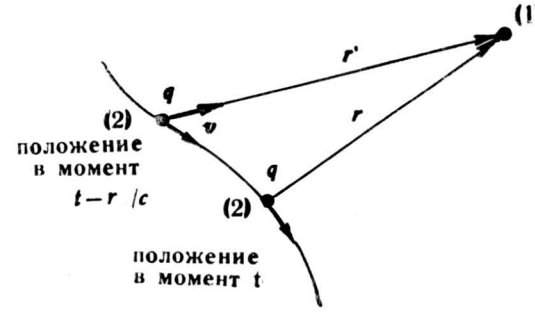
21-3. Общо решение на уравненията на Максвел

21-4. Полетата на трептящ дипол

21-5. Потенциали на движещ се заряд; общо решение на Ленар и Вихерт

21-6. Потенциали на заряд, който се движи с постоянна скорост; формула на Лоренц

Да се повтори: гл. 28 (т. I) „Електромагнитно излъчване“; гл. 31 (т. I) „Как възниква показателят на пречупването“; гл. 34 (т. I) „Релативистки явления в излъчването“



Фиг. 21-1. Полетата в точка (*1*) в момент t зависят от това положение (*2'*), което зарядът q е заемал в момента $(t-r'/c)$

Да разгледаме по-подробно какво дава пълното уравнение (21.1). Векторът $\mathbf{e}_r$ е единичният вектор, насочен от „закъсняващата“ точка (*2′*) към точка (*1*). Тогава първото събираемо дава това, което би следвало да се очаква, ако зарядът в своето „закъсняващо положение“ създаваше кулоново поле — то може да се нарече „закъсняващо кулоново поле“. Електричното поле е обратно пропорционално на квадрата на разстоянието и е насочено от „закъсняващото“ положение на заряда (т. е. по вектора $\mathbf{e}_{r'}$).

Но това е само първото събираемо. Останалите ни напомнят, че законите на електричеството *не* твърдят, че всички полета, оставайки, както са и били, статични, започват просто да закъсняват (а такова твърдение се случва понякога да се чува). Към „закъсняващото кулоново поле“ трябва да се добавят двете други събираеми. Второто съобщава, че към закъсняващото кулоново поле трябва да се направи „поправка“, равна на *бързината на изменението* на закъсняващото кулоново поле, умножена с r'/c, т. е. със самото закъснение. Този множител като че ли се стреми да компенсира закъснението в първото. *Двете* първи събираеми съответствуват на пресмятането на „закъсняващото кулоново поле“ и после на екстраполацията му в бъдещето, за време r'/c, т. е. *точно в момента* t! Екстраполацията е линейна, както ако бяхме предположили, че „закъсняващото кулоново поле“ ще се изменя както преди със скорост, пресметната за заряд в точка (*2′*). Ако полето се изменя бавно, ефектът на закъснение почти напълно се свежда до нула от събираемото за поправка и двете събираеми заедно довеждат до стойност на електричното поле много близка до „мигновеното кулоново поле“ на заряда, който се намира в точка (*2*).

На края във формула (21.1) има още и трето събираемо — втората производна на единичния вектор $\mathbf{e}_{r'}$. Като изучавахме светлината, ние по същество използувахме този факт, че далеч от заряда двете първи събираеми намаляват като обратния квадрат на разстоянието и на големи разстояния са твърде слаби в сравнение с третото, което намалява като $1/r$. Затова съсредоточихме нашето внимание върху последното събираемо и показахме, че то (също на големи разстояния) е пропорционално на компонентата на ускорението на заряда, която е напречна към линията на наблюдение. (Освен това почти навсякъде по-рано ние разглеждахме само случая, когато зарядите се движат нерелативистки. Релативистки ефекти се разглеждаха само в гл. 34. т. I.)

Сега трябва да се опитаме да свържем тези две неща. Ние имаме уравненията на Максвел и имаме формулата (21.1) за полето на точков заряд. Естествено е да се попита еквивалентни ли са те? Ако успеем да изведем (21.1) от уравненията на Максвел, действително ще разберем връзката на светлината с електромагнетизма. Изводът ѝ е главната цел на тази глава.

Изяснява се, че ние не можем да направим пълен извод — прекалено сложните математични детайли няма да ни позволят да излезем от полесражението без загуби. Но все пак ще се приближим до целта достатъчно близко, така че вие лесно ще разберете как може да бъде установена интересуващата ни връзка. Ние ще пропуснем само някои математически подробности. Математиката на тази глава може да се покаже на някои от вас доста сложна и възможно е даже да ви стане скучно да следите внимателно за извода. Но ние все пак считаме, че е много важно да се свърже това, което вие учихте по-рано, с това, което изучавате сега или най-малко да демонстрираме как може да бъде установена тази връзка. Ако вие не сте забравили предишните глави, обърнете внимание на това, че всеки път, когато приемахме някое мнение за изходна точка на обсъждането, ние грижливо обяснявахме явява ли се това мнение ново „допускане“, т. е. отразява ли то „основен закон“ на природата, или пък можем в крайна сметка да го изведем от някакви други закони. Духът на

тези лекции ни задължава да обсъдим връзката между светлината и уравненията на Максвел. Може би на вас ще ви бъде тук-там и трудно, но нищо не може да се направи: друг път не съществува.

21-2. Сферични вълни от точков източник

В гл. 18 ние установихме, че уравненията на Максвел могат да се решават чрез заместването

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{21.2}$$

и

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}, \tag{21.3}$$

където φ и $\mathbf{A}$ трябва да удовлетворяват уравненията

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{21.4}$$

и

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2} \tag{21.5}$$

и освен това условието

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{21.6}$$

Да намерим сега решението на уравненията (21.4) и (21.5). За това трябва да умеем да решаваме уравнението

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-s, \tag{21.7}$$

където величината s (която се нарича източник) е известна. Ясно е, че за уравнение (21.4) s съответствува на ρ/ε_0, а ψ е φ, а за уравнение (21.5) s съответствува на $j_x/\varepsilon_0 c^2$, ако ψ е A_x и т. н. Но нас ни интересува чисто математичната задача за решението на (21.7) без отношение към това, какъв е физичният смисъл на ψ и s.

Там, където ρ и $\mathbf{j}$ са равни на нула (това място се нарича „празно пространство“), потенциалите φ и $\mathbf{A}$ и полетата $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ удовлетворяват тримерното вълново уравнение без източници; математичната форма на това уравнение е такава:

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0. \tag{21.8}$$

В гл. 20 ние видяхме, че решенията на това уравнение могат да представляват вълни от разни видове: плоски вълни, бягащи в посока x $\psi=f(t-x/c)$; плоски вълни, бягащи по y или по z или във всяка друга посока; сферични вълни от вида

$$\psi(x, y, z, t)=\frac{f(t-r/c)}{r}. \tag{21.9}$$

(Решенията могат да се запишат и иначе — например във вида на цилиндрични вълни, разбягващи се от оста.)

Ние тогава забелязахме, че формулата (21.9) се отнася физически не съвсем за празното пространство: в началото на координатната система трябва да има някакви заряди, иначе разходяща вълна не би се получила. С други думи, формула (21.9) е решение на уравнение (21.8) навсякъде освен в непосредствената околност на точката $r=0$, където (21.9) представлява решение на пълното уравнение (21.7), в дясната част на което стоят източниците. Нека

сега да видим що за уравнение е това, т. е. какъв род източник s в уравнение (21.7) трябва да предизвиква вълна от типа на (21.9).

Да предположим, че съществува сферична вълна (21.9) и да видим в какво се превръща тя при много малки r. Тогава закъснението $-r/c$ в $f(t-r/c)$ може да се пренебрегне и понеже функцията f е плавна, ψ се превръща в

$$\psi=\frac{f(t)}{r} \qquad (r\to 0). \tag{21.10}$$

И така, ψ прилича точно на кулоновото поле на заряд, разположен в началото на координатите. Ние знаем, че за неголямо струпване от заряди, ограничено в много малка област близо до началото на координатите и имащо плътност ρ,

$$\varphi=\frac{Q/4\pi\varepsilon_0}{r},$$

където $Q=\int\rho\,dV$. Такъв потенциал φ удовлетворява уравнението

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Като пресмятаме по същия начин, би трябвало да кажем, че ψ от израза (21.10) удовлетворява уравнението

$$\nabla^2\psi=-s \qquad (r\to 0), \tag{21.11}$$

където s е свързано с f чрез формулата

$$f=\frac{S}{4\pi}$$

при

$$S=\int s\,dV.$$

Единствената разлика е в това, че в общия случай s, а значи и S може да бъде функция на времето.

По-нататък е много важно това, че ако ψ удовлетворява (21.11) при малко r, удовлетворява също и (21.7). С приближаването към началото на координатите зависимостта на ψ от r от типа $1/r$ води до това, че пространствените производни стават много големи. А производните по времето остават същите. (Това са просто производните на $f(t)$ по времето.) Така че, когато r се стреми към нула, множителят $\partial^2\psi/\partial t^2$ в уравнение (21.7) може да се пренебрегне в сравнение с $\nabla^2\psi$ и (21.7) става еквивалентно на уравнение (21.11).

Като направим равносметка, можем да кажем, че ако функцията на източника $s(t)$ от уравнение (21.7) е съсредоточена в началото на координатите и нейната обща стойност е равна на

$$S(t)=\int s(t)\,dV, \tag{21.12}$$

решението на уравнение (21.7) има вида

$$\psi(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi}\frac{S(t-r/c)}{r}. \tag{21.13}$$

Влиянието на събираемото с $\partial^2\psi/\partial t^2$ в (21.7) се отразява само на появяването на закъснението $(t-r/c)$ в потенциала от кулонов тип.

21-3. Общо решение на уравненията на Максвел

Ние намерихме решение на уравнението (21.7) за „точков" източник. Сега възниква нов въпрос: Какъв е видът на решението за произволен източник? Е, това е лесно да се реши; всеки из-

точник $s(x, y, z, t)$ може да се счита съставен от сумата на много „точкови“ източници, разположени по един във всеки елемент от обема dV, които имат сила $s(x, y, z, t)\,dV$. Тъй като (21.7) е линейно, сумарното поле представлява суперпозиция на полетата от всички такива елементи на източника.

Като използуваме резултатите от предишния параграф [виж (21.13)], ще получим, че в момент t полето $d\psi$ в точката (x_1, y_1, z_1) [или накратко в точка (*1*)], което се създава от елемента на източника $s\,dV$ в точката (x_2, y_2, z_2) [или накратко в точка (*2*)], се изразява с формулата

$$d\psi(1,\ t)=\frac{s(2,\ t-r_{12}/c)\,dV_2}{4\pi r_{12}},$$

където r_{12} е разстоянието от (*2*) до (*1*). Събирането на приносите от всички части на източника означава, разбира се, интегриране по цялата област, където $s\neq 0$, така че имаме

$$\psi(1,\ t)=\int\frac{s(2,\ t-r_{12}/c)}{4\pi\, r_{12}}\,dV_2. \tag{21.14}$$

Другояче казано, полето в точка (*1*) в момента на времето t представлява сумата на всички сферични вълни, изпускани в момент $t-r_{12}/c$ от всички елементи на източника, разположен в точка (*2*). Изразът (21.14) е решение на нашето вълново уравнение за каквато и да е система от източници.

Сега виждаме как да получаваме общото решение на уравненията на Максвел. Ако под ψ подразбираме скаларния потенциал φ, функцията на източника s се превръща в ρ/ε_0. Може да се счита, че ψ представлява една от трите компоненти на векторния потенциал $\mathbf{A}$; тогава s означава съответната компонента на $\mathbf{j}/\varepsilon_0 c^2$. Излиза, че ако във всички точки е известна плътността на зарядите $\rho(x, y, z, t)$ и плътността на тока $\mathbf{j}(x, y, z, t)$, решенията на уравненията (21.4) и (21.5) могат да се напишат незабавно:

$$\varphi(1, t)=\int\frac{\rho\,(2,\ t-r_{12}/c)}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}\,dV_2, \tag{21.15}$$

$$\mathbf{A}(1, t)=\int\frac{\mathbf{j}\,(2,\ t-r_{12}/c)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r_{12}}\,dV_2. \tag{21.16}$$

Полетата $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ се получават чрез диференциране на потенциалите [използуват се изразите (21.2) и (21.3)]. Впрочем може да се провери явно, че φ и $\mathbf{A}$, получени от (21.15) и (21.16), действително удовлетворяват равенството (21.6).

Ние решихме уравненията на Максвел. При всички обстоятелства, ако са зададени токовете и зарядите, от тези интеграли може да се определят потенциалите, а след това, като ги диференцираме, да получим полетата. С това с теорията на Максвел е свършено. И това ни позволява да затворим кръга и да се върнем към нашата теория на светлината, защото е достатъчно само да пресметнем електричното поле на движещ се заряд, за да свържем всичко това с нашата предишна теория на светлината. Всичко, което ни остава да направим, е да вземем движещ се заряд, да изчислим от тези интеграли неговия потенциал и след това от $-\nabla\varphi-\partial\mathbf{A}/\partial t$, като диференцираме, да намерим $\mathbf{E}$. Ние трябва да получим формула (21.1). Ще трябва да се свърши много работа, но принципът е ясен.

И така, стигнахме до центъра на електромагнитната вселена. В ръцете ни е пълната теория на електричеството, магнетизма и светлината, пълното описание на полетата, които се създават от движещи се заряди и много, много друго. Цялото съоръжение, изградено от Максвел, в цялата си пълнота, красота и мощ сега е пред нас. Това е може би едно от най-великите постижения на физиката. И за да напомним за неговата важност, ние преписваме всички формули заедно и ги ограждаме с красива рамка.

Уравнения на Максвел:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

и техните решения:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

$$\varphi(1, t) = \int \frac{\rho(2,\ t - r_{12}/c)}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}\, dV_2,$$

$$\mathbf{A}(1, t) = \int \frac{\mathbf{j}(2,\ t - r_{12}/c)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r_{12}}\, dV_2.$$

21-4. Полетата на трептящ дипол

Ние засега още не сме направили обещания извод на формула (21.1) за електричното поле на движещ се точков заряд. Даже като знаем това, което ние вече знаем, този извод все едно не е лесно да се направи. На нас не ни се удаде да открием формулата (21.1) никъде, в никакви книжки и статии (освен т. I на тези лекции)[1]. Това свидетелствува, че изводът ѝ не е прост. (Полетата на движещ се заряд са записвани нееднократно и в други видове, които, разбира се, са еквивалентни.) Затова тук ще се ограничим с това, че просто ще покажем с няколко примера, че (21.15) и (21.16) довеждат до същите резултати, както и (21.1). Най-напред ще покажем, че при единственото условие, движението на заредената частица да е нерелативистко (21.1); води до правилна стойност на полетата. (Само този частен случай покрива 90% от всичко това, което беше казано за явлението светлина.)

Да разгледаме такова положение, когато имаме уплътнение на заряди, което се премества по някакъв начин в неголяма област; иска се да се намерят създаваните от него някъде недалеч от това място полета. Въпросът може да се постави и иначе: ние ще намерим полето на произволно разстояние от точков заряд, който почти незабележимо трепти нагоре и надолу. Понеже светлина обикновено изпускат такива неутрални тела, като атомите, ще считаме, че нашият трептящ заряд q е разположен близо до неподвижен, равен по големина, но противоположен по знак заряд. Ако разстоянието между центровете на зарядите е равно на $\mathbf{d}$, у зарядите ще се появи диполен момент $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$, който ще считаме функция на времето. Следва да се очаква, че близо до зарядите закъсняването на полето може да се пренебрегне; електричното поле ще бъде точно такова, както и това, което се получаваше по-рано за електричния дипол (но, разбира се, с мигновен диполен момент $\mathbf{p}(t)$). Обаче при голямо отдалечаване във формулата за полето трябва да се появи добавъчно събираемо, което се изменя като $1/r$ и зависи от това, какво е ускорението на заряда в посока, перпендикулярна на лъча на наблюдение. Да видим ще се получи ли у нас този резултат.

Ще започнем с пресмятането на векторния потенциал $\mathbf{A}$ с помощта на (21.16). Нека плътността на зарядите в уплътнението

[1] Тази формула е била изведена от Р. Файнман в 1950 г. и се привежда понякога в лекциите като удобен начин за пресмятане на синхротронното излъчване.

е $\rho(x, y, z)$ и то се движи през цялото време със скорост $\mathbf{v}$. Тогава плътността на тока $\mathbf{j}(x, y, z)$ е равна на $\mathbf{v}\rho(x, y, z)$. Удобно е координатната система да се разположи така, че оста z да е насочена по $\mathbf{v}$; тогава геометрията на нашата задача ще се изобрази така, както е показано на фиг. 21-2. Нас ни интересува интегралът

$$\int \frac{\mathbf{j}(2, t-r_{12}/c)}{r_{12}}\, dV_2. \tag{21.17}$$

Ако размерите на заряда-уплътнение в действителност са много по-малки от r_{12}, r_{12} в знаменателя може да се положи равно на r (разстоянието от центъра на уплътнението) и да се изнесе пред знака за интегриране. Освен това ние се каним да сложим и в числителя $r_{12}=r$, макар това и да не е съвсем вярно. Това е невярно, защото в действителност би трябвало да вземаме $\mathbf{j}$ в горната част на уплътнението съвсем не в този момент, когато и в долната, а в малко по-друго време. Полагайки $r_{12}=r$ в $\mathbf{j}(t-r_{12}/c)$, ние изчисляваме плътността на тока за цялото уплътнение в едно и също време $(t-r/c)$. Това приближение е валидно само тогава, когато скоростта на заряда v е много по-малка от c. Ние, както се вижда, правим пресмятане в нерелативисткия случай. След замяната на $\mathbf{j}$ с $\rho\mathbf{v}$ интегралът (21.17) се превръща в

$$\frac{1}{r}\int \mathbf{v}\rho\left(2, t-\frac{r}{c}\right) dV_2.$$

Понеже скоростта на всички заряди в уплътнението е една и съща, този интеграл е просто равен на $\mathbf{v}/r$, умножено по общия заряд q. Но $q\mathbf{v}$ е точно $\partial\mathbf{p}/\partial t$ (скоростта на изменяне на диполния момент), само нея трябва, разбира се, да я определяме в поранен момент $(t-r/c)$. Ще запишем тази величина така: $\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)$. И така, за векторния потенциал получаваме

$$\mathbf{A}(1, t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{r}. \tag{21.18}$$

Ние узнахме, че токът в менящ се дипол създава векторен потенциал във форма на сферични вълни, източникът на които притежава сила $\dot{\mathbf{p}}/4\pi\varepsilon_0 c^2$.

Сега от $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$ може да се получи магнитното поле. Понеже $\dot{\mathbf{p}}$ е насочен по оста z, $\mathbf{A}$ има само z-компонента; в ротацията остават само две ненулеви производни. Значи $B_x=\partial A_z/\partial y$ и $B_y=-\partial A_z/\partial x$. Да разгледаме отначало B_x:

$$B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\dot{p}(t-r/c)}{r} \tag{21.19}$$

За да диференцираме, да си спомним, че $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, така че

$$B_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\,\dot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\dot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right). \tag{21.20}$$

Но ние помним, че $\partial r/\partial y=y/r$; значи първото събираемо ще даде

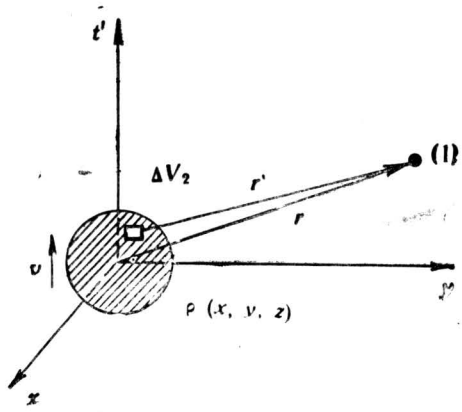
$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{y\dot{p}(t-r/c)}{r^3}, \tag{21.21}$$

което намалява като $1/r^2$, т. е. като полето на статичния дипол (защото в дадената посока y/r е постоянно).

Второто събираемо в (21.20) води до нов ефект. Ако извършим в него диференцирането, ще се получи

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{y}{cr^2}\,\ddot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right), \tag{21.22}$$

където $\ddot{p}$ е просто втората производна на p по t. Ето това получаващо се от диференцирането на числителя събираемо е отговорно за излъчването. Първо, то описва поле, намаляващо с разстоянието като $1/r$, второ, зависи от *ускорението* на заряда.



Фиг. 21-2. Потенциалите в точка (*1*) се дават от интегралите от плътността на заряда ρ

Сега на вас трябва да ви е ясно как се готвим да получим формула от типа на (21.1′), описваща светлинното излъчване.

Това явление е толкова интересно и важно, че си струва малко по-подробно да си изясним, откъде се взима това „радиационно“ събираемо. Ние започнахме от израза (21.18), който зависи от r като $1/r$ и с това прилича на кулоновия потенциал (ако не се обръща внимание на закъсняващия множител в числителя). Защо когато ние желаем да получим полето и диференцираме по пространствените координати, не получаваме просто поле от вида $1/r^2$ (разбира се, със съответствуваща задръжка по време)?

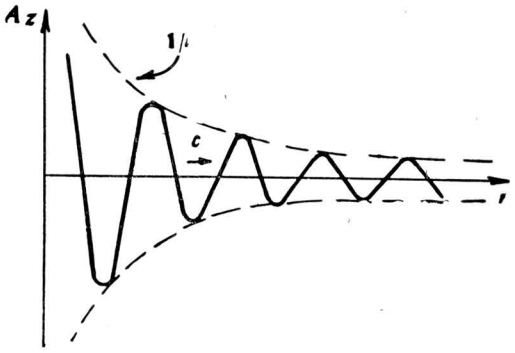
Ето защо. Представете си, че диполът е приведен в трептеливо движение нагоре и надолу. Тогава

$$p = p_z = p_0 \sin \omega t$$

и

$$A_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\omega p_0 \cos \omega (t - r/c)}{r}.$$

Ако начертаем графика на зависимостта на A_z от r във всеки даден момент, ще се получи кривата, показана на фиг. 21-3. Амплитудата в пиковете намалява като $1/r$, но освен това има още пространствени трептения, които са ограничени с анвелопа от вида $1/r$. Пространствените производни във формулата са пропорционални на *наклона* на кривата. От фиг. 21-3 се вижда, че се срещат много по-стръмни наклони, отколкото наклона на самата крива $1/r$. Очевидно е, че при дадена честота наклоните в пиковете са пропорционални на амплитудата на вълната, изменяща се като $1/r$. С това се обяснява степента на спадане на радиационното събираемо с разстоянието.



Фиг. 21-3. Зависимост на големината на **A** от r в момент t за сферична вълна от колебаещ се дипол

Всичко това се получава поради това, че вариациите във *времето* в източника се превръщат в *пространствени* вариации, когато вълните започват да се разбягват встрани, а пък магнитните полета зависят от *пространствените* производни на потенциала.

Сега да се върнем назад и завършим нашите пресмятания на магнитното поле. За B_x получихме (21.21) и (21.22). Затова

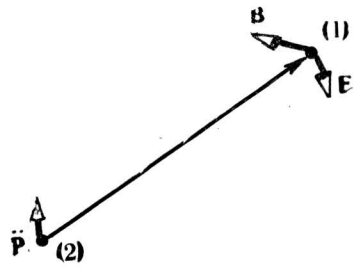
$$B_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[-\frac{y\dot{p}(t-r/c)}{r^3} - \frac{y\ddot{p}(t-r/c)}{cr^2}\right].$$

С помощта на точно такива пресмятания ние ще дойдем до

$$B_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{x\dot{p}(t-r/c)}{r^3} + \frac{x\ddot{p}(t-r/c)}{cr^2}\right].$$

И всичко това може да се обедини в една красива векторна формула

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{[\dot{\mathbf{p}} + (r/c)\,\ddot{\mathbf{p}}]_{t-r/c} \times \mathbf{r}}{r^3}. \tag{21.23}$$



Фиг. 21-4. Полетата на излъчване **B** и **E** на трептящ дипол

Сега я погледнете. Преди всичко на големи разстояния (когато r е голямо) следва да се взима под внимание само $\ddot{\mathbf{p}}$. Посоката на **B** се дава от вектора $\mathbf{p}\times\mathbf{r}$, перпендикулярен и към радиуса **r**, и към ускорението (фиг. 21-4). Всичко съвпада с това, което би се получило от формула (21.1′).

Сега погледнете (с това ние не сме свикнали) това, което става близо до заряда. В гл. 14-7 изведохме закона на Био и Савар за магнитното поле на токов елемент. Намерихме, че токовият елемент $\mathbf{j}dV$ прибавя допълнително в магнитното поле следния принос

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{j}\times\mathbf{r}}{r^3}\, dV. \tag{21.24}$$

Вие виждате, че тази формула по вид много прилича на първото събираемо в (21.23), ако само си спомним, че $\dot{\mathbf{p}}$ — това е ток. Но разлика все пак има. В (21.23) токът трябваше да се пресмята

в момент $(t-r/c)$, а в (21.24) това го няма. В действителност обаче за малки r (21.24) все още е приложимо, защото *второто* събираемо в (21.23) се стреми да унищожи ефекта на закъсняване от първото събираемо. Двете *заедно* при малки r довеждат до резултат, много близък до (21.24).

В това можем да се убедим по следния начин. Когато r е малко, $(t-r/c)$ не се отличава много от t и в (21.23) скобите могат да се развият в ред на Тейлор. Първият член на разложението дава

$$\dot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)=\dot{\mathbf{p}}(t)-\frac{r}{c}\ddot{\mathbf{p}}(t)+ \quad \text{и т. н.}$$

и в същия порядък по r/c

$$\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)=\ddot{\mathbf{p}}(t).$$

Ако ги съберем, членовете с $\ddot{\mathbf{p}}$ ще се унищожат и отляво ще остане *незакъсняващият* ток $\dot{\mathbf{p}}$, т. е. $\dot{\mathbf{p}}(t)$ плюс членовете от порядък $(r/c)^2$ и по-висок (например $^1/_2(r/c)^2\ddot{\mathbf{p}}$). Тези членове при достатъчно малки r (толкова малки, че за време r/c токът $\dot{\mathbf{p}}$ забележимо не се изменя) ще бъдат много малки.

Излиза, че (21.23) води до полета, много приличащи на тези, които дава теорията с моментално действие, много повече приличащи на тях, отколкото на полетата на теорията с моментално действие и със задръжка; ефектите на задържане от първи порядък се компенсират от втория член. Статичните формули са много точни, много по-точни, отколкото би могло да ви се стори. Разбира се, компенсацията се чувствува само близо до заряда. За далечните точки тези поправки вече нищо не спасяват, защото закъсняването по време води до много големи ефекти и в крайна сметка до важния член $1/r$ — до ефекта на излъчване.

Пред нас все още стои задачата за пресмятане на електричното поле и доказателството на това, че то съвпада с (21.1′). Наистина вече се чувствува, че на големи разстояния отговорът ще се получи такъв, какъвто трябва. Ние знаем, че далеч от източниците, където възниква разпространяваща се вълна, $\mathbf{E}$ е перпендикулярно на $\mathbf{B}$ (и на $\mathbf{r}$) както на фиг. 21-4 и че $c\mathbf{B}=\mathbf{E}$. Значи $\mathbf{E}$ е пропорционално на ускорението $\ddot{\mathbf{p}}$, както се и предсказваше от формула (21.1′).

За да получим електричното поле на всички възможни разстояния, трябва да намерим електростатичния потенциал. Когато смятахме интеграла на токовете за $\mathbf{A}$, желаейки да получим (21.18), направихме приближение: ние пренебрегнахме едва забележимото изменение на r в закъсняващите членове. За електростатичния потенциал това не бива да се прави, защото тогава у нас би се получило $1/r$, умножено с интеграла от плътността на заряда, т. е. с константа. Такова приближение е прекалено грубо. Трябва да отидем към по-висок порядък. Вместо да се заплитаме в тези преки пресмятания на приближения от по-висок порядък може да се постъпи иначе — да се определи скаларният потенциал от равенството (21.6), като използуваме вече намерената стойност на векторния потенциал. Дивергенцията на $\mathbf{A}$ в този случай е равна просто на $\partial A_z/\partial z$, тъй като A_x и A_y са тъждествено равни на нула. Като диференцираме точно така, както се правеше това по-горе при изчисляването на $\mathbf{B}$, получаваме

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\dot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\dot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[-\frac{z\dot{p}(t-r/c)}{r^3}-\frac{z\ddot{p}(t-r/c)}{cr^2}\right].$$

Или във векторни означения

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{[\dot{\mathbf{p}}+(r/c)\ddot{\mathbf{p}}]_{t-r/c}\cdot\mathbf{r}}{r^3}.$$

От равенството (21.6) се получава уравнение за φ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{[\dot{\mathbf{p}} + (r/c)\,\ddot{\mathbf{p}}]_{t-r/c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

Интегрирането по t просто премахва по една точка над всички $\mathbf{p}$:

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{[\mathbf{p} + (r/c)\,\dot{\mathbf{p}}]_{t-r/c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \tag{21.25}$$

(Интеграционната константа би отговаряла на някакво наложено статично поле, което, разбира се, може да съществува, но ние считаме, че избраният от нас трептящ дипол няма статично поле.)

Сега ние можем от

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

да намерим електричното поле $\mathbf{E}$. След уморителни (макар и преки) пресмятания [при това трябва да се помни, че $\mathbf{p}(t-r/c)$ и неговите производни по времето зависят от x, y и z чрез закъснението r/c] ние получаваме

$$\mathbf{E}(r, t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\mathbf{p}^* - 3\frac{(\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{c^2}\left\{\ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \mathbf{r}\right\} \times \mathbf{r}\right], \tag{21.26}$$

където

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c}\,\dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right). \tag{21.27}$$

Това изглежда твърде сложно, но се интерпретира просто. Векторът $\mathbf{p}^*$ е диполният момент със закъснението и с „поправката“ за закъснението, така че двата члена с $\mathbf{p}^*$ в (21.26) при малки r дават просто статичното поле на дипола [виж гл. 6, израз (6.14)]. Когато r е голямо, членът с $\ddot{\mathbf{p}}$ преобладава над останалите и електричното поле е пропорционално на ускорението на зарядите в посока, перпендикулярна на $\mathbf{r}$ и всъщност е насочено по проекцията на $\ddot{\mathbf{p}}$ върху равнина, перпендикулярна на $\mathbf{r}$.

Този резултат се съгласува с това, което бихме получили, като използуваме формула (21.1′). Разбира се, тази формула е по-обща; тя е приложима за всякакво движение, а не само за малко забележими движения, за които закъсняването r/c в границите на целия източник може да се счита постоянно [както (21.26)]. Във всеки случай сега ние укрепихме със стълбове цялото наше предишно изложение на свойствата на светлината с изключение само на някои въпроси от гл. 34 (т. I), които са свързани с последната част на израза (21.26). Ние можем сега да преминем към получаването на полето на бързодвижещи се заряди. Това ще ни доведе до релативистките ефекти [гл. 34 (т. I)].

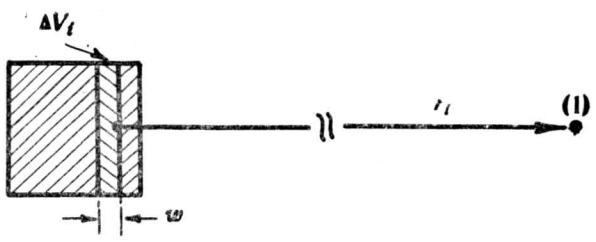
21-5. Потенциали на движещ се заряд; общо решение на Ленар и Вихерт

В предишния параграф ние направихме опростяване при изчисляването на интеграла за $\mathbf{A}$, като разглеждахме само малки скорости. Но при това вървяхме по път, по който лесно може да се стигне и до нови изводи. Затова сега отново ще предприемем пресмятане на потенциалите на точков заряд, който се движи вече както му се иска (даже с релативистка скорост). Щом получим този резултат, в ръцете ни ще се окажат електромагнитните свойства на електричните заряди в цялата им пълнота. Даже формулата (21.1) ще може лесно да се получи, само като изчислим необходимите производни. На края ще ни се удаде да доведем докрай нашия разказ. И така, запасете се с търпение.

Ще се опитаме да пресметнем в точка (x_1, y_1, z_1) скаларния



Фиг. 21-5. „Точков“ заряд (разглеждан като малко разпределение на заряди във форма на куб), който се движи със скорост v към точка (*1*)



Фиг. 21-6. Елементарният обем ΔV_i, използуван за изчисляване на потенциала

потенциал $\varphi(1)$, създаван от *точков* заряд (като електрона), който се движи по какъвто искаме начин. Под „точков“ заряд се разбира много малко заредено топче, толкова малко, колкото само можем да си представим, с плътност на заряда $\rho(x, y, z)$. Потенциалът φ може да се намери от (21.15)

$$\varphi(1,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(2,t-r_{12}/c)}{r_{12}}\,dV_2. \qquad (21.28),$$

На пръв поглед изглежда (и почти всички така и ще помислят), че отговорът се състои в това, че интегралът от ρ по такъв „точков“ заряд е равен просто на общия заряд q, т. е. че

$$\varphi(1,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'_{12}} \quad \text{(невярно)}.$$

С r'_{12} тук е означен радиус-векторът от заряда в точка (*2*) към точка (*1*), измерен в по-ранен момент $(t-r_{12}/c)$. Тази формула е грешна.

Правилният отговор е

$$\varphi(1,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'_n}\frac{1}{1-v_{r'}/c}, \qquad (21.29)$$

където $v_{r'}$ е компонентата на скоростта на заряда, успоредна на r'_{12}, т. е. насочена към точка (*1*). Сега аз ще обясня защо това е така. За да бъде по-лесно да се следят моите доводи, аз отначало ще направя пресмятане за „точков“ заряд във формата на малко заредено кубче, което се движи към точка (*1*) със скорост v (фиг. 21-5). Страната на куба ще бъде a, която нека бъде много, много по-малка от r_{12} [разстоянието от центъра на заряда до точка (*1*)].

За да оценим големината на интеграла (21.28), ще се върнем към основното определение: ще го запишем във вид на сума

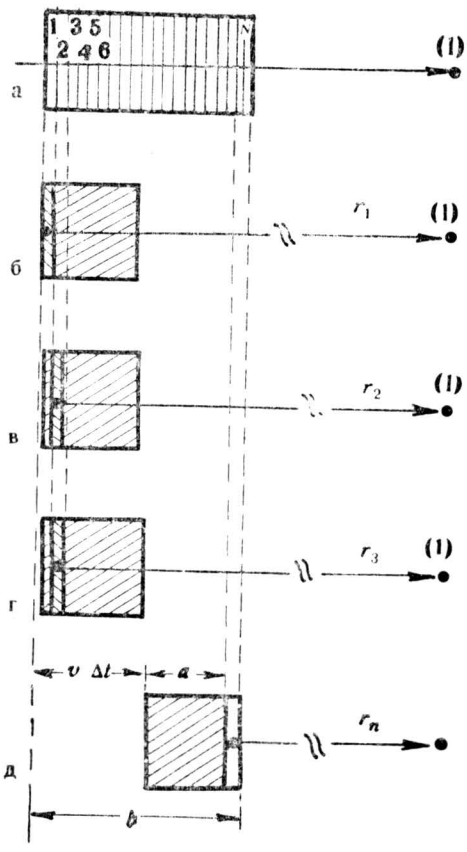
$$\sum_i\frac{\rho_i\,\Delta V_i}{r_i}, \qquad (21.30)$$

където r_i е разстоянието от точка (*1*) до i-тия елемент на обема ΔV_i, а ρ_i — плътността на заряда в ΔV_i в момент $t_i=(t-r_i/c)$. Понеже всички $r_i \gg a$, ще бъде удобно да изберем всички ΔV_i във вид на тънки правоъгълни резенчета, перпендикулярни на r_{12} (фиг. 21-6).

Да предположим, че сме започнали с това, че сме взели елементите на обема ΔV_i с някаква дебелина w, много по-малка от a

Отделните елементи на обема ще изглеждат така, както е показано на фиг. 21-7, *а*. Нарисувани са много повече, отколкото трябват, за да се закрие целият заряд. Самият заряд *не е показан* по твърде съществена причина. Къде трябва да го нарисуваме? Нали за всеки елемент на обема ΔV_i трябва да вземем ρ в неговия момент $t_i=(t-r_i/c)$. Но тъй като зарядът *се движи, за всеки елемент на обема* ΔV_i *той ще бъде на друго място!*

Ще започнем например с елемента от обема *1* на фиг. 21-7 *а*, избран така, че в момент $t_1=(t-r_1/c)$ „задната“ стена на заряда



Фиг. 21-7. Интегриране на $\rho(t-r'/c)dV$ за заряд, който се движи

да съвпадне с ΔV_1 (фиг. 21-7, *б*). Тогава, като изчисляваме $\rho_2 \Delta V_2$, трябва да вземем положението на заряда в малко по-късен момент $t_2=(t-r_2/c)$ и зарядът в това време ще се премести в положението, показано на фиг. 21-7, *в*. Също така ще бъде с ΔV_3, ΔV_4 и т. н. Ето сега може да се пресметне сумата.

Дебелината на всеки ΔV_i е равна на w, а обемът — на wa^2. Затова всеки елемент на обема, който се наслагва на разпределението на заряда, съдържа в себе си заряд $wa^2\rho$, където ρ е плътността на заряда вътре в куба (ние я считаме еднородна). Когато разстоянието от заряда до точка (1) е голямо, може всички r_i в знаменателите да положим равни на някаква средна стойност, например закъснялото положение r' на центъра на заряда. Сумата (21.30) се превръща в

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\rho w a^2}{r'},$$

където ΔV_N е онзи последен елемент ΔV_i, който още се наслагва върху разпределението на зарядите (виж фиг. 21-7, *д*). По този начин сумата е равна на

$$N\frac{\rho w a^2}{r'} = \frac{\rho a^3}{r'}\left(\frac{Nw}{a}\right).$$

Но ρa^3 е просто общият заряд q, а Nw — дължината b, показана на фиг. 21-7, *д*. Получава се

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'}\left(\frac{b}{a}\right).$$

На какво пък е равно b? Това е дължината на куба от заряди, увеличена с разстоянието, което е изминато от заряда за времето от $t_1=(t-r_1/c)$ до $t_N=(t-r_N/c)$. Това е разстоянието, изминато от заряда за време

$$\Delta t = t_N - t_1 = \frac{r_1 - r_N}{c} = \frac{b}{c}.$$

Тъй като скоростта на заряда е равна на v, изминатото разстояние е $v\Delta t = vb/c$. Но дължината b е самото това разстояние плюс a

$$b = a + \frac{v}{c} b.$$

Оттук

$$b = \frac{a}{1-(v/c)}.$$

Тук, разбира се, под v се разбира скоростта в „закъсняващия“ момент $t'=(t-r'/c)$; това може да се покаже, като запишем $[1-(v/c)]_{зак}$; тогава уравнението за потенциала (21.23) приема вида

$$\varphi(1,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'} \frac{1}{[1-(v/c)]_{зак}}.$$

Това се съгласува с онова, което беше предположено в (21.29). Появи се корекционен множител. Той се появи затова защото в това време, когато нашият интеграл „преминава над заряда“, самият заряд се движи. Когато зарядът се движи към точка (*1*), неговият принос в интеграла се увеличава b/a пъти. Затова правилната стойност на интеграла е равна на q/r', умножено с b/a, т. е. с $1/[1-(v/c)]_{зак}$.

Ако скоростта на заряда е насочена не към точката на наблюдение (*1*), лесно е да се види, че е важна само *съставящата* на скоростта му в посока към точка (*1*). Ако означим тази съставяща на скоростта с v_r, корекционният множител е $1/[1-(v_r/c)]_{зак}$. Освен това направеният от нас анализ в същата степен подхожда за разпределение на заряда от *всякаква* форма (това не е задължително да бъде куб). На края понеже „размерът“ a на заряда не

влезе в окончателния резултат, същият резултат ще се получи, ако зарядът се свие до каквито и да е размери, дори до точка. Общият резултат се състои в това, че скаларният потенциал на точков заряд, който се движи с произволна скорост, е равен на

$$\varphi(t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'[1-(v_r/c)]_{\text{зак}}}\,. \tag{21.32}$$

Това уравнение често пишат в еквивалентния му вид

$$\varphi(1,t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0[r-(\mathbf{v}.\mathbf{r}/c)]_{\text{зак}}}\,, \tag{21.33}$$

където r е векторът, който съединява заряда с онази точка (1), в която се изчислява потенциалът φ, а всички величини в скобата трябва да се изчисляват в „закъсняващия" момент на времето $t'=(t-r'/c)$.

Същото се получава и тогава, когато по (21.16) изчисляват $\mathbf{A}$ за точков заряд. Плътността на тока е равна на $\rho\mathbf{v}$, а интегралът от ρ е същият, както и при φ. Векторният потенциал е равен на

$$\mathbf{A}(1,t)=\frac{q\mathbf{v}}{4\pi\varepsilon_0 c^2[r-(\mathbf{v}.\mathbf{r}/c)]_{\text{зак}}}\,. \tag{21.34}$$

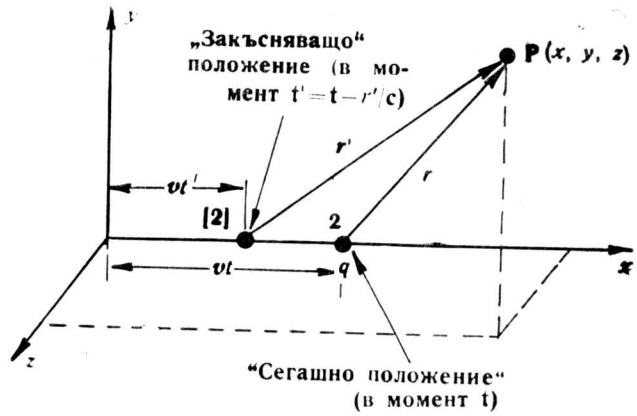
Потенциалите на точков заряд в тази форма са били за пръв път получени от Ленар и Вихерт. Така ги и наричат: *потенциали на Ленар—Вихерт.*

За да затворим кръга и се върнем към формула (21.1), трябва само да пресметнем $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ от тези потенциали (с помощта на $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$ и $\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\partial\mathbf{A}/\partial t$). Сега остава само аритметика. Впрочем тази аритметика е доста забъркана, така че ние няма да даваме тук подробности от пресмятането. Ще се наложи да повярвате на думите ми, че формула (21.1) е еквивалентна на изведените от нас потенциали на Ленар—Вихерт.[1]

21-6. Потенциали на заряд, който се движи с постоянна скорост; формула на Лоренц

Да приложим сега потенциалите на Ленар—Вихерт за случая на заряд, който се движи по права линия с постоянна скорост и да изчислим полето на този заряд. По-късно ще повторим този извод, като използуваме вече принципа на относителността. Ние знаем големината на потенциалите в системата, в която зарядът е в покой. Когато зарядът се движи, всичко се получава с просто релативистко преобразуване от едната система в другата. Но теорията на относителността води своето начало от теорията на електричеството и магнетизма. Формулите за трансформациите на Лоренц [(виж гл. 15 (т. I)] са открития, направени от Лоренц при изследване на уравненията на електричеството и магнетизма. И за да разбирате откъде е започнало всичко, аз искам да ви покажа, че уравненията на Максвел действително довеждат до трансформациите на Лоренц. Аз ще започна с изчисляването на потенциала на равномерно движещ се заряд направо от електродинамиката, от уравненията на Максвел. Ние вече показахме, че уравненията на Максвел водят до потенциала, получен в предишния параграф. Излиза, че като използуваме тези потенциали, ние използуваме всъщност теорията на Максвел.

[1] Ако имате достатъчно време и не съжалявате за хартията, опитайте се да направите това самостоятелно. Ето ви два съвета: първо, не забравяйте, че производните на r' са твърде заплетени, нали са функции от t'! Второ, не се опитвайте да *изведете* формула (21.1); по-добре направете в нея всички диференцирания и след това съпоставете полученото от вас с израза за $\mathbf{E}$, получен от потенциалите (21.33) и (21.34).



Фиг. 21-8. Определяне на потенциала в точка P на заряд, който се движи равномерно по оста x

Нека има заряд, който се движи по оста x със скорост v (фиг. 21-8). Интересуват ни потенциалите в точка $P\,(x, y, z)$. Ако $t=0$ е моментът, в който зарядът преминава през началото на координатната система, в момент t зарядът ще бъде в точка $x=vt$, $y=z=0$. На нас ни е нужно да знаем неговото положение, като се вземе пред вид закъснението, т. е. положението в момент

$$t'=t-\frac{r'}{c}, \tag{21.35}$$

където r' е разстоянието от заряда до точката P в този *закъсняващ момент*. В този по-ранен момент t' зарядът е бил в $x=vt'$, така че

$$r'=\sqrt{(x-vt')^2+y^2+z^2}. \tag{21.36}$$

За да намерим r' или t', това уравнение трябва да се съпостави с (21.35). Ще изключим отначало r', като решим (21.35) относно r' и заместим в (21.36). Като повдигнем след това двете части на) квадрат, ще получим

$$c^2\,(t-t')^2=(x-vt')^2+y^2+z^2,$$

т. е. квадратно уравнение относно t'. Като разкрием скобите и разположим членовете по степените t', ще получим

$$(v^2-c^2)\,t'^2-2\,(xv-c^2t)\,t'+x^2+y^2+z^2-(ct)^2=0.$$

Оттук ще намерим

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)t'=t-\frac{vx}{c^2}-\frac{1}{c}\sqrt{(x-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(y^2+z^2\right)}. \tag{21.37}$$

За да получим r', трябва това t' да заместим в

$$r'=c\,(t-t').$$

Сега вече можем да намерим φ от израза (21.33), който има вида

$$\varphi\,(x, y, z, t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r'-(\mathbf{v}.\mathbf{r}'/c)} \tag{21.38}$$

(пред вид на това, че v е постоянно).

Съставящата на $\mathbf{v}$ в посока $\mathbf{r}'$ е равна на $v\,(x-vt')/r'$, така че $\mathbf{v}.\mathbf{r}'$ е просто $v\,(x-vt')$, а целият знаменател е равен на

$$c\,(t-t')-\frac{v}{c}\,(x-vt')=c\left[t-\frac{vx}{c^2}-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)t'\right].$$

Като заместим $(1-v^2/c^2)\,t'$ от (21.37), получаваме

$$\varphi\,(x, y, z, t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{(x-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(y^2+z^2\right)}}.$$

Това уравнение става по-разбираемо, ако го препишем във вида

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{\left[\left(\frac{x-vt}{1-v^2/c^2}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}}. \qquad (21.39)$$

Векторният потенциал **A** е също такъв израз, но с добавъчен множител $\mathbf{v}/c^2$:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\varphi.$$

В израза (21.39) вие ясно можете да видите началото на трансформацията на Лоренц. Ако зарядът се намираше в началото на координатите в своята собствена система на покой, неговият потенциал би имал вида

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{[x^2+y^2+z^2]^{1/2}}.$$

Ние гледаме на него от движеща се координатна система и ни се струва, че координатите трябва да се трансформират с помощта на формулите

$$x \longrightarrow \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$y \longrightarrow y,$$

$$z \longrightarrow z.$$

Това е трансформацията на Лоренц. Лоренц го е извел по същия начин, който ползувахме и ние.

Но какво може да се каже за допълнителния множител $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, който се появи пред дробта в (21.39)? И освен това как се появява векторният потенциал **A**, ако в системата на покой на частицата той навсякъде е равен на нула? Ние скоро ще покажем, че **A** и φ *заедно* съставят четиривектор, подобно на импулса **p** и пълната енергия U на частицата. Добавката $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ в (21.39) е същият множител, който се появява винаги, когато се трансформират компонентите на четиривектор, тъй както плътността на заряда ρ се преобразува в $\rho/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Собствено от формулите (21.4) и (21.5) е почти очевидно, че **A** и φ са компоненти на един четиривектор, защото в гл. 13 вече беше показано, че **j** и ρ са компоненти на четиривектор.

По-късно ние по-подробно ще разгледаме относителността в електродинамиката; тук ние искахме само да покажем колко естествено уравненията на Максвел довеждат до трансформацията на Лоренц. Затова не трябва да се учудваме, когато узнаем, че законите на електричеството и магнетизма са вече напълно приложими и за теорията на относителността на Айнщайн. Тях не е необходимо даже особено да ги пригаждаме, когато това се налагаше да правим с нютоновата механика.

22

Вериги с променлив ток

22-1. Импеданси

22-2. Генератори

22-3. Вериги от идеални елементи; закони на Кирхоф

22-4. Еквивалентни контури

22-5. Енергия

22-6. Верига — стълба

22-7. Филтри

22-8. Други елементи на веригата

Да се повтори:
гл. 22 (т. I) „Алгебра“;
гл. 23 (т. I) „Резонанс“;
гл. 25 (т. I) „Линейни системи и обзов“

22-1. Импеданси

Нашите основни усилия при четенето на тези лекции бяха насочени към получаване на пълните уравнения на Максвел. В двете предишни глави ние обсъдихме следствията на тези уравнения Изясни се, че те съдържат обяснение на всички статични явления. които ние изучавахме по-рано, и явленията на електромагнитните вълни и светлината — въпросът, който подробно се изучаваше в самото начало на нашия курс. Уравненията на Максвел дават и едното, и другото в зависимост от това, къде се изчисляват тези полета: в близост до токовете и зарядите или пък далеч от тях. Има и промеждутъчна област, но за нея нищо интересно не може да се каже; там не стават никакви особени явления.

Но в електромагнетизма остават още няколко въпроса, които си струва да се осветлят. Трябва да се обсъди въпросът за връзката между относителността и уравненията на Максвел, т. е. да се изясни какво ще стане, ако към уравненията на Максвел погледнем от движеща се координатна система. Важен е още и въпросът за запазването на енергията в електромагнитните системи. Освен това съществува обширната област на електромагнитните свойства на материалите; досега ние разглеждахме само електромагнитните полета в празното пространство, ако не се смята изучаването на свойствата на диелектриците. Пък и при изучаването на светлината все още останаха няколко въпроса, които би ни се искало да разгледаме още веднъж от гледна точка на уравненията на полето.

В частност би трябвало още един път да се върнем към въпроса за показателя на пречупване (особено в плътните вещества). Накрая интересни са явленията, свързани с вълните, които са затворени вътре в ограничена област на пространството. Ние накратко засегнахме този проблем, когато изучавахме звуковите вълни. Но уравненията на Максвел също водят до решения, които представляват вълни на електричните и магнитните полета, затворени в известен обем. В една от следващите глави ние ще разгледаме този въпрос, който има важни технически приложения. И за да се приближим до него, ще започнем с това, че ще изложим свойствата на електричните вериги при ниски честоти. След това ще можем да сравним такива системи, когато към уравненията на Максвел е приложимо почти статично приближение, и системи, в които преобладават високочестотни ефекти.

И така, да благоволим да слезнем от величествените и труднодостъпни височини на няколкото последни глави и да обърнем своя поглед към сравнително малката задача — задачата за електричните вериги. Впрочем ние ще се убедим в това, че даже толкова земни дела се оказват твърде забъркани, ако се вникне в тях достатъчно дълбоко.

В гл. 23 и 25 (т. I) ние вече обсъждахме някои свойства на електричните вериги (контури). Сега ще повторим част от изложения там материал, но по-подробно. Както преди ние ще имаме работа с линейни системи и с напрежения и токове, които се изменят синусоидално; затова можем да представим всички напрежения и токове във вид на комплексни числа, като се ползуваме от експоненциалните означения, въведени в гл. 22 (т. I). Така изменящото се във времето напрежение $V(t)$ ще се записва във вида

$$V(t)=\hat{V}e^{i\omega t}, \tag{22.1}$$

където $\hat{V}$ е комплексно число, не зависещо от t. При това се подразбира, че истинското променливо във времето напрежение $V(t)$ се представя *от реалната част* на комплексната функция в дясната част на уравнението.

По подобен начин и всички други изменящи се във времето величини ще се считат изменящи се синусоидално със същата честота ω. Ние ще записваме

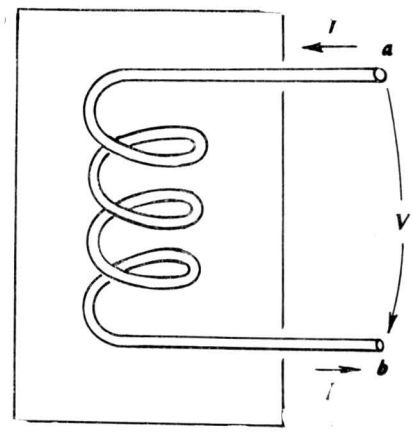
$$\begin{aligned} I&=\hat{I}\,e^{i\omega t} \quad \text{(ток)},\\ \mathcal{E}&=\hat{\mathcal{E}}\,e^{i\omega t} \quad \text{(електродвижещо напрежение)},\\ \mathbf{E}&=\hat{\mathbf{E}}\,e^{i\omega t} \quad \text{(електрично поле)} \end{aligned} \tag{22.2}$$

и т. н.

В повечето случаи ние ще пишем уравненията, като се ползуваме от означенията $V, I, \mathcal{E}, \ldots$ (вместо $\hat{V}, \hat{I}, \hat{\mathcal{E}}, \ldots$), като при това помним, че те се изменят с времето винаги така, както в (22.2).

В нашите предишни разсъждения за електричните вериги смятахме, че такива неща, като индуктивност, капацитет и съпротивление са ви познати. Сега малко по-подробно ще обясним какво се разбира под тези идеализирани елементи на схемите. Ще започнем с индуктивността.

Индуктивност — това е навит в няколко реда проводник във форма на бобина, краищата на която са изведени към клемите на някакво разстояние от бобината (фиг. 22-1). Да предположим, че магнитното поле, което се създава от токовете в бобината, не се разпространява много по цялото пространство и не въздействува на другите части на веригата. Обикновено това постигат, като придадат на бобината формата на питка или като я намотаят на подходяща желязна сърцевина (това свива магнитното поле); може още бобината да се постави в метална кутия: схематично това е показано на фиг. 22-1. Предполага се, че във външната област на клемите a и b магнитното поле може да се пренебрегне. Освен това ние ще считаме, че електричното съпротивление на проводниците в бобината може да не се взема пред вид. И накрая предполагаме, че може да се пренебрегне и електричният заряд, който възниква на повърхността на проводника, когато се създават електрични полета.



Фиг.22-1. Индуктивност

С отчитането на всички тези приближения възниква това, което наричат „идеална“ индуктивност. (По-късно ще се върнем към този пункт и ще поговорим за това, какво става в реалните индуктивности.) За идеалната индуктивност казват, че напрежението на нейните краища е равно на $L\,(dI/dt)$. Защо? Когато през индуктивността тече ток, в бобината се създава магнитно поле, пропорционално на силата на тока. Ако токът се изменя във времето и магнитното поле се изменя. Изобщо казано, ротацията на $\mathbf{E}$ е равна на $-d\mathbf{B}/dt$; може да се каже и иначе: контурният интеграл от $\mathbf{E}$ по всеки затворен път е равен (с минус) на бързината на изменението на потока на $\mathbf{B}$ през контура. Представете си сега следния път: той започва от клема a и преминава покрай бобината (като остава през цялото време вътре в проводника) към клема b; след това се връща от клема b към клема a по въздуха в пространството извън бобината. Контурният интеграл от $\mathbf{E}$ по този затворен път може да се запише като сума от две части

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=\underbrace{\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}}_{\text{по проводника}}+\underbrace{\int_b^a \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}}_{\text{извън}}. \tag{22.3}$$

Както вече изяснихме по-рано, вътре в идеален проводник електрични полета не може да има. (Най-малките полета биха предизвикали безкрайно големи токове.) Затова интегралът от клемата a

до b през бобината е равен на нула. Целият принос в контурния интеграл от **E** се пада на пътя извън индуктивността, от клема b към клема a. Тъй като беше предположено, че в пространството вън от „кутийката“ няма никакви магнитни полета, тази част от интеграла не зависи от избора на пътя. Значи може да се определи понятието потенциал за двете клеми. Разликата на тези два потенциала е това, което наричат напрежение V, така че

$$V = -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

Пълният интеграл по контура е онова, което по-рано наричахме електродвижещо напрежение $\mathcal{E}$. Той естествено е равен на скоростта на изменение на магнитното поле в бобината. Ние вече знаем, че това електродвижещо напрежение е равно (със знак минус) на бързината на изменението на тока, така че

$$V = -\mathcal{E} = L\frac{dI}{dt},$$

където L е индуктивността на бобината. Понеже $dI/dt = i\omega I$, ние имаме

$$V = i\omega L I. \tag{22.4}$$

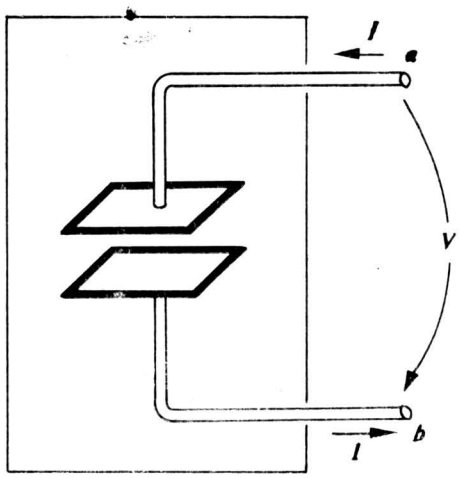
Този начин, с който описахме идеалната индуктивност, илюстрира общия подход към другите идеални елементи на веригата, които обикновено наричат „концентрирани“ елементи. Свойствата на елемента изцяло се описват на езика на токовете и напреженията, които възникват на неговите клеми. Като се използуват подходящи приближения, може да се игнорира огромната сложност на тези полета, които възникват вътре в обекта. Това, което става вътре, се отделя от това, което става отвън.

За всички елементи на веригата ние смятаме сега да намерим съотношения, подобни на формула (22.4). В нея напрежението е пропорционално на силата на тока с константа на пропорционалност, която, изобщо казано, е комплексно число. Този комплексен коефициент на пропорционалност се нарича *импеданс* и са свикнали да го означават със z (не трябва да се бърка с координатата z). В общия случай това е функция на честотата ω. Значи за всеки концентриран елемент ще напишем

$$\frac{V}{I} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = z. \tag{22.5}$$

За индуктивността имаме

$$z\ (\text{на индуктивността}) = z_L = i\omega L. \tag{22.6}$$



Фиг. 22-2. Капацитет (или кондензатор)

Да разгледаме от тази гледна точка капацитета[1]. Той се състои от две проводящи пластини (плочи), от които отиват към нужните клеми два проводника. Пластините могат да бъдат с всякаква форма и често се отделят една от друга с някакъв диелектрик. Това схематично е показано на фиг. 22-2. Ние отново правим няколко опростяващи предположения. Считаме, че пластините и проводниците са идеално проводящи, а изолацията между пластините е също идеална, така че през нея не могат да преминат никакви заряди от пластина към пластина. След това предполагаме, че проводниците се намират близко един до друг, но затова пък са значително отдалечени от всички останали проводници, така че всички линии на полето, като излизат от едната пластина, непременно завършват върху другата. И тогава зарядите на пла-

[1] Някои казват, че сме длъжни да наричаме *предметите* с думите „бобина“ и „кондензатор“, а техните *свойства* — съответно „индуктивност“ и „капацитет“. Но аз предпочитам да се ползувам от думите, които чувам в лабораториите, където почти винаги и за физичната бобина, и за нейната самоиндукция L казват „индуктивност“. Точно така предпочитат да казват и „капацитет“, „съпротивление“, въпреки че често може да се чуе и думата „кондензатор“.

стините са винаги равни и противоположни един на друг, като по големина превъзхождат много големината на заряда върху повърхността на проводниците. И на края ние смятаме, че близо до кондензатора няма магнитни полета.

Да разгледаме сега контурния интеграл от **E** по затворена крива, която започва от клема a, минава в проводника до горната плоча на кондензатора, прескача междината между пластините, минава от долната плоча на клема b и се връща към клема a по пространството извън кондензатора. Понеже магнитно поле няма, контурният интеграл от **E** по този затворен път е равен на нула. Интегралът може да се раздели на три части

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} + \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} + \int_b^a \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}. \qquad (22.7)$$

по проводниците между плочите извън

Интегралът по проводниците е равен на нула, защото вътре в идеален проводник не съществува електрично поле. Интегралът от клема b до a извън кондензатора е равен на разликата на потенциалите със знак минус. Тъй като ние считаме, че плочите са някак си изолирани от останалия свят, общият заряд на двете плочи трябва да бъде равен на нула; и ако на горната плоча има заряд Q, на долната се намира заряд $-Q$. По-рано ние вече видяхме, че ако зарядите на два проводника са равни и противоположни, $+Q$ и $-Q$, потенциалната разлика между тях е Q/C, където C е капацитетът на тези проводници. От (22.7) следва, че потенциалната разлика между клемите a и b е равна на потенциалната разлика между плочите. Затова

$$V = \frac{Q}{C}.$$

Електричният ток I, който се втича в кондензатора през контакта a (и го напуска през контакта b), е равен на dQ/dt — бързината на изменението на електричния заряд на плочите. Като запишем dV/dt във вида $i\omega V$, можем да дадем връзката между тока и напрежението за кондензатора в следния вид

$$i\omega V = \frac{I}{C}$$

или

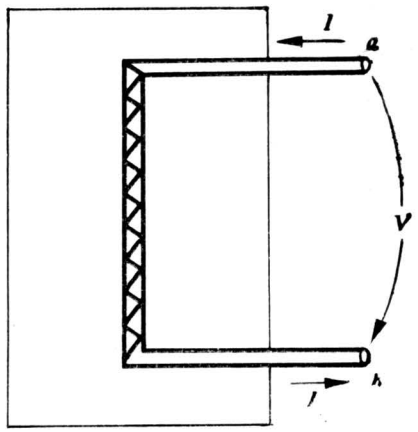
$$V = \frac{I}{i\omega C}. \qquad (22.8)$$

Тогава импедансът z на кондензатора е равен на

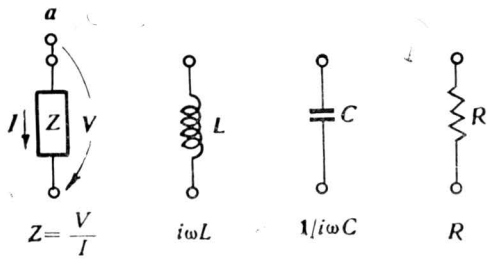
$$z_{(\text{на кондензатора})} = z_C = \frac{1}{i\omega C}. \qquad (22.9)$$

Третият елемент, който трябва да разгледаме, е съпротивлението. Но тъй като засега още не сме разглеждали електричните свойства на реалните вещества, ние не сме готови да обсъждаме това, което става в реалния проводник. Ще се наложи просто да приемем като факт, че вътре в реалните вещества могат да съществуват електрични полета, че тези полета пораждат поток на електричния заряд (т. е. ток) и че този ток е пропорционален на интеграла на електричното поле от единия край на проводника до другия. След това трябва да си представим идеално съпротивление, направено така, както е показано на фиг. 22-3. Две жици, които ние считаме идеални проводници, се простират от клемите a и b до двата края на блокче, направено от материал, който оказва съпротивление на тока. Като следваме нашата обикновена линия на разсъждения, ние идваме до извода, че потенциалната разлика между клемите a и b е равна на контурния интеграл от електричното поле по пътя, който минава през блокчето. Оттук следва, че токът I през съпротивлението е пропорционален на напрежението V на клемите

$$I = \frac{V}{R},$$



Фиг. 22-3. Съпротивление



Фиг. 22.4. Идеални съсредоточени елементи на веригата (пасивни)

където R се нарича съпротивление. По-късно ние ще се убедим, че връзката между силата на тока I и напрежението за реалните проводящи материали само приближено може да се счита линейна. Ще се убедим също така, че тази приближена пропорционалност може да се счита независеща от честотата на изменение на тока и напрежението само тогава, когато честотата не е твърде висока. И тогава за променливите токове напрежението на клемите ще е във фаза с тока, а това означава, че съпротивлението е реално число

$$z=z_R=R. \tag{22.10}$$

Резултатите на нашите разсъждения за трите концентрирани елемента на веригата — индуктивността, капацитета, съпротивлението — са сумирани на фиг. 22-4. На тази рисунка, както и на предишните, напрежението е отбелязано със стрелка, насочена от едната клема към другата. Ако напрежението е „положително“, т. е. ако на клемата a потенциалът е *по-висок*, отколкото на клемата b, стрелката показва посоката на „падането на напрежението“.

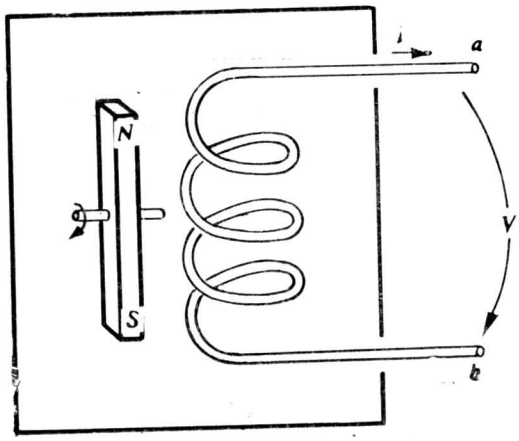
Макар ние сега да говорим за променливи токове, тук, разбира се, може да се включи и особеният случай на веригите на постоянен ток, ако се мине към границата, когато честотата ω се стреми към нула. При нулева честота, т. е. при прав ток, импедансът на индуктивността се стреми към нула; между клемите настъпва късо съединение. Импедансът на капацитета пък при прав ток се стреми към безкрайност; веригата между клемите се прекъсва. При правите токове е необходимо да се взимат под внимание само обикновените съпротивления: те не зависят от честотата.

В описаните досега елементи на веригата токът и напрежението бяха пропорционални един на друг. Ако едното е равно на нула и другото е равно на нула. Обикновено ние мислим на такъв език: приложеното напрежение е „отговорно“ за тока или токът „създава“ напрежение на клемите. Елементът сякаш в някакъв смисъл „отговаря“ на „приложените“ външни усилия. По тази причина такива елементи се наричат *пасивни*. С това можем да ги противопоставим на активните елементи, такива, като генераторите, които ще разгледаме в следващия параграф и които представляват *източници* на трептенията на токовете или напреженията във веригата.

22-2. Генератори

Да поговорим сега за активния елемент на веригата, за източника и на токовете, и на напреженията в нея, т. е. за *генератора*

Нека имаме бобина, подобна на бобината на самоиндуктивността, само че навивките ѝ са малко и на магнитното поле на собствения ѝ ток може да не се обръща внимание. Тази бобина обаче се намира в променливо магнитно поле, подобно на това, което създава въртящ се магнит (фиг. 22-5). (Ние вече видяхме по-рано, че такова въртящо се магнитно поле може също така да се създаде с помощта на подходяща съвокупност от бобини с променливи токове.) Да направим отново няколко опростяващи допускания. Това са все същите допускания, които правехме, когато говорехме за индуктивността. В частност ние предполагаме, че изменящото се магнитно поле е ограничено само в малка област близо до бобината и извън границите на генератора, в пространството между клемите, то не се чувствува.



Фиг. 22-5. Генератор, който се състои от закрепена бобина и въртящо се магнитно поле

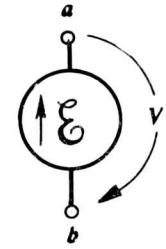
Като повтаряме точно същия анализ, както и за индуктивността, ще разгледаме контурния интеграл от E по затворена крива, която започва от клема a, минава по бобината до клема b и се връща към началото по пространството между клемите. Отново заключаваме, че потенциалната разлика между клемите a и b е равна на целия интеграл от E по кривата

$$V=-\oint \mathbf{E}\,.\,d\mathbf{s}.$$

Този контурен интеграл е равен на електродвижещото напрежение във веригата и затова потенциалната разлика V между изводите на генератора е също равна на скоростта на изменение на магнитния поток през бобината

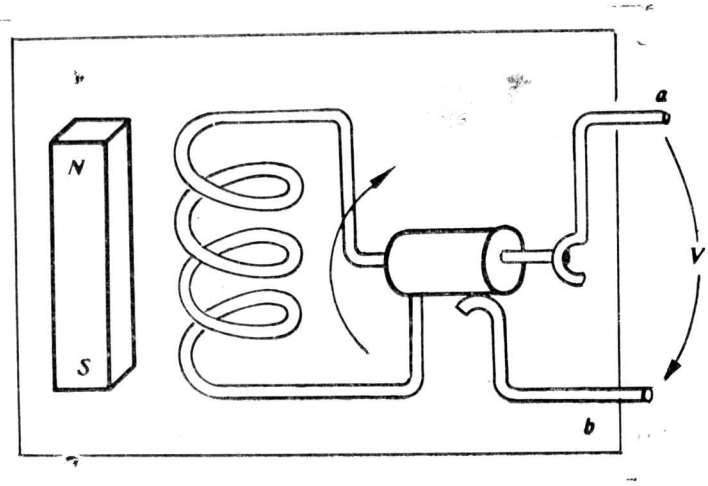
$$V=-\mathcal{E}=\frac{d}{dt}\,(\text{потока}). \tag{22.11}$$

Предполага се по-нататък, че при идеален генератор магнитният поток през бобината се определя от външните условия (такива като ъгловата скорост на въртящото се магнитно поле) и че не му влияят никак токовете, които текат през генератора. По такъв начин генераторът (най-малкото разглежданият от нас *идеален* генератор) не е импеданс. Разликата между потенциалите на неговите клеми се определя от произволно задавано електродвижещо напрежение $\mathcal{E}(t)$. Такъв идеален генератор представят със символа, показан на фиг. 22-6. Малката стрелка дава посоката на положителното електродвижещо напрежение. Положителното електродвижещо напрежение в генератора, показан на фиг. 22-6, създава напрежение $V=\mathcal{E}$ с по-висок потенциал на контакта a.



Фиг. 22-6. Означаване на идеалния генератор

Може да се направи генератор и по друг начин. Вътре той ще бъде устроен съвършено различно, но отвън на клемите той с нищо няма да се различава от току-що описания. Да си представим бобина, която се върти в *неподвижно* магнитно поле (фиг. 22-7). Ние изобразихме магнитна пръчка, за да покажем наличието на магнитно поле, но можем, разбира се, да я заменим с всеки друг източник на постоянно магнитно поле, да речем с допълнителна бобина, по която тече прав ток. Както е показано на фигурата, въртящата се бобина е свързана с външния свят чрез пълзящи контакти или „пръстени". Пак ни интересува потенциалната разлика, която се появява между клемите a и b, т. е. интеграла от електричното поле между a и b по пътя извън генератора.



Фиг. 22-7. Генератор, който се състои от бобина, която се върти в неподвижно магнитно поле

Сега в тази система вече няма изменящи се магнитни полета и на пръв поглед изглежда чудно откъде на клемите се взима напрежението. Действително нали никъде в генератора няма никакви електрични полета. Ние както обикновено предполагаме за нашите идеални елементи, че вътре в тях проводниците са направени от идеално проводящ материал; а, както вече неведнъж се повтаряше, електричното поле в идеален проводник е равно на нула. Но това не е винаги вярно. Това не е вярно тогава, когато проводникът се движи в магнитно поле. Правилното твърдение е такова: Общата *сила*, която действува на произволен заряд в идеалния проводник, трябва да бъде равна на нула. Иначе в него би възникнал безкраен ток на свободните заряди. Така че трябва да се взима сумата на електричното поле $\mathbf{E}$ и векторното произведение на скоростта на проводника $\mathbf{v}$ и магнитното поле $\mathbf{B}$;

това е пълната сила, която действува на единичния заряд и ето именно тя е винаги равна на нула

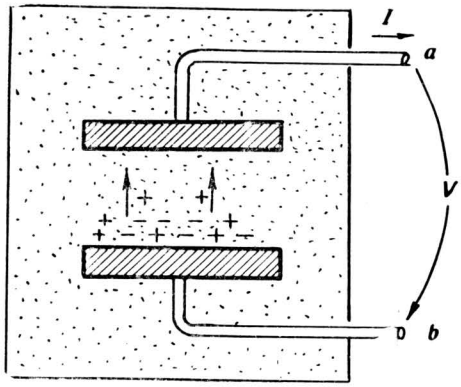
$$\mathbf{F}=\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}=0 \quad \text{(в идеалния проводник)} \tag{22.12}$$

А нашето предишно твърдение за това, че вътре в идеалните проводници няма електрични полета, е вярно само тогава когато скоростта на проводника $\mathbf{v}$ е равна на нула; в противен случай е верен изразът (22.12).

Да се върнем към нашия генератор, показан на фиг. 22-7. Сега ние виждаме, че контурният интеграл от електричното поле $\mathbf{E}$ между клемите a и b по проводящите пътища на генератора трябва да бъде равен на контурния интеграл от $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ по същия път

$$\underset{\text{в проводника}}{\int_a^b}\mathbf{E}\,.\,d\mathbf{s}=-\underset{\text{в проводника}}{\int_a^b}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\,.\,d\mathbf{s}. \tag{22.13}$$

Обаче както преди остава вярно, че контурният интеграл от $\mathbf{E}$ по затворена крива, като включим и връщането от клема b до a извън генератора, трябва да бъде равен на нула, защото изменящи се магнитни полета отсъствуват. Така че първият интеграл в (22.13) както преди е равен на V — напрежението на клемите. Оказва се, че интегралът от дясната част на (22.13) е просто равен на бързината на изменение на потока през бобината, а значи по правилото на потока е равен на електродвижещото напрежение на бобината. И пак се получава, че потенциалната разлика между клемите е равна на електродвижещото напрежение на веригата в съответствие с уравнение (22.11). Така че е все едно какъв генератор имаме: изменя ли се в него магнитното поле край неподвижната бобина, върти ли се в неподвижното магнитно поле бобината — външните свойства на генератора са едни и същи. На контактите винаги съществува напрежение V, което не зависи от тока във веригата, а се определя само от условията вътре в генератора, произволно зададени от нас.



Фиг. 22-8. Химичен елемент

Понеже ние се опитваме да разберем работата на генератора, като се основаваме на уравненията на Максвел, може да възникне въпросът за обикновения химически елемент, за батерийката на джобно фенерче. Това е също генератор, т. е. източник на напрежение, макар и да се използува само във вериги на постоянен ток. Най-просто е да анализираме елемента, показан на фиг. 22-8. Представете си две метални пластинки, потопени в някакъв химичен разтвор. Нека разтворът да съдържа положителни и отрицателни йони. Ние ще предположим още, че йоните от единия вид, да речем отрицателните, са много по-масивни от йоните, които имат противоположна полярност, така че движението им в разтвора (дифузията) става много по-бавно. На края ще допуснем, че по един или друг начин ни се е удало да получим изменение на концентрацията на разтвора от място към място, така че броят на йоните от двете полярности, например по долната пластинка, става много по-голям от концентрацията на йоните до горната пластинка. Благодарение на по-голямата подвижност положителните йони по-лесно ще проникнат в областта на ниските концентрации, така че ще се наблюдава лек излишък на положителни заряди, достигащи горната пластинка. Тя ще се зареди положително, а долната ще притежава излишък от отрицателен заряд. Колкото повече и повече заряди дифундират към горната пластинка, толкова нейният потенциал ще расте, докато възникващото между пластинките електрично поле не създаде сила, действуваща на йоните, която да компенсира тяхната излишна подвижност. Двата електрода бързо достигат потенциална разлика, характерна за вътрешното устройство на този елемент.

Като разсъждаваме също така, както правехме, когато говорехме за идеалния кондензатор, ние ще се убедим, че ако няма излишък от дифузията на йоните от някой знак, потенциалната разлика между клемите a и b е равна просто на контурния ин-

теграл от електричното поле между електродите. Разбира се, между кондензатора и такъв химичен елемент има съществена разлика. Ако за миг дадем на късо изводите на кондензатора, той ще се разреди и потенциална разлика между изводите вече няма да има. В случая пък на химически елемент ток от клемите може да се черпи непрекъснато, като при това не изменяме никак електродвижещото напрежение, докато, разбира се, реактивите в елемента не се изразходват. Известно е, че в реален елемент потенциалната разлика на клемите намалява според нарастването на черпения от него ток. Но при нашата идеализация на задачата е лесно да си представим, че имаме идеален елемент, в който напрежението на електродите не зависи от силата на тока. Тогава реалният елемент може да се разглежда като идеален, който е съединен последователно със съпротивление.

22-3. Вериги от идеални елементи; закони на Кирхоф

Както видяхме в предишния параграф, много просто е да се описват идеалните елементи на схемите, като се говори само за това, което става извън елемента. Токът и напрежението са свързани линейно. Но много сложно е да се опише това, което става наистина вътре в елемента и при това е твърде трудно да се ползува езикът на уравненията на Максвел. Представете си, че ви е необходимо да опишете точно електричните и магнитните полета в радиоприемник, който се състои от стотина съпротивления, капацитети и самоиндукции. Би било непосилна задача да се анализира такава бърканица, като се ползуваме от уравненията на Максвел. Но като правим множеството приближения, които описахме в § 2, и като преведем съществените черти от реалните елементи на схемите на езика на идеализациите, можем да анализираме електричната верига сравнително просто. Сега ще покажем как се прави това.

Нека имаме верига, която се състои от генератор и няколко импеданса, свързани помежду си така, както е показано на фиг. 22-9. Според нашите приближения в областите между отделните елементи на веригата магнитно поле няма. Затова интегралът от **E** по всяка крива, която не минава през нито един от елементите, е равен на нула. Да разгледаме кривата Г, показана с пунктирна линия на фиг. 22-9, която обикаля в кръг по веригата. Контурният интеграл от **E** по тази крива се състои от няколко части. Всяка част е интеграл от една клема на веригата до друга. Ние нарекохме този контурен интеграл пад на напрежението върху елемента на веригата. Тогава целият контурен интеграл е равен просто на сумата от падовете на напрежението върху всички елементи на веригата поотделно

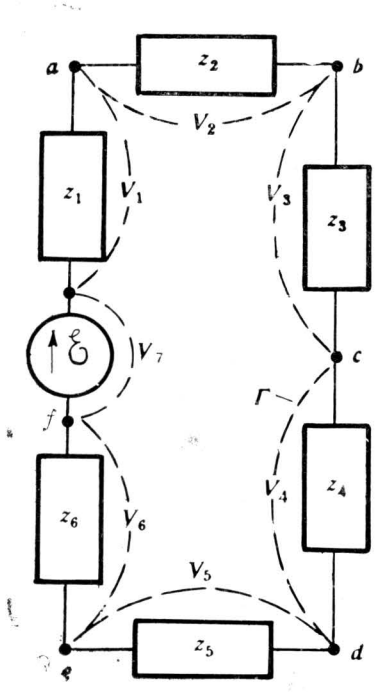
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sum V_n.$$

Тъй като контурният интеграл е равен на нула, получава се, че сумата от потенциалните разлики по целия затворен контур на веригата е равен на нула

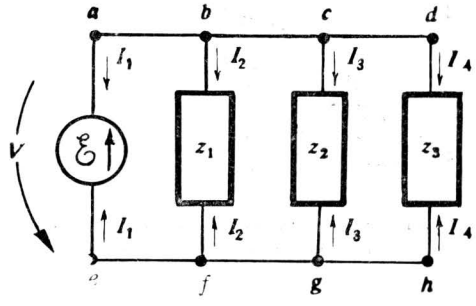
$$\sum_{\text{по каквато и да е верига}} V_n = 0. \qquad (22.14)$$

Този резултат следва от едното от уравненията на Максвел, което твърди, че в областта, където няма магнитни полета, криволинейният интеграл от **E** по затворен контур е равен на нула.

Сега да разгледаме друга верига (фиг. 22-10). Хоризонталната линия, която съединява изводите a, b, c и d, е начертана, за да покаже, че всички тези изводи са свързани помежду си или че те се съединяват от проводници с нищожно съпротивление. Във всеки случай такъв чертеж означава, че всички изводи a, b, c, d



Фиг. 22-9. Сумата от падовете на напрежението по какъвто и да е затворен път е равна на нула



Фиг. 22-10. Сумата от токовете, влизащи в който и да е възел, е равна на нула

се намират под еднакъв потенциал, а изводите e, f, g и h — също под еднакъв. Тогава падът на напрежението върху всеки от четирите елемента е еднакъв.

Но една от нашите идеализации се състоеше в това, че на изводите на импедансите се съсредоточават пренебрежимо малки количества електричество. Да предположим сега, че и електричният заряд, който се натрупва на съединителните проводници, също може да се пренебрегне. Тогава запазването на заряда изисква всеки заряд, който напусне един от елементите на веригата, незабавно да влиза в някой друг елемент на веригата. Или, което е същото, алгебричната сума на токовете, които влизат в която и да е от съединителните точки, да бъде равна на нула. Под съединителна точка ние разбираме всякаква съвокупност от изводи, такива както a, b, c, d, които са съединени един с друг. Такава съвокупност от съединени помежду си изводи обикновено се нарича „възел". Запазването на заряда следователно изисква във веригата, показана на фиг. 22-10, да имаме

$$I_1-I_2-I_3-I_4=0. \tag{22.15}$$

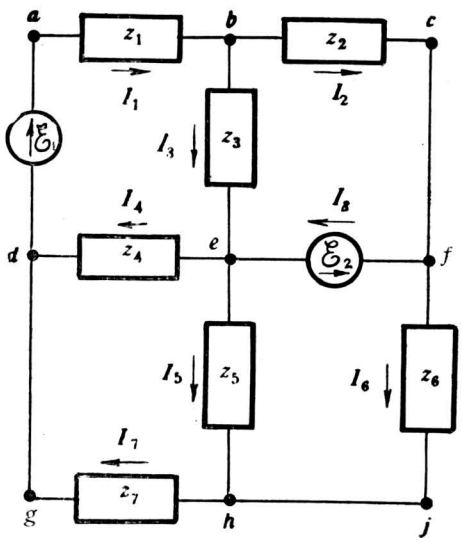
Сумата на токовете, които влизат във възела, който се състои от четирите извода e, , g, h, също трябва да бъде равна на нула:

$$-I_1+I_2+I_3+I_4=0. \tag{22.16}$$

Ясно е, че това е същото уравнение, каквото и (22.15). Тези две уравнения не са независими. Общото правило гласи, че *сумата от токовете, които влизат във всеки възел, трябва да бъде равна на нула*

$$\sum_{\text{във всеки възел}} I_n=0. \tag{22.17}$$

Нашето предишно заключение за това, че сумата от падовете на напреженията по затворен контур е равна на нула, трябва да се изпълнява за всеки контур на сложната верига. Точно така нашият резултат, че сумата от силите на токовете, които влизат във възела, е равна на нула, също трябва да се изпълнява за всеки възел. Тези две уравнения са известни под името *закони на Кирхоф*. С тяхна помощ можем да намерим силите на токовете и напреженията в каквато искаме верига.



Фиг. 22-11. Анализ на верига с помощта на законите на Кирхоф

Да разгледаме например по-сложна верига (фиг. 22-11). Как да определим токовете и напреженията в нея? Прекият път на решение е такъв. Ще разгледаме всеки от четирите спомагателни контури на веригата. (Да речем, единият контур минава през клемите a, b, e, d и обратно към a.) За всеки затворен контур ще напишем уравнението на първия закон на Кирхоф — сумата от падовете на напреженията по всеки контур е равна на нула. Трябва да се помни, че падът на напрежението се счита положителен, ако посоката на обхода *съвпада* с посоката на тока, и отрицателен, ако посоката на обхода е *противоположна* на посоката на тока; също трябва да се помни още, че падът на напрежението в генератора е равен на *отрицателната* стойност на електродвижещото напрежение в тази посока. Така че за контура *abeda* се получава

$$z_1I_1+z_3I_3+z_4I_4-\mathcal{E}_1=0.$$

Като приложим същите правила към останалите контури, ще получим още три подобни уравнения.

След това е необходимо да се напишат уравнения за токовете във всеки възел на веригата. Например като съберем всички токове във възела b, получаваме

$$I_1-I_3-I_2=0.$$

Аналогично във възела e уравнението за токовете приема вида

$$I_3 - I_4 + I_8 - I_5 = 0.$$

За показаната схема има пет такива уравнения за токовете. Оказва се обаче, че всяко от тези уравнения може да се изведе от останалите четири, затова независими уравнения са само четири. Общо на наше разпореждане са осем независими линейни уравнения: четири за напреженията, четири за токовете. От тях може да се получат осем независими тока. А ако станат известни токовете, ще се определи и цялата верига. Падът на напрежението във всеки елемент се дава с тока през този елемент, умножен по неговия импеданс (а за източниците на напрежение те изобщо са известни предварително).

Ние видяхме, че едно от уравненията за токовете зависи от останалите. Общо взето, също може да се напишат повече уравнения за напреженията, отколкото е необходимо. Макар че в схемата на фиг. 22-11 се разглеждаше само четворката от най-малки контури, не беше мъчно да се вземат други контури и да се напишат за тях уравнения за напреженията. Би могло да се вземе, например, пътят *abcfeda*. Или да се направи обход по пътя *abcfehgda*. Вие виждате, че контурите са много. Като анализираме сложни схеми, не е мъчно да се получат прекалено много уравнения. Но въпреки че има правила, които подсказват как трябва да се постъпва, за да се получат най-малко уравнения, обикновено и така става ясно как да се напише необходимият брой най-прости уравнения. Освен това едно-две излишни уравнения не принасят вреда. Те няма да доведат до неверен отговор, само малко ще забъркат пресмятането.

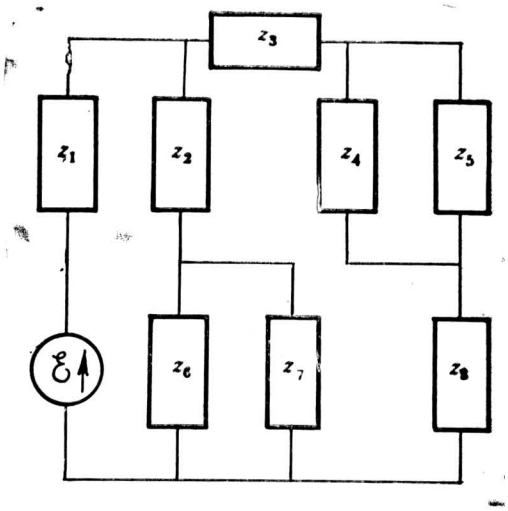
В гл. 25 (т. I) ние показахме, че ако два импеданса z_1 и z_2 са съединени *последователно*, те са еквивалентни на отделен импеданс z_s, равен на

$$z_s = z_1 + z_2. \tag{22.18}$$

Освен това беше показано, че когато двата импеданса са съединени *успоредно*, те са еквивалентни на отделен импеданс z_p, равен на

$$z_p = \frac{1}{(1/z_1)+(1/z_2)} = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}. \tag{22.19}$$

Ако вие сега се огледате назад, ще видите, че като извеждате тези резултати, вие фактически сте се ползували от законите на Кирхоф. Често може да се анализира сложна схема, като повторно се приложат формулите за последователен и успореден импеданси. Например по такъв начин може да се анализира схемата, показана на фиг. 22-12. Импедансите z_4 и z_5 могат да се заменят с успоредния им еквивалент, същото може да се направи и с импедансите z_6 и z_7. След това импедансът z_2 може да се комбинира с успоредния еквивалент на z_6 и z_7 по правилото за последователно съединяване на импеданси. Така постепенно може да се сведе цялата схема към генератор, последователно съединен с един импеданс Z. Тогава токът през генератора е просто равен на $\mathcal{E}/Z$. Като се действува в обратен ред, може да се намерят токовете във всеки импеданс.



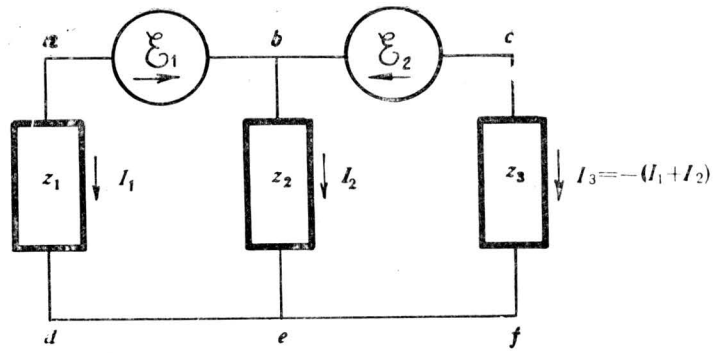
Фиг. 22-12. Верига, която може да се анализира с помощта на последователни и паралелни комбинации

Обаче има съвсем прости схеми, които с този метод не могат да се анализират. Например схемата на фиг. 22-13. За да анализираме тази верига, трябва да разпишем уравненията за токовете и напреженията по законите на Кирхоф. Дайте да направим това. Има само едно уравнение за токовете

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

откъдето

$$I_3 = -(I_1 + I_2).$$



Фиг. 22-13. Верига, която не може да се анализира с помощта на последователни и паралелни комбинации

Може да се икономисат пресмятания, ако веднага поставим този резултат в уравненията за напреженията. В тази схема такива уравнения има две

$$-\mathcal{E}_1+I_2z_2-I_1z_1=0 \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_2-(I_1+I_2)\,z_3-I_2z_2=0.$$

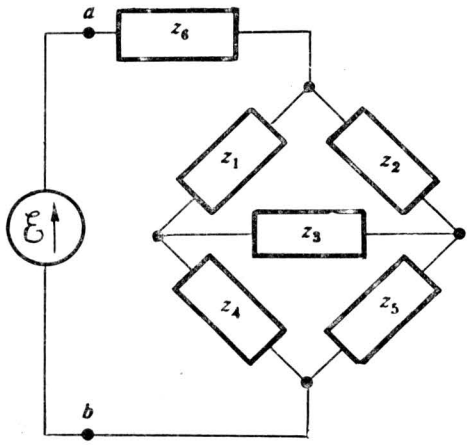
На две уравнения се падат два неизвестни тока. Като ги решим, получаваме I_1 и I_2

$$I_1=\frac{z_2\mathcal{E}_2-(z_2+z_3)\mathcal{E}_1}{z_1(z_2+z_3)+z_2z_3} \tag{22.20}$$

и

$$I_2=\frac{z_1\mathcal{E}_2+z_3\mathcal{E}_1}{z_1(z_2+z_3)+z_2z_3}. \tag{22.21}$$

А третият ток се получава като сума на първите два.



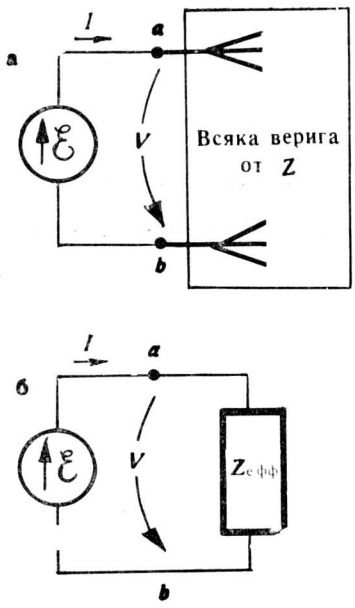
Фиг. 22-14. Мостова схема

Ето още един пример за верига, която не може да се пресметне по правилата за успоредните и последователните импеданси (фиг. 22-14). Такава схема наричат „мост“. Тя се среща в много уреди, които измерват импеданси. В такива схеми обикновено се интересуват от такъв въпрос: как трябва да се отнасят различните импеданси един към друг, за да бъде равен на нула токът през импеданса z_3? Предоставя ви се правото да намерите онези условия, при които това действително е така.

22-4. Еквивалентни контури

Да предположим, че сме свързали генератора $\mathcal{E}$ към верига в която има множество сложни преплитания на импеданси (схематично това е показано на фиг. 22-15, *а*). Всички уравнения, които произтичат от законите на Кирхоф, са линейни и затова, като изчислим от тях тока през генератора, ще получим стойност I, пропорционална на $\mathcal{E}$. Може да се напише

$$I=\frac{\mathcal{E}}{z_{еф}},$$



Фиг. 22-15. Всяка мрежа от пасивни елементи с два извода е еквивалентна на ефективен импеданс

където сега $z_{еф}$ е някакво комплексно число, алгебрична функция на всички елементи на веригата. (Ако във веригата няма никакви генератори освен споменатия, във формулата няма да има добавъчна част, която не зависи от $\mathcal{E}$.) Получилото се уравнение е точно онова, което би трябвало да се напише за схемата на фиг. 22-15, *б*. И докато нас ни интересува само онова, което става *наляво* от клемите *a* и *b*, дотогава двете схеми на фиг. 22-15 са *еквивалентни*. Затова може да се направи общо твърдение, че *всяка* верига от пасивни елементи с два извода може да се замени с един-единствен импеданс $z_{еф}$, като не изменяме в останалата част на веригата нито токовете, нито напреженията. Това твърдение естествено е само малка забележка за онова, което следва от законите на Кирхоф, а в крайна сметка — от линейността на уравненията на Максвел.

Тази идея може да се обобщи за схеми, в които влизат както

генератори, така и импеданси. Представете си, че ние гледаме на тази схема „от гледна точка“ на един от импедансите, който ще означим със z_n (фиг. 22-16, *а*). Ако решим уравнението за токовете, ние бихме видели, че напрежението V_n между клемите a и b е линейна функция на I, която може да се запише във вида

$$V_n = A - BI_n . \qquad (22.22)$$

Тук A и B зависят от генераторите и импедансите във веригата отляво на клемите. Например в схемата, показана на фиг. 22-13, ние намираме $V_1 = I_1 z_1$. Това може да се препише [като използуваме (22.20)] във вида

$$V_1 = \left[\left(\frac{z_2}{z_2+z_3}\right)\ \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1\right] - \frac{z_2 z_3}{z_2+z_3} I_1 . \qquad (22.23)$$

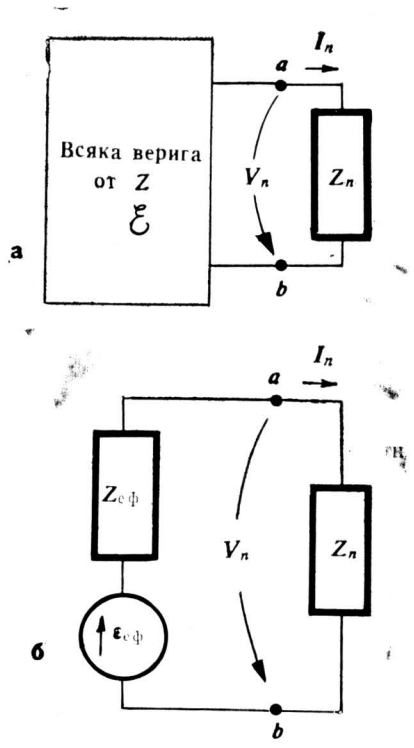
Тогава получаваме пълното решение, като комбинираме това уравнение с уравнението за импеданса z_1, т. е. с $V_1 = I_1 z_1$ или в общия случай, като комбинираме (22.22) с

$$V_n = I^n z_n .$$

Ако разгледаме сега случай, когато z_n се включва към проста верига от последователно свързани генератор и импеданс (виж фиг. 22-15, *б*), уравнението, което съответствува на (22.22), ще приеме вида

$$V_n = \mathcal{E}_{еф} - I_n z_{еф} ,$$

което съвпада с (22.22), ако приемем $\mathcal{E}_{еф} = A$ и $z_{еф} = B$. Значи ако ни интересува само онова, което става вдясно от изводите a и b, произволната схема на фиг. 22-16 може винаги да се замени с еквивалентното съчетание от генератор, свързан последователно с импеданс.



Фиг. 22-16. Всяка мрежа с два извода може да се замени с генератор, последователно съединен с импедаж

22-5. Енергия

Видяхме, че за създаване в индуктивност на ток I трябва от външната верига да се достави енергия $U = {}^1/_2 LI^2$. Когато токът спада до нула, тази енергия се отвежда обратно във външната верига.

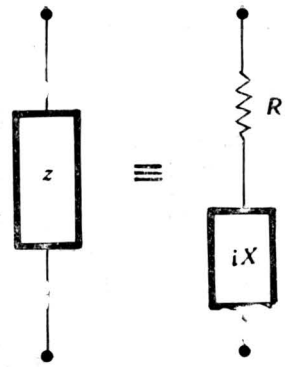
В идеалната индуктивност механизъм на загуба на енергия няма. Когато през индуктивността тече променлив ток, енергията се прелива ту-тук, ту-там — от индуктивността към останалата част от веригата и обратно, но *средната* скорост, с която енергията се предава във веригата, е равна на нула. Ние казваме, че индуктивността е *недисипативен* елемент, в нея не се изразходва (не „дисипира“) електричната енергия.

Точно така се връща във външната верига и енергията на кондензатора $U = {}^1/_2 CV^2$, когато се разрежда. Когато той е във верига на променлив ток, енергията тече ту в него, ту от него, но пълният поток на енергията за всеки цикъл е равен на нула. Идеалният кондензатор е също недисипативен елемент.

Ние знаем, че електродвижещото напрежение е източник на енергия. Когато токът I тече в посоката на електродвижещото напрежение, във външната верига се доставя енергия със скорост $dU/dt = \mathcal{E}I$. Ако движат електричеството *срещу* електродвижещото напрежение (с помощта на други генератори), електродвижещото напрежение поглъща енергия със скорост $\mathcal{E}I$; понеже I е отрицателно и dU/dt е отрицателно.

Ако генераторът е включен към съпротивление R, токът през съпротивлението е равен на $I = \mathcal{E}/R$. Енергията, доставяна от генератора със скорост $\mathcal{E}I$, се поглъща от съпротивлението. Тази енергия се изразходва за нагряване на съпротивлението и е фактически вече загубена за електричната енергия на веригата. Ние казваме, че електричната енергия се разсейва, дисипира в съпротивлението. Скоростта, с която тя се разсейва, е $dU/dt = RI^2$.

Във веригите с променлив ток средната скорост на загуба на



Фиг. 22-17. Всеки импеданс е еквивалентен на последователно съединение на чисто съпротивление и чист реактанс

енергия в съпротивлението е средната стойност на RI^2 за един цикъл. Понеже $I=\hat{I}e^{i\omega t}$ (което собствено означава, че I се изменя като $\cos\omega t$), средната стойност на I^2 за цикъл е равна на $\hat{I}|^2/2$, защото токът в максимума е $\hat{I}$, а средната стойност на $\cos^2\omega t$ е равна на $^1/_2$.

Какво може да се каже за загубите на енергия, когато генераторът е включен към произволен импеданс z? (Под „загуби", разбира се, разбираме превръщането на електричната енергия в топлинна.) Всеки импеданс z може да бъде разделен на реална и имагинерна части, т. е.

$$z=R+iX, \tag{22.24}$$

където R и X са реални числа. От гледна точка на еквивалентните схеми може да се каже, че всеки импеданс е еквивалентен на съпротивление, последователно свързано с чисто имагинерен импеданс, наричан *реактанс* (фиг. 22-17).

Ние по-рано вече видяхме, че всяка верига, която съдържа L и C, има импеданс, изразяван от чисто имагинерно число. Понеже във всяко от L и C няма средно никакви загуби, то и в чистия реактанс, в който има само L и C, няма загуби на енергия. Може да се покаже, че това трябва да бъде вярно за всеки реактанс.

Ако генератор с електродвижещо напрежение $\mathcal{E}$ е свързан с импеданс z (виж фиг. 22-17), неговото електродвижещо напрежение трябва да бъде свързано с тока I от генератора чрез зависимостта

$$\mathcal{E}=I(R+iX). \tag{22.25}$$

За да се намери с каква средна скорост се подвежда енергия трябва да се усредни произведението $\mathcal{E}I$. Но сега трябва да бъдем внимателни. Когато оперираме с такива произведения, трябва да имаме работа само с реалните стойности на $\mathcal{E}(t)$ и $I(t)$. (Реалните части на комплексни функции отразяват истинските физични величини само тогава, когато уравненията са *линейни*; а сега става дума за *произведение*, а това несъмнено е нелинейно нещо.)

Нека сме започнали да отчитаме t така, че амплитудата $\hat{I}$ да е реално число, да речем I_0; тогава истинското изменение на I с времето се дава от формулата

$$I=I_0\cos\omega t.$$

Електродвижещото напрежение, което влиза в уравнение (22.25), е реалната част от

$$I_0e^{i\omega t}\ (R+iX)$$

или

$$\mathcal{E}=I_0R\cos\omega t-I_0X\sin\omega t \tag{22.26}$$

Двете събираеми в (22.26) представляват падът на напрежението върху R и X (виж фиг. 22-17). Ние виждаме, че падът на напрежението върху съпротивлението се намира *във фаза* с тока, докато падът на напрежението върху чисто реактивната част се намира с тока *в противофаза*.

Средната скорост на загуба на енергията, която изтича от генератора — $\langle P\rangle_{ср}$, — е интегралът от произведението $\mathcal{E}I$ за един цикъл, разделен на периода T; с други думи,

$$\langle P\rangle_{ср}=\frac{1}{T}\int_0^T\mathcal{E}I\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2R\cos^2\omega t\,dt-\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2X\cos\omega t\sin\omega t\,dt.$$

Първият интеграл е равен на $^1/_2I_0^2R$, а вторият е равен на нула. Излиза, че средната загуба на енергия в импеданса $z=R+iX$ зависи само от реалната част на z и е равна на $I_0^2R/2$. Това се съгласува с нашия предишен извод за загубите на енергия в съпротивлението. В реактивната част загуба на енергия няма.

22-6. Верига — стълба

Сега ще разгледаме много интересна верига, която може да се изразява чрез успоредни и последователни съчетания. Да започнем от веригата, показана на фиг. 22-18,*а*. Веднага се вижда, че импедансът между клемите a и b е просто равен на z_1+z_2. Ще вземем сега малко по-трудна верига (фиг. 22-18,*б*). Можем да я анализираме с помощта на законите на Кирхов, но не е трудно да минем и само с последователни и успоредни комбинации. Двата импеданса на десния край можем да заменим с един $z_3=z_1+z_2$ (виж фиг. 22-18,*в*). Тогава двата импеданса z_2 и z_3 можем да заменим с еквивалентния им успореден импеданс z_4 (фиг. 22-18, г). И на края z_1 и z_4 са еквивалентни на един импеданс z_5 (фиг. 22-18,*д*).

Сега може да се постави забавен въпрос: какво ще стане, ако към веригата, показана на фиг. 22-18,*б*, включваме *безкрайно* все нови и нови звена (пунктирната линия на фиг. 22-19, *а*)? Може ли да се реши задачата за такава безкрайна верига? Представете си, това съвсем не е трудно. Преди всичко забелязваме, че такава безкрайна верига не се изменя, ако новото звено включим към „предния“ край. Нали ако към безкрайна верига се добавя още едно звено, тя остава все същата безкрайна верига. Нека сме означили импеданса между клемите a и b на безкрайната верига с z_0; тогава импедансът на всичко това, което е отдясно на клемите c и d, е също равен на z_0. Затова ако гледаме от предния край, цялата верига се представя във вида, показан на фиг. 22-19,*б*. Като заменим двата успоредни импеданса z_2 и z_0 с един и го съберем с z_1, веднага получаваме импеданса на цялото съчетание

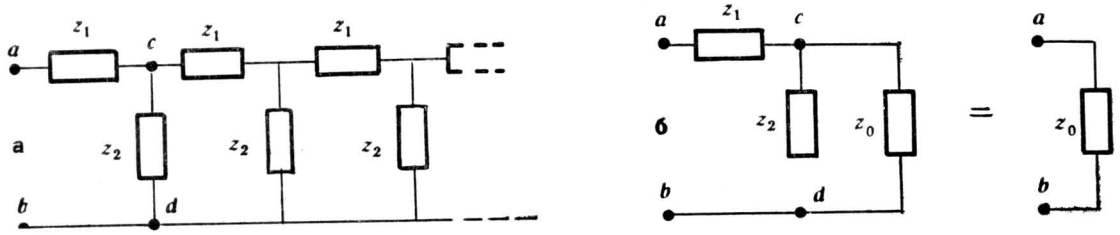
$$z=z_1+\frac{1}{(1/z_2)+(1/z_0)} \quad \text{или} \quad z=z_1+\frac{z_2z_0}{z_2+z_0}.$$

Но този импеданс е също равен на z_0. Получава се уравнението

$$z_0=z_1+\frac{z_2z_0}{z_2+z_0}.$$

Да намерим от него z_0

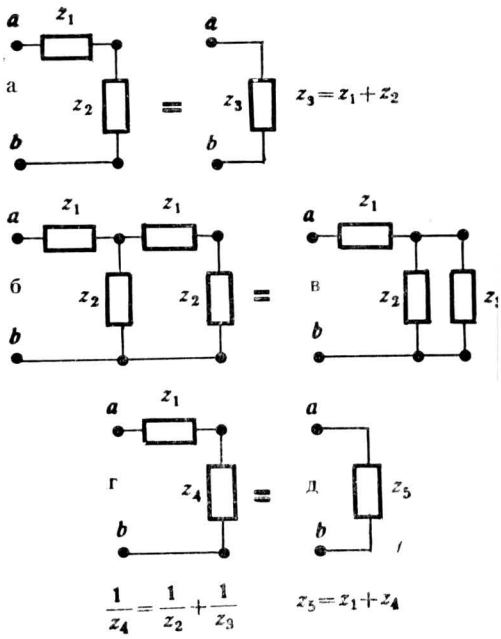
$$z_0=\frac{z_1}{2}+\sqrt{\frac{z_1^2}{4}+z_1z_2}.$$



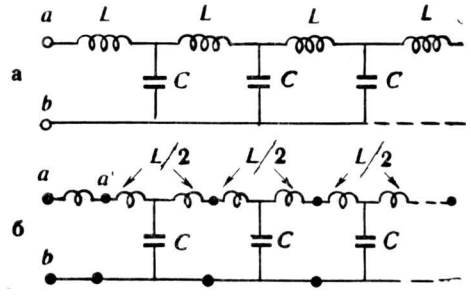
Фиг. 22-19. Ефективен импеданс на безкрайна стълба

По такъв начин намерихме решение за импеданса на безкрайна стълба от повтарящи се успоредни и последователни импеданси. Импедансът z_0 се нарича *характеристичен импеданс* на такава безкрайна верига.

Да разгледаме сега частен пример, когато последователният елемент е винаги индуктивност L, а шунтиращият елемент — капацитет C (фиг. 22-20, *а*). В този случай импедансът на безкрайната верига се получава, ако положим $z_1=i\omega L$ и $z_2=1/i\omega C$. Забележете, че първото събираемо $z_1/2$ в (22.27) е равно просто на половината импеданс на първия елемент. Затова би било по-естествено (или най-малкото по-просто) да чертаем нашата безкрайна верига така, както е показано на фиг. 22-20, *б*. Като гледаме безкрайната верига от клема a', ние бихме видели характеристичния импеданс



Фиг. 22-18. Ефективен импеданс на стълба



Фиг. 22-20. Стълба L-C, изобразена по два еквивалентни начина

$$z_0=\sqrt{\frac{L}{C}-\frac{\omega^2L^2}{4}}. \qquad (22.28)$$

Според това, каква е честотата ω, се наблюдават два интересни случая. Ако ω^2 е по-малко от $4/LC$, второто събираемо под корена е по-малко от първото и импедансът z_0 ще стане реално число. Ако пък ω^2 е по-голямо от $4/LC$, импедансът z_0 ще стане чисто имагинерно число и можем да го запишем във вида

$$z_0=i\sqrt{\frac{\omega^2L^2}{4}-\frac{L}{C}}.$$

По-рано казахме, че веригата, съставена само от имагинерни импеданси като индуктивността и капацитета, ще има чисто имагинерен импеданс. Но как тогава излиза, че в тази верига, която ние сега разглеждаме (а в нея има само L и C), импедансът при честоти, по-ниски от $\sqrt{4/LC}$, представлява чисто съпротивление? За високите честоти импедансът е чисто имагинерен в пълно съгласие с нашето предишно твърдение. Но за ниските честоти импедансът е чисто съпротивление и затова поглъща енергия. Но как може верига също като съпротивление непрекъснато да поглъща енергия, ако тя е съставена само от индуктивности и капацитети? Отговорът се състои в това, че тези капацитети и самоиндукции са безкрайно много и се получава, че когато източникът е съединен с веригата, той трябва, първо, да снабди с енергия първата индуктивност и капацитет, след това втората, третата и т. н. Във вериги от подобен род енергията непрекъснато и с постоянна скорост се изсмуква от генератора и безспирно тече във веригата. Енергията се запасява в индуктивностите и капацитетите по веригата.

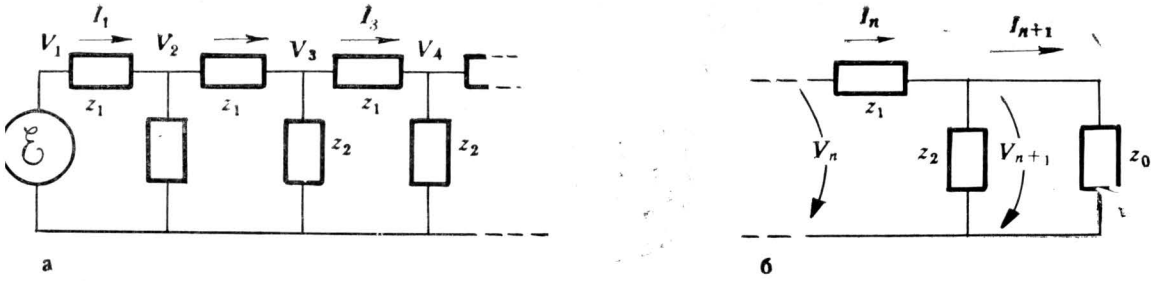
Тази идея подсказва интересната мисъл за това, какво фактически става вътре във веригата. Следва да се очаква, че ако към предния край на веригата включим източник, действието на този източник ще започне да се разпространява надлъж по веригата към безкрайния край. Разпространението на вълните по линията много прилича на излъчване от антена, която взима енергия от захранващия я източник; по-точно може да се очаква, че такова разпространение става, когато импедансът е реален, т. е. когото ω е по-малка от $\sqrt{4/LC}$. Но когато импедансът е чисто имагинерен, т. е. при ω, по-големи от $\sqrt{4/LC}$, такова разпространение не може да се очаква.

22-7. Филтри

В предишния параграф видяхме, че безкрайната верига-стълба (виж фиг. 22-20) непрекъснато поглъща енергия, ако тази енергия се подава с честота, която е по-ниска от някаква критична стойност $\sqrt{4/LC}$, наричана *гранична честота* ω_0. У нас възниква мисълта, че този ефект може да се разбере, като се основаваме на представата за непрекъснатия пренос на енергия по линията. От друга страна, за високи честоти (при $\omega>\omega_0$) непрекъснато поглъщане на енергия няма; тогава следва да се очаква, че токовете не ще могат да „проникнат“ далеч по линията. Да видим верни ли са тези представи.

Нека предният край на стълбата е съединен с някакъв генератор на променлив ток и нас ни интересува как изглежда напрежението например в 754-тото звено на стълбата. Тъй като мрежата е безкрайна, при прехода от едно звено към друго става винаги едно и също; така че може просто да се види какво става, когато ние преминаваме от n-тото звено към $(n+1)$-то. Токовете I_n и напреженията V_n ние ще определим така, както е показано на фиг. 22-21,*а*.

Напрежението V_{n+1} може да се получи от V_n, ако си спомним, че остатъкът от стълбата (след n-тото звено) винаги може да се замени с характеристичния ѝ импеданс z_0; и тогава е достатъчно да анализираме само схемата на фиг. 22-21,*б*. Преди всич-



Фиг. 22-21. Намиране фактора на разпространение на стълба

ко забелязваме, че всяко V_n, понеже това е напрежението на клемите на съпротивление z_0, трябва да бъде равно на $I_n z_0$. Освен това разликата между V_n и V_{n+1} е равна просто на $I_n z_1$

$$V_n - V_{n+1} = I_n z_1 = V_n \frac{z_1}{z_0}.$$

Получава се отношението

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 1 - \frac{z_1}{z_0} = \frac{z_0 - z_1}{z_0},$$

което може да се нарече *фактор на разпространението* за едно звено от стълбата; ще го означим с α. За всички звена

$$\alpha = \frac{z_0 - z_1}{z_0} \tag{22.29}$$

и напрежението зад n-тото звено е

$$V_n = \alpha^n \mathcal{E}. \tag{22.30}$$

Сега нищо не ни струва да намерим напрежението зад 754-тото звено; то просто е равно на произведението на $\mathcal{E}$ и 754-тата степен на α.

Как изглежда α за стълбата L—C на фиг. 22-20, *а*? Като вземем z_0 от уравнение (22.27) и $z_1 = i\omega L$, ще получим

$$\alpha = \frac{\sqrt{(L/C) - (\omega^2 L^2/4)} - i(\omega L/2)}{\sqrt{(L/C) - (\omega^2 L^2/4)} + i(\omega L/2)}. \tag{22.31}$$

Ако честотата на входа е по-ниска от граничната честота $\omega_0 = \sqrt{4/LC}$, коренът е реално число и модулите на комплексните числа в числителя и знаменателя са еднакви. Затова стойността на α по модул е равна на единица; може да се напише

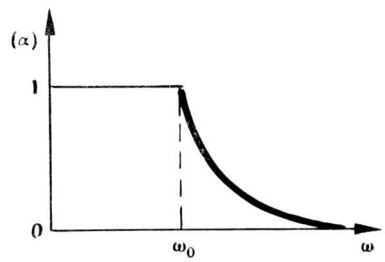
$$\alpha = e^{i\delta},$$

а това означава, че големината (модулът) на напрежението във всяко звено е една и съща; изменя се само фазата. Тя се изменя с числото δ; на практика то е отрицателно и представлява „задръжката“ на напрежението по степента на преминаване по веригата.

За честоти, по-високи от граничната честота ω_0, е по-добре да се изнесе множителят i в числителя и знаменателя на (22.31) и уравнението да се препише във вида

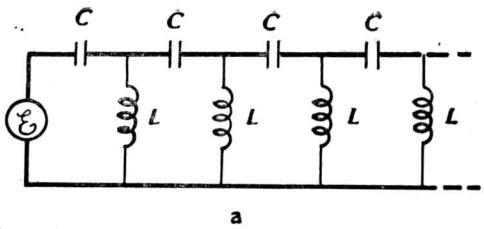
$$\alpha = \frac{\sqrt{(\omega^2 L^2/4) - (L/C)} - (\omega L/2)}{\sqrt{(\omega^2 L^2/4) - (L/C)} + (\omega L/2)}. \tag{22.32}$$

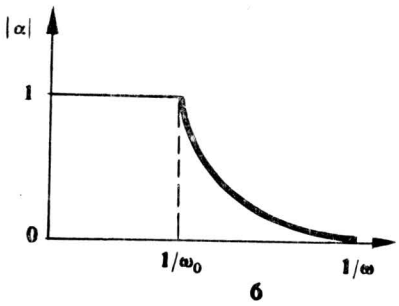
Сега факторът на разпространение α е *реално* число, при това *по-малко от единица*. Това означава, че напрежението в дадено звено е винаги по-малко от напрежението в предишното звено; коефициентът на пропорционалност е равен на α. При честоти, по-високи от ω_0, напрежението бързо спада с придвижването по веригата. Кривата на модула на α като функция на честотата прилича на графиката, показана на фиг. 22-22.



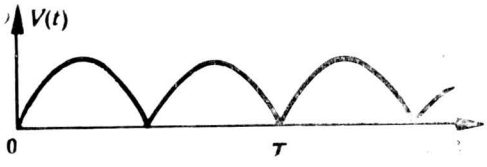
Фиг. 22-22. Факторът на разпространение на едно звено от стълба

Ние виждаме, че поведението на α както по-горе, така и по-





Фиг. 22-23. Високочестотен филтър (*а*) и неговият фактор на разпространение като функция на $1/\omega$(*б*)



Фиг. 22-24. Напрежението на изхода на всевълнов изправител

долу от ω_0 се съгласува с нашата представа за това, че веригата предава енергията при $\omega<\omega_0$ и я задържа при $\omega>\omega_0$. Казват, че веригата „пропуска“ ниските честоти и „отхвърля“ или „филтрира“ високите. Всяка верига, която е устроена така, че нейните характеристики да се менят по указания начин, се нарича „филтър“. Ние анализирахме „филтър за ниското пропускане“ или „филтър за ниски честоти“.

Може да ви учуди защо са всички тези обсъждания на безкрайни вериги, ако на практика те са невъзможни? Но цялата хитрост се заключава в това, че вие ще откриете същите характеристики и в крайна верига, ако я затворите с импеданс, който съвпада с характеристическия импеданс z_0. Практически, разбира се, е невъзможно точно да се възпроизведе характеристическият импеданс с няколко прости елемента, като R, L и C. Но в известна област на честотите това често може да се достигне с добро приближение. По този начин може да се направи крайна филтрираща верига със свойства, много близки до тези, които се проявяват в безкрайния филтър. Да речем, стълбата L—C ще се държи в много случаи така, както беше описано, ако на края ѝ е поставено чисто съпротивление $R=\sqrt{L/C}$.

Ако в нашата стълба L—C разменим местата на L и C, за да се получи стълбата, показана на фиг. 22-23, *а*, ще се получи филтър, който пропуска *високите* честоти и отхвърля ниските. Като се възползуваме от вече получените резултати, лесно ще разберем какво става в тази верига. Вие вече навярно сте забелязали, че винаги, когато L се заменя с C и обратно, и $i\omega$ се заменя с $1/i\omega$ и обратно. Значи всичко, което ставаше по-рано с ω сега ще става с $1/\omega$. В частност може да се разбере как се изменя α с честотата, като се вземе фиг. 22-22 и навсякъде вместо ω се напише $1/\omega$ (фиг. 22-23, *б*).

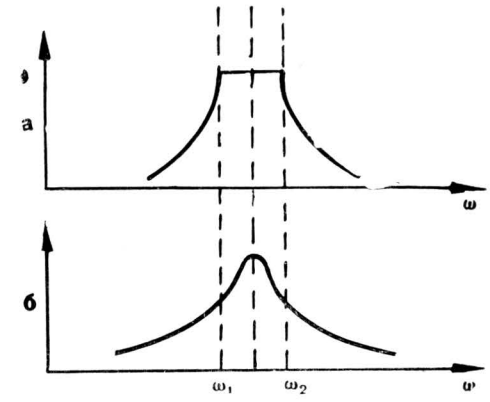
Описаните филтри за високите и ниските честоти имат многобройни технически приложения. Филтърът L—C за ниските честоти често се използува като „изглаждащ“ филтър във веригите за прав ток. Ако ни е необходимо да получим прав ток от източник за променлив ток, включваме изправител, който позволява на тока да тече само в една посока. От изправителя излиза пулсиращ ток, графиката на който изглежда като функцията $V(t)$, показана на фиг. 22-24. Постоянството на този ток е отвратително: той се клати нагоре и надолу, а на нас ни е необходим постоянен ток, чистичък, гладичък като от акумулатори. Това може да се достигне, като включим филтър за ниските честоти между изправителя и консуматора.

От гл. 50 (т. I) ние вече знаем, че функцията на времето от фиг. 22-24 може да бъде представена като наслагване на постоянно напрежение върху синусна вълна плюс синусна вълна с по-голяма честота, плюс още по-високочестотна синусоида и т. н., т. е. като ред на Фурие. Ако нашият филтър е линеен (т. е. ако, както предполагахме, L и C не се изменят при изменяне на токовете или напреженията), онова, което излиза от филтъра, представлява също наслагване на изходите от всяка компонента на входа. Ако се направи така, че граничната честота ω_0 на нашия филтър да бъде значително по-малка от най-ниската от честотите на функцията $V(t)$, постоянният ток (при който $\omega=0$) прекрасно ще мине през филтъра, а амплитудата на първата хармонична ще бъде здраво срязана; е, а амплитудите на висшите хармонични — още повече. Значи на изхода може да се получи каквато искаме гладкост в зависимост от това, за колко звена на филтъра ще ви стигнат парите.

Високочестотният филтър е нужен тогава, когато е необходимо да се срежат някои ниски честоти. Например в грамофонния усилвател високочестотен филтър може да се използува, за да не се изкривява музиката: той ще задържи нискочестотното тръполене на моторчето и диска.

Може още да се правят и „ивични“ филтри, които отхвърлят честотите, по-ниски от някаква честота ω_1, и честотите, по-високи от някаква друга честота ω_2 (по-голяма от ω_1), но затова пък про-

пускащи всички честоти от ω_1 до ω_2. Това може да се направи лесно, като се съчетава високочестотен с нискочестотен филтър, но обикновено правят стъпаловидна схема, в която импендансите z_1 и z_2 имат по-сложен вид—те самите са комбинации на L и C. За такъв ивичен филтър константата на разпространение може да изглежда така както на фиг. 22-25, *а*. Той може да се използува например, за да отделя сигнали, които заемат само известен интервал от честоти, например всеки от каналите на телефонна връзка във високочестотен телефонен кабел или модулираната носеща честота при радиопредаването.



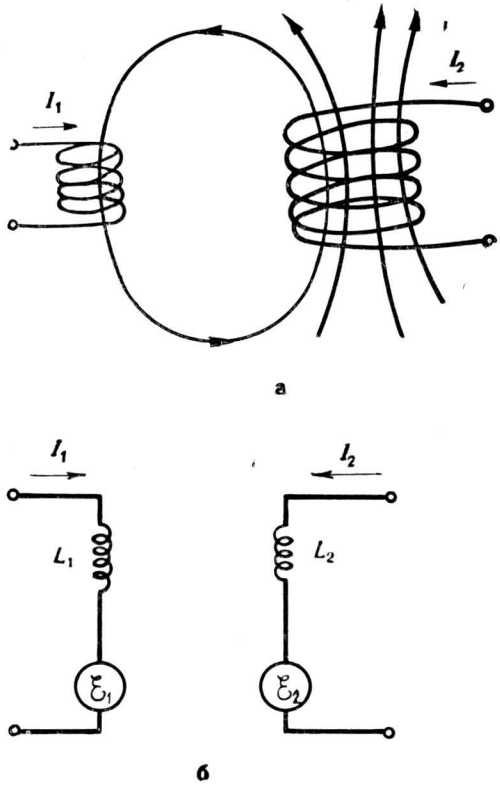
Фиг. 22-25. Ивичен филтър (*а*) и прост резонансен филтър (*б*)

В гл. 25 (т. I) видяхме, че такова филтриране може да се прави още, като се използува избирателността на обикновената резонансна крива (тя е дадена за сравнение на фиг. 22-25, *б*). Но за някои цели резонансният филтър подхожда по-лошо, отколкото ивичният. Вие помните (това беше в гл. 48, т. I), че когато носещата честота ω_c е модулирана със „сигнална“ честота ω_s, общият сигнал съдържа не само носещата, но и две странични честоти $\omega_c+\omega_s$ и $\omega_c-\omega_s$. В резонансния филтър тези странични честоти винаги някак отслабват и колкото е по-висока сигналната честота, толкова, както се вижда от чертеж, е по-голямо това отслабване. Затова „откликът на честота“ тук не е добър. Високите музикални тонове изобщо не минават. Но ако се вземе ивичен филтър, устроен така, че ширината $\omega_2-\omega_1$ да е най-малко два пъти по-голяма от най-високата сигнална честота, откликът на честота за интересуващите ни сигнали ще бъде плосък.

Още една забележка за стъпаловидния филтър: стълбата L—C на фиг. 22-20 е също приближена представа за предаваща линия (фидер). Ако имаме дълъг проводник, разположен успоредно на друг проводник (да речем, проводник, поместен в коаксиален кабел или прекаран над земята), между двата проводника съществува някакъв капацитет и известна индуктивност (поради магнитното поле между тях). Ако представим тази линия съставена от малки участъци Δl, всеки участък прилича на едно звено от стълбата $L-C$ с последователно свързана индуктивност ΔL и шунтиращ капацитет ΔC. Затова ние имаме право да приложим тук нашите резултати за стъпаловидния филтър. Като преминем към граница при $\Delta l\to 0$, ще получим добро описание на предаваща линия. Забележете, че когато Δl става все по-малко и по-малко, намаляват и ΔL и ΔC, но те намаляват в една и съща пропорция, така че отношението $\Delta L/\Delta C$ остава постоянно. Затова като преминем в уравнение (22.28) към граница при ΔL и ΔC, които се стремят към нула, ще видим, че характеристическият импеданс z_0 е чисто съпротивление, стойността на което е $\sqrt{\Delta L/\Delta C}$. Отношението $\Delta L/\Delta C$ може да се напише също във вида L_0/C_0, където L_0 и C_0 са индуктивността и капацитетът на единица дължина от линията; тогава

$$z_0=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \qquad (22.33)$$

Забележете още, че когато ΔL и ΔC се стремят към нула, граничната честота $\omega_0=\sqrt{4/LC}$ клони към безкрайност. Идеалната предаваща линия няма гранична честота.



Фиг. 22-2о. Еквивалентна схема на взаимната индукция

22-8. Други елементи на веригата

Досега определихме само идеалните импеданси на веригата — индуктивността, капацитета и съпротивлението, а също идеалния генератор на напрежение. Сега искаме да покажем, че такива други елементи, като взаимната индукция или транзисторите, или радиолампите може да се опишат, като се ползуваме от същите основни елементи. Нека имаме две бобини и нека (това е направено нарочно) потокът от едната от бобините пресича другата (фиг. 22-26, *а*). Тогава възниква взаимна индукция M на двете бобини, така че, когато токът в едната бобина се изменя, в другата се генерира напрежение. Може ли в нашите еквивалент-

ни схеми да се отчете такъв ефект? Може, като се постъпи по следния начин. Ние видяхме, че индуцираното във всяка от двете взаимодействуващи бобини електродвижещо напрежение може да бъде представено във вид на сума от две части:

$$\mathcal{E}_1 = -L_1\frac{dI_1}{dt} \pm M\frac{dI_2}{dt},$$

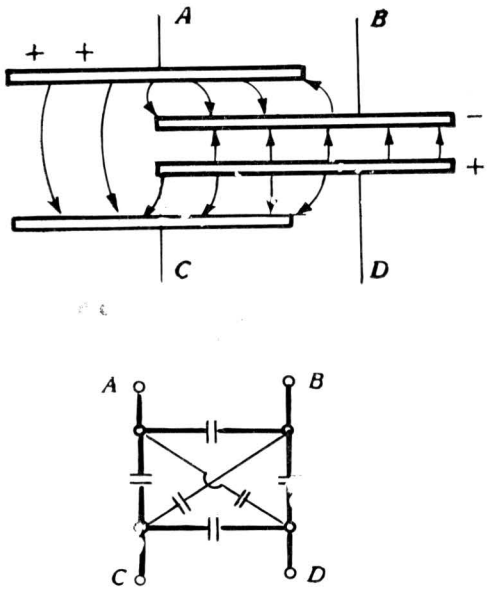
$$\mathcal{E}_2 = -L_2\frac{dI_2}{dt} \pm M\frac{dI_1}{dt}. \qquad (22.34)$$

Първото събираемо възниква от самоиндукцията на бобината, а второто — от нейната взаимна индукция с другата бобина. Пред второто събираемо може да има плюс или минус според това, как потокът от едната бобина пронизва другата. Като правим същите приближения, както и тогава, когато описвахме идеалната индуктивност, ние можем да кажем, че потенциалната разлика на изводите на всяка бобина е равна на електродвижещото напрежение на бобината. Тогава двете уравнения (22.34) ще съвпаднат с тези, които биха се получили от веригата на фиг. 22-26, *б*, ако електродвижещото напрежение във всеки от двата контура би зависело от тока в противоположния контур по следния начин:

$$\mathcal{E}_1 = \pm i\omega M I_2, \qquad \mathcal{E}_2 = \pm i\omega M I_1. \qquad (22.35)$$

Значи действието на самоиндукцията може да се представи по нормалния начин, а действието на взаимната индукция да се замени със спомагателен идеален генератор на напрежение. Трябва, разбира се, да имаме още едно уравнение, което свързва това електродвижещо напрежение с тока в някоя друга част на веригата; но тъй като това уравнение е линейно, ние просто добавяме към нашите уравнения на веригата още едно линейно уравнение и всички наши предишни изводи за еквивалентните схеми и други подобни все едно остават правилни.

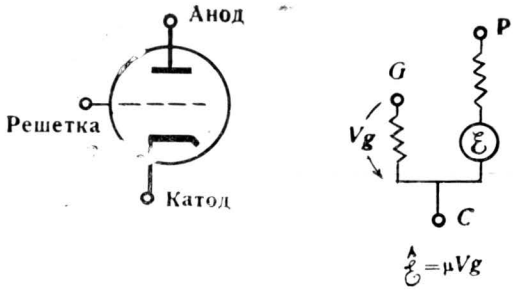
Освен за взаимна индукция може още да се говори и за взаимен капацитет. Досега, като говорехме за кондензаторите, ние винаги си представяхме, че те имат само по два електрода, но в много случаи (да речем в радиолампите) може да има и по няколко електрода, разположени плътно един до друг. Ако на един от тях поставим електричен заряд, неговото електрично поле ще индуцира заряди върху всички останали електроди и ще повлияе на техния потенциал. Като пример да разгледаме разположението на четири пластинки (фиг. 22-27, *а*). Да си представим, че тези четири пластинки се съединяват с външната верига чрез проводниците *A*, *B*, *C* и *D*. Така че, докато нас ни интересуват само електростатичните ефекти, еквивалентната схема на такова разположение на електродите може да се счита такава както на фиг. 22-27, *б*. Електростатичното взаимодействие на електродите (всеки с всеки) е еквивалентно на капацитета между тази двойка електроди.



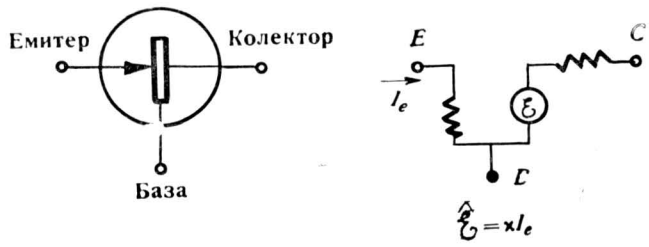
Фиг. 22-27. Еквивалентна схема на взаимен капацитет

И на края да видим как трябва да се представят във веригите с променлив ток такива сложни устройства, като транзисторите или радиолампите. Трябва отначало да се подчертае, че тези устройства често действуват така, че връзката между токовете и напреженията съвсем не е линейна. В тези случаи част от направените от нас по-рано твърдения, а именно тези, които зависят от линейността на уравненията, естествено престават да бъдат правилни. Но в много приложения работните характеристики са в достатъчна степен линейни — така че и транзисторите, и радиолампите могат да се считат линейни устройства. Под това се подразбира, че променливите токове, да речем в анодната верига на радиолампата, са право пропорционални на потенциалната разлика на другите електроди, например на потенциала на решетката и на анодния потенциал. И когато такива линейни съотношения съществуват, към устройствата може да се прилага представата за еквивалентни схеми.

Както и в случая на взаимна индукция, това описание трябва да включва в себе си добавъчни генератори на напрежение, които описват влиянието на напреженията или токовете в една част



Фиг. 22-28. Нискочестотна еквивалентна схема на вакуумен триод



Фиг. 22-29. Нискочестотна еквивалентна схема на транзистор

на устройството върху токовете или напреженията в друга негова част. Например анодната верига на триода като правило може да се представи чрез съпротивление, последователно свързано с идеален генератор, чието напрежение е пропорционално на напрежението на решетката. Ще се получи еквивалентната схема, показана на фиг. 22-28.[1] По подобен начин удобно е да се представя веригата на колектора на транзистора като съпротивление, последователно свързано с идеален генератор, чието напрежение е пропорционално на силата на тока, който тече от емитера към базата на транзистора. Еквивалентната схема е подобна на тази на фиг. 22-29. Ние имаме пълното право да се ползуваме от такова представяне на лампите или транзисторите, докато уравненията, които описват тяхното действие, остават линейни. Тогава, даже ако те влизат в сложна верига, нашето общо заключение за еквивалентното представяне на каквото и да е произволно свързване на елементите все още остава вярно.

Веригите на транзистора и на радиолампата имат една чудесна способност, от която са лишени веригите, които включват само импеданси: реалната част на ефективния импеданс $z_{еф}$ може да стане отрицателна. Ние видяхме, че реалната част на z представлява загубите на енергия. Но важната характеристика на транзисторите и радиолампите се състои в това, че те снабдяват веригата с енергия. (Разбира се, те не я „изработват“; те вземат енергия от веригата на постоянния ток, от източника на ток и я превръщат в енергия на променливия ток). Излиза, че е възможно да се получи верига с отрицателно съпротивление. Такава верига има интересно свойство: ако я свържем към импенданс с положителна реална част, т. е. към положително съпротивление и устроим всичко така, че сумата от двете реални части да стане нула, в този обединен кръг няма да има разсейване на енергия. Като няма загуби на енергия, всяко променливо напрежение, щом веднъж го включим, никога повече няма да изчезне. Това е основната идея за работата на осцилатор или генератор на сигнали, който може да се използува като източник за променлив ток с каквато искаме честота.

[1] Тази еквивалентна схема е приложима само за ниски честоти. За високи честоти еквивалентната схема се усложнява, в нея трябва да се включат различни, така наричани „паразитни“, капацитети и индуктивности.

23

Кухи резонатори

23-1. Реални елементи на веригата

23-2. Кондензатор при високи честоти

23-3. Резонансна кухина

23-4. Собствени трептения на кухината

23-5. Кухини и резонансни кръгове

Да се повтори:
гл. 2 (т. I)
„Резонанс“
гл. 49 (т. I)
„Собствени трептения“

23-1. Реални елементи на веригата

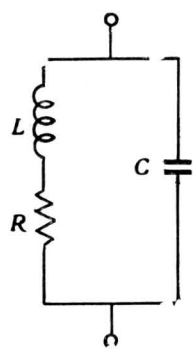
Ако погледнем на която и да е верига, която се състои от идеални импеданси и генератори, откъм някоя двойка изводи, при дадена честота тя ще бъде еквивалентна на генератор $\mathcal{E}$, последователно свързан с импеданс z. Ако приложим към тези клеми напрежение V и изчислим от уравненията силата на тока, между тока и напрежението трябва да се получи линейна зависимост. Понеже всички уравнения са линейни и I трябва да зависи линейно и само линейно от V. Най-общото линейно уравнение може да се напише във вида

$$I = \frac{1}{z}\left(V - \mathcal{E}\right). \tag{23.1}$$

Общо взето, и z и $\mathcal{E}$ могат много сложно да зависят от честотата ω. Обаче отношението (23.1) е отношение, което би се получило, ако зад клемите се намираше просто генератор $\mathcal{E}(\omega)$, последователно свързан с импеданс $z(\omega)$.

Може да се постави и обратният въпрос: имаме някакво електромагнитно устройство с два полюса (изводи) и ни е известна връзката между I и V, т. е. известни са $\mathcal{E}$ и z като функции на честотата; може ли винаги да се намери такава комбинация на идеални елементи, която да даде еквивалентния вътрешен импеданс z? Отговорът на това е такъв: за всяка разумна, т. е. физично осмислена, функция $z(\omega)$ действително е *възможно да се построи* модел с всякаква степен на точност с помощта на верига, съставена от краен брой идеални елемента. Ние не смятаме да изучаваме общата задача, а само ще видим какво може да се очаква в отделните случаи, като се основаваме на физични съображения.

„Известно е, че токът, който протича през реално съпротивление създава магнитно поле. Значи всяко реално съпротивление трябва да притежава и известна индуктивност. По нататък, ако към съпротивлението е приложена някаква потенциална разлика, на краищата му трябва да възникнат заряди, които създават необходимите електрични полета. При изменяне на напрежението пропорционално се изменя и зарядът, така че съпротивлението има и някакъв капацитет. Следва да се очаква, че еквивалентната схема на реалното съпротивление трябва да има такъв вид, както на фиг. 23-1. Ако съпротивлението е добро, неговите така наричани „паразитни елементи“ L и C са малки, така че при тези честоти, за които то е предназначено, ωL е много по-малко от R, а $1/\omega C$ — много по-голямо от R. Затова „паразитните“ елементи могат да се пренебрегнат. Когато пък честотата се повишава, не е изключено значението на тези елементи да нарасне и съпротивлението да заприлича на резонансен кръг.

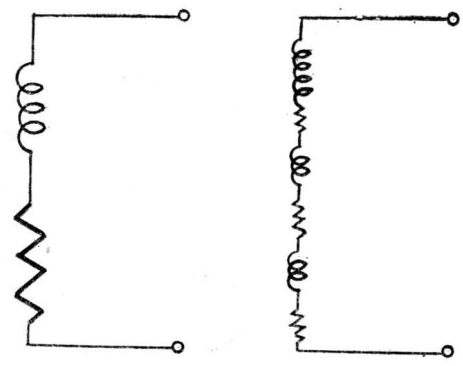


Фиг. 23-1. Еквивалентна схема на реално съпротивление

Реалната индуктивност също така не съвпада с идеалната, импедансът на която е равен на $i\omega L$. Реалната бобина от проводник има някакво съпротивление и при ниски честоти тя фактически е еквивалентна на индуктивност, последователно свързана със съпротивление (фиг. 23-2, *а*). Вие може да си мислите, че в реалната бобина съпротивлението и индуктивността са *обединени*, че съпротивлението е разпределено по целия проводник смесено с неговата индуктивност. Може би трябва да се ползуваме от схема, приличаща повече на фиг. 23-2, *б*, където последовател-

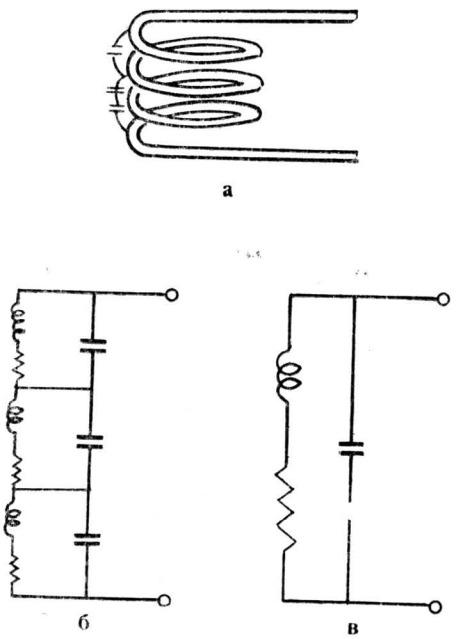
но са свързани няколко малки R и L? Обаче общият импеданс на такава верига е просто равен на $\Sigma R+\Sigma i\omega L$, а това е същото, което дава по-простата диаграма, показана на фиг. 23-2,*а*.

Когато пък честотата се повишава, вече не бива да си представяме реалната бобина във вид на индуктивност плюс съпротивление. Започват да играят роля зарядите, които възникват върху проводниците за създаване на напрежения. Работата изглежда така, като че ли между навивките на проводника са нанизани малки кондензаторчета (фиг. 23-3,*а*). Можем да опитаме да представим приблизително реалната бобина чрез схемата на фиг. 23-3, *б*. За ниски честоти тази схема много добре се имитира от по-простата (фиг. 23-3,*в*); това е пак същият резонансен кръг, който ни даваше високочестотният модел на съпротивлението. Обаче за по-високи честоти по-сложната верига на фиг. 23-3,*б* подхожда по-добре. Така че, колкото по-точно искате да представите истинския импеданс на реалната физична индуктивност, толкова повече идеални елементи трябва да вземете за построяване на изкуствения модел.



Фиг. 23-2. Еквивалентна схема на реална индуктивност при малки честоти

Да погледнем сега по-внимателно това, което става в реалната бобина. Импедансът на индуктивността се изменя като ωL, значи за ниски честоти той става нула — „затваря се на късо“, и ние забелязваме само съпротивлението на проводника. Ако честотата започва да расте, скоро ωL става по-голямо от R и бобината изглежда почти като идеална индуктивност. Ако увеличим честотата още повече, ще започнат да играят роля и капацитетите. Техният импеданс е пропорционален на $1/\omega C$; той е голям при ниските честоти. При достатъчно ниски честоти кондензаторът изглежда като „прекъсване във веригата“ и ако го шунтираме с нещо, през него няма да мине ток. Но при високи честоти токът предпочита да тече през капацитетите между навивките, а не през индуктивността. Поради това токът в бобината скача от едната навивка на другата, без изобщо да помисли да се върти кръг след кръг там, където му се налага да преодолява електродвижещо напрежение. Макар че на нас може би *ни се иска* токът да върви по навивките на бобината, самият той избира по-лек път, като минава по пътя на най-малкия импеданс.



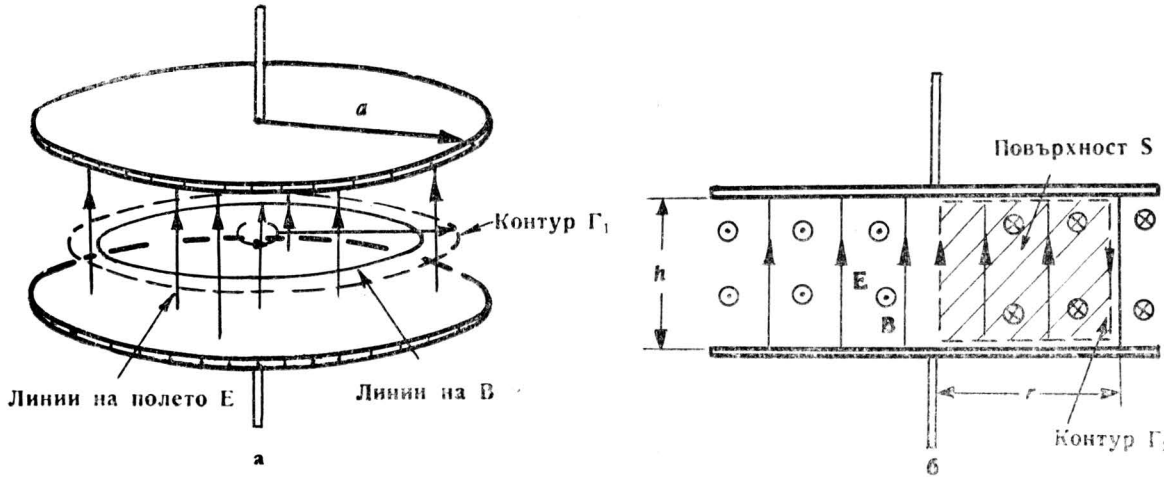
Фиг. 23-3. Еквивалентна схема на реална индуктивност при големи честоти

Ако това би било необходимо, такъв ефект би могъл да се нарече „високочестотна бариера“ или нещо от този род. Подобни работи стават и в другите науки. В аеродинамиката например, ако вие поискате да накарате нещо да се движи по-бързо от звука, а движението е пресметнато при малки скорости, нищо няма да излезе. Това не значи, че е възникнала някаква непреодолима „бариера“; просто трябва да се измени конструкцията. Точно така и нашата бобина, която първоначално са конструирали като „индуктивност“, при много високи честоти работи не като индуктивност, а като нещо друго. За големи честоти трябва да се изобретява вече ново устройство.

23-2. Кондензатор при високи честоти

Сега да обсъдим по-подробно поведението на кондензатора— на геометрично идеалния кондензатор, когато честотата става все по-висока и по-висока. Ние ще проследим изменението на неговите свойства. (Предпочетохме да разглеждаме кондензатор, а не индуктивност, понеже геометрията на чифт плочи е много по-проста от геометрията на макара.) И така, ето кондензаторът (фиг. 23-4,*а*), той се състои от две успоредни кръгли плочи, свързани с външния генератор чрез два проводника. Ако заредим кондензатора с прав ток, на едната плоча ще се появи положителен заряд, на другата — отрицателен, а между плочите ще има хомогенно електрично поле.

Да си представим сега, че вместо прав ток към плочите е приложено променливо напрежение с ниска честота. (После ние ще видим коя честота е „ниска“, а коя „висока“.) Да речем, кон-



Фиг. 23-4. Електрично и магнитно поле между плочите на кондензатор

дензаторът е свързан с нискочестотен генератор. Когато напрежението се изменя, от горната плоча се маха положителният заряд и се прилага отрицателен. В момента, когато става това, електричното поле изчезва, а след това се възстановява, но вече в обратна посока. Зарядът бавно се прелива насам-натам и полето го следва. Във всеки момент електричното поле е хомогенно (фиг. 23-4, *б*); има наистина малки гранични ефекти, но ние смятаме да ги пренебрегнем. Големината на електричното поле може да се напише във вида

$$E = E_0 e^{i\omega t}, \tag{23.2}$$

където E_0 е постоянно.

Но ще остане ли това вярно, когато честотата нарасне? Не, защото при движението на електричното поле нагоре и надолу през произволната крива Γ_1 преминава поток на електричното поле (фиг. 23-4, *а*). А както ви е известно, изменящото се електрично поле създава магнитно. Съгласно с едно от уравненията на Максвел при наличие на изменящо се електрично поле (както е в нашия случай) трябва да съществува и криволинеен интеграл от магнитното поле. Интегралът от магнитното поле по затворен кръг, умножен по c^2, е равен на скоростта на изменението във времето на електричния поток през повърхността вътре в кръга (ако няма никакви токове):

$$c^2 \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \,.\, d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{вътре в } \Gamma} \mathbf{E} \,.\, \mathbf{n}\, da. \tag{23.3}$$

И така, колко е това магнитно поле тук? Това е лесно да се узнае. Да вземем за кривата Γ_1 кръг с радиус r. От симетрията е ясно, че магнитното поле върви така, както е показано на чертежа. Тогава интегралът от **B** е равен на $2\pi rB$. Понеже електричното поле е хомогенно, потокът му е равен просто на E, умножено с лицето на кръга πr^2.

$$c^2 B \,.\, 2\pi r = \frac{\partial}{\partial t} E \,.\, \pi r^2. \tag{23.4}$$

Производната на E по времето в нашето променливо поле е равна на $i\omega E_0 e^{i\omega t}$. Значи в нашия кондензатор магнитното поле е

$$B = \frac{i\omega r}{2c^2} E_0 e^{i\omega t}. \tag{23.5}$$

С други думи, магнитното поле също трепти и неговата интензивност е пропорционална на ω и r.

Какъв ще бъде ефектът от това? Когато съществува магнитно поле, което се изменя, възникват индуцирани електрични полета и действието на кондензатора ще стане подобно на индуктивността. С нарастване на честотата магнитното поле ще се

усилва: то е пропорционално на скоростта на изменението на E, т. е. на ω. Импедансът на кондензатора повече няма да бъде равен просто на $1/i\omega C$.

Нека продължим да увеличаваме честотата и да разгледаме по-внимателно какво става. Ние имаме магнитно поле, което прелива насам-натам. Но тогава и електричното поле не може да остане еднородно, както ние по-рано предполагахме! Ако има изменящо се магнитно поле, по закона на Фарадей трябва да съществува и криволинеен интеграл от електричното поле. Така че, ако съществува забележимо магнитно поле (а именно така е при високи честоти), електричното поле не може да бъде еднакво на всички разстояния от центъра. То трябва така да се изменя с r, че криволинейният интеграл от него да бъде равен на изменящия се поток на магнитното поле.

Да видим ще можем ли да си представим правилното електрично поле. Това може да се направи, като пресметнем „поправката“ към онова, което беше при ниските честоти—към еднородното поле. Да означим полето при ниски честоти с E_1 и нека то както по-рано е равно на $E_0e^{i\omega t}$, а правилното поле да напишем във вида

$$E=E_1+E_2,$$

където E_2 е поправката поради изменението на магнитното поле. При всякакви ω ние ще пишем полето в центъра на кондензатора във вида $E_0e^{i\omega t}$ (като определяме с това E_0), така че в центъра поправка няма да има: $E_2=0$ при $r=0$.

За да намерим E_2, можем да използуваме интегралната форма на закона на Фарадей

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}\,.\,d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\ (\text{потока на } B).$$

Интегралите се смятат просто, ако ги изчисляваме по линията Γ_2, която е показана на фиг. 23-4, *б* и върви отначало по оста, след това по радиуса покрай горната плоча до разстояние r, после вертикално надолу до долната плоча и обратно до оста по радиуса. Криволинейният интеграл от E_1 по тази крива е, разбира се, равен на нула; значи в интеграла дава принос само E_2 и интегралът е равен просто на $-E_2(r)h$, където h е междината между плочите. (Ние смятаме E за положително, когато е насочено нагоре.) Това е равно на скоростта на изменението на потока на B, който ще се получи, ако изчислим интеграла по защрихованата площ S вътре в Γ_2 (фиг. 23-4, *б*). Потокът през вертикалната ивица с ширина dr е равен на $B(r)hdr$, а сумарният поток — на

$$h\int B(r)\,dr.$$

Като положим $-\partial/\partial t$ от потока равно на криволинейния интеграл от E_2, получаваме

$$E_2(r)=\frac{\partial}{\partial t}\int B(r)\,dr. \tag{23.6}$$

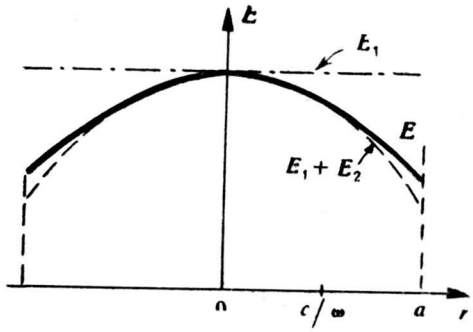
Забележете, че h отпадна: полетата не зависят от големината на междината между плочите.

Като използуваме за $B(r)$ формулата (23.5), получаваме

$$E_2(r)=\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{i\omega r^2}{4c^2}\,E_0e^{i\omega t}.$$

Диференцирането по времето ще ни даде просто още един множител $i\omega$:

$$E_2(r)=-\frac{\omega^2r^2}{4c^2}\,E_0e^{i\omega t}. \tag{23.7}$$



Фиг. 23-5. Електричното поле между плочите на кондензатор при високи честоти. (Граничните ефекти са пренебрегнати.)

Както се и очакваше, индуцираното поле се стреми да сведе до нула първоначалното електрично поле. Коригираното поле $E=E_1+E_2$ тогава е равно на

$$E=E_1+E_2=\left(1-\frac{1}{4}\,\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)E_0 e^{i\omega t}. \tag{23.8}$$

Електричното поле в кондензатора вече не е еднородно; то има параболична форма (пунктираната линия на фиг. 23-5). Вие виждате, че нашият простичък кондензатор вече малко се усложнява.

Нашите резултати може да се използуват за изчисляване импеданса на кондензатора при по-високи честоти. Като знаем електричното поле, можем да пресметнем заряда на плочите и да узнаем как токът през кондензатора зависи от честотата ω. Но тази задача сега не ни интересува. Нас повече ни интересува друго: какво ще стане, ако честотата продължава да се увеличава, какво ще стане при още по-високи честоти? Но нима ние вече не свършихме нашите сметки? Не, защото след като вече поправихме електричното поле, значи и магнитното поле, което ние по-рано пресметнахме, вече не е годно. Приблизително магнитното поле (23-5) е правилно, но само в първо приближение. Ще го означим с B_1, а (23-5) ще препишем във вида

$$B_1=\frac{i\omega r}{2c^2}\,E_0 e^{i\omega t}. \tag{23.9}$$

Спомнете си, че това поле се появи от изменението на E_1. Правилното магнитно поле ще се създава от изменението на сумарното електрично поле E_1+E_2. Ако магнитното поле представим във вида $B=B_1+B_2$, второто събираемо е просто добавъчното поле, създавано от полето E_2. За да намерим B_2, трябва да повторим всички тези разсъждения, които използувахме, когато пресмятахме B_1: криволинейният интеграл от B_2 по кривата Γ_1 е равен на скоростта на изменението на потока на E_2 през Γ_1. Пак ще се получи същото уравнение (23.4), но B в него трябва да заменим с B_2, а E — с E_2

$$c^2 B_2 2\pi r=\frac{\partial}{\partial t}\ (\text{потока на } E_2 \text{ през } \Gamma_1).$$

Понеже E_2 се изменя с радиуса, трябва за получаване на неговия поток да интегрираме по кръговата повърхност вътре в Γ_1. Като вземем за елемент на площта $2\pi r dr$, ще напишем този интеграл във вида

$$\int_0^r E_2(r)\,2\pi r dr.$$

Значи $B_2(r)$ ще се изрази така:

$$B_2(r)=\frac{1}{rc^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\int E_2(r)\,r dr. \tag{23.10}$$

Като заместим тук $E_2(r)$ от (23.7), получаваме интеграл от $r^3\,dr$, който е равен очевидно на $r^4/4$. Нашата поправка към магнитното поле ще бъде

$$B_2(r)=-\frac{i\omega^3 r^3}{10c^4}\,E_0 e^{i\omega t}. \tag{23.11}$$

Но ние още не сме свършили! Щом магнитното поле не е такова, каквото отначало мислехме, значи невярно сме пресмятали E_2. Трябва да се намери още поправката към E, предизвикана от добавъчното магнитно поле B_2. Тази добавъчна поправка към електричното поле ще наречем E_3. Тя е свързана с магнитното поле B_2 също така, както E_2 беше свързана с B_1. Може пак да се прибегне към същото съотношение (23.6), като изменим в него само индексите

$$E_3(r)=\frac{\partial}{\partial t}\int B_2(r)\,dr. \qquad (23.12)$$

Като заместим тук нашия нов резултат (23.11), получаваме новата поправка към електричното поле:

$$E_3(r)=+\frac{\omega^4 r^1}{64c^4}\,E_0e^{i\omega t}. \qquad (23.13)$$

Ако сега нашето два пъти поправено поле напишем във вида $E=E_1+E_2+E_3$, ще получим

$$E=E_0e^{i\omega t}\left[1-\frac{1}{2^2}\left(\frac{\omega r}{c}\right)^2+\frac{1}{2^2\cdot 4^2}\left(\frac{\omega r}{c}\right)^2\right]. \qquad (23.14)$$

Изменението на електричното поле с радиуса става вече не по парабола, както беше на фиг. 23-5; при големи радиуси стойността на полето лежи малко по-горе от кривата (E_1+E_2).

Засега още не сме дошли до края. Новото електрично поле ще предизвика нова поправка на магнитното поле, а отново поправеното магнитно поле ще предизвика необходимостта от понататъшна поправка за електричното поле и т. н. и т. н. Но ние вече имаме всички необходими формули. За B_3 може да се използува (23.10), като изменим индексите при B и E от 2 на 3.

Поредната поправка за електричното поле е равна на

$$E_4=-\frac{1}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\left(\frac{\omega r}{c}\right)^6 E_0e^{i\omega t}.$$

С тази степен на точност цялото електрично поле се дава с формулата

$$E=E_0e^{i\omega t}\left[1-\frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^6+\ldots\right], \qquad (23.15)$$

където числените коефициенти са написани в такъв вид, че става ясно как да се продължи редът.

Като краен резултат се получава, че електричното поле между плочите на кондензатора при всякаква честота се дава с произведението на $E_0e^{i\omega t}$ и безкрайния ред, който съдържа само променливата $\omega r/c$. Ако искаме, можем да дефинираме чрез безкрайния ред в скобките на формула (23-15) специална функция, която ще означим с $J_0(x)$:

$$J_0(x)=1-\frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots \qquad (23.16)$$

Тогава търсеното решение е произведението на $E_0e^{i\omega t}$ по тази функция при $x=\omega r/c$

$$E=E_0e^{i\omega t}J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right). \qquad (23.17)$$

Ние означихме нашата специална функция с J_0, защото естествено не ние с вас първи сме се заели със задачата за трептения в цилиндър. Тази функция се е появила отдавна и нея вече са свикнали да я означават с J_0. Тя винаги възниква, когато вие решавате задача за вълни, които притежават цилиндрична симетрия. Функцията J_0 по отношение на цилиндричните вълни е същото, което е косинусът за вълните, които се разпространяват по права линия. И така, това е много важна функция. Тя е намерена много отдавна. След това с нея е свързал името си математикът Бесел. Индексът нула означава, че Бесел е открил цяло множество различни функции, а нашата е най-първата от тях.

Другите функции на Бесел — J_1, J_2 и т. н. — се отнасят за цилиндричните вълни, силата на които се изменя при обикаляне около оста на цилиндъра.

Напълно коригираното електрично поле между плочите на нашия кръгов кондензатор, което се дава с формулата (23.17), е показано на фиг. 23-5 с непрекъсната линия. За не много високи честоти нашето второ приближение е напълно достатъчно. Третото приближение би било още по-добро — толкова добро, че ако

го начертаем, вие не бихте забелязали разликата между него и непрекъснатата линия. В следващия параграф вие ще видите обаче, че може да потрябва и целият ред, за да се получи точно описание на полето за големи радиуси или при високи честоти.

23-3. Резонансна кухина

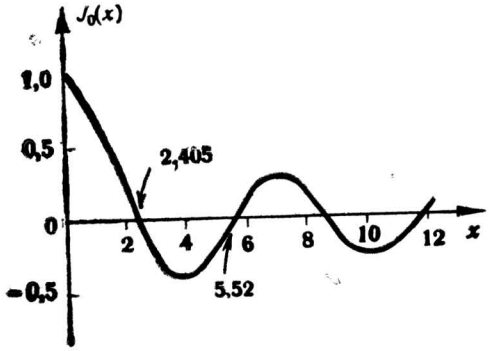
Да видим сега какво ще даде нашето решение за електричното поле между плочите на кондензатора, ако продължим да увеличаваме честотата все повече и повече. При големи ω параметърът $x=\omega c/r$ също става голям и първите няколко събираеми от реда за J_0 от x бързо нарастват. Това означава, че параболата, която ние начертахме на фиг. 23-5, при високи честоти се огъва надолу по-рязко.

Наистина тя изглежда така, като че ли полето при висока честота през цялото време се старае да стане нула някъде при c/ω, приблизително равно на половината на a. Нека да видим действително ли функцията J_0 минава през нулата и става отрицателна. Отначало ще опитаме за $x=2$:

$$J_0(2)=1-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{36}=0{,}22.$$

Това още не е нула; но да опитаме по-голямо число, да речем $x=2{,}5$. Заместването дава

$$J_0(2{,}5)=1-1{,}56+0{,}61-0{,}09=-0{,}04.$$



Фиг. 23-6. Функцията на Бесел $J_0(x)$

В точката $x=2{,}5$ функцията J_0 вече е преминала през нулата. Резултатите при $x=2$ и при $x=2{,}5$ изглеждат така, като че ли J_0 е преминала през нулата на една пета от пътя от 2,5 до 2. Затова трябва да проверим за числото 2,4

$$J_0(2{,}4)=1-1{,}44+0{,}52-0{,}08=0{,}00.$$

Получи се нула с точност до втория знак след запетаята. Ако пресмятаме по-точно (или понеже J_0 е добре позната функция, ако потърсим отговора в някоя книга), ще видим, че J_0 преминава през нула при $x=2{,}405$. Ние извършихме пресмятането собственоръчно, за да ви покажем, че вие също сте в състояние да откривате подобни неща, а не да ги заимствувате от книгите.

Ако вече сте погледнали за J_0 в книга, интересно е да се изясни как върви тя при големи стойности на x; тя напомня кривата на фиг. 23-6. Когато x нараства, $J_0(x)$ осцилира между положителните и отрицателните стойности с намаляваща амплитуда на осцилациите.

Ние получихме интересен резултат: ако честотата се увеличи достатъчно, електричните полета в центъра на кондензатора и по краищата му могат да бъдат насочени в противоположни посоки. Например нека ω е така голямо, че $x=\omega r/c$ на външния край на кондензатора да е равно на 4; тогава на фиг. 23-6 на края на кондензатора отговаря абсциса $x=4$. Това означава, че нашият кондензатор работи при честота $\omega=4c/a$. На края на плочите електричното поле ще бъде доста голямо, но насочено не нататък, накъдето би могло да се очаква, а в обратна посока. Това ужасно нещо може да стане с кондензатора при високи честоти. При прехода към много високи честоти електричното поле с отдалечаването от центъра на кондензатора много пъти изменя посоката си. Освен това съществува още свързаното с тези електрични полета магнитно поле. Не е удивително, че нашият кондензатор при високи честоти вече не напомня идеалния капацитет. Може даже да се замислим над това, на какво прилича той повече: на капацитет или на индуктивност. Трябва освен това да се подчертае, че на краищата на кондензатора има и по-сложни ефекти, които ние пренебрегнахме. Например там става още излъчване на вълни извън края на кондензатора, така че истински-

те полета са много по-сложни от тези, които ние пресмятнахме. Впрочем ние няма сега да се занимаваме с тези ефекти.

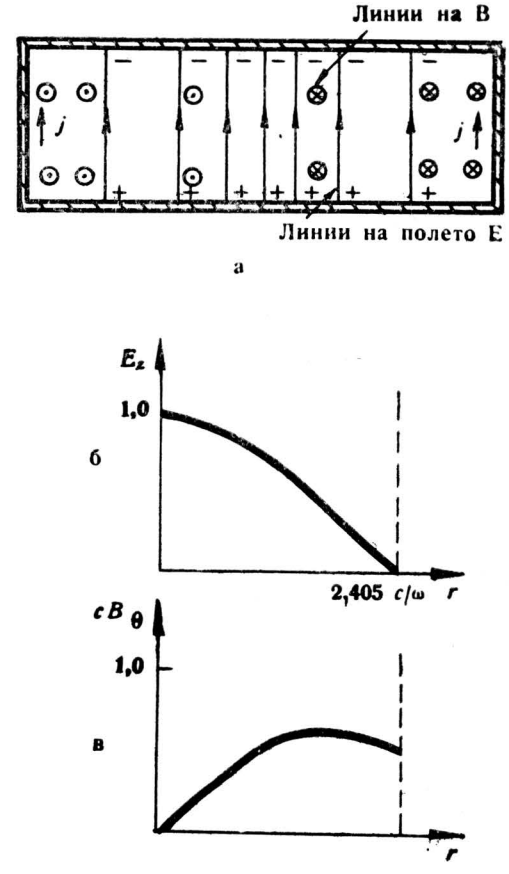
Би могло да се опитаме да представим еквивалентна схема за кондензатора, но вероятно ще бъде по-добре, ако просто приемем, че кондензаторът, който конструирахме за нискочестотни полета, вече не е годен, когато честотите са твърде високи. И ако искаме да изучим как действува такъв обект при високи честоти, необходимо ни е да оставим тези приближения на уравненията на Максвел, които ние правихме, като изучавахме веригите и да се върнем към пълната система уравнения, която описва напълно полетата в пространството. Вместо да манипулираме с идеализираните елементи на веригата, трябва да оперираме с реални проводници, с такива, каквито са те всъщност, като вземаме пред вид всички полета в пространството между тях. Например, ако ни е нужен резонансен кръг за високи честоти, не е необходимо да се опитваме да го конструираме с помощта на бобина и плосък кондензатор.

Ние вече споменахме, че плоският кондензатор, който разглеждахме, прилича, от една страна, на капацитет, а от друга — на индуктивност. От електричното поле възникват заряди на повърхностите на плочите, а от магнитното — обратни електродвижещи напрежения. Не може ли да се окаже, че имаме вече готов резонансен кръг? Излиза—да! Представете си, че ние сме избрали такава честота, при която картината на електричното поле пада до нула на някакво разстояние от края на диска; с други думи, ние сме избрали $\omega a/c$, по-голямо от 2,405. Навсякъде по окръжността, центърът на която лежи на оста на плочите, електричното поле ще стане нула. Да вземем парче ламарина и да изрежем ивичка с такава ширина, че тя точно да се помести между плочите на кондензатора. След това да я огънем във формата на цилиндър с такъв радиус, при който електричното поле е равно на нула. Щом там няма електрично поле, по поставения в кондензатора цилиндър няма да протекат никакви токове и няма да се изменят нито електричните, нито магнитните полета. Ние изглежда можахме да свържем на късо плочите на кондензатора, без нищо да изменим в него. И погледнете какво се получи: стана истинска цилиндрична кутия с електрични и магнитни полета вътре, при това изобщо несвързана с външния свят Полетата вътре не се изменят даже ако отрежем излизащите навън краища на плочите и водещите към кондензатора проводници. Ще остане само затворената кутия с електрични и магнитни полета вътре в нея (фиг. 23-7, *а*). Електричните полета трептят напред-назад с честота ω, която, не забравяйте, определи диаметъра на кутията. Амплитудата на трептящото поле E се изменя с разстоянието от оста на кутията така, както е показано на фиг. 23-7, *б*. Тази крива е просто първата дъга на функцията на Бесел от нулев порядък. В кутията има още и кръгово магнитно поле, което осцилира във времето с отместване по фаза на 90° спрямо електричното поле.

Магнитното поле може също да се развие в ред и изобрази графично, както това е направено на фиг. 23-7, *в*.

Но как пък се получи, че в кутията могат да съществуват електрични и магнитни полета, отделени от външния свят? Поради това че електричното и магнитното поле поддържат сами себе си: изменението на **E** създава **B**, а изменението на **B** създава **E** — всичко в съгласие с уравненията на Максвел. Магнитното поле е отговорно за индуктивността, електричното — за капацитета; заедно те създават нещо, приличащо на резонансен кръг. Забележете, че описаните от нас условия възникват само тогава, когато радиусът на кутията е точно равен на 2,405 c/ω. В кутия с даден радиус трептящите електрично и магнитно поле ще се поддържат едно друго (по описания начин) само при тази определена честота. И така, цилиндрична кутия с радиус r *резонира* при честота

$$\omega_0 = 2{,}405\,\frac{c}{r}. \qquad (23.18)$$

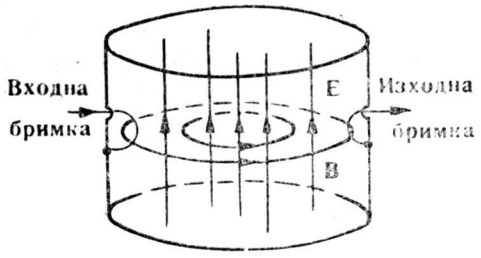


Фиг. 23-7. Електрично и магнитно поле в затворена кутия

Ние казахме, че ако кутията е напълно затворена, полетата ще продължат да трептят също така, както и по-рано. Това не е съвсем така. Това би било така, ако стените на кутията бяха идеални проводници. В реална кутия обаче осцилиращите токове, които текат по стените, могат поради съпротивлението на материала да губят енергия. Трептенията на полетата постепенно ще замрат. От фиг. 23-7 е ясно, че там трябва да съществуват силни токове, свързани с електричните и магнитните полета вътре в кухината. Поради това че вертикалното електрично поле внезапно изчезва на горната и долната плоскост на кутията, там то има силна дивергенция; значи на вътрешната повърхност на кутията трябва да се появяват положителни и отрицателни заряди (фиг. 23-7, *а*). Когато електричното поле изменя посоката си, трябва да изменят знака си и зарядите, така че между горната и долната плоскост на кутията трябва да тече променлив ток. Той ще тече по страничната повърхност на кутията, както е показано на чертежа. Това че по страните на кутията трябва да протичат токове, може да се разбере още като разгледаме какво става в магнитното поле. Кривата на фиг. 23-7, *в* ни съобщава, че магнитното поле на края на кутията внезапно става нула. Такова внезапно изменение на магнитното поле може да стане само поради това, че по стената тече ток. Този ток именно създава променливите електрични заряди на горната и долната плочи на кутията.

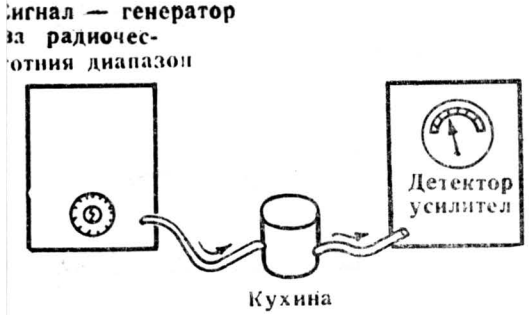
Вас може да ви удиви нашето откритие — намирането на токове по страничните стени на кутията. Какво става с нашето предишно твърдение, че нищо няма да се измени, ако в областта, където електричното поле е равно на нула, поставим тези странични стени? Спомнете си обаче, че когато ние за пръв път поставяхме в кондензатора тези странични стени, горната и долната плоча излизаха извън тях, така че магнитни полета имаше и извън нашата кутия. И само когато отрязахме излизащите извън края на кутията части на кондензатора, по вътрешните части на страничните стени се появиха някакви токове.

Макар че електричните и магнитните полета в абсолютно затворена кутия поради загуба на енергия постепенно ще изчезнат, може да се направи така, че това да не стане. Затова е необходимо да се пробие отстрани в кутията дупчица и по малко да се добавя енергия, за да се компенсират загубите. Трябва да се вземе жичка, да се пъхне през дупчицата в кутията и да се запои към вътрешната част на стената, за да се получи примка (фиг. 23-8). Ако свържем тази жичка с източник на високочестотен променлив ток, този ток ще снабдява с енергия електричното и магнитното поле в кутията и ще поддържа трептенията. Това ще стане, разбира се, само в този случай, ако честотата на източника на енергия съвпадне с резонансната честота на кутията. Ако честотата на източника не е такава, електричните и магнитните полета няма да резонират и полетата в кутията ще бъдат слабички.



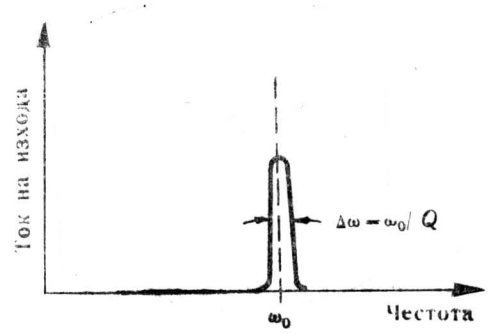
Фиг. 23-8. Свързване на резонансна кухина

Резонансното поведение лесно се наблюдава, ако в кутията направим друга дупка и вденем в нея друга примка (фиг. 23-8). Изменящото се магнитно поле, което минава през тази втора примка, ще генерира в нея индукционно електродвижещо напрежение. Ако сега тази примка свържем с външен измерителен кръг, токовете в него ще бъдат пропорционални на интензивността на полетата в кухината. Представете си сега, че входната примка на нашата кухина е свързана с радиочестотен сигнал-генератор (фиг. 23-9). Сигнал-генераторът се състои от източник на променлив ток, честотата на който може да се мени, като се завърта ръчката на таблото на генератора. Да свържем след това изходната примка на кухината с „детектор" — уред, който измерва тока от изходната примка. Отчитанията по неговата скала са пропорционални на този ток. Ако след това измерим тока на изхода като функция от честотата на сигнал-генератора, ще получим крива, подобна на изобразената на фиг. 23-10. Токът на изхода е малък при всички честоти освен тези, които са близки до ω_0 — резонансната честота на кухината. Резонансната крива мно-



Фиг. 23-9. Постановка за наблюдаване на резонанс в кухината

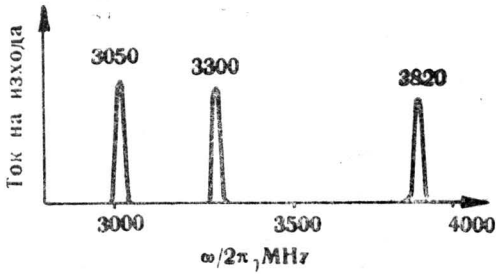
го прилича на тази, за която се говореше в гл. 23 (т. I). Обаче ширината на резонанса е по-малка, отколкото обикновено се получава в резонансните кръгове, съставени от индуктивности и капацитети; с други думи, Q (доброкачествеността) на кухината е много голяма. Често се срещат даже Q от порядъка на 100 000 и повече, особено ако вътрешните стени на кухината са направени от материал с много добра проводимост, например от сребро.



Фиг. 23-10. Крива на отклика на честота за резонансна кухина

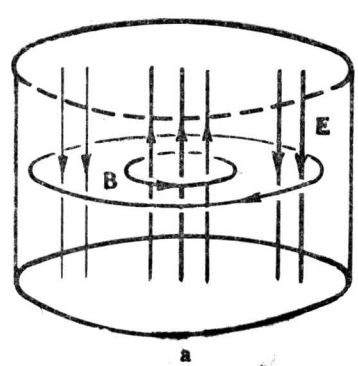
23-4. Собствени трептения на кухината

Да предположим, че се опитваме да проверим своята теория и правим измервания с истинска кутия. Вземаме цилиндрична кутия с диаметър 7,5 cm и височина около 6,3 cm. Към нея се поставят входната и изходната примка (виж фиг. 23-8). Ако пресметнем очакваната за тази кутия резонансна честота по формула (23.18), ще получим $f_0 = \omega_0/2\pi = 3010$ MHz. Вземаме сигнал-генератор с честота около 3000 MHz и започваме леко да изменяме честотата, докато се появи резонанс; забелязваме, че най-силен ток на изхода възниква например при честота 3050 MHz. Това е много близко до предсказаната резонансна честота, но не съвпада съвсем. Могат да се посочат няколко възможни причини за различието. Може би резонансната честота малко се е изменила, защото ние сме изрязали няколко дупки, за да поставим съединителните примки. Но надали е това: дупките би трябвало малко да понижават резонансната честота, така че причината не е в това. Тогава може би в калибровката на честотата на сигнал-генератора е допусната малка грешка или измерването на диаметъра на кухината не е достатъчно точно. Във всеки случай съвпадението е доста добро.

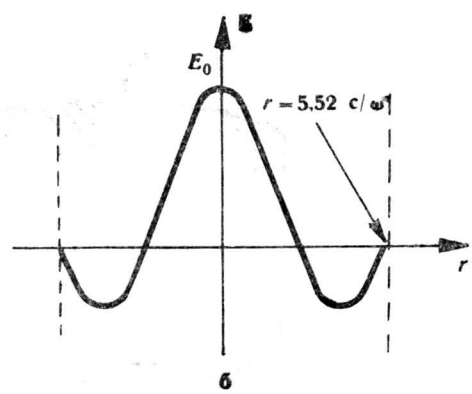


Фиг. 23-11. Наблюдавани резонансни честоти на цилиндрична кухина

Но много по-важно е това, което ще стане, когато честотата на нашия сигнал-генератор вече значително се отдалечи от 3000 MHz. Тогава ще получим резултата, даден на фиг. 23-11. Ако започнем силно да изменяме честотата, ще се получи, че освен очаквания резонанс близо до 3000 MHz има още и друг резонанс около 3300 MHz и трети около 3820 MHz. Какво означават тези добавъчни резонанси? Отговорът се дава от фиг. 23-6. Там ние предположихме, че на края на кутията се пада първата нула на функцията на Бесел. Но нали не е изключено, че на края на кутията отговаря втората нула на функцията на Бесел, така че в промеждутъка от центъра на кутията до нейния край става едно пълно трептение на електричното поле (фиг. 23-12, *а*). Такъв тип трептения на полетата е напълно допустим и естествено е да се очаква, че кутията ще започне да резонира при такава честота. Но забележете: втората нула на функцията на Бесел се наблюдава при $x = 5{,}52$ (фиг. 23- 12, *б*), т. е. повече от два пъти по-далеч, отколкото първата нула. Значи резонансната честота на трептенията от този тип би превишавала 6000 MHz. Нея без съмнение можем да я забележим, но това не ни обяснява резонанса при 3300 MHz.



а

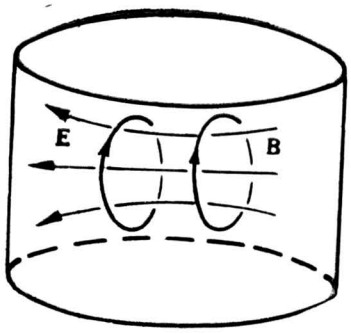


б

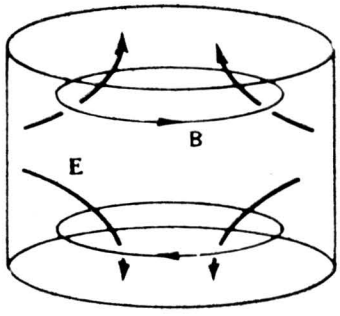
Фиг. 23-12. По-високочестотен тип трептения

Цялата работа е в това, че в своя анализ за поведението на резонансната кухина разгледахме само едно възможно геометрично разположение на електричните и магнитните полета. Ние смятахме, че електричното поле е вертикално, а магнитното е разположено по хоризонтални кръгове. Но са възможни и други полета. От тях се иска само да удовлетворяват уравненията на Максвел и електричното поле да влиза в стените под прав ъгъл към тях. Ние взехме случай, когато капакът и основата на кутията са плоски, но нищо не би се изменило много, ако те бяха огънати. Пък и въобще откъде кутията „ще знае“ къде ѝ е капакът, къде основата и къде страните. Действително може да се покаже, че съществува такъв тип трептения на полетата вътре в кутията, при който електричното поле е насочено повече или по-малко по диаметъра ѝ (фиг. 23-13).

Не е чак толкова трудно да се разбере защо собствената честота на трептенията от този тип няма силно да се отличава от



Фиг. 23-13. Напречен тип трептения в цилиндрична кухина

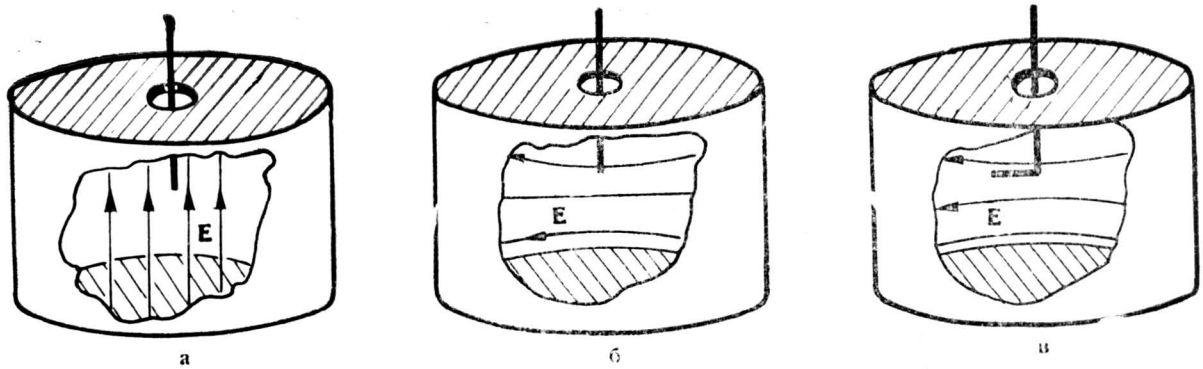


Фиг. 23-14. Още един тип трептения в цилиндрична кухина

собствената честота на първия разгледан от нас тип трептения. Представете си, че вместо цилиндрична кухина вземем кухина, която е куб със страна 7,5 cm. Ясно е, че тя ще има три различни типа трептения, но с една и съща честота. Типът трептения, при които електричното поле е насочено вертикално, ще има същата честота, както и типът трептения, при които електричното поле е насочено надясно или наляво. Ако сега този куб преправим в цилиндър, честотите някак ще се изменят. Но все пак може да се очаква, че промяната няма да бъде голяма, ако размерите на кухината се изменят много малко. Значи честотата на такъв тип трептения, както е на фиг. 23-13, не трябва много да се различава от честотата на фиг. 23-8. Би могло по-подробно да се пресметне собствената честота на този тип трептения, който е показан на фиг. 23-13, но ние сега няма да правим това. Ако бяха направени изчисления, бихме открили, че при предположените размери резонансната честота се получава съвсем близко до наблюдавания резонанс при 3300 MHz. С помощта на подобни пресмятания може да се покаже, че трябва да съществува още друг тип трептения при другата забелязана от нас резонансна честота — 3800 MHz. Електричните и магнитни полета, които са характерни за този тип трептения, са показани на фиг. 23-14. Електричното поле тук повече не се опитва да се проточи през цялата кухина. То е насочено от страничните стени към основите

Сега, надявам се, вие вече ще ми повярвате, че при по-нататъшно повишаване на честотата следва да се очаква появяването на все нови и нови резонанси. Съществуват множество различни типове трептения; всеки от тях има своя честота, която отговаря на някакво частно разположение на електричните и магнитните полета. Всяко такова разположение на полетата наричат *собствено трептение* (или мод). Резонансната честота на всеки тип трептения може да се пресметне, като се намерят от уравненията на Максвел електричните и магнитни полета в кухината.

Как можем да узнаем, като наблюдаваме резонанс при някоя определена честота, какъв тип трептения се възбужда при това? Един от начините е такъв: трябва в кухината през отвор да се провре жичка. Ако електричното поле е насочено по жичката (фиг. 23-15, *а*), в нея ще възникнат сравнително силни токове. Те ще започнат силно да смучат енергия от полетата и резонансът ще бъде подавен. Ако пък електричното поле бъде такова, както на фиг. 23-15, *б*, жичката ще създаде много по-малък ефект. В каква посока е насочено полето на това място при този тип трептения, можем да узнаем, като огънем жичката така, както е показано на фиг. 23-15, *в*. Завъртайки жичката, вие ще видите, че тя силно изменя силата на резонанса, когато нейният край е успореден на E и малко влияе на резонанса, ако той е обърнат напреки на E.

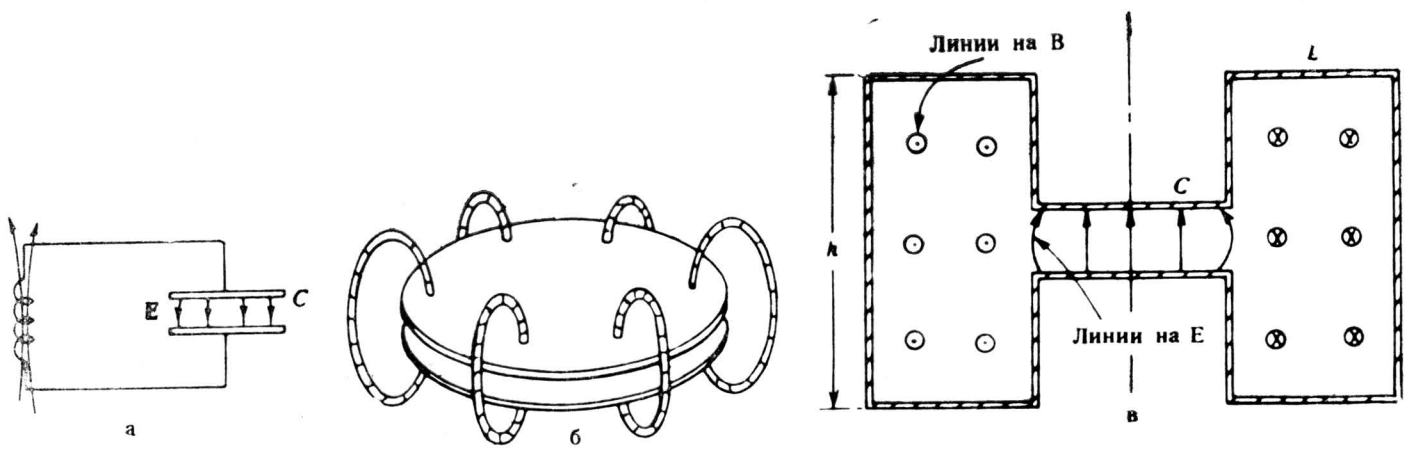


Фиг. 23-15. Неголяма жичка, вкарана в кухината, ако е успоредна на E, ще изкриви по-силно резонанса, отколкото тази, която е разположена напречно на E

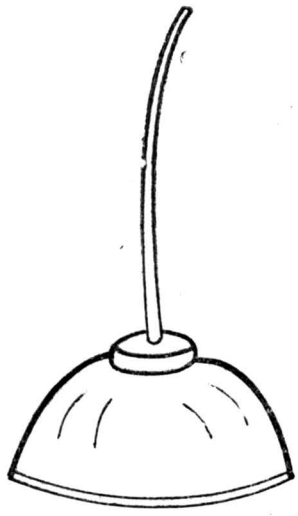
23-5. Кухини и резонансни кръгове

Макар описаната от нас резонансна кухина по вид да е много различна от обикновения резонансен кръг, който се състои от бобина и кондензатор, двете резонансни системи са тясно свързани помежду си. И двете са членове на едно семейство; това са само два гранични примера на електромагнитни резонатори и между тях могат да се поместят доста междинни стадии. Да предположим, че свързваме успоредно кондензатор с бобина и ще образуваме резонансен кръг (фиг. 23-16, *а*). Този кръг ще резонира на честота $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Ако ние поискаме да повишим честотата в този кръг, това може да се постигне, като понижим индуктивността L, например чрез намаляване броя на навивките на бобината. Но далеч по този път няма да стигнем. Ще дойдем до последната навивка и тогава ще остане просто парче проводник, което съединява горната и долната плоча на кондензатора. Би могло да се продължи повишаването на резонансната честота, като се намалява капацитетът; но може и по-нататък да се намалява индуктивността, като се свържат успоредно няколко индуктивности подред. Две индуктивности с по една навивка, включени успоредно една на друга, ще доведат до половината индуктивност на едната навивка. Така че даже като докараме бобината до една навивка, можем да продължим повишаването на резонансната честота, като добавяме отделни полупръстени, съединяващи горната плоча на кондензатора с долната. На фиг. 23-16, *б* са показани плочите на кондензатора, съединени с шест подобни „индуктивности от една навивка". Като продължим да прибавяме нови парчета проводник, постепенно ще преминем към съвършено затворена резонансна система. Такава система (по-точно нейното сечение по оста) е показана на фиг. 23-16, *в*. Сега индуктивността е кух цилиндър, запоен към краищата на плочите на кондензатора. Електричните и магнитните полета ще имат посоката, показана на чертежа. Такъв предмет е в същност вече резонансна кухина. Наричат я „натоварена" кухина. Но нея може все още да я разглеждаме също като L—C-кръг, в който капацитивната част е областта, където се намира по-голямата част от електричното поле, а индуктивната — където се намира по-голямата част от магнитното поле.

Ако поискаме да повишим честотата на резонатора на фиг. 23-16,*в* повече, трябва още да намалим индуктивността L. За да постигнем това, трябва да намалим геометричните размери на индуктивната секция, например да намалим височината h на чертежа. При намаляването на h резонансната честота расте. В края на краищата може, разбира се, да стигнем до такова положение, при което височината h се изравни с междината между плочите. Ще се получи обикновена цилиндрична кутия; нашият резонансен кръг ще се превърне в кухия резонатор, показан на фиг. 23-7.



Фиг. 23-16. Резонатори с нарастваща резонансна честота



Фиг. 23-17. Още една резонансна кухина

Забележете сега, че в първоначалния резонансен L—C-кръг (фиг. 23-16) електричните и магнитните полета бяха съвършено разделени. Когато постепенно видоизменяхме резонансната система, като непрекъснато повишавахме честотата ѝ, магнитното поле все по-тясно и по-тясно се сближаваше с електричното, докато в кухия резонатор окончателно се смеси с него.

Макар че всички кухи резонатори, за които се говореше в тази глава, бяха цилиндрични, в самата цилиндрична форма няма нищо вълшебно. Кутия от какъвто и да е вид все едно ще притежава резонансни честоти, които отговарят на допустимите типове трептения на електричните и магнитни полета. Например „кухината“ на фиг. 23-17 ще има своя собствена съвкупност от резонансни честоти, макар и да е трудно да ги пресметнем.

24

Вълноводи

24-1. Предаваща линия

В предишната глава изяснихме какво ще се случи със съсредоточените елементи на веригата, ако им подадем много висока честота. Ние стигнахме до извода, че резонансният кръг може да бъде заменен с кухина, вътре в която полетата встъпват в резонанс едно с друго. Но има и друг интересен технически въпрос: как да се свържат помежду си два предмета, за да може да се предаде електричната енергия от единия на другия? В нискочестотните вериги тази връзка се осъществява по проводници, но този начин не е твърде добър при високи честоти, защото енергията се разсейва на всички страни и е трудно да се контролира накъде ще потече. От проводниците се разпръскват полета във всички посоки; при това токовете и напреженията с висока честота не „се провеждат" много добре от проводниците. В тази глава искаме да си изясним как може да се съединят предметите помежду си при висока честота. Такъв е поне единият подход към темата на нашата лекция.

Но може към нея да се подходи и иначе. Може да се каже, че ние досега обсъждахме поведението на вълните в празното пространство, а сега дойде време да видим какво ще се случи, ако ограничим трептящите полета в едно или две измерения. Ще открием ново интересно явление: ако ограничим полетата в две измерения и им дадем свобода в третото, те се разпространяват като вълни. Това са „вълните във вълновода" — темата на нашата лекция.

Да започнем с разработката на общата теория на *предаващата линия*. Обикновената електропредаваща линия, протегната от стълб към стълб по полята и горите, губи част от мощта си за излъчване, но честотата тук е така малка (50—60 Hz), че тези загуби са почти незабележими. От излъчването можем да се избавим, като поставим проводника в метална тръба, но това не е практично, защото при такива токове и напрежения в мрежата няма да минем без големи, тежки и скъпи тръби. Така че се използуват обикновено „откритите линии".

При малко по-високи честоти (от порядъка на няколко килохерца) излъчването е вече напълно забележимо. Но можем да го намалим, като се ползуваме от „двужилна" предаваща линия, както това се прави при телефонната връзка на малки разстояния. Но при по-нататъшното повишаване на честотата излъчването става нетърпимо силно или за сметка на загубите на енергия, или поради това, че енергията преминава в други вериги, където съвсем не е нужна. При честота от няколко килохерца до няколко хиляди мегахерца електромагнитните сигнали и електромагнитната енергия обикновено се предават по коаксиални линии, т. е. по проводник, поставен в цилиндричен „външен проводник" или „защита". Макар по-нататъшните разсъждения да са приложими за предаваща линия от два паралелни проводника с каквото и да е сечение, ще става дума за коаксиален кабел.

Да вземем най-простата коаксиална линия, която се състои от централен проводник (нека това бъде тънкостенен кух цилиндър) и външен проводник—също тънкостенен цилиндър, оста на който съвпада с оста на вътрешния проводник (фиг. 24-1).

24-1. Предаваща линия

24-2. Правоъгълен вълновод

24-3. Гранична честота

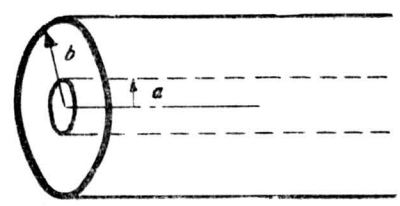
24-4. Скорост на вълните във вълновода

24-5. Как да наблюдаваме вълните във вълновода

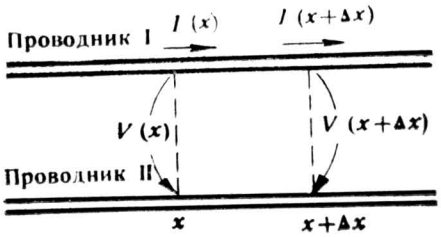
24-6. Свързване на вълноводи

24-7. Типове вълни във вълновода

24-8. Друг начин за разглеждане на вълните във вълновода



Фиг. 24 1. Коаксиална предаваща линия



Фиг. 24-2. Токовете и напреженията в предаваща линия

Като начало да си представим какво е поведението на тази линия при относително ниски честоти. Ние вече говорихме нещо за поведението при ниски честоти, когато твърдехме, че при два такива проводника на всяка единица дължина се пада еди-колко си индуктивност и еди-колко си капацитет. И действително поведението на всяка предаваща линия при ниски честоти може да се опише, като се даде индуктивността ѝ за единица дължина L_0 и капацитетът ѝ за единица дължина C_0. Тогава линията би могла да се разглежда като граничен случай на филтъра $L-C$ (виж. гл. 22-7). Може да се създаде такъв филтър, който ще имитира линията, ако последователно съединим помежду им малки елементи на индуктивност $L_0\Delta x$ и ги шунтираме с малки капацитети $C_0\Delta x$ (където Δx е елемент от дължината на линията). Като приложим към безкрайния филтър нашите предишни резултати, бихме видели, че по линията трябва да се разпространяват електрични сигнали. Но да постъпим иначе и вместо това да изучим свойствата на линията, като се опираме на диференциални уравнения.

Да предположим, че наблюдаваме какво става в две съседни точки на предаващата линия например на разстояние x и $x+\Delta x$ от началото на линията. Ще означим напрежението между проводниците с $V(x)$, а тока в горния проводник с $I(x)$ (фиг. 24-2). Ако токът в линията се изменя, индуктивността ще предизвика пад на напрежението по малкия участък на линията от x до $x+\Delta x$

$$\Delta V = V(x+\Delta x) - V(x) = -L_0\,\Delta x\,\frac{dI}{dt}.$$

Или, като вземем границата при $\Delta x \to 0$, получаваме

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{24.1}$$

Изменението на тока води до спадане на напрежението.

Сега още един път погледнете фигурата. Ако напрежението в x се изменя, трябва да се появят заряди, които на този участък се предават на капацитета. Ако вземем малкия участък на линията от x до $x+\Delta x$, зарядът по него е $q=C_0\Delta xV$. Скоростта на изменение на този заряд е $C_0\Delta x\,dV/dt$, но зарядът се изменя само тогава когато токът $I(x)$, който влиза в елемента, се различава от тока $I(x+\Delta x)$, който излиза. Като означим разликата с ΔI, имаме

$$\Delta I = -C_0\,\Delta x\,\frac{dV}{dt}.$$

Ако преминем към граница при $\Delta x \to 0$, получава се

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{24.2}$$

Така че запазването на заряда предполага, че градиентът на тока е пропорционален на скоростта на изменението на напрежението с времето.

Уравненията (24.1) и (24.2) са основни уравнения на предаващата линия. При желание можем да ги изменим така, че да отчитат съпротивлението на проводника или загубата от изтичане на заряди през изолацията между проводниците, но засега ни е достатъчен най-простия пример.

Двете уравнения на предаващата линия могат да се обединят, като диференцираме първото по t, а второто по x и изключим V или I. Ще получим или

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = C_0L_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \tag{24.3}$$

или

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = C_0L_0\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \tag{24.4}$$

Това е познатото ни вълново уравнение по x. В хомогенната предаваща линия напрежението (и токът) се разпространява по линията като вълна. Напрежението по дължината на линията ще

следва закона $V(x, t)=f(x-vt)$ или $V(x, t)=g(x+vt)$, или тяхната сума. Какво е тук v? Ние знаем, че коефициентът пред $\partial^2/\partial t^2$ е просто $1/v^2$, така че

$$v=\frac{1}{\sqrt{L_0C_0}} \tag{24.5}$$

Покажете сами, че напрежението *за всяка вълна* в линията е пропорционално на тока на тази вълна и че коефициентът на пропорционалност е точно характеристичният импеданс z_0. Като означите с V_+ и I_+ напрежението и тока за вълната, движеща се в посока $+x$, вие трябва да получите

$$V_+=z_0I_+ . \tag{24.6}$$

Аналогично за вълната, която се движи в посока $-x$, ще се получи

$$V_-=-z_0I_- .$$

Характеристичният импеданс, както вече видяхме от нашите уравнения за филтъра, се дава с израза

$$z_0=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \tag{24.7}$$

и затова е чисто съпротивление.

За да намерим скоростта на разпространение v и характеристичния импеданс z_0 на предаващата линия, необходимо е да знаем индуктивността и капацитета на единица дължина от линията. За коаксиалния кабел е лесно да ги пресметнем. Да видим как се прави това. При пресмятането на индуктивността ще следваме идеите, изложени в гл. 17-8 и ще положим $^1/_2LI^2$ равно на магнитната енергия, което на свой ред се получава чрез интегриране на $\varepsilon_0c^2B^2/2$ по обема. Нека по вътрешния проводник тече ток I; тогава знаем, че $B=I/2\pi\varepsilon_0c^2r$, където r е разстоянието от оста. Като вземем за елементарен обем цилиндричен слой с дебелина dr и дължина l, получаваме за магнитната енергия

$$U=\frac{\varepsilon_0c^2}{2}\int_a^b\left(\frac{I}{2\pi\varepsilon_0c^2r}\right)^2l\,2\pi r\,dr,$$

където a и b са радиусите на вътрешния и външния проводник. Като интегрираме, получаваме

$$U=\frac{I^2l}{4\pi\varepsilon_0c^2}\ln\frac{b}{a}. \tag{24.8}$$

Приравняваме тази енергия на $^1/_2LI^2$ и намираме

$$L=\frac{l}{2\pi\varepsilon_0c^2}\ln\frac{b}{a}. \tag{24.9}$$

Както и трябваше да се очаква, L е пропорционално на дължината l на линията, затова L_0 (индуктивността за единица дължина) е

$$L_0=\frac{\ln(b/a)}{2\pi\varepsilon_0c^2}. \tag{24.10}$$

Ние вече пресметнахме зарядите на цилиндричен кондензатор [гл. 12-2]. Като разделим сега този заряд на потенциалната разлика, получаваме

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0l}{\ln(b/a)}.$$

Капацитетът пък за единица дължина C_0 е C/l. Като съпоставим този резултат с (24.10), се убеждаваме, че произведението L_0C_0 е равно точно на $1/c^2$, т. е. $v=1/\sqrt{L_0C_0}$ е равно на c. Вълната се движи по линията със скоростта на светлината. Трябва да се подчертае, че този резултат зависи от направените пред-

положения: а) че в пространството между проводниците няма нито диелектрици, нито магнитни материали; б) че всички токове текат само по повърхността на проводниците (както е в идеалните проводници). По-късно ще видим, че при високи честоти всички токове се разпределят по повърхността на добрите проводници, като че ли те са идеални проводници, така че това предположение е правилно.

Любопитно е, че при тези две предположения произведението L_0C_0 е равно на $1/c^2$ за всяка двойка успоредни проводници, даже например за шестоъгълен вътрешен проводник, разположен произволно вътре в елиптичен външен проводник. Докато сечението е постоянно и между проводниците няма нищо, вълните се разпространяват със скоростта на светлината.

Подобни общи твърдения по повод на характеристичния импеданс не могат да се правят. За коаксиалната линия той е

$$z_0 = \frac{\ln (b/a)}{2\pi\varepsilon_0 c}. \tag{24.11}$$

Множителят $1/\varepsilon_0 c$ има размерност на съпротивление и е равен на 120π ома. Геометричният фактор $\ln (b/a)$ само логаритмично зависи от размерите, така че коаксиалната линия (и повечето други линии) като правило притежава характеристичен импеданс от порядъка на 50 ома или нещо подобно, до няколко стотин ома.

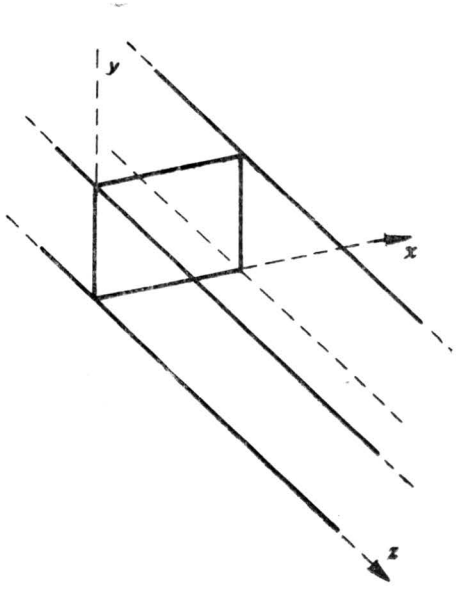
24-2. Правоъгълен вълновод

Това, за което сега ще говорим, на пръв поглед изглежда поразително явление: ако от коаксиалния кабел махнем вътрешното жило, той пак ще провежда електромагнитната енергия. С други думи, при достатъчно висока честота кухата тръба действува съвсем не по-лошо, отколкото тръба, вътре в която има проводник. Това е свързано с друго тайнствено явление, за което ние вече знаем — при високи честоти резонансният кръг (кондензатор с бобина) може да се замени с проста кутия.

Това изглежда много странно, ако се ползуваме от представата за предаваща линия като за разпределени индуктивности и капацитети. Но нали всички знаем, че вътре в празната метална тръба могат да се разпространяват електромагнитни вълни. Ако тръбата е права, през нея всичко *се вижда!* Значи електромагнитните вълни безспорно минават през тръбата. Но ние знаем също, че няма възможност да се предават вълни с ниска честота (променлив ток или телефонни сигнали) през една единствена метална тръба. Излиза, че електромагнитните вълни минават през нея само тогава когато тяхната дължина на вълната е достатъчно малка. Затова ще разгледаме граничния случай на най-дългите вълни (или на най-ниските честоти), които могат да преминават през тръба с даден размер. Тази тръба, която служи за преминаване на вълните, се нарича *вълновод.*

Да започнем с правоъгълна тръба. Нея най-просто може да анализираме. Отначало ще изложим всичко математично, а после още един път ще се върнем назад и ще разгледаме въпроса поелементарно. Но този по-елементарен подход лесно се прилага само за правоъгълни тръби. А основните явления във всяка тръба са едни и същи, така че математичните доводи звучат по-основателно.

Да си поставим следния въпрос: какъв тип вълни могат да съществуват в правоъгълна тръба? Да изберем отначало удобни координатни оси: оста z ще насочим по дължината на тръбата, а осите x и y — по стените (фиг. 24-3).



Фиг. 24-3. Избор на координатните оси за правоъгълен вълновод

Известно е, че когато вълните на светлината се движат по тръбата, тяхното електрично поле е напречно; затова ще започнем с търсенето на такива решения, в които E е перпендикулярно на z, да речем решения само с y-компонентата E_y (фиг. 24-4, *а*). Това електрично поле трябва някак да се изменя перпендикулярно на вълновода; наистина нали то трябва да стане нула по страните

успоредни на оста y: токовете и зарядите в проводника се нагласяват винаги така, че на неговата повърхност да не остават никакви допирателни съставящи на електричното поле. Значи графиката на E_y в зависимост от x трябва да напомня някаква дъга (фиг. 24-4, *б*). Може би това е намерената от нас за кухината функция на Бесел? Не, функцията на Бесел се появява само в задачи с цилиндрична симетрия. При правоъгълно сечение вълните са обикновени хармонични функции, нещо от рода на $\sin k_x x$.

Щом търсим вълни, които се разпространяват по тръба, следва да се очаква, че полето като функция на z ще трепти между положителните и отрицателните стойности (фиг. 24-5) и че тези трептения ще се движат по тръбата с някаква скорост v. Ако имаме трептения с определена честота ω, трябва да се изпробва може ли вълната да се изменя по z като $\cos(\omega t - k_z z)$ или в по-удобна математична форма като $e^{i(\omega t - k_z z)}$. Такава зависимост от z представлява вълна, движеща се със скорост $v = \omega/k_z$ [виж гл. 29 (т. I)].

Значи може да се допусне, че вълната в тръбата има следната математична форма:

$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{i(\omega t - k_z z)}. \tag{24.12}$$

Нека да видим може ли при такова допускане да удовлетворим правилните уравнения на полето. Първо, електричното поле не трябва да има съставящи, допирателни към проводника. Затова нашето поле подхожда; горе и долу то е насочено напречно на стените, а откъм страните е равно на нула. Впрочем за последното е необходимо полувълната на $\sin k_x x$ точно да се нанася на цялата ширина на вълновода, т. е. да бъде

$$k_x a = \pi. \tag{24.13}$$

Това условие определя k_x. Има и други възможности, например $k_x a = 2\pi$, 3π, ... или в общия случай

$$k_x a = n\pi, \tag{24.14}$$

където n е цяло число. Всички те представляват различни сложни разположения на полетата, но ние по-нататък ще говорим за най-простото, когато $k_x = \pi/a$, а a е вътрешната ширина на тръбата.

По-нататък дивергенцията на $\mathbf{E}$ в празното пространство вътре в тръбата трябва да бъде равна на нула, защото в тръбата няма заряди. Нашето $\mathbf{E}$ има само y-компонента, но по y тя не се изменя, така че действително $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$.

На края нашето електрично поле трябва да се съгласува с останалите уравнения на Максвел за празното пространство вътре в тръбата. Това е все едно да се изисква то да удовлетворява вълновото уравнение

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0. \tag{24.15}$$

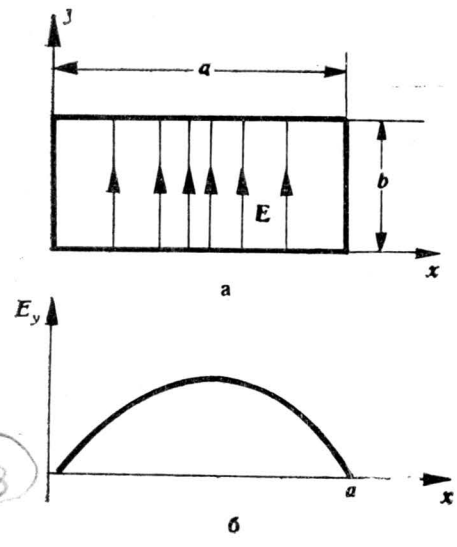
Ние трябва да проверим ще подхожда ли тук избраната от нас форма (24.12). Втората производна на E_y по x е точно $-k_x^2 E_y$. Втората производна по y е равна на нула, защото от y нищо не зависи. Втората производна по z е $-k_z^2 E_y$, а втората производна по t е $-\omega^2 E_y$. Тогава уравнението (25.14) дава

$$k_x^2 E_y + k_z^2 E_y - \frac{\omega^2}{c^2} E_y = 0.$$

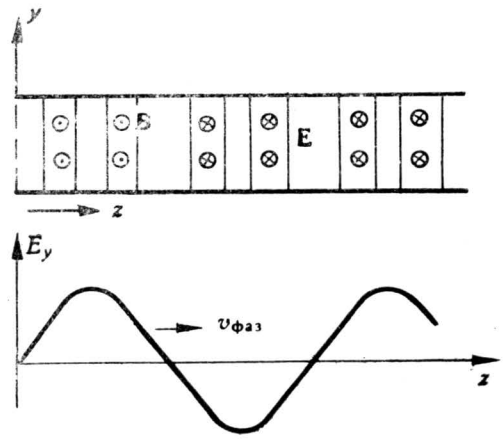
Ако E_y не е навсякъде нула (този случай не ни интересува много), това уравнение се изпълнява винаги, ако

$$k_x^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \tag{24.16}$$

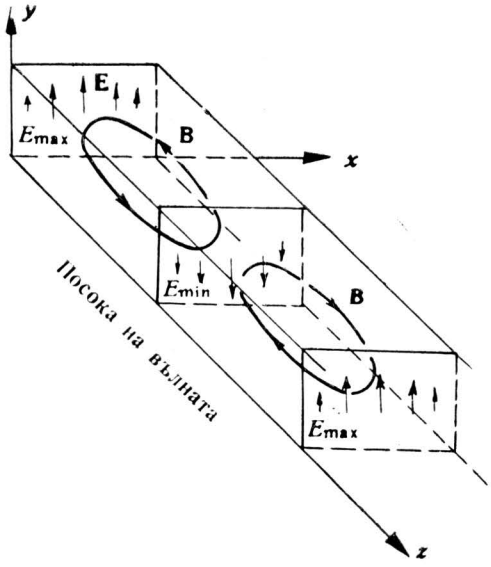
Вече фиксирахме числото k_x, така че това уравнение ни казва, че вълните от предположения от нас тип са възможни само тогава когато k_z е свързано с честотата ω чрез условието (24.16), т. е. когато



Фиг. 24-4. Електричното поле във вълновода при някаква стойност на z



Фиг. 24-5. Зависимост на полетата във вълновода от z



Фиг. 24-6. Магнитното поле във вълновода

$$k_z=\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\pi^2}{a^2}}. \tag{24.17}$$

Вълните, които ние описахме, се разпространяват в посока z с такава стойност на k_z.

Вълновото число k_z, което получихме от (24.17), ни дава при дадена честота ω скоростта, с която се движат по тръбата възлите на вълната. Фазовата скорост е равна на

$$v=\frac{\omega}{k_z}. \tag{24.18}$$

Спомнете си сега, че дължината λ на разпространяващата се вълна се дава с формулата $\lambda=2\pi v/\omega$, така че k_z също така е равно на $2\pi/\lambda_g$, където λ_g е дължината на вълната на осцилациите в посока z — „дължината на вълната във вълновода“. Дължината на вълната във вълновода, разбира се, се отличава от дължината на електромагнитните вълни със същата честота, но в празно пространство. Ако дължината на вълната в празното пространство означим с λ_0 (което е равно на $2\pi c/\omega$), (24.17) може да се препише във вида

$$\lambda_g=\frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(\lambda_0/2a)^2}}. \tag{24.19}$$

Освен електричните полета съществуват и магнитни полета, които също се движат вълнообразно. Сега няма да се занимаваме с извеждането на изрази за тях. Нали $c^2\nabla\times\mathbf{B}=\partial\mathbf{E}/\partial t$ и линиите на $\mathbf{B}$ циркулират около областите, където $\partial\mathbf{E}/\partial t$ е най-голямо, т. е. на половината път между максимума и минимума на $\mathbf{E}$. Кривите на $\mathbf{B}$ лежат успоредно на равнината xz и между гребените и падините на $\mathbf{E}$ (фиг. 24-6).

24-3. Гранична честота

Уравнението (24.16) за k_z в действителност има два корена — едии с плюс, друг с минус. Отговорът трябва да се пише така

$$k_z=\pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\pi^2}{a^2}}. \tag{24.20}$$

Смисълът на тези два знака е просто в това, че вълните във вълновода могат да се разпространяват и с отрицателна фазова скорост (в посока $-z$), и с положителна. Вълните естествено трябва да имат възможност да се разпространяват във всяка посока. И щом едновременно могат да съществуват двата типа вълни, решението във вид на стоящи вълни също е възможно.

Нашето уравнение за k_z ни съобщава също така, че по-високите честоти водят към по-големи стойности на k_z, т. е. към по-къси вълни, докато в граничния случай на големи ω стойността на k стане равна на ω/c — на тази стойност, която имаме, когато вълната се разпространява в празно пространство. Светлината, която „виждаме“ през тръбата, все още се движи със скорост c. Но затова пък вижте какво странно нещо се получава, когато честотата намалява. Отначало вълните стават все по-дълги и по-дълги. Но ако честотата ω стане прекалено малка, под корена в (24.20) внезапно ще се появи отрицателно число. Това ще стане, когато ω стане по-малко от $\pi c/a$ или когато λ_0 стане по-голямо от $2a$. С други думи, когато честотата стане по-малка от някаква критична честота $\omega_c=\pi c/a$, вълновото число k_z (а също така и λ_g) става имагинерно и нямаме вече решение. Или остава? Кой собствено е казал, че k_z трябва да бъде реално? Какво ще се случи, ако то стане имагинерно? Нали уравненията на полето както преди ще се удовлетворяват. Може би и имагинерните k_z също представляват някаква вълна?

Да предположим, че ω действително е по-малка от ω_c; тогава може да се напише

$$k_z = \pm ik', \tag{24.21}$$

където k' е реално положително число

$$k' = \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}. \tag{24.22}$$

Ако сега се върнем към нашата формула (24.12) за E_y, ще трябва да се напише

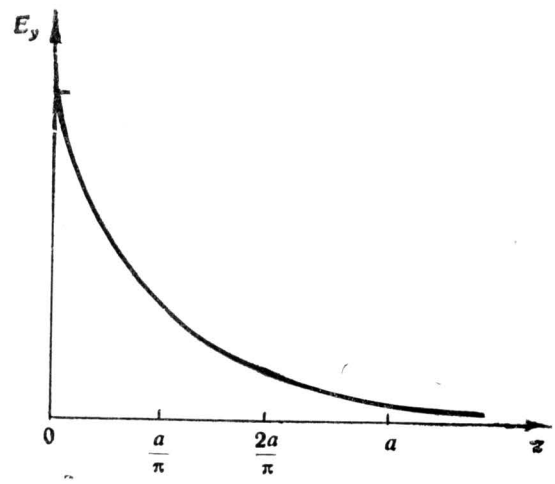
$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{i(\omega t \mp ik'z)}, \tag{24.23}$$

което може също така да се представи във вида

$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{\pm k'z} e^{i\omega t}. \tag{24.24}$$

Този израз води до поле **E**, което се променя с времето като $e^{i\omega t}$, а по z се изменя като $e^{\pm k'z}$. То плавно намалява или нараства със z както всяка експоненциална функция от реално число. В нашия извод ние не мислехме за това, откъде са се взели вълните, къде е техният източник, но, разбира се, някъде във вълновода той трябва да съществува. И знакът, който стои пред k', трябва да бъде такъв, че полето да намалява при отдалечаване от източника на вълните.

И така, при честоти, по-ниски от $\omega_c = \pi c/a$, вълни по тръбата *не се разпространяват*; осцилиращото поле прониква в тръбата само на разстояние от порядъка на $1/k'$. По тази причина честотата ω_c наричат „гранична честота" на вълновода. Като гледаме (24.22), виждаме, че за честоти, малко по-ниски от ω_c, числото k' е малко и полетата могат да проникнат в тръбата доста далеч. Но ако ω е много по-малко от ω_c, коефициентът k' в експонентата е равен на π/a и полето отмира извънредно бързо (фиг. 24-7). Полето намалява e пъти на разстояние a/π, т. е. на една трета от ширината на вълновода. Полетата проникват във вълновода на много малко разстояние от източника.



Фиг. 24-7 Изменението на E_y с нарастването на z при $\omega \ll \omega_c$

Ние искаме още веднъж да подчертаем тази характерна черта на нашия анализ на преминаването на вълните по тръбата — появяването на имагинерно вълново число k_z. Когато, решавайки уравнение във физиката, ние получаваме имагинерно число, това обикновено не означава нищо физично. За *вълните* обаче имагинерното вълново число *действително* означава нещо. Вълновото уравнение се удовлетворява както преди; то само означава, че решението води към експоненциално намаляващо поле вместо разпространяващи се вълни. И така, ако във всяка задача за вълни k при някоя честота става имагинерно, това означава, че формата на вълната се изменя — синусоидата преминава в експонента.

24-4. Скорост на вълните във вълновода

Тази скорост на вълните, за която досега говорихме, е фазовата скорост, т. е. скоростта на възлите на вълната; тя е функция на честотата. Ако заместим (24.17) в (24.18), можем да напишем

$$v_{\text{фаз}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}. \tag{24.25}$$

За честоти, по-високи от граничната (за които разпространяваща се вълна съществува), ω_c/ω е по-малко от единица, $v_{\text{фазова}}$ е реално число, *по-голямо* от скоростта на светлината. Ние вече видяхме в гл. 48 (т. I), че фазови скорости, по-големи от скоростта на светлината, са възможни, защото просто се движат възлите на вълните, а не енергията или информацията. За да узнаем колко бързо се движат *сигналите,* трябва да пресметнем бързината на импулсите или модулациите, които се предизвикват от интерференцията на вълните от една честота с една или няколко вълни с малко по-други честоти [виж гл. 48 (т. I)]. Скоростта на обвив-

ката на такава група вълни нарекохме вълнова скорост; това не е ω/k, а $d\omega/dk$:

$$v_{\text{групова}} = \frac{d\omega}{dk}. \tag{24.26}$$

Като диференцираме (24.17) по ω и го преобърнем, за да получим $d\omega/dk$, получаваме

$$v_{\text{групова}} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}. \tag{24.27}$$

Това е по-малко от скоростта на светлината.

Средното геометрично на $v_{\text{фазова}}$ и $v_{\text{групова}}$ е точно равно на c — скоростта на светлината

$$v_{\text{фазова}}\, v_{\text{групова}} = c^2. \tag{24·28}$$

Това е интересно, нали подобно съотношение срещахме и в квантовата механика. За частица с каквато и да е скорост (даже релативистична) импулсът p и енергията U са свързани със съотношението

$$U^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{24.29}$$

Но в квантовата механика енергията е $\hbar\omega$, а импулсът е $\hbar/\lambda$ или $\hbar k$; значи (24.29) може да се напише така

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}. \tag{24.30}$$

или

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}}, \tag{24.31}$$

а това много прилича на (24.17) . . . Интересно, нали?

Груповата скорост на вълните е също така скоростта, с която енергията се предава по тръбата. Ако ви е необходимо да намерите потока на енергията през вълновода, трябва да умножите плътността на енергията с груповата скорост. Ако средното квадратично електрично поле е равно на E_0, средната плътност на електричната енергия е равна на $\varepsilon_0 E_0^2/2$. Освен това част от енергията е свързана с магнитното поле. Ние тук няма да показваме това, но във всяка кухина или тръба магнитната и електричната енергия са равни помежду си, така че пълната плътност на електромагнитната енергия е равна на $\varepsilon_0 E_0^2$. А мощността dU/dt, която се предава по вълновода, поради това е

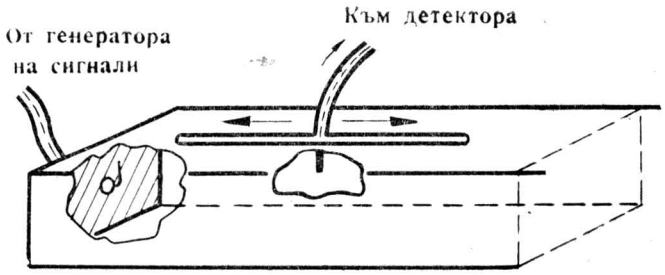
$$\frac{dU}{dt} = \varepsilon_0 E_0^2 ab v_{\text{групова}}. \tag{24.32}$$

По-късно ще разгледаме друг, по-общ начин за изчисляване на потока на енергията.)

24-5. Как да наблюдаваме вълните във вълновода

Енергията във вълновода може да се въведе чрез своего рода „антена“, като използуваме за това например вертикална жичка или „шип“. За наличието на вълни във вълновода можем да се убедим, като изведем от него част от електромагнитната енергия с помощта на приемна „антенка“ — също някакъв „шип“ от жичка или примка. На фиг. 24-8 е показан вълновод, част от стените на който е махната, за да се виждат входният шип и приемният „пробник“. Входният шип може да се съедини чрез коаксиален кабел с генератор на сигнали, а приемният пробник със също такъв кабел може да се съедини с детектор. Обикновено е по-удобно да се вкара пробникът през дълъг прорез в стената на вълновода. Тогава можем да го движим по дължината на вълновода и да измерваме полето в различни места.

Ако подадем от сигнал-генератора честота ω, по-голяма, отколкото граничната честота ω_c, от шипа ще започнат да се раз-



Фиг. 24-8. Вълновод с входен шип и пробник

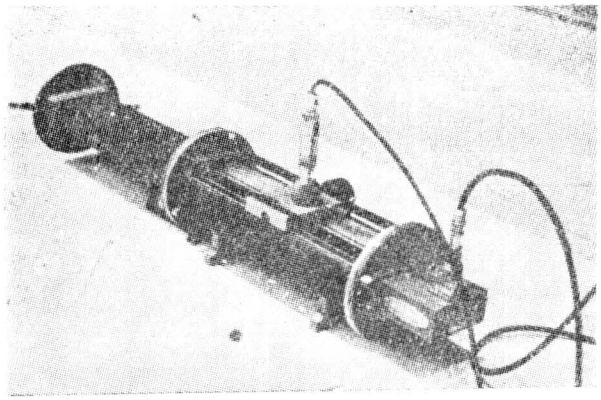
пространяват вълни по вълновода. Ако вълноводът е безкрайно дълъг, никакви вълни освен тези няма да има (за да го направим безкраен, трябва на края му да поставим добре конструиран поглъщател, който да не допусне отражение от този край). Тогава, тъй като детекторът измерва полето близо до пробника, усреднено по времето, той ще възприема сигнал, който не зависи от положението във вълновода; на изхода ще се регистрира стойност, пропорционална на предаваната мощност.

Ако пък направим така, че от далечния край на вълновода да се отразява вълна (граничен случай: ако го затворим с метална пластинка), като допълнение към първоначалната вълна ще се появи отразена вълна. Тези две вълни ще интерферират и ще създадат във вълновода стояща вълна, която прилича на стоящите вълни в струна, за които се говори в гл. 49 (т. I). В този случай според това как пробникът се придвижва по тръбата, показанията на детектора периодически ще се повишават и падат; максимумът на полето ще отбелязва върховете на вълните, а минимумът — възлите. Разстоянието между два последователни възела (или върха) е равно на $\lambda_g/2$. Това ни дава удобен начин за измерване дължината на вълната във вълновода. Ако изместваме честотата по-близо към ω_c, разстоянието между възлите ще се увеличи, като показва с това, че дължината на вълната във вълновода се изменя по закона (24.19).

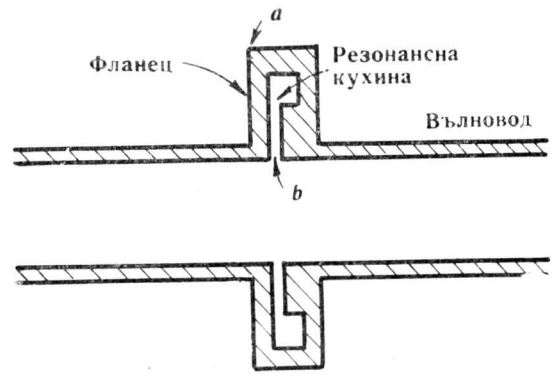
Нека сега нашият сигнал-генератор е включен на честота, едва-едва по-малка, отколкото ω_c. Тогава показанията на детектора постепенно ще падат според това, как пробникът се отдалечава по вълновода. Ако още понижим честотата, интензитетът на полето ще започне да намалява по-бързо, като следва кривата на фиг. 24-7 и като показва, че вълните не се разпространяват.

24-6. Свързване на вълноводи

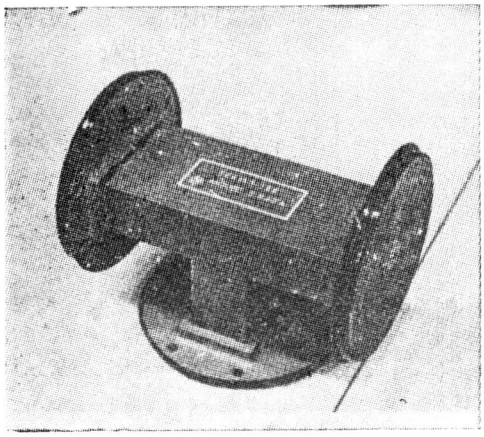
Важното практическо използуване на вълноводите се състои в предаването на високочестотна мощност. Чрез тях например съединяват високочестотния осцилатор или изходния усилвател на радиолокатора с антената. Самата антена обикновено се състои от параболичен рефлектор, във фокуса на който се подава енергия от вълновод, който се разширява в края си като „рог“, излъчващ вълните, които идват по вълновода. Макар че високата честота може да се предава и по коаксиален кабел, вълноводът все пак е по-добър — по него може да се предава по-голяма мощност. Първо, предаваната по кабел мощност се ограничава от опасността за пробив на изолацията (твърда или газообразна) между проводниците. Интензитетите на полетата във вълновода при дадена мощност обикновено не са така големи, както в кабела, така че може да се предават по-големи мощности, без да се опасяваме от пробив. Второ, загубите на мощност в коаксиалния кабел са обикновено по-големи, отколкото във вълновода. В кабела се налага да поставяме изолационен материал, за да се поддържа вътрешният проводник и в този материал възникват загуби на енергия, особено при високи честоти. Освен това плътностите на тока във вътрешния проводник са твърде високи, а понеже загубите са пропорционални на *квадрата* на плътността на тока, кол-



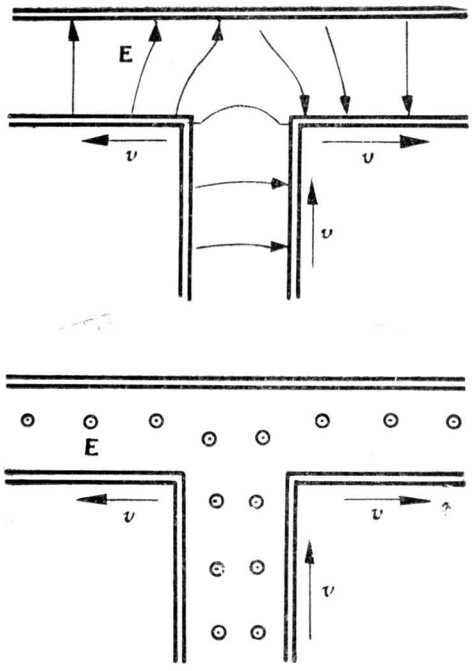
Фиг. 24-9. Вълноводни секции, съединени с фланци



Фиг. 24-10. Съединение на две вълноводни секции, което дава малки загуби



Фиг. 24-11. Вълновод „Т“. (На фланците са надянати пластмасови капачки, които предохраняват вътрешната част на „Т“ от замърсяване в неработно състояние.)



Фиг. 24-12. Електричните полета във вълновод „Т“ при двете възможни ориентации на полетата

което е по-слаб токът в стените на вълновода, толкова по-малки са загубите на енергия. За да се сведат тези загуби до минимум, вътрешната повърхност на вълновода често се покрива с добре проводящ материал, да речем сребро.

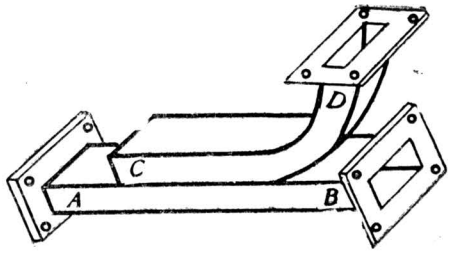
Проблемът за съединяване на „веригите“ от вълноводи рязко се отличава от аналогичната задача при ниски честоти. Нея често я наричат микровълново „съединение“. За тази цел са били измислени много уреди. Например две секции на вълновода обикновено се свързват с помощта на фланци (фиг. 24-9), но такова съединение може да повлече след себе си сериозни загуби на енергия, защото през съединенията ще потекат повърхностни токове, а тяхното съпротивление е твърде голямо. Един от начините да се избягнат загубите е да се направят фланците така, както е показано на фиг. 24-10. Между съседните секции на вълновода се оставя малка междина, а на плоскостта на единия от фланците се прави жлебче. Получава се малка кухина (ср. с фиг. 23-16, *в*), размерите на която се избират така, че нейната резонансна честота да съвпада с честотата на вълните във вълновода. „Импедансът“ на такава резонансна кухина е много голям, затова през металното съединение (точка *a* на фиг. 24-10) протича сравнително слаб ток. Силните токове във вълновода просто зареждат и разреждат капацитета на процепа (в точка *b*), където енергията се разсейва слабо.

Сега си представете, че ви е необходимо да затворите вълновода така, че да не възникнат никакви отразени вълни. Значи трябва в края да се постави нещо такова, което може да имитира безкрайността на вълновода. Необходимо е такова „крайно“ устройство, което би действувало на вълновода така, както действува на предаващата линия нейният характеристичен импеданс — нещо, което само поглъща идващите вълни, но не ги отразява. Тогава вълноводът ще действува така, като че ли е безкраен. Такива краища се получават, ако поставим в тръбата добре изготвени клинове от проводящ материал. Те само поглъщат енергията и почти не генерират отразени вълни.

Ако ви е необходимо да съедините помежду им *три* елемента, да речем един източник и две антени, за това е приложимо устройство във вид на „Т“, както е показано на фиг. 24-11. Мощността, която се подава на централната секция на това „Т“, се разделя и разотива по двата ръкава (тук още може да стане и отражение на вълните). От схемата, представена на фиг. 24-12, може качествено да се види, че полетата на края на входната секция могат да се разделят и да създадат електрични полета, които ще дадат началото на вълните, разпространяващи се по ръкавите. Според това, перпендикулярни ли са електричните полета на „върха“ на нашето „Т“, или са успоредни на него, полетата в мястото на съединението могат да се окажат или такива, както на фиг. 24-12, *а*, или както на фиг. 24-12, *б*.

На края бих искал да опиша уреда, който се нарича „насочен разклонител“. Това е много полезно устройство, когато е не-

обходимо да се узнае какво би се получило, след като сме съединили помежду им някакво сложно разположение от вълноводи. Например трябва да се узнае в каква посока се разпространяват вълните в тази или онази секция на тръбата; да речем, необходимо е да си представим колко е силна в нея отразената вълна. Насоченият разклонител взема малка мощност от вълновода, ако по него се разпространява вълна в едната посока и не взема нищо, ако тя се разпространява в другата. Като включим изхода на съединителя към детектор, можем да измерим еднопосочната мощност във вълновода. Насоченият разклонител (фиг. 24-13) е парче от вълновод AB, към едната страна на което е запоено друго парче от вълновод CD. Тръбата CD е огъната встрани така, че да се помести съединителният фланец. Преди да се споят тръбите, през съседните им страни се пробиват открай докрай два (или няколко) отвора, за да може през тях част от полетата в главния вълновод AB да премине във втория вълновод CD. Всеки отвор действува като антена — генерира вълни във вторичния вълновод. Ако отворът беше един, вълните биха се разделяли в две посоки и биха били еднакви независимо от това, накъде са насочени вълните в първичния вълновод. Но когато отворите са два и когато разстоянието между тях е равно на една четвърт от дължината на вълната във вълновода, те представляват два източника, отместени по фаза на 90°. Помните ли, че разглеждахме в гл. 29 (т. I) интерференцията на вълните от две антени, отместени на $\lambda/4$ и възбуждани с отместване 90° по фаза? Тогава установихме, че в едната посока вълните се изваждат, а в другата се събират. Същото става и тук. Вълната, генерирана в CD, ще се движи в същата посока, както и в AB.

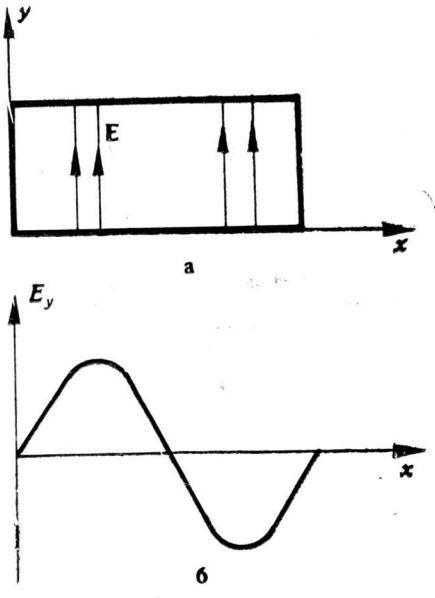


Фиг. 24-13. Насочен разклонител

И ако вълната в първичния вълновод се движи от A към B, на изхода D на вторичния вълновод също ще забележим вълна. Ако пък вълната в първичния вълновод се движи от B към A, във вторичния вълновод вълната ще тръгне към C. Този край завършва така, че тази вълна ще се погълне в него и на изхода на разклонителя въобще няма да има вълни.

24-7 Типове вълни във вълновода

Избраната от нас за анализ вълна е само едно от решенията на уравненията на полето. Те на практика са много повече. Всяко решение представлява „тип вълна“ във вълновода. Да речем, в нашата вълна по посока x се наслагваше само половин синусоида. Никак не е по-лошо решението, в което по x се наслагва цяла синусоида; изменението на E_y с x в този случай е показано на фиг. 24-14. При този тип вълни k_x е два пъти по-голямо и граничната честота е много по-висока. Освен това изучената от нас вълна E има само y-компонента, но съществуват и типове вълни с по-сложни електрични полета. Ако електричното поле има само x- и y-компоненти, така че то е винаги перпендикулярно на оста z, такъв тип вълни се наричат „напречен електричен“ (или съкратено TE) тип вълни. Магнитното поле във вълна от такъв тип винаги има z-компонента. По-нататък, оказва се, че когато E има z-компонента (по посоката на разпространение), магнитното поле има само напречни компоненти. Такива полета се наричат „напречно магнитни“ (съкратено TM) типове вълни. В правоъгълния вълновод всички типове имат по-висока гранична честота, отколкото описания от нас TE-тип. Затова винаги е възможно (и така обикновено правят) да се използува такъв вълновод, в който честотата малко превишава граничната честота на този най-нисш тип трептения, но се намира по-ниско от граничните честоти на всички останали типове. В такъв вълновод се разпространява вълна само от един тип. В противен случай поведението на вълните се усложнява и е трудно да го контролираме.



Фиг. 24-14. Още една възможна зависимост на E_y от x

24-8. Друг начин за разглеждане на вълните във вълновода

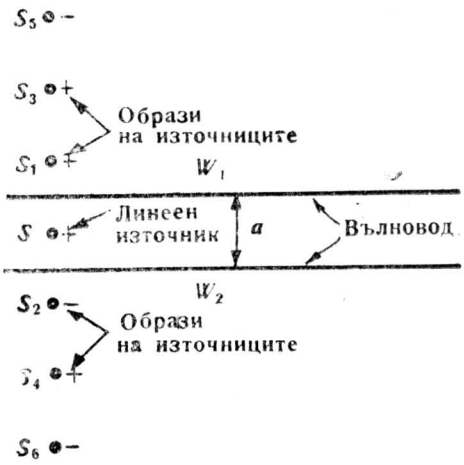
Сега аз искам другояче да ви обясня защо вълноводът така силно намалява полетата, честотата на които е по-ниска от граничната честота ω_c. Аз искам вие да получите по-„физическа“ представа за това, защо така рязко се изменя поведението на вълновода при ниски и при високи честоти. За правоъгълния вълновод това може да се направи, като се анализират полетата на езика на отраженията (или образите) в стените на вълновода. Такъв подход е приложим обаче само за правоъгълни вълноводи; ето защо ние започнахме с математичния анализ, който принципно е годен за вълноводи с каквато и да е форма.

За описания от нас тип трептения вертикалните размери (по y) нямаха никакво значение, затова може да не се обръща внимание на горната и долна част на вълновода и да си представяме, че вълноводът във вертикално направление се простира безкрайно. Нека той просто се състои от две вертикални пластини, отдалечени една от друга на разстояние a.

Нека да вземем за източник на полетата вертикален проводник между пластините; по него тече ток, който се изменя с честота ω. Ако вълноводът нямаше стени, от такъв проводник биха се разпространявали цилиндрични вълни.

Да си представим, че стените на вълновода са направени от идеален проводник. Тогава също както в електростатиката условията на повърхността ще бъдат изпълнени, ако към полето на проводника добавим полето на един или няколко правилно подбрани негови образи. Идеята за образите може да се прилага в електродинамиката не по-лошо, отколкото в електростатиката при условие, разбира се, че отчитаме закъснението. Ние знаем, че това е така, защото много пъти сме виждали в огледало образа на източник на светлина. А огледалото това е „идеален“ проводник на електромагнитните вълни с оптическа честота.

Да разсечем нашия вълновод хоризонтално, както е показано на фиг. 24-15, където W_1 и W_2 са стените на вълновода, а S_0 — източника (проводника). Ще означим посоката на тока в проводника със знак плюс. Ако вълноводът имаше само една стена, да речем W_1, бихме могли да я махнем, като поставим образ на източника (с противоположна полярност) в точка S_1. Но при две стени ще се появи също така образ на S_0 в стената W_2; ще го означим с S_2. Този източник също ще има свой образ в W_1; ще го означим с S_3. По-нататък самите S_1 и S_3 ще се изобразят в W_2 чрез точките S_4 и S_6 и т. н. И за нашата двойка плоски проводници с източник по средата полето между проводниците съвпада с полето, генерирано от безкрайна верига от източници на разстояние a един от друг. (Това в действителност е точно онова, което ще видите, като погледнете проводник, разположен по средата между две успоредни огледала.) За да станат нула полетата на стените, полярностите на токовете в образите трябва да се изменят от единия от образите към следващия. С други думи, тяхната фаза се мени със 180°. Полето на вълновода е просто суперпозиция на полетата на цялата тази безкрайна съвкупност от линейни източници.



Фиг. 24-15. Линеен източник S_0 между проводящи плоски стени W_1 и W_2. (Стените могат да се заменят с безкрайна последователност от образи на източниците.)

Известно е, че полето близо до източниците много напомня статичните полета. В гл. 7-5 ние разглеждахме статичното поле на мрежа от линейни източници и намерихме, че то прилича на полето на заредена пластина, ако не се смятат членовете на реда, които намаляват експоненциално с отдалечаването от мрежата. Нашата средна сила на източниците е равна на нула, защото на всяка двойка съседни източници знаците са противоположни. Всички полета, които съществуват тук, трябва да намаляват експоненциално с разстоянието. До самия източник ние възприемаме главно полето на този най-близък източник; на по-големи разстояния вече действуват няколко източника и тяхното сумарно влияние дава нула. Сега разбираме защо вълноводът при честота, по-ниска от граничната, дава експоненциално намаляващо поле.

При ниски честоти е приложимо статичното приближение и то предсказва бързо отслабване на полетата с разстоянието.

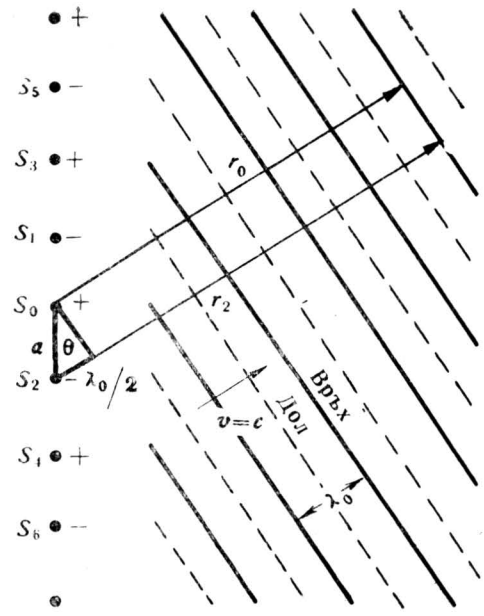
Затова пък сега възниква противоположният въпрос: защо в такъв случай вълните въобще се разпространяват? Сега вече това изглежда тайнствено! А причината е, че при високи честоти закъсняването на полетата може да внесе допълнителни изменения във фазата, които могат да доведат до това, че полетата на източници с противоположна фаза ще се усилват, а няма да се гасят едно друго. В гл. 29 (т. I) вече изучавахме тъкмо за такава задача полетата, които се създават от система антени или от оптическа решетка. Тогава ние намерихме, че съответно разполагане на няколко радиоантени може да доведе до такава интерференционна картина, че в една посока сигналът ще бъде много силен, а в другите изобщо няма да има сигнали.

Да се върнем към фиг. 24-15 и да разгледаме полетата на голямо разстояние от линията на образите на източниците. Полетата ще бъдат големи само в някои посоки, които зависят от честотата, именно в тези посоки, в които полетата от всички източници съвпадат по фаза едно с друго и се събират. На голямо разстояние от източниците полето се разпространява в тези специални посоки като плоски вълни. Ние изобразихме такава вълна на фиг. 24-16, където с непрекъснати линии са дадени гребените на вълните, а с пунктир — доловете. Посоката на вълната трябва да бъде такава, че разликата в закъсненията от два съседни източника до гребена на вълната да отговаря на полупериода на трептението. С други думи, разликата между r_2 и r_0 на чертежа е равна на половината от дължината на вълната в празното пространство:

$$r_2 - r_0 = \frac{\lambda_0}{2}.$$

Тогава ъгълът θ се дава с условието

$$\sin\theta = \frac{\lambda_0}{2a}. \tag{24.33}$$



Фиг. 24-16. Една съвкупност на кохерентни вълни от поредица линейни източници

Има, разбира се, и друга съвкупност от вълни, които се разпространяват надолу под симетричен ъгъл по отношение на линията на източниците. Пълното поле във вълновода (не много близо до източника) е суперпозиция на тези две съвкупности от вълни (фиг. 24-17). Разбира се, в действителност картината на истинските полета съвпада с изобразената само в пространството между стените на вълновода.

В такива точки, като A и C, гребените на двете вълнови картини ще съвпаднат и полетата ще имат максимум; в точките, подобни на B, пиковете на двете вълни са насочени в отрицателна страна и полето има минимум (най-малка отрицателна стойност). С течение на времето полето във вълновода ще се движи по него. Дължината на вълната ще бъде равна на λ_g — разстоянието от A до C. Тя е свързана с θ чрез формулата

$$\cos\theta = \frac{\lambda_0}{\lambda_g}. \tag{24.34}$$

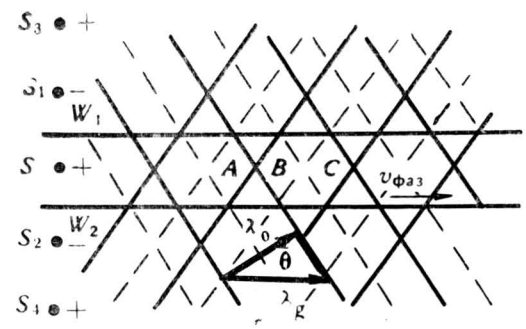
Като заместим θ с (24.33), получаваме

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\cos\theta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(\lambda_0/2a)^2}}, \tag{24.35}$$

което точно съвпада с (24.19).

Сега ни става ясно защо вълните се разпространяват само при честоти, по-високи от граничната честота ω_0. Ако дължината на вълната в празното пространство е по-голяма от $2a$, не съществува ъгъл, под който може да се появи вълната, показана на фиг. 24-16. Необходимата за това конструктивна интерференция възниква внезапно едва когато λ_0 стане по-малка от $2a$ или, което е същото, когато $\omega_0 = \pi c/a$.

Ако честотата е достатъчно висока, могат да се появят две



Фиг. 24-17. Полето във вълновода може да се разглежда като наслагване на две поредици от плоски вълни

или повече възможни посоки за разпространение на вълните. В нашия случай това ще стане при $\lambda_0 < \frac{2}{3} a$. Но въобще това може да стане и при $\lambda_0 < a$. Тези допълнителни вълни отговарят на повисшите типове вълни, за които говорихме.

След нашия анализ става също така ясно защо фазовата скорост на вълните, които се разпространяват по тръбите, превишава c и зависи от ω. Когато ω се изменя, изменя се и ъгълът, под който в празното пространство се разпространяват вълните от фиг. 24-16, а заедно с това се изменя и скоростта по тръбата.

Макар че ние описвахме вълните във вълновода като суперпозиция на полетата на безкрайна съвкупност от линейни източници, можем да се убедим в това, че същият резултат би могло да се получи, като си представим две съвкупности от вълни в празно пространство, многократно отразявани от две идеални огледала напред и назад и като си спомним, че подобно отражение означава промяна на знака на фазата. Тези съвкупности от отразени вълни биха се гасили една друга под всички ъгли освен ъгъла θ [виж (24.33)]. Едно и също нещо може да се разглежда по много начина.

25

Електродинамика в релативистични означения

25-1. Четиривектори

25-2. Скаларно произведение

25-3. Четиримерен градиент

25-4. Електродинамика в четиримерни означения

25-5. Четиримерен потенциал на движещ се заряд

25-6. Инвариантност на уравненията на електродинамиката

В тази глава $c=1$

Да се повтори: гл. 15 (т. I) „Специална теория на относителността"; гл. 16 (т. I) „Релативистична енергия и импулс"; гл. 17 (т. I) „Пространство — време"; гл. 13 „Магнитостатика"

25-1. Четиривектори

В тази глава ще разгледаме приложението на специалната теория на относителността в електродинамиката. Ние изучавахме теорията на относителността доста отдавна (гл. 15-17, т. I), затова аз тук накратко ще напомня основните идеи.

Експериментално е установено, че законите на физиката не се изменят, ако се движим с постоянна скорост. Ако вие се намирате в звездолет, който лети с постоянна скорост по права линия, не можете да установите самия факт на движение на кораба: затова трябва да се погледне навън или най-малкото да се направят някакви наблюдения, които са свързани с външния свят. Всеки написан от нас истински закон на физиката трябва да бъде формулиран така, че този природен факт да бъде „вграден" в него.

Съотношението между пространството и времето в две координатни системи (едната от които S' равномерно се движи по отношение на другата S в посока на оста x със скорост v) се определя от *трансформациите на Лоренц*

$$t'=\frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad y'=y, \tag{25.1}$$

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad z'=z.$$

Законите на физиката трябва да бъдат такива, че след трансформациите на Лоренц в новата форма те да изглеждат абсолютно така, както и по-рано. Това напомня точно принципа на независимостта на законите на физиката от *ориентацията* на нашата координатна система. В гл. 11 (т. I) видяхме, че записът на уравненията във *векторен* вид е един начин за математично описание на тази инвариантност спрямо въртенето.

Там открихме, че ако например вземем два вектора

$$\mathbf{A}=(A_x, A_y, A_z) \quad \text{и} \quad \mathbf{B}=(B_x, B_y, B_z),$$

комбинацията

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

при завъртането на координатната система не се изменя. По този начин, ако от двете страни на уравнението виждаме скаларно произведение, подобно на $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, уравнението ще има точно същата форма във всяка завъртяна координатна система. Освен това открихме оператора (виж гл. 2)

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

който, като се приложи към скаларна функция, дава три величини, които се преобразуват също като вектор. С помощта на този оператор бе определен градиентът, а в комбинации с други вектори — дивергенцията и лапласианът. И на края открихме, че като съставяме сумите на някои произведения на компонентите на два вектора две по две, можем да получим три величини, които се държат като нов вектор. Това нарекохме векторно про-

Таблица 25-1

Най-важните величини и оператори на тримерния векторен анализ

Определение на вектор	$\mathbf{A}=(A_x, A_y, A_z)$
Скаларно произведение	$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$
Векторен диференциален оператор	∇
Градиент	$\nabla\varphi$
Дивергенция	$\nabla\cdot\mathbf{A}$
Лапласиан	$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$
Векторно произведение	$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$
Ротация	$\nabla\times\mathbf{A}$

изведение на два вектора. Като използувахме след това векторното произведение с оператора ∇, определихме ротацията на вектора. По-нататък на нас често ще ни се налага да се позоваваме на това, което направихме във векторния анализ, затова всички най-важни векторни операции в тримерното пространство, които бяха използувани в миналото, събрахме в табл. 25-1.

Като се ползуваме от нея, можем така да запишем кое да е уравнение на физиката, че двете негови части да се преобразуват при въртене по еднакъв начин. Ако едната му част е вектор, вектор трябва да бъде и другата част и те и двете при въртене на координатната система се изменят абсолютно еднакво. Аналогично ако едната част е скалар, скалар трябва да бъде и другата част, така че нито едната, нито другата да не се изменя при въртене на координатната система и т. н.

В теорията на относителността пространството и времето са неразделно свързани едно с друго, затова същото ще се наложи да се направи и за четири измерения. Ние искаме нашите уравнения да останат неизменни не само при завъртанията, но и при преход в която и да е произволна друга инерциална система. Това означава, че нашите уравнения трябва да бъдат инвариантни спрямо трансформациите на Лоренц (25.1). Целта на тази глава е да се покаже как може да се достигне това. Но преди да започнем, ще направим нещо, което значително ще облекчи нашата работа (и ще ни спести известни недоразумения). То се състои в такъв избор на единиците за дължина и време, че скоростта c да е равна на единица. Вие можете да считате например, че за единица време е взет *интервалът, за който светлината минава отрязък от един метър* (това е около 3.10^{-9} s). Може даже тази единица за време да се нарече „един светлинен метър“. Използуването на тази единица още по-ярко подчертава симетрията на пространството и времето. Освен това от нашите релативистични уравнения ще изчезнат всички c. (Ако това поради някаква причина ви смущава, можете във всяко уравнение да ги възстановите или да замените всяко t с ct, а още по-добре е да поставите c навсякъде, където това е необходимо за правилната размерност на уравненията.) Сега след такава подготовка можем да тръгнем по-нататък.

Нашата програма се състои в това, да повторим в четиримерното пространство-време всичко това, което правихме с векторите в три измерения. Тази работа не е сложна — просто ще действуваме аналогично. Единственото затруднение ще се срещне само при означенията (символът за вектор вече е зает от тримерните вектори) и малко ще се изменят знаците в скаларното произведение.

Преди всичко по аналогия с векторите в тримерното пространство ще въведем *четиривектора* като набор от четири величини a_t, a_x, a_y и a_z, които при прехода в движеща се координатна система ще се трансформират подобно на t, x, y и z. За означаване на четиривектора се използуват няколко различни начина. Ние ще пишем просто a_μ, като разбираме под това групата от четири величини (a_t, a_x, a_y, a_z); с други думи, индексът μ приема някое от четирите „значения“ t, x, y и z. Понякога ще ни бъде удобно да означаваме трите пространствени компоненти във вид на тримерен вектор, т. е. да пишем $a_\mu=(a_t, \mathbf{a})$.

Ние вече се сблъскахме с един такъв четиривектор, който се състои от енергията и импулса на частицата (виж гл. 17, т. I). В нашите нови означения той ще се напише така:

$$p_\mu=(E, \mathbf{p}), \tag{25.2}$$

т. е. четиривекторът p_μ се състои от енергията E и трите компоненти на тримерния импулс на частицата $\mathbf{p}$.

Изглежда, че играта действително се оказа много проста: единственото, което сме длъжни да направим, е да намерим за всеки тримерен вектор липсващата компонента и да получим четиривектор. Обаче все пак тази задача е по-трудна, отколкото изглежда на пръв поглед. Да вземем например вектора на скоростта с компоненти

$$v_x=\frac{dx}{dt},\quad v_y=\frac{dy}{dt},\quad v_z=\frac{dz}{dt}.$$

Каква ще бъде неговата компонента по времето? Инстинктът ни подсказва, че понеже четиривекторът е подобен на t, x, y, z, компонента по времето като че ли трябва да бъде

$$v_t=\frac{dt}{dt}=1.$$

Но това не е вярно. Работата е в това, че времето t във всеки знаменател не е инвариантно при трансформациите на Лоренц. Числителят има правилно поведение, а dt в знаменателя разваля цялата работа: то не е еднакво в две различни системи.

Оказва се, че четирите компоненти на „скоростта", които трябва да напишем, ще се превърнат в компоненти на четиривектор, ако ние просто ги разделим на $\sqrt{1-v^2}$. В правилността можем да се убедим, като вземем четиривектора на импулса

$$p_\mu=(E,\mathbf{p})=\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}},\ \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right) \tag{25.3}$$

и го разделим на масата в покой, която в *четиримерното пространство* е скалар. При това ще получим

$$\frac{p_\mu}{m_0}=\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}},\ \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right), \tag{25.4}$$

което както преди трябва да бъде четиривектор. (Делението на скалар не изменя трансформационните свойства.) Така че *четиривектора на скоростта* u_μ можем да *определим* така:

$$u_t=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}},\qquad u_y=\frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{25.5}$$

$$u_x=\frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}},\qquad u_z=\frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Това е много полезна величина; сега можем да напишем например

$$p_\mu=m_0u_\mu. \tag{25.6}$$

Такъв е типичният вид, който трябва да има правилното релативистично уравнение: всяка негова страна трябва да бъде четири вектор. (В дясната част стои произведението на инвариант с четиривектор, което както и по-рано е четиривектор.)

25-2. Скаларно произведение

Щастлива случайност, ако искате, е това, че разстоянието от някоя точка до началото на координатната система не се изменя при завъртането ѝ. Математически това означава, че $r^2=x^2+y^2+z^2$ е инвариант. С други думи, след завъртането $r'^2=r^2$ или

$$x'^2+y'^2+z'^2=x^2+y^2+z^2.$$

Възниква въпросът: съществува ли подобна величина, която е инвариантна при трансформациите на Лоренц? Да, съществува. От (25.1) вие виждате, че

$$t'^2-x'^2=t^2-x^2.$$

Тя би била добра във всички отношения само ако не зависеше от нашия избор на оста x. Но този недостатък е лесно да се поправи чрез изваждане на y^2 и z^2. Тогава трансформации на Лоренц *плюс* завъртане я оставят неизменна. По такъв начин ролята на величина, аналогична на тримерното r^2 в четиримерно пространство, играе комбинацията

$$t^2-x^2-y^2-z^2.$$

Тя е инвариант на така наречената „пълна група на Лоренц" която включва както премествания с постоянна скорост, така и завъртания.

По-нататък, понеже тази инвариантност представлява алгебрично свойство, което зависи само от правилата на трансформацията (25.1) плюс завъртане, тя е в сила за всеки четиривектор. (Всички те по определение се трансформират по еднакъв начин.) Така че за всякакъв четиривектор a_μ

$$a_t'^2 - a_x'^2 - a_y'^2 - a_z'^2 = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2 .$$

Тази величина ще наричаме квадрат на „дължината" на четиривектора a_μ. (Бъдете внимателни! Понякога вземат обратни знаци за всички събираеми и квадрат на дължината наричат числото $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a_t^2$.)

Ако сега имаме *два* вектора a_μ и b_μ, техните едноименни компоненти се трансформират еднакво, затова комбинацията

$$a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$$

също ще бъде инвариантна (скаларна) величина. (Фактически ние показахме това още в гл. 17, т. I.) Получи се величина, съвършено аналогична на скаларното произведение на векторите. Така и ще я наричаме: *скаларно произведение* на два четиривектора. Като че ли е логично и да го записваме $a_\mu . b_\mu$, за да *изглежда* даже *подобно* на скаларното произведение. Но обикновено за съжаление не правят така и го пишат без точка. И ние също ще се придържаме към този порядък и ще записваме скаларното произведение просто $a_\mu b_\mu$. И така, *по определение*

$$a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z . \qquad (25.7)$$

Помнете, че навсякъде, където видите два еднакви индекса (вместо μ ние понякога ще използуваме ν или други букви), е необходимо да се вземат четири произведения и да се съберат, *като не се забравя при това за знака минус* пред произведенията на пространствените компоненти. Като се има пред вид тази уговорка, инвариантността на скаларното произведение при трансформациите на Лоренц може да се запише като

$$a'_\mu b'_\mu = a_\mu b_\mu .$$

Понеже последните три събираеми във формула (25.7) представляват просто тримерно скаларно произведение, често е по-удобно да се приеме записването

$$a_\mu b_\mu = a_t b_t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Очевидно е, че въведената по-горе четиримерна дължина може да се запише като $a_\mu a_\mu$:

$$a_\mu a_\mu = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2 = a_t^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}. \qquad (25.8)$$

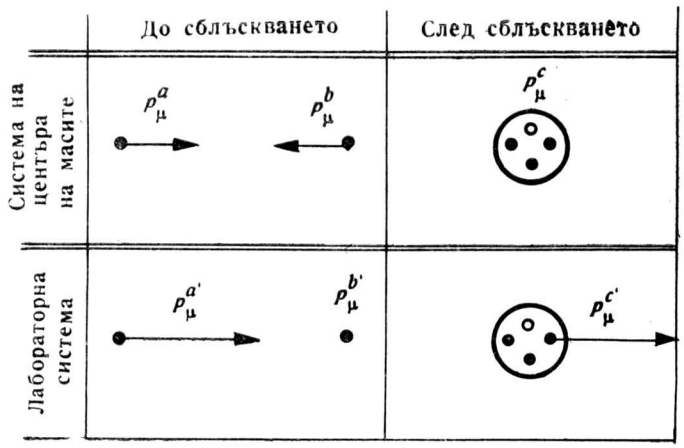
Но понякога е удобно тази величина да се запише като a_μ^2:

$$a_\mu^2 \equiv a_\mu a_\mu .$$

Ще демонстрираме сега плодотворността на четиримерното скаларно произведение. Антипротоните ($\bar{p}$) се получават в големи ускорители от реакцията

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}.$$

С други думи, високоенергиен протон се сблъсква с протон, който се намира в покой (например с поставена в потока водородна мишена) и ако падащият протон има достатъчна енергия, към двата първоначални протона може допълнително да се роди двойка



Фиг. 25. 1- Реакцията $p+p\rightarrow 3p+\bar{p}$ в лабораторна система и система ц. м. (Предполага се, че енергията на падащия протон е точно достатъчна за протичане на реакцията. Протоните са означени с черни кръгчета, а антипротоните — с бели.)

протон-антипротон[1].

Каква енергия трябва да има падащият протон, за да стане енергетично възможна тази реакция?

Най-лесно е да се получи отговор, като разгледаме тази реакция в координатната система на центъра на масите (ц. м.) (фиг. 25-1). Ще наречем падащия протон протон *a*, а неговия четириимпулс ще означим с p_μ^a. Аналогично протона на мишената ще наречем *b*, а неговия четириимпулс ще означим с p_μ^b. Ако енергията на падащия протон е *точно* достатъчна за реакцията, в крайното състояние (т. е. в състоянието след удара им) ще се образува система, която съдържа три протона и антипротон, намиращи се в покой в системата ц. м. Ако енергията на падащия протон бъде малко по-голяма, частиците в крайното състояние ще излетят с някаква кинетична енергия и ще се разлетят настрани; ако пък е малко по-малка, тя ще бъде недостатъчна за образуване на четири частици.

Нека p_μ^c е пълният четириимпулс на цялата система в крайното състояние; тогава съгласно със закона за запазване на енергията и импулса

$$\mathbf{p}^a+\mathbf{p}^b=\mathbf{p}^c$$

и

$$E^a+E^b=E^c,$$

а като комбинираме тези два израза, можем да напишем

$$p_\mu^a+p_\mu^b=p_\mu^c. \tag{25.9}$$

Сега още едно важно обстоятелство: понеже получихме уравнение за четиривектори, затова то трябва да е валидно за каквато и да е инерциална система. Можем да се възползуваме от този факт за опростяване на изчисленията. Да напишем „дължините“ на всяка от частите на (25.9), които, разбира се, също трябва да са равни една на друга, т. е.

$$(p_\mu^a+p_\mu^b)(p_\mu^a+p_\mu^b)=p_\mu^c p_\mu^c. \tag{25.10}$$

---

[1] Вас може да ви учуди защо не се ползуваме от реакцията

$$p+p\longrightarrow p+p+\bar{p}$$

или даже

$$p+p\longrightarrow p+\bar{p},$$

за която без съмнение е нужна по-малка енергия? Цялата работа е в принципа, наричан *запазване на барионния заряд*, съгласно с който числото, равно на броя на протоните минус броя на антипротоните, не може да се измени. В лявата страна на нашата реакция това число е равно на 2. Следователно, ако ние искаме отдясно да имаме антипротон, трябва да го съпътствуват *още* три протона (или други бариони).

Тъй като $p^c_\mu p^c_\mu$ е инвариант, ние можем да го изчислим в произволна координатна система. В системата ц. м. компонентата по времето на p^c_μ е равна на енергията в покой на четирите протона, т. е. на $4M$, а пространствената част $\mathbf{p}$ е равна на нула, така че $p^c_\mu=(4M, 0)$. При това ние се възползувахме от равенството на масите на протона и антипротона, като ги означихме с една буква M.

По такъв начин уравнението (25.10) приема вида

$$p^a_\mu p^a_\mu+2p^a_\mu p^b_\mu+p^b_\mu p^b_\mu=16\,M^2. \tag{25.11}$$

Произведенията $p^a_\mu p^a_\mu$ и $p^b_\mu p^b_\mu$ се изчисляват много бързо: „дължината“ на четиривектора на импулса на всяка частица е равна на квадрата на нейната маса

$$p_\mu p_\mu = E^2-\mathbf{p}^2=M^2.$$

Това може да се докаже с преки изчисления или малко по-ефектно с простата забележка, че в *системата на покой* на частицата $p_\mu=(M, 0)$, а следователно $p_\mu p_\mu=M^2$. Тъй като това е инвариант, той е равен на M^2 във *всяка* система на отчитане. Като поставим резултатите в уравнение (25.11), ние ще получим

$$2p^a_\mu p^b_\mu=14M^2$$

или

$$p^a_\mu p^b_\mu=7M^2. \tag{25.12}$$

Сега може да се изчисли $p^a_\mu p^b_\mu$ в лабораторната система. В тази система четиривекторът $p^a_\mu=(E^a, \mathbf{p}^a)$, а $\mathbf{p}^b_\mu=(M, 0)$, тъй като той описва протона, който се намира в покой. И така, $p^a_\mu p^b_\mu$ трябва да бъде равно на ME^a, а ние знаем, че скаларното произведение е инвариант, затова то трябва да бъде равно на стойността, която ние намерихме в (25.12). В резултат се получава

$$E^a=7M.$$

Пълната енергия на падащия протон трябва да бъде най малко равна на $7M$ (което съставя около 6,6 GeV, тъй като $M=938$ MeV) или след изваждането на масата в покоя M получаваме, че *кинетичната* енергия трябва да бъде равна най-малко на $6M$ (около 5,6 GeV). Именно затова, за да има възможност да произвежда антипротони, беватронът в Беркли се проектираше за кинетична енергия на ускорените протони около 6,2 GeV.

Скаларното произведение е инвариант, затова е полезно да се знае неговата големина. Какво например може да се каже за „дължината на четиривектора на скоростта $u_\mu u_\mu$?

$$u_\mu u_\mu = u_t^2-\mathbf{u}^2=\frac{1}{1-v^2}-\frac{v^2}{1-v^2}=1,$$

т. е. u_μ е *единичен четиривектор*.

25-3. Четиримерен градиент

Следващата величина, която трябва да обсъдим, е четиримерният аналог на градиента. Ще напомним (виж гл. 14, т. I), че трите оператора на диференцирането $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ се трансформират подобно на тримерен вектор и се наричат градиент. Същата схема трябва да работи и в четири измерения; за простота вие може да си мислите, че четиримерният градиент трябва да бъде $(\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, *но това не е вярно*.

За да намерим грешката, ще разгледаме скаларна функция, която зависи само от x и t. Нарастването на φ при малко изменение на t с Δt и постоянно x е

$$\Delta\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\Delta t. \tag{25.13}$$

От друга страна, от гледна точка на движещия се наблюдател

$$\Delta\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\,\Delta x'+\frac{\partial\varphi}{\partial t'}\,\Delta t'.$$

Като използуваме уравнение (25.1), можем да изразим $\Delta x'$ и $\Delta t'$ чрез Δt. Като си спомним сега, че величината x е постоянна, така че $\Delta x=0$, ние пишем

$$\Delta x'=-\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\,\Delta t,\qquad \Delta t'=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}.$$

По такъв начин

$$\Delta\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\left(-\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\,\Delta t\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial t'}\left(\frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t'}-v\,\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right)\frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Като сравним този резултат с (25.13), ние намираме, че

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t'}-v\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right).\qquad(25.14)$$

Аналогични изчисления дават

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'}-v\frac{\partial\varphi}{\partial t'}\right).\qquad(25.15)$$

Вие виждате, че градиентът се получи доста странен. Изразите за x и t чрез x' и t' [получени чрез решаване на уравнение (25.1)] имат вид

$$t=\frac{t'+vx'}{\sqrt{1-v^2}},\qquad x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Именно така трябва да се трансформира четиривекторът. Но в уравненията (25.14) и (25.15) се получиха неправилни знаци!

Изходът е в това, че трябва да се замени неправилното определение на четиримерния оператор на градиента $(\partial/\partial t,\ \nabla)$ с правилното

$$\nabla_\mu=\left(\frac{\partial}{\partial t},\ -\nabla\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t},\ -\frac{\partial}{\partial x},\ -\frac{\partial}{\partial y},\ -\frac{\partial}{\partial z}\right).\qquad(25.16)$$

Ние ще го означим с ∇_μ. За такъв ∇_μ трудностите изчезват и той се държи така, както подобава на истинския четиривектор. (Ужасно неприятно е наличието на минуси, но така е устроен светът.) Разбира се, като говорим, че ∇_μ „се държи като четиривектор“, ние подразбираме, че четиримерният градиент на скаларна функция е четиривектор. Ако φ е истинско скаларно (Лоренц — инвариантно) поле, то $\nabla_\mu\varphi$ ще бъде четиривекторно поле.

И така, всичко се уреди. Сега имаме вектори, градиенти и скаларно произведение. Следващият по ред е инвариантът, аналогичен на дивергенцията в тримерния векторен анализ. Ясно е че негов аналог трябва да бъде изразът $\nabla_\mu b_\mu$, където b_μ е векторно поле, компонентите на което са функции на пространството и времето. Ние *ще определим дивергенцията* на четиривектора $b_\mu=(b_t,\ \mathbf{b})$ като скаларно произведение на ∇_μ с b_μ

$$\nabla_\mu b_\mu=\frac{\partial}{\partial t}\,b_t-\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)b_x-\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)b_y-\left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)b_z=\frac{\partial}{\partial t}\,b_t+\nabla\cdot\mathbf{b},\qquad(25.17)$$

където $\nabla\cdot\mathbf{b}$ е обикновената тримерна дивергенция на вектора $\mathbf{b}$. Не забравяйте внимателно да следите за знаците. Единият знак минус е свързан с определението на скаларното произведение [формула (25.7)], а другият възниква от пространствените компоненти на ∇_μ [формула (25.16)]. Дивергенцията, която се определя от формула (25.17), е инвариант и за всички координатни системи, които се различават една от друга с трансформацията на Лоренц и нейното прилагане води до един и същ отговор.

Да се спрем сега на физичен пример, в който се появява четиримерна дивергенция. От нея можем да се възползуваме при решаване на задачата за полетата около движещ се проводник. Ние вече видяхме (гл. 13-7), че плътността на електричния заряд ρ и плътността на тока $\mathbf{j}$ образуват четиривектор $j_\mu = (\rho, \mathbf{j})$. Ако незареденият проводник пренася ток j_x в система, която се движи спрямо него със скорост v (по оста x), в проводника наред с тока ще се появи и заряд [който възниква съгласно със закона за трансформациите на Лоренц (25.1)]

$$\rho' = \frac{-vj_x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad j_x' = \frac{j_x}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Но това е точно онова, което ние намерихме в гл. 13. Сега е необходимо да поставим тези източници в уравнението на Максвел в *движещата се система* и да намерим полетата.

Законът за запазване на заряда в четиримерни означения също приема много прост вид. Да разгледаме четиримерната дивергенция на вектора j_μ:

$$\nabla_\mu j_\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}. \tag{25.18}$$

Законът за запазване на заряда твърди, че изтичането на тока от единица обем трябва да бъде равно на отрицателната скорост на увеличаването плътността на заряда. С други думи,

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Като поставим това в (25.18), получаваме много проста форма на закона за запазване на заряда

$$\nabla_\mu j_\mu = 0. \tag{25.19}$$

Благодарение на това, че $\nabla_\mu j_\mu$ е инвариант, приравняването му на нула в една система на отчитане означава приравняване на нула и във всички други. По такъв начин, ако зарядът се запазва в една система, той ще се запазва и във всички други координатни системи, които се движат спрямо нея с постоянна скорост.

Като последен пример ще разгледаме скаларното произведение на оператора на градиента ∇_μ сам със себе си. В тримерното пространство такова произведение дава лапласиан

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Какво ще се получи в четири измерения? Да се изчисли това е много просто. Като следваме нашето правило за скаларното произведение, намираме, че

$$\nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} - \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) -$$
$$-\left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.$$

Този оператор, който представлява аналог на тримерния лапласиан, се нарича *даламбериан* и се означава със специален символ

$$\Box^2 = \nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \tag{25.20}$$

По построение той е инвариантен скаларен оператор, т. е., ако оперира върху четиривекторно поле, дава ново четиривекторно поле. [Понякога даламберианът се определя с противоположен по отношение на (25.20) знак, така че при четенето на литература бъдете внимателни!]

И така, за повечето величини, изброени в табл. 25-1, ние намерихме техните четиримерни еквиваленти. (Ние нямаме още еквивалент за векторното произведение, но неговото намиране ще отложим до следващата глава.) А сега да съберем на едно място всички най-важни резултати и определения и да съставим още

Таблица 25-2

Най-важните величини на тримерния и четиримерния векторен анализ

	Три измерения	Четири измерения
Вектор	$\mathbf{A}=(A_x,\ A_y,\ A_z)$	$a_\mu=(a_t,\ a_x,\ a_y,\ a_z)=(a_t,\ \mathbf{a})$
Скаларно произведение	$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$	$a_\mu b_\mu=a_tb_t-a_xb_x-a_yb_y-a_zb_z=a_tb_t-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$
Векторен диференциален оператор	$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$	$\nabla_\mu=\left(\frac{\partial}{\partial t},\ -\frac{\partial}{\partial x},\ -\frac{\partial}{\partial y},\ -\frac{\partial}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t},\ -\nabla\right)$
Градиент	$\nabla\phi=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\ \frac{\partial\phi}{\partial y},\ \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$	$\nabla_\mu\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ -\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ -\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ -\nabla\varphi\right)$
Дивергенция	$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\nabla_\mu a_\mu=\frac{\partial a_t}{\partial t}+\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\frac{\partial a_t}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{a}$
Лапласиан и даламбериан	$\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\nabla_\mu\nabla_\mu=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2=\Box^2$

една таблица (табл. 25-2); тя ще ви помогне по-добре да запомните кое в какво преминава.

25-4. Електродинамиката в четиримерни означения

В гл. 18-6 ние вече се сблъскахме с оператора на Даламбер, макар и да не знаехме, че той се нарича така. Ние намерихме там диференциални уравнения за потенциалите, които в новите означения изглеждат така:

$$\Box^2\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\qquad \Box^2\mathbf{A}=\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}. \tag{25.21}$$

От дясната страна на (25.21) стоят четири величини ρ, j_x, j_y, j_z, разделени на ε_0 — универсалната константа, еднаква във всички координатни системи, ако във всички системи за измерване на заряда се използува една и съща единица. По такъв начин четирите величини ρ/ε_0, j_x/ε_0, j_y/ε_0, j_z/ε_0 също се трансформират като четиривектор. Можем да ги запишем така — j_μ/ε_0. Операторът на Даламбер не се изменя при преминаване към други координатни системи, така че четирите величини φ, A_x, A_y и A_z също *трябва да се трансформират* като четиривектор, т. е. *трябва да бъдат* компоненти на четиривектор. Накратко казано, величината

$$A_\mu=(\varphi,\ \mathbf{A})$$

е четиривектор. Това, което ние наричахме скаларен и векторен потенциал, се оказа само различни части от една и съща физична величина. Те са неотделими една от друга. Ако това е така, релативистичната инвариантност на света е очевидна. Векторът A_μ ние наричаме *четиримерен потенциал* (4-потенциал).

В четиримерните означения (25.21) придобива много прост вид

$$\Box^2A_\mu=\frac{j_\mu}{\varepsilon_0}. \tag{25.22}$$

Физиката на това уравнение е същата, както и на уравненията на Максвел. Но има известна прелест в това, че можем да ги препишем в толкова елегантна форма. Впрочем тази красива форма съдържа и нещо по-значително — от нея непосредствено се вижда инвариантността на електродинамиката спрямо трансформациите на Лоренц.

Да си припомним, че уравнението (25.21) може да се получи от уравненията на Максвел само тогава когато е наложено допълнителното условие за градиентната инвариантност

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{A}=0, \tag{25.23}$$

което означава просто $\nabla_\mu A_\mu = 0$, т. е. условието за градиентната инвариантност говори, че дивергенцията на четиримерния вектор A_μ е равна на нула. Това изискване се нарича условие на Лоренц. Такава форма на неговото записване е много удобна, тъй като тя е инвариантна и затова уравненията на Максвел във всички системи на отчитане запазват вида (25.22).

25-5. Четиримерен потенциал на движещ се заряд

Сега ще напишем законите за трансформация, изразяващи φ и **A** в движеща се система чрез φ и **A** в неподвижна, макар че ние вече неявно говорихме за тях. Понеже $A_\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ е четиривектор, това уравнение трябва да изглежда подобно на (25.1) с изключение на това, че t трябва да се замени с φ, а **x** — с **A**. По такъв начин

$$\varphi' = \frac{\varphi - vA_x}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad A'_y = A_y,$$
$$A'_x = \frac{A_x - v\varphi}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad A'_z = A_z. \tag{25.24}$$

При това се предполага, че координатната система „прим" се движи спрямо тази без „прим" със скорост v по посоката на оста x.

Да разгледаме един пример за плодовитостта на идеята за 4-потенциала. На какво са равни векторният и скаларният потенциал на заряд q, който се движи със скорост v по посоката на оста x? Задачата се опростява много в координатна система, която се движи заедно със заряда, понеже в тази система зарядът се намира в покой. Нека зарядът се намира в началото на координатната система S', както е показано на фиг. 25-2. Скаларният потенциал в движещата се система се дава с израза

$$\varphi' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'}, \tag{25.25}$$

като r' е разстоянието от заряда q до точката в движещата се координатна система, където се извършва измерването на полето. А векторният потенциал **A'**, разбира се, е равен на нула.

Сега без особени хитрости може да се намерят потенциалите φ и **A** в неподвижната координатна система. Съотношения, обратни на уравненията (25.24), ще бъдат

$$\varphi = \frac{\varphi' + vA'_x}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad A_y = A'_y,$$
$$A_x = \frac{A'_x + v\varphi'}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad A_z = A'_z. \tag{25.26}$$

Като използуваме по-нататък израза за φ' [виж (25.25)] и равенството $\mathbf{A}' = 0$, получаваме

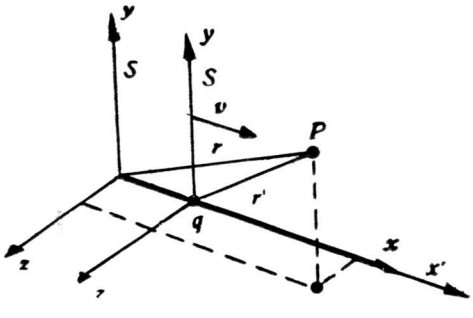
$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r'\sqrt{1-v^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.$$

Тази формула ни дава скаларния потенциал φ, който бихме видели в системата S, но той за съжаление е записан чрез координатите на системата S'. Впрочем това е лесно поправимо; с помощта на (25.1) може да се изразят t', x', y', z' чрез t, x, y, z и да се получи

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,\frac{1}{\sqrt{[(x-vt)/\sqrt{1-v^2}]^2 + y^2 + z^2}}. \tag{25.27}$$

Като повторите същата процедура за вектора **A**, вие можете да покажете, че

$$\mathbf{A} = \mathbf{v}\varphi. \tag{25.28}$$



Фиг. 25-2. Координатната система S' се движи със скорост v (по посоката на оста x) спрямо системата S.

(Зарядът, който се намира в покой в началото на координатната система S', се намира в системата S в точка $x = vt$. Потенциалите в точка P могат да бъдат намерени за всяка координатна система)

Това са същите формули, които изведохме в гл. 21, но там те бяха получени по друг метод.

25-6. Инвариантност на уравненията на електродинамиката

И така, излиза, че потенциалите φ и $\mathbf{A}$ образуват заедно четиривектор, който означихме с A_μ, а вълновото уравнение (пълното уравнение, което изразява A_μ чрез j_μ) може да се напише във вида (25.22). Това уравнение заедно със запазването на заряда и уравнение (25.19) съставят фундаменталния закон на електромагнитното поле:

$$\Box^2 A_\mu = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\mu, \quad \nabla_\mu j_\mu = 0. \tag{25.29}$$

И ето, моля, всички уравнения на Максвел просто и красиво се записват всичко на всичко на един ред. Постигнахме ли ние нещо, като ги записахме в такъв вид освен, разбира се, красотата и простотата? Преди всичко има ли тук някакво различие от онова, което беше по-рано, когато ги пишехме в цялото разнообразие на компонентите? Може ли от тези уравнения да се получи нещо, което не може да се получи от вълновите уравнения за потенциалите, които съдържат заряди и токове? Отговорът е напълно определен — разбира се, не може. Единственото, което ние направихме, е, че изменихме названията, т. е. използувахме нови означения. Ние нарисувахме квадратче за означаване на производните, но това както преди не е нито повече, нито по-малко от втората производна по t, минус втората производна по x, минус втората производна по y, минус втората производна по z. Индексът μ показва, че имаме четири уравнения, по едно за всяко от стойностите на $\mu = t, x, y$ или z. Какъв е тогава смисълът на това, че уравненията може да се напишат в толкова проста форма? От гледна точка на получаването на нещо ново — никакъв. Макар че, възможно е, простотата на уравненията да изразява определена простота на природата.

Сега аз ще ви покажа нещо интересно, което постепенно научихме: *всички закони но физиката могат да се съдържат в едно уравнение*

$$\bigcup = 0. \tag{25.30}$$

Нали удивително просто уравнение! Разбира се, трябва още да се знае какво означава символът $\bigcup$. Това е физична величина, която ние ще наричаме „несъобразност“[1] на ситуацията. Ние даже имаме формула за нея. Ето как се изчислява тази несъобразност: вие вземате всички физически закони и ги написвате в особена форма. Например взели сте закона на механиката $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ и сте го записали във вида $\mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0$. Сега можете величината $(\mathbf{F} - m\mathbf{a})$, която, разбира се, в нашия свят трябва да бъде равна на нула, да наречете „несъобразност“ на механиката. След това вие вземате квадрата на тази несъобразност, означавате го с $\bigcup_1$ и го наричате „несъобразност на механичните ефекти“. С други думи, вие вземате

$$\bigcup_1 = (\mathbf{F} - m\mathbf{a})^2. \tag{25.31}$$

След това записвате друг физичен закон, да речем $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ и определяте

$$\bigcup_2 = \left(\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)^2,$$

което може да се нарече „гаусова електрична несъобразност“. Като продължавате този процес, вие можете да въведете $\bigcup_3$, $\bigcup_4$ и т. н. за всеки от физичните закони.

[1] В английския оригинал „unworldliness“

На края *пълна* несъобразност на света $\cup$ вие наричате сумата на $\cup_i$ за всяко от различните явления, т. е. $\cup = \sum_i \cup_i$. И тогава „великият закон на природата“ гласи

$$\boxed{\cup = 0.} \tag{25.32}$$

Този „закон“, разбира се, означава само, че сумата от квадратите на всички отделни отклонения е равна на нула, обаче единственият начин да се направи сумата от квадратите на множество от членове равна на нула е да се приравни на нула всяко от нейните събираеми.

По такъв начин „удивително простият закон“ (25.32) е еквивалентен на цялата редица уравнения, които вие първоначално написахте. Затова съвършено очевидно е, че простите означения, които скриват сложността зад определението на символите, още не е истинска простота. *Това е само трик.* Така и в израза (25.32) зад привидната простота се скриват няколко уравнения; това отново не е нищо друго освен трик. Като ги развиете, отново ще получите това, което е било по-рано.

Обаче законът на електродинамиката, написан във формата на уравнение (25.29), съдържа *нещо* повече, отколкото обикновено записване; във векторния анализ освен простотата на записване също има нещо по-голямо. Фактът, че уравненията на електромагнетизма могат да се запишат в особени означения, които *специално са приспособени* за четиримерната геометрия на трансформациите на Лоренц, с други думи, като векторни уравнения в четиримерния свят, означава, че те са инвариантни спрямо трансформациите на Лоренц. Именно затова, че уравненията на Максвел са инвариантни спрямо тези трансформации, можем да ги напишем в такъв красив вид.

В това че законите на електродинамиката могат да се напишат във формата на елегантното уравнение (25.29), няма нищо случайно. Теорията на относителността е била развита именно затова, че *експериментално се е потвърдила* неизменността на предсказаните от уравненията на Максвел явления в която и да е инерциална система. Именно при изучаването на трансформационните свойства на уравненията на Максвел Лоренц е открил своите трансформации като преобразувания, които оставят тези уравнения инвариантни.

Обаче има и друга причина да се записват уравненията в този вид. Било е намерено, че *всички* закони на физиката трябва да бъдат инвариантни спрямо трансформациите на Лоренц (пръв за това се е досетил Айнщайн). Такова е съдържанието на принципа на относителността. Затова ако вие сте изобретили означения, които веднага показват инвариантен ли е написаният от нас закон, може да се гарантира, че при опит да създадете нова теория ще пишете само уравнения, които се съгласуват с принципа на относителността.

В простотата на уравненията на Максвел в тези частни означения няма никакво чудо. Означенията специално са били измислени именно за тях. Най-интересното нещо от физична гледна точка е това, че който и да е физичен закон (било то разпространението на мезонни вълни или поведението на неутриното в β-разпадането, или нещо друго) трябва да има същата инвариантност спрямо тези трансформации. Така че, ако вашият звездолет се движи с постоянна скорост, всички закони на природата заедно се преобразуват така, че никакви нови явления не възникват. Именно благодарение на това, че принципът на относителността е закон на природата, уравненията на нашия свят в четиримерни означения трябва да изглеждат много по-просто.

26

Лоренцови трансформации на полетата

26-1. Четиримерен потенциал на движещ се заряд

В предишната глава видяхме, че потенциалът $A_\mu=(\varphi,\ \mathbf{A})$ е четиривектор. За негова компонента по времето служи скаларният потенциал φ, а за трите пространствени компоненти — векторният потенциал $\mathbf{A}$. Като използувахме трансформациите на Лоренц, намерихме също потенциала на частица, която се движи праволинейно с постоянна скорост. (В гл. 21 същото беше направено с малко по-друг метод.) За точков заряд, координатите на който в момент t са равни на $(vt,\ 0,\ 0)$, потенциалите в точка $(x,\ y,\ z$ имат вида

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-v^2}\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{1/2}},$$

$$A_x=\frac{qv}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-v^2}\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{1/2}}, \tag{26.1}$$

$$A_y=A_z=0.$$

Уравненията (26.1) дават потенциалите в точка $x,\ y,\ z$ в момент t, които възникват от движещия се заряд, „истинското“ положение на който (има се пред вид положението в *момента на времето* t) е $x=,vt$. Забележете, че в уравнението влизат координатите $(x-vt)$ y и z, които са координати спрямо *променливото положение* P на движещия се заряд (фиг. 26-1). Но, както знаете, истинското влияние се разпространява всъщност със скорост c, така че полето в точката се определя в действителност от закъсняващото положение на заряда P', координатата x на който е равна на vt' (където $t'=t-r'/c$ — „закъсняващото“ време)[1]. На нас обаче ни е известно, че зарядът се движил с постоянна скорост по права линия, затова е естествено, че поведението в точка P' е непосредствено свързано с променливото положение на заряда. Фактически, ако добавим предс положението, че потенциалите зависят само от положението и скоростта в закъсняващия момент, тогава уравнението (26.1) ще представлява пълната формула за потенциалите на заряда, който се движи по какъвто и да е начин. Ето как действува всичко това. Нека имате заряд, който се движи по някакъв произволен начин, например по траекторията, показана на фиг. 26-2, и се опитвате да намерите потенциала в точка $(x,\ y,\ z)$. Преди всичко вие намирате закъснявашото положение P' и скоростта v' в тази точка. Представете си след това, че зарядът запазва своето движение с тази скорост за целия период на закъснение $(t'-t)$, така че той би се появил след това във въображаемото положение $P_{\text{пр}}$, което ще наричаме „проекционно“, като се движи със същата скорост v'. (В действителност той, разбира се, не прави това; в момента t той се намира в точка P.) Тогава потенциалите в точка $(x,\ y,\ z)$ ще бъдат точно такива, каквито биха дали уравненията (26.1) за въображаемия заряд в проекционното по-

[1] Тук щрихът се използува за означаване на *закъсняващото* положение и време; не го бъркайте с щриха от предната глава, който означаваше отправна система, подложена на трансформация на Лоренц.

26-1. Четиримерен потенциал на движещ се заряд

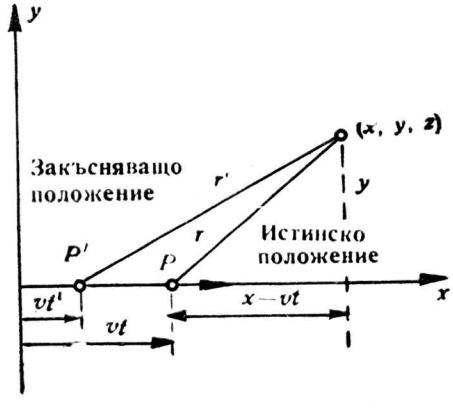
26-2. Полета на точков заряд, който се движи с постоянна скорост

26-3. Релативистично трансформиране на полетата

26-4. Уравненията на движение в релативистични означения

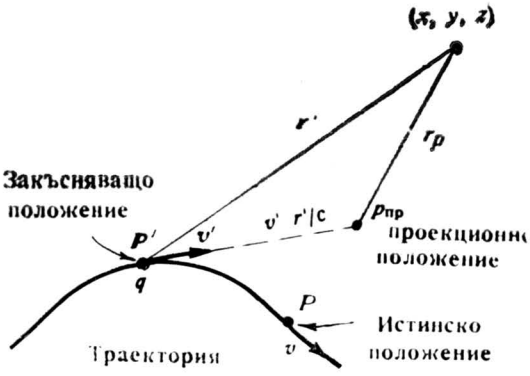
В тази глава $c=1$

Да се повтори:
гл. 20 „Решение на уравненията на Максвел в празно пространство“



Фиг. 26-1. Определян в точка P на полетата от заряда q, който се движи по оста x с постоянна скорост v.

[Полето в точка $(x,\ y,\ z)$ в „сегашния“ момент може да се изрази както чрез „истинското“ положение P, така и чрез „закъсняващото“ положение P' (т. е. положението в момент $t'=t-r'/c$).]



Фиг. 26-2. Движение на заряда по произволна траектория

Потенциалите в точка (x, y, z) в момент t се определят от положението P' и скоростта v' в закъсняващия момент $t'=t-r'/c$. Тях е удобно да ги изразяваме чрез координатите спрямо „проекционното" положение $P_{пр}$ (истинското положение в момент t е точката P)

ложение $P_{пр}$. Тук искаме да кажем, че понеже потенциалите зависят само от това, какво прави зарядът в *закъсняващия* момент, те ще бъдат еднакви независимо от това, продължава ли зарядът своето движение с постоянна скорост, или го изменя след момента t', т. е. след като потенциалите, които ще възникнат в момент t в точката (x, y, z), са вече определени.

Вие разбирате естествено, че в този момент, когато са получени формулите за потенциалите на произволно движещия се заряд, имаме пълната електродинамика; от принципа на суперпозицията можем да получим потенциалите за каквото и да е разпределение на зарядите. Следователно всички явления на електродинамиката могат да се изведат или от уравненията на Максвел, или от следващата поредица от забележки. (Запомнете ги при случай, че вие изведнъж се окажете на необитаем остров. Като изхождате от тях, можете да възстановите всичко. Трансформациите на Лоренц вие, разбира се, помните. Не ги забравяйте нито на необитаемия остров, нито на което и да е друго място.)

Първо, A_μ е четиривектор. *Второ,* кулоновият потенциал на всеки заряд, който се намира в покой, е равен на $q/4\pi\varepsilon_0 r$. *Трето,* потенциалът, създаден от заряди, които се движат по произволен начин, зависи само от положението в закъсняващия момент на времето. От тези три факта вие можете да получите всичко. От това, че A_μ е четиривектор, чрез преобразуване на кулоновия потенциал, който е известен, ще получим потенциалите на заряд, движещ се с постоянна скорост. След това от последното твърдение, че потенциалът зависи само от скоростта в закъсняващия момент, като използуваме проекционното положение, можем да ги намерим. Наистина това не е много удобен начин за разглеждане, но е интересно да се убедим в това, че законите на физиката могат да се формулират по много най-различни начини.

Понякога някой безотговорно заявява, че цялата електродинамика може да бъде получена само от трансформациите на Лоренц и закона на Кулон. Това, разбира се, съвсем не е вярно. Ние преди всичко трябва да предположим, че имаме скаларен и векторен потенциал, които в съвкупност образуват четиривектор. Това ни показва как се преобразуват потенциалите. После откъде ни е известно, че е необходимо да се отчита само ефектът в закъсняващия момент? Или още по-добре защо потенциалът зависи само от положението и скоростта и не зависи например от ускорението? Нали *полетата* **E** и **B** *зависят* все пак и от ускорението. Ако вие се опитате да приложите същите разсъждения и върху тях, ще бъдете принудени да признаете, че те зависят само от положението и скоростта в закъсняващия момент. Но тогава полето на ускоряващ се заряд би било също такова, както и полето от заряда в проекционното положение, а това не е вярно. *Полетата* зависят не само от положението и скоростта на траекторията, но и от ускорението. Така че във „великото" твърдение, че всичко може да се получи от трансформациите на Лоренц, се съдържат още няколко неявни допълнителни предположения. (Винаги, когато вие чувате толкова ефектно твърдение, че нещо голямо може да се построи въз основа на малък брой предположения, търсете грешката. Обикновено неявно се приемат твърде много неща, които се оказват далеч неочевидни, ако се погледне по-внимателно.)

26-2. Полета на точков заряд, който се движи с постоянна скорост

И така, ние намерихме потенциалите на точков заряд, който се движи с постоянна скорост. За практически цели ни е необходимо да намерим полетата. Равномерно движещи се заряди се срещат буквално на всяка крачка, да речем минаващите през камерата на Уилсон космични лъчи или даже бавно движещите се електрони в проводника. Така че нека поне да погледнем как изглеждат тези полета за произволни скорости на заряда, даже

за скорости, близки до скоростта на светлината, но да предположим при това, че ускорението въобще липсва. Това е много интересен въпрос.

Полетата ще намираме по обикновените правила, като изхождаме от потенциалите

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}.$$

Да вземем отначало E_z:

$$E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

Но компонентата A_z е равна на нула, а диференцирането на израза (26.1) за φ дава

$$E_z=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-v^2}}\,\frac{z}{\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{3/2}}. \tag{26.2}$$

Аналогична процедура за E_y довежда до

$$E_y=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-v^2}}\,\frac{y}{\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{3/2}}. \tag{26.3}$$

Малко повече е работата с x-компонентата. Производната от φ е по-сложна, пък и A_x не е равно на нула. Нека отначало да изчислим $-\partial\varphi/\partial x$:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-v^2}}\,\frac{(x-vt)/(1-v^2)}{\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{3/2}}. \tag{26.4}$$

А след това да диференцираме A_x по t:

$$-\frac{\partial A_x}{\partial t}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-v^2}}\,\frac{-v^2(x-vt)/(1-v^2)}{\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{3/2}}. \tag{26.5}$$

И на края като ги съберем, получаваме

$$E_x=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-v^2}}\,\frac{x-vt}{\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{3/2}}. \tag{26.6}$$

Да престанем за минута да се занимаваме с полето $\mathbf{E}$, а отначало да намерим $\mathbf{B}$. За неговата z-компонента имаме

$$B_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Но понеже A_y е равно на нула, остава ни само една производна. Забележете обаче, че A_x е просто равна на $v\varphi$, а производната $(\partial/\partial y)\,v\varphi$ е равна на $-vE_y$. Така че

$$B_z=vE_y. \tag{26.7}$$

Аналогично

$$B_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}=v\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

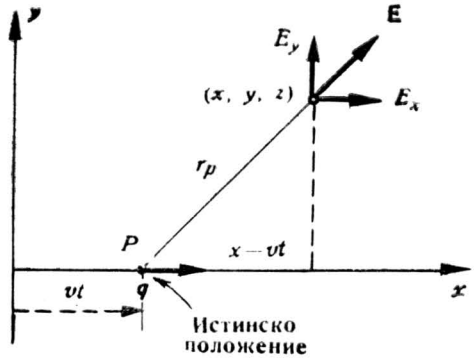
или

$$B_y=-vE_z. \tag{26.8}$$

На края компонентата B_x е равна на нула, тъй като са равни на нула и A_y и A_z. По такъв начин магнитното поле може да се напише във вида

$$\mathbf{B}=\mathbf{v}\times\mathbf{E}. \tag{26.9}$$

Сега да видим как изглеждат нашите полета. Ще се опитаме да нарисуваме картината на полетата около положението на заряда в настоящия момент. Разбира се, влиянието на заряда в известен смисъл произлиза от закъсняващото положение, но понеже имаме работа със строго зададено движение, закъсняващото положение еднозначно се определя от положението в настоящия момент. При постоянна скорост на заряда е по-добре полетата



Фиг. 26-3. Електричното поле на заряд, който се движи с постоянна скорост, е насочено по радиуса от истинското положение на заряда

да се свързват с текущите координати, понеже компонентите на полетата в точката (x, y, z) зависят само от $(x-vt)$, y и z, които са компоненти на вектора на преместването $\mathbf{r}_p$ от постоянното положение на заряда в точката (x, y, z) (фиг. 26-3).

Ще разгледаме отначало точките, за които z е равно на нула. Полето **E** в тези точки има само x- и y-компоненти. От уравненията (26.3) и (26.6) се вижда, че отношението на тези компоненти е равно точно на отношението на x- и y-компонентите на вектора на преместването. Това означава, че посоката на **E** *съвпада с посоката на* $\mathbf{r}_p$, както това е показано на фиг. 26-3. Същият резултат остава верен и за трите измерения, тъй като E_z е пропорционално на z. Накратко електричното поле на заряда е, радиално и силовите линии са разположени от заряда също така както и в стационарния случай. Разбира се, вследствие наличието на допълнителния фактор $(1-v^2)$ полето няма да бъде същото както в стационарния случай. Но тук можем да видим нещо много интересно. Работата стои така, като че ли вие пишете закона на Кулон в особена координатна система, „свита“ по оста x от множителя $\sqrt{1-v^2}$. Ако вие направите това, силовите линии пред и зад заряда ще се разредят, а по страните ще се сгъстят (фиг. 26-4).

Ако свързваме по обикновения начин интензитета на полето **E** с плътността на силовите линии, виждаме, че полето пред и зад заряда отслабва, но затова пък отстрани става по-силно, т. е точно това, за което ни говори уравнението. Когато вие измервате интензитета на полето под прави ъгли към линията на движението, т. е. при $(x-vt)=0$, разстоянието от заряда ще бъде равно на y^2+z^2, а пълният интензитет $\sqrt{E_x^2+E_y^2}$ в тези точки е

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-v^2}}\,\frac{1}{y^2+z^2}\,. \tag{26.10}$$

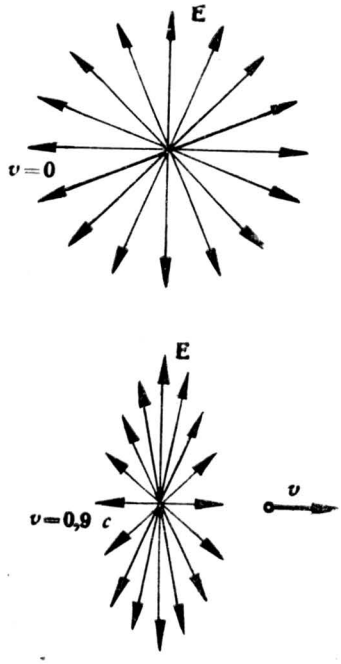
Тя, както и в случая на кулоново поле, е пропорционална на квадрата на разстоянието, но се усилва още от постоянния множител $1/\sqrt{1-v^2}$, който винаги е по-голям от единица. По такъв начин *отстрани* на движещия се заряд електричното поле е по-силно, отколкото това следва от закона на Кулон. Фактически увеличението в сравнение с кулоновия потенциал е равно на отношението на енергията на частицата към нейната маса в покой.

Пред заряда (или зад него) y и z са равни на нула и затова

$$E=E_x=\frac{q\,(1-v^2)}{4\pi\,\varepsilon_0\,(x-vt)^2}\,. \tag{26.11}$$

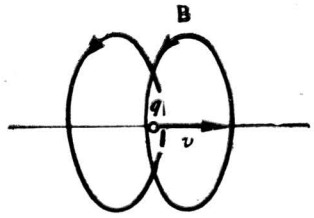
Отново полето е обратно пропорционално на разстоянието от заряда, но сега то се *намалява* от множителя $(1-v^2)$, което се съгласува с картината на силовите линии. Ако v/c е малко, v^2/c^2 е още по-малко и действието на $(1-v^2)$ е почти незабележимо, затова отново се връщаме към закона на Кулон. Но ако частицата се движи със скорост, близка до скоростта на светлината, полето пред частицата силно намалява, а полето отстрани чудовищно нараства.

Нашият резултат, който се отнася към електричното поле на заряда, може да се представи и така. Да предположим, че на парче хартия вие сте нарисували силовите линии на заряд, който се намира в покой, а след това тази картина сте хвърлили със скорост v^2. Тогава благодарение на Лоренцовото скъсяване фигурата ще се свие, т. е. частичките графит на хартията ще ни се струват разположени в други места. Но чудото се състои в това, че в резултат вие ще видите на листчето, което лети покрай вас, точната картина на силовите линии на точков заряд, който се движи. Лоренцовото скъсяване ще ги сближи отстрани, ще ги раздалечи пред заряда и зад него точно толкова, че да се получи необходимата плътност. Ние вече отбелязвахме, че силовите линии не са реалност, а само начин да си представим електричното поле. Обаче тук те се държат като най-истински реални линии. В този частен случай, даже и да сте направили грешка, като



Фиг. 26-4. Електрично поле на заряд: *а)* — на неподвижен; *б)* — на летящ с постоянна скорост $v=0{,}9\,c$.

разглеждате силовите линии като нещо реално и преобразувайки ги като реални линии в пространството, в резултат все пак би се получило правилно поле. Обаче от това силовите линни няма да станат по-реални. Спомнете си за електричното поле, което е създадено от заряд заедно с магнит; когато магнитът се движи, той създава ново електрично поле и разрушава цялата наша прекрасна картина. Така че простата идея на скъсяващата се картина, общо взето, не може да се приложи. Но все пак това е много удобен начин да се запомни как изглежда полето на бързо движещ се заряд.



Фиг. 26-5. Магнитното поле близо до заряд, който се движи, е равно на $\mathbf{v}\times\mathbf{E}$ (ср. с фиг. 26-4)

Магнитното поле [от уравнение (26.9)] е равно на $\mathbf{v}\times\mathbf{E}$. Когато вие умножите векторно скоростта с радиалното поле **E**, ще получите поле **B**, силовите линии на което представляват окръжности около линията на движение (фиг. 26-5). Ако пък сега ние поставим обратно всички c, вие ще се убедите, че резултатът би се получил същият, както и за бавно движещи се заряди. Хубав начин да се установи къде трябва да влязат c е да си спомним формулата за силата:

$$\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}).$$

Вие виждате, че произведението на скоростта с магнитното поле има същата размерност, както и електричното поле, така че в дясната част на (26.9) трябва да стои множител $1/c^2$, т. е.

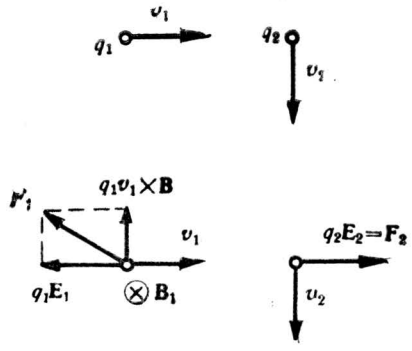
$$\mathbf{B}=\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{E}}{c^2}. \tag{26.12}$$

За бавно движещ се заряд ($v<<c$) полето може да се счита кулоново и тогава

$$\mathbf{B}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{r^2}. \tag{26.13}$$

Тази формула точно съответствува на магнитното поле на тока, което беше намерено в гл. 14.

Пътьом аз бих искал да отбележа нещо твърде интересно само за да помислите за него. (Към обсъждането на това ще се върнем пак, но малко по-късно.) Представете си два електрона, скоростите на които са перпендикулярни, така че пътищата им се пресичат, обаче електроните не се сблъскват; единият от тях успява да премине пред другия. В някакъв момент тяхното относително положение ще бъде такова, както е показано на фиг. 26-6, *а*. Да разгледаме сега силите, с които q_2 действува върху q_1 и обратно. Върху q_2 от страна на q_1 действува само електрична сила, понеже q_1 по линията на своето движение не създава магнитно поле. Обаче върху q_1 освен електричното поле действува още и магнитно, така че той се движи и в магнитното поле, създавано от заряда q_2. Всички тези сили са показани на фиг. 26-6, *б*. Електричните сили, които действуват върху q_1 и q_2, са равни по големина и противоположни по посока. Обаче върху q_1 действува още и странична (магнитна) сила, за *която няма и помен при* q_2. Равно ли е тук действието на противодействието? Поблъскайте си главата над този въпрос.



Фиг. 26-6. Силите между два движещи се заряда не винаги са равни и противоположни.

(„Действието“, оказва се, не е равно на „противодействието“.)

26-3. Релативистично трансформиране на полетата

В предишния параграф ние изчислявахме електричното и магнитно поле, като изхождахме от трансформационните свойства на потенциалите. Но въпреки приведените по-рано аргументи в полза на физичния смисъл и реалност на потенциалите полетата все пак са по-важни. Те са също реални и за много задачи би било по-удобно да имаме начин за изчисляване на полетата в движеща се система, ако полетата в някаква „неподвижна“ система вече са известни. Ние имаме законите за трансформация на φ и **A**, понеже A_μ представлява четиривектор. Сега би ни се искало да намерим законите за трансформация на **E** и **B**. Нека знаем векторите **E** и **B** в една отправна система. Как ли ще изглеждат те в друга систе-

ма, която се движи спрямо първата? Ето тук ще ни потрябват трансформациите. Разбира се, ние винаги можем да направим това чрез потенциала, но понякога е по-удобно да умеем да преобразуваме полетата непосредствено. Сега ще видим как се прави това.

Как може да се намери законът за трансформиране на полетата? Известни са ни законите за трансформиране на φ и $\mathbf{A}$ и ние знаем как се изразяват полетата чрез φ и $\mathbf{A}$, така че оттук не е трудно да се намерят трансформациите за $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. (Вие можете да си помислите, че всеки вектор има нещо, което го допълня до четиривектор, така че например с вектора $\mathbf{E}$ може да се свърже някаква величина, която ще го направи четиривектор. Същото се отнася и за $\mathbf{B}$. Уви, това не е така. Всичко се оказва твърде различно от онова, което би могло да се очаква.) Да започнем с магнитното поле $\mathbf{B}$, което, разбира се, е равно на $\nabla\times\mathbf{A}$. Сега ние знаем, че x-, y- и z-компонентите на векторния потенциал са само една част, освен тях има още и t-компонента. Освен това ние знаем, че аналогът на оператора ∇ наред с производните по x, y и z има също и производна по t. Нека се опитаме да намерим какво ще се получи, ако сменим y с t или z с t, или още нещо в този дух.

Преди всичко обърнете внимание на формата на събираемите, които образуват компонентите на $\mathbf{B}$:

$$B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\qquad B_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\qquad B_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}. \tag{26.14}$$

В събираемите, които образуват x-компонентата на B, влизат само z- и y-компонентите на A. Да предположим, че сме нарекли тази комбинация на производните и компонентите „zy-нещо“ или съкратено F_{zy}. Ние просто имаме пред вид, че

$$F_{zy}=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}. \tag{26.15}$$

На подобно „нещо“ е равна и компонентата B_y, но този път ще бъде „xz-нещо“, а B_z, разбира се, е равна на „yx-нещо“. По такъв начин

$$B_x=F_{zy},\quad B_y=F_{xz},\quad B_z=F_{yx}. \tag{26.16}$$

Да видим сега какво ще се получи, ако ние се опитаме да измайсторим „неща“ от тип „t“, т. е. F_{xt} или E_{tz} (нали природата трябва да бъде красива и симетрична по x, y, z и t). Какво е това, например F_{tz}? Разбира се, то е равно на

$$\frac{\partial A_t}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

Но спомнете си, нали $A_t=\varphi$, значи горният израз е равен на

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

Такъв израз вече сме срещали по-рано. Това е почти z-компонентата на полето $\mathbf{E}$. Почти с изключение на неверния знак. Впрочем ние забравихме, че в четиримерния градиент производната по t върви със знак, противоположен на производните по x, y и z. Така че в действителност трябва да вземем по-умно обобщение, т. е. да смятаме

$$F_{tz}=\frac{\partial A_t}{\partial z}+\frac{\partial A_z}{\partial t}. \tag{26.17}$$

Сега то точно е равно на $-E_z$. По същия начин могат да се построят F_{tx} и F_{ty} и да се получат три израза

$$F_{tx}=-E_x,\quad F_{ty}=-E_y,\quad F_{tz}=-E_z. \tag{26.18}$$

А какво ще бъде, ако и двата индекса бъдат t? Или и двата бъдат x? Тогава ще получим изрази от типа

$$F_{tt}=\frac{\partial A_t}{\partial t}-\frac{\partial A_t}{\partial t}$$

и

$$F_{xx}=\frac{\partial A_x}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial x},$$

т. е. просто нули.

И така, имаме шест такива „F-неща“. Освен тях има още шест, получени чрез обръщане на индексите, но те не дават нищо ново, тъй като

$$F_{xy}=-F_{yx}$$

и т. н. По такъв начин от шестте възможни двойни комбинации на четирите значения на индексите получихме шест различни физични обекта, *които представляват компонентите на* **B** и **E**.

За да напишем членовете F в общ вид, ние ще се възползуваме от обобщените индекси μ и ν, всеки от които може да бъде 0, 1, 2 или 3, които означават съответно (както и в обикновените четиривектори) t, x, y или z. Освен това всичко прекрасно ще се съгласува с нашите четиримерни означения, ако $F_{\mu\nu}$ определим като

$$F_{\mu\nu}=\nabla_\mu A_\nu-\nabla_\nu A_\mu \qquad (26.19)$$

като помним при това, че

$$\nabla_\mu=\left(\frac{\partial}{\partial t},\ -\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y},\ -\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

а

$$A_\mu=(\varphi,\ A_x,\ A_y,\ A_z).$$

Това, което намерихме, може да се формулира така: в природата съществуват шест величини, които представляват различни страни на някакво цяло. Електричното и магнитното поле, които в нашия обикновен бавно движещ се свят (където не ни безпокои, че скоростта на светлината е крайна) се разглеждаха като съвършено отделни вектори, в четиримерното пространство вече няма да бъдат такива. Те са част от някакво ново „нещо“. Нашето физично „поле“ в действителност е шесткомпонентен обект $F_{\mu\nu}$. Ето как стои работата в теорията на относителността. Получените резултати за $F_{\mu\nu}$ са събрани в табл. 26-1

Таблица 26-1

Компоненти на $\mathbf{F}_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$$
$$\mathbf{F}_{\mu\mu}=0$$

$F_{xy}=-B_z$	$F_{xt}=E_x$
$F_{yz}=-B_x$	$F_{yt}=E_y$
$F_{zx}=-B_y$	$F_{zt}=E_z$

Вие виждате, че ние фактически направихме обобщение на векторното произведение. Започнахме с ротацията и с този факт, че нейните свойства на трансформация са точно такива, както и свойствата на трансформация на *два* вектора — обикновения тримерен вектор **A** и оператора на градиента, който, както ни е известно, се държи като вектор. Да се върнем за минута към обикновеното векторно произведение в тримерното пространство, например към момента на количеството на движение на частица. При движение на частицата в равнина важна характеристика се оказва комбинацията (xv_y-yv_x), а при движението в тримерно пространство се появяват три подобни величини, които ние нарекохме момент на количеството на движение:

$$L_{xy}=m(xv_y-yv_x),$$
$$L_{yz}=m(yv_z-zv_y),$$
$$L_{zx}=m(zv_x-xv_z).$$

След това (макар че сега вие може би сте забравили за това) в гл. 20 (т. I) сътворихме чудо: тези три величини се превърнаха в компоненти на вектор. За да направим това, приехме изкуствената уговорка: правилото на дясната ръка. На нас просто ни провървя. И провървя затова, защото моментът L_{ij} (i и j са равни на x, y или z) се оказа антисиметричен обект, т. е.

$$L_{ij}=-L_{ji},\quad L_{ii}=0.$$

От деветте възможни негови величини са независими само три. И ето, оказа се, че при изменяне на координатната система тези три оператора се трансформират точно като компоненти на вектор.

Същото свойство позволява да напишем като вектор и повърхнинния елемент. Повърхнинният елемент има две части, например, dx и dy, които могат да се представят с вектора $d\mathbf{a}$, ортогонален на повърхността. Но ние не можем да направим това за четирите измерения. Кое ще бъде нормала на елемента $dxdy$? Накъде е насочена тя — по оста z или по t?

Накратко казано, за три измерения се оказва, че комбинацията на два вектора от типа L_{ij} за щастие отново може да се представи като вектор, тъй като възникват точно три члена, които излиза, че се трансформират подобно на компонентите на вектор. За четири измерения това очевидно е невъзможно, понеже независимите членове са шест, а шест величини вие никак не можете да представите като четири.

Обаче даже в тримерното пространство може да се състави такава комбинация от вектори, която е невъзможно да се представи във вид на вектор. Да предположим, че сме взели някакви два вектора $\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z)$ и $\mathbf{b}=(b_x, b_y, b_z)$ и сме съставили всевъзможните различни комбинации на компонентите от типа a_xb_x, a_xb_y и т. н. Получават се всичко девет възможни величини:

$$a_xb_x, \quad a_xb_y, \quad a_xb_z,$$
$$a_yb_x, \quad a_yb_y, \quad a_yb_z,$$
$$a_zb_x, \quad a_zb_y, \quad a_zb_z.$$

Тези величини могат да се нарекат T_{ij}.

Ако сега преминем в координатна система, която е завъртяна (например, относно оста z), при това компонентите на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ще се изменят. В новата система a_x трябва да бъде заменено с

$$a'_x = a_x \cos\theta + a_y \sin\theta,$$

а b_y — с

$$b'_y = b_y \cos\theta - b_x \sin\theta.$$

Аналогични неща стават и с другите компоненти. Деветте компоненти на изобретената от нас величина T_{ij}, разбира се, също се изменят. Например $T_{xy}=a_xb_y$ преминава в

$$T'_{xy} = a_xb_y(\cos^2\theta) - a_xb_x(\cos\theta\sin\theta) + a_yb_y(\sin\theta\cos\theta) - a_yb_x(\sin^2\theta)$$

или

$$T'_{xy} = T_{xy}\cos^2\theta - T_{xx}\cos\theta\sin\theta + T_{yy}\sin\theta\cos\theta - T_{yx}\sin^2\theta.$$

Всяка компонента на T'_{ij} е линейна комбинация от компонентите на T_{ij}.

И така, ние открихме, че от вектори може да се направи не само векторно произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, трите компоненти на което се преобразуват като вектор, но изкуствено можем да направим от два вектора „произведение“ от друг сорт — T_{ij}. Неговите *девет* компоненти се преобразуват при въртене по сложни правила, които могат да бъдат изброени. Подобен обект, който изисква за своето описание два индекса вместо един, се нарича *тензор*. Ние построихме тензор от „втори ранг“, но също така може да се постъпи и с три вектора и да се получи тензор от трети ранг, а от четири вектора — тензор от четвърти ранг и т. н. Тензор от първи ранг е векторът.

Същността на целия този разговор е в това, че нашето електромагнитно поле $F_{\mu\nu}$ е също тензор от втори ранг, тъй като има два индекса. Обаче това е вече тензор в четиримерното пространство. Той се трансформира по специален начин и след минутка ние ще намерим този начин. Това е просто произведение на векторните трансформации. Ако вие обърнете индексите на тензора $F_{\mu\nu}$, той ще измени своя знак. Това е особен вид тензор, който се нарича *антисиметричен*. С други думи, електричното и

магнитното поле са части от антисиметричен тензор от втори ранг в четиримерното пространство.

Ето какъв дълъг път минахме ние. Помните ли, започнахме с определението какво е това скорост? А сега вече разсъждаваме за „тензор от втори ранг в четиримерното пространство".

Сега ни е необходимо да намерим закона за трансформиране на $F_{\mu\nu}$. Това не е трудно да се направи — има само много главоболие — не е нужно особено да си размърдаме мозъците, но все пак ще се наложи да се потрудим. Единственото, което трябва да намерим, е трансформацията на Лоренц за величината $\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$. Тъй като ∇_μ е просто специален случай на вектор ще работим с общата антисиметрична комбинация на вектори която може да се нарече $G_{\mu\nu}$;

$$G_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu. \tag{26.20}$$

(За нашите цели трябва a_μ в края на краищата да се замени с ∇_μ, а b_μ — с потенциала A_μ.) Компонентите на a_μ и b_μ се трансформират по формулите на Лоренц:

$$\begin{aligned} a'_t &= \frac{a_t - v a_x}{\sqrt{1-v^2}}, & b'_t &= \frac{b_t - v b_x}{\sqrt{1-v^2}}, \\ a'_x &= \frac{a_x - v a_t}{\sqrt{1-v^2}}, & b'_x &= \frac{b_x - v b_t}{\sqrt{1-v^2}}, \\ a'_y &= a_y, & b'_y &= b_y, \\ a'_z &= a_z, & b'_z &= b_z. \end{aligned} \tag{26.21}$$

Сега ще трансформираме компонентите на $G_{\mu\nu}$. Ще започнем с G_{tx}:

$$G'_{tx} = a'_t b'_x - a'_x b'_t = \left(\frac{a_t - v a_x}{\sqrt{1-v^2}}\right)\left(\frac{b_x - v b_t}{\sqrt{1-v^2}}\right) - \left(\frac{a_x - v a_t}{\sqrt{1-v^2}}\right)\left(\frac{b_t - v b_x}{\sqrt{1-v^2}}\right) =$$

$$= a_t b_x - a_x b_t.$$

Но нали това е точно G_{tx}. По такъв начин получихме простия резултат

$$G'_{tx} = G_{tx},$$

Да вземем още една компонента:

$$G'_{ty} = \frac{a_t - v a_x}{\sqrt{1-v^2}} b_y - a_y \frac{b_t - v b_x}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{(a_t b_y - a_y b_t) - v(a_x b_y - a_y b_x)}{\sqrt{1-v^2}}.$$

И така, получава се

$$G'_{ty} = \frac{G_{ty} - v G_{xy}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

И, разбира се, точно по същия начин

$$G'_{tz} = \frac{G_{tz} - v G_{xz}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Сега е ясно как се държат всички останали компоненти. Нека да съставим таблица на трансформациите за всичките шест члена; само че сега всичко ще пишем за величините $F_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} F'_{tx} &= F_{tx}, & F'_{xy} &= \frac{F_{xy} - v F_{ty}}{\sqrt{1-v^2}}, \\ F'_{ty} &= \frac{F_{ty} - v F_{xy}}{\sqrt{1-v^2}}, & F'_{yz} &= F_{yz}, \\ F'_{tz} &= \frac{F_{tz} - v F_{xz}}{\sqrt{1-v^2}}, & F'_{zx} &= \frac{F_{zx} - v F_{zt}}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \tag{26.22}$$

Разбира се, както преди $F'_{\mu\nu} = -F'_{\nu\mu}$, а $F'_{\mu\mu} = 0$.

И така, ние имаме трансформациите на електричните и магнитни полета. Единственото, което трябва да направим, е да погледнем в табл. 26-1 и да видим какво означава за векторите **E** и **B** трансформация, която е написана за $F_{\mu\nu}$. Става дума за про-

сто заместване. За да се види как би изглеждало това в обикновени символи, ще препишем нашите трансформации на компонентите на полетата във вида на табл. 26-2

Таблица 26-2

Лоренцови трансформации на електричните и магнитни полета

$$E'_x = E_x \qquad B'_x = B_x$$

$$E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-v^2}} \qquad B'_y = \frac{B_y + vE_z}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-v^2}} \qquad B'_z = \frac{B_z - vE_y}{\sqrt{1-v^2}}$$

(Помнете: $c=1$)

Уравненията в тази таблица ни показват как се изменят **E** и **B** при преминаване от една инерциална система в друга. Ако са известни **E** и **B** в едната система, можем да намерим на какво са равни те в друга, която се движи спрямо нея със скорост v.

Тези уравнения могат да се препишат във форма, която е полесна за запомняне. Затова забележете, че понеже скоростта v е насочена по оста x, всички компоненти с v са векторни произведения $\mathbf{v}\times\mathbf{E}$ и $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Така че трансформациите могат да се напишат във вида на табл. 26-3.

Таблица 26-3

Друга форма на трансформации на полетата

$$E'_x = E_x \qquad B'_x = B_x$$

$$E'_y = \frac{(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})_y}{\sqrt{1-v^2}} \qquad B'_y = \frac{(\mathbf{B}-\mathbf{v}\times\mathbf{E})_y}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$E'_z = \frac{(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})_z}{\sqrt{1-v^2}} \qquad B'_z = \frac{(\mathbf{B}-\mathbf{v}\times\mathbf{E})_z}{\sqrt{1-v^2}}$$

(Помнете: $c=1$)

Сега е лесно да се запомни коя компонента къде отива. Фактически тези трансформации могат да се напишат даже още по-просто, ако въведем компоненти на полетата, насочени по оста x, т. е. „успоредните“ компоненти $E_\parallel$ и $B_\parallel$ (които са успоредни на относителната скорост на системите S и S') и пълните напречни или „перпендикулярни“ компоненти $E_\perp$ и $B_\perp$, т. е. векторната сума на y- и z-компонентите. В резултат ще получим уравненията, събрани в табл. 26-4. (За пълнота ние възстановихме всички c.)

Таблица 26-4

Още една форма на лоренцовите трансформации на полетата E и B

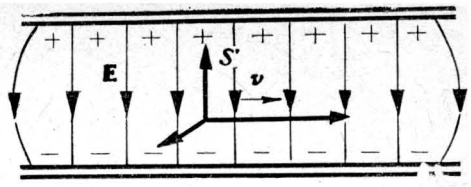
$$E'_\parallel = E \qquad B'_\parallel = B$$

$$E'_\perp = \frac{(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad B'_\perp = \frac{\left(\mathbf{B}-\dfrac{\mathbf{v}\times\mathbf{E}}{c^2}\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Трансформациите на полетата позволяват другояче да се решат задачите, с които се занимавахме преди, например да се намери полето на движещ се точков заряд. По-рано ние изчислявахме полетата, като диференцирахме потенциалите. Но сега същото може да се направи, като се трансформира кулоновото поле. Ако в системата S се намира заряд в покой, той създава само просто радиално поле **E**. В системата S' която се движи спрямо системата S със скорост $v=-u$, ще ни се струва, че точковият заряд лети със скорост u. Покажете сами, че трансформациите от табл. 26-3 и 26-4 дават същите тези електрични и магнитни полета, които получихме в гл. 26-2.

Трансформациите от табл. 26-2 ни дават много интересен и прост отговор на въпроса: какво виждаме, ако се движим покрай

произволна система от фиксирани заряди? Например да предположим, че искаме да знаем полетата в *нашата* система S', ако се движим между плочите на кондензатор, както е показано на фиг. 26-7. (Но, разбира се, същото ще бъде, ако зареденият кондензатор се движеше покрай *нас*.) Какво ще видим? Трансформациите в този случай се облекчават от това, че в първоначалната система няма поле **B**. Ще предположим отначало, че нашето движение е перпендикулярно на посоката на **E**, при това ние ще видим поле $\mathbf{E}'=\mathbf{E}/\sqrt{1-v^2/c^2}$, което остава напълно напречно. Но ще видим още и магнитно поле $\mathbf{B}'=-\mathbf{v}\times\mathbf{E}'/c^2$. (Не се учудвайте, че в тази формула няма $\sqrt{1-v^2}$; нали я записахме чрез $\mathbf{E}'$, а не чрез **E**; така също може да се прави.) И така, когато се движим в посока, перпендикулярна на статичното поле, ние виждаме изменено **E** и освен това още напречно поле **B**. Ако нашето движение не е перпендикулярно на вектора **E**, ние разбиваме **E** на $\mathbf{E}_\parallel$ и $\mathbf{E}_\perp$. Успоредната част остава неизменна, $\mathbf{E}'_\parallel=\mathbf{E}_\parallel$, а какво става с перпендикулярната компонента, вече описахме.



Фиг. 26-7. Координатната система S' се движи в статично електрично поле

Нека да анализираме противоположния случай; да си представим, че се движим през чисто статично *магнитно* поле. Този път бихме видели *електрично* поле $\mathbf{E}'$, равно на $\mathbf{v}\times\mathbf{B}'$, и магнитно поле, изменено от множителя $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ (като предполагаме, че то е напречно). Дотогава, докато v е много по-малко от c, изменението на магнитното поле може да се пренебрегне и основен ефект ще бъде появяването на електрично поле. Като пример за този ефект да разгледаме някога знаменития проблем за определяне скоростта на самолет. Сега той вече повече не е знаменит, понеже за определяне на скоростта може да се използува отразяването от Земята на сигналите на радиолокатор. Но по-рано в лошо време е било много трудно да се определи скоростта на самолета. Нали вие не виждате Земята и не можете да кажете накъде летите. Да се знае колко бързо се движите спрямо Земята е било важно. Как може да се направи това, като не я виждаме? Тези, на които са били познати уравненията на трансформирането, са считали, че трябва да се използува фактът, че самолетът се движи в магнитното поле на Земята. Да предположим, че самолетът лети там, където магнитното поле повече или по-малко ни е известно. Да вземем най-простия случай, когато магнитното поле е вертикално. Ако ние летим през него с хоризонтална скорост v, в съответствие с нашата формула трябва да наблюдаваме електрично поле $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, т. е. перпендикулярно на посоката на движението. Ако напреки на самолета закачим изолиран проводник, електричното поле ще индуцира заряди на неговите краища. Е, в това няма нищо ново. От гледна точка на наблюдател от Земята ние просто придвижваме проводника в магнитно поле, а силата $q(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ заставя заряда да се движи към края на проводника. Уравненията на трансформирането казват същото, но с други думи. (Това, че едно и също нещо може да се получи не по един, а по няколко начина, съвсем не означава, че единият начин е по-добър от другия. Ние овладяхме толкова методи и похвати, че един и същ резултат можем да получаваме по каквито искате начини!)

И така, единственото, което трябва да направим за определяне на скоростта v, е да измерим напрежението между краищата на проводника. Макар че за тази цел ние не можем да се възползуваме от волтметър, тъй като същото поле ще действува и на проводниците вътре във волтметъра, начини за измерване на такива полета все пак съществуват. За някои от тях вече говорихме в гл. 9, когато разказвахме за атмосферното електричество. Така че да се измери скоростта на самолет като че ли е възможно.

Обаче този важен проблем не е бил решен с такъв метод. Работата е в това, че големината на електричното поле, което се получава, е от порядъка на няколко миливолта на метър. Да се измерят такива полета, разбира се, може, но цялата беда е там, че те с нищо не се отличават от всяко друго електрично поле.

Полетата, които се създават при движение в магнитно поле, не могат да се различат от електричните полета, възникващи във въздуха по някакви други причини (например от електростатични заряди във въздуха или в облаците). В гл. 9 ние говорихме, че обикновено над повърхността на Земята съществуват електрични полета с интензитет около 100 V/m, но те са абсолютно неравномерни. Така че самолетът по време на полета ще наблюдава флуктуации на атмосферните електрични полета, които са огромни в сравнение със слабичките полета, възникващи поради множителя $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Поради тези чисто практически причини не е възможно да се измери скоростта на самолета, като се използува неговото движение в магнитното поле на Земята.

26-4. Уравненията на движение в релативистични означения[1]

Получените от уравненията на Максвел електрични и магнитни полета сами по себе си не представляват особена ценност, ако не знаем какво могат да правят тези полета, на какво са способни. Вие вероятно помните, че полетата са необходими за намиране на силите, които действуват върху зарядите, и че именно тези сили определят движението им. Така че връзката на движението на зарядите със силите е, разбира се, също част от електродинамиката.

На отделен заряд, който се намира в полетата $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, действува сила

$$\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}). \tag{26.23}$$

При малки скорости тази сила е равна на произведението на масата с ускорението, но истинският закон, валиден при всякакви скорости, гласи: силата е равна на $d\mathbf{p}/dt$. Като заместим $\mathbf{p}=m_0\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$, намираме релативистичното уравнение на движението на заряда:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}). \tag{26.24}$$

Сега искаме да обсъдим това уравнение от гледна точка на теорията на относителността. Понеже уравненията на Максвел са записани при нас в релативистична форма, интересно е да се види как изглеждат уравненията на движението в релативистична форма. Да видим може ли да се препишат уравненията на движението в четиримерни означения.

Ние знаем, че импулсът е част от четиримерния вектор p_μ с енергия $m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ в качеството на компонента по времето, така че ние се надяваме да заменим лявата част на уравнението (26.24) с dp_μ/dt. Сега ни е необходимо да намерим само четвъртата компонента на силата $\mathbf{F}$. Тази компонента трябва да бъде равна на скоростта на изменението на енергията или на скоростта на извършване на работата, т. е. на $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$. Така че дясната част на уравнение (26.24) би било желателно да се напише във вида на четиривектор от типа ($\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$, F_x, F_y, F_z). Обаче тези величини не образуват четиривектор.

Производната на четиривектора *по времето* няма да бъде вече четиривектор, тъй като d/dt изисква за измерване на t някаква специална отправна система. С тази трудност ние вече се сблъскахме по-рано, когато се опитвахме да направим четиривектор от скоростта $\mathbf{v}$. Тогава ние се опитахме да считаме, че ролята на компонента на скоростта по времето играе $cdt/dt=c$. Но в същност величините

$$\left(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)=(c, \mathbf{v}) \tag{26.25}$$

не образуват четиривектор. След това ние открихме, че можем да ги превърнем в компоненти на четиривектор, ако умножим

[1] В този параграф няма да приемаме c за единица.

всяка с $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. „Четиримерна скорост“ u_μ се оказа векторът

$$u_\mu=\left(\frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \tag{26.26}$$

Ето в какво се състои фокусът! Необходимо е да се умножава производната d/dt с $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, ако искаме да превърнем нейната компонента в четиривектор.

И така, втора хипотеза: четиривектор трябва да бъде величината

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}(p_\mu). \tag{26.27}$$

Но какво е това $\mathbf{v}$? Това е вече скоростта на частицата, а не скоростта на координатната система! По такъв начин обобщение на сила за четиримерното пространство ще бъде величината f_μ:

$$f_\mu=\left(\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right), \tag{26.28}$$

която ние ще наречем „4-сила“. Тя е вече четиривектор и нейните пространствени компоненти ще бъдат вече не $\mathbf{F}$, а $\mathbf{F}/\sqrt{1-v^2/c^2}$

Защо f_μ е четиривектор? Не би било лошо да се разбере, що за тайнствен множител е $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Тъй като ние се срещаме с него вече втори път, сега му е времето да видим защо производната d/dt винаги трябва да влиза с един и същ множител. Ето в какво се състои отговорът. Когато вземаме производната по времето на някаква функция x, пресмятаме нарастването Δx за малкия интервал Δt на променливата t. Но в друга отправна система интервалът Δt може да съответствува както на изменението на t', така и на x', така че при изменение само на t' изменението на x ще бъде друго. За нашите диференцирания би следвало да се намери такава променлива, която би била мярка на „интервала“ в *пространство-времето* и би оставала една и съща във всички отправни системи. Когато като такъв интервал ние приемаме нарастването Δx, то ще бъде едно и също във всички отправни системи. Когато частицата „се движи“ в четиримерното пространство, възникват нараствания както Δt, така и Δx, Δy, Δz. Може ли от тях да се направи интервал? Да, те образуват компонентите на нарастването на четиривектора $x_\mu=(ct, x, y, z)$, така че, ако определим величината Δs чрез

$$(\Delta s)^2=\frac{1}{c^2}\Delta x_\mu\Delta x_\mu=\frac{1}{c^2}(c^2\Delta t^2-\Delta x^2-\Delta y^2-\Delta z^2), \tag{26.29}$$

което представлява четиримерното скаларно произведение, в нейно лице ние придобиваме истински скалар и можем да се ползуваме от него за измерване на четиримерния интервал. Като изхождаме от величината Δs или от нейната граница ds, ние можем да определим параметъра $s=\int ds$. Добър четиримерен оператор ще бъде и производната по s, т. е. d/ds, тъй като тя е инвариантна спрямо трансформацията на Лоренц.

За движеща се частица ds леко се свързва с dt. За точкова частица

$$dx=v_x dt,\quad dy=v_y dt,\quad dz=v_z dt, \tag{26.30}$$

а

$$ds=\sqrt{(dt^2/c^2)(c^2-v_x^2-v_y^2-v_z^2)}=dt\sqrt{1-v^2/c^2}. \tag{26.31}$$

По такъв начин операторът

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}$$

е *инвариантен оператор*. Ако действуваме с него на който и да е четиривектор, ние ще получим друг четиривектор. Например ако ние действуваме с него на (ct, x, y, z), получаваме четиривектора на скоростта

$$\frac{dx_\mu}{ds} = u_\mu .$$

Сега ние виждаме защо $\sqrt{1-v^2/c^2}$ поправя работата.

Инвариантната променлива s е много полезна физична величина. Наричат я „собствено време“ по траекторията на частицата, тъй като в система, която във всеки момент се движи заедно с частицата, ds е просто равно на интервала от времето. (В тази система $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, а $\Delta s = \Delta t$.) Ако вие си представите часовник, скоростта на хода на който не зависи от ускорението, такъв часовник, като се движи заедно с частицата, ще показва времето s.

Сега може да се върнем назад и да напишем закона на Нютон (поправен от Айнщайн) в изящната форма

$$\frac{dp_\mu}{dt} = f_\mu , \tag{26.32}$$

където f_μ се определя от формула (26.28). А импулсът p_μ може да бъде написан във вида

$$p_\mu = m_0 u_\mu = m_0 \frac{dx_\mu}{ds} , \tag{26.33}$$

където координатите $x_\mu = (ct, x, y, z)$ описват сега траекторията на частицата. Накрая четиримерните означения ни довеждат до много проста форма на уравненията на движението

$$f_\mu = {}_0 \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} , \tag{26.34}$$

която напомня уравнението $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Важно е да се отбележи, че уравненията (26.34) и $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ са различни неща, тъй като четиривекторната форма на уравнението (26.34) съдържа в себе си релативистичната механика, която при големи скорости се отличава от механиката на Нютон. Това е абсолютно различно от случая с уравненията на Максвел, където ни беше необходимо да препишем уравненията в релативистична форма, като *съвсем не изменяме техния смисъл,* а изменяме само означенията.

Да се върнем сега към уравнението (26.24) и да видим как в четиривекторни означения се написва дясната част. Трите компоненти на $\mathbf{F}$, разделени с $\sqrt{1-v^2/c^2}$, съставят пространствените компоненти на f_μ, така че

$$f_x = \frac{q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = q\left[\frac{E_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{v_y B_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{v_z B_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]. \tag{26.35}$$

Сега ние трябва да заместим всички величини с техните релативистични означения. Преди всичко $c/\sqrt{1-v^2/c^2}$, $v_y/\sqrt{1-v^2/c^2}$ и $v_z/\sqrt{1-v^2/c^2}$ представляват t-, y- и z-компонентите на 4-скоростта u_μ. Компонентите пък на $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ влизат в електромагнитния тензор от втори ранг $F_{\mu\nu}$. Като намерим в табл. 26.1 компонентите на $F_{\mu\nu}$, съответстващи на E_x, B_z и B_y, ще получим

$$f_x = q(u_t F_{xt} - u_y F_{xy} - u_z F_{xz});$$

тук вече започва да се откроява нещо интересно. Във всяко събираемо има индекс x и това е разумно, тъй като ние намираме x-компонентата на силата. А всички останали индекси се появяват на двойки tt, yy, zz — всички освен събираемото с xx, което някъде изчезна. Нека просто да го вмъкнем и да напишем

$$f_x = q(u_t F_{xt} - u_x F_{xx} - u_y F_{xy} - u_z F_{xz}). \tag{26.36}$$

С това ние нищо не сме изменили, тъй като благодарение на антисиметрията на $F_{\mu\nu}$ събираемото F_{xx} е равно на нула. А причина за нашето желание да го възстановим е възможността за съкратено записване на уравнението (26.36);

$$f_\mu = q u_\nu F_{\mu\nu}. \tag{26.37}$$

Това както преди е уравнение (26.36), ако предварително приемем *условието*: когато някой индекс се среща в произведението *два пъти* (както ν), необходимо е автоматично да се сумират всички събираеми с еднакви значения на този индекс точно така, както в скаларно произведение, т. е. *като се ползуваме от същото правило на знаците.*

Лесно е да се повярва, че уравнението (26.37) също така добре работи и за $\mu=y$, и за $\mu=z$. Но как стои работата с $\mu=t$? Да видим за развлечение какво дава формулата

$$f_t=q\,(u_t\,F_{tt}-u_x\,F_{tx}-u_y\,F_{ty}-u_z\,F_{tz}).$$

Сега ние отново трябва да преминем към **E** и **B**. След това се получава

$$f_t=q\left(0+\frac{v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,E_x+\frac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,E_y+\frac{v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,E_z\right) \qquad (26.38)$$

или

$$f_t=\frac{q\,\mathbf{v}.\mathbf{E}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,.$$

Но в (26.38) f_t се вземаше равно на

$$\frac{\mathbf{F}.\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{q\mathbf{v}.\,(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,.$$

А това е същото както (26.38), тъй като $\mathbf{v}.(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ е равно на нула. Така че всичко върви много добре.

В резултат нашето уравнение на движението се написва в елегантния вид

$$m_0\frac{d^2x_\mu}{ds^2}=f_\mu=qu_\nu F_{\mu\nu}\,. \qquad (26.39)$$

Колкото и да е приятно да виждаме толкова красиво записано уравнение, тази форма не е особено полезна. При намиране движението на частицата обикновено е по-удобно да се ползуваме от първоначалното уравнение (26.24), което и ще правим по-нататък.

27

Енергия на полето и импулс на полето

27-1. Локални закони за запазване

27-2. Запазване на енергията и електромагнитно поле

27-3. Плътност на енергията и поток на енергията в електромагнитното поле

27-4. Неопределеност на енергията на полето

27-5. Примери за поток на енергията

27-6. Импулс на полето

27-1. Локални закони за запазване

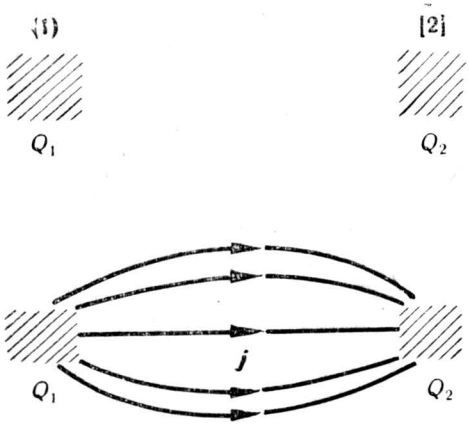
Това че енергията на веществото не винаги се запазва, е ясно като бял ден. При излъчване на светлина обектът губи енергия. Обаче загубената енергия може да се представи в някаква друга форма, например като светлинна енергия. Затова законът за запазване на енергията не е пълен, ако не се разгледа енергията, свързана със светлината и с електромагнитното поле въобще. Сега ние ще поправим този закон, а същевременно и закона за запазване на импулса, като имаме пред вид електромагнитното поле. Ние, разбира се, не можем да ги обсъждаме поотделно, тъй като съгласно с теорията на относителността това са различни страни на един и същ четиривектор.

Със запазването на енергията ние се запознахме още в началото на нашия курс; тогава ние просто казахме, че пълната енергия в света остава постоянна. Сега пък искаме да направим много важно обобщение на идеите на закона за запазване на енергията, което ще ни каже нещо за *подробностите как* става това. Новият закон ще покаже, че ако енергията си отива от някаква област, това може да става само за сметка на нейното *изтичане* през границите на разглежданата област. Това твърдение е по-силно, отколкото простото запазване на енергията без подобни ограничения.

За да разберем по-лесно смисъла на това твърдение, да видим как работи законът за запазване на заряда. Ние имаме плътността на тока $\mathbf{j}$ и плътността на заряда ρ, а запазването на заряда се описва от това, че ако в някакво място зарядът намалява, оттам трябва да стане оттичане на заряди. Ние наричаме това запазване на заряда. Математически законът за запазването се написва във вида

$$\nabla\cdot\mathbf{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{27.1}$$

Като следствие от този закон пълният заряд в целия свят остава постоянен. Зарядите никога не са се зараждали и не са се унищожавали; в света като цяло няма никаква чиста печалба на заряди, както няма и никакви загуби. Обаче пълният заряд на света може да се направи постоянен и по друг начин. Нека близо до точка (*1*) се намира заряд Q_1, а близо до точка (*2*), разположена на някакво разстояние от нея, няма никакъв заряд (фиг. 27-1). Да предположим сега, че с течение на времето зарядът Q_1 постепенно изчезва, но че *едновременно* с намаляването на Q_1 близо до точка (*2*) се появява заряд Q_2, и то така, че във всеки момент сумата на Q_1 и Q_2 да остава постоянна. С други думи, във всеки междинен момент количеството на заряда, загубено от Q_1, се прибавя към Q_2. При това пълното количество на заряда в света се запазва. Макар че това е също „всемирно“ запазване на заряда, ние няма да го наричаме „локално“ запазване, тъй като, за да се прехвърли зарядът от точка (*1*) в точка (*2*), не му е необходимо да се появява някъде в пространството между тези точки. Локално зарядът просто „се губи“.



Фиг. 27-1. Два начина за описване запазването на заряда:

а — Q_1+Q_2 постоянно;

б — $\frac{dQ_1}{dt}=\int \mathrm{j}_n\,da=-\frac{dQ_2}{dt}$

Обаче такъв „всемирен“ закон за запазване среща големи трудности в теорията на относителността. Понятието „едновременно“ за точки, разделени на известно разстояние, не е еквивалентно за различните системи. Две събития, които стават едновременно в

една система, няма да бъдат едновременни в система, която се движи спрямо нея. За „всемирното“ запазване от току-що описания тип се иска само едно — зарядът, губен от Q_1, *едновременно* да се появява в Q_2. В противен случай ще има такива моменти, когато зарядът не се запазва. Изглежда, не съществува начин да се направи законът за запазване на заряда релативистично инвариантен, без да го правим „локален“. Същността е в това, че изискването за лоренцова инвариантност, както се оказва, по най-удивителен начин ограничава възможните закони на природата. В съвременната квантова теория на полето например теоретиците често се опитват да изменят теорията, като допускат това, което ние наричаме „нелокално“ взаимодействие, когато нещо, намиращо се *тук*, непосредствено влияе на нещо, намиращо се *там*, но ние винаги се сблъскваме с трудности, свързани с принципа на относителността.

„Локалните“ закони за запазване са основани на друга идея. Те твърдят, че зарядът може да премине от едно място в друго само при условие, че нещо такова става в пространството между тях. За да се опише такъв закон, на нас ни е необходима не само плътността на заряда ρ, но и величина от друг вид, именно вектора $\mathbf{j}$, който дава скоростта на потока на заряда през повърхността. При това потокът е свързан със скоростта на изменението на заряда с уравнението (27.1). Това е по-силната формулировка на закона за запазване. Тя казва, че зарядът се запазва по особен начин, запазва се „локално“.

Оказва се, че запазването на енергията е също *локален* процес. В света съществува не само плътност на енергията в дадена област, но и вектор, който представлява скоростта на потока на енергията през повърхността. Например когато източникът излъчва светлина, ние можем да намерим енергията на светлината, излъчвана от него. Ако си представим някаква математическа повърхност, която заобикаля източника на светлина, загубата на енергия на този източник е равна на потока на енергията през окръжаващата го повърхност.

27-2. Запазване на енергията и електромагнитно поле

Сега ни е необходимо да опишем количествено запазването на енергията в електромагнитното поле. Затова трябва да се изясни колко енергия се намира в единица обем, а също каква е скоростта на потока ѝ. Ще разгледаме отначало енергията само на електромагнитното поле. Нека u означав *плътността на енергията* на полето, т. е. количеството енергия в единица обем от пространството, а векторът $\mathbf{S}$ — *потока на енергията* на полето (т. е. количеството енергия, преминало за единица време през единична повърхност, перпендикулярна на потока). Тогава аналогично на запазването на заряда (27.1) може да се напише „локален“ закон за запазването на енергията на полето във вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S}. \tag{27.2}$$

Разбира се, този закон, общо казано, не е верен. Енергията на полето не се запазва. Представете си, че се намирате в тъмна стая, а след това завъртате електрическия ключ. Стаята внезапно се напълва със светлина, т. е. в нея се явява енергия на поле, която по-рано не е била там. Уравнението (27.2) не е пълният закон за запазването, тъй като не се запазва *само енергията на полето*, а съществува още енергия на веществото; запазва се само пълната енергия в целия свят. Енергията на полето ще се изменя, ако то извършва работа над веществото или веществото извършва работа над полето.

Обаче ако вътре в интересуващия ни обем се намира вещество, ние знаем колко енергия носи то в себе си: енергията на всяка

частица е равна на $m_0c^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Пълната енергия на веществото е равна просто на сумата от енергиите на всички частици, а потокът ѝ през повърхността е равен просто на сумата от енергиите, пренасяни от всяка частица, която пресича тази повърхност. Но сега ние ще имаме работа само с енергията на електромагнитното поле. Така че трябва да напишем уравнение, което показва, че пълната енергия на *полето* в даден обем намалява *или* в резултат на изтичането ѝ от обема, *или* затова, че полето предава своята енергия на веществото (или я придобива, което означава просто отрицателна загуба). Енергията на полето в обем V е

$$\int_V u dV,$$

а скоростта на намаляването ѝ е равна на производната на този интеграл по времето със знак минус. Потокът на енергията на полето от обем V е равен на интеграла от нормалната компонента на $\mathbf{S}$ по повърхността Σ, ограничаваща обема V:

$$\int_\Sigma (\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})\, da.$$

По такъв начин

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V u dV = \int_\Sigma (\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})\, da + \begin{matrix}\text{(работата, извършена върху}\\ \text{веществото в обема.)}\end{matrix} \tag{27.3}$$

По-рано ние видяхме, че над всяка единица от обема на веществото полето в единица време извършва работа $\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}$. [Силата, която действува на частицата, е равна на $\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$, а мощността е равна на $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}=q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}$. Ако в единица обем се съдържат N частици, тази мощност в единица обем е равна на $Nq\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}$, а $Nq\,\mathbf{v}=\mathbf{j}$.] По такъв начин величината $\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}$ трябва да бъде равна на енергията, която полето губи в единица обем за единица време. Уравнението (27.3) при това приема вида

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V u dV = \int_\Sigma (\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})\, da + \int_V (\mathbf{E}\cdot\mathbf{j})\, dV. \tag{27.4}$$

Ето как изглежда нашият закон за запазване на енергията в полето. Можем да го напишем като диференциално уравнение, подобно на (27.2); затова второто събираемо трябва да се превърне в интеграл по обема, което се прави лесно с помощта на теоремата на Гаус. Повърхнинният интеграл от нормалната компонента на $\mathbf{S}$ е равен на интеграла от дивергенцията на $\mathbf{S}$ по обема, ограничен от тази повърхност, така че уравнение (27.3) е еквивалентно на следното:

$$-\int_V \frac{du}{dt}\, dV = \int_V (\nabla\cdot\mathbf{S})\, dV + \int_V (\mathbf{E}\cdot\mathbf{j})\, dV,$$

където ние сме внесли под интеграла производната по времето от първото събираемо. Тъй като това уравнение е вярно за всеки обем, интегралите може да се махнат и да се получи уравнение за енергията на електромагнитното поле

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = (\nabla\cdot\mathbf{S}) + (\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}). \tag{27.5}$$

Обаче това уравнение няма да даде нищо, докато ние не разберем какво е това u и $\mathbf{S}$. Може би аз би трябвало просто да ви кажа как те се изразяват чрез $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, понеже това е единственото, което ни е нужно. Обаче на мене много ми се иска да ви разкажа всички разсъждения, от които в 1884 г. се е ползувал Пойнтинг, за да получи формули за u и $\mathbf{S}$, за да разберете откъде те са дошли. (За по-нататъшната работа впрочем на вас този извод няма да ви потрябва.)

27-3. Плътност на енергията и поток на енергията в електромагнитното поле

Идеята се състои в това, че трябва да съществуват плътност на енергията u и поток $\mathbf{S}$, които зависят само от полетата $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. [В електростатиката например плътността на енергията, както ние знаем, може да се запише във вида $^1/_2\varepsilon_0(\mathbf{E}.\mathbf{E})$.] Разбира се, u и $\mathbf{S}$ могат да зависят от потенциалите и от нещо друго, но нека по-добре да видим какво можем да напишем. Ще се опитаме да препишем величината $\mathbf{E}.\mathbf{j}$ в такъв вид, че тя да стане сума от две събираеми, едното от които да бъде производна по времето от някаква величина, а второто — дивергенция. Тогава първата величина ние бихме нарекли u, а втората — $\mathbf{S}$ (разбира се, с необходимите знаци). Двете величини трябва да бъдат изразени само чрез полетата, т. е. ние искаме да напишем нашето равенство във вида

$$\mathbf{E}.\mathbf{j}=-\frac{\partial u}{\partial t}-(\nabla.\mathbf{S}), \tag{27.6}$$

при което лявата част на уравнението трябва да се изразява само чрез полетата. Как да се направи това? Разбира се, необходимо е да се възползуваме от уравненията на Максвел. От уравнението за ротацията на $\mathbf{B}$ имаме

$$\mathbf{j}=\varepsilon_0 c^2(\nabla\times\mathbf{B})-\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Като заменим това в (27.6), получаваме неговото изразяване само чрез $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{E}.\mathbf{j}=\varepsilon_0 c^2\,\mathbf{E}.(\nabla\times\mathbf{B})-\varepsilon_0\mathbf{E}.\frac{\partial E}{\partial t}. \tag{27.7}$$

Работата е вече частично завършена. Последното събираемо е производна по времето $-(\partial/\partial t)(^1/_2\,\varepsilon_0\,\mathbf{E}.\mathbf{E})$.

И така, $^1/_2\varepsilon_0\mathbf{E}.\mathbf{E}$ трябва да бъде най-малко част от u. Също такъв израз се получаваше и в електростатиката. Сега единственото, което ни остава да направим, е да превърнем в дивергенция на нещо второто събираемо.

Забележете, че първото събираемо в дясната част на (27.7) се преписва във вида

$$(\nabla\times\mathbf{B}).\mathbf{E}; \tag{27.8}$$

вие знаете от векторната алгебра, че $(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{c}$ е равно на $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, затова първото събираемо приема вида

$$\nabla.(\mathbf{B}\times\mathbf{E}), \tag{27.9}$$

т. е. получи се дивергенцията на „нещо“, към което ние така се стремяхме. Получи се, но само че всичко това е невярно! Аз ви предупреждавах, че операторът ∇ само „прилича“ на вектор, в действителност той не е „истински“ вектор. Спомнете си, че в диференциалното смятане съществува допълнителното *условие*: когато операторът на производна стои пред произведение, той действува на всичко, което стои вдясно от него. В уравнение (27.7) операторът ∇ действува само на $\mathbf{B}$ и не засяга $\mathbf{E}$. Но ако ние го запишем във форма на уравнение (27.9), общоприетото условие би казвало, че ∇ действува както на $\mathbf{B}$, така и на $\mathbf{E}$. Така че това *не е едно и също*. В действителност, ако вие развиете $\nabla.(\mathbf{B}\times\mathbf{E})$ по компоненти, можете да се убедите, че това е равно на $\mathbf{E}.(\nabla\times\mathbf{B})$ *плюс* някакви други събираеми. Това напомня взимането на производна от произведение в обикновения анализ. Например

$$\frac{d}{dx}(fg)=\frac{\partial f}{dx}\,g+f\,\frac{dg}{dx}.$$

Вместо да развиваме всички компоненти на $\nabla.(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$, би ми се искало да ви покажа един трик, много полезен в задачи от

този род. Той ще ви позволи навсякъде в изрази, които съдържат оператора ∇, да се ползувате от правилата на векторната алгебра, без да се намерите в небрано лозе. Трикът се състои в отхвърляне (най-малкото за известно време) на правилата на диференциалното смятане относно това на какво действува операторът на производната. Вие знаете, че редът на множителите е важен в *два* различни случая. Първо, в диференциалното смятане $f(d/dx)g$ не е същото както $g(d/dx)f$; и второ, във векторната алгебра $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ се различава от $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$. Ние можем, ако поискаме, за минута да се откажем от правилата на диференциалното смятане. Вместо да казваме, че производната действува на всичко, стоящо вдясно от нея, ние ще приемем *ново* правило, което ни избавя от реда, в който са записани множителите. След това ние можем да ги въртим, както си искаме, без каквито и да е пречки.

Ето нашето ново правило: с помощта на индекс ние ще показваме на какво именно действува диференциалният оператор; при това редът на множителите няма никакво значение. Да допуснем, че оператора $\partial/\partial x$ ние сме означили с D. Тогава символът D_f съобщава, че се взема производна само от функцията f, т. е.

$$D_f f=\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Ако ние имаме израза $D_f fg$, той означава

$$D_f fg=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)g.$$

Сега ще отбележим, че съгласно с нашето ново правило $f\,D_f g$ означава същото. Един и същ израз може да се запише по всеки от следващите начини:

$$D_f fg=g\,D_f f=f\,D_f g=fg\,D_f.$$

Вие виждате, че D_f може да стои даже след всичко. (Странно, защо в книгите по математика и физика обикновено не учат на такова удобно означение?)

Вие навярно ще се учудите: а какво ще бъде, ако аз *искам* да напиша производната на fg? Ако ми е нужна производната на *двата* члена? Това е много лесно: вие пишете $D_f(fg)+D_g(fg)$, т. е. $g(\partial f/\partial x)+f(\partial g/\partial x)$, което в старите означения е именно $\partial(fg)/\partial x$.

Вие сега ще видите колко просто е да се получи нов израз за $\nabla\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{E})$. Да започнем с прехода към новите символи и напишем

$$\nabla\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{E})=\nabla_B\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{E})+\nabla_E\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{E}). \tag{27.10}$$

Щом ние направихме това, вече няма повече нужда да се придържаме към строг ред. Ние винаги знаем, че ∇_E действува само на $\mathbf{E}$, а ∇_B действува само на $\mathbf{B}$. При тези обстоятелства от оператора ∇ можем да се ползуваме като от обикновен вектор. (Разбира се, след като всичко бъде завършено, на нас ще ни се поиска да се върнем към „стандартните“ означения, които обикновено се използуват.) По такъв начин сега ние можем да направим различни разместванията на множителите. Така средният множител в уравнение (27.10) може да се препише като $\mathbf{E}.(\nabla_B\times\mathbf{B})$. [Надявам се, вие помните, че $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}.(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$.] А последният — като $\mathbf{B}.(\mathbf{E}\times\nabla_E)$. Макар че всичко изглежда малко странно, все пак тук всичко е в ред. Ако ние сега се опитаме да се върнем към старите означения, трябва да разположим операторите ∇ така, че те да действуват на своите „собствени“ променливи. В първия от тях всичко е в ред. Така че ние можем просто да изпуснем индекса на ∇. Вторият изисква известна реорганизация, за да се постави операторът ∇ пред $\mathbf{E}$. Това може да се постигне, като разменим множителите във векторното произведение и изменим знака

$$\mathbf{B}.(\mathbf{E}\times\nabla_E)=-\mathbf{B}.(\nabla_E\times\mathbf{E}).$$

Сега всичко стои на своето място и можем да се върнем към обикновените означения. Формулата (27.10) е еквивалентна на следното равенство:

$$\nabla\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{E})=\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})-\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}). \tag{27.11}$$

(В този специален случай би било по-бързо да се използуват компонентите, но наистина струваше си да загубим време, за да ви покажа математическия трик. Може да се случи, че вие повече никъде няма да го срещнете, а той е много удобен тогава, когато във векторната алгебра е необходимо да се освободим от правилата за реда на членовете при диференциране.)

Да се върнем към нашия закон за запазване на енергията, като за преобразуване на $\nabla\times\mathbf{B}$ в (27.7) ще използуваме новия резултат — равенството (27.11). Ето какво дава то:

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}=\varepsilon_0c^2\nabla\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{E})+\varepsilon_0c^2\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\,\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\right). \tag{27.12}$$

Сега вие виждате, че ние сме почти до целта. Едно от нашите събираеми е истинска производна по t, нея ще я използуваме при образуването на u, а другото (превъзходна дивергенция) ще влезе в $\mathbf{S}$. За нещастие отдясно в средата остана още едно събираемо, което не е нито дивергенция, нито производна по t. Така че засега още не всичко е завършено. След известни размишления ние пак се обръщаме към уравненията на Максвел и за щастие откриваме, че $(\nabla\times\mathbf{E})$ е равно на $-\partial\mathbf{B}/\partial t$.

Това позволява да превърнем допълнителния член в чиста производна на нещо по времето:

$$\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})=\mathbf{B}\cdot\left(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}}{2}\right).$$

Ето сега ние получихме това, което е необходимо. Уравнението за енергията се преписва във вида

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}=\nabla\cdot(\varepsilon_0c^2\mathbf{B}\times\mathbf{E})-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0c^2}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}+\frac{\varepsilon_0}{2}\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\right). \tag{27.13}$$

А това, ако *определим* u и $\mathbf{S}$ като

$$u=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\right)+\frac{\varepsilon_0c^2}{2}\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} \tag{27.14}$$

и

$$\mathbf{S}=\varepsilon_0c^2\;\mathbf{E}\times\mathbf{B}, \tag{27.15}$$

напомня точно уравнение (27.6). (Чрез завъртане на множителите във векторното произведение ние достигаме правилния знак.)

И така, нашата програма е успешно изпълнена. От израза за плътността на енергията ние виждаме, че тя представлява сума от „електричната“ и „магнитната“ плътност на енергията, които точно са равни на изразите, получени от нас в статиката, *когато ние намирахме израза за енергиите чрез полетата*. Освен това ние получихме израз за вектора на потока на енергията на електромагнитното поле. Този нов вектор $\mathbf{S}=\varepsilon_0c^2\;\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ по името на своя първооткривател се нарича „вектор на Пойнтинг“. Той ни дава скоростта, с която енергията се движи в пространството. Енергията, която протича в секунда през малка повърхност da, е равна на $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}da$, където $\mathbf{n}$ е вектор, перпендикулярен към повърхността da. (Сега, когато имаме формули за u и $\mathbf{S}$, можете, ако искате, да забравите всички пресмятания.)

27-4. Неопределеност на енергията на полето

Преди да се заемем с някои приложения на формулите на Пойнтинг [т. е. изразите (27.14) и (27.15)], аз бих искал да забележа, че в действителност ние не ги „доказахме“. Всичко, което направихме, е, че намерихме *възможното* u и *възможното* $\mathbf{S}$. Но от-

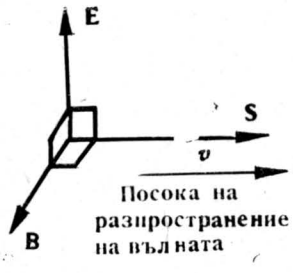
къде ни е известно, че като повъртим формулите, ние няма да стигнем до друг израз за u и друг израз за **S**? Новото **S** и новото u ще се отличават от старите, но както преди ще удовлетворяват уравнение (27.6). Такова нещо наистина може да се случи. Обаче във формулите, които се получават при това, винаги влизат различни *производни* на полетата (като това са винаги членове от втори порядък от типа на втора производна или квадрат на първа производна). За u и **S** може фактически да се напишат безкраен брой различни изрази и досега никой не е мислил за експериментална проверка на това, кой от тях е истински. Хората предполагат, че най-простият израз, изглежда, трябва да бъде истинският, но трябва да си признаем, че ние така и не знаем как в действителност е разпределена енергията в електромагнитното поле. Ще тръгнем по същия този най-лек път и ще постулираме, че енергията на полето се определя от израза (27.14). При това векторът на потока **S** трябва да се дава с уравнение (27.15).

Най-интересното е, че единен начин да се избавим от неопределеността на енергията на полето, изглежда, въобще няма. Понякога твърдят, че този проблем може да се реши, като се използува теорията на гравитацията; при това се привеждат такива доводи: в теорията за гравитацията източник на гравитационното притегляне е цялата енергия. Затова ако ни е известно какви гравитационни сили действуват на светлината, може правилно да се определи плътността на енергията на електричеството. Досега обаче с такива тънки експерименти, които биха позволили точно да се определи гравитационното влияние върху електромагнитното поле, никой не се е занимавал. Впрочем установено е, че при преминаване около Слънцето светлината се отклонява, затова ние можем да говорим, че Слънцето притегля светлината към себе си. Във всеки случай намерените от нас изрази за електромагнитната енергия и потока винаги и от всички са се признавали. И макар понякога резултатите, получени с тяхното използуване, да са се стрували странни, никой никога не е открил в тях нещо невероятно, някакво несъответствие с експеримента. Ще се съгласим с всички и ще считаме, че тук изглежда всичко е наред.

Би ми се искало да направя още една забележка за формулата за енергията. Преди всичко формулата за енергията на полето в единица обем е много проста — това е сумата от електричната и магнитна енергия, ако електричната енергия определим като E^2, а магнитната — като B^2. Тези изрази бяха намерени от нас като *възможни* изрази за енергията при разглеждане на статичните задачи. Освен него ние намираме за енергията на електростатичното поле и няколко други изрази, например $\rho\varphi$, който в електростатичния случай е *равен* на интеграла от $\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}$. Обаче в електродинамичния случай това равенство се нарушава и няма критерий, който да позволява да се установи коя от формулите е правилна. Но сега ние знаем това. Аналогично ние намерихме израза за магнитната енергия, който е верен в най-общия случай.

27-5. Примери за потоци на енергията

Нашата формула за вектора на потока на енергията **S** представлява нещо ново. Сега следва да видим доколко тя е валидна в някои специални случаи, а също да я проверим върху това, което ние знаехме по-рано. Пръв наш пример ще бъде светлината. В светлинната вълна векторите **E** и **B** са насочени под прав ъгъл един към друг и към посоката на разпространение на вълната (фиг. 27-2). В електромагнитната вълна големината на **B** е равна на $(1/c)\mathbf{E}$, а тъй като те са насочени под прав ъгъл, големината на $(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$ е равна просто на E^2/c. По такъв начин за светлината потокът на енергия в секунда през единична повърхност е равен на



Фиг. 27-2. Векторите на светлинната вълна **E**, **B** и **S**

$$S=\varepsilon_0 cE^2. \tag{27.16}$$

В светлинната вълна, където $E=E_0\cos\omega(t-x/c)$, средната скорост на потока на енергията през единична площ $\langle S\rangle_{ср}$, която се нарича „интензивност“ на светлината, е равна на средната стойност на електричното поле, умножено с $\varepsilon_0 c$:

$$\text{Интензивността} = \langle S\rangle_{ср} = \varepsilon_0 c\langle E^2\rangle_{ср}. \tag{27.17}$$

Този резултат, колкото и да е странно, ние вече получихме в гл. 31-5 (т. I), когато изучавахме светлината. Ние го получихме по съвсем друг път и затова можем сега да повярваме в него. Когато имаме сноп светлина, плътността на енергията в пространството се дава от уравнение (27.14). Като се възползуваме сега от това, че в светлинната вълна $cB=E$, получаваме

$$u=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2+\frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\left(\frac{E^2}{c^2}\right)=\varepsilon_0 E^2.$$

Обаче векторът **E** се изменя в пространството, затова средната плътност на енергията е равна на

$$\langle u\rangle_{ср}=\varepsilon_0\langle E^2\rangle_{ср} \tag{27.18}$$

По-нататък светлината се разпространява със скорост c, затова може да се мисли, че енергията, която минава в секунда през квадратен метър, е равна на произведението на c с количеството енергия в кубичен метър, т. е.

$$\langle S\rangle_{ср}=\varepsilon_0 c\langle E^2\rangle_{ср}.$$

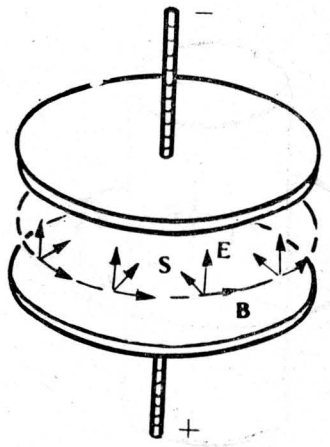
Всичко е наред. Ние отново получихме израза (27.17).

Да вземем сега друг пример, този път много любопитен. Ще разглеждаме потока на енергията в бавно зареждащ се кондензатор. (Ние не искаме сега да имаме работа с толкова високи честоти, при които кондензаторът заприличва на резонансна кухина, но не ни е нужен и постоянен ток.) Ще вземем обикновен кондензатор с кръгли успоредни плочи (фиг. 27-3). Между тях се създава почти хомогенно електрично поле, което се изменя с течение на времето. Пълната електромагнитна енергия вътре в кондензатора във всеки момент е равна на произведението на плътността на енергията u и обема. Ако радиусът на плочите е равен на a, а разстоянието между тях на h, пълната енергия, затворена между плочите, ще бъде

$$U=\left(\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\right)(\pi a^2 h). \tag{27.19}$$

С изменение на интензитета E тази енергия също се изменя. Когато кондензаторът се зарежда, вътрешният обем придобива енергия със скорост

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\varepsilon_0\pi a^2 E\dot{E}. \tag{27.20}$$



Фиг. 27-3. Близо до зареден кондензатор векторът на Пойнтинг **S** е насочен навътре към него

Така че трябва да съществува поток енергия, насочен отнякъде отстрани навътре в обема. Вие, разбира се, мислите, че той идва от проводниците, които зареждат кондензатора — а ето че не! Потокът навътре по никакъв начин не може да идва от тази страна, тъй като **E** е перпендикулярно към плочите, а затова $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ трябва да бъде *успоредно* на тях.

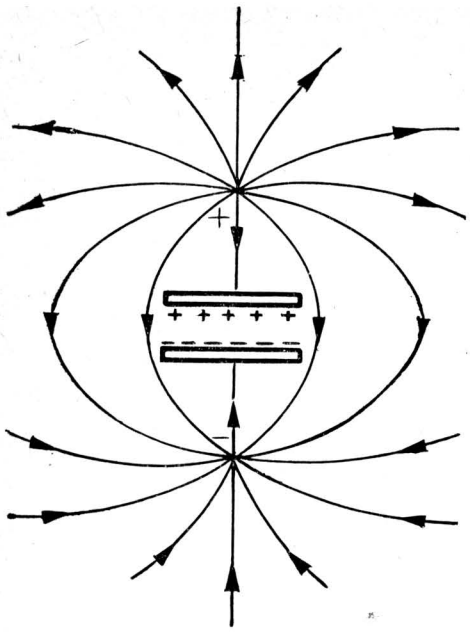
Вие вероятно помните, че при зареждането на кондензатора възниква магнитно поле, което е насочено по окръжност около оста. За това се говореше в гл. 23. Като се възползувахме от последното уравнение на Максвел, ние намерихме, че магнитното поле на края на кондензатора се определя от израза

$$2\pi a c^2 B=\dot{E}\pi a^2$$

или

$$B=\frac{a}{2c^2}\dot{E}.$$

Посоката му е показана на фиг. 27-3. По такъв начин на краищата на кондензатора, както се вижда от фигурата, възниква по-



Фиг. 27-4. Полето извън кондензатор, зареден с два много отдалечени заряда

ток на енергията, пропорционален на $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$. Така че енергията в действителност тече в кондензатора не от страната на проводниците, а откъм окръжаващото го пространство.

Нека да проверим съгласува ли се пълният поток през цялата повърхност между краищата на плочите със скоростта на изменението на вътрешната енергия. За това е най-добре да се повтори целият път, изминат от нас при извода на израза (27.15). Да видим до какво ще ни доведе. Площта на повърхността е равна на $2\pi ah$, а абсолютната големина на $\mathbf{S}=\varepsilon_0 c^2(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$ е равна на

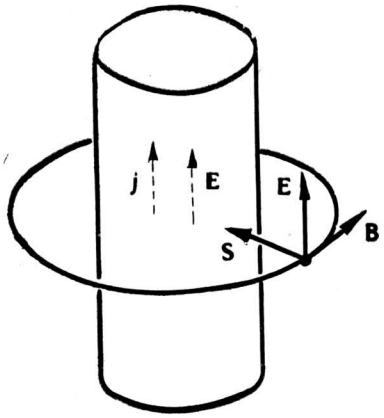
$$\varepsilon_0 c^2 E\left(\frac{a}{2c^2}\dot{E}\right),$$

така че пълният поток на енергията ще бъде

$$\pi a^2 h\varepsilon_0 E\dot{E}.$$

Това съвпада с уравнение (27.20). Удивително нещо! Оказа се, че при зареждането на кондензатора енергията отива там не през проводниците, а през междината между краищата на плочите. Ето какво ни говори тази теория!

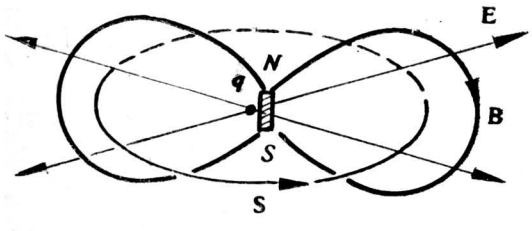
Как може да стане това? Въпросът не е от леките, но ето ви един от начините за разсъждение. Да предположим, че имаме заряди, разположени над и под кондензатора далеч от него. Когато такива заряди са разположени надалеч, кондензаторът е заобиколен макар и от слабо, но необичайно разпростряно поле (фиг. 27-4). След това, когато зарядите идват все по-близо и по-близо, полето става все по-силно и по-силно и все по-тясно „прегръща“ кондензатора. Така че енергията на полето, която отначало е била далеч, се движи „по посока„ към кондензатора и в края на краищата влиза в пространството между плочите.



Фиг. 27-5. Векторът на Пойнтинг **S** близо до проводник с ток

Като следващ пример нека да видим какво става с парче проводник (с ненулево съпротивление), по който тече ток. Понеже проводникът има някакво съпротивление, по него действува електрично поле, което поражда ток, а в резултат на пада на потенциала по проводника съществува също така успоредно на неговата повърхност електрично поле извън проводника (фиг. 27-5). Освен това наличието на ток поражда също така магнитно поле, насочено по окръжност около проводника. Векторите **E** и **B** са насочени под прав ъгъл, затова векторът на Пойнтинг е насочен радиално, както това е показано на фигурата. Към вътрешността на проводника от всички страни се стича енергия. Тя, разбира се, трябва да бъде равна на енергията, която се губи от проводника във вид на топлина.

По такъв начин нашата „луда“ теория казва, че електроните получават своята енергия, изразходвана от тях за създаване на топлина, от потока на енергия на външното поле, който тече отвън към вътрешността на проводника. Интуицията ни показва, че електронът попълва своята енергия за сметка на „налягане“, което го тика по проводника, така че енергията като че ли трябва да тече надолу (или нагоре) по проводника. А ето теорията твърди, че в действителност на електрона действува електрично поле, създавано от много далечни заряди, и електроните губят своята енергия, изразходвана за топлина именно от тези полета. Енергията на отдалечените заряди по някакъв начин се разлива по голяма област от пространството и след това се втича вътре в проводника.



Фиг. 27-6. Заряд и магнит дават вектор на Пойнтинг, циркулиращ по затворена крива

На края, за да ви убедя окончателно, че това е явно ненормална теория, да вземем още един пример, когато електричният заряд и магнитът са в *покой* — стоят си един до друг и не мърдат. Представете си, че сме взели точков заряд, който се намира в покой близо до центъра на магнитно блокче (фиг. 27-6). Всичко се намира в покой, така че енергията също не се изменя с времето; **E** и **B** са постоянни. Но векторът на Пойнтинг твърди, че тук има поток на енергията, тъй като $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ не е равно на нула. Ако вие наблюдавате потока на енергията, ще

се убедите, че той циркулира около тази система. Но никакво изменение на енергията не става; всичко, което влиза в който и да е обем, отново излиза от него. Това прилича на кръгов поток на несвиваема вода. И така, в такава като че ли статична ситуация има поток на енергия. Изглежда, направо казано, абсурдно!

А може би това все пак не е така чудно, ако си спомним, че така наречените „статичен" магнит представлява в действителност непрекъснато циркулиращ ток. Вътре в постоянния магнит електроните през цялото време се въртят. Така че може би циркулацията на енергията не е така удивителна.

У вас без съмнение започва да се създава впечатление, че теорията на Пойнтинг, най-малкото частично, опровергава вашата интуиция относно това, къде се намира енергията на електромагнитното поле. Може да ви се струва, че е необходимо да се заемете с „ремонт" на своята интуиция, да я усъвършенствувате чрез множество примери. Обаче това, изглежда, не е необходимо. Не мисля, че вие ще се окажете в голямо затруднение, като забравите за известно време, че енергията се втича навътре в проводника отвън, а не тече по него. Не е чак толкова важно, като се използува идеята за запазването на енергията, да се посочи във всички подробности какъв път избира енергията. Циркулацията на енергията около магнита и заряда в повечето случаи, изглежда, е съвършено несъществена. Макар това и да не е така важно, обаче е ясно, че всекидневната интуиция ни лъже.

27-6. Импулс на полето

Сега би ми се искало да поговорим *за импулса* на полето. Полето притежава енергия; точно така в единица обем то притежава някакъв импулс. Да означим плътността на импулса с $\mathbf{g}$. Импулсът, разбира се, може да има различни посоки, затова $\mathbf{g}$ трябва да бъде вектор. Временно ще говорим за една компонента и като начало ще вземем x-компонентата. Понеже всяка компонента на импулса се запазва, ние можем веднага да напишем закон, който би изглеждал например така:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\text{Импулсът на}\\ \text{веществото}\end{pmatrix}_x=\frac{\partial g_x}{\partial t}+\begin{pmatrix}\text{Потокът на}\\ \text{импулса}\end{pmatrix}_x.$$

Лявата част е тривиална. Скоростта на изменението на импулса на веществото е равна просто на действуващата върху него сила. За частиците $\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$, а за разпределение на зарядите силата за единица обем е $\mathbf{F}=(\rho\mathbf{E}+\mathbf{j}\times\mathbf{B})$. Обаче събираемото „поток на импулса" е малко странно. То не може да бъде дивергенция на някакъв вектор, понеже това не е скалар, а по-скоро x-компонентата на някой вектор. Но каквото и да е то трябва да има вида

$$\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z},$$

тъй като x-компонентата на импулса трябва да тече в някоя от трите посоки. Във всеки случай, каквито и да са a, b и c, такава комбинация се предполага равна на потока на x-компонентата на импулса.

По-нататък по правилата на същата игра ще напишем $\rho\mathbf{E}+\mathbf{j}\times\mathbf{B}$ само чрез $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, като изключим плътността на заряда ρ и плътността на тока $\mathbf{j}$ и след това като жонглираме със събираемите и като правим заместване, получаваме

$$\frac{\partial g_x}{\partial t}+\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial t}.$$

Като съпоставим след това разните събираеми, ние трябва да намерим изрази за g_x, a, b и c. Общо взето, тук има маса работа, но ние не смятаме да се занимаваме с нея. Вместо това ще намерим само израз за плътността на импулса $\mathbf{g}$ и при това по съвсем друг начин.

В механиката има много важна теорема, която казва: какъвто и да е потокът на енергията от какъвто и да е вид (енергията на полето или някакъв друг вид енергия), произведението на нейното количество, преминало през единица площ в единица време, с $1/c^2$ е равно на импулса в единица обем от пространството. При електродинамиката тази теорема казва, че $\mathbf{g}$ е равно на вектора на Пойнтинг, разделен с c^2

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2}\,\mathbf{S}\,. \tag{27.21}$$

Така че векторът на Пойнтинг ни дава не само потока на енергията, но и след разделяне с c^2 и плътността на импулса. Същият резултат би се получил от анализа, който ние току-що мислехме да направим, обаче по-привлекателно е да се възползуваме от общата теорема. Сега ние ще разгледаме няколко интересни примера и разсъждения, които ще ви убедят във валидността на тази обща теорема.

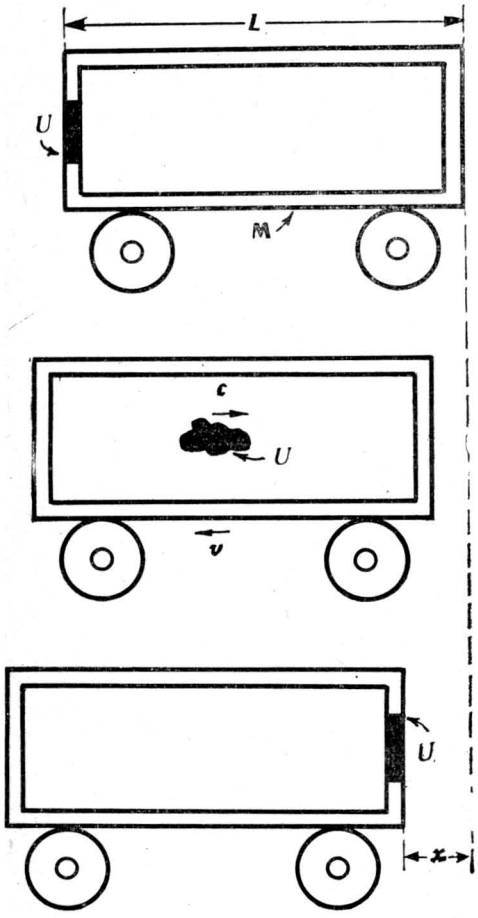
Първи пример: да вземем множество затворени в кутия частици. Нека, да речем, те да бъдат по N броя в кубически метър и нека те се движат по дължината на кутията със скорост $\mathbf{v}$. Да разгледаме сега въображаема равнина, перпендикулярна към $\mathbf{v}$. Потокът на енергията през единица площ на тази равнина в секунда е равен на Nv (т. е. на броя на частиците, които пресичат равнината за една секунда), умножен с енергията на всяка частица. Енергията пък на всяка частица ще бъде $m_0c^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$ Така че потокът на енергията е

$$Nv\,\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Но импулсът на всяка частица е равен на $m_0v/\sqrt{1-v^2/c^2}$, откъдето *плътността* на импулса ще бъде

$$N\,\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

което в пълно съгласие с теоремата точно е равно на $1/c^2$ по потока на енергията. По такъв начин за снопче частици теоремата се оказва вярна.



Фиг. 27-7. Порцията енергия U, която се движи със скорост c, носи импулс, равен на U/c

Вярна е и за светлината. При изучаване на светлината (виж т. I) ние установихме, че когато става поглъщане на светлината, на поглъщателя се предава някакво количество импулс. Действително в гл. 34 (т. I) ние видяхме, че импулсът е равен на погълнатата енергия, делена с c [уравнение (34.24)]. Нека U_0 бъде енергията, която пада в секунда на единица площ, тогава предадения на същата повърхност за същото време импулс е равен на U_0/c. Но импулсът се разпространява със скорост c, така че неговата плътност пред поглъщателя трябва да бъде равна на U_0/c^2. Теоремата отново е вярна.

На края аз ще приведа разсъждението на Айнщайн, което още един път ще демонстрира същото твърдение. Да предположим, че имаме вагон с някаква голяма маса M, който може без триене да се търкаля по релсите. В единия му край е разположено устройство, способно „да изстрелва“ някакви частици или светлинен импулс (съвършено безразлично е какво то изстрелва), които се удрят в противоположния край на вагона. Следователно някакво количество енергия, да речем U, което се намира първоначално в единия край (фиг. 27-7,*а*), прелита на противоположния край (фиг. 27-7, *в*). По такъв начин енергията U се премества на разстояние, равно на дължината на вагона L. На тази енергия U съответствува маса U/c^2, така че ако вагонът отначало е стоял, неговият център на масите трябва да се премести. На Айнщайн не се харесало заключението, че центърът на масите на предмета може да се премести с някакви манипулации вътре в него. Той смятал, че никакви вътрешни действия не могат да изменят центъра на масите. Но ако това е така, при преместването на енергията U от единия край на другия самият вагон трябва да се

отърколи на разстояние x (фиг. 27-7, *в*). В действителност не е трудно да се убедим, че пълната маса на вагона, умножена с x, трябва да бъде равна на произведението на преместената енергия U/c^2 и разстоянието L (при условие че U/c^2 е много по-малко от M), т. е.

$$Mx=\frac{U}{c^2}L. \tag{27.22}$$

Сега ще разгледаме конкретен пример, когато енергията се пренася чрез светлинен импулс. (Всички разсъждения могат да се повторят и за частици, но ние ще следваме Айнщайн, който се интересувал от проблемите на светлината.) Какво заставя вагонът да се движи? Айнщайн разсъждавал така: при изпускането на светлина трябва да има откат, някакъв неизвестен откат с импулс p. Именно той заставя вагонът да се отърколи назад. Скоростта на вагона v при такъв откат трябва да бъде равна на импулса на отката, разделен с масата M:

$$v=\frac{p}{M}.$$

Вагонът се движи с тази скорост дотогава, докато светлината не достигне противоположния край. Удряйки се, светлината от дава импулс на вагона и го спира. Ако x е малко, времето, в течение на което вагонът се движи, е равно на L/c, така че получаваме

$$x=vt=v\frac{L}{c}=\frac{p}{M}\frac{L}{c}.$$

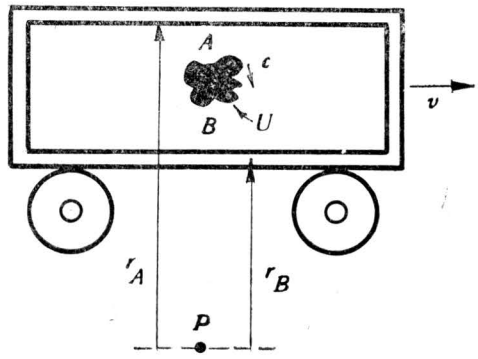
Като заместим x в (27.22), намираме

$$p=\frac{U}{c}.$$

Отново се получи съотношение между енергията и импулса на светлината. Като разделим това на c, намираме плътността на импулса $g=p/c$ и отново

$$g=\frac{U}{c^2}. \tag{27.23}$$

Вас може да ви учуди, толкова ли пък е важна теоремата за центъра на масите. Може би *тя* се нарушава? Възможно е, но тогава вие губите и закона за запазване на момента на количеството на движението. Да предположим, че нашето вагонче се движи по релсите с някаква скорост v и ние „изстрелваме“ някакво количество светлинна енергия от *тавана* към *пода*, например от точка A към точка B (фиг. 27-8). Да разгледаме сега момента на количеството на движението спрямо точка P. Докато порцията енергия U не е напуснала точка A, тя е имала маса $m=U^2/c$ и скорост v, така че нейният момент на количеството на движението е бил равен на mvr_A. Когато пък тя е прилетяла в точка B, масата ѝ остава предишната и ако *импулсът* на целия вагон не се е изменил, тя както по-рано трябва да има скорост v. Обаче моментът на количеството на движението спрямо точката P ще бъде вече mvr_B. По такъв начин, ако на вагона при излъчването на светлината не се придава никакъв импулс, т. е. ако светлината не пренася импулс U/c, моментът на количеството на движението трябва да се измени. Оказва се, че в теорията на относителността запазването на момента на количеството на движението и теоремата за центъра на масите са тясно свързани помежду си. И ако не е вярна теоремата, нарушава се и законът за запазване на момента на количеството на движението. Във всеки случай общият закон трябва да бъде валиден и за електродинамиката, така че от него можем да се ползуваме за получаване импулса на полето.



Фиг. 27-8. За запазване на момента на количеството на движение относно точка P порцията енергия U трябва да носи импулс U/c

Ще спомена още два примера на импулса в електромагнитното поле. В гл. 26-2 ние говорихме за нарушението на закона за

действието и противодействието за две заредени частици, които се движат перпендикулярно една на друга. Силите, които действуват на тези частици, не се уравновесяват, така че действието и противодействието се оказват неравни, а пълният импулс на веществото поради това трябва да се изменя. Той не се запазва. Но в такива ситуации се изменя и импулсът на полето. Ако вие разгледате големината на импулса, давана от вектора на Пойнтинг, тя се оказва непостоянна. Обаче изменението на импулса на частицата точно се компенсира от импулса на полето, така че пълният импулс на частиците и полето все пак се запазва.

Втори наш пример е системата на заряд и магнит, показана на фиг. 27-6. За свое огорчение ние открихме, че в този пример енергията „бяга по кръг", но, както сега ни е известно, потокът на енергията и потокът на импулса са пропорционални един на друг, затова тук ние имаме работа с циркулация на импулса. На *циркулацията* на импулса означава наличие *на момент на количеството на движението.* Полето притежава *момент на количеството на движението.* Помните ли парадокса със соленоида и зарядите на диска, описан в гл. 17-4? Струваше ни се, че при включване на тока целия диск трябва да започне да се върти.

Остава загадката откъде възниква този момент на количеството на движението? Отговорът на този въпрос е такъв: ако имате магнитно поле и някакви заряди, полето има и момент на количеството на движението. Той е възникнал още при създаване на самото поле. Когато пък полето се изключва, моментът на количеството на движението се отдава обратно. Така че дискът в този парадокс ще *започне* да се върти. Тайнственият циркулиращ поток на енергията, който отначало ни се струва нещо непонятно, в действителност е абсолютно необходим. Нали съществува реален поток на импулса. Той е необходим за изпълнение на закона за запазване на момента на количеството на движението като цяло.

28

Електромагнитна маса

28-1. Енергия на полето на точков заряд

28-1. Енергия на полето на точков заряд

28-2. Импулс на полето на движещ се заряд

28-3. Електромагнитна маса

28-4. С каква сила електронът действува сам на себе си?

28-5. Опити за изменяне теорията на Максвел

28-6. Поле на ядрените сили

Синтезът на теорията на относителността и уравненията на Максвел, общо взето, завършва нашето изучаване на теорията на електромагнетизма. Разбира се, ние по пътя прескочихме някои подробности и оставихме незасегната доста голяма област, към която обаче ще се върнем в бъдеще, когато ще се заемем с взаимодействието на електромагнитното поле с веществото. И все пак, ако се задържим още за минутка и погледнем фасадата на това удивително съоръжение, имащо такъв грамаден успех в обяснението на толкова много явления, можем да забележим, че то ето-ето ще рухне и ще се разсипе на части. Ако вие се вгризете по-дълбоко почти във всяка от нашите физични теории, ще откриете, че в края на краищата попадате в някоя неприятна история. Сега ни предстои да обсъдим сериозна трудност — несъстоятелността на класическата електромагнитна теория. Може да се стори естествено, че това нарушение е свързано с падането на цялата класическа теория под ударите на квантомеханичните ефекти. Вземете класическата механика. Математически това е напълно самосъгласувана теория, макар тя и да се отхвърля от опита. Обаче най-интересното е, че класическата теория на електромагнетизма е неудовлетворителна сама по себе си. В нея и досега има трудности, които са свързани със самите *идеи* на теорията на Максвел и които нямат непосредствено отношение към квантовата механика. Вие можете да си помислите: „Защо ни е отрано да се безпокоим за тези трудности. Нали квантовата механика все едно ще измени законите на електродинамиката. Не е ли по-добре да почакаме и да видим в какво ще се превърнат тези трудности след измененията?“ Обаче трудностите остават и след съединението на електродинамиката с квантовата механика, така че разглеждането им сега няма да бъде празна загуба на време; при това те са много важни от историческа гледна точка. Освен това, ако имате възможност да проникнете така дълбоко в теорията, за да видите в нея всичко, без да се изключват и трудностите, това ще ви даде известно чувство на завършеност.

Трудността, за която смятам да говоря, е свързана с прилагане на понятията електромагнитен импулс и енергия към електрона или друга заредена частица. Понятията за простите заредени частици и електромагнитното поле някак не се съгласуват едно с друго. Ние ще започнем описването на тази трудност с някои примери за изчисляване на енергията и импулса. Да намерим отначало енергията на заредена частица. Представете си, че сме взели най-простия модел на електрона, когато целият негов заряд q е равномерно разпределен по повърхността на сфера с радиус a. В специалния случай на точков заряд ние можем да положим радиуса равен на нула. Сега да изчислим енергията на електромагнитното поле. Ако зарядът е неподвижен, наоколо няма никакво магнитно поле и енергията в единица обем ще бъде пропорционална на квадрата на интензитета на електричното поле. Но големината на интензитета на електричното поле е равна на $q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, затова плътността на енергията е

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4}.$$

За да получим пълната енергия, трябва тази плътност да ин-

тегрираме по цялото пространство. Като използуваме елементарния обем $4\pi r^2\,dr$, ще намерим пълната енергия, която ще означим с $U_{ел}$

$$U_{ел}=\int \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr.$$

Този израз се интегрира много просто. Долната граница на интегриране е равна на a, а горната — на безкрайност, затова

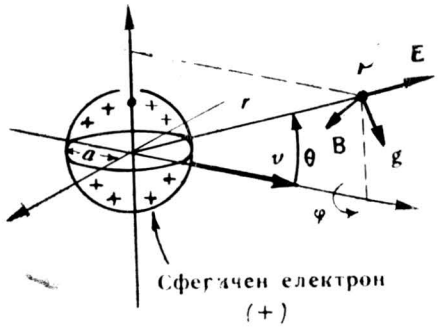
$$U_{ел}=\frac{1}{2}\,\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{a}. \tag{28.1}$$

Ако вместо q поставим заряда на електрона q_e и означим със символа e^2 комбинацията $q_e^2/4\pi\varepsilon_0$, ще получим

$$U_{ел}=\frac{1}{2}\,\frac{e^2}{a}. \tag{28.2}$$

Всичко върви добре дотогава, докато не преминем към точков заряд, т. е. докато не положим $a=0$. Но щом като преминем към точков заряд, започват всички наши беди. И всичко затова защото енергията на полето се изменя обратно пропорционално на четвъртата степен на разстоянието, интегралът по обема става разходящ, а количеството енергия, която окръжава точковия заряд, се оказва безкрайно.

Но с какво собствено е лоша безкрайната енергия? Има ли някаква реална трудност в това, че енергията никъде не може да си отиде от заряда и е обречена завинаги да остава около него? Досадно е, разбира се, че големината се оказва безкрайна, но, главният въпрос е: има ли тук някакъв *наблюдаем* физичен ефект? За да отговорим на него трябва да се обърнем не към енергията, а към нещо друго. Нас може, да речем, да ни заинтересува как се изменя енергията, когато зарядът *се движи*. Ако *изменението* се окаже безкрайно, работата е съвсем лоша.



Фиг. 28-1. Полетата **E** и **B** и плътността на импулса **g** за положителен електрон.

(За отрицателен електрон полетата **E** и **B** са обърнати в обратната страна, но **g** остава същото.)

28-2. Импулс на полето на движещ се заряд

Да вземем електрон, който се движи равномерно, и предположим за минута, че скоростта му е малка в сравнение със скоростта на светлината. С такъв движещ се електрон винаги е свързан някакъв импулс даже ако електронът дотогава, когато е бил зареден, не е имал никаква маса — това е импулсът на електромагнитното поле. Ние ще покажем, че за малки скорости той е пропорционален на скоростта **v** и съвпада по посока с нея. В точката P, която се намира на разстояние r от центъра на заряда и под ъгъл θ към линията на неговото движение (фиг. 28-1), електричното поле е радиално, а магнитното, както видяхме, е равно на $\mathbf{v}\times\mathbf{E}/c^2$. Плътността на импулса в съответствие с формула (27.21) ще бъде

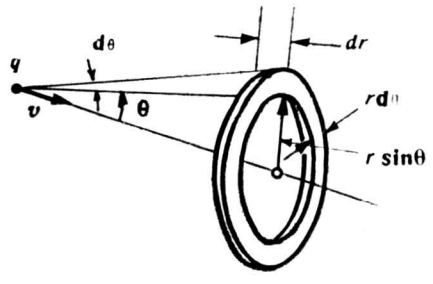
$$\mathbf{g}=\varepsilon_0\,\mathbf{E}\times\mathbf{B}.$$

Тя непременно е насочена по линията на движението, както това се вижда от фигурата и по големина е равна на

$$g=\frac{\varepsilon_0 v}{c^2}\,E^2\sin\theta.$$

Полето е симетрично относно линията на движение на заряда, затова сумата от напречните компоненти ще бъде нула и полученият в резултат импулс ще бъде успореден на скоростта **v**. Големината на компонентата на вектора **g** в тази посока, равна на $g\sin\theta$, трябва да се интегрира по цялото пространство. Като елементарен обем ще вземем пръстен, равнината на който е перпендикулярна на **v** (фиг. 28-2). Обемът му е равен на $2\pi r^2\sin\theta\,d\theta\,dr$. Пълният импулс при това ще бъде

$$\mathbf{p}=\int \frac{\varepsilon_0\mathbf{v}}{c^2}\,E^2\sin^2\theta\,2\pi r^2\sin\theta\,d\theta\,dr.$$



Фиг. 28-2. Елементарният обем $2\pi r^2\sin\theta\,d\theta\,dr$, който се използува при изчисляване импулса на полето

Понеже E не зависи от ъгъла θ (за $v \ll c$), по ъгъла може незабавно да се интегрира

$$\int \sin^3\theta d\theta = -\int (1-\cos^2\theta)\, d\,(\cos\theta) = -\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}.$$

Интегрирането по θ е в граници от 0 до π, така че този интеграл ще даде просто множителя 4/3, т. е.

$$\mathbf{p} = \frac{8\pi}{3}\,\frac{\varepsilon_0 \mathbf{v}}{c^2}\int E^2 r^2\, dr.$$

Такъв интеграл (за $r \ll c$) ние току-що изчислявахме, за да намерим енергията; той е равен на $q^2/16\pi^2\varepsilon_0{}^2 a$, така че

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3}\,\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\mathbf{v}}{ac^2}$$

или

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{ac^2}\,\mathbf{v}. \tag{28.3}$$

Импулсът на полето, т. е. електромагнитният импулс, се оказа пропорционален на $\mathbf{v}$. В частност същият израз би се получил за частица с маса, равна на коефициента на пропорционалност при $\mathbf{v}$. Ето защо този коефициент на пропорционалност ние можем да наречем *електромагнитна маса* $m_{\text{ем}}$, т. е. да положим

$$m_{\text{ем}} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{ac^2}. \tag{28.4}$$

28-3 Електромагнитна маса

Откъде въобще е възникнало понятието маса? В нашите закони на механиката ние предполагахме, че на всеки предмет е присъщо известно свойство, наричано маса. То означава, че импулсът на предмета е пропорционален на неговата скорост. Сега пък ние открихме, че това свойство е напълно понятно — заредената частица носи импулс, който е пропорционален на нейната скорост. Работата може да се представи така, като че ли масата е просто електродинамичен ефект. Нали досега причината за възникване на масата оставаше неразкрита. И ето на края в електродинамиката ни се представи прекрасната възможност да разберем това, което ние никога не разбирахме по-рано. Направо като от небето (а по-точно от Максвел и Пойнтинг) ни падна обяснението за пропорционалността между импулса на всяка заредена частица и скоростта ѝ чрез електромагнитните свойства.

Но дайте все пак да застанем на по-консервативна гледна точка и да говорим, най-малкото временно, че има два вида маси и че пълният импулс на предмета трябва да бъде сума от механичния и електромагнитния импулс. При това механичният импулс е равен на произведението на „механичната“ маса $m_{\text{мех}}$ и скоростта $\mathbf{v}$. В тези експерименти, където масата на частицата се измерва например чрез определяне на импулса или чрез „въртене на връвчица“, ние намираме пълната ѝ маса. Импулсът е равен на произведението именно на пълната маса $(m_{\text{мех}} + m_{\text{ем}})$ по скоростта. По такъв начин наблюдаваната маса може да се състои от две (а може би и от по-голям брой, ако ние вземем пред вид и други полета) части: механична и електромагнитна. Ние знаем, че сигурно има електромагнитна част; за нея даже имаме формула. А сега се появи увлекателната възможност да изхвърлим механичната маса съвсем и да считаме масата напълно електромагнитна.

Да видим какъв трябва да бъде размерът на електрона, ако „механичната“ част на масата напълно отсъствува. Това може да се изясни, като приравним електромагнитната маса на наблюдаемата маса на електрона, т. е. на m_e. Получаваме

$$a = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{m_e c^2}. \tag{28.5}$$

Величината

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} \tag{28.6}$$

се нарича „класически радиус на електрона“ и е равна на $2{,}82 \times 10^{-13}$ cm, т. е. на една стохилядна от диаметъра на атома.

Защо радиус на електрона е наречена величината r_0, а не a? Защото ние можем да направим същите пресмятания с друго разпределение на заряда. Ние можем да го вземем равномерно размазан по целия обем на кълбото или като пухкаво топче. Например за заряд, равномерно разпределен по целия обем на сферата, коефициентът 2/3 се заменя с коефициент 4/5. Вместо да се спори какво разпределение е правилно и какво не, било решено да се вземе като „номинален“ радиус величината r_0. А разните теории поставят пред нея свой коефициент.

Нека да продължим нашето обсъждане на електромагнитната теория на масата. Ние направихме пресмятания за $v \ll c$, а какво ще стане при преход към големи скорости? Първите опити за изчисление довели до някаква бъркаица, но по-късно Лоренц разбрал, че при по-големи скорости заредената сфера трябва да се свива в елипсоид, а полетата трябва да се изменят съгласно с формулите (26.6) и (26.7), получени от нас в гл. 26 за релативистския случай. Ако вие направите всички изчисления за $\mathbf{p}$ в този случай, ще получите, че за произволна скорост импулсът се умножава още с $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, т. е.

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2}\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{28.7}$$

С други думи, електромагнитната маса нараства с увеличаването на скоростта обратно пропорционално на $\sqrt{1-v^2/c^2}$. Това откритие било направено още преди създаването на теорията на относителността.

Тогава се предлагали даже експерименти за определянето на зависимостта на наблюдаваната маса от скоростта, за да се установи каква нейна част е електрична по своя произход и каква е механична. В онези времена считали, че електромагнитната част на масата *трябва* да зависи от скоростта, а механичната ѝ част — *не*.

Но докато са се поставяли експериментите, теоретиците също не са дремели. И скоро била развита теорията на относителността, която доказала, че всяка маса, независимо от своя произход трябва да се изменя, като $m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$. По такъв начин уравнението (28.7) било начало на теория, според която масата зависи от скоростта.

Сега да се върнем към нашите изчисления за енергията на полето, които доведоха до извеждането на израза (28.2). Енергията U съгласно с теорията на относителността е еквивалентна на маса U/c^2, затова (28.2) казва, че полето на електрона трябва да има маса

$$m'_{\text{ем}} = \frac{U_{\text{ел}}}{c^2} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{ac^2}, \tag{28.8}$$

която не съвпада с електромагнитната маса $m_{\text{ем}}$, определена от формула (28.4). Наистина, ако ние просто комбинираме изразите (28.2) и (28.4), би трябвало да напишем

$$U_{\text{ел}} = \frac{4}{3} m_{\text{ем}} c^2.$$

Тази формула е била получена още преди теорията на относителността и когато Айнщайн и другите физици започнали да разбират, че U винаги трябва да бъде равно на mc^2, объркването било много голямо.

28-4. С каква сила електронът действува сам на себе си?

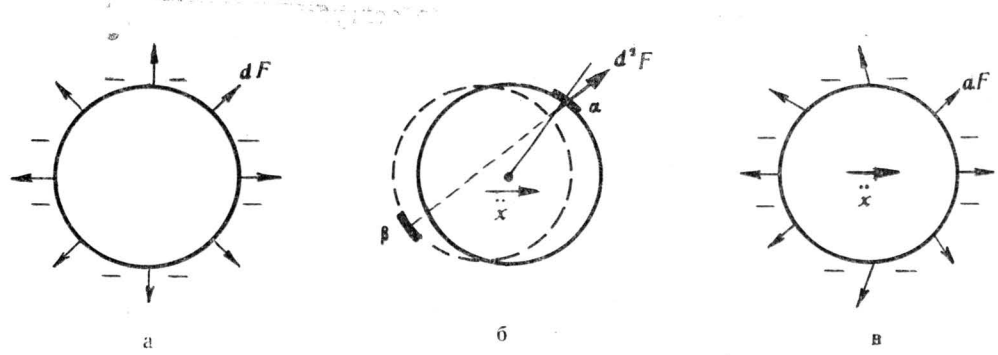
Разликата между двете формули за електромагнитната маса е особено обидна, защото съвсем неотдавна ние доказахме съгласуваността на електродинамиката с принципите на относителността. Освен това теорията на относителността неявно и неизбежно предполага, че импулсът трябва да бъде равен на произведението на енергията и v/c^2. Неприятна история. Изглежда ние някъде допуснахме грешка. Разбира се, не алгебрична грешка в нашите сметки, а някъде не сме видели нещо съществено.

При извода на нашите уравнения за енергията и импулса ние предполагахме валидността на законите за запазване. Ние смятахме, че са взети пред вид всички сили, взета е пред вид всяка работа и всеки импулс, пораждан от други „неелектрични" механизми. Но ако ние имаме работа със заредена сфера, електронът се стреми да се разкъса, понеже всички електрични сили са сили на отблъскване. Щом в системата не са отчетени уравновесяващите сили, в законите, които свързват импулса и енергията, са възможни всякакви грешки. За да бъде картината *самосъгласувана*, трябва да се предположи, че нещо удържа електрона от разкъсване. Зарядите трябва да се *удържат* върху сферата от нещо като „ластичета", които пречат на стремежа им да се разлетят настрани. Поанкаре пръв забелязал, че подобни „ластичета" или нещо от този род, които свързват електрона, е необходимо да се вземат пред вид при изчисляването на енергията и импулса. По тази причина допълнителните неелектрични сили са известни под името „напрежения на Поанкаре". Ако ги включим в сметките, това веднага ще измени масите, получени в двата случая (характерът на изменението зависи от детайлните предположения) и резултатът ще се съгласува с теорията на относителността, т. е. масата, получена от изчисляването на импулса, става същата, както и масата, получена от енергията. Обаче сега масите ще се състоят от *две* части: електромагнитна и произхождаща от „напреженията на Поанкаре". И само когато двете части се събират заедно, ние получаваме съгласувана теория.

И така, нашите надежди не се оправдаха, ние не можем да направим цялата маса чисто електромагнитна. Теория, съдържаща само електродинамиката, е незаконна. Към нея е необходимо да се прибави още нещо. Както и да наречем това „нещо" — „ластичета" или „напрежения на Поанкаре" или някак иначе, — то все едно трябва да поражда нови сили, които осигуряват съгласуваността на теория от такъв род.

Но съвсем ясно е, че щом сме принудени да поставим вътре в електрона странични сили, красотата на цялата картина веднага изчезва. Всичко става твърде сложно. Веднага възниква въпросът: колко силни са тези напрежения? Какво става с електрона? Осцилира ли той, или не? Какви са всички негови вътрешни свойства? И т. н. и т. н. Възможно е някои вътрешни свойства на електрона да са все пак много сложни. И ако ние започнем да строим електрона, като следваме тази рецепта, ще дойдем до някакви странни свойства, подобни на собствени хармоники, които изглежда още не са наблюдавани. Аз казах „изглежда", защото в природата ние наблюдаваме множество странни неща, на които още не можем да придадем някакъв смисъл. Възможно е, някога в един прекрасен ден да се окаже, че някакво явление от тези, които са ни непонятни днес (μ-мезона например), може в действителност да се обясни като осцилации на „напреженията на Поанкаре". Сега това не изглежда правдоподобно, но кой може да гарантира? Та ние още толкова неща не разбираме в света на елементарните частици! Във всеки случай сложната структура, предполагана от тази теория, е твърде нежелателна и опитът да се обяснят всички маси само чрез електромагнетизма, най-малкото по описания от нас начин, ни докара в задънена улица.

Бих искал още да поразсъждавам малко за това, защо при пропорционалността между импулса на полето и скоростта ние говорихме за маса. Много просто! Нали масата е коефициент между импулса и скоростта. Обаче възможно е и друго гледище. Може да се говори, че частицата има маса, ако за ускорението ѝ ние сме принудени да прилагаме някаква сила. Да погледнем по-внимателно на това, откъде се вземат силите; това може да помогне за нашето разбиране. Откъде ще узнаем, че тук трябва да се прояви действието на сили? Просто затова, защото ние доказахме закона за запазване на импулса на полетата. Ако имаме заредена частица и известно време „натискаме" върху нея, в електромагнитното поле ще се появи импулс. По някакъв начин той е бил предаден на полето. Следователно, за да ускорим електрона, върху него трябва да се приложи сила, допълнителна на тази, която се изисква от механичната инерция, свързана с неговото електромагнитно взаимодействие. При това трябва да възникне съответна обратна реакция от страна на „тласкания" от нас електрон. Но откъде се взема тази сила? Картината е приблизително такава. Електронът може да се счита за заредена сфера. Когато той е в покой, всеки негов зареден участък отблъсква всеки друг, но всички сили са уравновесени две по две, така че *резултантната* е равна на нула (фиг. 28-3, *а*). Обаче при ускоряване на електрона силите повече не се уравновесяват, тъй като е необходимо известно време, за да дойде електромагнитното влияние от едно място до друго. Например силата, която действува на участъка α (фиг. 28-3, *б*) от страна на участъка β, разположен на противоположната страна, зависи от положението на β в закъсняващия момент. Големината и посоката на силата се определят от движението на заряда. Ако той се ускорява, силите, които действуват на разни части на електрона, могат да бъдат такива, както е показано на фиг. 28-3, *в*. Сега при събиране на всички тези сили те не се унищожават. При постоянна скорост тези сили биха се уравновесили, макар на пръв поглед да ни се струва, че даже при равномерно движение закъсняването ще доведе до неуравновесени сили. Въпреки това се оказва, че в тези случаи, когато електронът не се ускорява, равнодействуващата сила е равна на нула. Ако пък ние разгледаме силите между различните части на електрона, който се ускорява, действието и противодействието не се компенсират точно едно друго и електронът действува *сам на себе си,* като се старае да намали ускорението. Той сам се дърпа „за яката" назад.



Фиг. 28-3. Силата на действие на ускоряващ се електрон благодарение на закъсняването не е равна на нула.

Под dF ние подразбираме силата, която действува на елементарната повърхност da, а под d^2F — силата, която действува на елементарната повърхност da_α откъм заряда, разположен на елементарната повърхност da_β

Може, макар и да не е лесно, да се изчисли тази сила на самодействието, но няма да се занимаваме тук с такива пресмятания, които изискват много труд. Просто ще ви кажа какво се получава в специалния сравнително прост случай на едномерно движение, например по оста x. В този случай самодействието може

да се напише като ред. Първият член на този ред зависи от ускорението $\ddot{x}$, следващият е пропорционален на $\dddot{x}$ и т. н.[1]

Така че в резултат

$$F=\alpha\frac{e^2}{ac^2}\ddot{x}-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{x}+\gamma\frac{e^2a}{c^4}\ddddot{x}+\ldots, \qquad (28.9)$$

където α и γ са числени коефициенти от порядъка на единица. Коефициентът α при събираемото $\ddot{x}$ зависи от предположеното разпределение на зарядите; ако зарядите са равномерно разпределени по сферата, $\alpha=2/3$. По такъв начин събираемото, пропорционално на ускорението, се изменя обратно пропорционално на радиуса на електрона a, което точно се съгласува със стойността, получена за $m_{\text{ем}}$ в (28.4). Ако вземем друго разпределение, α ще се измени, но точно така ще се измени и коефициентът 2/3 в (28.4). Събираемото с $\dddot{x}$ *не зависи* нито от радиуса a, нито от предположеното разпределение на заряда; коефициентът пред него е *винаги* равен на 2/3. Следващото събираемо е пропорционално на радиуса a и коефициентът γ при него се определя от разпределението на заряда. Обърнете внимание, че ако радиусът на електрона клони към нула, последното събираемо (както и всички висши членове) ще стане нула, второто остава постоянно, но първото — електромагнитната маса — става безкрайно голямо. Вижда се, че безкрайността възниква поради действието на една част на електрона върху друга; изглежда, ние сме допуснали глупост — възможността „точковият" електрон да действува сам на себе си.

28-5. Опити за изменяне теорията на Максвел

Сега бих желал да обсъдя как може да се измени електродинамиката на Максвел, но да се измени така, че да се запази понятието за прост точков заряд. В тази насока са били направени не малко опити, а някои теории са съумели даже така да представят работата, че цялата маса на електрона се оказала напълно електромагнитна. Обаче на нито една от тези теории не било съдено да живее. И все пак интересно е да се обсъдят някои от предложените възможности, макар и за това, за да се оцени борбата на човешкия разум.

Нашата теория на електромагнетизма се започна с разговори за взаимодействието на един заряд с друг. След това ние построихме теорията на тези взаимодействуващи заряди и завършихме нашето изучаване с теорията на полето. Ние дотолкова повярвахме в нея, че се опитвахме с нейна помощ да определим как една част на електрона действува върху друга. Всички трудности може би произлизат от това, че електронът не действува сам на себе си; екстраполацията на закона за взаимодействието между отделни електрони за взаимодействие на електрона сам на себе си навярно с нищо не е оправдана. Затова някои от предложените теории съвсем изключват възможността за самодействие на електрона. Поради това в тях вече не възникват безкрайности. И при това частицата няма никаква електромагнитна маса, а нейната маса е отново напълно механична. Обаче в такава теория възникват нови трудности.

Трябва веднага да ви кажа, че такива теории изискват изменения и на понятията на електромагнитното поле. Както вие помните, ние говорихме, че силата, която действува върху частицата в която и да е точка, се определя просто от две величини: **E** и **B**. Ако ние се отказваме от идеята за самодействие, това твърдение става вече неточно, защото силите, които действуват на електрона в някое място, вече не се определят от пълните **E** и **B**, а само от тези техни части, които се създават от *другите* заряди. Така че ние винаги трябва да помним това, какви полета **E** и **B**

[1] Ползуваме означенията $\dot{x}=dx/dt$, $\ddot{x}=d^2x/dt^2$, $\dddot{x}=d^3x/dt^3$ и т. н.

създава този заряд, за който се изчислява действуващата сила, а какви — всички останали заряди. Това прави теорията много позабъркана, макар да позволява да се избягнат трудностите с безкрайностите.

И така, *ако много ни се иска,* ние можем да изхвърлим целия набор от сили в уравнение (28.9), като при това присъждаме, че такова явление като действие на електрона върху себе си няма. Но заедно с водата ние изхвърляме и детето! Второто събираемо в (28.9), събираемото с $\dddot{x}$, е съвършено необходимо. Тази сила води до напълно определен ефект. Ако вие я изхвърлите — бедата няма да ви отмине. Когато ускорявате заряд, той излъчва електромагнитни вълни, т. е. губи енергия. Затова ускоряването на заряд изисква по-голяма сила, отколкото ускоряването на неутрален обект със същата маса ; в противен случай енергията няма да се запазва. Скоростта, с която изразходваме работа за ускоряване на заряда трябва да бъде равна на скоростта на загубата на енергия за излъчване. Ние вече говорихме за този ефект; той беше наречен радиационно съпротивление. Отново пред нас стои въпрос: откъде се вземат тези допълнителни сили, за преодоляването на които се върши тази работа? Когато излъчва голяма антена, тези сили възникват под влиянието на токовете от едната й част върху токовете в другата. Но при отделен ускоряващ се електрон, който излъчва в празно пространство, е възможен само един източник на такива сили — действието на една част на електрона върху друга.

В гл. 32 (т. I.) ние намерихме, че осцилиращият заряд излъчва енергия със скорост

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^2(\ddot{x})^2}{c^3}. \tag{28.10}$$

Нека да видим каква мощност е необходима за преодоляване на силите на самодействие (28.9). Мощността, както е известно, е равна на силата, умножена със скоростта, т. е. на $F\dot{x}$:

$$\frac{dW}{dt} = \alpha\frac{e^2}{ac^2}\dddot{x}\dot{x} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\dddot{x}}\dot{x} + \cdots \tag{28.11}$$

Първият член е пропорционален на dx^2/dt и затова съответствува на скоростта на изменението на кинетичната енергия $^1/_2\, mv^2$, свързана с електромагнитната маса. Вторият съответствува на излъчването на мощност (28.10). Обаче той се различава от (28.10). Разликата се състои в това, че (28.11) е верен в общия случай, докато (28.10) е верен само за осцилиращ заряд. Ние можем да докажем, че тези два израза са еквивалентни за периодично движение на заряда. Да препишем втория член на израза (28.11) във вида

$$-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{d}{dt}(\ddot{x}\dot{x}) + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(\ddot{x})^2,$$

което ще бъде просто алгебрично преобразуване. Ако движението на електрона е периодично, величината $\ddot{x}\dot{x}$ периодично се връща към една и съща стойност. Така че, ако ние вземем *средната* стойност на нейната производна по времето, ще получим нула. Обаче вторият член е винаги положителен (като квадрат на величина), така че неговата производна е също положителна. Мощността, която му съответствува, е тъкмо равна на израза (28.10).

И така, събираемото с $\dddot{x}$ в израза за силата на самодействие е необходимо за запазване енергията на излъчващата система и не може да бъде изхвърлено. Това е бил един от триумфите на теорията на Лоренц, който е доказал възникването на такова събираемо в резултат на въздействието на електрона сам на себе си. Ние сме принудени да повярваме в идеята за самодействие и *необходимостта* от събираемото с $\dddot{x}$. Проблемът е в това, как да го запазим, като се избавим при това от първото събираемо в израза (28.9), което разваля цялата работа. Това ние не знаем. Както виждате, класическата теория на електрона сама се заведе в задънена улица.

Били предприети и други опити за поправяне на положението.

Един път бил предложен от Борн и Инфелд. Той се състои в много сложно изменяне на уравненията на Максвел, така че те престават да бъдат линейни. При това може да се направи така, че енергията и импулсът да се окажат крайни. Но предложените от тях закони предсказват явления, които никога не са били наблюдавани. Тяхната теория страда още и от друг недостатък, до който ние ще стигнем по-късно и който е присъщ на всички опити да се избегне описаната трудност.

Следващата интересна възможност била предложена от Дирак. Той разсъждавал така: нека да допуснем, че действието на електрона върху себе си се описва не от първото събираемо на израза (28.9), а *от второто*. И тогава му дошла примамливата идея да се избави от първото събираемо, като запази при това второто. Вижте— казал той, — когато ние вземахме само *закъсняващите* решения на уравненията на Максвел, това условие се появяваше като допълнително предположение; ако вместо закъсняващи ние вземехме *изпреварващи* вълни, отговорът би се получил малко по-друг. Изразът за силите на самодействие би придобил вида

$$F=\alpha\frac{e^2}{ac^2}\ddot{x}+\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{x}+\gamma\frac{e^2a}{c^4}\ddddot{x}+\cdots \qquad (28.12)$$

Този израз е точно такъв, както и (28.9) с изключение на знака пред втория и някои висши членове на реда. [Замяната на закъсняващите вълни с изпреварващи означава просто смяна на знака на закъсняването, което, както не е трудно да се види, е еквивалентно на изменение на знака на t. В израза (28.9) това довежда само до изменение знака на всички нечетни производни.] И така, Дирак предложил: нека да приемем новото правило, че електронът действува сам на себе си с *полуразликата* на създаваните от него закъсняващи и изпреварващи полета. Полуразликата на изразите (28.9) и (28.12) дава

$$F=-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{x}+\text{висши членове.}$$

Във всички висши членове радиусът a влиза в числителя в положителна степен. Затова, когато ние преминем към граничния случай на точков заряд, остава само един член — тъкмо този, който ни е нужен. По такъв начин Дирак запазил радиационното съпротивление и се избавил от силата на инерцията. Електромагнитната маса изчезнала, теорията е спасена, но това благополучие е достигнато с цената на насилие над самодействието на електрона

Произволът на допълнителните предположения на Дирак е бил отстранен поне до известна степен от Уилер и Файнман, които предложили още по-странна теория. Те предположили, че точковият заряд взаимодействува само с другите заряди, но взаимодействието върви наполовина чрез закъсняващи, наполовина чрез изпреварващи вълни. Най-удивителното е, както се оказало, че в повечето случаи вие не виждате ефекта на изпреварващите вълни, но те дават тъкмо нужната сила на радиационното съпротивление. Обаче радиационното съпротивление възниква не като самодействие на електрона, а в резултат на следния интересен ефект. Когато електронът се ускорява в момент t, той влияе на всички други заряди в света в *по-късния* момент $t'=t+r/c$ (където r е разстоянието до другите заряди) поради закъсняващите вълни. Но след това тези други заряди действуват отново на първоначалния електрон с помощта на *изпреварващи* вълни, които идват до него в момент t'', равен на t' *минус* r/c, което е точно равно на t. (Те, разбира се, действуват и с помощта на закъсняващи вълни, но това просто съответствува на обикновени „отразени“ вълни.) Комбинацията на изпреварващи и закъсняващи вълни означава, че в този момент, когато електронът се ускорява, осцилиращият заряд изпитва действие от страна на всички заряди, които „са се приготвили“ да погълнат излъчените от него вълни. Ето в каква примка се заплели физиците, като се опитвали да спасят теорията на електрона!

Аз ще ви разкажа още за една теория, за да покажа до какви

неща стигат хората, когато са увлечени. Това е малко друга модификация на законите на електродинамиката, която е предложил Бопп.

Вие разбирате, че като се решим да изменим уравненията на електромагнетизма, ние можем да правим това във всяко място. Вие можете да измените закона на силите, които действуват на електрона, или можете да измените уравненията на Максвел (както това ще бъде направено в теорията, която се каня да ви опиша), или още нещо. Една от възможностите е да се изменят формулите, които определят потенциала чрез зарядите и токовете. Да вземем формулата, която изразява потенциалите в някоя точка чрез плътността на токовете (или зарядите) във всякаква друга точка в по-ранен момент на времето. С помощта на четиривекторни означения за потенциалите ние можем да я запишем във вида

$$A_\mu(1,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int \frac{j_\mu\,(2,t-r_{12}/c)}{r_{12}}\,dV_2. \qquad (28.13)$$

Удивително простата идея на Бопп се заключава в следното. Може би цялото зло произлиза от множителя $1/r$ под интеграла. Да предположим от самото начало, че потенциалът в една точка зависи от плътността на зарядите в която и да е точка като *някаква* функция на разстоянието между точките, да речем като $f(r_{12})$. Тогава пълният потенциал в точка *1* ще се определя от интеграла по цялото пространство от произведението на j_μ с тази функция

$$A_\mu(1)=\int j_\mu(2)f(r_{12})\,dV_2.$$

Ето и всичко. Никакви диференциални уравнения, нищо повече. Има само още едно условие. Ние трябва да поискаме резултатът да бъде релативистки инвариантен. Така че в качеството на „разстояние“ ние трябва да вземем инвариантното „разстояние“ между две точки в пространство-времето. Квадратът на това разстояние (с точност до знака, който е несъществен) е равен на

$$s_{12}^2=c^2(t_1-t_2)^2-r_{12}^2=c^2(t_1-t_2)^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2. \qquad (28.14)$$

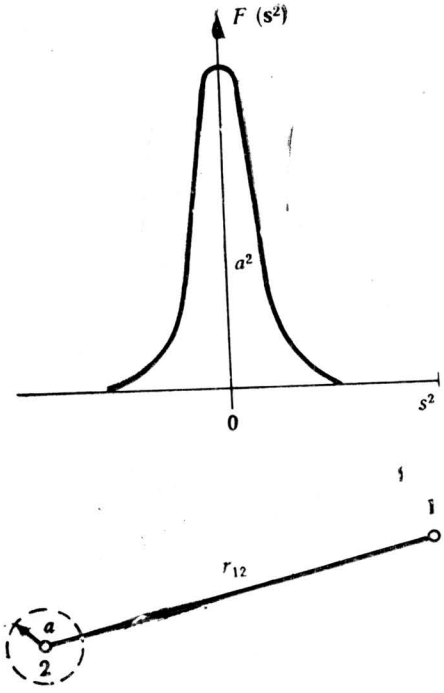
Така че за релативистката инвариантност на теорията функцията трябва да зависи от s_{12} или, което е същото, от s_{12}^2. По такъв начин в теорията на Бопп

$$A_\mu(1,t)=\int j_\mu(2,t_2)\,F(s_{12}^2)\,dV_2\,dt_2. \qquad (28.15)$$

(Интегралът, разбира се, трябва да се изчислява по четиримерния обем $dt_2\,dx_2\,dy_2\,dz_2$).

Сега остава само да изберем подходяща функция F. Относно нея ние предполагаме само едно — че тя е навсякъде малка с изключение на областта на аргумента близо до нулата, т. е. че графиката на F се държи подобно на кривата, показана на фиг. 28-4. Това е тесен пик в околностите на $s^2=0$, за ширина на който грубо може да се счита величината a^2. Ако изчислявате потенциала в точка *1*, може да се твърди, че принос дават само тези точки *2*, за които $s_{12}^2=c^2(t_1-t_2)^2-r_{12}^2$ се отличава от нула с $\pm a^2$. Това може да се изрази, като кажем, че F важи само за

$$s_{12}^2=c^2(t_1-t_2)^2-r_{12}^2\approx\pm a^2. \qquad (28.16)$$



Фиг. 28.4. Функцията F (s^2), използувана в нелокалната теория на Бопп

Ако потрябва, всичко може да се извърши математически строго, но идеята вече ви е ясна.

Да предположим сега, че a е много малко в сравнение с размерите на обикновените обекти от типа на електромотори, генератори и така нататък, затова за обикновените задачи $r_{12}\gg a$. Тогава изразът (28.16) казва, че в интеграла (28.15) дават принос само тези токове, за които t_1-t_2 е много малко

$$c\,(t_1-t_2)\approx\sqrt{r_{12}^2\pm a^2}=r_{12}\sqrt{1\pm\frac{a^2}{r_{12}^2}}\,.$$

Но понеже $a^2/r_{12}^2 \ll 1$, квадратният корен е равен приблизително на $1 \pm a^2/2r_{12}^2$, така че

$$t_1 - t_2 = \frac{r_{12}}{c}\left(1 \pm \frac{a^2}{2r_{12}^2}\right) = \frac{r_{12}}{c} \pm \frac{a^2}{2r_{12}c}.$$

Какво е тук същественото? Полученият резултат показва, че за A_μ в момента t_1 са важни само тези *времена* t_2, които се различават от него със закъсняването r_{12}/c с пренебрежимо малка поправка, понеже $r_{12} \geqslant a$. С други думи, теорията на Бопп преминава в теорията на Максвел при отдалечаване от зарядите в този смисъл, че тя води до ефекта на закъсняването.

Ние можем приближено да видим до какво довежда интегралът (28.15). Ако фиксираме r_{12} и извършим интегрирането по t_2 в граници от $-\infty$ до $+\infty$, s_{12}^2 също ще се изменя от $-\infty$ до $+\infty$. Но основният принос ще даде участъкът по t_2 с ширина $\Delta t_2 = 2 \cdot a^2/2r_{12}c$ с център в момента $t_1 - r_{12}/c$. Нека функцията $F(s^2)$ при $s^2 = 0$ приема стойност K, тогава интегрирането по t_2 дава приблизително $Kj_\mu \Delta t_2$ или

$$\frac{Ka^2}{c}\frac{j_\mu}{r_{12}}$$

Разбира се, стойността на j_μ трябва да се вземе в момент $t_2 = t_1 - r_{12}/c$, така че (28.15) приема вида

$$A_\mu(1, t) = \frac{Ka^2}{c}\int \frac{j_\mu(2, t_1 - r_{12}/c)}{r_{12}}\, dV_2.$$

Ако изберем $K = q^2c/4\pi\varepsilon_0 a^2$, ще получим точно закъсняващото решение на уравненията на Максвел за потенциалите, като автоматично възниква зависимостта $1/r$! Всичко това се получи от простото предположение, че потенциалът в една точка на пространство-времето зависи от плътността на токовете във всички други точки на пространство-времето, взети с определено тегло. В качеството на множител, който изразява теглото, е взета някаква функция на четиримерното разстояние между двете точки. Тази теория съ , дава крайна електромагнитна маса на електрона, а съотношението между енергията и масата е точно такова, каквото се изисква в теорията на относителността. Нищо друго не би могло да се получи, понеже теорията е релативистично инвариантна от самото начало.

Обаче и на тази теория, и на всички други, описани от нас теории, може да се предяви тежко обвинение. Всички известни ни частици се подчиняват на законите на квантовата механика, затова е необходима квантовомеханична форма на електродинамиката. Светлината се държи подобно на фотоните. Това вече не е 100-процентовата теория на Максвел. Следователно електродинамиката трябва да бъде изменена. Вече говорихме, че упоритото старание да се поправи класическата теория може да се окаже напразна загуба на време, понеже в квантовата електродинамика трудностите могат да изчезнат или да бъдат разрешени по друг начин. Обаче и в квантовата електродинамика трудностите не изчезват. В това се крие една от причините защо хората са изгубили толкова време, като се опитвали да преодолеят класическите трудности и се надявали, че ако успеят да ги преодолеят, след квантовото обобщение на уравненията на Максвел, всичко ще бъде в ред. Обаче и след такова обобщаване трудностите не изчезват.

Наистина квантовите ефекти водят до някои изменения. Изменя се формулата за масите, появява се константата на Планк $\hbar$, но отговорът както преди излиза безкраен, ако вие не ограничите някак интегрирането, подобно на това както ограничихме интеграла при $r = a$ в класическата теория. Отговорът при това зависи от характера на ограничението. За съжаление аз не мога да ви покажа, че трудностите основно са същите, понеже вие още твърде малко знаете за квантовата механика, а за квантовата електродинамика — още по-малко. Затова ще се наложи да

ми повярвате на думи, че и квантовата електродинамика на Максвел довежда до безкрайна маса на точковия електрон.

Оказва се обаче, че досега на никой не се е удало даже да се доближи до *самосъгласувано* квантово обобщение въз основа на която и да е от модифицираните теории. На идеята на Борн и Инфелд не било съдено никога да стане квантова теория. Не довели до удовлетворителна квантова теория изпреварващите и закъсняващи вълни на Дирак и Уилер—Файнман. Не довела до удовлетворителна квантова теория и идеята на Бопп. Така че и до днес не ни е известно решението на този проблем. Ние не знаем как, като вземем пред вид квантовата механика, да построим самосъгласувана теория, която не би давала безкрайна собствена енергия на електрона или на някой друг точков заряд. И в същото време няма удовлетворителна теория, която да описва неточков заряд. Така този проблем остана нерешен.

Ако вие намислите да си опитате щастието и да построите теория, като напълно премахнете действието на електрона сам върху себе си, така че електромагнитната маса да няма смисъл, а след това да правите от нея квантова теория, мога да ви уверя — няма да избегнете трудностите. Експериментално е доказано съществуването на електромагнитната инерция и този факт, че част от масата на заредените частици е електромагнитна по своя произход.

В старите книги често се твърдеше, че тъй като природата не ни е подарила две еднакви частици, от които едната е неутрална, а другата — заредена, ние никога не ще можем да кажем каква част от масата се явява електромагнитна и каква — механична. Обаче се оказа, че природата все пак е била достатъчно щедра и ни е *подарила* два именно такива обекта, така че, като сравняваме наблюдаваната маса на заредената частица с масата на неутралната, ние можем да кажем съществува ли електромагнитна маса. Да вземем например неутрона и протона. Те взаимодействуват с огромна сила — ядрена сила, за която не са ни известни детайлите на произхода. Обаче, както вече говорихме, ядрените сили притежават едно забележително свойство. По отношение към тези сили неутронът и протонът са абсолютно еднакви. Доколкото ние сега можем да съдим, ядрените сили между два неутрона, неутрон и протон и два протона са съвършено еднакви. Тези частици се отличават само със сравнително слабите електромагнитни сили; по отношение към тях протонът и неутронът се различават както денят и нощта. Ето това ни е точно нужно. И така, ние имаме две частици, еднакви от гледна точка на силните взаимодействия и различни от гледна точка на електричните. И те имат малка разлика в масите. Разликата на масите между протона и неутрона, изразена в единиците на енергията на покоя mc^2, е 1,3 MeV, което съответствува на 2,6 маси на електрона. Класическата теория предсказва за радиуса на протона стойност между 1/3 и 1/2 от радиуса на електрона или около 10^{-13} cm. Разбира се, в действителност следва да се ползуваме от квантовата теория, но по някаква странна случайност всички константи, 2π, $\hbar$ и т. н., се комбинират така, че приблизително дават същия резултат, както и класическата теория. Има само една беда: *знакът* се оказва неверен! Неутронът в действителност е *по-тежък* от протона.

Природата ни е дала още няколко други двойки и тройки частици, които с изключение на електричния заряд във всички останали отношения се оказват точно еднакви. Те взаимодействуват с протоните и неутроните посредством така наричаното „силно“ взаимодействие. В такива взаимодействия всички частици от даден вид, да речем π-мезон, се държат във всички отношения като една и съща частица с *изключение* на техния електричен заряд.

В табл. 28-1 даваме списък на такива частици заедно с техните маси. Заредените π-мезони имат маса 139,6 MeV, а неутралният π^0-мезон — с 4,6 MeV по-лека. Тази разлика на масите ние считаме електромагнитна. Тя би съответствувала на частица с ра-

диус от 3 до 4.10^{-14} cm. Вие виждате от таблицата, че разликата на масите на другите частици е от същия мащаб.

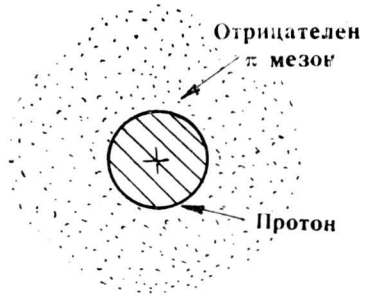
Таблица 28.1 **Маса на частиците**

Частица	Заряд (електронен)	Маса, MeV	Δm, MeV
n (неутрон)	0	939,5	
p (протон)	+1	938,2	−1,3
π (π-мезон)	0	135,0	
	±1	139,6	+4,6
K (K-мезон)	0	497,8	
	±1	493,8*	−3,9
Σ (сигма-хиперон)	0	1192,3*	
	+1	1189,4	−2,9*
	−1	1197,2*	+4,9*

Δm=масата на зареденaта частица — масата на неутралната частица.
(*Данните са от 1965 г. — Заб. на руския ред.)

Обаче размерите на тези частици могат да се определят и по други методи, например по привидния диаметър при високоенергийни удари. По такъв начин електромагнитната маса, изглежда, се намира в съгласие с електромагнитната теория, ако ние ограничим интеграла от енергията на полето до радиуса, получен по тези други методи. Ето защо ние вярваме, че разликата все пак е обусловена от електромагнитната маса.

Вас, разбира се, ви безпокоят различните знаци на разликата на масите в таблицата. Не е трудно да се разбере защо зареденaта частица трябва да бъде по-тежка от неутралната. Но какво може да се каже за такива двойки, като неутрона и протона, където наблюдаваната разлика на масите се оказва съвсем друга? Тези частици се оказват доста сложни и изчисляването на електромагнитната им маса е по-хитро. Например, макар неутронът *като цяло* да е неутрален, той все пак *притежава* вътрешно разпределение на заряд и е равен на нула само *сумарният* заряд. Ние мислим, че неутронът най-малкото в някои моменти изглежда като протон, обкръжен с „облак“ от отрицателен π-мезон (фиг. 28-5). И без да се гледа на това, че неутронът е „неутрален“, т. е. пълният му заряд е равен на нула, той все пак има някаква електромагнитна енергия (например той има магнитен момент), така че да се съди за знака на електромагнитната разлика на масите без детайлна теория на вътрешната структура не е леко.



Фиг. 28-5. В някои моменти нейтронът може да представлява протон, обкръжен от облак отрицателен π-мезон

Би ми се искало да подчертая само следните особености:

1. Електромагнитната теория предсказва съществуването на електромагнитна маса, но тя веднага търпи фиаско, понеже се оказва несамосъгласувана. Това в същата степен се отнася и за квантовите модификации.

2. Съществува експериментално потвърждение на електромагнитната маса.

3. Всички разлики на масите по порядък на стойността си са такива, както и масата на електрона.

И така, ние отново се връщаме към първоначалната идея на Лоренц, че масата на електрона може да бъде електромагнитна изцяло, т. е. всичките негови 0,511 MeV са обусловени от електродинамиката. Така ли е това, или не? И до ден днешен у нас няма теория, затова ние нищо не можем да кажем със сигурност.

Бих искал да спомена още за едно досадно обстоятелство. В природата съществува още една частица, наричана *μ-мезон* или мюон, която, доколкото ни е известно днес, решително с нищо не се отличава от електрона с изключение на своята маса (равна на 206,77 електронни маси). Тя във всичко се държи така както електрона: взаимодейства с неутриното и електромагнитното поле, но на нея не действуват ядрените сили. С нея не става нищо такова, което да не става с електроните, най-малкото нищо

такова, което не би могло да се обясни като просто следствие на по-голямата маса. Затова, ако в края на краищата на някой се удаде да обясни масата на електрона, за него остава загадка откъде взима своята маса μ-мезонът. Защо? Защото всичко, което прави електронът, може да прави и μ-мезонът, така че масите им трябва да се получат еднакви. Има хора, които непоколебимо вярват, че μ-мезонът и електронът са една и съща частица, че в окончателната бъдеща теория на масите формулата, от която те трябва да се определят, ще представлява квадратно уравнение с два корена, единият от които ще даде масата на μ-мезона, а другият — на електрона. Има и такива, които считат, че това ще бъде трансцендентно уравнение с безкрайно число корени; те се занимават с гадаене какви трябва да бъдат масите на другите частици от този ред и защо те не са открити досега.

28-6. Поле на ядрените сили

Бих искал да направя още няколко забележки за неелектромагнитната част от масата на ядрените частици. Откъде се взема голяма част от масата им? Освен електродинамичните сили съществуват още сили от друг вид — ядрени сили, които имат своя собствена теория на полето, макар че на никой не е известно правилна ли е тя, или не. Тази теория също предсказва енергия на полето, която за ядрените частици дава маса, аналогична на електромагнитната. Нея можем да я наречем „π-мезополева маса". Тя, изглежда, е много голяма, тъй като ядрените сили са извънредно мощни, и възможно е, че именно те се явяват причина за масата на тежките частици. Обаче теорията на мезонните полета се намира в твърде зародишно състояние. Даже в сравнително добре развитата теория на електромагнетизма ние видяхме, че освен първоначални намеци е невъзможно да се получи обяснение на масата на електрона. В мезонните теории в това място също търпим неуспех.

Обаче мезонната теория е много интересно свързана с електродинамиката и затова си струва да отделим все пак известно време за излагане на основите ѝ. Полето в електродинамиката може да се опише с четиривекторния потенциал, който удовлетворява уравнението

$$\Box^2 A_\mu = \text{източниците}.$$

Ние видяхме, че след като полето бъде излъчено, то съществува независимо от източника. Това са фотони и те се описват от диференциалното уравнение без източник

$$\Box^2 A_\mu = 0.$$

Някои физици твърдят, че полето на ядрените сили също трябва да има свои собствени „фотони", ролята на които изглежда играят π-мезоните, и че те са длъжни да се описват от аналогично диференциално уравнение. (Колко е безсилен човешкият разум! Ние не можем да измислим нещо действително ново и се хващаме да разсъждаваме само по аналогия с това, което знаем.) По такъв начин възможно уравнение за мезоните ще бъде

$$\Box^2 \varphi = 0,$$

където φ може да бъде някакъв друг четиривектор или възможно скалар. По-нататък се изяснило, че π-мезонът няма никаква поляризация, затова φ трябва да бъде скалар. Съгласно с това просто уравнение мезонното поле трябва да се изменя с разстоянието от източника като $1/r^2$, т. е. точно както електричното. Обаче ние знаем, че радиусът на действие на ядрените сили е много по-малък, което това просто уравнение не може да ни обезпечи. Има само един начин да се измени положението на нещата, без да се разруши релативистката инвариантност — да се прибави или извади

от даламбертиана произведението на константа и полето φ. И така, Юкава предположил, че свободните кванти на ядрените сили могат да се подчиняват на уравнението

$$\Box^2\varphi-\mu^2\varphi=0, \tag{28.17}$$

където μ^2 е някаква константа, т. е. някакъв скалар. (Тъй като $\Box^2$ е скаларен диференциален оператор, инвариантността няма да се наруши, ако ние прибавим към него друг скалар.)

Нека да видим какво дава уравнение (28.17), когато ядрените сили не се изменят с течение на времето. Ние искаме да намерим решението на уравнението

$$\nabla^2\varphi-\mu^2\varphi=0,$$

което би имало сферична симетрия спрямо някаква точка, да речем спрямо началото на координатната система. Ако φ зависи само от r, ние знаем, че

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi).$$

По такъв начин се получава уравнението

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi)-\mu^2\varphi=0$$

или

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi)=\mu^2(r\varphi).$$

Ако разгледаме сега произведението $(r\varphi)$ като нова функция, за нея имаме уравнение, което сме срещали много пъти. Решението има вид

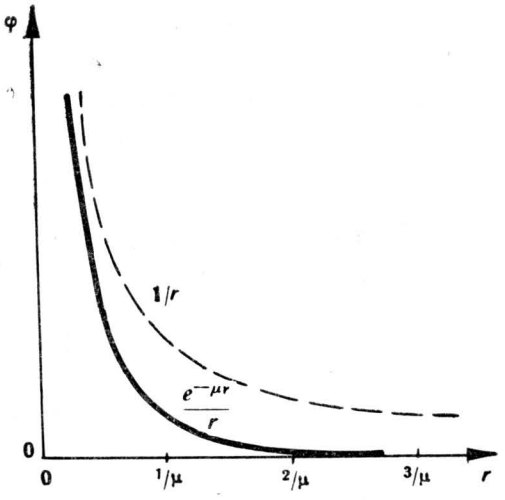
$$r\varphi=Ke^{\pm\mu r}.$$

Ясно е, че при големи r полето φ не може да бъде безкрайно, затова трябва да отхвърлим знака плюс в показателя на експонентата, след което решението ще приеме вида

$$\varphi=K\frac{e^{-\mu r}}{r}. \tag{28.18}$$

Тази функция се нарича *потенциал на Юкава.* За силите на привличане K трябва да бъде отрицателно число, стойността на което се подбира така, че да удовлетвори експериментално наблюдаваната големина на ядрените сили.

Потенциалът на Юкава благодарение на експоненциалния множител угасва по-бързо, отколкото $1/r$. Както това се вижда от фиг. 28-6, за разстояния, превишаващи $1/\mu$, потенциалът, а следователно и ядрените сили се приближават към нулата много по-бързо, отколкото $1/r$. Затова „радиусът на действие“ на ядрените сили е много по-малък от „радиуса на действие“ на електростатичните. Експериментално е доказано, че ядрените сили не се простират на разстояние, по-голямо от 10^{-13} cm, затова $\mu\approx 10^{15}\ \mathrm{m}^{-1}$.



Фиг. 28-6. Сравняване на потенциала на Юкава $e^{-\mu r/r}$ с кулоновия потенциал $1/r$

И на края нека да разгледаме вълновото решение на уравнение (28.17). Ако ние поставим в него

$$\varphi=\varphi_0 e^{i(\omega t-kz)},$$

ще получим

$$\frac{\omega^2}{c^2}-k^2-\mu^2=0.$$

Като свържем сега честотата с енергията, а вълновото число с импулса, както това ставаше в края на гл. 34 (т. I), ще намерим съотношението

$$\frac{E^2}{c^2}-p^2=\mu^2\hbar^2,$$

което казва, че масата на „фотона“ на Юкава е равна на $\mu\hbar/c$. Ако за μ вземем стойността $\sim 10^{15} m^{-1}$, което дава наблюдаваният радиус на действие на ядрените сили, масата се оказва равна на 3.10^{-25} g, или 170 MeV, което приблизително е равно на наблюдаваната маса на π-мезона. По такъв начин по аналогия с електродинамиката ние бихме казали, че π-мезонът е „фотон“ на полето на ядрените сили. Обаче сега ние разпространихме идеите на електродинамиката в такава област, където те наистина могат да се окажат неверни. Ние излезнахме далеч зад рамките на електродинамиката и се озовахме пред проблема за ядрените сили

29

Движение на зарядите в електрично и магнитно поле

29-1. Движение в хомогенни електрично и магнитно поле

Сега ще опишем в общи черти движението на зарядите при различни условия. Най-интересни явления възникват тогава, когато много заряди се движат и всички те взаимодействуват един с друг. Така стои работата, когато електромагнитните вълни преминават през вещество или плазма; тогава легиони заряди взаимодействуват един с друг. Но това е много сложна картина. По-късно ние ще поговорим и за такива проблеми; но засега ще обсъдим несравнимо по-простата задача за движението на отделен заряд в *зададено* поле. При това могат да се пренебрегнат всички други заряди с изключение, разбира се, на тези заряди и токове, които създават предполаганото от нас поле.

Нужно е, изглежда, да се започне от движението на частица в хомогенно електрично поле. Движението при малки скорости не представлява особен интерес — това е просто равномерно ускорително движение по посока на полето. Но когато частицата, след като набере достатъчно енергия, се превръща в релативистка, движението ѝ става по-сложно. Решението за този случай аз оставям на вас — потрудете се и го намерете сами.

Ние ще разгледаме движението в хомогенно магнитно поле когато няма електрично поле. Тази задача вече решавахме. Едно от решенията беше движение на частицата по окръжност. Магнитната сила $q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ винаги действува под прав ъгъл към посоката на движението, така че производната $d\mathbf{p}/dt$ е перпендикулярна на $\mathbf{p}$ и равна по големина vp/R, където R е радиусът на окръжността, т. е.

$$F=qvB=\frac{vp}{R}.$$

По такъв начин радиусът на кръговата орбита е

$$R=\frac{p}{qB}. \tag{29.1}$$

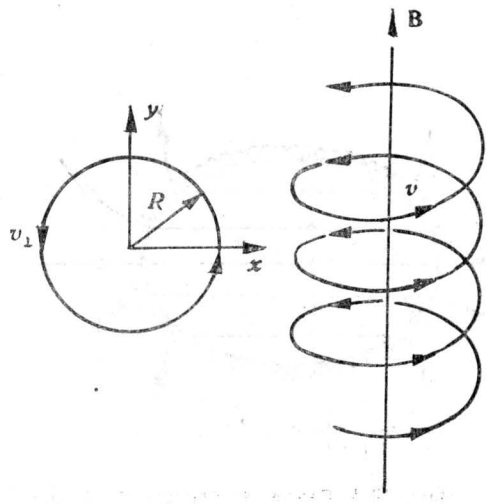
Това е едно от възможните движения. Ако пък движението на частицата е успоредно на направлението на магнитното поле, това движение не се изменя, тъй като магнитната сила няма компонента в това направление. Общото движение на частицата в хомогенно магнитно поле е движение с постоянна скорост по направлението на $\mathbf{B}$ и кръгово движение под прав ъгъл спрямо $\mathbf{B}$, т. е. движение по цилиндрична спирала (фиг. 29-1). Радиусът на спиралата се определя от уравнение (29.1), като се замени p с $p_\perp$ — компонентата на импулса, перпендикулярна на направлението на полето.

29-2. Анализатор на импулсите

Хомогенното магнитно поле често се използува в „анализатора“ или „спектрометъра на импулсите“ на заредени частици с високи енергии. Да предположим, че в точка A (фиг. 29-2, *а*) в хомогенно магнитно поле влизат заредени частици, като магнитното поле е перпендикулярно на равнината на фигурата. При това всяка частица ще лети по кръгова орбита, радиусът на която е

29-1. Движение в хомогенни електрично и магнитно поле
29-2. Анализатор на импулсите
29-3. Електростатична леща
29-4. Магнитна леща
29-5. Електронен микроскоп
29-6. Стабилизиращи полета на ускорителите
29-7. Фокусиране посредством последователно сменящ се градиент
29-8. Движение в кръстосани електрично и магнитно полета

Да се повтори: гл. 30 (т. I) „Дифракция“



Фиг. 29-1. Движение на частиците в хомогенно магнитно поле



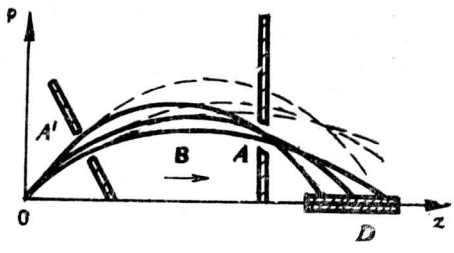
а



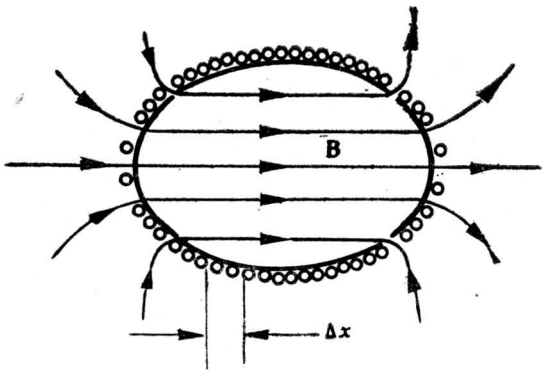
б

Фиг. 29-2. 180-градусен спектрометър на импулси с еднородно магнитно поле:

а — траектории на частиците с разни импулси; *б* — траектории на частиците, които излитат под разни ъгли. Магнитното поле е насочено перпендикулярно по равнината на рисунката



Фиг. 29-3. Спектрометър с аксиално поле



Фиг. 29-4. Вътре в елипсоидална бобина, токът на която на всеки интервал на оста Δx е еднакъв, възниква хомогенно поле

пропорционален на импулса ѝ. Ако всички частици влизат в полето, перпендикулярно на края му, те го напускат на разстояние x от точката A, пропорционално на техния импулс p. Поставеният в някоя точка C брояч ще регулирира само такива частици, импулсът на които се намира някъде в интервала Δp на стойност $p = qBx/2$.

Не е необходимо, разбира се, преди регистрацията частицата да се завърта на 180°, но такъв „180-градусен спектрометър" притежава особено свойство: за него съвсем не е необходимо частиците да влизат под прав ъгъл към края на полето. На фиг. 29-2,*б* са показани траекториите на три частици с *еднакви* импулси, но които влизат в полето под различни ъгли. Вие виждате, че траекториите им са различни, но всички те напускат полето много близко до точката C. В подобни случаи ние говорим за „фокусиране". Преимуществото на такъв начин на фокусиране е в това, че той позволява да се допускат в точка A частици, които летят под големи ъгли, макар и обикновено, както се вижда от фигурата, тези ъгли да са в някаква степен ограничени. Голямата ъглова разделителна способност обикновено означава регистрация за даден интервал от време на голям брой частици и съкращаване следователно на времето на измерване.

Като изменяме магнитното поле, като движим брояча по оста x или пък като покрием с помощта на много броячи цяла област по оста x, можем да измерим „спектъра" на падащия поток („спектър" на импулсите $f(p)$ означава, че броят на частиците с импулси в интервала между p и $(p+dp)$ е $f(p)\,dp$). Такива измерения се правят например при определяне на разпределението по енергии в β-разпадането на различните ядра.

Има много още други типове импулсни спектрометри, но аз ще ви разкажа само за един от тях, характерен с особено голяма разделителна способност по *пространствен* ъгъл. В основата му лежат винтовите орбити в хомогенно поле, както това е показано на фиг. 29-1. Представете си цилиндрична координатна система ρ, θ, z, като оста z е избрана по посоката на магнитното поле. Ако частицата се изпуска от началото на координатите под ъгъл α спрямо оста z, тя ще се движи по спирална линия, описвана от израза

$$\rho = a \sin kz, \qquad \theta = bz;$$

параметрите a, b и k не е трудно да се изразят чрез p, α и магнитното поле B. Ако за даден импулс, но различни начални ъгли нанесем разстоянието ρ от оста като функция на z, ще получим криви, подобни на непрекъснатите криви на фиг. 29-3. (Вие помните, че това е своего рода проекция на винтовата траектория.) Когато ъгълът между оста и началната посока е голям, максималната стойност на ρ също ще бъде голяма, а надлъжната скорост при това се намалява, така че излизащите под различни ъгли траектории се стремят да се съберат в нещо като фокус (точка A на фигурата). Ако на разстояние A поставим тесен пръстеновиден отвор, частиците, които летят в определена ъглова област, могат да преминат през отвора и да достигнат оста, където за тяхната регистрация ще приготвим простиращия се на известна дължина детектор D.

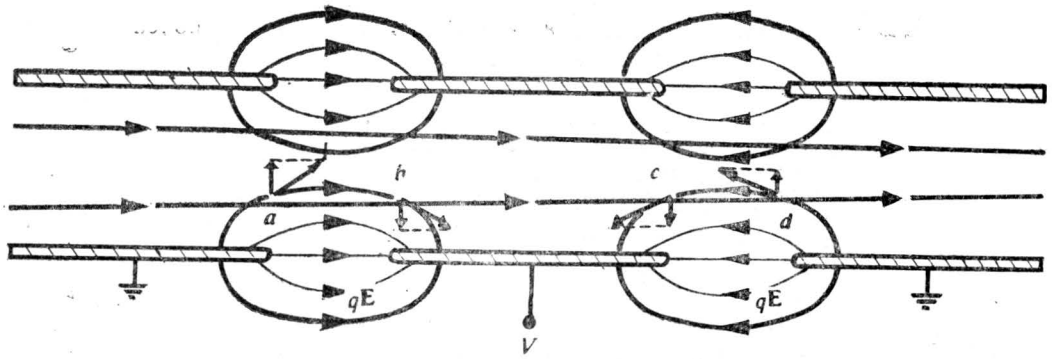
Частиците, които излитат от началото на координатите под същия този ъгъл, но с по-голям импулс, летят по пътя, означен с пунктирана линия, и не могат да преминат през отвора A. И така, уредът избира малък интервал на импулса. Преимуществото на такъв спектрометър в сравнение с описания по-рано се състои в това, че отворите A и A' могат да се направят пръстеновидни, така че могат да бъдат регистрирани частиците в доста голям телесен ъгъл. Това преимущество е особено важно за слаби източници и при много точни измервания, когато е необходимо да използуваме колкото е възможно по-голяма част от изпуснатите от източника частици.

Но за това преимущество се налага да се разплащаме, тъй

като методът изисква голям обем хомогенно магнитно поле и практически е приложим само за частици с неголяма енергия. Ако помните, един от начините за получаване на хомогенно поле е да се намотае проводник на кълбо така, че повърхнинната плътност на тока да бъде пропорционална на синуса на ъгъла. Вие можете да докажете, че същото е валидно и за ротационен елипсоид. Затова много често изготвят такъв спектрометър, просто като намотават елипсоидални навивки на дървен или алуминиев скелет. Единственото, което се изисква при това, е токът на всеки интервал от оста Δx (фиг. 29-4) да бъде един и същ.

29-3. Електростатична леща

Фокусирането на частиците има много приложения. Например в телевизионната тръба електроните, които излитат от катода, се фокусират на екрана в малко петънце. Това се прави, за да се отберат електроните с еднаква енергия, но летящи под различни ъгли и да се съберат в неголяма точка. Тази задача напомня фокусирането на светлината с помощта на лещи, затова устройствата, които изпълняват такива функции, се наричат също лещи.



Фиг. 29-5. Електростатична леща.
(Показани са силовите линии, т. е. линиите на вектора $q\mathbf{E}$.)

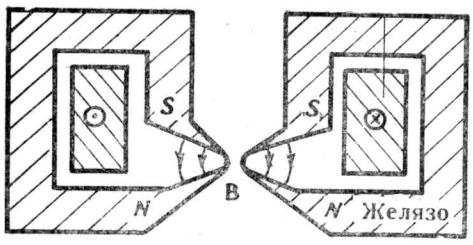
Като пример за електронна леща тук е приведена фиг. 29-5. Това е „електростатична" леща, действието на която зависи от електричното поле между два съседни електрода. Работата ѝ може да се разбере, като проследим какво прави тя с влизащия отляво успореден сноп частици. Като попаднат в областта a, на електроните действува сила със странична компонента, която ги притиска към оста. В областта b електроните, като че ли би трябвало да получат равен по големина, но противоположен по знак импулс, обаче това не е така. За времето, когато те ще достигнат областта b, енергията им ще се увеличи и затова за преминаване на областта b те *ще загубят по-малко време.* Силите са същите, но времето на действието им е по-малко, затова и импулсът ще бъде по-малък. А пълният импулс на силата при преминаване на областите a и b е насочен към оста, така че в резултат електроните се съсредоточават към една обща точка. Като напускат областта на високо напрежение, частиците получават допълнителен тласък по посока към оста. В област c силата е насочена от оста, а в област d — към оста, но във втората област частицата остава по-дълго, така че отново пълният импулс е насочен към оста. За малки разстояния от оста пълният импулс на силата по дължината на цялата леща е пропорционален на разстоянието от оста (разбирате ли защо?) и това е именно основното условие, необходимо за фокусирането на лещи от такъв тип.

С помощта на същите разсъждения можете да се убедите, че фокусиране ще бъде достигнато във всички случаи, когато потен-

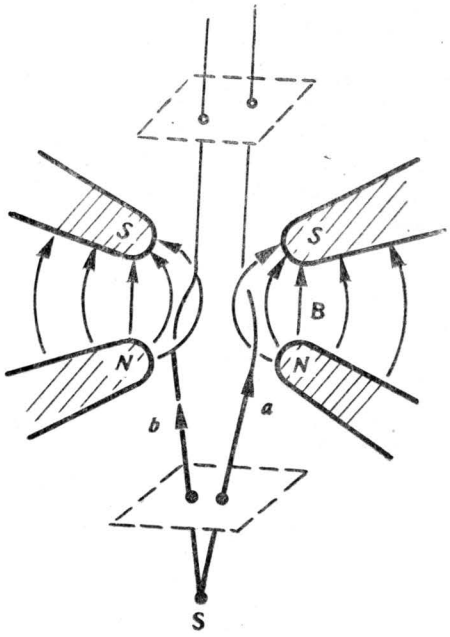
циалът в средата на електрода по отношение към двата други е или положителен, или отрицателен. Електростатичните лещи от такъв тип обикновено се използуват в катоднолъчевите тръби и някои електронни микроскопи.

29-4. Магнитна леща

Има още един вид лещи — тях често можем да ги срещнем в електронните микроскопи — магнитните лещи. Схематично те са начертани на фиг. 29-6. Цилиндрично симетричен електромагнит с много остри пръстеновидни накрайници на полюсите създава в малка област много силно нехомогенно магнитно поле. То фокусира електроните, които летят вертикално през тази област. Не е трудно да се разбере механизмът на фокусирането; погледнете увеличения образ на областта близо до накрайниците на полюсите на фиг. 29-7. Вие виждате два електрона a и b, които напускат източника S под известен ъгъл спрямо оста. Щом електрон a достигне началото на полето, хоризонталната компонента на полето ще го отклони в посока *откъм вас*. Той ще придобие странична скорост и като прелети през силното вертикално поле, ще получи импулс по посока към оста. Страничното движение се изчиства от магнитната сила, когато електронът напуска полето, така че окончателен ефект ще бъде импулсът, насочен към оста, плюс „въртене“ спрямо нея. На частица b действуват същите сили, но в противоположна посока, затова тя също се отклонява по посока към оста. На фигурата се вижда как разходящите се електрони се събират в успореден сноп. Действието на такова устройство е подобно на действието на леща върху обект, който се намира зъв фокуса ѝ. Ако сега отгоре поставим още една такава леща, тя би фокусирала електроните отново в една точка и би се получил образ на източника S.



Фиг. 29-6. Магнитна леща



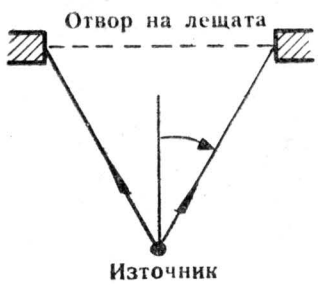
Фиг. 29-7. Движение на електрона в магнитна леща

29-5. Електронен микроскоп

Вие знаете, че в електронния микроскоп могат да се „видят“ предмети, които са недостъпно малки за оптическия микроскоп. В гл. 30 (т. I) обсъждахме общите ограничения за всяка оптична система, които се дължат на дифракцията от отвора на лещата. Ако отворът на обектива се вижда от източника под ъгъл 2θ (фиг. 29-8), две съседни точки, разположени около източника, ще бъдат неразличими, ако разстоянието между тях по порядък на величината е по-малко от

$$\delta \approx \frac{\lambda}{\sin\theta},$$

където λ е дължината на вълната на светлината. За най-добрите оптически микроскопи ъгълът θ се доближава до теоретическата граница 90°, така че δ е приблизително равно на λ или около 5000 Å.



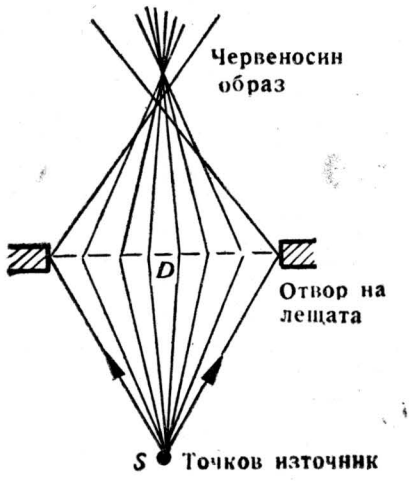
Фиг. 29-8. Разделителната способност на микроскопа се ограничава от ъгловите размери на обектива относно фокуса

Същите ограничения са приложими и към електронния микроскоп, но само че дължината на вълната в него, т. е. дължината на вълната на електрони с енергия 50 kV, е 0,05 Å. Ако би могло да се използува обектив с отвор около 30°, ние бихме могли да различим обекти с големина 1/5 Å. Атомите в молекулите обикновено са разположени на разстояние 1—2 Å, следователно тогава би било напълно възможно да получаваме фотографии на молекулите. Биологията би станала къде по-проста; ние бихме могли да фотографираме структурата на ДНК. Колко прекрасно би било това! Нали всички днешни изследвания в молекулярната биология са опити да се определи структурата на сложните органични молекули. Ако ние бихме могли да ги виждаме!

Но за нещастие най-добрата разделителна способност на електронните микроскопи се доближава само до 20 Å. А всичко по-

ради това, че досега на никого не се е удало да построи леща с голяма светосила. Всички лещи страдат от „сферична аберация". Това означава ето какво: лъчите, вървящи под голям ъгъл спрямо оста, и лъчите, вървящи близо до нея, се фокусират в различни точки (фиг. 29-9). С помощта на специална технология се изготвят лещи за оптически микроскопи с пренебрежимо малка сферична аберация, но на никого досега не се е удало да получи електронна леща, лишена от сферична аберация. Може да се покаже, че за всяка електростатична или магнитна леща от описаните от нас типове сферичната аберация е неизбежна. Наред с дифракцията аберацията ограничава разделителната способност на електронните микроскопи в нейното сегашно значение.

Ограниченията, за които ние споменахме, не се отнасят за електричните и магнитните полета, които нямат осева симетрия или са непостоянни във времето. Напълно е възможно в един прекрасен ден някой да измисли нов тип електронни лещи, свободни от аберацията, която е присъща на простите електронни лещи. Тогава ще може непосредствено да се фотографират атомите. Възможно е някога химичните съединения да се анализират просто чрез визуално наблюдение за разположението на атомите, а не по цвета на някаква утайка!

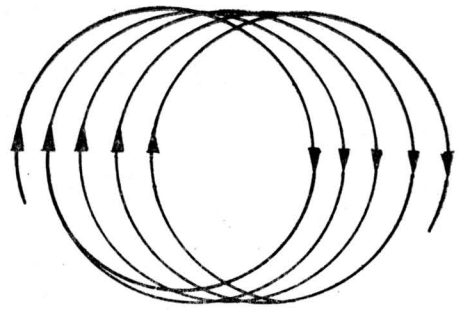


Фиг. 29-9. Сферична аберация на лещата

29-6. Стабилизиращи полета на ускорителите

Магнитните полета се използуват във високоенергийните ускорители и за да заставят частицата да се движи по нужната траектория. Такива устройства, като циклотрона и синхротрона, ускоряват частицата до високи енергии, като я заставят многократно да преминава през силно електрично поле. На своята орбита частицата се удържа от магнитно поле.

Ние видяхме, че пътят на частицата в хомогенно магнитно поле преминава по кръгова орбита. Но това е валидно само за идеално магнитно поле. Представете си, че полето B в голяма област е само приблизително хомогенно: в една част то е малко по-силно, отколкото в друга. Ако в такова поле ние вкараме частица с импулс p, тя ще полети по примерно кръгова орбита с радиус $R=p/qB$. Обаче в областта на по-силното поле радиусът на кривината ще бъде малко по-малък. При това орбитата вече няма да бъде затворена окръжност, а ще възникне „дрейф", подобен на изобразения на фиг. 29-10. Ако искате, можем да считаме, че малка „грешка" в полето води до тласък, който премества частицата на нова траектория. Но в ускорителите частицата прави милиони оборота, затова е необходимо своего рода „радиално фокусиране", което би удържало частицата на близка до желаната орбита.

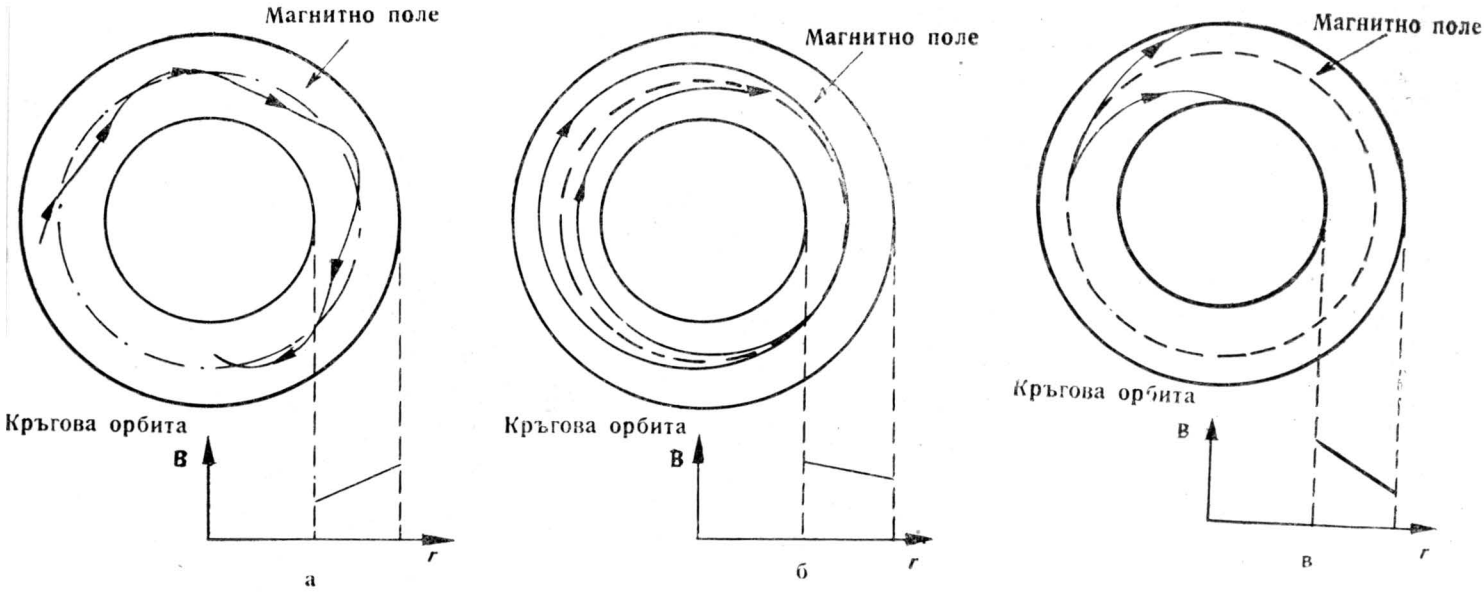


Фиг. 29-10. Движение на частицата в слабо нехомогенно поле

Друга трудност, свързана с хомогенното поле, се състои в това, че частиците не остават в една плоскост. Ако те започват движението под малък ъгъл или малък ъгъл се създава от неточността на полето, частиците вървят по спирален път, който в края на краищата ще ги заведе или на полюса на магнита, или на тавана, или на пода на вакуумната камера. За да се избегне такъв вертикален дрейф, необходими са някакви устройства; магнитното поле трябва да обезпечава както радиалната, така и „вертикалната" фокусировка.

Веднага можем да се досетим, че радиална фокусировка се обезпечава от магнитно поле, което се увеличава с ръста на разстоянието от центъра на проектирания път. Тогава, ако частицата отиде на по-голям радиус, тя ще се окаже в по-силно поле, което ще я върне назад на нужната орбита. Ако тя премине на по-малък радиус, „завиването" ще бъде по-малко и тя отново ще се върне назад на желания радиус. Ако частицата внезапно е започнала да се движи под ъгъл спрямо идеалната орбита, тя ще започне да осцилира спрямо нея (фиг. 29-11,*а*) и радиалната фокусировка ще удържа частицата близо до кръговия път.

Фактически радиално фокусиране става даже при *противоположен* „наклон". Това може да стане в тези случаи, когато ра-



Фиг. 29-11. Радиално движение на частицата в магнитно поле:
а — с голям положителен „наклон"; *б* — с малък отрицателен „наклон"; *в* — с голям отрицателен „наклон"

диусът на кривината на траекторията се увеличава не по-бързо, отколкото разстоянието на частицата от центъра на полето. Орбитите на частиците ще бъдат подобни на изобразените на фиг. 29-11, *б*. Но ако градиентът на полето е твърде голям, частиците няма да се върнат на желания радиус, а ще излизат по спирала от полето или навътре, или навън (фиг. 29-11, *в*).

„Наклонът" на полето ние обикновено характеризираме с „относителния градиент" или *индекса на полето n*

$$n=\frac{dB/B}{dr/r}. \tag{29.2}$$

Направляващото поле създава радиална фокусировка, ако относителният градиент бъде по-голям от -1.

Радиалният градиент ще доведе също до *вертикални* сили, които действуват на частицата. Да предположим, че имаме поле, което близо до центъра на орбитата е по-силно, а отвън по-слабо. Вертикалното напречно сечение на магнита под прав ъгъл към орбитата може да има такъв вид, както е показано на фиг. 29-12. (Като протоните летят от страницата към нас.) Ако ни е нужно полето да бъде по-силно отляво и по-слабо отдясно, магнитните силови линии трябва да бъдат изкривени подобно на изобразените на фигурата. Че това трябва да бъде така, може да се види от закона за равенство на циркулацията на **B** на нула в празното пространство. Ако изберем координатната система, показана на фигурата

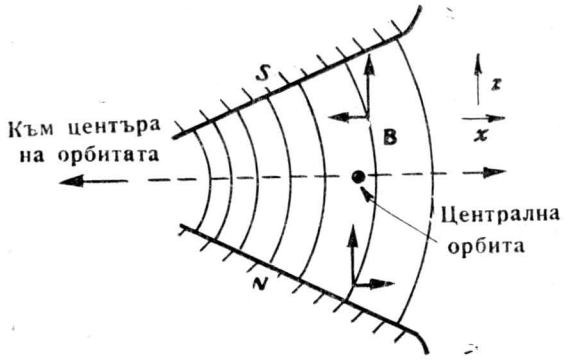
$$(\nabla\times\mathbf{B})_y=\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}=0$$

или

$$\frac{\partial B_x}{\partial z}=\frac{\partial B_z}{\partial x}. \tag{29.3}$$

Понеже ние предполагаме, че $\partial B_z/\partial x$ е отрицателно, равно на него, и отрицателно трябва да бъде и $\partial B_x/\partial z$. Ако „номинална" равнина на орбитата е равнината на симетрия, където $B_x=0$, радиалната компонента B_x ще бъде отрицателна над равнината и положителна под нея. При това линиите трябва да бъдат изкривени така, както това е изобразено на фигурата.

Такова поле трябва да притежава вертикално фокусиращи свойства. Представете си протон, който лети повече или по-малко успоредно на централната орбита, но по-високо от нея. Хоризонталната компонента на **B** ще действува на протона със сила, на-



Фиг. 29-12. Отвесно фокусиращо поле
Вид в напречно сечение, перпендикулярно на орбитата

сочена надолу. Ако пък протонът се намира по-ниско от централната орбита, силата ще измени своята посока. По такъв начин възниква ефективна „възстановяваща сила“, насочена към центъра на орбитата. От нашите разсъждения се получава, че при условието за намаляване на *вертикалното* поле с увеличение на радиуса трябва да става вертикално фокусиране. Обаче ако градиентът на полето е положителен, получава се „вертикална дефокусировка“. По такъв начин за вертикално фокусиране индексът на полето n трябва да бъде по-малък от нула. По-горе ние намерихме, че за радиално фокусиране стойността на n трябва да бъде по-голяма от -1. Комбинацията на тези две условия изисква за удържане на частиците на стабилни орбити

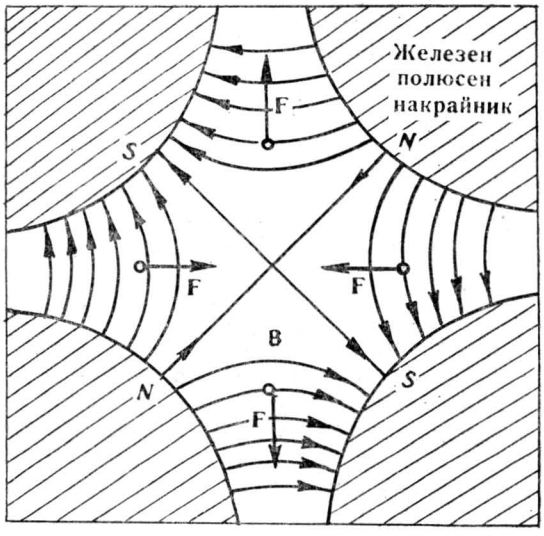
$$-1<n<0.$$

В циклотроните обикновено се използува стойност на n приблизително равна на нула, а в бетатроните и синхротроните типична стойност е $n=-0{,}6$.

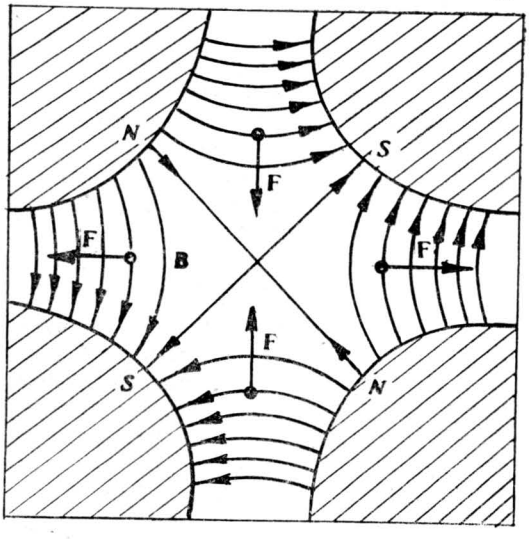
29-7. Фокусиране чрез последователно сменящ се градиент

Толкова малки стойности на n дават доста „слаба“ фокусировка. Ясно е, че много по-голяма радиална фокусировка би могло да се получи при голям положителен градиент ($n\gg 1$), но при това вертикалните сили ще бъдат силно дефокусиращи. По същия начин голям отрицателен наклон ($n\ll -1$) би давал големи вертикални сили, но при това би предизвиквал силна радиална дефокусировка. Обаче преди около 10 години било установено, че последователно сменящото се действие на области със силна фокусировка и област със силна дефокусировка *като цяло* водят към фокусиращ ефект.

За да обясним как действува *такава фокусировка,* ще изясним отначало действието на квадруполната леща, която е устроена на същия принцип. Представете си, че към магнитното поле, изобразено на фиг. 29-12, е добавено хомогенно отрицателно магнитно поле, силата на което е подбрана така, че полето на орбитата да бъде равно на нула. Резултантното поле при малки отмествания от неутралната точка ще напомня изобразеното на фиг. 29-13. Такъв четириполюсен магнит се нарича „квадруполна леща“. Положителна частица, която влиза (от страната на читателя) отдясно или отляво на центъра, отново се привлича в центъра. Ако пък частицата влиза отгоре или отдолу на центъра,



Фиг. 29-13. Хоризонтално-фокусираща квадруполна леща



Фиг. 29-14. Вертикално-фокусираща квадруполна леща



Фиг. 29-15. Хоризонтална и вертикална фокусировка с двойка квадруполни лещи

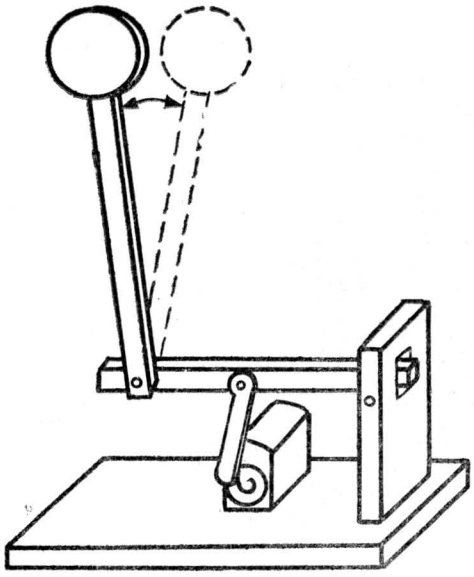
тя се *отблъсква* от него. Това е хоризонтално-фокусираща леща. Ако сега обърнем хоризонталния градиент, което може да бъде направено посредством променяне на всички полюси на противоположни, знакът на всички сили ще се обърне и ние ще получим вертикално-фокусираща леща (фиг. 29-14). Интензитетът на полето при такива лещи, а следователно и фокусиращата сила нарастват линейно с отдалечаването от оста на лещата.

Представете си сега, че ние сме поставили две такива лещи подред. Ако частицата влиза с някакво хоризонтално отместване спрямо оста (фиг. 29-15, *а*), тя ще се отклони по посока към оста от първата леща. И когато тя се приближава към втората леща, се оказва по-близко до оста, където отблъскващата сила е по-малка, затова по-малко ще бъде и отклонението от оста. В резултат ще се получи наклон към оста, т. е. *усредненото* им действие ще се окаже хоризонтално-фокусиращо. От друга страна, ако ние вземем частица, която се отклонява от оста във вертикална посока, пътят ѝ ще бъде такъв, както е показано на фиг. 29-15, *б*. Частицата отначало се отклонява от оста, а след това влиза във втората леща с по-голямо отместване и като изпитва действието на по-голяма сила, в резултат се отклонява към оста. Като цяло ефектът отново ще бъде фокусиращ. По такъв начин действието на двойка квадруполни лещи, които действуват независимо в хоризонтално и вертикално направление, много напомня действието на оптична леща. Квадруполните лещи се използуват за формиране на поток частици и за контрол над него точно така, както оптичните лещи се използуват за светлинен сноп.

Трябва да се подчертае, че променливо-градиентната система не винаги води до фокусиране. Ако градиентът е твърде голям (в сравнение с импулса на частиците или с разстоянието между лещите), резултантното действие ще бъде дефокусиращо. Вие ще разберете как се получава това, ако си представите, че пространството между двете лещи на фиг. 29-15 се е увеличило три или четири пъти.

Сега да се върнем към синхротронния направляващ магнит. Може да се счита, че той се състои от последователно редуващи се „положителни“ и „отрицателни“ лещи с насложено върху тях хомогенно поле. Хомогенното поле служи, за да държи частиците средно на хоризонтална окръжност (на вертикалното движение то не влияе), а променливите лещи действуват на всяка частица, която гледа да се отклони от пътя, като я побутват през цялото време към централната орбита (средно).

Съществува много хубав механичен аналог, който демонстрира как променливата „фокусираща и дефокусираща“ сила може да доведе в резултат към „фокусиращ“ ефект. Представете си механично „махало“, което се състои от твърда пръчка с тежинка, закачена на ос, която с помощта на свързан с мотор кривошип може бързо да се разлюлява нагоре и надолу. Такова махало има *две* равновесни положения. Освен нормалното положение, когато махалото виси надолу, то има още едно равновесно положение,

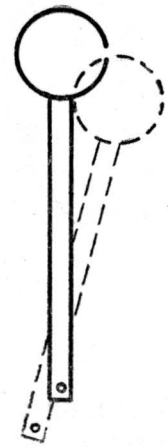


Фиг. 29-16. Махало с осцилираща ос има устойчиво положение с тежест, намираща се горе

когато стърчи нагоре — тежинката се намира при това *над* опорната точка (фиг. 29-16).

Прости разсъждения показват, че вертикалното движение на пръчката е еквивалентно на променлива фокусираща сила. Когато пръчката се ускорява надолу, тежинката се стреми да се движи по посока към отвеса, както това е показано на фиг. 29-17, а когато тежинката се ускорява нагоре — всичко протича в обратен ред. Но без да се гледа на това, че силата през цялото време изменя своята посока, средно тя действува към отвеса. По такъв начин махалото ще се люлее насам — натам около неутрално положение, което е точно противоположно на нормалното.

Съществува, разбира се, по-прост начин да се задържи махалото „нагоре с краката“ — например да го *балансираме* на пръста си. Но опитайте се да удържите така *две независими* махала *на един пръст*. Или даже едно, но със затворени очи. Балансирането означава внасяне на малки поправки в това, което е невярно. А ако едновременно не са верни няколко параметри, балансирането в повечето случаи е невъзможно. Обаче в синхротрона по орбитата едновременно се движат милиарди частици, всяка от които има своя собствена „грешка“, и въпреки това описаният от нас начин за фокусиране действува едновременно на всички тези частици.

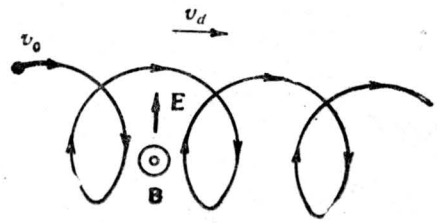


Фиг. 29-17. Ускорението на оста на махалото надолу води до неговото движение по посока на вертикалата

29-8. Движение в кръстосани електрично и магнитно поле

Досега ние говорихме за частици, които се намират само в електрично или само в магнитно поле. Но има интересни ефекти, които възникват при едновременното действие на двете полета. Нека имаме хомогенно магнитно поле **B** и насочено под прав ъгъл към него електрично поле **E**. Тогава частиците, които влитат перпендикулярно на полето **B**, ще се движат по крива, подобна на изобразената на фиг. 29-18. (Това е *плоска* крива, а *не* спирала.) Да се разбере това качествено движение не е трудно. Ако частицата (която ние считаме положителна) се движи по посоката на полето **E**, тя набира скорост и магнитното поле я отклонява по-малко. А когато частицата се движи срещу полето **E**, тя губи скорост и постепенно все повече и повече се отклонява от магнитното поле. В резултат се получава „дрейф“ в посока (**E**×**B**).

Ние можем да покажем, че такова движение е по същество суперпозиция на равномерно движение със скорост $v_d = E/B$ и кръгово, т. е. на фиг. 29-18 е изобразена просто циклоида. Представете си наблюдател, който се движи надясно с постоянна скорост. В неговата система на отчитане нашето магнитно поле се преобразува в ново магнитно поле *плюс* електрично поле, насочено надолу. Ако неговата скорост е подбрана така, че пълното електрично поле да се окаже равно на нула, наблюдателят ще вижда електрон, който се движи по окръжност. По такъв начин движението, което *ние* виждаме, ще бъде кръгово движение плюс пренасяне със скорост на дрейфа $v_d = E/B$. Движението на електроните в кръстосани електрично и магнитно поле лежи в основата на магнетроните, т. е. на осцилаторите, които се използуват при генериране на микровълново излъчване.



Фиг. 29-18. Пътят на частица в кръстосани електрическо и магнитно поле

Има още немалко други интересни примери за движение на частици в електрично и магнитно поле, например орбитите на електроните и протоните, заловени в радиационните пояси в горните слоеве на стратосферата, но за съжаление ние нямаме време, за да се занимаваме сега и с тези въпроси.

30

Вътрешна геометрия на кристалите

30-1. Вътрешна геометрия на кристалите

30-2. Химически връзки в кристалите

30-3. Растеж на кристалите

30-4. Кристални решетки

30-5. Симетрии в две измерения

30-6. Якост на металите

30-8. Дислокация и растеж на кристалите

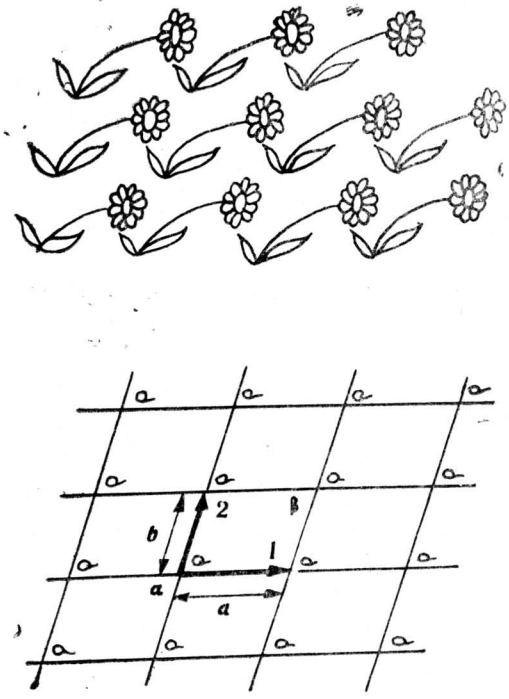
30-9. Модел на кристала по Брег — Най

30-1. Вътрешна геометрия на кристалите

Ние завършихме изучаването на основните закони на електричеството и магнетизма и сега можем да се заемем с електромагнитните свойства на веществото. Ще започнем с изучаването на твърдите тела, по-точно на кристалите. Ако атомите на веществото не се движат много активно, те се захващат един за друг и се разполагат в конфигурации с минимална енергия. Ако атомите някъде са се подредили така, че техните положения отговарят на най-ниска енергия, то и в друго място атомите ще създадат същото разположение. Поради това в твърдото вещество подреждането на атомите се повтаря.

С други думи, условията в кристала са такива, че всеки атом е обграден от подредени по определен начин атоми и ако разгледаме атом от същия вид в някакво друго място, малко по-далеч, ще видим, че обкръжението и в новото място е точно същото. Ако изберете атом още по-далеч, още веднаж ще намерите точно същите условия. Подреждането се повтаря отново и отново и, разбира се, по всичките три измерения.

Представете си, че трябва да направите рисунка за тапети или плат, или някакъв геометричен чертеж за плоска повърхност, в който трябва да има елемент, повтарящ се непрекъснато отново и отново, така че тази повърхност да може да се направи толкова голяма, колкото ви се иска. Това е двумерен аналог на задачата, която се решава в три измерения в кристала. На фиг. 30-1, *а* е показан общ вид на рисунка върху тапет. Един и същ елемент се повтаря систематично и това може да продължава до безкрайност.



Фиг. 30-1. Рисунка върху тапети, която се повтаря в двете измерения

Геометричните характеристики на тази рисунка, които отразяват само нейното свойство да се повтаря и не се отнасят до геометрията на самото цвете или до неговите художествени достойнства, са показани на фиг. 30-1, *б*. Ако вземете която и да е точка за отправна, ще можете да намерите *еквивалентна на нея* точка, като се преместите на разстояние *а* по направлението на стрелката 1. Можете да попаднете пак в еквивалентна точка, ако се преместите на разстояние *b* по направлението на другата стрелка. Разбира се, има още много други такива направления. Така можете да се отправите от точка α, за да достигнете еквивалентната точка β, но този преход може да се разглежда като комбинация от преходи първо по посоката 1 и след това по посоката 2. Едно от основните свойства на клетката е, че тя може да се описва посредством двата най-къси прехода към съседните еквивалентни положения. Под „еквивалентни“ положения разбираме такива, че в което и от тях да се намирате, като се огледате наоколо, ще видите точно същото, каквото и от всяко друго положение. Това е фундаментално свойство на кристалите. Единствената разлика е, че кристалът има три, а не две измерения и, естествено, всеки елемент от решетката представлява не цвете, а някаква комбинация от атоми (например шест атома водород и два атома въглерод), която систематично се повтаря. Подреждането на атомите в кристала може да се изследва експериментално посредством дифракция на рентгенови лъчи. Ние споменахме накратко за този метод по-рано и няма да добавяме тук нещо повече към казаното. Ще отбележим само, че точното разполо-

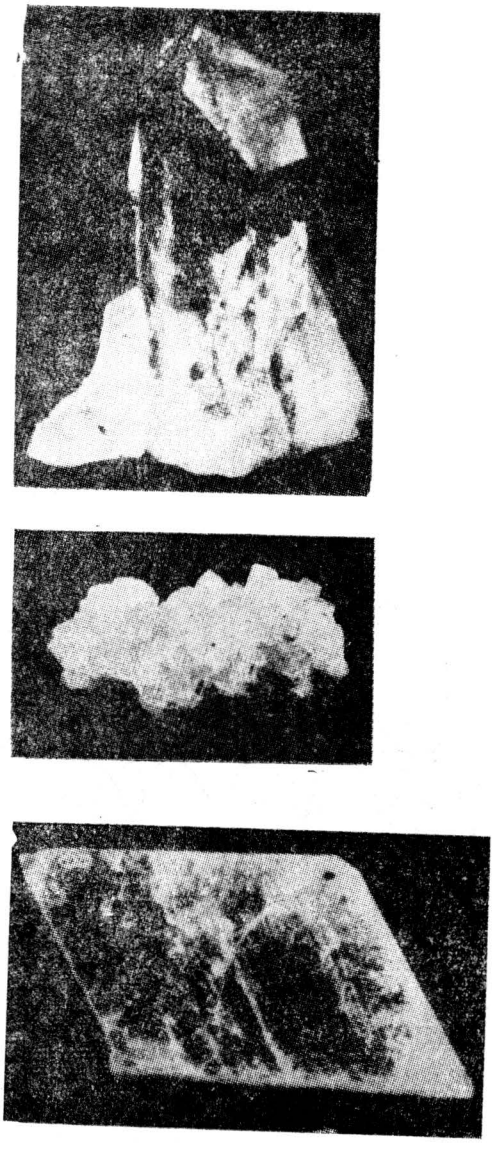
жение на атомите в пространството е установено за повечето прости кристали, а също и за немалко твърде сложни кристали.

Вътрешното устройство на кристала се проявява различно. Първо, силата, която свързва атомите в едни направления, е по-голяма, а в други — по-малка. Това означава, че има определени равнини, по които кристалът може да се разцепи по-лесно, отколкото по другите. Те се наричат равнини на цепене. Ако ударим кристала с нож, той ще се разцепи предимно по такава равнина. Второ, вътрешната структура често се проявява между другото във формата на кристала. Представете си, че в някакъв разтвор се образува кристал. В разтвора плават атоми, които в края на краищата се включват в строя, когато намерят положение, отговарящо на минимална енергия (все едно, че тапетите се образуват от цветя, плаващи в различни посоки, докато случайно някое от тях не се захване здраво за определена точка, след което другите да започнат да се подреждат около него в правилна система, докато клетката постепенно израсне). Вие вероятно се досещате, че в едни направления кристалът ще расте по-бърже, отколкото в други, като приема при това определена геометрична форма. Именно поради тази причина външната повърхност на много кристали носи върху себе си отпечатък от вътрешното разположение на атомите.

Като пример на фиг. 30-2, *а* е показана типична форма на кварцов кристал, чиято клетка е хексагонална. Ако внимателно разгледате този кристал, ще забележите, че неговите стени представляват не много правилни шестоъгълници. Те са неправилни, защото техните страни нямат еднакви дължини — даже често тези дължини са съвсем различни. Но в едно отношение този шестоъгълник е съвсем правилен: ъглите между ръбовете са точно по 120°. Работата е ясна, размерите на една или друга стена са определени от случайността в процеса на растежа, но в *ъглите* се проявява геометрията на вътрешното устройство. Поради това кристалите — например на кварца — имат различна форма, но ъглите между съответните ръбове и стени са винаги едни и същи.

Вътрешното геометрично устройство на кристала натриев хлорид може лесно да се разбере от неговата външна форма. На фиг. 30-2, *б* е показана типична форма на зрънце сол. Това пак не е съвършен куб, но стените са точно перпендикулярни една към друга.

По-сложен кристал — това е например кристалът на слюдата, който има формата, показана на фиг. 30-2, *в*. Този кристал е извънредно анизотропен — той е много здрав в определено направление (на фигурата — хоризонтално), по което трудно може да се разбие, докато по друго направление (вертикалното) той се цепи леко. Обикновено той се използува за получаване на много здрави и тънки листове. Слюдата и кварцът са примери за природни минерали, съдържащи силиций. Трети минерал, който съдържа силиций, е азбестът. Той притежава интересно свойство — в две определени направления може да се разтегля лесно, но има трето направление, в което не се поддава на разтегляне. Възниква впечатлението, че той е направен от много здрави дълги нишки.



Фиг. 30-2. Природен кристал на кварц (*а*), зрънце сол (*б*) и слюда (*в*)

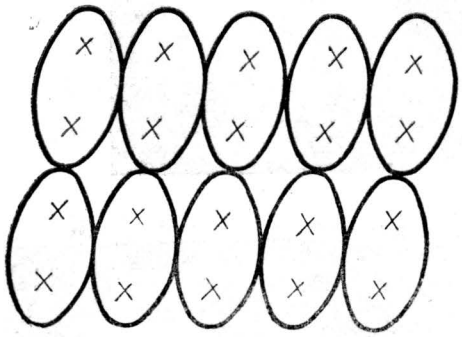
30-2. Химически връзки в кристалите

Механичните свойства на кристалите несъмнено зависят от вида на химическите връзки между атомите. Поразителната разлика в здравината на слюдата по различните направления зависи от характера на междуатомната връзка по тези направления. Вероятно вече са ви разказвали на лекциите по химия за различните типове химическа връзка. Преди всичко има йонни връзки, ние вече говорихме за тях, когато разглеждахме натриевия хлорид. Грубо казано, натриевите атоми губят по един електрон и стават положителни йони; атомите на хлора приемат по един електрон

и стават отрицателни йони. Положителните и отрицателните йони се разполагат в тримерен шахматен ред и се удържат на местата си от електрическите сили.

Ковалентната връзка (когато електроните принадлежат едновременно на два атома) се среща по-често и обикновено е много по-здрава. Например в диаманта атомите на въглерода са свързани посредством ковалентни връзки с най-близките си съседи по четирите направления и затова кристалът е толкова твърд. Ковалентна връзка има и между силиция и кислорода в кварцовия кристал, но там връзката е всъщност само частично ковалентна. Този кристал е йонен до известна степен, тъй като в него електроните се разпределят неравномерно между двата вида атоми, които вследствие на това се оказват частично заредени. Природата не е тъй проста, както ние се стремим да я представим: съществуват всевъзможни градации, между ковалентната и йонната връзка.

В кристалите на захарта връзката е от друг тип. Те се състоят от големи молекули, чиито атоми са свързани силно с ковалентна връзка, така че молекулата има стабилна структура. Тъй като силните връзки са изцяло наситени, притеглянето между отделните молекули е сравнително слабо. В такива *молекулни* кристали молекулите запазват, така да се каже, своята индивидуалност и тяхното вътрешно устройство може да се изобрази както на фиг. 30-3. Тъй като молекулите не се държат много здраво една за друга, кристалът лесно може да бъде разбит. Такива кристали рязко се отличават от кристалите, подобни на диаманта. Последният не е нищо друго освен една гигантска молекула, която не може да бъде разкъсана, без да се нарушат силните ковалентни връзки.



Фиг. 30-3. Решетка на молекулен кристал

Друг пример за молекулен кристал може да бъде парафинът.

Граничен случай на молекулен кристал са веществата от типа на твърдия аргон. Там притеглянето между атомите е незначително — всеки атом представлява напълно наситена едноатомна „молекула“. Обаче при много ниски температури топлинното движение е толкова слабо, че нищожните междуатомни сили могат да принудят атомите да се подредят правилно, подобно на картофи, натъпкани плътно в тенджера.

Металите представляват съвсем особена класа вещества. Там връзката има съвсем друг характер. В метала връзките възникват не между съседните атоми, а представляват свойство на целия кристал. Валентните електрони принадлежат не на един-два атома, а на кристала като цяло. Всеки атом влага своя електрон в общия запас от електрони и положителните атомни йони като че ли плават в океана от отрицателни електрони. Електронният океан подобно на лепило задържа йоните заедно.

Тъй като в металите няма особени връзки по различните направления, там връзката зависи слабо от направлението. Обаче металите все още са кристални тела, тъй като пълната енергия приема манимална стойност, когато йоните образуват подредена система (въпреки че енергията на най-изгодното подреждане обикновено не е много по-малка от енергията при други възможни разположения). В първо приближение атомите на много метали са подобни на малки топчета, опаковани с максимална плътност.

30-3. Растеж на кристалите

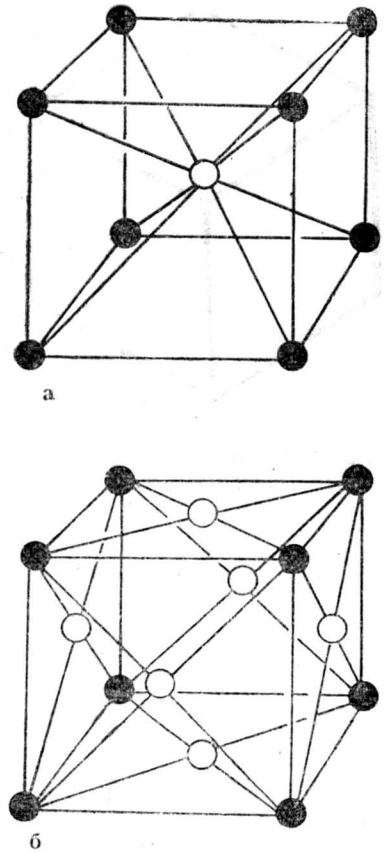
Опитайте се да си представите образуването на кристалите в земята в естествени условия. В повърхностния слой на земята всички видове атоми са размесени. Дейността на вулканите, вятъра и водата постоянно ги смесва и те непрекъснато се разбъркват и разместват. Но независимо от това, като по чудо, атомите на силиция постепенно започват да се издирват един-друг, а след това намират и кислородни атоми, за да образуват заедно кремъкът. Към едни атоми се присъединяват други, образувайки кристал, и хаотичната смес започва да се подрежда. През това

време някъде наблизо атомите на хлора и натрия започват да строят кристали на солта.

Как става така, че кристалът, който започва да се изгражда, позволява да се присъединяват към него само атоми от определен вид? Това е така, защото системата като цяло се стреми към минималната възможна стойност на енергията. Кристал, който расте, ще приеме нов атом, ако при това енергията му ще се окаже минимална. Но откъде кристалът *знае*, че поставянето именно на силициев (или кислороден) атом в определеното място ще доведе до най-малка стойност на енергията? Той узнава това по метода на пробите и грешките. В течността всички атоми се намират в непрекъснато движение. Всеки атом се удря в съседните приблизително 10^{13} пъти в секунда. Ако той се удря в растящия кристал, вероятността да отлети обратно ще бъде малко по-малка в подходящите места, където енергията е по-малка. Продължавайки тези проби в течение на милиони години с честота 10^{13} пъти в секунда, атомите постепенно се нагласяват на местата, в които намират за себе си положение с най-малка енергия. В края на краищата от тях се получават големи кристали.

30-4. Кристални решетки

Разположението на атомите в кристала — кристалната *решетка* — може да приема множество различни форми. Първоначално ние ще опишем най-простите решетки, които са характерни за повечето метали и инертните газове в твърдо състояние. Това са кубичните решетки, които могат да бъдат два вида: обемно-центрирани (фиг. 30-4, *а*) и стеноцентрирани* (фиг. 30-4, *б*) кубични решетки. Разбира се, на рисунките е показан само един „куб“ от решетките; вие трябва да си представите мислено, че всичко това се повтаря в трите измерения до безкрайност. За простота на рисунките са показани само центровете на атомите. В истинските кристали атомите приличат по-скоро на допиращи се едно до друго топчета. Тъмните и светли топчета на показаните рисунки могат изобщо да означават както различни, така и еднакви видове атоми. Така желязото има обемно-центрирана кубична решетка при ниски температури и стеноцентрирана кубична решетка при по-високи температури. Физическите свойства на тези две кристални форми са съвсем различни.

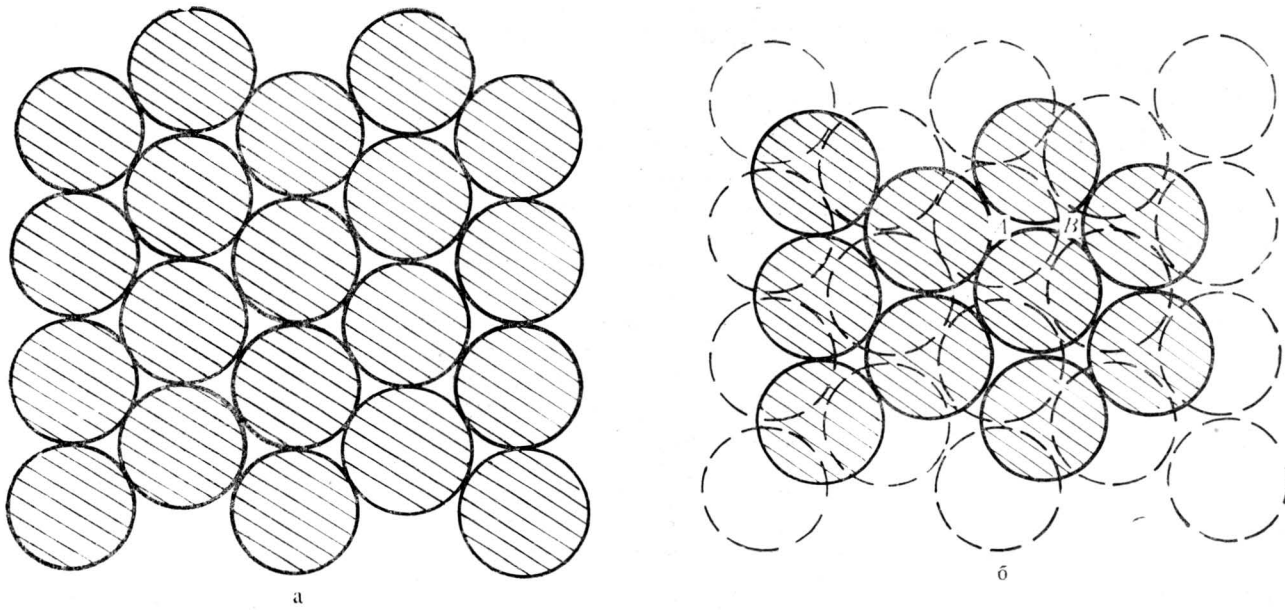


Фиг. 30-4. Елементарна клетка на кубичен кристал:
а — обемноцентрирана; *б* — стеноцентрирана

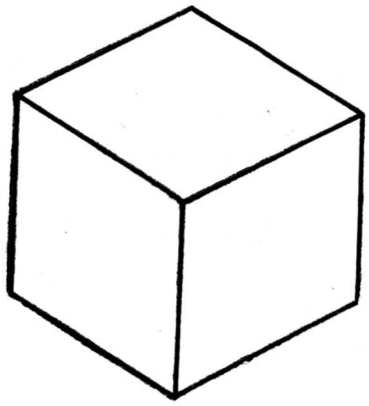
Но как възникват различните форми? Представете си, че трябва да опаковате атомите-топчета колкото се може по-плътно. Би могло да се започне със слой, в който атомите са подреден. в „хексагонална плътна опаковка“, както е показано на фиг. 30-5, *а* След това може да се построи втори слой, подобен на първия, само че отместен по хоризонтално направление, както е показано на фиг. 30-5, *б*. След това отгоре може да се сложи и трети слой. И сега, внимание! *Третият* слой може да се наложи по *два* различни начина. Ако започнете да изграждате третия слой, като поставите един атом в точката *А* на фиг. 30-5, *б*, тогава всеки атом от третия слой ще се окаже точно над атом от първия долен слой. Ако започнете изграждането на третия слой, като поставите един атом в точка *В*, то тогава всички атоми от третия слой ще се намират точно над центровете на триъгълниците, образувани от три атома от долния слой. Всяка друга начална точка е еквивалентна или на *А*, или на *В*, така че съществуват само два начина за разполагане на третия слой.

Ако третият слой има атом в точката *В*, кристалната решетка ще бъде стеноцентрирана кубична, но това се вижда под някакъв ъгъл. Забавно е, че започвайки с шестоъгълници, може да се стигне до кубическа структура. Но обърнете внимание, че кубът, разглеждан под определен ъгъл, има очертанието на шестоъгъл-

* Освен това една такава решетка може да бъде и проста, т. е. нецентрирана (заб. прев).



Фиг. 30-5. Строеж на хексагонална решетка с плътно опаковане



Фиг. 30-6. Какво е това? Шестоъгълник или куб?

ник. Например фиг. 30-6 може да изобразява както плосък шестоъгълник, така и куб в перспектива.

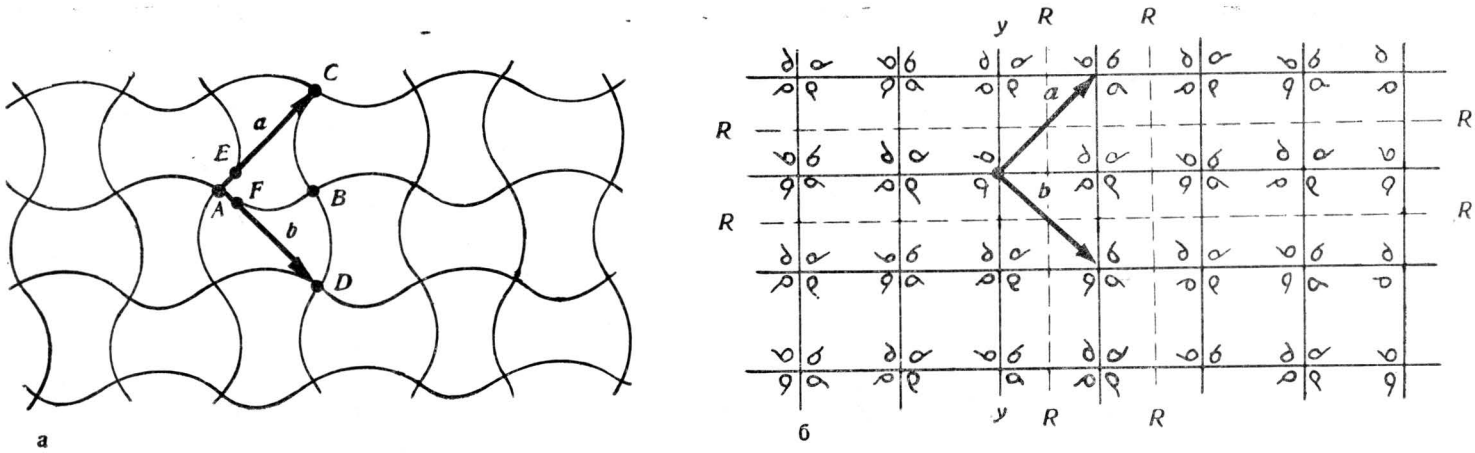
Ако третият слой се добави, като се започне с атом в точка B (фиг. 30-5, *б*), кубическа структура изобщо няма да се получи. В този случай решетката ще има само хексагонална симетрия. Ясно е, че и двете възможности, които описахме, дават еднакво плътна опаковка.

Някои метали (например среброто и медта) избират първата алтернатива — тяхната решетка е стеноцентрирана кубична. Други (например берилият и магнезият) предпочитат втората възможност и имат хексагонални кристали. Очевидно образуването на една или друга решетка не може да зависи само от начина на опаковането, но трябва да се определя и от други фактори. По-специално съществена се оказва слабата зависимост на междуатомните сили от посоката (или в случая на металите от енергията на електронния океан). Всички тези неща несъмнено ще ви станат известни от курса по химия.

30-5. Симетрии в две измерения

Сега ми се иска да обсъдим някои свойства на кристалите от гледна точка на тяхната вътрешна симетрия. Основното свойство на кристала се състои в това, че ако се преместите на един период от решетката от един атом към друг атом, еквивалентен на първия, ще попаднете в същото обкръжение. Това е фундаментално положение. Но ако вие самите бяхте атоми, бихте могли да забележите и друго преместване, което би ви довело до същото обкръжение, т. е. в друга възможна „симетрия“. На фиг. 30-7, *а* е показана още една възможна рисунка за тапети (въпреки че вероятно никога не сте виждали такива тапети). Да предположим, че ние сравняваме обкръженията в точките A и B. Първоначално бихте могли да помислите, че те са еднакви. Не съвсем. Точките C и D са еквивалентни на A, но окръжението на B е подобно на окръжението на A само ако всичко се обърне като че ли в огледало.

В тази рисунка има и други видове „еквивалентни“ точки. Така E и F имат „еднакви“ окръжения, с изключение на това, че едното е завъртяно на 90° спрямо другото. Рисунката е особена. Завъртане на 90° около такава точка като A, повторено произволен брой пъти, отново дава същата рисунка. Кристал с



Фиг. 30-7. Рисунка на тапети с висока симетрия

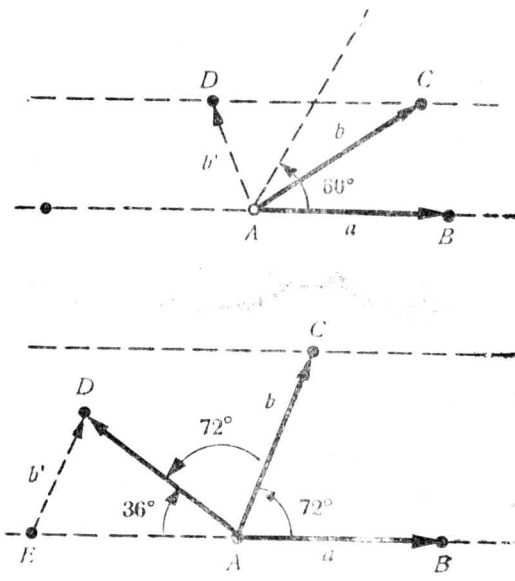
такава структура би имал на повърхността си прави ъгли, но вътрешно той е устроен по-сложно, отколкото прост куб.

Сега, след като описахме редица частни случаи, да се опитаме да изведем всички възможни видове симетрия, каквито може да има един кристал. Преди всичко да видим какво се получава в равнината. *Плоската* решетка може да бъде описана с помощта на два така наречени *основни* вектора, които свързват една точка от решетката с двете *най-близки* еквивалентни точки. Двата вектора **1** и **2** са основните вектори на решетката на фиг. 30-1. Двата вектора **a** и **b** на фиг. 30-7 *а* са основните вектори на тази рисунка. Ние бихме могли, разбира се, да заменим **a** с **-a** или **b** с **-b**. Тъй като **a** и **b** имат еднакви големини и перпендикулярни посоки, въртенето на 90° привежда **a** във **b** и **b** в **a** и отново дава същата решетка.

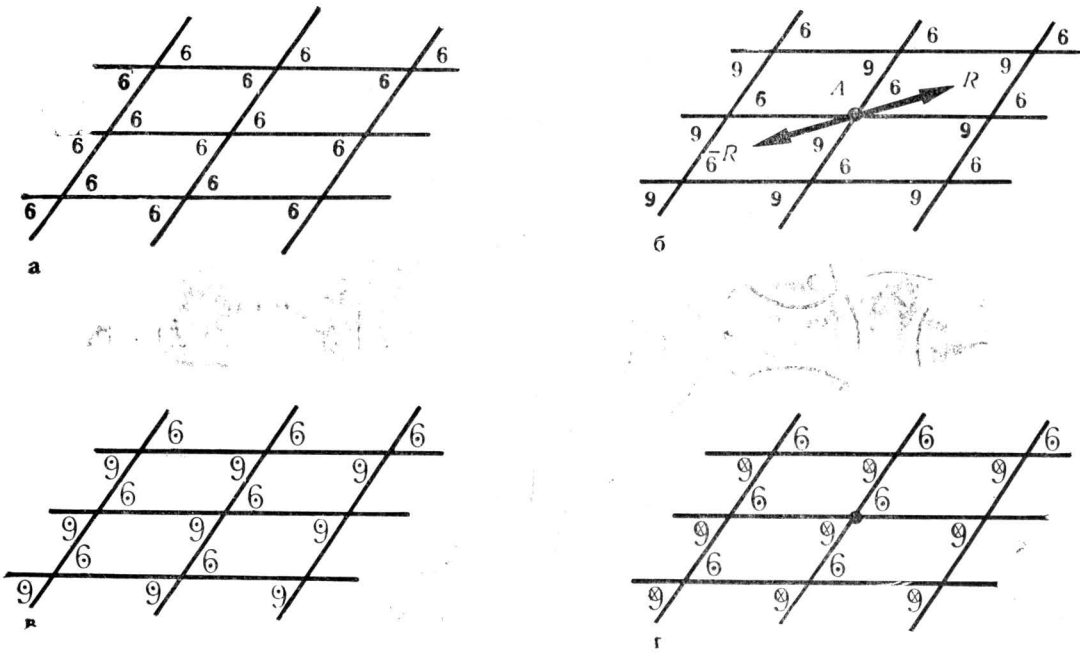
И тъй, виждаме, че съществуват решетки, които имат „четиристранна" симетрия. По-рано ние описахме плътна опаковка, основана на шестоъгълник, която имаше шестостранна симетрия. Завъртането на набора от кръгчета, показан на фиг. 30-5, *а* на ъгъл 60° около центъра на всяко топче, привежда рисунката сама в себе си.

Какви видове симетрия на въртене съществуват още? Може ли да има например симетрия на въртене от пети или осми ред? Лесно може да се разбере, че те са невъзможни. Единствената симетрия, свързана с фигура, която има повече от четири страни, е симетрията от шести ред. Преди всичко да покажем, че симетрия с ред повече от шести е невъзможна. Да се опитаме да си представим решетка с два равни по големина основни вектора, които сключват ъгъл, по-малък от 60° (фиг. 30-8, *а*). Ние трябва да допуснем, че точките B и C са еквивалентни на A и че **a** и **b** са най-късите вектори, отложени от A до еквивалентните съседи. Но това е безусловно невярно, тъй като разстоянието между B и C е по-малко, отколкото разстоянието между всяка една от тези точки и точката A. Трябва да съществува съседна точка, еквивалентна на A, която е по-близко до A, отколкото B и C. Тогава ние би трябвало да изберем **b′** като един от основните вектори. Поради това ъгълът между основните вектори трябва да бъде 60° или още повече. Октагонална симетрия е невъзможна.

А как стои въпросът с петорната симетрия? Ако предположим, че основните вектори **a** и **b** имат еднаква дължина и образуват ъгъл $2\pi/5 = 72°$ (фиг. 30-8, *б*), то трябва да съществува еквивалентна точка от решетката в D под ъгъл 72° към линията AC. Но векторът **b′** от E към D тогава ще бъде по-къс от **b** и **b** вече няма да бъде основен вектор. Петорна симетрия не може да съществува. Единствените възможности, които не водят до подобни трудности, това са $\theta = 60$, 90 или 120°. Очевидно, допустими са също нула и 180°. Полученият от нас резултат може



Фиг. 30-8. Симетрия на въртене над шести ред е невъзможна (*а*); симетрия на въртене от пети ред е невъзможна (*б*)



Фиг. 30-9. Операцията на симетрия, наричана инверсия:

а — рисунката се мени; *б* — рисунката не се променя при трансформацията $R \to -R$; *в* — в три измерения рисунката не е симетрична след операцията инверсия; *г* — рисунката е симетрична в трите измерения

да се изрази още и така: съществуват рисунки, които не се променят при завъртане на пълен оборот (при което нищо не се променя), втори тип рисунки не се променят при завъртане на половин оборот, трети — при завъртане на една трета оборот, четвърти — на една четвърт оборот и пети — на една шеста оборот. И с това се изчерпват всички възможни симетрии на въртене в равнината — те са всичко пет[1]. Ако $\theta = 2\pi/n$, говорим за „n-кратна“ симетрия, или симетрия от n-ти ред. Казваме, че рисунка, за която n е равно на 4 или 6, притежава по-„висока симетрия“, отколкото рисунка с n, равно на 1 или 2.

Да се върнем към фигура 30-7, *а*. Виждаме, че рисунката там притежава четирикратна симетрия на въртене. На фиг. 30-7, *б* ние сме нарисували друго разположение, което има същите свойства на симетрия, както и на фиг. 30-7, *а*. Малките фигурки, прилични на запетайка, представляват асиметрични обекти, които служат за определяне на симетрията на рисунката вътре във всяко квадратче. Забележете, че запетайките в съседните квадратчета са преобърнати така, че елементарната клетка е по-голяма от едно квадратче. Ако вместо запетайки бяха нарисувани само точки, рисунката пак щеше да има четирикратна симетрия, но елементарната клетка би била по-малка. Да разгледаме внимателно фиг. 30-7; ще забележим, че те притежават и други видове симетрия. Така отражението спрямо всяка една от пунктираните линии R—R възпроизвежда рисунката без изменения. Но това още не е всичко. У тях има още един тип симетрия. Ако рисунката се отрази спрямо линията y—y и след това се отмести на едно квадратче вдясно или вляво, отново ще се получи първоначалната рисунка. Линията y—y се нарича линия на плъзгаща симетрия.

С това се изчерпват всички типове симетрии в двумерното пространство. Има още една пространствена операция на симетрия, която в равнината е еквивалентна на въртене на 180°, обаче в тримерното пространство тя не се свежда към такова въртене, а е съвсем друга операция. Аз говоря за инверсията. Под инверсия

[1] Подразбира се, че симетриите на въртене са *съчетани* със симетрии на пренос (транслационни симетрии) по две направления. Ако не се предполагат тези транслационни симетрии, нищо не ограничава кратността на симетрията на въртене (бел. бълг. прев.).

подразбираме такава операция, при която всяка точка, на която отговаря радиус-вектор **R** (например точката A на фиг. 30-9, *б*), се пренася в точката с радиус-вектор — **R**.

Инверсията на рисунката *а* на фиг. 30-9 дава нова рисунка, а инверсията на рисунката *б* води до същата рисунка. На двумерната рисунка (вие може да видите това) инверсията на рисунката *б* в точката A е еквивалентна на завъртане на 180° около същата точка. Да предположим обаче, че ние сме направили рисунката на фиг. 30-9, *б* тримерна, като сме поставили стрелки върху малките шесторки и деветки, които гледат от страницата нагоре. В резултат на инверсия в тримерното пространство всички стрелки ще се преобърнат и ще се насочат надолу, така че рисунката няма да се възпроизведе. Ако означим върховете и опашките на стрелките с точки и кръгчета, ще можем да образуваме тримерна рисунка (фиг. 30-9, *в*), която е несиметрична спрямо инверсията, или ще можем да получим рисунка, която притежава такава симетрия (фиг. 30-9, *г*). Забележете, че тримерната инверсия не може да се получи от никакви комбинации на въртене.

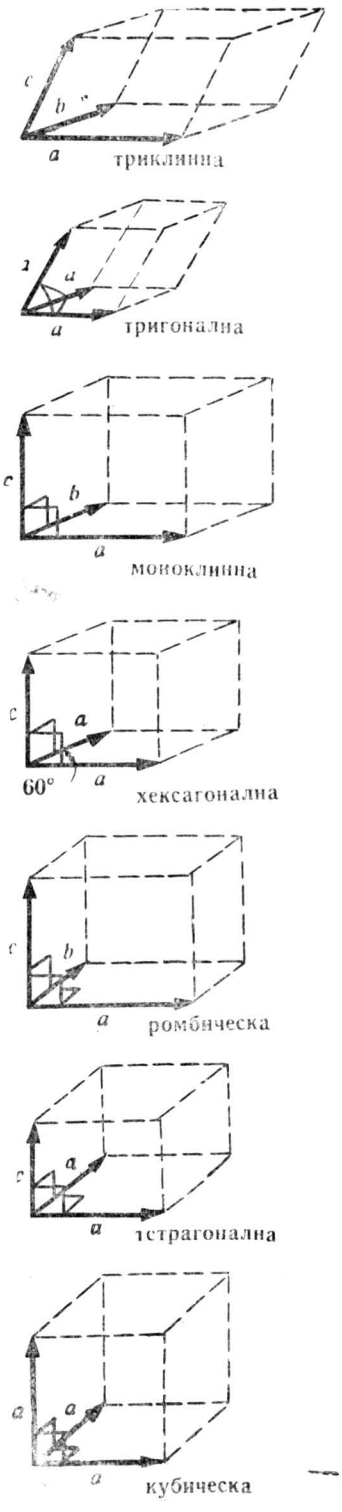
Ако охарактеризираме „симетрията" на рисунката (или решетката) посредством различните операции на симетрия, които току-що описахме, ще се окаже, че в двумерния случай съществуват 17 различни форми на рисунките. Рисунка с най-ниската възможна симетрия е изобразена на фиг. 30-1, а рисунка с една от най-високите симетрии — на фиг. 30-7. Намерете сами всичките 17 възможни форми на рисунките.

Удивително е колко малко типове от тези 17 се използуват при изготвянето на тапети и тъкани! Винаги виждаш все едни и същи 3 или 4 основни типа. Защо това е така? Нима фантазията на художниците е така бедна или може би много от възможните типове рисунки няма да радват окото?

30-6. Симетрии в три измерения

Досега говорихме само за рисунки в две измерения. Всъщност нас ни интересуват начините за разместване на атомите в три измерения. Преди всичко очевидно е, че тримерният кристал има три основни вектора. Ако се заинтересуваме от възможните операции на симетрия в три измерения, ще констатираме, че съществуват 230 възможни типа симетрии! Въз основа на някои съображения тези 230 типа могат да се разделят на 7 класа, представени на фиг. 30-10. Решетката с най-малка симетрия се нарича триклинна. Нейната елементарна клетка представлява паралелепипед. Всички основни вектори имат различни дължини и няма нито една еднаква двойка ъгли между тях. И никаква симетрия на въртене или огледална симетрия тук няма. Обаче има още една операция: при инверсия във възела елементарната клетка може да се мени, а може и да не се мени [под инверсия в три измерения ние отново подразбираме, че пространственото отместване **R** се заменя с — **R**, или, с други думи, точката с координати (x, y, z) преминава в точка с координати $(-x, -y, -z)$]. Поради това симетрията на триклинната решетка може да бъде само два типа—с център на инверсия и без него. Досега смятахме, че всички вектори са различни и разположени под произволни ъгли. Ако сега всички вектори са еднакви и ъглите между тях са равни, се получава тригоналната решетка, показана на рисунката. Клетката на тази решетка може да има допълнителна симетрия, тя може още и да не се променя при въртене около най-големия телесен диагонал.

Ако един от основните вектори, да речем **c**, е насочен под прав ъгъл към двата останали, получаваме моноклинна елементарна клетка. Тук е възможна нова симетрия — въртене на 180° около **c**. Хексагоналната решетка — това е частен случай, при който векторите **a** и **b** са равни и ъгълът между тях е 60°. Така че въртенето на 60—120 или 180° около вектора **c** довежда до същата решетка (за определени вътрешни типове симетрия).



Фиг. 30-10. Седем класа кристални решетки

Ако всичките три основни вектора са перпендикулярни един на друг, но не са равни по големина, се получава ромбична клетка. Фигурата е симетрична спрямо въртене на 180° около трите оси. Типове симетрия от по-висок ред възникват при тетрагоналната клетка, всичките ъгли на която са прави и двата основни вектора са равни. Накрая съществува още и кубичната клетка, която е най-симетрична от всички.

Основният смисъл на целия този разговор за типовете симетрия се състои в това, че вътрешната симетрия на кристала се проявява (понякога по един твърде тънък начин) в макроскопическите физически свойства на кристала. В глава 31 ние ще видим например, че електрическата поляризация на кристала, общо казано, представлява тензор. Ако описваме този тензор като елипсоид на поляризацията, можем да докажем, че някои типове симетрия на кристала се проявяват в този елипсоид. Така кубическият кристал е симетричен спрямо въртене на 90° около всяка една от трите взаимно перпендикулярни направления. Единственият елипсоид с такива свойства очевидно това е сферата. *Кубическият кристал трябва да бъде изотропен диелектрик.*

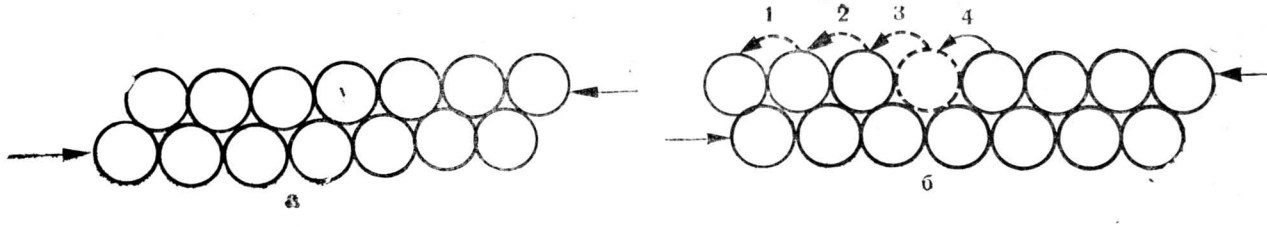
От друга страна тетрагоналният кристал притежава симетрия на въртене от четвърти ред. Двете главни оси на неговия елипсоид трябва да бъдат равни по големина, а третата трябва да бъде успоредна на оста на кристала. Аналогично, тъй като ромбичният кристал притежава симетрия на въртене от втори ред спрямо три перпендикулярни оси, неговите оси трябва да съвпадат с осите на елипсоида на поляризацията. Точно така една от осите на моноклинния кристал трябва да бъде успоредна на една от главните оси на елипсоида, въпреки че за другите оси не бихме могли да кажем нищо. Триклинният кристал не притежава симетрия на въртене, така че неговият елипсоид може да има произволна ориентация.

Както виждате, можем да прекараме времето си полезно, като измисляме всевъзможни типове симетрии и ги свързваме с всевъзможни физически тензори. Ние разгледахме само тензора на поляризацията, тук работата беше проста, но за други тензори, например за тензора на еластичността, е по-трудно да се разсъждава. Съществува дял от математиката, наречен „теория на групите“, който се занимава с такива неща, но обикновено всичко, което е необходимо, може да се съобрази, като се опираме само на здравия смисъл.

30-7. Якост на металите

Казахме, че металите обикновено имат проста кубична кристална структура; сега ще обсъдим техните механични свойства, които зависят от тази структура. Общо казано, металите са много „меки“, защото един слой от кристала лесно може да се принуди да се приплъзне над другия. Вие навярно ще помислите: „Това вече е глупаво — металите са твърди.“ Не, монокристалът на метала се деформира лесно.

Да разгледаме два слоя от кристал, подложен на действието на режеща сила (фиг. 30-11, *а*). Вероятно вие първоначално ще решите, че целият слой ще се противи на отместването, докато силата не стане достатъчно голяма, за да го отмести целия „над гърбиците“, на едно място вляво. Въпреки че приплъзването по



Фиг. 30-11. Плъзгане на кристални равнини

някаква плоскост е възможно, всичко останало съвсем не е така (иначе съгласно пресмятанията би се получило, че металът е много по-як, отколкото той е в действителност). В действителност работата изглежда повече така, като че ли атомите прескачат подред: отначало прескача първият атом отляво, след това този, който е до него и т. н., както е показано на фиг. 30-11, *б*. В резултат празното място между два атома бързо пътешествува на дясно и целият втори ред се отмества на едно междуатомно разстояние. Приплъзването става така, защото за прехвърлянето на атома през гърбиците един по един е необходима много по-малко енергия, отколкото за издигането на целия ред. Щом като силата нарасне до стойност, достатъчна за да започне процесът, целият процес протича много бързо.

Оказва се, че в реалния кристал приплъзването възниква поредно: отначало в една плоскост, след това завършва там и започва на друго място. Защо започва и защо завършва е съвършено непонятно. В действителност е много странно, че последователните области на приплъзване обикновено са разположени твърде рядко. На фиг. 30-12 е представена фотографията на един много малък и тънък кристал мед, който е бил разтегнат. Вие може да забележите различните плоскости, в които е възникнало приплъзване.

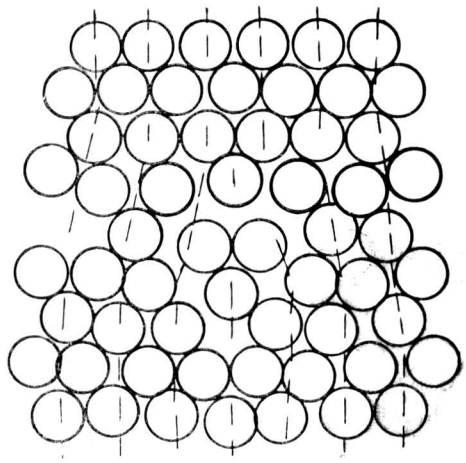


Фиг. 30-12. Малко кристалче мед след разтегляне

Неочакваното приплъзване на отделните кристални равнини може лесно да се забележи, ако се вземе късче оловна жичка (която се съдържа в големи кристали) и се разтегля, като се държи близко до ухото. Вие ясно ще различите звуците „тик-тик", които се получават, когато равнините се зацепват в нови положения една след друга.

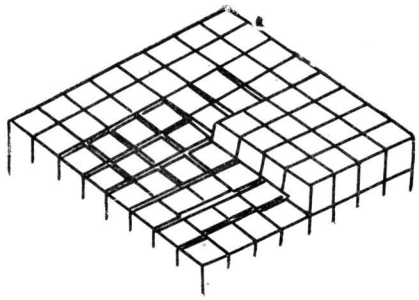
Проблемът за „липса" на атоми в един от редовете е по-сложен, отколкото може да изглежда при разглеждането на фиг. 30-11. Когато слоевете са повече, ситуацията повече прилича на това, което е показано на фиг. 30-13. Подобен дефект в кристала се нарича дислокация. Смята се, че такива дислокации възникват при образуването на кристала или в резултат на драскотини, те твърде свободно могат да преминават през кристала. Големите нарушения възникват вследствие движението на много такива дислокации.

Дислокациите могат свободно да се придвижват. Това значи че за тяхното придвижване е необходима много малко допълнителна енергия, ако само целият останал кристал има съвършена решетка. Но те могат и да „застинат", срещайки някакъв друг дефект в кристала. Ако за преминаването на дефекта е необходима много енергия, те се спират. Това е именно механизмът, който придава здравина на несъвършените кристали на метала. Кристалите на чистото желязо са съвсем меки, но малка концентрация атоми на някакви примеси може да предизвика достатъчен брой дефекти, които да противостоят на дислокациите. Както знаете, стоманата, която се състои главно от желязо, е много твърда. За да се получи стомана, при разтопяването към желязото се примесва малко въглерод. При бързо охлаждане на разтопената маса въглеродът се отделя във вид на малки зрънца, образувай ки множество микроскопични нарушения в решетката. Дислока циите вече не могат свободно да се придвижват и металът става твърд.

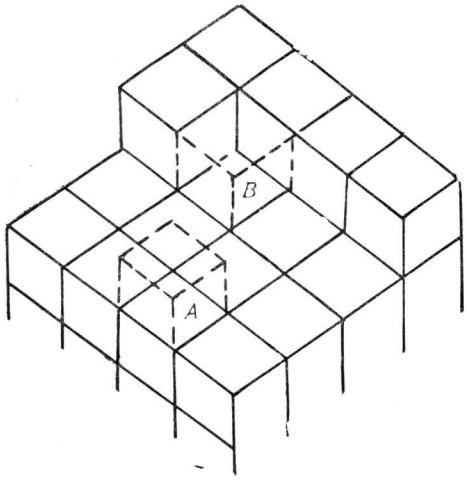


Фиг. 30-13. Дислокация в кристала

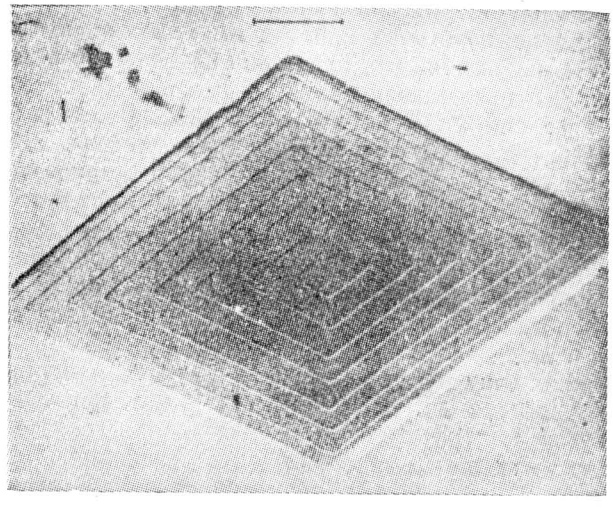
Чистата мед е много мека, но тя може да се „закали". Това се прави чрез сгъване и разгъване в различни страни. В такъв случай се образуват много различни дислокации, които взаимодействуват помежду си и така увеличават взаимно своята подвижност. Може би вие сте виждали фокуса, при който се взима късче „мека" мед и леко се обвива нечия китка, като с гривна. В този момент медта става закалена и става много трудно тя да се развие. „Закаленият" метал от типа на медта може отново да се направи мек с помощта на отвръщане при висока температура. Топлинното движение на атомите „размразява" дислокациите и създава отново отделни големи кристали. Може да се разказва много за дислокациите. Така досега ние описахме само така на-



Фиг. 30-14. Винтова дислокация



Фиг. 30-15. Схематично представяне на растежа на кристала



Фиг. 30-16. Кристал парафин, израснал около винтова дислокация

вречените „дислокации на хлъзгане“ (краеви дислокации). Съществуват още много други в идове, в частност винтовата дислокация, показана на фиг. 30-14. Такива дислокации често играят важна роля в растежа на кристалите.

30-8. Дислокации и растеж на кристалите

Растежът на кристалите дълго време е бил една от най-големите загадки на природата. Ние вече описахме как един атом след многократни проби може да определи къде му е по-добре — в кристала или вън от него. Оттук следва, че всеки атом трябва да намери положение с най-малка енергия. Обаче атом, попаднал върху нова повърхност, е свързан само с една-две връзки с долните атоми и неговата енергия при това не е равна на енергията на този атом, който е попаднал в ъгъла, където е заобиколен от трите страни с други атоми. Да си представим растящия кристал като набор от кубчета (фиг. 30-15). Ако поставим ново кубче, да речем в положение *A*, то ще има само един от тези шест съседа, с които ще бъде обградено в края. А щом като не стигат толкова връзки, то и неговата енергия няма да бъде много малка. По-изгодно е положението *B*, където кристалът вече има половината от падащите му се връзки. И действително, кристалите растат, присъединявайки нови атоми към участъците от типа *B*.

Но какво ще стане, когато редът бъде завършен? За да се започне нов ред, атомът трябва да заседне, да има връзка от две страни, а това също е малко вероятно. Даже и да заседне той, какво ще стане, когато целият слой бъде завършен? Как би могъл да се започне нов слой? Един от възможните отговори е, че кристалът предпочита да расте по дислокациите, например по винтовата дислокация, подобна на тази, която е показана на фиг. 30-14. С прибавянето на кубчета към този кристал винаги остава място, където може да се получат три връзки. Следователно, кристалът предпочита да расте с враснали вътре дислокации. Илюстрация на такъв спирален растеж представлява фотографията на монокристал на парафин (фиг. 30-16).

30-9. Модел на кристала по Брег и Най

Ние, разбира се, не може да видим какво става с отделните атоми в кристала. Както сега разбирате, съществуват още много сложни явления, които трудно могат да се опишат количествено. Лоуренс Брег и Дж. Най са измислили модел на механическия кристал, който удивително моделира множество явления, възникващи, както изглежда, в реалния метал. Най-добре е да прочетете тази работа сами; в нея е описан и самият метод, и получените с негова помощ резултати [статията е била напечатана в Proceedings of the Royal Society of London, **190**, 474 (1947)].

Приложение

Динамичен модел на кристална структура
Л. Брег и Дж. Най

Кристалната структура на метала се моделира от съвкупност на мехурчета с диаметър 1 mm и по-малки, плаващи върху повърхността на сапунен разтвор. Мехурчетата се издухват от малка пипетка, поставена под повърхността на разтвора ; налягането на въздуха в пипетката е постоянно и размерите на мехурчетата извънредно малко се различават. Мехурчетата се прилепват едно към друго вследствие на повърхностното напрежение, като се подреждат в един слой по повърхността или образуват тримерна маса. Струпването може да съдържа стотици хиляди мехурчета и се запазва в продължение на час или повече. Струпването образува структури, които както се предполага, съществуват в металите и имитира ефекти, които вече са наблюдавани като например: образуване на граници между зърната, дислокации и други видове дефекти, процеси на приплъзване, явленията на рекристализирането и отвръщането, възникването на напрежения, свързани с „външни“ атоми.

1. Мехурчест модел

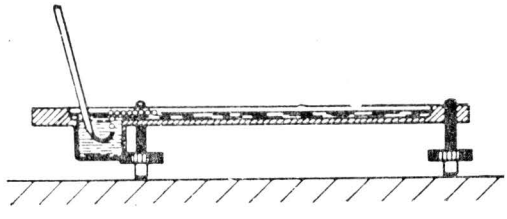
От време на време са предлагани модели на кристала, в които атомите са представени от малки плаващи или окачени магнитчета или от кръгчета, плаващи върху повърхността на водата, които се притеглят за сметка на капилярните сили.

Тези модели имат сериозни недостатъци ; например в случая на плаващите и докосващи се обекти силите на триенето пречат на тяхото свободно относително движение. Посериозен недостатък представлява ограниченият брой компоненти, защото само с голям брой компоненти е възможно да се приближим към положението на нещата в реалния кристал.

В настоящата работа е описано поведението на модел, в който атомите са представени от малки мехурчета с диаметър от 0,1 mm до 2 mm, плаващи върху повърхостта на сапунен разтвор. Тези малки мехурчета са достатъчно устойчиви за експерименти в продължение на един час и повече, те се разминават без триене и могат да бъдат изготвени в големи количества. Редица снимки за тази статия бяха направени при струпвания от 100,000 и повече мехурчета. Моделът най-близко съответствува на поведението на металната структура, защото всички мехурчета са само от един тип и се държат заедно за сметка на общото капилярно притегляне, което изобразява силите на свързване на свободните електрони в метала. Кратко описание на този модел беше дадено в работата на Брег[1].

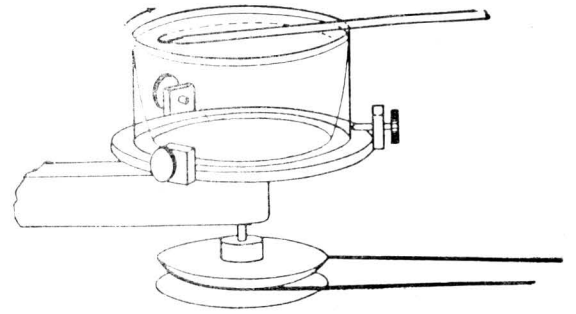
2. Начин за образуване на мехурчетата

Мехурчетата се издухват от тънка пипетка, поставена под повърхността на сапунен разтвор. Най-добрите резултати получихме с помощта на разтвор, чийто състав ни бе съобщен от г-н Грин от Кралския институт : 15,2 cm^3 олейнова киселина (двойна дестилация) грижливо се разбърква в 50 cm^3 дестилирана вода. Всичко това грижливо се смесва със 73 cm^3 10%-ов разтвор на триетаноламин и към цялата смес се долива вода до 200 cm^3. Към това се добавя 164 cm^3 чист глицерин. Сместа се оставя да се утаи и се взима чистата течност отдолу. В някои експерименти тя беше разреждана с тройно количество (по обем) вода за намаляване на вискозитета. Отворът на пипетката е разположен около 5 mm под нивото на разтвора. Постоянното налягане на въздуха (около 50-200 cm воден стълб) се поддържаше с помощта на две колби на Уйнчестър. Обикновено мехурчетата са удивително еднакви по размери. Понякога те изскачат изведнаж по един безреден начин, но това може да се избегне, като се смени пипетката или налягането. Ненужните мехурчета могат лесно да се унищожат, като се прекара слаб пламък над повърхността. На фиг. 1 е показан нашият уред. Ние сметнахме за удобно да почерним дъното на съда, защото в този случай детайлите на структурата, такива като граници на зърната и дислокациите, се проявяват по-ясно.



фиг. 1

На фиг. 2 (лист 1, стр. 425) е показана част от „плота“ или двумерен кристал от мехурчета. За правилността на разполагането може да се съди, ако снимката се погледне под малък ъгъл към равнината на страницата. Размерите на мехурчетата се менят с апертурата (размера на отвора), но не зависят по някакъв забележителен начин от налягането или дълбочината на разполагането на отвора под нивото на разтвора. Основният ефект, към който води увеличаването на налягането — това е увеличаването на скоростта на раждането на мехурчетата.



фиг. 3

Например дебелостенна тръба с вътрешен диаметър 49 μ и налягане 100 cm образува мехурчета с диаметър 1,2 mm. Тънкостенна тръбичка с вътрешен диаметър с 27 μ и налягане 180 cm образува мехурчета с диаметър 0,6 mm. Удобно е мехурчетата с диаметър от 2 до 1 mm да се нарекат „големи“ с диаметър от 0,8 до 0,6 mm —„средни“, а мехурчета с диаметър от 0,3 до 0,1 mm — „малки“, тъй като поведението на мехурчетата зависи от техните размери.

С помощта на такъв прибор ние не успяхме да намалим размерите на отвора и да получим мехурчета с диаметър, по-малък от 0,6 mm.

Тъй като беше желателно да се поставят опити с много малки мехурчета, ние наляхме сапунения разтвор във въртящ се съд и разположихме пипетката колкото е възможно по-точно, успоредно на линиите на потока. С образуването на мехурчетата те се отнасят и при постоянни условия са твърде близки по размери. Те се образуват със скорост 1000 или повече в секунда, при което се издава пронизителен звук. При въртенето на съда сапунеият разтвор рязко се вдига по неговите стени по цялата окръжност, а когато въртенето се прекратява, разтворът отнася със себе си повечето от мехурчетата. С помощта на това устройство, показано на фиг. 3, могат да бъдат получени мехурчета с диаметър до 0,12 mm. Така тънкостенна тръбичка с напречен отвор 38 μ при налягане на въздуха 190 cm воден стълб и скорост на потока при отвора 180 cm/s образува мехурчета с диаметър 0,14 mm. В този случай бе използуван съд с диаметър 9,5 cm, а скоростта на въртене достигна 6 оборота в една секунда.

На фиг. 4 (лист 1, стр. 425) са дадени увеличени снимки на тези „малки“ мехурчета, които илюстрират степента на

Тук са дадени само първите четири параграфа на статията от Proceedings of the Royal Society of London, Vol. 190, p. 471 (1947). Номерирането на листовете, върху които са поместени рисунките, в оригинала и превода не съвпадат. Литературата, дадена в края на статията, е дадена в превода под текста. — Заб. ред.

[1] W. L. Bragg, Joura. Sci. Inst., 19, 148 (1942).

тяхната правилност; при въртенето редът се получава не така пълен, както в неподвижен съд; когато гледаш в плоскостта на страницата, се вижда, че редовете са леко неправилни

Тези двумерни кристали образуват структури, които както се смята, съществуват в металите и имитират такива наблюдавани ефекти, като граници на зърната, дислокации и други дефекти, процеси на приплъзване, явлението рекристализиране и отвръщане и възникването на напрежения, предизвикани от „странични“ атоми.

3. Граници на зърната

На фиг. 5 (лист 2, стр. 426) са показани типични граници на зърната за мехурчета с диаметри съответно 1,87, 0,76 и 0,30 mm. Ширината на смутената повърхност на границата, където мехурчетата имат неправилно разпределение, обикновено е толкова по-голяма, колкото са по-малки мехурчетата. На фиг. 5, *а*, където са показани няколко съседни зърна, мехурчетата на границата между две зърна явно се придържат или към един, или към друг кристален ред. На фиг. 5, *в* се е проявил ясно „слой на Бейлби“ между две зърна. Малките мехурчета, както ще се види по-нататък, притежават по-голяма твърдост, отколкото големите, а това води до значително безредие по техните граници. Отделните зърна се виждат ясно, ако се разглеждат фотоснимки на поликристални слоеве. При подходящо осветяване самите плаващи слоеве мехурчета, разглеждани по протежение на страницата, удивително напомнят полиран и затравен метал. Често се случва, че в поликристалния плот попадат „атоми на примеси“, т. е. мехурчета, които се отличават чувствително по размери от средните, и в този случай по-голямата част от тях се разместват по границите на зърното. Би било неправилно да се твърди, че несъразмерните мехурчета се изтласкват към границите; невъзможността за дифузията на мехурчетата през структурата представлява дефект на модела. Могат да възникват само взаимно приспособени съседи. Оказва се, че границите се стремят да се престроят благодарение на растежа на един кристал за сметка на друг, докато границата не премине през атоми на примеси.

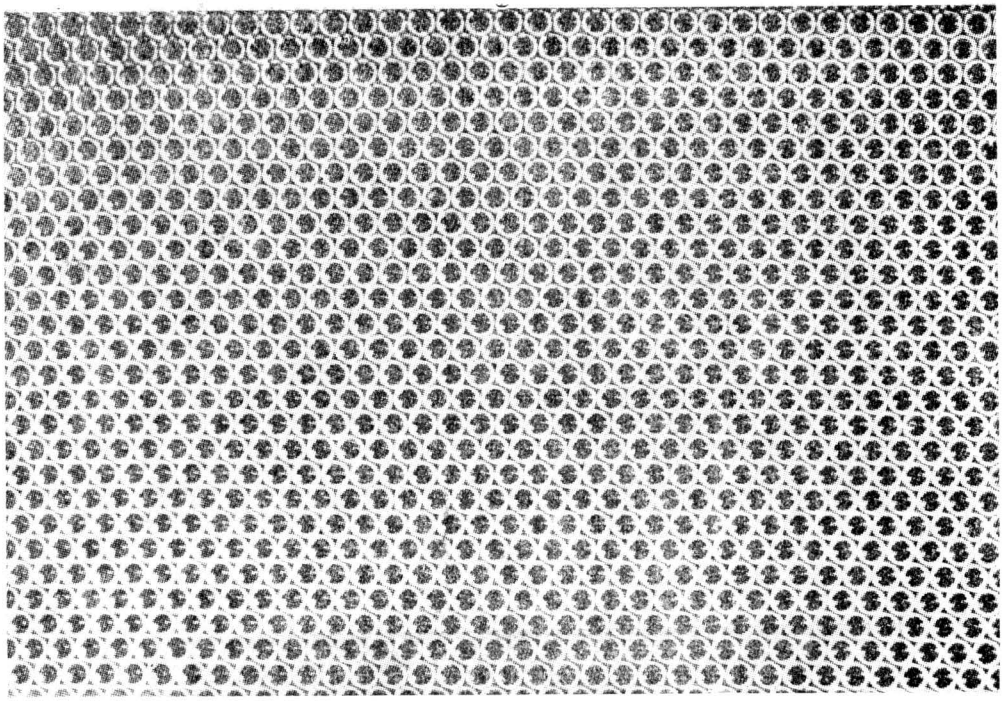
4. Дислокации

Ако монокристалът или поликристалният плот се подложи на свиване, разтегляне или друга деформация, неговото поведение е много подобно на поведението на метали, върху които действува напрежение. До известна граница моделът се намира в областта на еластичната деформация. След тази граница моделът започва да пълзи по едно от трите равноправни направления по плътно опаковените редове. Приплъзването става за сметка на прехода на мехурчетата в един ред над мехурчетата на съседния ред на разстояние, равно на интервала между съседните мехурчета. Много е интересно да се наблюдава този процес. Движението на целия ред не е едновременно, то започва на единия край с появата на „дислокация“, където в редицата от едната страна на линията на плъзгането на едно място се оказва едно мехурче повече, отколкото в редицата от другата страна. Тази дислокация след това пробягва по линията на плъзгането от единия край на кристала до другия; в резултат става приплъзване на едно „междуатомно“ разстояние. Процеси от такъв вид бяха предположени от Орован, Поляни и Тейлър за обясняване на малката стойност на силите, предизвикващи пластичното приплъзване в металните структури. В теорията, изказана от Тейлър[1] за обясняване механизмът на пластичната деформация на кристалите, се разглежда взаимодействието и равновесието на такива дислокации. Мехурчетата дават поразителна илюстрация за това, което, както смятат, става в металите. Понякога дислокациите се движат съвсем бавно и за да преминат кристала, им е необходимо време от порядъка на секунди; може да се видят и неподвижни дислокации в кристала, напрежението в които не е хомогенно. Те изглеждат като къси черни чертички. При свиването на поликристалния плот тези чертички се разбягват във всички посоки по кристала.

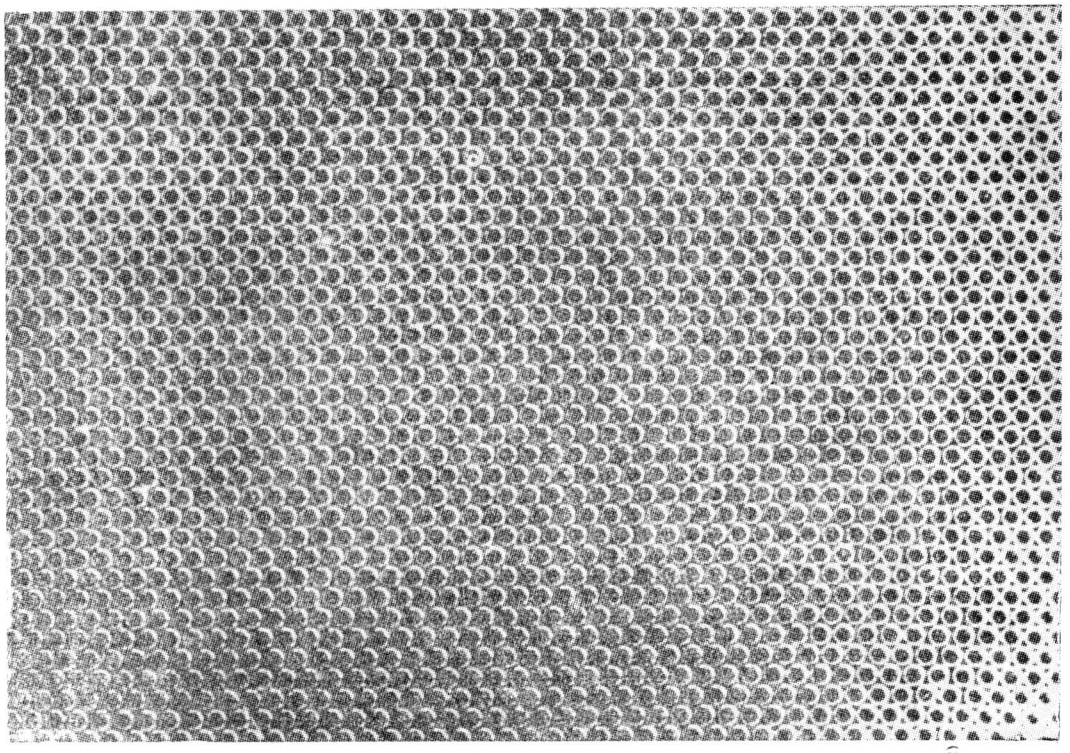
На фиг. 6 (лист 3, стр. 427) са показани примери за дислокации. На фиг. 6, *а* дислокациите имат ограничен характер, като се разпростират на дължина около 6 мехурчета. На фиг. 6, *б* дислокациите се простират на дванадесет мехурчета, а на фиг. 6, *в* влиянието на дислокацията може да се проследи по протежение на около петдесет мехурчета. По-голямата твърдост на малките мехурчета води до по-дълги дислокации. Изучаването на всяка маса мехурчета показва обаче, че за всеки размер мехурчета не съществува стандартна дължина на дислокациите. Тя зависи от природата на напреженията в кристала. Границата между два кристала с оси под ъгъл 30 градуса един към друг (максималния възможен ъгъл) може да се разглежда като серия дислокации в редуващи се редове и в този случай дислокациите са много къси. При намаляването на ъгъла между съседните кристали дислокациите възникват в по-широки интервали и в същото време стават по-дълги, докато накрая не се образува една единствена дислокация в голям обем със съвършена структура (фиг. 6).

На фиг. 7 (лист 4, стр. 428) са показани три успоредни дислокации. Ако (следвайки Тейлър) различаваме положителни и отрицателни дислокации, то тази е положителна, отрицателна и отново положителна, броейки отляво надясно. Ивицата между двете последни има три излишни мехурчета, което може да се види, ако се гледа по реда в хоризонтална посока. На фиг. 8 (лист 4, стр. 428) е показана дислокация, която се разпространява от границите на зърното, което представлява от себе си един често срещан ефект. На фиг. 9 (лист 4, стр. 428) е показано място, в което стоят две мехурчета, а не едно. Това може да се разглежда като граничен случай на положителна и отрицателна дислокация в съседни редове, когато свитите страни на дислокациите се намират една срещу друга. Противоположният случаи би довел възникване на дупка, т. е. едно мехурче не би стигнало там, където се срещат дислокациите.

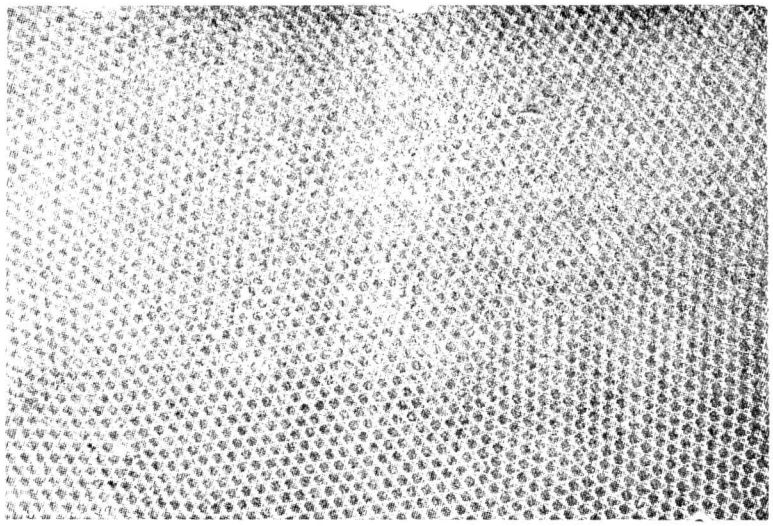
[1] G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc., 4145, 362 (1934).



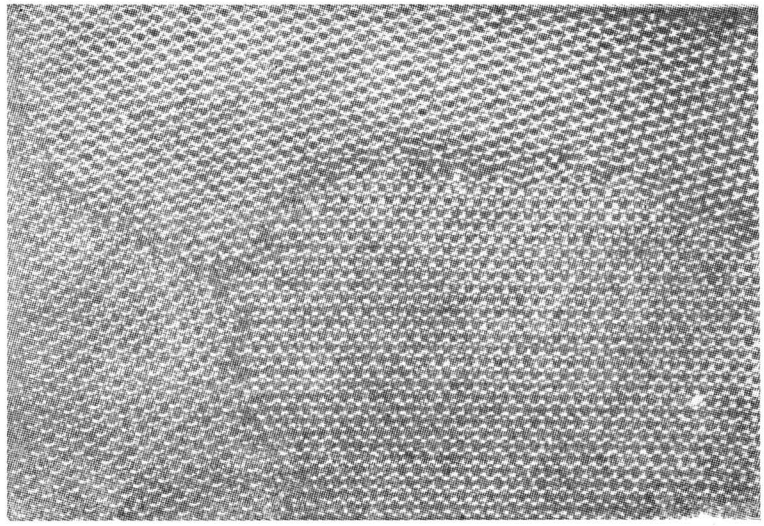
Фиг. 2. Идеално разположени мехурчета. Диаметър 1,41 mm



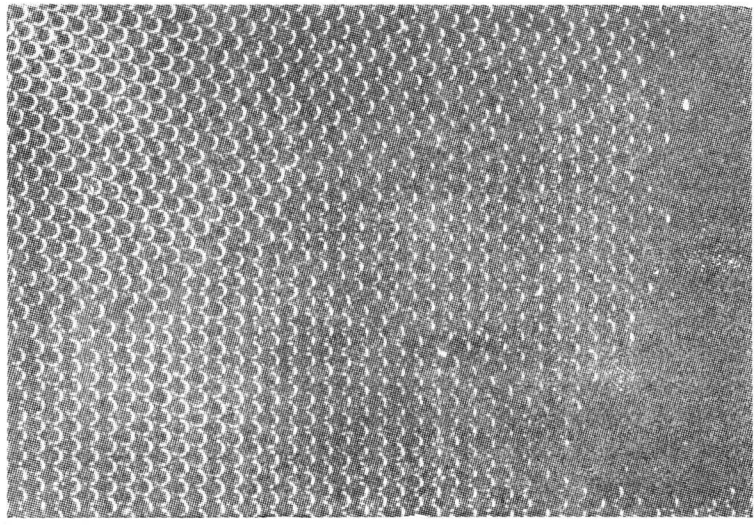
Фиг. 4. Правилно разположени „малки“ мехурчета. Диаметър 0,30 mm



а

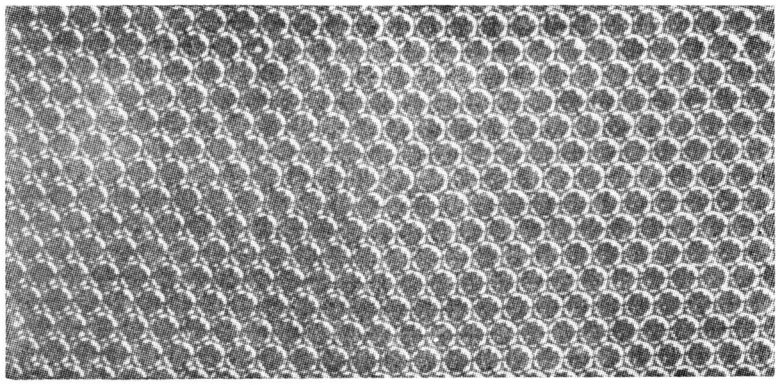


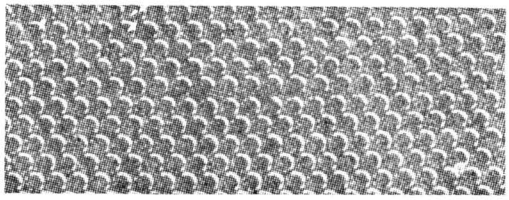
б

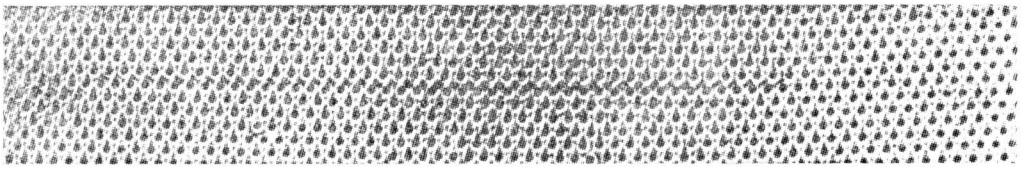


в

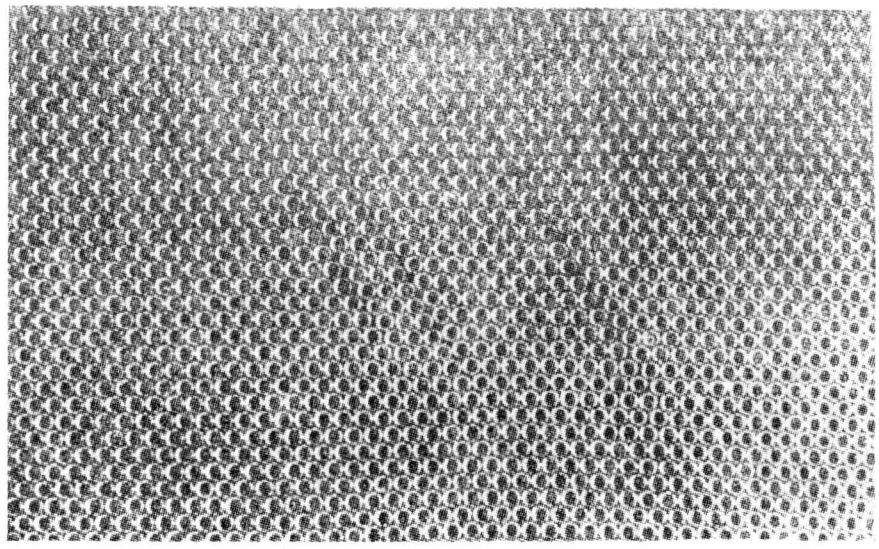
Фиг. 5. Типични граници на зърната:
а — диаметър 1,87 mm; *б*—диаметър 0,76 mm; *в* — диаметър 0,30 mm



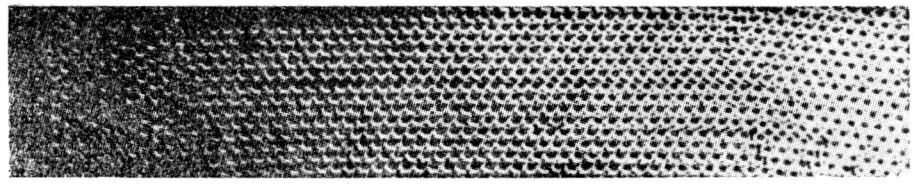




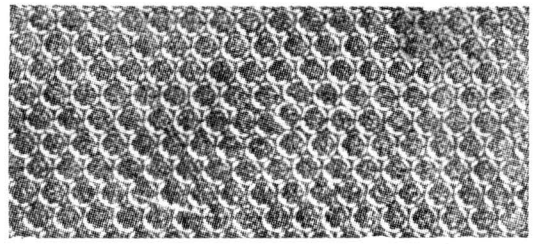
Фиг. 6. Дислокации :
а — диаметър 1,9 mm ; *б* — диаметър 0,76 mm; *в* — диаметър 0,30 mm



Фиг. 7. Успоредни дислокации. Диаметър 0,76 mm.



Фиг. 8. Дислокация, проектирана от границата на зърната



Фиг. 9. Дислокации в съседни редове

31

Тензори

31-1.Тензор на поляризацията

Физиците имат навик да взимат най-простия пример за някакво явление и да го наричат „физика“, а по-сложните примери да оставят на разположение на другите науки, да речем приложната математика, електротехниката, химията или кристалографията. Даже физиката на твърдото тяло за тях е само „полуфизика“, защото нея я вълнуват твърде много специални въпроси. Поради тази причина в нашите лекции ние ще се откажем от множество интересни неща. Например едно от най-важните свойства на кристалите и изобщо на повечето вещества, е свойството, че тяхната електрическа поляризуемост е различна в различните направления. Ако приложите електрично поле в някакво направление, атомните заряди малко ще се отместят и ще възникне диполен момент; големината на този момент зависи много силно от направлението на приложеното поле. А това, разбира се, е усложнение. За да си облекчат живота, физиците започват разговора от специалния случай, когато поляризуемостта е еднаква във всички направления. А другите случаи ние предоставяме на другите науки. Така че за нашите по-нататъшни разглеждания съвсем няма да ни потрябва това, за което възнамеряваме да говорим в тази глава.

Математиката на тензорите е особено полезна за описването на свойствата на веществата, които се изменят с направлението, въпреки че това е само един пример за тяхното използуване. Тъй като повечето от вас нямат намерение да стават физици, а ще се занимават с реалния свят, в който зависимостта от направлението е твърде силна, то рано или късно на вас ще ви се наложи да използувате тензор. Ето за да няма тук пропуск, аз смятам да ви разкажа за тензорите, въпреки и не много подробно. Аз искам вашето разбиране на физиката да бъде колкото е възможно по-пълно. Електродинамиката например у нас е напълно завършен курс. Тя е толкова пълна, колкото един даже институтски курс по електричество и магнетизъм. А ето механиката у нас не е завършена, защото когато я изучавахме, вие още не бяхте толкова стабилни в математиката и ние не можехме да обсъждаме такива дялове, като принципът за най-малкото действие, лагранжиани, хамилтониани и т. н., които представляват най-елегантният начин за описване на механиката. Обаче все пак имаме пълен набор от закони на механиката с изключение на теорията на относителността. В същата степен както електричеството и магнетизмът у нас са завършени много други дялове. Но пък квантовата механика ние така и няма да завършим; впрочем, трябва все пак нещо да се остави и за бъдещето! И все пак що е тензор вие така и така трябва да узнаете още сега.

В глава 30 подчертахме, че свойствата на кристалното вещество в различни направления са различии — казахме, че то е анизотропно. Промяната на индуцирания диполен момент с промяната на направлението на приложеното електрично поле — това е само един пример, но ние ще вземем именно него като пример за тензор. Ще смятаме, че за дадено направление на електрическото поле индуцираният диполеи момент в единица обем **P** е пропорционален на интензитета на приложеното поле **E**. (За много вещества при не особено големи **E** това е твърде добро прибли-

31-1. Тензор на поляризацията

31-2.Преобразуване компонентите на тензора

31-3.Елипсоид на енергията

31-4.Други тензори; тензор на инерцията

31-5.Векторно произведение

31-6.Тензор на напрегнатостта.

31-7.Тензори от висши рангове

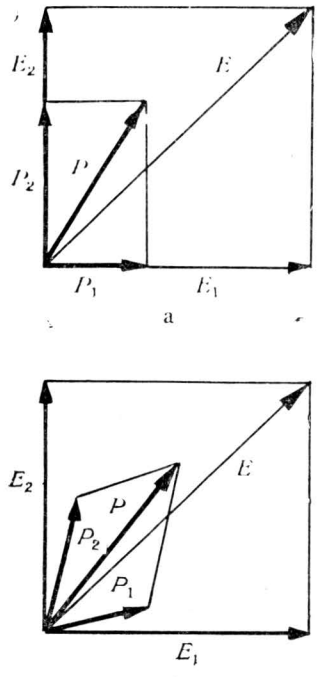
31-8.Четиримерен тензор на електромагнитния импулс.

Да се повтори: глава 11 (т.I) „Вектори“; глава 20„Въртене в пространството“

жение). Нека коефициентът на пропорционалност да бъде α[1]. Сега искаме да разгледаме вещество, при което α зависи от направлението на приложеното поле, например известният ви кристал турмалин, който дава раздвоени образи на предметите, когато ги гледате през него.

Да предположим, че сме констатирали, че за определен кристал електрическото поле $\mathbf{E}_1$ с направление по оста x дава поляризация $\mathbf{P}_1$ с направление по същата ос, а равно по големина с него електрическо поле $\mathbf{E}_2$ с направление по оста y води до някаква друга поляризация $\mathbf{P}_2$, която също така има направление по оста y. А какво ще стане, ако електрическото поле се приложи под ъгъл 45°? Е добре, тъй като то ще бъде просто суперпозиция на две полета — едното с направление по оста x, другото по оста y, то поляризацията $\mathbf{P}$ е равна на сумата от векторите $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, както това е показано на фиг. 31-1, *а*. Поляризацията вече не е успоредна на направлението на електрическото поле. Не е трудно да се разбере защо става така. В кристала има заряди, които лесно могат да се отместват нагоре и надолу, но които много трудно се отместват встрани. Ако силата е приложена под ъгъл 45°, тези заряди по-лесно се отместват нагоре, отколкото настрана. Следствие тази асиметрия на вътрешните еластични сили, посоката на преместването не съвпада с посоката на външната сила.

Разбира се, ъгълът 45° с нищо не се различава от останалите ъгли. Това че индуцираната поляризация няма направлението на електрическото поле, е валидно и в общия случай. Първоначално ние просто „имахме късмет“ да изберем такива оси x и y, за които поляризацията $\mathbf{P}$ имаше направлението на полето $\mathbf{E}$. Ако кристалът беше завъртян спрямо координатните оси, то електрическото поле $\mathbf{E}_2$ с направление по оста y би предизвикало поляризация както по оста y, така и по оста x. По подобен начин поляризацията $\mathbf{P}$, предизвикана от поле с направление по оста x, също би имала както x-, така и y-компонента. Така че вместо фиг. 31-1,*а* ние бихме получили нещо подобно на фиг. 31-1,б. Но независимо от цялото това усложнение големината на поляризацията P за всяко едно поле $\mathbf{E}$ си остава както преди пропорционална на неговата големина.



Фиг. 30-1. Събиране на векторите на поляризацията в анизотропен кристал

Да разгледаме сега общия случай на произволна ориентация на кристала спрямо координатните оси. Електрическото поле с направление по оста x дава поляризация $\mathbf{P}$ с компоненти по всичките три оси, така че можем да напишем:

$$P_x = \alpha_{xx} E_x, \qquad P_y = \alpha_{yx} E_x, \qquad P_z = \alpha_{zx} E_x. \tag{31.1}$$

С това аз искам да кажа само, че електрическото поле с направление по оста x създава поляризация не само в това направление, но води до три компоненти на поляризацията P_x, P_y и P_z, всяка от които е пропорционална на E_x. Коефициентите на пропорционалност ние означихме с α_{xx}, α_{yx} и α_{zx} (първият индекс означава за коя компонента става дума, а вторият се отнася към направлението на електрическото поле). Аналогично за поле с направление по оста y можем да напишем

$$P_x = \alpha_{xy} E_y, \qquad P_y = \alpha_{yy} E_y, \qquad P_z = \alpha_{zy} E_y, \tag{31.2}$$

а за поле в направление z

$$P_x = \alpha_{xz} E_z, \qquad P_y = \alpha_{yz} E_z, \qquad P_z = \alpha_{zz} E_z. \tag{31.3}$$

По-нататък казваме, че поляризацията линейно зависи от полето. Поради това ако у нас има електрическо поле $\mathbf{E}$ с компоненти x и y, то x-компонентата на поляризацията $\mathbf{P}$ ще бъде сума от две P_x, определен от уравненията от (31.3) и (31.2), и ако $\mathbf{E}$ има съставящи по всичките три направления x, y и z, то съставящите

---

[1] В глава 10 ние писахме, както е общоприето, $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$ и величината χ (хи) наричахме „възприемчивост“. Тук за нас е по-удобно да използуваме една буква така, че вместо $\varepsilon_0 \chi$ ние ще пишем α. За изотропен диелектрик $\alpha = (\varkappa - 1)$, където $\varkappa$ е диелектрическата проницаемост (гледай гл. 10, § 4).

на поляризацията **P** трябва да бъдат суми от съответните събираеми в уравненията (31.1), (31.2) и (31.3). С други думи, **P** се записва във вида

$$P_x = \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z,$$
$$P_y = \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z,$$
$$P_z = \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z. \qquad (31.4)$$

Диелектричните свойства на кристала следователно се описват от деветте величини (α_{xx}, α_{xy}, α_{xz},...), които може да се запишат във вид на символа α_{ij} (индексите i и j заменят една от трите букви: x, y или z). Произволно електрическо поле **E** може да се разложи на съставящи E_x, E_y и E_z. Ако ги знаем, можем да се възползуваме от коефициентите α_{ij}, за да намерим P_x, P_y и P_z, които заедно дават пълната поляризация **P**. Наборът от деветте коефициента α_{ij} се нарича тензор — в дадения прим *тензор на полярзацията*[1]. Точно така, както казваме, че трите величини (E_x, E_y и E_z) „образуват вектор **E**“, ние казваме, че деветте величини (α_{xx}, α_{xy}...) „образуват тензора α_{ij}“.

31-2: Преобразуване на компонентите на тензора

Вие знаете, че при заменянето на старите координатни оси с новите x', y' и z' компонентите на вектора $E_{x'}$, $E_{y'}$, $E_{z'}$ също се оказват други. Същото става и с компонентите на **P**, така че за различни координатни системи коефициентите α_{ij} се оказват различни. Обаче може напълно да се изясни как трябва да се променят α_{ij} при съответното изменение на компонентите на **E** и **P**, защото ако описваме все същото електрическо поле, но в нова координатна система, трябва да получим същата поляризация **P**. За всяка нова координатна система $P_{x'}$ ще бъде линейна комбинация от P_x, P_y и P_z:

$$P_{x'} = aP_x + bP_y + cP_z$$

и аналогично за другите компоненти. Ако P_x, P_y и P_z се изразят съгласно с (31.4) чрез **E**, ще получим

$$P_{x'} = a\,(\alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z) +$$
$$b\,(\alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z) +$$
$$c\,(\alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z).$$

Сега напишете как се изразяват E_x, E_y и E_z посредством $E_{x'}$, $E_{y'}$ и $E_{z'}$, например

$$E_x = a'E_{x'} + b'E_{y'} + c'E_{z'},$$

където числата a', b' и c' са свързани с числата a, b и c, но не са равни на тях. По такъв начин вие получихте израз за $P_{x'}$ чрез компонентите $E_{x'}$, $E_{y'}$ и $E_{z'}$, т. е. получиха се нови α_{ij}. Никакви хитрости няма тук, въпреки че всичко е достатъчно объркано.

Когато говорихме за преобразуване на осите, смятахме, че положението на самия кристал е фиксирано в пространството. Ако заедно с осите се върти и кристалът, то α_{ij} няма да се променят. И обратно, ако изменим ориентацията на кристала спрямо осите, ще се получи нов набор от коефициенти α_{ij}. Но ако те са известни за която и да е ориентация на кристала, то с помощта на току-що описаното преобразуване те могат да бъдат намерени и за всяка друга ориентация. Другояче казано, диелектричните свойства на кристала напълно се описват посредством

---

[1] Обикновено за коефициентите на пропорционалност между **P** и **E** се използува терминът тензор на възприемчивостта, като терминът поляризация се оставя за величина, която се отнася към една частица (сравни забележката на стр. 447).

задаването на компонентите на тензора на поляризацията α_{ji} в която и да е произволно избрана координатна система. Както векторът на скоростта $\mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z)$ може да се свърже с частицата, като знаем, че неговите три компоненти при замяна на координатните оси ще се променят по някакъв определен начин, така и тензорът на поляризацията α_{ji}, чиито девет компоненти при промяна на координатните оси се преобразуват по един напълно определен начин, може да се свърже с кристала.

Връзката между **P** и **E** в уравнението (31.4) може да се запише в по-компактен вид

$$P_i=\sum_j \alpha_{ji}E_j, \tag{31.5}$$

където под индекса i се разбира една от трите букви x, y или z, а сумирането става по $j=x$, y и z. За работа с тензорите са измислени много специални означения, но всяко от тях е удобно за ограничена класа проблеми. Едно от тези общи споразумения се състои в това, че може да не се пише знакът за сумирането Σ в уравнението (31.5), като се подразбира, че когато един и същ индекс се среща два пъти (в нашия случай j), необходимо е да се сумира по всички стойности на този индекс. Обаче тъй като ние няма да работим много с тензори, нека да не си усложняваме живота с въвеждането на разни специални означения или споразумения.

31-3. Елипсоид на енергията

Нека сега да се потренираме в работа с тензорите. Да разгледаме следния интересен въпрос: каква енергия е необходима за поляризирането на кристала (допълнително към енергията на електрическото поле, която, както е известно, е равна на $\varepsilon_0 E^2/2$ в единица обем)? Представете си за минута атомните заряди, които трябва да бъдат отместени. Работата, необходима за преместването на един такъв заряд на разстояние dx, е равна на $qE_x dx$, а ако в единица обем се съдържат N такива заряди, то за тяхното преместване е необходима работа $qE_x N dx$. Но $qN dx$ е равно на промяната на диполния момент в единица обем dP_x. Така че работата, изразходвана за единица обем, е равна на

$$E_x dP_x.$$

Като сумираме сега работите на всичките три компоненти, ще намерим каква трябва да бъде работата в единица обем

$$\mathbf{E}\,.\,d\mathbf{P}.$$

Но тъй като големината на **P** е пропорционална на **E**, то работата, изразходвана за поляризиране на единица обем от **O** до **P**, е равна на интеграл от $\mathbf{E}\,.\,d\mathbf{P}$. Означавайки тази работа чрез u_p, можем да напишем[1]

$$u_p=\frac{1}{2}\,\mathbf{E}\,.\,\mathbf{P}=\frac{1}{2}\sum_i E_i P_i. \tag{31.6}$$

Сега можем да използуваме уравнението 31.5 и да изразим **P** чрез **E**. В резултат получаваме

$$u_p=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j \alpha_{ji}E_i E_j, \tag{31.7}$$

Плътността на енергията u_p е величина, която не зависи от избора на осите, т. е. тя представлява скалар. Оказва се, че тензо-

[1] Тази работа, изразходвана от електрическото поле за създаване поляризация, не трябва да се смесва с потенциалната енергия $\mathbf{p}.\mathbf{E}$ на постоянния диполен момент $\mathbf{p}_0$ в полето **E**.

рът притежава такова свойство, че като се сумира по единия индекс (с вектор), той дава нов вектор, а като се сумира по двата индекса (в общия случай с два вектора), дава скалар.

Тензорът α_{ij} всъщност трябва да се нарича „тензор от втори ранг", тъй като той има два индекса. В този смисъл векторът, който има само един индекс, може да се нарече „тензор от първи ранг", а скаларът, който изобщо няма индекси — „тензор от нулев ранг". И тъй излиза, че електричното поле **E** ще бъде тензор от първи ранг, а плътността на енергията u_p — тензор от нулев ранг. Тази идея може да се разпространи и върху тензорите с три и повече индекси и да се определят тензори, чийто ранг е по-голям от две.

Индексите на нашия тензор на поляризацията могат да приемат три различни значения, т. е. това е тримерен тензор. Математиците разглеждат също и четири, пет и повече — мерни тензори. Между другото ние вече се срещнахме с четиримерен тензор при релативистичното описание на електромагнитното поле (вж. гл. 26.) — това беше $F_{\mu\nu}$.

Тензорът на поляризацията α_{ij} притежава едно интересно и свойство: той е симетричен, т. е. $\alpha_{xy}=\alpha_{yx}$ и т. н. за всяка двойка индекси (това свойство отразява *физическите* свойства на реалния кристал и съвсем не е задължително у всеки тензор). Вие можете самостоятелно да докажете това, като пресметнете изменението на енергията на кристала по следната схема:

1) Включете електрическо поле с направление по оста x.
2) Включете поле с направление по оста y.
3) Изключете x-полето
4) Изключете y-полето.

Сега кристалът се върна към предишното положение и пълната работа, изразходвана за поляризирането му, трябва да бъде равна на нула. Но за това, както вие може да се убедите, α_{xy} трябва да бъде равно на α_{yx}. Обаче същите разсъждения може да се направят за α_{xz} и т. н. Така тензорът на поляризацията се оказва симетричен.

Това означава също, че тензорът на поляризацията може да се намери чрез просто измерване на енергията, която е необходима за поляризирането на кристала в различни направления. Да предположим, че отначало сме взели електрическо поле **E** с компоненти x и y; тогава съгласно с уравнението (31.7)

$$u_p=\frac{1}{2}\left[\alpha_{xx}E_x^2+(\alpha_{xy}+\alpha_{yx})E_xE_y+\alpha_{yy}E_y^2\right]. \qquad (31.8)$$

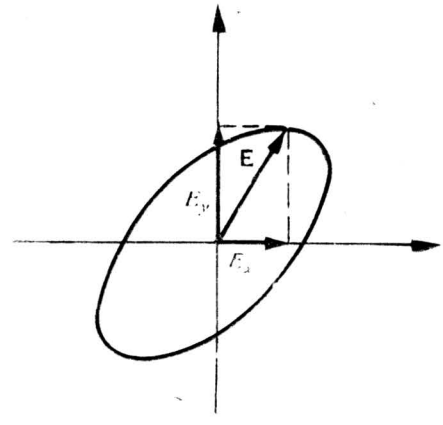
Ако имахме само една компонента E_x, можехме да определим α_{xx}, а с една компонента E_y можем да определим α_{yy}. Като включим двете компоненти E_x и E_y, поради наличието на члена $(\alpha_{xy}+\alpha_{yx})$ ще получим допълнителна енергия. И тъй като α_{xy} и α_{yx} са равни, този член се превръща в $2\alpha_{xy}$ и може да бъде пресметнат, като се знае допълнителната енергия.

Изразът на енергията (31.8) има много красива геометрична интерпретация. Да предположим, че ние се интересуваме какви полета E_x и E_y отговарят на *дадена* плътност на енергията — например u_0. Възниква чисто математическата задача да се реши уравнението:

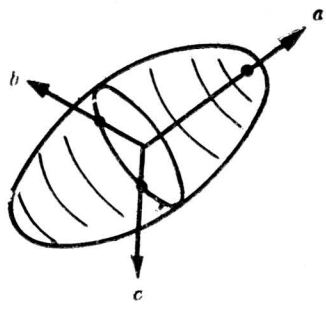
$$\alpha_{xx}E_x^2+2\alpha_{xy}E_xE_y+\alpha_{yy}E_y^2=2u_0.$$

Това уравнение е от втора степен, така че ако отложим по осите величините E_x и E_y, негови решения ще бъдат всичките точки на елипсата (фиг. 31-2). (Това трябва да бъде именно елипса, а не парабола и хипербола, тъй като енергията на полето е винаги положителна и крайна.) А самото **E** с компоненти E_x и E_y представлява вектор с начало в началото на координатната система и край върху точка от елипсата. Тази „енергетическа елипса" е един хубав начин „да се види" тензора на поляризацията.

Ако сега включим в действие всичките три компоненти, то всеки вектор **E**, необходим за създаването на единична плътност



Фиг. 31-2 Краят на всеки вектор $\mathbf{E}=(E_x, E_y)$, който лежи на тази крива, дава една и съща енергия на поляризацията



Фиг. 31-3 Елипсоид на енергията за тензора на поляризацията

на енергията, ще се зададе от точки, разположени върху един елипсоид, подобен на този, показан на фиг. 31-3. Формата на този елипсоид на постоянна енергия еднозначно характеризира тензора на поляризацията.

Забележете сега, че елипсоидът има едно много интересно свойство — той винаги може да бъде описан, просто като се зададат направленията на неговите три „главни оси“ и диаметрите му по тези оси. Такива „главни оси“ представляват направленията на най-малкия и най-големия диаметър и направлението, перпендикулярно към тях. На фиг. 31-3 те са означени с буквите a, b и c. Спрямо тези оси уравнението на елипсоида има особено простата форма

$$\alpha_{aa}E_a^2+\alpha_{bb}E_b^2+\alpha_{cc}E_c^2=2u_0.$$

И тъй, спрямо главните оси на тензора на поляризацията остават само три ненулеви компоненти α_{aa}, α_{bb} и α_{cc}. С други думи, колкото и да е сложен кристалът, винаги може да се изберат осите така (не е задължително това да са осите на самия кристал), че тензорът на поляризацията да остане само с три компоненти. Уравнението (31.4) за такива оси става особено просто:

$$P_a=\alpha_{aa}E_a,\quad P_b=\alpha_{bb}E_b,\quad P_c=\alpha_{cc}E_c. \tag{31.9}$$

Другояче казано, електрическото поле, насочено по всяка една от главните оси, дава поляризация, насочена по същата ос, но, разбира се, за различните оси коефициентите ще бъдат различни.

Тензорът често се записва във вид на таблица от 9 коефициента, взети в скобки

$$\begin{pmatrix}\alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz}\\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz}\\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz}\end{pmatrix}. \tag{31.10}$$

За главните оси a, b и c в таблицата остават само диагоналните членове и затова казваме, че тензорът става „диагонален“, т. е.

$$\begin{pmatrix}\alpha_{aa} & 0 & 0\\ 0 & \alpha_{bb} & 0\\ 0 & 0 & \alpha_{cc}\end{pmatrix}. \tag{31.11}$$

Най-важното тук е, че чрез подходящ избор на координатните оси всеки тензор на поляризацията може да се приведе към такава форма (фактически *всеки симетричен* тензор от втори ранг, независимо от размерността му).

Ако всички три елемента на тензора на поляризацията в диагонална форма са равни един на друг, т. е. ако

$$\alpha_{aa}=\alpha_{bb}=\alpha_{cc}=\alpha, \tag{31.12}$$

то елипсоидът на енергията се превръща в сфера, поляризацията по всички направления става еднаква, а материалът е изотропен. В тензорни означения

$$\alpha_{ij}=\alpha\delta_{ij}, \tag{31.13}$$

където δ_{ij} е *единичният тензор*

$$\delta_{ij}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{31.14}$$

Това, разбира се, означава

$$\begin{aligned}&\delta_{ij}=1, \quad \text{при } i=j;\\ &\delta_{ij}=0, \quad \text{при } i\neq j.\end{aligned} \tag{31.15}$$

Тензорът δ_{ij} често се нарича „символ на Кронекер“. За развле-

чение може да докажете, че тензорът (31.14) при смяната на една правоъгълна координатна система с друга запазва точно същата форма. Тензор на поляризацията от типа (31.13) дава

$$P_i = \alpha \sum_j \delta_{ij} E_j = \alpha E_i ,$$

т. е. получава се нашият стар резултат за изотропен диелектрик

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}.$$

Формата и ориентацията на елипсоида на поляризацията в някои случаи може да се свърже със свойствата на симетрия на кристала. В гл. 30 ние вече казахме, че тримерната решетка има 230 различни възможни вътрешни симетрии и че за много цели е удобно те да се разпределят на седем класа в съответствие с формата на елементарната клетка. Елипсоидът на поляризацията трябва да отразява геометрията на вътрешната симетрия на кристала. Например триклинният кристал има най-ниска симетрия — при него всичките три оси на елипсоида са различни по големина и техните направления в общия случай не съвпадат с направленията на осите на кристала. По-симетричният моноклинен кристал притежава тази особеност, че неговите свойства не се променят при завъртане на кристала на 180° спрямо една ос, поради което тензорът на поляризацията при такова завъртане трябва да си остава същият. Оттук следва, че елипсоидът на поляризацията трябва да преминава сам в себе си при завъртане на 180°, но това може да се случи само когато една от осите на елипсоида съвпада с направлението на оста на симетрия на кристала. Ориентирането на другите оси и размерите на елипсоида могат да бъдат произволни.

Осите на елипсоида на ромбическия кристал трябва да съвпадат с кристалните оси, тъй като въртенето на такъв кристал на 180° около всяка една от осите повтаря същата кристална решетка. Ако вземем тетрагонален кристал, елипсоидът също трябва да повтаря неговата симетрия, т. е. два от неговите диаметри трябва да бъдат равни помежду си. Накрая за кубическия кристал трябва да бъдат равни всичките три диаметра на елипсоида — той се превръща в сфера и поляризацията на кристала е еднаква по всички посоки.

Съществува една много сериозна игра, която се състои в изясняване на всички възможни свойства на тензорите за всички възможни симетрии на кристала. Тя дълбокомъдрено се нарича „теоретико-групов анализ“. Обаче за простите случаи на тензор на поляризацията е сравнително лесно да се види каква трябва да бъде тази връзка.

31-4. Други тензори; тензор на инерцията

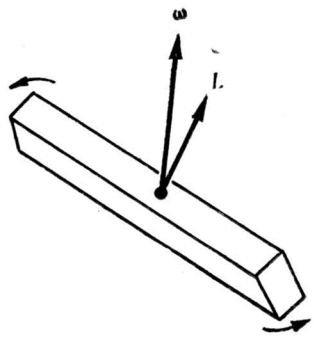
Във физиката има още много други примери за тензори. В метала например или в някакъв друг проводник често се оказва, че плътността на тока **j** е приблизително пропорционална на електрическото поле **E**. Константата на пропорционалност се нарича проводимост σ

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

За кристала обаче връзката между **j** и **E** е по-сложна, проводимостта в различните направления не е еднаква. Тя става тензор и затова пишем

$$j_i = \sum_k \sigma_{ik} E_k .$$

Друг пример за физически тензор представлява моментът на инерцията. В гл. 18 (т. I) видяхме, че моментът на количеството



Фиг. 31-4 Моментът на количеството на движение **L** на твърд предмет в общия случай не е успореден на вектора на ъгловата скорост $\vec{\omega}$

на движението **L** на твърдо тяло, което се върти спрямо фиксирана ос, е пропорционален на ъгловата скорост ω. Коефициентът на пропорционалност I ние нарекохме инерчен момент

$$L = I\omega.$$

Инерчният момент на тяло с произволна форма зависи от неговата ориентация спрямо оста на въртене. Например инерчните моменти на правоъгълно блокче ще бъдат различни спрямо всяка една от трите ортогонални оси. Обаче ъгловата скорост $\vec{\omega}$ и моментът на количеството на движението **L** са вектори. При въртене спрямо една от осите на симетрия те са паралелни. Но ако инерчните моменти спрямо всяка от трите главни оси са различни, то направленията на $\vec{\omega}$ и **L** в общия случай не съвпадат (фиг. 31-4). Те са свързани точно по същия начин, както са свързани **E** и **P**, т. е. трябва да пишем

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{aligned} \tag{31.16}$$

Деветте коефициента I_{ij} се наричат тензор на инерцията. По аналогия с поляризацията кинетичната енергия за всеки момент на количеството на движението трябва да бъде някаква квадратична форма на компонентите ω_x, ω_y и ω_z

$$\text{k. e.} = \frac{1}{2}\sum_{ij} I_{ij}\omega_i\omega_j. \tag{31.17}$$

Отново можем да се възползуваме от този израз, за да определим елипсоид на инерцията. Освен това отново можем да използуваме енергетични съображения, за да покажем, че този тензор е симетричен, т. е. че $I_{ij} = I_{ji}$.

Тензорът на инерцията на дадено твърдо тяло може да се напише, ако е известна формата на тялото. На нас ни е необходимо само да напишем пълната кинетична енергия на всички частици на тялото. Частица с маса m и скорост **v** притежава кинетична енергия $1/2\, mv^2$, а пълната кинетична енергия просто е равна точно на сумата

$$\sum \frac{1}{2} mv^2$$

по всички частици на тялото. Но скоростта **v** на всяка частица е свързана с ъгловата скорост $\vec{\omega}$ на твърдото тяло. Да предположим, че тялото се върти спрямо центъра на масите, който ще смятаме в покой. Ако при това **r** характеризира положението на частицата спрямо центъра на масите, то нейната скорост **v** се дава с израза $\vec{\omega}\times\mathbf{r}$. Следователно пълната кинетична енергия е

$$\text{k. e.} = \sum \frac{1}{2} m(\vec{\omega}\times\mathbf{r})^2. \tag{31.18}$$

Всичко, което е необходимо да се направи сега, това е да се препише $\vec{\omega}\times\mathbf{r}$ посредством компонентите ω_x, ω_y и ω_z и координатите x, y, z, а след това се сравнят резултатите с уравнението (31.17), като приравним коефициентите, ще намерим I_{ij}. След като извършим цялата тая алгебра, ние пишем

$$\begin{aligned} (\vec{\omega}\times\mathbf{r})^2 &= (\vec{\omega}\times\mathbf{r})_x^2 + (\vec{\omega}\times\mathbf{r})_y^2 + (\vec{\omega}\times\mathbf{r})_z^2 = \\ &= (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2 = \\ &= \omega_y^2 z^2 - 2\omega_y\omega_z zy + \omega_z^2 y^2 + \omega_z^2 x^2 - 2\omega_z\omega_x xz + \omega_x^2 z^2 + \\ &+ \omega_x^2 y^2 - 2\omega_x\omega_y yx + \omega_y^2 x^2. \end{aligned}$$

Като умножим това уравнение по $m/2$, сумираме по всички ча-

стици и сравним с уравнението (31.17), виждаме, че I_{xx} например е равно на

$$I_{xx}=\Sigma\, m\ (y^2+z^2)$$

Това е точно формулата за инерчния момент на тялото спрямо оста x, която ние получихме вече по-рано (гл. 19, т. I). И тъй като $r^2=x^2+y^2+z^2$, тази формула може да се напише в следния вид

$$I_{xx}=\Sigma\, m(r^2-x^2).$$

Като напишем останалите членове на тензора на инерцията, получаваме

$$I_{ij}\begin{pmatrix}\Sigma\,(m(r^2-x^2) & -\Sigma\, mxy & -\Sigma\, mxz\\ -\Sigma\, myx & \Sigma\, m\,(r^2-y^2) & -\Sigma\, myz\\ -\Sigma\, mzx & -\Sigma\, mzy & \Sigma\, m(r^2-z^2)\end{pmatrix}. \qquad (31.19)$$

Ако искате, би могло да запишем това в „тензорни означения“

$$I_{ij}=\Sigma\, m(r^2\delta_{ij}-r_i r_j), \qquad (31.20)$$

където с r_i са означени компонентите (x, y, z) на вектора на положението на частицата, а Σ означава сумиране по всички частици. Така моментът на инерцията се оказва тензор от втори ранг, чиито елементи се определят от свойствата на тялото и който свързва момента на количеството на движение $\mathbf{L}$ с ъгловата скорост $\vec{\omega}$

$$L_i=\sum_j I_{ij}\,\omega_j. \qquad (31.21)$$

За всяко тяло, независимо от неговата форма, може да се намери елипсоид на енергията, а следователно и три главни оси. Спрямо тези оси тензорът ще бъде диагонален, така че за всеки обект винаги има три ортогонални оси, за които моментът на количеството на движение и ъгловата скорост са успоредни помежду си. Те се наричат главни оси на инерцията.

31-5. Векторно произведение

Без да подозирате това, вие се срещнахте с тензор от втори ранг още в глава 20 (т. I). Там ние определихме „момент на силата, действуваща в равнина“, например τ_{xy} по следния начин

$$\tau_{xy}=xF_y-yF_x.$$

Като обобщим това определение за три измерения, можем да напишем

$$\tau_{ij}=r_iF_j-r_jF_i. \qquad (31.22)$$

Както виждате, величината τ_{ij} представлява тензор от втори ранг. Един от начините да се убедим в това е да съкратим τ_{ij} с някакъв вектор, да речем, единичният вектор $\mathbf{e}$, т. е. да съставим изразите

$$\sum_j \tau_{ij}e_j.$$

Ако тази величина се окаже вектор, то τ_{ij} трябва да се преобразуват като тензор — това е просто нашето определение на тензор. Като заместим израза за τ_{ij}, получаваме:

$$\sum_j \tau_{ij}e_j=\sum_j r_iF_je_j-\sum_j r_ie_jF_i=r_i(\mathbf{F}\cdot\mathbf{e})-(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e})F_i.$$

Тъй като скаларните произведения естествено представляват скалари, то двете слагаеми в дясната част са вектори, както и тяхната разлика. Така че τ_{ij} действително е тензор.

Обаче τ_{ij} принадлежи към особен вид тензори, той е антисиметричен, т. е.

$$\tau_{ij} = -\tau_{ji}.$$

Поради това в този тензор има само три различни и неравни на нула компоненти: τ_{xy}, τ_{yz} и τ_{zx}. В глава 20 (т. I) ние успяхме да покажем, че тези три члена почти „по щастлива случайност" се преобразуват подобно на трите компоненти на вектор; благодарение на това тогава можахме да определим вектора

$$\vec{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z) = (\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}).$$

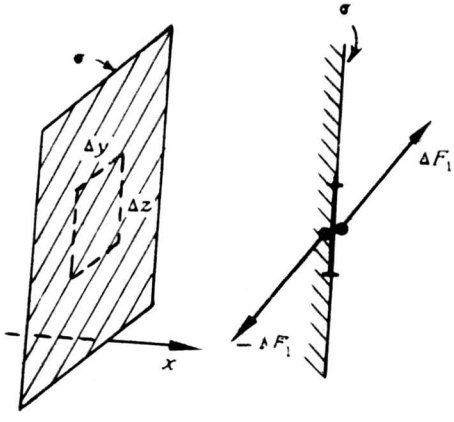
Аз казах „почти случайно", тъй като това става само в тримерното пространство. Например за четири измерения антисиметричният тензор от втори ранг има *шест* различни ненулеви члена и той, разбира се, не може да се замени с вектор, чиито компоненти са само *четири*.

Точно така, както аксиалният вектор $\vec{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ е тензор, по същите съображения тензор ще бъде и всяко векторно произведение на два полярни вектора. За щастие те също могат да бъдат представени във вид на вектор (по-точно псевдовектор), което донякъде ни облекчава цялата математика.

Общо казано, за всеки два вектора **a** и **b** деветте величини $a_i b_j$ образуват тензор (въпреки че за физически цели той не винаги може да бъде полезен). По такъв начин за вектора на положението **r** величините $r_i r_j$ представляват тензор, а тъй като δ_{ij} е също тензор, виждаме, че дясната част на (31.20) действително е тензор. Тензор ще бъде и (31.22), тъй като двата члена в дясната част са тензори.

31-6. Тензор на напреженията

Срещнатите дотук симетрични тензори възникваха като коефициенти, свързващи един вектор с друг. Сега аз ще ви запозная с тензор, който има съвършено друг физически смисъл — това е тензорът на *напреженията*. Да предположим, че върху някакво твърдо тяло действуват различни външни сили. Ние казваме, че вътре в тялото възникват различни „напрежения", като имаме при това пред вид вътрешните сили между съседните части на веществото. Ние вече говорихме малко за подобни напрежения в двумерния случай, когато разглеждахме повърхностното напрежение на опъната мембрана (вж. гл. 12—3). А сега вие ще видите, че вътрешните сили във веществото на едно тримерно тяло се записват във вид на тензор.



Фиг. 31-5. Веществото, което се намира вляво от равнината σ на площадката $\Delta y \Delta z$, действува върху веществото, което се намира отдясно със сила $\Delta \mathbf{F}_1$

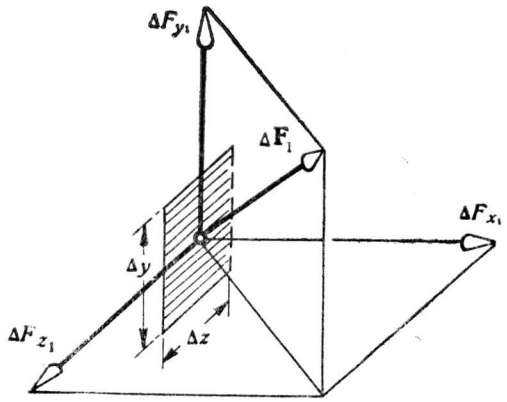
Да разгледаме тяло от някакъв еластичен материал, например блокче от желе. Ако разрежем това блокче, веществото от всяка страна на разреза ще претърпи изобщо някакво преместване под действието на вътрешните сили. До момента, в който е бил направен разрезът, между тези две части е трябвало да действуват сили, които са ги удържали в едно цяло; ние можем да изразим напрежението посредством тези сили. Представете си, че разглеждаме въображаема (31-5) и се интересуваме от силите, които действуват върху малката площ $\Delta y \Delta z$, разположена в тази равнина. Веществото, което се намира вляво от нея, действува със сила ΔF_1 върху веществото от дясната страна (фиг. 31-5, *б*). Съществува, разбира се, и обратната реакция, т. е. върху веществото отляво на повърхността действува силата $-\Delta F_1$. Ако площта е достатъчно малка, ние очакваме, че силата ΔF_1 е пропорционална на големината ѝ.

Вие вече сте запознати с един вид напрежение — статическото налягане на течността. Там силата беше равна на налягането, умножено по площта и насочена под прав ъгъл към по-

върхнинния елемент. За твърдото тяло, а също и за движеща се вискозна течност, силата не е задължително перпендикулярна на повърхността. Освен налягането (положително или отрицателно) се появява още и отместваща сила (под отместваща сила ние подразбираме тангенциалните компоненти на силата, действуваща на повърхността). Затова е необходимо да се взимат пред вид всичките три компоненти на силата. Забележете още, че ако направим разреза по равнина с някаква друга ориентация, то действуващите върху нея сили също ще бъдат други. Пълното описване на вътрешните напрежения изисква прилагането на тензори.

Да определим тензора на напреженията по следния начин: представете си отначало разрез, перпендикулярен на оста x, и разложете силата ΔF_1, която действува върху разреза, на нейните компоненти ΔF_{x1}, ΔF_{y1}, ΔF_{z1} (фиг. 31-6). Отношението на тези сили към площта $\Delta y\,\Delta z$ ние ще означим с S_{xx}, S_{yx} и S_{zx}. Например

$$S_{yx}=\frac{\Delta F_{y1}}{\Delta y\,\Delta z}.$$



Фиг. 31-6. Силата ΔF_1, която действува върху повърхнинния елемент $\Delta y\Delta z$, перпендикулярен на оста x, се разлага на три компоненти: ΔF_{x1}, ΔF_{y1} и ΔF_{z1}

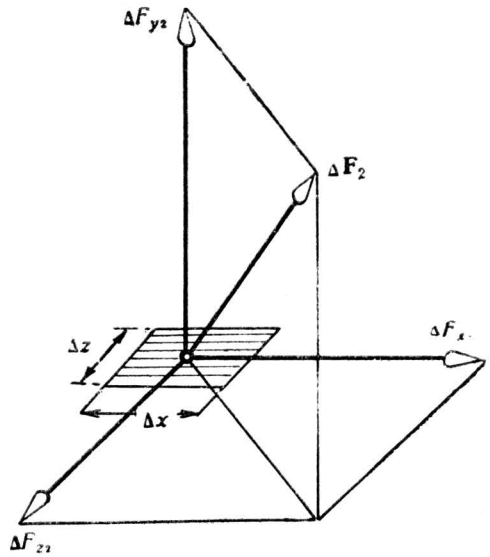
Първият индекс y се отнася към направлението на компонентата на силата, а вторият x — към направлението на нормалата към равнината. Ако искаме, можем да напишем елемента $\Delta y\,\Delta z$, като Δa_x, като имаме предвид повърхнинен елемент, перпендикулярен на оста x, т. е.

$$S_{yx}=\frac{\Delta F_{y1}}{\Delta a_x}.$$

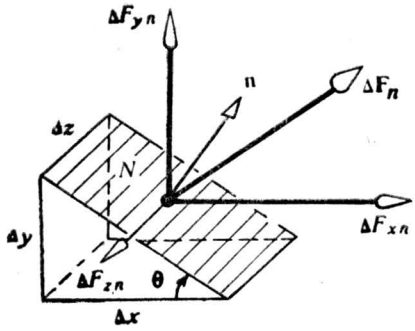
А сега представете си разрез, перпендикулярен на оста y. Нека върху малката площ $\Delta x\,\Delta z$ действува сила ΔF_2. Като разложим отново тази сила на три компоненти, както е показано на фиг. 31-7, ние определяме трите компоненти на напреженията S_{xy}, S_{yy}, S_{zy} като сили, действуващи върху единица площ в тези три направления. Накрая да направим въображаем разрез, перпендикулярен на оста z, и да определим трите компоненти S_{xz}, S_{yz} и S_{zz}. Така се получават девет числа

$$S_{ij}=\begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (31.23)$$

Аз искам сега да покажа, че тези девет величини са достатъчни, за да се опише напълно вътрешното напрегнато състояние, и че S_{ij} действително е тензор. Да предположим, че искаме да знаем силата, която действува върху повърхност, наклонена под някакъв произволен ъгъл. Можем ли да я намерим с помощта на S_{ij}? Може и това се прави по следния начин. Представете си малка призмичка, на която едната стена N е наклонена, а другите са успоредни на координатните оси. Ако стената N е успо-



Фиг. 31-7. Силата, която действува върху повърхнинен елемент, перпендикулярен на оста y, се разлага на три взаимно перпендикулярни компоненти



Фиг. 31-8 Разлагане на компоненти на силата $\mathbf{F}_n$, която действува върху стената N (с единична нормала $\mathbf{n}$)

редна на оста z, ще се получи картина, показана на фиг. 31-8 (това е частен случай, но той достатъчно добре илюстрира общия метод). По-нататък натискът, действуващ на тази призмичка, трябва да бъде такъв, че тя да се намира в равновесие (най-малко в границите на безкрайно малкия размер), така че действуваща върху нея пълна сила трябва да бъде равна на нула. Силите, които действуват на стените, успоредни на координатните оси, са ни известни непосредствено от тензора S_{ij}. А тяхната векторна сума трябва да бъде равна на силата, която действува върху стената N, така че тази сила може да се изрази чрез тензора S_{ij}.

Нашето допускане, че повърхностните сили, действуващи върху един малък обем, се намират в равновесие, предполага отсъствието на обемни сили, подобни на гравитационната сила или на псевдосилите, които също могат да бъдат налице, ако нашата координатна система е неинерциална. Забележете обаче, че такива обемни сили ще бъдат пропорционални на *обема* на призмичката и поради това пропорционални на $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, докато повърхностните сили са пропорционални на $\Delta x\,\Delta y$, $\Delta y\,\Delta z$ и т. н. И тъй ако размерите на призмичката са достатъчно малки, обемните сили ще бъдат пренебрежимо малки в сравненне с повърхнините.

А сега да съберем силите, които действуват върху нашата призмичка. Да се заемем най-напред с x — компонентата, която се състои от пет части, по една от всяка стеничка. Но ако Δz е достатъчно малко, то силите от триъгълните стени (перпендикулярни на оста z) ще бъдат равни по големина и противоположни по посока, така че тях можем да ги забравим. Върху основата на призмата ще действува x-компонентата на силата

$$\Delta F_{x2} = S_{xy}\,\Delta x\,\Delta y,$$

а x-компонентата на силата, която действува върху вертикалната правоъгълна стена, ще бъде

$$\Delta F_{x1} = S_{xx}\,\Delta y\,\Delta z.$$

Сумата от тези две сили трябва да бъде равна на x-компонентата на силата, която действува отвън върху стената N. Да означим с $\mathbf{n}$ единичния вектор на нормалата към стената N, а с $\mathbf{F}_n$ действуващата върху нея сила, тогава получаваме:

$$\Delta F_{xn} = S_{xx}\,\Delta y\,\Delta z + S_{xy}\,\Delta x\,\Delta z.$$

Съставящата на напреженията по оста x (S_{xn}), която действува в тази равнина, е равна на силата ΔF_{xn}, делена на площта, т. е. $\Delta z\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, или

$$S_{xn} = S_{xx}\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} + S_{xy}\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}.$$

Но както се вижда от фиг. 31-8, отношението $\Delta x/\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ представлява косинусът на ъгъла θ между $\mathbf{n}$ и оста y и може да бъде записано като n_y, т. е. y-компонентата на вектора $\mathbf{n}$. Аналогично $\Delta y/\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ е равно на $\sin\theta = n_x$. Поради това можем да напишем

$$S_{xn} = S_{xx}n_x + S_{xy}n_y.$$

Ако сега обобщим това за произволен елемент от повърхността, ще получим

$$S_{xn} = S_{xx}n_x + S_{xy}n_y + S_{xz}n_z,$$

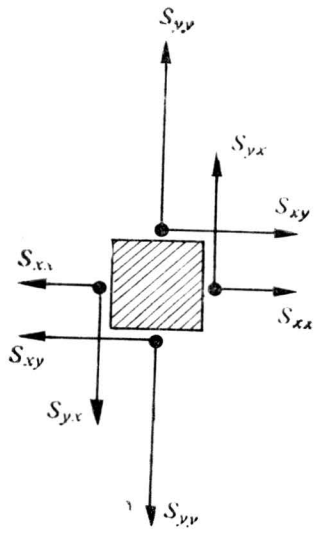
или по-общо

$$S_{in} = \sum_j S_{ij}\,n_j. \tag{31.24}$$

Така че ние действително можем да изразим силата, която действува върху произволна площ, посредством елементите S_{ij} и напълно да опишем вътрешното напрежение.

Уравнението (31.24) ни говори, че тензорът S_{ij} свързва силата $\mathbf{S}_n$ с единичния вектор $\mathbf{n}$ точно така, както α_{ij} свързват $\mathbf{P}$ с $\mathbf{E}$. Но тъй като $\mathbf{n}$ и $\mathbf{S}_n$ са вектори, то компонентите S_{ij} при изменение на координатните оси трябва да се трансформират като тензор. Така че S_{ij} действително е тензор.

Може също да се докаже, че S_{ij} представлява симетричен тензор. Затова е необходимо да обърнем внимание на силите, които действуват върху едно кубче във веществото. Да вземем кубче, чиито стени са успоредни на координатните оси, и да разгледаме неговия разрез (фиг. 31-9). Ако ребрата на кубчето са равни на единица, x- и y-компонентите на силите, приложени върху стените, перпендикулярни към осите x и y, трябва да бъдат такива, както е показано на чертежа. Ако вземем достатъчно малко кубче, можем да се надяваме, че напреженията на неговите противоположни стени ще се различават малко и поради това компонентите на силите трябва да бъдат равни и противоположни, както това е показано на чертежа. Забележете сега, че върху кубчето не трябва да действува никакъв момент на сили, защото иначе кубчето ще започне да се върти. Но пълният момент спрямо центъра е равен на произведението $(S_{yx}-S_{xy})$ по единичната дължина на реброто на кубчето, а тъй като пълният момент е равен на нула, то S_{yx} трябва да бъде равно на S_{xy} и следователно тензорът на напреженията се оказва симетричен.



Фиг. 31-9 x- и y-компонентите на силата, които действуват върху четири тени на малък единичен куб

Благодарение на тази симетрия тензорът S_{ij} може също да се описва от елипсоид с три главни оси. Напрежението има особено прост вид върху повърхности, нормални към тези оси. То съответствува на чисто свиване или разтегляне в посока на главните оси. По протежение на тези площадки няма никакви тангенциални сили, при това такива оси, за които тангенциални сили липсват, може да се изберат за всяко напрежение. Ако елипсоидът се превръща в сфера, то във всяко направление действуват само нормални сили. Това съответствува на хидростатично налягане (положително или отрицателно). Така че за хидростатичното налягане тензорът е диагонален, при това всичките негови три компоненти са равни една на друга (фактически те са равни просто на налягането p). В този случай можем да пишем

$$S_{ij}=p\,\delta_{ij}. \tag{31.25}$$

Изобщо тензорът на напреженията в къс твърдо тяло, а също така неговият елипсоид се променят от точка в точка и затова, за да опишем целия къс, трябва да зададем всяка компонента S_{ij} като функция на мястото. Тензорът на напреженията се оказва следователно *поле*. Ние вече имахме примери за скаларни полета, подобни на температурата $T(x, y, z)$, и *векторни полета*, подобни на $\mathbf{E}(x, y, z)$, които във всяка точка се задават с три числа. А сега пред нас имаме пример за *тензорно поле*, което се задава за всяка точка от пространството с девет числа, от които за симетричния тензор S_{ij} всъщност остават само шест. Пълното описание на вътрешните сили в произволно твърдо тяло изисква познаването на шест функции на координатите x, y и z.

31-7. Тензори от по-високи рангове

Тензорът на напреженията S_{ij} описва *вътрешните* сили във веществото. Ако при това материалът е еластичен, то удобно е вътрешните *деформации* да се описват с помощта на друг тензор T_{ij}, така наречения тензор на *деформациите*. За прост обект, подобен на блокче от метал, изменението на дължината ΔL, както знаете, е приблизително пропорционално на силата, т. е. то се подчинява на закона на Хук

$$\Delta L=\gamma F.$$

За произволни деформации на еластично твърдо тяло тензорът

на деформациите T_{ij} е свързан с тензора на напреженията S_{ij} посредством система линейни уравнения

$$T_{ij}=\sum_{k,l}\gamma_{ijkl}S_{kl}. \tag{31.26}$$

Вие знаете също, че и потенциалната енергия на пружина (или на блокче) е

$$\frac{1}{2}F\Delta L=\frac{1}{2}\gamma F^2,$$

а обобщението на *плътността* на еластичната енергия за твърдо тяло е

$$U_{\text{ел}}=\sum_{ijkl}\frac{1}{2}\gamma_{ijkl}S_{ij}S_{kl}. \tag{31.27}$$

Еластичните свойства на кристала могат да се определят напълно от коефициентите γ_{ijkl}. Това ни запознава с един нов вид звяр. Това е тензор от четвърти ранг. Тъй като всеки от индексите може да взима едно от трите значения — x, y или z, получават се общо $3^4=81$ коефициента. Но *различни* измежду тях в действителност са само 21. Първо, тъй като тензорът S_{ij} е симетричен, той има само шест различни величини и поради това в уравнението (31.27) са необходими само 36 *различни* коефициента. След това, без да изменяме енергията, можем да разместим S_{ij} и S_{kl}, така че γ_{ijkl} трябва да бъде симетричен при разместването на двойки индекси ij и kl. Това намалява броя на коефициентите до 21. И тъй, за да описваме еластичните свойства на кристал от най-ниската възможна симетрия, са необходими 21 еластични константи. Разбира се, за кристалите с по-висока симетрия броят на необходимите константи намалява. Така например кубическият кристал се описва всичко от три еластични константи, а за изотропно вещество стигат и две. Във верността на последното твърдение можем да се убедим по следния начин. В случая на изотропен материал компонентите не трябва да се променят при завъртане на осите. Как може да се постигне това? *Отговор*: те могат да бъдат независими само когато се изразяват посредством тензора δ_{ij}. Тук има само два възможни израза които имат исканата симетрия — това са $\delta_{ij}\delta_{kl}$ и $\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}$, така че γ_{ijkl} трябва да бъде тяхна линейна комбинация. Следователно за изотропна среда

$$\gamma_{ijkl}=a(\delta_{ij}\delta_{kl})+b(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$$

и за да опишем еластичните свойства на такова вещество, са ни необходими две константи: a и b. Аз ви предоставям сами да докажете, че за кубическия кристал са необходими само три такива константи.

И още един последен пример (този път пример за тензор от трети ранг) ни дава пиезоелектрическият ефект. При напрегнато състояние в кристала възниква електрическо поле, пропорционално на тензора на напреженията. Общият закон на пропорционалността има вида

$$E_i=\sum_{jk}P_{ijk}S_{jk},$$

където E_i е електричното поле, а P_{ijk} са приезоелектрическите коефициенти (пиезомодулите), които образуват тензор. Можете ли да докажете сами, че ако кристалът има център на инверсия (т. е. ако е инвариантен спрямо замяната на x, y и z, с $-x-y$ и $-z$), то всички негови пиезоелектрически коефициенти са равни на нула?

31-8. Четиримерен тензор на електромагнитния импулс

Всички тензори, които срещнахме в тази глава, бяха свързани с тримерното пространство. Те бяха определени като величини, притежаващи известни трансформационни свойства при пространствени въртения. В глава 26 ние имахме възможност да се възползуваме от тензор в релативистичното четиримерно пространство-време: това беше тензорът на електромагнитното поле $F_{\mu\nu}$. Компонентите на такъв четиримерен тензор се трансформират по особен начин при трансформациите на Лоренц. (Ние наистина не сме правили това, но бихме могли да разглеждаме Лоренцовите трансформации като своего рода „въртене“ в четиримерното „пространство“, наричано пространство на Минковски; тогава аналогията с това, което разглеждахме, би била поярка).

В качеството на последен пример да разгледаме друг тензор в четирите измерения (t, x, y, z) на теорията на относителността. Когато говорихме за тензора на напреженията, определихме S_{ij} като компонента на силата, действуваща върху единица площ. Но силата е равна на скоростта на изменение на импулса с времето. Поради това вместо да казваме, че „S_{xy} представлява x-компонентата по силата, която действува върху единица площ, перпендикулярна на оста y“, ние с еднакво основание можем да кажем: „S_{xy} представлява скоростта на потока на x-компонентата на импулса през единица площ, перпендикулярна на оста y“. С други думи, всеки член S_{ij} представлява поток на i-тата компонента на импулса през единица площ, перпендикулярна на оста j. Така стои работата с чисто пространствените компоненти. Но те представляват само част от „големия“ тензор $S_{\mu\nu}$ в четиримерното пространство (μ и $\nu = t, x, y, z$), който съдържа още допълнителните компоненти S_{tx}, S_{yt}, S_{tt} и т. н. Да се опитаме сега да изясним физическия смисъл на тези допълнителни компоненти.

Известно ни е, че пространствените компоненти представляват поток на импулса. За да намерим ключа към разпространяването на това понятие и върху „времевото направление“, да се обърнем към „поток“ от друг вид — потока на електричния заряд. Скоростта на потока на една скаларна величина, подобна на заряда (през единица площ, перпендикулярна на потока), представлява пространствен вектор — векторът на плътността на тока $\mathbf{j}$. Ние видяхме, че времевата компонента на вектора на потока — това е плътността на течащото вещество. Например $\mathbf{j}$ може да се комбинира с плътността на заряда $j_t = \rho$ и да се получи четиривекторът $j_\mu = (\rho, \mathbf{j})$, т. е. индексът μ на вектора j_μ приема четири значения: t, x, y, z, което означава „плътност“, „скорост на потока в x-направление“, „скорост на потока в y-направление“ и „скорост на потока в z-направление“ — всичко това на скаларния заряд. Сега по аналогия с нашето твърдение за компонентата по времето на потока на една скаларна величина може да се очаква, че заедно с S_{xx}, S_{xy} и S_{xz}, които описват потока на x-компонентата на импулса, трябва да има и времева компонента S_{xt}, която по тази идея трябва да описва плътността на това, което тече, т. е. S_{xt} трябва да бъде плътността на x-компонентата на импулса. По такъв начин ние можем да разширим нашия тензор в хоризонтално направление, като включим в него t-компонентата, и на наше разположение се оказват:

S_{xt} — плътността на x-компонентата на импулса,

S_{xx} — потокът на x-компонентата на импулса в направление на оста x,

S_{xy} — потокът на y-компонентата на импулса в направление на оста y.

S_{xz} — потокът на x-компонентата на импулса в направление на оста z.

Аналогично нещо става и с y-компонентата. Ние имаме три компоненти на потока — S_{yx}, S_{yy} и S_{yz}, към които е необходимо да се добави четвърти член:

S_{yt} — плътността на y-компонентата на импулса,

а към трите компоненти S_{zx}, S_{zy} и S_{zz} добавяме

S_{zt} — плътността на z-компонентата на импулса.

В четиримерното пространство съществува също и t-компонента на импулса, която, както знаем, представлява енергията. Така че тензорът S_{ij} трябва да се продължи по вертикалата с, включването в него на S_{tx}, S_{ty} и S_{tz}, където:

S_{tx} — е потокът на енергията по оста x,

S_{ty} — е потокът на енергията по оста y (31.28)

S_{tz} — е потокът на енергията по оста z, т. е.

S_{tx} представлява потокът на енергията в единица време през повърхност с единична площ перпендикулярна на оста x и т. н. Накрая за да попълним нашия тензор, е необходима още и величината S_{tt}, която трябва да бъде *плътност на енергията*. И тъй ние разширихме нашия тримерен тензор на напреженията до четиримерен *тензор на енергията — импулса* $S_{\mu\nu}$. Индексът μ може да приема четири значения: t, x, y и z, които означават „плътност", „поток през единица площ в направление на оста x, „поток през единица площ в неправление на оста y" и „поток през единица площ в направление на оста z". Индексът ν също приема четири значения: t, x, y, z, които ни говорят какво тече, а именно: „енергия", „x-компонента на импулса", „y-компонента на импулса", или „z-компонента на импулса".

Като пример ще разгледаме този тензор не във веществото, а в празното пространство, в което има електромагнитно поле. Вие знаете, че потокът на енергията на електромагнитното поле се описва от вектора на Пойнтинг $\mathbf{S}=\varepsilon_0 c^2\,\mathbf{E}\times\mathbf{B}$. Така че x-, y- и z-компонентите на вектора от релативистична гледна точка са компонентите S_{tx}, S_{ty} и S_{tz} на четиримерния тензор на енергията-импулса. Симетрията на тензора S_{ij} се пренася и на времевите компоненти, така че четиримерният тензор $S_{\mu\nu}$ е също симетричен

$$S_{\mu\nu}=S_{\nu\mu}. \tag{31.29}$$

С други думи, компонентите S_{xt}, S_{yt}, S_{zt}, които представляват *плътностите* на x-, y- и z-компонентите на импулса, са равни. също на x-, y- и z- компонентите на вектора на Пойнтинг $\mathbf{S}$, или, както видяхме по-рано от други съображения, на вектора на *потока на енергията*.

Останалите компоненти на тензора на електромагнитните напрежения $S_{\mu\nu}$ също могат да се изразят посредством електрическото и магнитното полета $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. С други думи, ние трябва да допуснем съществуването на тензор на напрежения на електромагнитното поле в празното пространство, или, изразявайки се по-малко тайствено, на поток на импулса на електромагнитното поле. Ние вече обсъждахме това в гл. 27 във връзка с уравнението (27.21), но тогава не се впуснахме в детайли.

На тези от вас, които искат да изпитат своята смелост при четиримерните тензори, може да се понрави изразът за тензора $S_{\mu\nu}$ чрез полето

$$S_{\mu\nu}=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\sum_{\alpha} F_{\mu\alpha}\,F_{\nu\alpha}-\frac{1}{4}\,\delta_{\mu\nu}\sum_{\alpha\beta} F_{\beta\alpha}\,F_{\beta\alpha}\right),$$

където сумирането по α и β става по всички техни значения (т. е. t, x, y и z), но както обикновено в теорията на относителността за сумата Σ и символа δ се приема специално споразумение. В сумата компонентите с индекси x, y и z трябва да се *изваждат*, а $\delta_{tt}=+1$, докато $\delta_{xx}=\delta_{yy}=\delta_{zz}=-1$ и $\delta_{\mu\alpha}=0$ за всички $\mu\neq\nu$ ($c=1$). Бихте ли могли да докажете, че тази формула води до плътност на енергията $S_{tt}=(\varepsilon_0/2)(E^2+B^2)$ и до вектор на Поинтинг $\varepsilon_0\,\mathbf{E}\times\mathbf{B}$?[1] Ще можете ли да покажете, че в електростатичното поле, когато $\mathbf{B}$ е равно на нула, главната ос на напреженията е насочена по електрическото поле и по посока на полето възниква *напрежение* $(\varepsilon_0/2)\,E^2$ и равно на него *налягане* в направление, перпендикулярно на напрежението на полето?

[1] Ако не се положи $c=1$, както това е направено тук, плътността на енергията в приетите в книгата единици ще бъде равна на $(\varepsilon_0/2)(E^2+c^2B^2)$ или в единиците *СИ* $^1/_2[\varepsilon^0 E^2+(1/\mu_0)B^2]$. (заб. на рус. ред.)

32

Коефициент на пречупване на плътно вещество

32-1. Поляризиране на веществото

Сега ние искаме да обсъдим явлението пречупване на светлината и също, разбира се, поглъщането ѝ от плътните вещества. Ние вече разглеждахме в гл. 31 (т. I) теорията на коефициента на пречупването, но тогава нашите знания по математика бяха твърде ограничени и ние се спряхме само върху коефициента на пречупване на вещество с малка плътност, подобно на газовете. Но физичните принципи, които водят до появата на показателя на пречупване, ние все пак там изяснихме. Електрическото поле на светлинната вълна поляризира молекулите на газа, създавайки при това осцилиращи диполни моменти, а ускорението на осцилиращите заряди води до излъчване на нови вълни. Това ново вълново поле интерферира със старото и го променя. Промяната на полето е еквивалентна на отместване на фазата на първоначалната вълна. Следствие на това, че фазовото отместване е пропорционално на пътя на вълната през веществото, ефектът като цяло се оказва еквивалентен на изменение на фазовата скорост на светлината във веществото. Преди, когато разглеждахме това явление, пренебрегвахме усложненията, възникващи от такива ефекти като действието на новата, изменена вълна върху полето на осцилиращия дипол. Ние предполагахме, че силите, които действуват върху зарядите на атомите, се определят само от падащата вълна, докато в действителност върху осцилатора действува не само падащата вълна, но също и вълните, излъчени от другите атоми. Тогава на нас ни беше трудно да отчетем този ефект и поради това изучавахме само разредените газове, където той може да се смята за несъществен.

А ето сега вече ще видим, че тази задача се решава просто с помощта на диференциални уравнения. Този метод замъглява

32-1. Поляризиране на веществото

32-2. Уравнения на Максвел в диелектрик

32-3. Вълни в диелектрик

32-4. Комплексен коефициент на пречупването

32-5. Коефициент на пречупване на смес

32-6. Вълни в метали

32-7. Нискочестотно и високочестотно приближения; дълбочина на скин-слоя и плазмена честота

Преговорете всичко, което е дадено в таблица (32-1)

Таблица 32-1

Какво ще бъде използувано в тази глава

Явление	В какво място на курса трябва да се търси това?	Уравнение
Принудени трептения	гл. 23 (т. I)	$m(\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x)=F$
Коефициент на пречупване на газ	гл. 31 (т. I)	$n=1+\frac{1}{2}\frac{Nq_e^2}{\varepsilon_0(\omega_0^2-\omega^2)}$ $n=n'-in''$
Подвижност	гл. 41 (т. I)	$m\ddot{x}+\mu\dot{x}=F$
Електропроводимост	гл. 43 (т. I)	$\mu=\frac{\tau}{m}$; $\sigma=\frac{Nq_e^2\tau}{m}$
Поляризация	гл. 10 (т. II)	$\rho_{\text{пол}}=-\nabla\cdot\mathbf{P}$
Поле в диелектрик	гл. 11 (т. II)	$\mathbf{E}_{\text{лок}}=\mathbf{E}+\frac{1}{3\varepsilon_0}\mathbf{P}$

физичната причина за възникването на пречупването (като резултат от интерференцията на вторично излъчените вълни с първоначалните), но затова пък опростява теорията на плътното вещество. В тази глава ще се концентрира много от това, което правихме вече по-рано. Практически ние вече получихме всичко, което ни е необходимо, така че истински новите идеи ще бъдат сравнително малко в тази глава. Тъй като на вас може да ви се иска да освежите в паметта си това, с което ще се срещнем тук, то в таблица 32-1 се дава списък на уравненията, които аз имам намерение да използувам заедно с указание на местата, където те могат да бъдат намерени. В много случаи поради недостиг на време аз няма да давам физическите аргументи, а направо ще се залавям за уравненията.

Ще започна с напомняне за механизма на пречупване в газ. Ние предполагаме, че в единица обем от газа се намират N частици и всяка от тях се държи като хармоничен осцилатор. Ние използувахме модел на атома или молекула, към който електронът е привързан със сила, пропорционална на неговото отместване (като че ли той се удържа от пружина). Да отбележим, че такъв модел на атома е незаконен от *класическа* гледна точка, обаче по-късно ще бъде показано, че правилната квантово-механическа теория дава (в най-простите случаи) еквивалентен резултат. В нашите предишни разглеждания не отчитахме „спиращата" сила в атомния осцилатор, а сега това ще бъде направено. Такава сила съответствува на съпротивление при движението, т. е силата е пропорционална на скоростта на електрона. Уравнението на движението

$$\mathbf{F}=q_e\,\mathbf{E}=m(\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0{}^2x), \tag{32.1}$$

където x е отместването по направление на полето $\mathbf{E}$. (Осцилаторът се предполага *изотропен*, т. е. връщащата сила е еднаква по всички направления. Освен това временно ще се ограничим с линейно поляризирана вълна, така че полето $\mathbf{E}$ няма да мени своето направление.) Ако електрическото поле, което действува върху атома, се променя с времето синусоидално, ние пишем

$$E=E_0e^{i\omega t}. \tag{32.2}$$

Със същата честота ще осцилира и преместването и поради това можем да смятаме, че

$$x=x_0e^{i\omega t},$$

заместваики $\dot{x}=i\omega x$ и $\ddot{x}=-\omega^2x$, можем да изразим x посредством E

$$x=\frac{q_e/m}{-\omega^2+i\gamma\omega+\omega_0^2}\,E. \tag{32.3}$$

А като знаем преместването, можем да пресметнем ускорението $\ddot{x}$ и да намерим отговорната за пречупването излъчена вълна. Именно по такъв начин в гл. 31 (т. I) ние пресметнахме коефициента на пречупването.

Сега ще тръгнем по друг път. Индуцираният диполен момент на атома p е равен на q_ex, или предвид уравнението (32.3)

$$\mathbf{p}=\frac{q_e^2/m}{-\omega^2+i\gamma\omega+\omega_0^2}\,\mathbf{E}. \tag{32.4}$$

Тъй като $\mathbf{p}$ е пропорционално на $\mathbf{E}$, ние пишем

$$\mathbf{p}=\varepsilon_0\,\alpha(\omega)\,\mathbf{E}, \tag{32.5}$$

където α е *атомната поляризация*[1]

[1] Навсякъде в тази глава ще използуваме означенията, приети в гл. 31 (т. I) нека α е *атомната* поляризуемост, както това е определено тук. В предната глава ние използувахме буквата α, за да означим обемната поляризуемост, т. е. отношението на P към E. Но в означенията на *тази* глава $P=N\alpha\varepsilon_0E$ /вж. израза (32.8)/.

$$\alpha = \frac{q_e/m\varepsilon_0}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}. \tag{32.6}$$

Подобен отговор за движението на електрона в атома дава и квантовата механика, но тя взема предвид следните особености. Атомите имат няколко собствени честоти и всяка от тях има своя дисипативна константа γ. Освен това всяка хармонична има още своята ефективна „сила", представляваща произведение на поляризацията при дадена честота по константата на връзката f, която, както трябва да се очаква, е от порядъка на единица. Означавайки трите параметъра ω_0, γ и f за всяка една от хармоничните с ω_{ok}, γ_k и f_k и сумирайки по всички хармонични, вместо (32.6) получаваме

$$\alpha(\omega) = \frac{q_e^2}{\varepsilon_0 m} \sum_k \frac{f_k}{-\omega^2 + i\gamma_k\omega + \omega_{ok}^2}. \tag{32.7}$$

Ако броят на атомите в единица обем от веществото е равен на N, то поляризацията $\mathbf{P}$ ще бъде просто $Np = \varepsilon_0 N\alpha E$, т. е. пропорционална на E

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 N \alpha(\omega)\, \mathbf{E}. \tag{32.8}$$

С други думи, когато върху веществото действува синусоидно електрично поле, то индуцира пропорционален на себе си диполен момент. При това коефициентът на пропорционалност, както вече отбелязахме, зависи от честотата. При много големи честоти α е малък: реакцията на средата е слаба. Но при ниски честоти реакцията може да бъде много силна. Коефициентът на пропорционалност освен това се оказва комплексен, т. е. поляризацията не следва точно всички изменения на електрическото поле, а в известна степен може да бъде отместена по фаза. Във всеки случай електричното поле предизвиква във веществото поляризация, пропорционална на неговия интензитет.

32-2. Уравнения на Максвел в диелектрик

Наличието на поляризация във веществото означава, че там възникват поляризационни заряди и токове, които трябва да се вземат предвид в пълните уравнения на Максвел при намирането на полето. Сега ние се каним да решаваме уравненията на Максвел за случая, когато зарядите и токовете не са равни на нула, но се определят неявно от вектора на поляризацията. Нашата първа крачка трябва да бъде явното намиране на плътността на зарядите ρ и плътността на тока $\mathbf{j}$, усреднени по същия малък обем, който имахме предвид при определянето на вектора $\mathbf{P}$. След това необходимите ни стойности на ρ и $\mathbf{j}$ могат да бъдат определени от поляризацията. В гл. 10 ние видяхме, че когато поляризацията $\mathbf{p}$ се мени от точка в точка, възниква плътност на заряда

$$\rho_{\text{пол}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \tag{32.9}$$

Тогава ние имахме работа със статични полета, но тази формула е валидна и за променливи полета. Обаче когато $\mathbf{P}$ се изменя с времето, зарядите се движат така, че се появява и поляризационен *ток*. Всеки един от осцилиращите заряди внася в тока своя дял, равен на произведението от заряда q_e по скоростта v. Ако в единица обем зарядите са N на брой, плътността на тока $\mathbf{j}$ е

$$\mathbf{j} = N q_e \mathbf{v}.$$

И сега, тъй като знаем, че $v = dx/dt$, следва $j = N q_e (dx/dt)$, което е равно точно на dp/dt. Следователно при променлива поляризация възниква плътност на тока

$$\mathbf{j}_{\text{пол}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \tag{32.10}$$

Нашата задача стана сега проста и разбрана. Ние пишем уравненията на Максвел с плътности на заряда и плътността на тока, определени от поляризацията P посредством уравненията (32.9) и (32.10) (предполага се, че във веществото няма други заряди и токове). Сега остава да свържем P с E посредством формулата (32.5) и да решим спрямо E и B, търсейки при това вълново решение.

Но преди да пристъпим към решаването, искам да направя една забележка от исторически характер. Първоначално Максвел е писал своите уравнения във форма, различна от този, в която ги използуваме ние. И именно поради това, че уравненията са били писани в друга форма в течение на много години (а и сега много ги пишат така), аз ще се постарая да ви обясня разликата. Навремето механизмът на диелектричната проницаемост не е бил ясен с необходимата пълнота. Не е била ясна нито същността на атомите, нито съществуването на поляризация във веществото. Затова тогава не са разбирали, че $\nabla \cdot \mathbf{P}$ дава допълнителен дял в плътността на заряда ρ. Известни са били само зарядите, които не са били свързани в атомите (такива като зарядите, течащи по проводника или възникващи при триене).

Днес ние предпочитаме да означаваме посредством ρ *пълната* плътност на зарядите, включвайки в нея и зарядите, свързани с атомите. Ако наречем тази част на зарядите $\rho_{\text{пол}}$, можем да напишем

$$\rho = \rho_{\text{пол}} + \rho_{\text{др}},$$

където $\rho_{\text{др}}$ представлява плътността на зарядите, отчетена от Максвел и отнасяща се към другите заряди, несвързани с определени атоми. При това ние бихме написали

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{пол}} + \rho_{\text{др}}}{\varepsilon_0}$$

и след заместване на $\rho_{\text{пол}}$ от (32.9) получаваме

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{др}}}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P},$$

или

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{\text{др}}. \tag{32.11}$$

В плътността на тока, фигурираща в уравненията на Максвел за $\nabla \times \mathbf{B}$, също се внася дял от свързаните атомно-електронни токове. Поради това можем да пишем

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{пол}} + \mathbf{j}_{\text{др}},$$

при което уравнението на Максвел добива вида

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}_{\text{др}}}{\varepsilon_0} + \frac{\mathbf{j}_{\text{пол}}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{32.12}$$

Използувайки уравнението (32.10), получаваме

$$\varepsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}_{\text{др}} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}). \tag{32.13}$$

Сега виждате, че ако бихме *определили* един нов вектор D

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \tag{32.14}$$

то двете уравнения на полето биха добили вида

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{др}} \tag{32.15}$$

и

$$\varepsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}_{\text{др}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{32.16}$$

Това е точно формата на уравненията, която Максвел използувал за диелектриците. Останалите две негови уравнения са

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

и

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0,$$

които точно съвпадат с нашите.

Пред Максвел и другите учени от неговото време възникнала проблемата за магнитните вещества (ние скоро ще се заловим с тях). Те нищо не са знаели за циркулиращите токове, причиняващи атомния магнетизъм, и поради това изпуснали още една част в плътността на тока. Вместо уравнението (32.16) те всъщност пишели

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{j}'+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \tag{32.17}$$

където $\mathbf{H}$ се отличава от $\varepsilon_0 c^2\mathbf{B}$, тъй като последният израз отчита ефектите от атомните токове. (Тогава $\mathbf{j}'$ представлява това, което остава от токовете.) По такъв начин у Максвел има четири полеви вектора: $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$. В два от тях — $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$, се скривало това, на което той не обърнал внимание — процесите, протичащи вътре във веществото. Уравненията, написани по този начин, можете да срещнете на много места.

За да се решат те, необходимо е $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ да се свържат с другите полета, поради което често пишат

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}\quad\text{и}\quad\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}. \tag{32.18}$$

Обаче тези връзки са верни само приблизително за някои вещества, и то само когато полетата не се променят твърде бързо с времето. (За синусоидално променящи се полета уравненията често може да се пишат по такъв начин, като се счита при това, че ε и μ са комплексни функции на честотата, но за произволни промени на полето с времето това е неверно.) В какви само хитрости не се впускат учените, за да решат уравненията! А на мен ми се струва, че най-правилно е да се оставят уравненията, записани посредством фундаменталните величини, както ги разбираме сега т. е. това, което и направихме.

32-3. Вълни в диелектрик

Сега ни предстои да намерим какъв вид електромагнитни вълни могат да съществуват в диелектрично вещество, където няма други заряди освен тези, които са свързани в атомите. Така че сега ще вземем $\rho=-\nabla\cdot\mathbf{P}$ и $\mathbf{j}=\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}$. При това уравненията на Максвел приемат такъв вид:

$$\text{a)}\ \nabla\cdot\mathbf{E}=-\frac{\nabla\cdot\mathbf{P}}{\varepsilon_0}\qquad\text{b)}\ c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}+\mathbf{E}\right) \tag{32.19}$$

$$\text{c)}\ \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\qquad\text{d)}\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0.$$

Ние можем да решим тези уравнения, както сме правили това и преди. Да започнем, като приложим към уравнението (32.19 c) операцията ротация

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=-\frac{\partial}{\partial t}\ \nabla\times\mathbf{B}.$$

Като използуваме след това векторното тъждество

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-\nabla^2\mathbf{E}$$

и заместим израза за $\nabla \times \mathbf{B}$ от (32.19, b), получаваме

$$\nabla (\nabla . \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Като използуваме уравнението (32.19, a) за $\nabla . \mathbf{E}$, намираме

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla (\nabla . \mathbf{P}) + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \qquad (32.20)$$

По този начин вместо вълновото уравнение ние сега получихме, че даламбертиана от **E** е равен на два члена, които съдържат поляризацията **P**.

Обаче **P** зависи от **E**, така че уравнението 32.20 все още допуска вълнови решения. Сега ние ще се ограничим с *изотропни* диелектрици, т. е. **P** винаги ше има същата посока, както и **E**. Ще се опитаме да намерим решение за вълни, които се движат по посока на оста z. Електрическото поле при това ще се променя като $e^{i(\omega t - kz)}$. Да предположим също, че вълната е поляризирана в направление на оста x, т. е. че електрическото поле има само x-компонента. Всичко това се записва по следния начин

$$E_x = E_0 \, e^{i(\omega t - kz)} \qquad (32.21)$$

Вие знаете, че всяка функция от $(z - vt)$ представлява вълна, която се движи със скорост v. Показателят на експонентата в израза (32.21) може да се напише във вида:

$$-ik\left(z - \frac{\omega}{k} t\right),$$

така че изразът (32.21) представлява вълна, чиято фазова скорост е

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k}.$$

В чл. 31, т. I коефициентът на пречупването n беше определен от формулата

$$v_{\text{фаз}} = \frac{c}{n}.$$

Като имаме предвид тази формула, (32.21) добива вида

$$E_x = E_0 \, e^{i\omega(t - nz/c)}.$$

Следователно коефициентът n може да се определи, ако първо намерим величината k, при която изразът (32.21) удовлетворява съответните уравнения на полето, и след това използуваме равенството

$$n = \frac{kc}{\omega}. \qquad (32.22)$$

В изотропна среда поляризацията ще има само x-компонента; освен това **P** не се изменя с промяната на координатата x, поради което $\nabla . \mathbf{P} = 0$ и ние веднага се избавяме от първия член в дясната страна на уравнението (32.20). Освен това ние считаме, че нашият диелектрик е „линеен“, така че P_x ще се изменя като $e^{i\omega t}$ и $\partial^2 P_x / \partial t^2 = -\omega^2 P_x$. Лапласиана в уравнението (32.20) се превръща просто в $\partial^2 E_x / \partial z^2 = -k^2 E_x$, така че получаваме

$$-k^2 E_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = -\frac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2} P_x. \qquad (32.23)$$

Сега да приемем за минута, че щом като **E** се изменя синусоидално, **P** може да се смята пропорционално на **E**, както в уравнението (32.5) (по-късно ние ще се върнем към това допускане и ще го обсъдим). Това ни дава възможност да пишем

$$P_x = \varepsilon_0 N \alpha E_x.$$

При това E_x изпада от уравнението (32.23) и намираме

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1 + N\alpha). \tag{32.24}$$

Получихме, че вълна от вида (32.21) с вълново число k, определено от уравнението (32.24), ще удовлетворява уравненията на полето. Изразът (32.22), използуван за коефициента n, дава

$$n^2 = 1 + N\alpha. \tag{32.25}$$

Да сравним тази формула с това, което получихме за коефициента на пречупване на газ (глава 31, т. I). Там намерихме уравнението (31.19), което тогава имаше вида

$$n = 1 + \frac{1}{2}\frac{Nq_e^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2}. \tag{32.26}$$

Формулата (32.25) след заместване на α от (32.6) дава

$$n^2 = 1 + \frac{Nq_e^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}. \tag{32.27}$$

Какво ново има тук? Първо, появи се новият член $i\gamma\omega$, който възниква в резултат на отчитането на поглъщането на енергията в осцилаторите. Второ, отляво вместо n сега стои n^2 и освен това липсва допълнителният множител 1/2. Но забележете, че ако стойността на N е достатъчно малка, така че n да бъде близко до единица (както това става в газовете), то изразът (32.27) ни говори, че n^2 е равно на единица плюс някакво малко число, т. е. $n^2 = 1 + \varepsilon$. При това условие можем да пишем, че $n = \sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon/2$, и двата израза се оказват еквивалентни. Оказва се, че нашият нов метод дава за газовете същия, намерен по-рано резултат.

Сега можем да се надяваме, че изразът (32.27) трябва да дава коефициента на пречупване и за твърди вещества. Но поради известни причини той се нуждае от модификация. Първо, при изваждането на това уравнение предполагахме, че поляризираното поле действуващо върху всеки един от атомите, е полето E_x. Обаче това предположение не е вярно, тъй като в плътно вещество съществуват и други полета, създавани от съседните атоми, които могат да бъдат сравними с E_x. Ние вече разгледахме аналогична задача при изучаване на статическите полета в диелектрика (вж. гл. 11). Вие вероятно помните, че тогава намерихме полето, действуващо върху отделния атом, като го представихме, че се намира в сферична кухина в околния диелектрик. Полето в такава кухина (ние го нарекохме локално) се увеличава в сравнение със средното поле $\mathbf{E}$ със стойността $\mathbf{P}/3\varepsilon_0$ (не забравяйте обаче, че този резултат, строго казано, е валиден само за изотропна среда, а също така и в случая на кубичен кристал).

Същите разсъждения са верни и за електрическото поле във вълната, но само докато нейната дължина е много по-голяма от разстоянията между атомите. При такова ограничение

$$\mathbf{E}_{\text{лок}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}. \tag{32.28}$$

Именно това локално поле трябва да се използува вместо $\mathbf{E}$ в (32.8), т. е. този израз трява да бъде преписан по следния начин

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 N\alpha\, \mathbf{E}_{\text{лок}}. \tag{32.29}$$

Като заместим сега $\mathbf{E}_{\text{лок}}$ от формулата (32.28), намираме

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 N\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}\right)$$

или

$$\mathbf{P} = \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)}\varepsilon_0 \mathbf{E}. \tag{32.30}$$

С други думи, и за плътно вещество все още **P** е пропорционално на **E** (за синусово поле). Обаче коефициентът на пропорционалност ще бъде вече $\varepsilon_0 N\alpha/[1-(N\alpha/3)]$, а не $\varepsilon_0 N\alpha$, както по-рано. Поради това необходимо е да поправим формулата (32.25)

$$n^2 = 1 + \frac{N\alpha}{1-(N\alpha/3)}; \tag{32.31}$$

по-удобно е да препишем това в следния вид

$$3\,\frac{n^2-1}{n^2+2} = N\alpha, \tag{32.32}$$

който алгебрически е еквивалентен на предишния. Това е известната формула на Клаузиус—Мосоти.

В плътно вещество възниква и друго усложнение. Тъй като атомите са разположени твърде плътно, те силно си взаимодействуват. Поради това вътрешните хармонични на осцилациите се променят. Собствените честоти на атомните осцилации се размазват от тези взаимодействия и обикновено твърде силно се намаляват от тях, а коефициентът на триене става много голям. Поради това всички ω_0 и γ на твърдото вещество ще бъдат различни от тези на свободните атоми. С тази уговорка все още можем да представим α поне приблизително чрез уравнението (32.7), така че

$$3\,\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{Nq_e^2}{m\varepsilon_0}\sum_{\kappa}\frac{f_k}{-\omega^2+i\gamma_\kappa\omega+\omega_{0k}^2} \tag{32.33}$$

На края последното усложнение. Ако плътното вещество представлява смес от няколко компоненти, то всяка от тях ще дава своя дял в поляризацията. Пълната α ще бъде сума от дяловете на различните компоненти на сместа (с изключение на неточността от приближението на локалното поле в подредените кристали, т. е. изразът (32.28), — ефектите, които обсъждахме при разглеждането на сегнетоелектриците). Означавайки с N_j броя на атомите от всяка компонента в единица обем, трябва да заменим формулата (32.32) със следната

$$3\,\frac{n^2-1}{n^2+2} = \sum_j N_j\alpha_j \tag{32.34}$$

където всяка α_j ще се определя от израза от типа (32.7). Изразът (32.34) завършва нашата теория за коефициента на пречупване. Величината $3(n^2-1)/(n^2+2)$ се дава от една комплексна функция на честотата, каквато представлява средната атомна поляризуемост $\alpha(\omega)$. Точното пресмятане на $\alpha(\omega)$ (т. е. намирането на f_k, γ_k и ω_{0k}) за плътното вещество представлява една от най-трудните задачи на квантовата механика. Това е направено само за няколко особено прости вещества.

32-4. Комплексен коефициент на пречупване

Да обсъдим сега следствията от нашия резултат (32.33). Преди всичко обърнете внимание на това, че α е комплексно число, така че коефициентът на пречупване n също се оказва комплексен. Какво означава това? Нека да запишем n във вид на реална и имагинерна части

$$n = n_R - in_I, \tag{32.35}$$

където n_R и n_I са реални функции от ω. Ние написахме in_I с отрицателен знак, така че n_I за обикновените оптически вещества ще бъде положителна величина (за обикновените оптически неак-

тивни вещества, които не представляват сами източници на светлина както лазерите, γ е положително число, а това прави имагинерната част n отрицателна). Нашата плоска вълна ще се запише сега посредством n по следния начин

$$E_x = E_0\, e^{-i\omega(t-nz/c)}$$

Ако заместим n във вид на израза (32.35), ще получим

$$E_x = E_0\, e^{-\omega n_I z}\, e^{i\omega(t-n_R z/c)} \tag{32.36}$$

Множителят $e^{i\omega(t-n_R z/c)}$ представлява просто вълна, която се разпространява със скорост c/n_R, т. е. n_R представлява това, което ние обикновено смятаме за коефициент на пречупването. Но *амплитудата* на тази вълна е

$$E_0\, e^{-\omega n_I z/c}$$

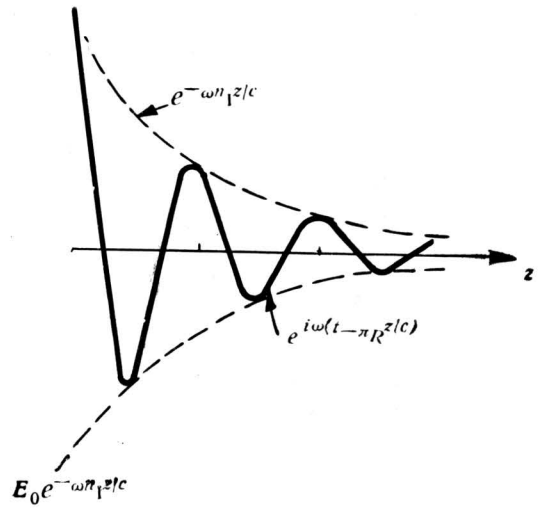
и с увеличаването на z тя експоненциално намалява. Графикът на интензитета на електрическото поле като функция от z в някакъв момент от времето и за $n_I \approx n_R/2\pi$ е показана фиг. 32-1. Имагинерната част на коефициента на пречупването води до отслабването на вълната поради загубите на енергия в атомните осцилатори. *Интензитетът* на вълната е пропорционален на квадрата на амплитудата, така че

$$\text{Интензитетът} \sim e^{-2\omega n_I z/c}.$$

Често това се записва и така

$$\text{Интезитетът} \sim e^{-\beta z},$$

където $\beta = 2\omega n_I/c$ представлява *коефициентът на поглъщането*. Следователно оказва се, че в уравнението (32.33) се съдържа не само теорията на коефициента на пречупване на веществото, но и теорията на поглъщането на светлината.



Фиг. 32-1. Графика на полето E_x в даден момент t при $n_I \approx n_R\, 2/\pi$

Във веществата, които обикновено считаме прозрачни, величината $c/\omega n_I$, която има измерение на дължина, се оказва много по-голяма от размерите на материала.

32-5. Коефициент на пречупване на смес

В нашата теория на коефициента на пречупване има още едно предсказание, което може да се провери експериментално. Да предположим, че разглеждаме смес от две вещества. Коефициентът на пречупване на сместа няма да бъде средна стойност на двата коефициента, а ще се определя от сумата на двете поляризации както в уравнението (32.34). Ако, да речем, се интересуваме от коефициента на пречупване на разтвор на захар, то пълната поляризация ще бъде сумата от поляризацията на водата и захарта. Но, разбира се, трябва да пресмятаме всяка една от тях, като използуваме данните за броя на молекулите N от даден вид в единица обем. С други думи, ако в дадения разтвор се съдържат N_1 молекули вода, чиято поляризация е α_1, и N_2 молекули от захароза ($C_{12}H_{22}0_{11}$), чиято поляризация е α_2, то трябва да получим

$$3\,\frac{n^2-1}{n^2+2} = N_1\alpha_1 + N_2\alpha_2. \tag{32.37}$$

Тази формула може да бъде използувана за експериментална проверка на нашата теория чрез измерване на коефициента за различни концентрации на захароза във вода. Обаче тук трябва да направим няколко допускания. Нашата формула предполага, че при разтварянето на захарозата не протича никаква химическа реакция и че смущенията на индивидуалните атомни осцилатори при различните честоти и концентрации не се различават твърде силно. Поради това нашият резултат безусловно ще бъде само приблизителен. Въпреки това нека да видим доколко той е добър.

Таблица 32-2

Коефициент на пречупване на разтворена захар и сравняване с теоретичните резултати от уравнението (32.37)

A Тегловна част на захарозата	B Плътност в g/cm³	C n при 20°C	D Молове захароза*4 в литър N_2/N_0	E Молове вода*5 в литър N_1/N_0	F $3\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)$	G $N_1\,\alpha_1$	H $N_2\,\alpha_2$	I $N_0\,\alpha_2$ g/l
0 *1	0,9982	1,333	0	55,5	0,617	0,617	0	—
0,30	1,1270	1,3811	0,970	43,8	0,698	0,487	0,211	0,213
0,50	1,2296	1,4200	1,798	34,15	0,759	0,379	0,380	0,211
0,85	1,4454	1,5033	3,59	12,02	0,886	0,1335	0,752	0,210
1,00*2	1,588	1,5577*3	4,64	0	0,960	0	0,960	0,207

*1 Чиста вода
*2 Кристали захар
*3 Средното (вж. текста)

*4 Молекулното тегло на захарозата е 342
*5 Молекулното тегло на водата е 18

Ние избрахме разтвор на захар, защото разполагаме с добри експериментални данни за коефициента на пречупване* и освен това захарта представлява молекулен кристал, който преминава в разтвора без йонизиране и други промени на химическото състояние.

В първите три стълба на таблица 32-2 са приведени данните от указания справочник. В стълба A е даден процентът на захарозата в теглови части, в стълба B е дадена измерената плътност в g/cm³, а в стълба C са дадени измерените стойности на коефициента на пречупване на светлина с дължина на вълната 589,3 милимикрона. За чистата захар имаме резултатите от измерванията на коефициента на кристална захар. Тези кристали не са изотропни, така че по различните направления коефициентът е различен. Справочникът дава три стойности:

$$n_1 = 1{,}5376, \qquad n_2 = 1{,}5651, \qquad n_3 = 1{,}5705.$$

Взели сме средната стойност.

Да се опитаме сега да пресметнем n за всяка една концентрация, но ние не знаем какви стойности трябва да вземем за α_1 и α_2. Да проверим теорията така: ще предположим, че поляризацията на водата (α_1) при всичките концентрации е една и съща, и да пресметнем поляризацията на захарозата, като използуваме експерименталната стойност за n и решим (32.37) спрямо α_2. Ако теорията е вярна за всяка концентрация, трябва да получим една и съща стойност за α_2.

Преди всичко трябва да знаем числата N_1 и N_2; нека да ги изразим чрез числото на Авогадро N_0. За единица обем нека вземем един литър (1000 cm³). Тогава отношението N_i/N_0 ще бъде равно на теглото на един литър, разделено на граммолекула. А теглото на литъра е равно на произведението от плътността (умножена на 1000, за да се получат грамове в литър), на тегловната част или на захарозата, или на водата. Така получаваме N_2/N_0 и N_1/N_0, записани в стълбовете D и E на нашата таблица.

В стълба F сме пресметнали $3\,(n^2-1)/(n^2+2)$, изхождайки от експерименталните стойности на n (стълб C). За чистата вода

* Взети от справочника „Handbuch of Physics and Chemistry".

$3(n^2-1)/(n^2+2)$ е равно на 0,617, което точно представлява $N_1\alpha_1$. След това можем да запълним останалата част от колонката G, тъй като за всеки ред отношението G/E трябва да има една и съща стойност, именно 0,617 : 55,5. Като извадим стълба G от стълба F, намираме дяла $N_2\alpha_2$, внасян от захарозата, който е записан в стълба H. А след това, като разделим тези данни на величината N_2/N_0 от стълба D, ще получим величината $N_0\alpha_2$, дадена в стълба I.

Ние очаквахме от нашата теория, че всички стойности $N_0\alpha_2$ трябва да се получат едни и същи. Те се получиха не точно равни, но твърде близки една до друга. Оттук можем да заключим, че нашите идеи са правилни. Нещо повече, освен това ние намерихме, че поляризацията на молекулата на захарта, както изглежда, не зависи силно от нейното окръжение — тази поляризация е приблизително една и съща както в разредения разтвор, така и в кристала.

32-6. Вълни в метали

Теорията, която беше развита в тази глава за твърдите вещества след една съвсем малка модификация, може напълно да се приложи и към добри проводници от типа на металите. Върху някои от електроните в металите не действува сила, която ги привързва към някакъв определен атом; това са така наречените „свободни“ електрони, на които се дължи проводимостта. Там има и други електрони, които са свързани в атомите, и изложената по-горе теория е непосредствено приложима именно към тях. Обаче тяхното влияние обикновено се „заглушава“ от ефектите на проводящите електрони. Затова сега ние ще разгледаме не само ефектите, които се дължат на свободните електрони.

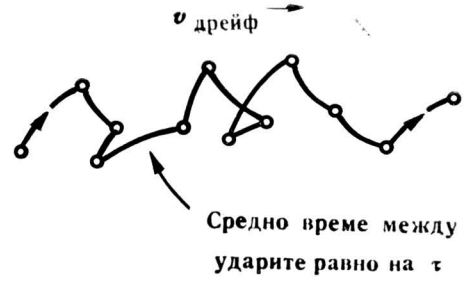
Ако върху електрона не действува никаква връщаща сила, но съпротивлението при неговото движение все още остава, то уравнението на движение на електрона се отличава от уравнението (32.1) само с липсата на члена $\omega_0^2 x$. Така че единственото, което трябва да направим, е да положим $\omega^2{}_0=0$ в цялата останала част от нашите изводи. Но има още една разлика. В диелектриците ние трябва да различаваме средно и локално поле и ето защо: в изолатора всеки от диполите заема фиксирано положение спрямо останалите диполи. Но тъй като проводящите електрони в метала се движат и менят своето място, полето, което действува върху тях, *средно взето*, е равно точно на средното поле **E**. Така че поправката, която направихме към формулата (32.5), не е необходима, т. е. приложението на формулата (32.28) за проводящите електрони е *недопустимо*. Следователно изразът за коефициента на пречупване на металите трябва да изглежда подобно на израза (32.27), в който следва да се положи $\omega_0=0$, именно

$$n^2=1+\frac{Nq_e^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{-\omega^2+i\gamma\omega}. \tag{32.38}$$

Това е само дялът от проводящите електрони, които, както ние смятаме, играят главна роля в метала.

Но сега ние вече знаем каква стойност трябва да вземем за величината γ, защото тя е свързана с проводимостта на метала. В гл. 43 (т. I) ние обсъдихме връзката на проводимостта на металите с дифузията на свободните електрони в кристала. Електроните се движат по начупен път от един удар до друг, а между тези удари те летят свободно с изключение на ускорението, предизвикано от някакво средно електрическо поле (фиг. 32-2). Също там, в глава 43 (т. I), намерихме, че средната скорост на дрейфа е равна просто на произведението от ускорението по средното време между ударите τ. Ускорението е равно на q_eE/m, така че

$$v_{\text{дрейф}}=\frac{q_eE}{m}\tau. \tag{32.39}$$



Фиг. 32-2. Движение на свободен електрон

В тази формула полето E се счита постоянно, така че скоростта $v_{\text{дрейф}}$ е също постоянна. Тъй като, средно взето, ускорението липсва, спиращата сила е равна на приложената сила. Ние определихме γ посредством спиращата сила, равна на γmv (вж. 32,1), или q_eE, поради това се получава, че

$$\gamma = \frac{1}{\tau}. \tag{32.40}$$

Независимо от това, че не можем лесно да измерим непосредствено τ, можем да го определим, като измерим проводимостта на метала. Експериментално е установено, че електричното поле **E** поражда в метала ток с плътност **j**, пропорционален на **E** (разбира се, за изотропен материал)

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

Коефициентът на пропорционалност σ се нарича *проводимост*. Точно същото очакваме от израза (32.39), ако положим

$$\mathbf{j} = Nq_e v_{\text{дрейф}}.$$

Тогава

$$\sigma = \frac{Nq_e^2}{m}\tau. \tag{32.41}$$

Ето по какъв начин τ, а следователно и γ могат да бъдат свързани с наблюдаваната електрическа проводимост. Като използуваме (32.40) и (32.31), можем да препишем нашата формула (32.48) за коефициента на пречупване в следния вид

$$n^2 = 1 + \frac{\sigma/\varepsilon_0}{i\omega(1+i\omega\tau)}, \tag{32.42}$$

където

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{m\sigma}{Nq_e^2}. \tag{32.43}$$

Това е известната формула за коефициента на пречупване в металите.

32-7. Нискочестотно и високочестотно приближения; дълбочина на скин-слоя и плазмена честота

Нашият резултат за коефициента на пречупване в металите — формулата (32.42), предсказва съвършено различни характеристики за разпространяването на вълни с различни честоти. Преди всичко нека да разгледаме какво се получава при *ниски* честоти. Ако величината ω е достатъчно малка, можем приблизително да напишем (32.42) във вида

$$n^2 = -i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}. \tag{32.44}$$

Като вдигнем на квадрат[1], можем да проверим, че

$$\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

така че за ниски честоти

$$n = \sqrt{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\omega}}(1-i). \tag{32.45}$$

Реалната и имагинерната част на n имат една и съща стойност.

[1] Или като запишем $-i = e^{-i\pi/2}$, $\sqrt{-i} = e^{-i\pi/4} = \cos\pi/4 - i\sin\pi/4$, което води до същия резултат.

С такава голяма имагинерна част на n вълните в металите затихват много бързо. В съответствие с израза (32.36) амплитудата на вълна, която се разпространява по посока на оста z, намалява, като

$$\exp\left[-\sqrt{\frac{\sigma\omega}{2\varepsilon_0 c^2}}\,z\right]. \tag{32.46}$$

Да запишем това във вида

$$e^{-z/\delta}, \tag{32.47}$$

където δ е това разстояние, на което амплитудата на вълната намалява $e=2{,}72$ пъти, т. е. приблизително 3 пъти. Амплитудата на такава вълна като функция от z е показана на фиг. 32-3. Тъй като електромагнитните вълни проникват в метала само на това разстояние, величината δ се нарича *дълбочина на скин-слоя*. Тя се определя от израза:

$$\delta=\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 c^2}{\sigma\omega}}\,. \tag{32.48}$$



Фиг. 32-3. Амплитуда на напречната електромагнитна вълна в метала като функция от разстоянието

Но какво все пак разбираме ние под „ниски“ честоти? Като погледнем уравнението (32.42), виждаме, че то може приближено да се замени с уравнението (32.44) само когато $\omega\tau$ е много по-малко от единица *и когато* $\omega\varepsilon_0/\sigma$ също е много по-малко от единица, т. е. нашето нискочестотно приближение е приложимо, когато

$$\omega << \frac{1}{\tau}$$

и

$$\omega << \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{32.49}$$

Нека видим какви честоти съответствуват на това приближение за такъв типичен метал като медта. За пресмятане на τ ще използуваме уравнението (32.43), а за пресмятане на σ/ε_0 — известните стойности на σ и ε_0. Ние ще вземем следните стойности, дадени от справочника

$$\sigma=5{,}76.10^7\ (\Omega\,.\,\mathrm{m})^{-1},$$

атомното тегло $=63{,}5$ g,
плътността $=8{,}9$ g/cm^3,

числото на Авогадро $=6{,}02\times10^{23}$ (gram атомно тегло)$^{-1}$.

Ако предположим, че на всеки атом се пада по един свободен електрон, броят на електроните в един кубически метър ще бъде:

$$N=8{,}5\times10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

Като използуваме по-нататък

$$q_e=1{,}6\times10^{-19}\ \mathrm{C}$$
$$\varepsilon_0=8{,}85\times10^{-12}\ \mathrm{F/m}^{-1}$$
$$m=9{,}11\times10^{-31}\ \mathrm{kg},$$

получаваме

$$\tau=2{,}4\times10^{-14}\,\mathrm{s}$$
$$\frac{1}{\tau}=4{,}1\times10^{13}\ \mathrm{s}^{-1}$$
$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=6{,}5\times10^{18}\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Оказва се, че медта ще има описаното от нас „нискочестотно“ поведение при честоти, по-малки от около 10^{12} Hz (това ще бъдат вълни с дължина, по-голяма от 0,3 mm, т. е. много къси радиовълни!).

За такива вълни дълбочината на скин-слоя е

$$\delta = \sqrt{\frac{0{,}028\,\mathrm{m^2/s}}{\omega}}\,.$$

За микровълни с честота 10 000 MHz (3 сантиметрови вълни)

$$\delta = 6{,}7 \times 10^{-4}\ \mathrm{cm}.$$

Вълните проникват на много малка дълбочина.

Сега вие можете да видите защо при изучаването на кухини (и вълноводи) трябва да се грижим само за полетата вътре в кухината, а не за вълните в метала или вън от кухината. Освен това виждате защо посребряването или позлатяването на кухината намалява загубите в нея. Това е защото загубите се получават благодарение на токовете, които са забележими само в тънкия слой, равен на дълбочината на скин-слоя.

Да разгледаме сега коефициента на пречупване в метал от типа на медта при високи честоти. За много високи честоти $\omega\tau$ е много по-голямо от единица и уравнението (32.42) се апроксимира много добре от следното уравнение

$$n^2 = 1 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega^2 \tau}\,. \tag{32.50}$$

За високочестотни вълни коефициентът на пречупване в металите става чисто реален и по-малък от единица! Това следва също от израза (32.38), ако пренебрегнем дисипативния член с γ, което може да бъде направено при много големи стойности на ω. Изразът (32.38) дава при това

$$n^2 = 1 - \frac{Nq_e^2}{m\varepsilon_0\omega^2}\,, \tag{32.51}$$

което, разбира се, е еквивалентно на уравнението (32.50). По-рано ние срещнахме величината $(Nq_e^2/\varepsilon_0 m)^{1/2}$, която нарекохме плазмена честота (вж. гл. 7-3),

$$\omega_p = \left(\frac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m}\right)^{1/2}.$$

Следователно (32.50) или (32.51) може да се препише във вида

$$n^2 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2.$$

Тази плазмена честота се оказва своего рода „критична“ честота.

За $\omega < \omega_p$ показателят на пречупване на метала има имагинерна част и се получава поглъщане на вълните, но при $\omega \gg \omega_p$ коефициентът става реален, а металът — прозрачен. Вие знаете, разбира се, че металите са достатъчно прозрачни за рентгеновите лъчи. Но някои метали са прозрачни даже за ултравиолета. В табл. 32-3 ние даваме експериментално наблюдаемите дължини на вълните за някои метали, при които тези метали започват да стават прозрачни. Във втората колонка е дадена пресметната критическата дължина на вълната $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$. Като вземем предвид, че експерименталната дължина на вълната е определена не особено точно, съвпадението с теорията трябва да се признае като забележително.

Таблица 32-3
Дължини на вълните, при които металът става прозрачен

Метал	$\lambda_{екст}$, Å	$\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p}$ Å
Li	1550	1550
Na	2100	2090
K	3150	2870
Rb	3400	3220

Вие може да се учудите защо плазмената честота ω_p има отношение към разпространяването на електромагнитните вълни в металите. Плазмената честота се появи при нас в гл. 7 като собствена честота на колебанията на плътността на осцилациите на свободните електрони (електрическото отблъскване на групите от електрони и тяхната инерция водят до колебания на плътността).

Надлъжните вълни на плазмата резонират при честота ω_p. Но сега ние говорим за напречни електромагнитни вълни и вече намерихме, че при честоти, по-малки от ω_p, те се поглъщат (това е много интересно и съвсем *не* случайно съвпадение).

Въпреки че през цялото време говорехме за разпространяване на вълни в метали, вие вече би трябвало да сте почувствували универсалността на явленията на физиката — няма никаква разлика дали свободните електрони се намират в метал, в плазма, в йоносферата на Земята или в атмосферата на някоя звезда. За да разберем как се разпространяват радиовълните в йоносферата, можем да използуваме същия израз, употребен, разбира се, при съответни стойности на величините N и τ. Сега можем да видим защо дългите радиовълни се поглъщат или отразяват от йоносферата, докато късите свободно преминават през нея (поради това за свръзка с изкуствените спътници на Земята е необходимо да се използуват къси вълни).

Ние говорихме за разпространяването на пределните високо- и нискочестотни вълни в металите. За междинните честоти е необходимо да се използува „пълнокръвното“ уравнение (32.42). В общия случай коефициентът на пречупване ще има и реална, и имагинерна част и при разпространяването на вълните в металите те се поглъщат. Много тънки слоеве от метал са прозрачни даже за обикновените оптически честоти. Като пример ще дадем специалните защитни очила за работниците, които работят около високотемпературни пещи. Тези очила се правят чрез разпрашване на злато върху стъкло на много тънък слой, такова стъкло е достатъчно прозрачно за видимата светлина, като се гледа през него, изглежда зелено, но то силно поглъща инфрачервените лъчи.

И накрая от читателя е невъзможно да се скрие фактът, че много от тези формули в известно отношение напомнят формулите за диелектричната проницаемост $\varkappa$, разгледани в глава 10. С диелектричната проницаемост $\varkappa$ се измерва реакцията на материала на статичното електрическо поле, т. е. когато $\omega=0$. Ако се вгледате внимателно в определението на n и $\varkappa$, ще видите, че $\varkappa$ не е нищо друго освен границата на n^2 при $\omega\to 0$. В действителност, като положим в уравненията на тази глава $\omega=0$ и $n^2=\varkappa$, ние ще възпроизведем уравненията на теорията на диелектрическата проницаемост от глава 11.

33

Отражение от повърхност

33-1. Отражение и пречупване на светлината

33-2. Вълни в плътни вещества

33-3. Гранични условия

33-4. Отразена и пречупена вълна

33-5. Отражение от метали

33-6. Пълно вътрешно отражение

Преговорете:
Глава 33 (т. I) „Поляризация“

33-1. Отражение и пречупване на светлината

Предмет на обсъждане в тази глава ще бъде пречупването и отражението на светлината и въобще електромагнитните вълни от повърхностите. Ние говорихме вече за законите на отражението и пречупването на светлината в гл. 33 на I том. Ето какво бяхме изяснили там:

1. Ъгълът на отражението е равен на ъгъла на падането. При това ъглите се определят, както е показано на фиг. 33-1

$$\theta_r = \theta_i. \tag{33.1}$$

2. Произведението $n \sin\theta$ е едно и също както за падащия, така и за пречупения лъч (закон на Снелиус)

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t. \tag{33.2}$$

3. Интензитетът на отразената светлина зависи както от ъгъла на падането, така и от направлението на поляризацията. За вектор **E**, перпендикулярен на равнината на падането, коефициентът на отражението $R_\perp$ е

$$R_\perp = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}. \tag{33.3}$$

За вектор **E**, успореден на равнината на падането, коефициентът на отражението R_{II} е

$$R_{\text{II}} = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}^2(\theta_i + \theta_t)}. \tag{33.4}$$

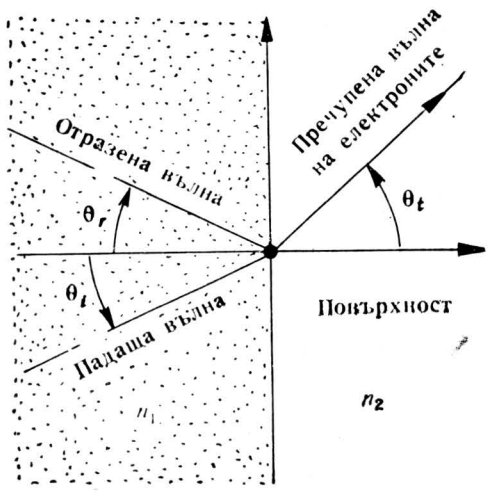
4. За перпендикулярно падащ лъч (разбира се, при всяка поляризация!)

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2. \tag{33.5}$$

Ние използувахме индекса i за означаване на величините в падащия лъч, t — в пречупения и r — в отразения).

Нашите предишни разсъждения практически са достатъчно пълни за обикновена работа, но ние смятаме да използуваме тук друг начин. Вие искате да знаете защо? Причината се заключава в това, че по-рано ние считахме показателя на пречупване реален (т. е. че във веществото не се получава никакво поглъщане). Обаче има и друга причина. Вие трябва да се научите да разглеждате вълни върху повърхност от гледна точка на уравнението на Максвел. Отговорите, разбира се, се получават едни и същи, но сега вече чрез непосредствено решаване на вълновата задача, а не с помощта на правдоподобни разсъждения.

Аз искам да подчертая, че амплитудата на вълната, отразена от повърхността, не се определя от такива свойства на *средата* като коефициента на пречупване. Тя зависи от чисто „повърхностни свойства“, които, строго казано, се определят от начина на обработка на повърхността. Тънък слой от страничен примес на границата между два метала с коефициенти n_1 и n_2 обикновено изменя отражението. (Получават се всякакви видове интерференции, пример за които могат да бъдат разноцветните маслени петна върху вода. Чрез подбиране на дебелината амплитудата на отразената вълна за дадена честота може да се сведе до нула. Именно така се прави просветлената оптика.) Формулите, които ние ще



Фиг. 33-1. Отражение и пречупване на вълни от повърхност.
Посоките на разпространението на вълните са перпендикулярни на техните гребени

получим, ще бъдат верни само когато коефициентът на пречупването рязко се изменя на разстояния, малки в сравнение с дължината на вълната. Дължината на вълната на светлината например е около 5000 Å, така че под „гладка“ повърхност ще разбираме повърхност, по която условията се изменят само по протежение на няколко атома (или на разстояние от няколко ангстрьома). Така че за светлината нашите формули ще действуват само върху добре полирана повърхност. Изобщо ако коефициентът на пречупването постепенно се променя на разстояние от няколко дължини на вълната, отражението ще бъде незначително

33-2. Вълни в плътни среди

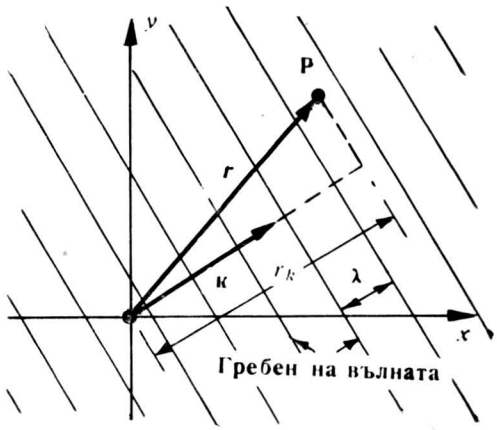
Преди всичко аз ще ви напомня удобния начин за описване на синусоидални плоски вълни, който използувахме в глава 36 (т. I). Всяка компонента на полето във вълната (да вземем например E) може да бъде записана във формата

$$E=E_0e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}, \tag{33.6}$$

където E е амплитудата на полето в точката $\mathbf{r}$ (спрямо началото на координатната система) в момента t. Векторът $\mathbf{k}$ във всяка точка е по посоката на разпространение на вълната, а неговата големина $|\mathbf{k}|=k=2\pi/\lambda$ е равна на вълновото число. Фазовата скорост на вълната $v_{\text{фаз}}=\omega/k$; за светлината в среда с коефициент n ще бъде равна на c/n и следователно

$$k=\frac{\omega n}{c}. \tag{33.7}$$

Да предположим, че векторът $\mathbf{k}$ е насочен по оста z; тогава $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ ще бъде просто добре познатото ни kz. За вектор $\mathbf{k}$ във всяка друга посока z следва да се замени с r_k — разстоянието от началото по посока на вектора $\mathbf{k}$, т. е. kz трябва да заменим с kr_k, което е точно равно на $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ (вж. фиг. 33-2). Ето защо записването (33.6) представлява удобно представяне на вълна, която се разпространява в каквато и да е посока.



Фиг. 32-2. Фазата на вълната в точка P, която се разпространява в посоката на $\mathbf{k}$, е равна на $(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$

Разбира се, при това трябва да помним, че

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}=k_xx+k_yy+k_zz,$$

където k_x, k_y и k_z са компонентите на вектора $\mathbf{k}$ по трите оси. Ние вече отбелязахме веднаж, че всъщност величините (ω, k_x, k_y, k_z) образуват четиривектор и че неговото скаларно произведение с вектора (t, x, y, z) е инвариант. Това означава, че фазата на вълната е инвариант и формулата (33.6) може да се запише във вида

$$E=E_0e^{ik_\mu x_\mu}.$$

Обаче засега такива фантазии няма да ни бъдат необходими.

За синусоидално поле E, подобно на израза (33.6), производната $\partial E/\partial t$ — това е същото, което е и $i\omega E$, а $\partial E/\partial x$ — същото, което е ik_xE. И аналогично за останалите компоненти. Вие виждате удобството на формата (33.6): когато работим с диференциални уравнения, диференцирането се заменя с просто умножаване. Друго полезно качество се състои в това, че операцията $\nabla=(\partial/\partial x)$, $(\partial/\partial y)$, $(\partial/\partial z)$ се заменя с три умножения по $(-ik_x$, $-ik_y$, $-ik_z)$. Но тези три множителя се преобразуват като компонентите на вектора $\mathbf{k}$, така че операторът ∇ се заменя с умножаване по $-ik$

$$\frac{\partial}{\partial t}\to i\omega,\quad \nabla\to -i\mathbf{k}. \tag{33.8}$$

Правилото остава валидно и за всяка операция с ∇ в произволна

комбинация, било то градиент, дивергенция или ротация. Например z-компонентата на $\nabla\times\mathbf{E}$ е

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

Ако и E_y и E_x се изменят като $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, получаваме

$$-ik_xE_y+ik_yE_x,$$

което представлява, както виждате, z-компонентата на $-i\mathbf{k}\times\mathbf{E}$.

По такъв начин получихме един много полезен общ закон: Във всеки един случай, когато е необходимо да вземете градиент от вектор, който се изменя като вълна в тримерното пространство (а те играят важна роля във физиката), тази операция можете да направите бързо и почти без всякакво замисляне, ако си спомните, че операторът ∇ е еквивалентен на умножаване по $-i\mathbf{k}$.

Например уравнението на Фарадей

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

се превръща за вълните в

$$-i\mathbf{k}\times\mathbf{E}=-i\omega\mathbf{B}.$$

То ни говори, че

$$\mathbf{B}=\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}}{\omega}. \tag{33.9}$$

Това съответствува на резултата, намерен по-рано за вълна в празното пространство, че векторът $\mathbf{B}$ във вълната е насочен под прав ъгъл към вектора $\mathbf{E}$ и посоката на разпространение на вълната (в празното пространство $\omega/k=c$). Знакът в уравнението (33.9) може да проверите, като изхождате от това, че $\mathbf{k}$ представлява посоката на вектора на Пойнтинг $\mathbf{S}=\varepsilon_0c^2(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$.

Ако приложите същото правило и към другите уравнения на Максвел, отново ще получите резултатите от последната глава, по-специално този

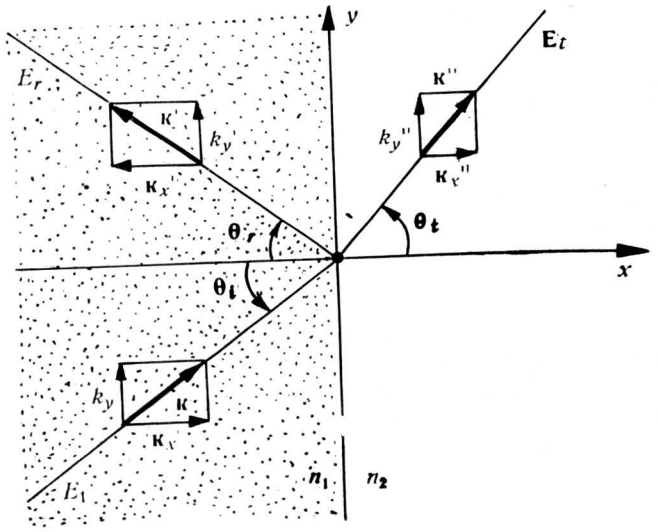
$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=k^2=\frac{\omega^2n^2}{c^2} \tag{33.10}$$

Но след като това вече ни е известно от преди, нека да не правим всичко отначало.

Ако искате да се поразвлечете, можете да се опитате да решите такава застрашителна задача (в 1890 г. тя е била предлагана на студентите на заключителните изпити); да се решат уравненията на Максвел за плоска вълна в *анизотропен* кристал, т. е. когато поляризацията $\mathbf{P}$ е свързана с електрическото поле $\mathbf{E}$ посредством тензора на поляризацията. Разбира се, за координатни оси вие ще изберете главните оси на тензора, така че връзките при това ще се опростят (тогава $P_x=\alpha_aE_x$, $P_y=\alpha_bE_y$, а $P_z=\alpha_cE_z$), но посоката на вълната и нейната поляризация нека да останат произволни. Вие трябва да намерите съотношението между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ и да определите как се изменя $\mathbf{k}$ с посоката на разпространение на вълната и нейната поляризация. След това за вас ще бъде вече разбираема оптиката на анизотропния кристал. По-добре е да се започне с по-лекия случай на двойно лъчепречупващ кристал, подобен на турмалина, за който и двата коефициента на поляризацията са равни помежду си (например $\alpha_b=\alpha_c$), и да се опитате да разберете защо когато гледате през такъв кристал, виждате двойно. Ако това ви се удаде, тогава опитайте своите сили в по-трудния случай, когато всичките три α са различни. След това на вас ще ви бъде вече ясно нивото на вашите знания — знаете ли вие толкова, колкото един студент, завършващ университета в 1890 г.? Но ние с вас ще разглеждаме само изотропни вещества в тази глава.

От опита ви е известно, че когато на границата, която раз-

деля две среди, да речем въздух и стъкло или вода и бензин, попадне плоска вълна, възникват както отразена, така и пречупена вълна. Ще приемем, че освен този факт нищо повече не ни е известно, и ще видим какво може да се изведе от него. Избираме нашите оси така, че равнината yz да съвпада с граничната повърхност, а равнината xy да бъде перпендикулярна на фронта на вълната (фиг. 33-3).



Фиг. 33-3. Векторите на разпространението $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}''$ за падащата, отразената и пречупената вълни

Електрическият вектор в падащата вълна може да бъде записан във вида

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}. \tag{33.11}$$

Тъй като векторът $\mathbf{k}$ е перпендикулярен на оста z, то

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = k_x x + k_y y. \tag{33.12}$$

Отразената вълна ще запишем като

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_0' e^{i(\omega' t - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r})} \tag{33.13}$$

така че нейната честота е равна на ω', вълновото число е $\mathbf{k}'$, а амплитудата $\mathbf{E}_0'$. (Ние, разбира се, знаем, че честотата и големината на вектора $\mathbf{k}$ в отразената вълна са същите, каквито са и в падащата вълна, но не искаме даже да предполагаме това. Нека всичко се получи само от математическия апарат). Накрая да запишем пречупената вълна

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_0'' e^{i(\omega'' t - \mathbf{k}''\cdot\mathbf{r})}. \tag{33.14}$$

Вие знаете, че едно от уравненията на Максвел дава съотношението (33.9), така че за всяка една от вълните имаме

$$\mathbf{B}_i = \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}_i}{\omega}, \quad \mathbf{B}_r = \frac{\mathbf{k}'\times\mathbf{E}_r}{\omega'}, \quad \mathbf{B}_t = \frac{\mathbf{k}''\times\mathbf{E}_t}{\omega''}. \tag{33.15}$$

Освен това, ако означим коефициентите на пречупване на двете среди с n_1 и n_2, ще получим от уравнението (33.10)

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2 n_1^2}{c^2}, \tag{33.16}$$

Тъй като отразената вълна се намира в тази среда

$$k'^2 = \frac{\omega'^2 n_1}{c^2}, \ldots \tag{33.17}$$

а от друга страна за пречупената вълна

$$k''^2 = \frac{\omega''^2 n_2^2}{c^2}. \tag{33.18}$$

33-3. Гранични условия

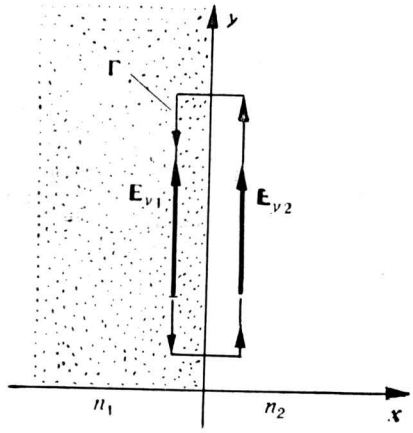
Всичко, което правихме досега, беше да опишем трите вълни; сега на нас ни предстои да изразим параметрите на отразената и пречупената вълни посредством параметрите на падащата. Как да направим това? Трите описани от нас вълни удовлетворяват уравненията на Максвел в хомогенна среда, но освен това уравненията на Максвел трябва да се удовлетворяват *и върху* границата между двете среди. Така че сега трябва да видим какво става на самата граница. Ние ще намерим, че уравненията на Максвел изискват трите вълни да са съгласувани по определен начин помежду си.

Ето един от примерите за това, което имаме предвид. Съставящата по оста y на електрическото поле $\mathbf{E}$ трябва да бъде *еднаква* от двете страни на границата. Това се изисква от закона на Фарадей

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{33.19}$$

в което не е трудно да се убедим. Да разгледаме за тази цел един малък контур Г, който обхваща от двете страни границата (фиг. 33-4). Съгласно с уравнението (33.19) криволинейният интеграл от $\mathbf{E}$ по контура Г е равен на скоростта на изменението на потока $\mathbf{B}$ през този контур

$$\oint_{\Gamma}\mathbf{E}\,.\,d\mathbf{s}=-\frac{\partial}{\partial t}\int\mathbf{B}\,.\,\mathbf{n}da.$$



Фиг. 34-4. Граничното условие $E_{y_2}=-E_{y_1}$, получено от равенството

$$\oint_{\Gamma}\mathbf{E}\,.\,d\mathbf{s}=0$$

Представете си сега, че правоъгълникът е много тесен, така че той се затваря в една безкрайно малка област. Ако при това полето $\mathbf{B}$ остава крайно (няма никакви причини то да бъде безкрайно!), потокът през тази област ще бъде равен на нула. Това означава, че контурният интеграл от $\mathbf{E}$ трябва да бъде нула. Ако y-компонентите на полето от двете страни на границата са равни на E_{y1} и E_{y2}, а дължината на правоъгълника е равна на l, ще получим

$$E_{y1}l-E_{y2}l=0,$$

или

$$E_{y1}=E_{y2}, \tag{33.20}$$

както и очаквахме. Това условие ни дава едно съотношение между полетата на трите вълни.

Процедурата за намиране на следствия от уравненията на Максвел на границата се нарича „определяне на граничните условия“. Обикновено тя се заключава в намирането на толкова уравнения от типа (33.20), колкото е възможно, и се изпълнява с помощта на разглеждания на малки правоъгълници, подобни на Г (на фиг. 33-4) или на малки гаусови повърхности, обхващащи границата от двете страни. Въпреки че това е съвършено коректен начин за разсъждения, той създава впечатлението, че в различните физически задачи трябва по различен начин да се занимаваме с границата.

Как например в задачата за топлинния поток през повърхност да се определи температурата в двете съседни страни? Разбира се, ние имаме право да твърдим, че топлината, която приижда към *границата от едната страна,* трябва да бъде равна на топлината, която се оттича от другата страна. Обикновено това е възможно и изобщо е много полезно граничните условия да се намират с помощта на физически разсъждения от този род. Обаче могат да се срещнат случаи, когато при работата над някаква проблема на вас са ви известни само уравненията и вие не можете непосредствено да видите какви физически аргументи могат да се използуват. Затова, въпреки че в дадения момент ние се интересуваме само от електромагнитни явления, при които може

да се приведат физически аргументи, аз искам да ви науча на един метод, който може да се прилага във всяка една задача: *общ метод* за намиране на това, което става на границата, непосредствено от диференциалните уравнения.

Да започнем с написването на всички уравнения на Максвел за диелектрик, но този път, като напишем търпеливо всички компоненти:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=-\frac{\nabla\cdot\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)=-\left(\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial P_z}{\partial z}\right), \tag{33.21}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{\partial B_x}{\partial t}, \tag{33.22, а}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{\partial B_y}{\partial t}, \tag{33.22, б}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{\partial B_z}{\partial t}. \tag{33.22, в}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad \frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0, \tag{33.23}$$

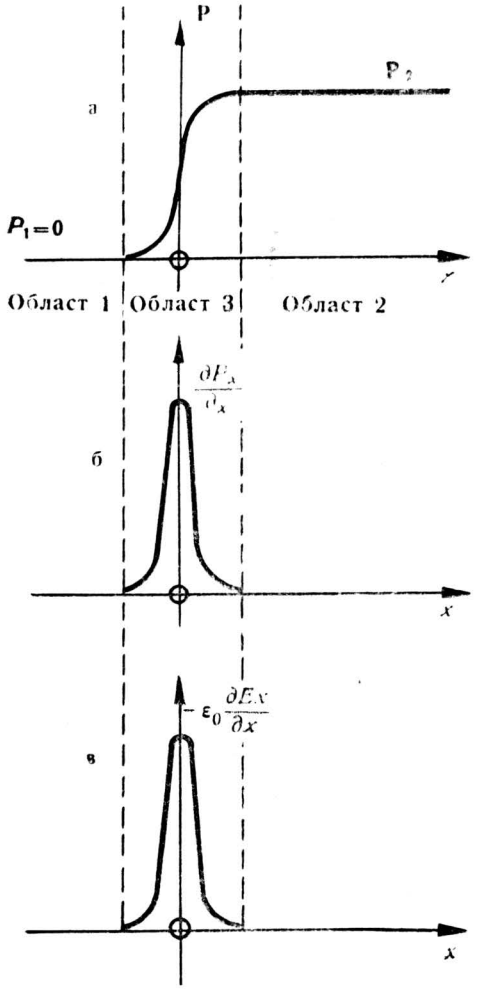
$$c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \qquad c^2\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial P_x}{\partial t}+\frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{33.24, а}$$

$$c^2\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial P_y}{\partial t}+\frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{33.24, б}$$

$$c^2\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial P_z}{\partial t}+\frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{33.24, в}$$

Тези уравнения трябва да бъдат валидни както в областта 1 (вляво от границата), така и в областта 2 (вдясно от нея). Ние вече сме писали решенията в областите 1 и 2. Те трябва да се удовлетворяват и върху самата граница, която можем да наречем област 3. Въпреки че обикновено ние считаме границата за нещо абсолютно рязко, в действителност такива граници не съществуват. Наистина физическите свойства се изменят много бързо, но въпреки това не безкрайно бързо. Във всеки случай можем да считаме, че между областите 1 и 2 изменението на коефициента на пречупване е макар и много бързо, но все пак *непрекъснато*. Това малко разстояние, по което то става, можем да наречем област 3. Подобен преход в областта 3 ще претърпяват и другите характеристики на полето, такива като P_x или E_y и т. н. Обаче диференциалните уравнения трябва да се удовлетворяват; именно следвайки диференциалните уравнения в тази област, ние ще можем да достигнем до необходимите „гранични условия".

Да предположим например, че имаме граница между вакуум (област 1) и стъкло (област 2). Във вакуума няма какво да се поляризира, така че $\mathbf{P}_1=0$. Нека поляризацията в стъклото да бъде равна на $\mathbf{P}_2$. Ме ждувакуума и стъклото съществува плавен, но бърз преход. Ако проследим за някоя компонента на $\mathbf{P}$, да речем P_x, то тя може да се изменя както това е показано на фиг. 33-5, *а*. Да предположим сега, че сме взели първото от нашите уравнения — уравнението (33.21). В него влизат производните от компонентите на $\mathbf{P}$ по променливите x, y и z. Производните по y и z не са много интересни — в тези направления не става нищо забележително. Но производната от P_x по x в областта 3 ще има грамадна стойност, поради бързото изменение на P_x. Производната $\partial P_x/\partial x$, както е показано на фиг. 33-5, *б*, има на границата много рязък пик. Ако си представите, че границата се свива до още по-тънък пласт, пикът ще стане още по-висок. Ако за интересуващата ни вълна границата е действително рязка, величината $\partial P_x/\partial x$ в областта 3 ще бъде по-голяма, много по-голяма от всичко, което може да се получи от изменението на $\mathbf{P}$



Фиг. 33-5. Полетата в преходната област 3 между две различни вещества, изпълващи областите 1 и 2

встрани от границата, така че можем да пренебрегнем всякакви други изменения с изключение на измененията, които стават на границата.

Но как бихме могли сега да удовлетворим уравнението (33.21), ако от дясната му страна се извисява огромен пик? Само ако съществува равен на него грамаден пик от другата страна. Нещо и от лявата страна трябва да бъде голямо. Единствената възможност—това е $\partial E_x/\partial x$, тъй като измененията по направленията y и z в тези вълни, за които току-що споменахме, дават само малък ефект. Това означава, че $\varepsilon_0(\partial E_x/\partial x)$ трябва да бъде, както това е показано на фиг. 33-5, *в*, точно копие на $\partial P_x/\partial x$. Получава се

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\partial P_x}{\partial x}.$$

Ако интегрираме това уравнение по x в цялата област 3, ще дойдем до заключението, че

$$\varepsilon_0(E_{x2}-E_{x1}) = -(P_{x2}-P_{x1}). \tag{33.25}$$

С други думи, скокът на $\varepsilon_0 E_x$ при прехода от областта 1 към областта 2 трябва да бъде равен на скока на P_x.

Уравнението (33.25) може да се препише във вида

$$\varepsilon_0 E_{x2} + P_{x2} = \varepsilon_0 E_{x1} + P_{x1}; \tag{33.26}$$

то гласи, че величината $(\varepsilon_0 E_x + P_x)$ има еднакви стойности в областта 2 и в областта 1. В такива случаи хората казват, че величината $(\varepsilon_0 E_x + P_x)$ е *непрекъсната* на границата. Ето как ние получихме едно от нашите гранични условия.

Въпреки че като илюстрация взехме случая, когато стойността на $\mathbf{P}_1$ е равна на нула, защото в областта 1 имаше вакуум, ясно е, че същите аргументи могат да бъдат приложени за всякаква среда в двете области, така че уравнението (33.26) е валидно и в общия случай.

Нека сега да преминем към останалите уравнения на Максвел и да видим какво ще ни каже всяко едно от тях. Сега ще вземем уравнението (33.22, *а*). В него няма производна по x, така че то нищо не ни говори. (Спомнете си, че на границата самите полета не са особено големи. Само техните производни по x могат да станат толкова огромни, че да доминират в уравненията.) Да разгледаме сега уравнението (33.22, б). Вижте! Именно тук имаме производна по x! От лявата страна стои $\partial E_z/\partial x$. Да предположим, че тази производна е огромна. Но минутка търпение! От дясната страна няма нищо, което е способно да се справи с нея, поради това E_z *не може* да търпи скок при прехода от областта 1 в областта 2. (Ако това би било така, то от лявата страна на уравнението (33.22,*а*) ние бихме получили скок, а от дясната такъв не би имало и уравнението щеше да се окаже невярно.) И тъй, получихме ново условие

$$E_{z2} = E_{z1}. \tag{33.27}$$

След същите разсъждения уравнението (33.22, *в*) дава

$$E_{y2} = E_{y1}. \tag{33.28}$$

Последният резултат точно съвпада с условието (33.20), което получихме с помощта на контурния интеграл.

Да преминем към уравнението (33.23). Единственото, което може да даде пик, това е $\partial B_x/\partial x$. Но отдясно пак няма нищо, способно да му се противопостави; в резултат заключаваме, че

$$B_{x2} = B_{x1}. \tag{33.29}$$

И на края последното от уравненията на Максвел! Уравнението (33.24 ,*а*) не ни дава нищо, тъй като там няма производни по x. Уравнението 33.23,*б* има една производна — $c^2(\partial B_z/\partial x)$, но и за нея отново няма нищо, което да ѝ се противопостави от другата страна на равенството, и затова получаваме

$$B_{z2} = B_{z1}. \tag{33.30}$$

Съвсем аналогично е второто уравнение, което ни дава

$$B_{y2}=B_{y1}. \tag{33.31}$$

И тъй, последните три условия ни показват, че $\mathbf{B}_2=\mathbf{B}_1$.

Аз искам да подчертая тук, че получихме такъв резултат само защото взехме немагнитни среди от двете страни на границата, по-точно, защото можем да пренебрегнем тук магнитните ефекти на тези среди. Обикновено това е напълно допустимо за повечето вещества с изключение на феромагнетиците. (Магнитните свойства на веществата ние ще разглеждаме в следващите глави.)

Нашата програма ни доведе до шест зависимости между полетата в областите 1 и 2. Всички те са изразени в таблица 33-1. Те могат да бъдат използувани за съгласуване на вълните в двете области. Обаче аз искам да отбележа, че идеята, която ние току-що използуваме, ще действува във *всяка* физическа ситуация, при която има на лице диференциални уравнения и се изисква да се намери решение в област, пресичана от рязка граница. От двете страни на границата някои от физическите свойства са различни. За нашите сегашни цели би било по-лесно да получим същите уравнения с помощта на разсъждения за потоците и циркулациите на границата. (Проверете дали същият резултат може да се получи по подобен начин.) Обаче сега вие знаете един метод, който ще бъде добър даже когато сте попаднали в затруднено положение и не виждате прости физически съображения относно това, което става на границата. Вие можете просто да се възползувате от диференциалните уравнения.

Таблица 33-1

Гранични условия върху повърхността на диелектрик

$$(\varepsilon_0\mathbf{E}_1+\mathbf{P}_1)_x=(\varepsilon_0\mathbf{E}_2+\mathbf{P}_2)_x$$
$$(\mathbf{E}_1)_y=(\mathbf{E}_2)_y$$
$$(\mathbf{E}_1)_z=(\mathbf{E}_2)_z$$
$$\mathbf{B}_1=\mathbf{B}_2$$

(Повърхността е разположена в равнината yz.)

33-4. Отразена и пречупена вълна

Сега сме готови да приложим нашите гранични условия към вълните, изброени в 33-2, където получихме

$$\mathbf{E}_i=\mathbf{E}_0e^{i(\omega t-k_xx-k_yy)} \tag{33.22}$$

$$\mathbf{E}_r=\mathbf{E}_0'e^{i(\omega' t-k_x' x-k_y' y)}, \tag{33.33}$$

$$\mathbf{E}_t=\mathbf{E}_0''e^{i(\omega'' t-k_x'' x-k_y'' y)}, \tag{33.34}$$

$$\mathbf{B}_i=\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}_i}{\omega}, \tag{33.35}$$

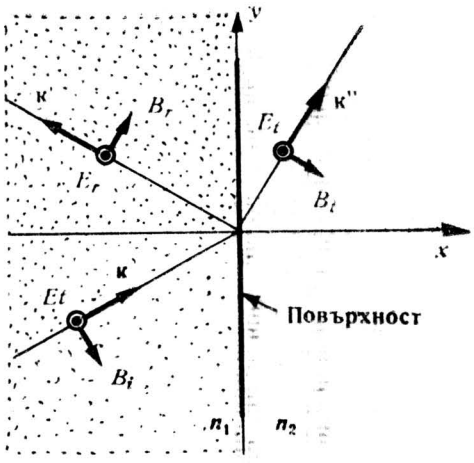
$$\mathbf{B}_r=\frac{\mathbf{k}'\times\mathbf{E}_r}{\omega'}. \tag{33.36}$$

$$\mathbf{B}_t=\frac{\mathbf{k}''\times\mathbf{E}_t}{\omega''}. \tag{33.37}$$

Ние получихме и още някои сведения: векторът $\mathbf{E}$ при всяка вълна е перпендикулярен на вектора на разпространяването $\mathbf{k}$.

Полученият резултат ще зависи от направлението на вектора $\mathbf{E}$ („поляризацията“) на падащата вълна. Анализът силно ще се опрости, ако разгледаме отделно случая, когато векторът $\mathbf{E}$ е успореден на „равнината на падането“ (т. е. равнината xy), и случая, когато същият вектор е *перпендикулярен* към нея. Вълна с друга, произволна поляризация ще бъде просто линейна комбинация от тези вълни. С други думи, отразените и пречупени интензитети за различните поляризации ще бъдат различни и най-лесно е да се вземат двата най-прости случая и да се разгледат те отделно.

Аз подробно ще анализирам случая на падаща вълна перпендикулярно към равнината на падането, а след това просто ще ви опиша какво се получава в другите случаи. Аз малко хитрувам, разглеждайки най-простия пример, обаче и в двата случая принципът е един и същ. И тъй, ние считаме, че векторът $\mathbf{E}_i$ има



Фиг. 33-6. Поляризиране на отразената и пречупената вълни, когато полето **E** в падащата вълна е перпендикулярно на равнината на падане

само z компонента и тъй като всички вектори **E** гледат в една и съща посока, векторният индекс може да бъде изпуснат.

Двете среди са изотропни и поради това принудените колебания на зарядите във веществото ще стават само в направлението на оста z. Тогава полетата **E** в пречупената и отразената вълна ще имат само една единствена z-компонента и за всички вълни E_x и E_y, P_x и P_y ще бъдат равни на нула. Посоките на векторите **E** и **B** в тези вълни са показани на фиг. 33-6. (Тук ние изменихме нашето първоначално намерение да получим всичко от уравненията. Този резултат също можеше да бъде получен от граничните условия, обаче като използувахме физически аргументи, ние избягнахме обемисти алгебрически сметки. Когато имате свободно време, вижте дали същият резултат действително може да бъде изведен от уравненията. Той, разбира се, се съгласува с уравненията; само че ние не доказахме, че липсват *други* възможности.)

Сега нашите гранични условия [уравненията (33.26)—(33.31)] трябва да ни дадат зависимостта между компонентите на **E** и **B** в областите 1 и 2. В областта 2 имаме само една пречупена вълна. Но в областта 1 те са две. Коя от тях трябва да вземем? Полетата в областта 1 ще представляват, разбира се, суперпозиция от полетата на падащите и отразената вълни. (Тъй като всяка една от тях удовлетворява уравненията на Максвел, то и тяхната сума ги удовлетворява.) Поради това, когато използуваме граничните условия, трябва да помним, че

$$\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_i+\mathbf{E}_r, \quad \mathbf{E}_2=\mathbf{E}_t$$

и аналогично за **B**.

За поляризациите, с които сега се занимаваме, уравненията (33.26) и (33.28) не дават никаква нова информация и само уравнението (33.27) може да ни помогне. То ни говори, че на *границата,* т. е. при $x=0$

$$E_i+E_r=E_t.$$

Така получаваме уравнението

$$E_0e^{i\,(\omega t-k_y y)}+E_0'e^{i\,(\omega' t-k_y' y)}=E_0''e^{i\,(\omega'' t-k_y'' y)}, \tag{33.38}$$

което трябва да се удовлетворява при *всяко* t и *всяко* y. Да вземем отначало $y=0$. За тази стойност уравнението (33.38) се превръща в

$$E_0e^{i\omega t}+E_0'e^{i\omega' t}=E_0''e^{i\omega'' t},$$

което показва, че двата осцилиращи члена са равни на третия. Това може да стане само ако честотите на всички осцилации са еднакви. (Невъзможно е, като се съберат два или повече подобни членове с различни честоти, да се получи за всеки момент резултат нула.) И тъй

$$\omega''=\omega'=\omega, \tag{33.39}$$

което всъщност ни е било винаги известно, т. е. честотите на пречупената и отразената вълни са същите, каквато и на падащата.

Ако бяхме предположили това от самото начало, несъмнено можехме да избегнем много трудности, но на мене ми се искаше да ви покажа, че същият резултат може да се получи и от уравненията. Но когато пред вас се изправи реална задача, по-добре е да пускате в оборот наведнаж всичко, което знаете. Това ще ви избави от излишни грижи.

По определение *абсолютната стойност* на k се дава от равенството $k^2=n^2\omega^2/c^2$, поради което

$$\frac{k''^2}{n_2^2}=\frac{k'^2}{n_1^2}=\frac{k^2}{n_1^2}. \tag{33.40}$$

А сега да се обърнем към уравнението (33.38) при $t=0$. Като използуваме отново същите разсъждения, както и преди, но този път основавайки се на това, че уравненията трябва да бъдат валидни при всички значения на y, получаваме

$$k''_y = k'_y = k_y . \tag{33.41}$$

От формулата (33.40) $k'^2 = k^2$, така че

$$k'^2_x + k'^2_y = k^2_x + k^2_y .$$

Комбинирайки това с (33.41), намираме

$$k'^2_x = k^2_x ,$$

или $k'_x = \pm k_x$. Знакът плюс няма никакъв смисъл — той не ни дава никаква *отразена* вълна, а само друга *падаща* вълна, но още от самото начало ние казахме, че ще решаваме задачата с една единствена падаща вълна, така че

$$k'_x = -k_x . \tag{33.42}$$

Двете зависимости (33.41) и (33.42) ни говорят, че ъгълът на отражението е равен на ъгъла на падането, както и очаквахме (вж. фиг. 33-3). И тъй в отразената вълна

$$E_r = E'_0 e^{i(\omega t - k_x x + k_y y)} . \tag{33.43}$$

За пречупената вълна вече получихме

$$k''_y = k_y$$

и

$$\frac{k''^2}{n_2^2} = \frac{k^2}{n_1^2} . \tag{33.44}$$

Можем да решим тези уравнения и в резултат получаваме

$$k''^2_x = k''^2 - k''^2_y = \frac{n_2^2}{n_1^2} k^2 - k^2_y . \tag{33.45}$$

Да приемем за момент, че n_1 и n_2 са реални числа (т. е. че имагинерната част на коефициентите е много малка). Тогава всичките k също ще бъдат реални и от фиг. 33-3 виждаме, че

$$\frac{k_y}{k} = \sin\theta_i , \qquad \frac{k''_y}{k''} = \sin\theta_t . \tag{33.46}$$

Но пред вид уравнението (33.44) получаваме

$$n_2 \sin\theta_t = n_i \sin\theta_i , \tag{33.47}$$

т. е. вече известният ни закон на Снелиус за пречупването. Ако коефициентът на пречупването не е реален, вълновите числа се оказват комплексни и следва да се възползуваме от (33.45). (Разбира се, бихме могли да *определим* ъглите θ_i и θ_t от (33.46) и тогава законът на Снелиус (33.47) би бил верен и в общия случай. Обаче при това ъглите също биха станали комплексни числа и следователно биха загубили своята геометрическа интерпретация като ъгли. Тогава най-добре е поведението на вълните да се описва с помощта на съответните комплексни величини k_x или k''_x.)

Дотук не открихме нищо ново. Само си доставихме простичкото развлечение да извеждаме очевидни неща с помощта на сложен математически механизъм. А сега ние сме готови да намерим амплитудите на вълните, които още не са ни известни. Като използуваме резултатите за всички ω и k, можем да съкратим експоненциалния множител (33.38) и да получим

$$E_0 + E'_0 = E''_0 . \tag{33.48}$$

Но тъй като не знаем нито E_0', нито E_0'', трябва ни още една зависимост. Необходимо е да използуваме още едно гранично условие. Уравненията за E_x и E_y няма да ни помогнат, защото всички **E** имат само една z-компонента. Така че ние трябва да се възползуваме от условията за **B**. Да се опитаме да вземем (33.29)

$$B_{x2}=B_{x1}.$$

Съгласно с уравненията (33.35)—(33.37)

$$B_{xi}=\frac{k_y E_i}{\omega},\quad B_{xr}=\frac{k_y' E_r}{\omega'},\quad B_{xt}=\frac{k_y'' E_t}{\omega''}.$$

Като си спомним, че $\omega''=\omega'=\omega$ и $k_y''=k_y'=k_y$, получаваме

$$E_0+E_0'=E_0''.$$

Но това е отново уравнението (33.48)! Ние напразно изгубихме време и получихме нещо, което отдавна ни е известно.

Бихме могли да се обърнем към (33.30) $B_{z2}=B_{z1}$, но на вектора **B** липсва z-компонента! Остана само едно условие — (33.31) $B_{y2}=B_{y1}$. За нашите три вълни

$$B_{yi}=-\frac{k_x E_i}{\omega},\quad B_{yr}=-\frac{k_x' E_r}{\omega'},\quad B_{yt}=-\frac{k_x'' E_t}{\omega''}. \tag{33.49}$$

Заместваики вместо E_i, E_r и E_t вълновите изрази при $x=0$ (защото работата става на границата), получаваме следното гранично условие

$$\frac{k_x}{\omega}E_0 e^{i(\omega t-k_y y)}+\frac{k_x'}{\omega'}E_0' e^{i(\omega' t-k_y' y)}=\frac{k_x''}{\omega''}E_0'' e^{i(\omega'' t-k_y'' y)}.$$

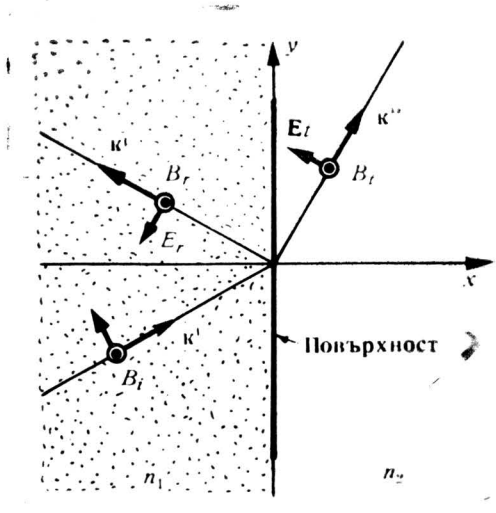
Отчитайки равенствата на всички ω и k_y, отново идваме до условието

$$k_x E_0+k_x' E_0'=k_x'' E_0''. \tag{33.50}$$

Това ни дава едно уравнение за величината E, отлично от (33.48) Получените две уравнения могат да се решат спрямо E_0' и E_0''. Като си спомним, че $k_x'=-k_x$, получаваме

$$E_0'=\frac{k_x-k_x''}{k_x+k_x''}E_0, \tag{33.51}$$

$$E_0''=\frac{2k_x}{k_x+k_x''}E_0. \tag{33.52}$$



Фиг. 33-7. Поляризирането на вълната, когато полето **E** в падащата вълна е успоредно на равнината на падането

Заедно с (33.45) или (33.46) за k_x'' тези формули ни дават всичко, което искахме да узнаем. Следствията от получения резултат ще обсъдим в следващия параграф.

Ако вземем поляризирана вълна с вектор **E**, успореден на равнината на падането, то **E**, както се вижда от фиг. 33-7, ще има както x-, така и y-компонента. Цялата алгебра при това ще бъде по-малко хитра, но по-сложна. (Можем наистина донякъде да си намалим работата в този случай, като изразим всичко чрез *магнитното* поле, което е изцяло насочено по оста z.) При това намираме

$$|E_0'|=\frac{n\ k_x-n_1^2 k''}{n_2^2 k_x+n_1^2 k_x''}|E_0| \tag{33.53}$$

и

$$|E_0''|=\frac{2n_1 n_2 k_x}{n_2^2 k_x+n_1^2 k_x''}|E_0|. \tag{33.54}$$

Нека видим дали нашият резултат ще се съгласува с това, което получихме по-рано. Ние бяхме извели изразът (33.3) в т. I, когато търсехме отношението на интензитетите на отразената и падащата вълни. Обаче тогава разглеждахме само *реален* коефи-

циент на пречупване. За реален коефициент (или реални k) можем да пишем

$$k_x = k\cos\theta_i = \frac{\omega n_1}{c}\cos\theta_i$$

$$k_x'' = k''\cos\theta_t = \frac{\omega n_2}{c}\cos\theta_t .$$

Заместваики това в уравнението (33.51), получаваме

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}, \tag{33.55}$$

което ни най-малко не прилича на уравнението (33.3). Ако обаче използуваме закона на Снелиус и се избавим от всички n, сходството ще бъде възстановено. Заместваики $n_2 = n_1(\sin\theta_i/\sin\theta_t)$ и умножавайки числителя и знаменателя с $\sin\theta_t$, получаваме

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{\cos\theta_i\sin\theta_t - \sin\theta_i\cos\theta_t}{\cos\theta_i\sin\theta_t + \sin\theta_i\cos\theta_t}.$$

Обърнете внимание, че в числителя и знаменателя стоят просто синуси от $(\theta_i - \theta_t)$ и $(\theta_i + \theta_t)$, поради което

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}. \tag{33.56}$$

Тъй като амплитудите E_0' и E_0 се измерват в една и съща среда, интензитетите са пропорционални на квадратите на електрическите полета и ние получаваме същия резултат, както и по-рано. По подобни съображения формулата (33.53) също е аналогична на формулата (33.4).

За вълни, падащи перпендикулярно, $\theta_i = 0$ и $\theta_t = 0$. Формулата (33.56) изглежда като 0/0, от което имаме малко полза. Обаче можем да се върнем назад към формулата (33.55), съгласно с която

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E_0'}{E_0}\right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2. \tag{33.57}$$

Този резултат естествено е приложим за „всяка“ поляризация, тъй като за перпендикулярния лъч няма никаква особена „равнина на падането“.

33-5. Отражение от металите

Сега можем да използуваме нашите резултати, за да вникнем в едно интересно явление — отражение от металите. Защо металите блестят? В предната глава видяхме, че коефициентът на пречупване на металите за някои честоти има много голяма имагинерна част. Нека сега видим какъв ще бъде интензитетът на отразената вълна, когато светлината пада от въздух (с коефициент $n = 1$) върху материал с $n = -in_I$. При това условие уравнението (33.55) дава (за нормално падане)

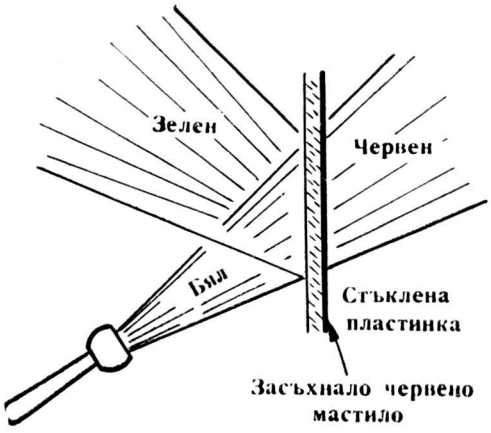
$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{1 + in_I}{1 - in_I}.$$

За *интензитета* на отразената вълна са ни необходими квадратите на абсолютните величини на E_0' и E_0

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{|E_0'|^2}{|E_0|^2} = \frac{|1 + in_I|^2}{|1 - in_I|^2},$$

или

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{1 + n_I^2}{1 + n_I^2} = 1. \tag{33.58}$$



Фиг. 33-8. Вещество, което силно поглъща светлина с честота ω, я отразява със същата честота

За вещество с чисто имагинерен коефициент на пречупване се получава стопроцентово отражение!

Металите не отразяват 100% от светлината, но все пак много от тях добре отразяват видимата светлина. С други думи, имагинерната част на техния коефициент е много голяма. Обаче ние видяхме, че голяма имагинерна част на коефициента означава силно поглъщане. И тъй съществува общо правило: ако *някакъв* материал се оказва *много* добър поглъщател при някаква честота, то отражението на вълните от неговата повърхност е много голямо и много малко вълни попадат вътре. Този ефект може да се наблюдава при силни оцветители. Чистите кристали на най-силните оцветители имат „металически" блясък. Вероятно вие сте забелязали, че на края на гърлото на шише с виолетово мастило засъхналото мастило има златист металически блясък, а засъхналото червено мастило има понякога зеленикав металически оттенък. Червените мастила поглъщат зелените лъчи от *преминаващата* през тях светлина, така че ако концентрацията на мастилото е много голяма, то ще дава силно повърхностно *отражение* при честотата на зелената светлина.

Вие можете много ефектно да демонстрирате това. Намажете стъклена плочка с червено мастило и го оставете да изсъхне. Ако насочите сноп бяла светлина върху обратната страна на плочката (фиг. 33-8), ще можете да наблюдавате преминалата червена светлина и отразената зелена светлина.

33-6. Пълно вътрешно отражение

Ако светлината идва от вещество, подобно на стъклото, с реален коефициент на пречупване n, по-голям от единица, във въздух с коефициент n_2, равен на единица, то съгласно закона на Снелиус

$$\sin\theta_t = n\sin\theta_i\,.$$

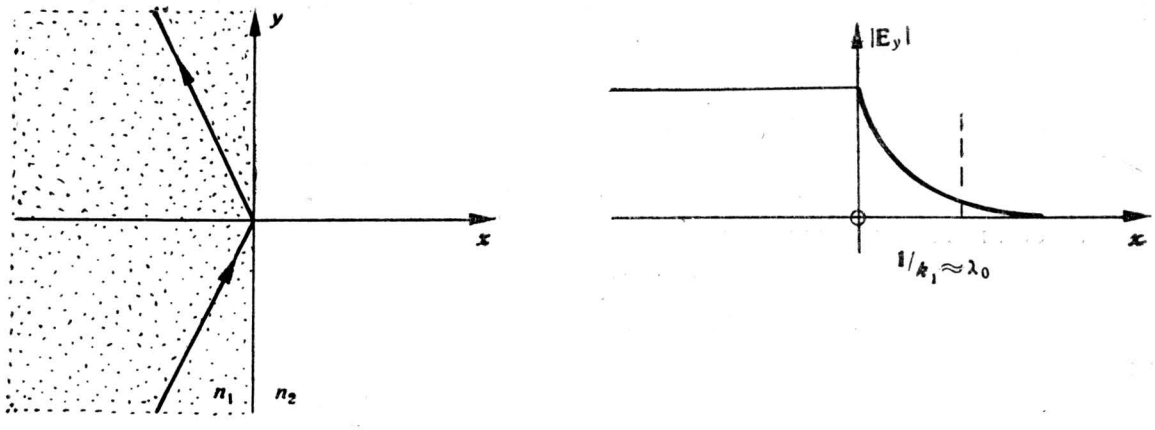
Ъгълът θ_t на пречупената вълна става равен на 90° при ъгъл на падането θ_i, равен на някакъв „критичен ъгъл" θ_c, определен от равенството

$$n\sin\theta_c = 1. \tag{33.59}$$

Какво става при θ_i, по-голям от критичния ъгъл? Вие вече знаете, че тук възниква пълно вътрешно отражение. Но откъде все пак се взима то?

Да се върнем назад към уравнението (33.45), което дава вълновото число k_x'' за пречупената вълна. От него получихме

$$k_x''^2 = \frac{k^2}{n^2} - k_y^2.$$



Фиг. 33-9. Пълно вътрешно отражение

Но тъй като $k_y = k \sin\theta_i$, а $k = \omega n/c$, то

$$k_x''^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1 - n^2 \sin^2\theta_i).$$

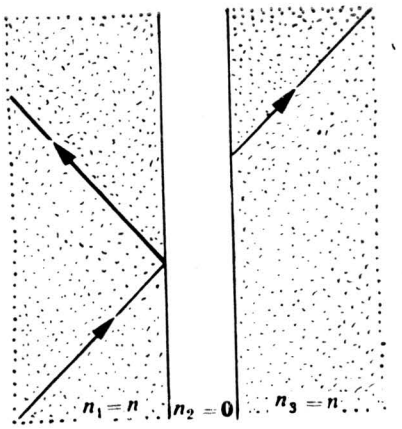
Ако $n \sin\theta_i$ е по-голямо от единица, то $k_x''^2$ става ***отрицателен,*** а k_x'' — чисто имагинерен; да го означим $\pm ik_l$. Обаче сега вие знаете какво означава това! „Пречупената“ вълна при това ще има вида [вж. (33.34)]

$$E_t = E_0'' e^{\pm k_l x} e^{i(\omega t - k_y y)},$$

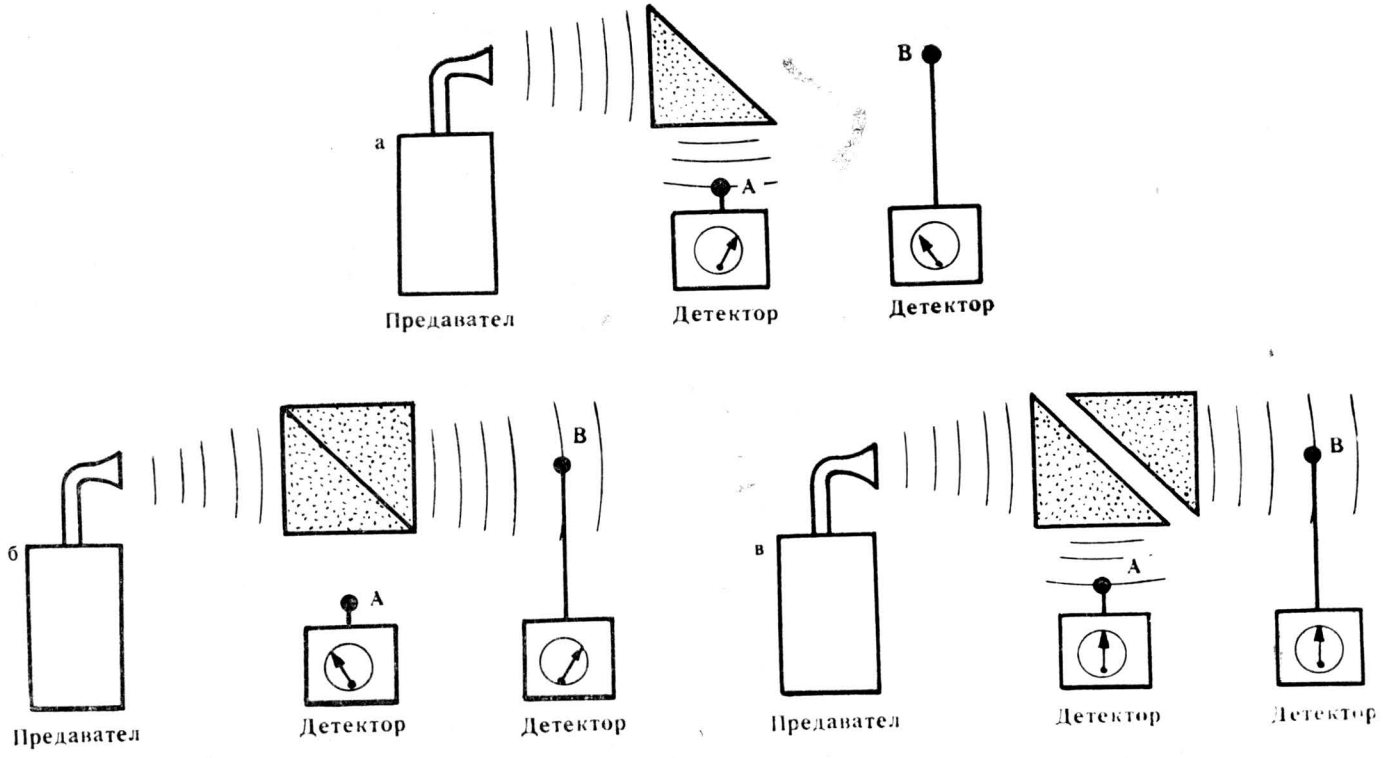
т. е. с увеличаването на x амплитудата на вълната или ще расте експоненциално, или ще намалява, но засега, разбира се, на нас ни е нужен само отрицателният знак. При това амплитудата на вълната вдясно от границата ще се проявява така, както е показано на фиг. 33-9.

Обърнете внимание, че k_l по големина е от порядъка на ω/c, т. е. λ_0 е равно на дължината на вълната на светлината във вакуум. Когато светлината се отразява изцяло от вътрешната повърхност стъкло — въздух, във въздуха възникват полета, но те не излизат вън от границите на разстояние от порядъка на дължината на вълната на светлината.

Сега за нас е ясно как трябва да отговорим на такъв въпрос: ако светлинната вълна в стъклото пада върху повърхността под достатъчно голям ъгъл, тя изцяло се отразява; ако приближим към повърхността друго парче стъкло (така че „повърхността“ фактически да изчезне), светлината ще преминава. В кой точно момент се получава този преход? Нали вероятно трябва да съществува непрекъснат преход от пълно отражение към пълна липса на отражение! Отговорът, разбира се, се състои в това, че ако слоят въздух е толкова малък, че експоненциалната „опашка“ на вълната във въздуха има още забележима големина във второто парче стъкло, тя ще „разтърсва“ електроните и ще поражда нова вълна (фиг. 33-10). Известно количество светлина ще преминава през системата. (Разбира се, нашето решение е непълно. Би трябвало отново да решим всички уравнения за случая на тънък слой въздух между две области стъкло.)



Фиг. 33-10. При много малък процеп вътрешното отражение няма да бъде „пълно“. Зад процепа се появява преминала вълна



Фиг. 33-11. Проникване на вълните на вътрешното отражение

За обикновената светлина този ефект на преминаване може да се наблюдава само ако процепът е много малък (от порядъка на дължината на вълната, т. е. 10^{-5} cm), но за 3-сантиметровите вълни той може да се демонстрира много лесно. За такива вълни експоненциално затихващите полета се разпространяват на разстояние няколко сантиметра. Микровълновата апаратура, с чиято помощ може да се покаже този ефект, се вижда на фиг. 33-11. Вълни от малък предавател на 3-сантиметрови вълни се насочват към парафинова призма, имаща сечение под формата на равнобедрен правоъгълен триъгълник. Коефициентът на пречупване на парафина за тези честоти е равен на 1,50, поради това критическият ъгъл ще бъде 41,5°, така че вълните изцяло се отразяват от повърхността, наклонена под 45°, и се приемат от детектора А (фиг. 33-11, *а*). Ако приложим плътно към първата призма втора парафинова призма (фиг. 33-11, *б*), вълните преминават право през двете призми и се регистрират от детектора В. Ако сега оставим процеп от няколко сантиметра между призмите (фиг. 33-11, *в*), ще получим както отразена, така и преминала вълни. Поставяйки детектора В на няколко сантиметра от наклонената под 45° повърхност на призмата, можем да видим и електрическото поле, близко около нея.

34

Магнетизъм на веществото

34-1. Диамагнетизъм и парамагнетизъм

34-2. Магнитни моменти и момент на количеството на движението

34-3. Прецесия на атомните магнитчета

34-4. Диамагнетизъм

34-5. Теорема на Лармор.

34-6. В класическата физика няма нито диамагнетизъм, нито парамагнетизъм

34-7. Момент на количеството на движението в квантовата механика

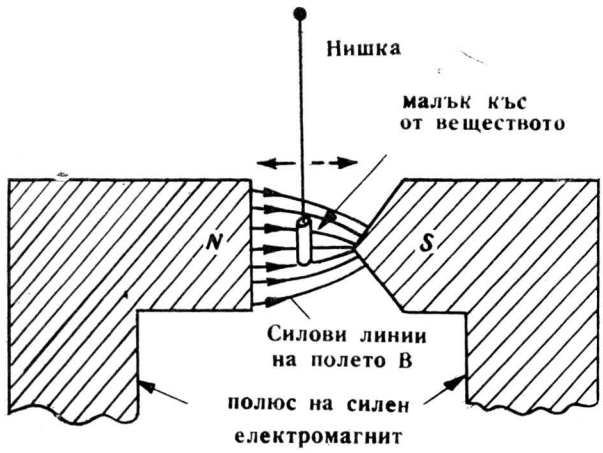
34-8. Магнитната енергия на атомите

Да се повтори: глава 15 (т. II) „Векторен потенциал".

34-1. Диамагнетизъм и парамагнетизъм

В тази глава аз ще започна да разказвам за магнитните свойства на материалите. Разбира се, веществото, което притежава най-силни магнитни свойства, това е желязото. Подобни магнитни свойства притежават още такива елементи, като никела, кобалта и (при достатъчно ниски температури, по-ниски от 16° С) гадолиния и другите редкоземни метали, а също някои особени сплави. Такъв вид магнетизъм се нарича *феромагнетизъм*. Това е едно достатъчно сложно и удивително явление и ние ще му посветим специална глава. Но и всички обикновени вещества също имат известни магнитни свойства, въпреки че те не са толкова ярко изразени, а много по-слабо — хиляди и милиони пъти по-малко, отколкото ефектите във феромагнитните материали. Тук ние възнамеряваме да опишем обикновения магнетизъм, т. е. магнетизмът на неферомагнитните вещества.

Този слаб магнетизъм бива два вида. Някои материали се *притеглят* от магнитното поле, други се *отблъскват* от него. За разлика от електрическия ефект във веществото, който винаги води до притегляне на диелектриците, магнитният ефект има два знака. Наличието на тези два знака може да се покаже лесно с помощта на силен електромагнит, единн от полюсните накрайници на който е заострен, а другият — плосък (фиг. 34-1). Магнитното поле около заострения полюс е много по-силно, отколкото при плоския. Ако малко парченце материал, окачено на дълга струна, се постави между полюсите на такъв магнит, върху него изобщо ще действува много малка сила. Действието на тази сила може да се забележи по незначителното отместване на окаченото парченце материал при завъртане на магнита. Оказва се, че феромагнитните материали силно се притеглят от заострения полюс, а всички останали — много слабо. А има и такива, които не се притеглят от заострения полюс, а слабо се отблъскват от него.



Фиг. 34-1 Малък бисмутов цилиндър слабо се отблъсква от заострения полюс; късче алуминий ще се притегля

Този ефект може най-лесно да се наблюдава с помощта на малък цилиндър от бисмут, който се *изтласква* от областта на силното поле. Веществата, които се отблъскват подобно на бисмута, се наричат *диамагнетици*. Бисмутът е един от най-силните диамагнетици, но даже и неговият магнитен ефект е много слаб. Диамагнетизмът винаги е много слаб. Ако между полюсите се

окачи късче алуминий, върху него пак ще действува слаба сила, обаче насочена към страната на заострения полюс. Веществата, подобни на алуминия, се наричат *парамагнетици*. (В тези експерименти при включването и изключването на магнита възникват сили, дължащи се на вихровите токове. Тези сили могат да дадат силен тласък. Поради това необходимо е да бъдем много внимателни и да гледаме само чистото преместване, след като окаченият предмет се е успокоил.)

Сега аз накратко ще опиша механизма на тези два ефекта. Преди всичко атомите на много вещества нямат постоянни магнитни моменти или, по-точно, всички магнитни моменти вътре във всеки атом са уравновесени, така че сумарният магнитен момент на атома е равен на нула. Спиновите и орбиталните моменти на електроните са балансирани така, че атомът няма никакъв среден магнитен момент. Ако при тези обстоятелства включите магнитно поле, във вътрешността на атома се генерират по индукция слаби допълнителни токове. В съответствие със закона на Ленц тези токове действуват така, че да се съпротивляват на увеличаващото се магнитно поле. Така възбуденият магнитен момент на атомите е насочен противоположно на магнитното поле. Такъв е механизмът на диамагнетизма.

Обаче съществуват вещества, чиито атоми все пак притежават магнитен момент, т. е. техните електронни спинове и орбити имат ненулев пълен циркулиращ ток. По такъв начин освен диамагнитния ефект (а той винаги е на лице) съществува още възможност за „строяване“ на индивидуалните атомни моменти в една посока. Магнитните моменти в този случай се стараят да се строят по направлението на магнитното поле (точно така, както постоянните диполи в диелектрика се строяват в електрическото поле) и възбуденият магнетизъм се стреми да усили магнитното поле. Това именно са парамагнитните вещества. Парамагнетизмът изобщо е твърде слаб, защото подреждащите сили са относително малки в сравнение със силите на топлинното движение, които се стараят да разрушат подреждането. Оттук също следва, че парамагнетизмът обикновено е чувствителен към температурата. (Изключение прави парамагнетизмът, обусловен от спиновете на електроните, на които се дължи проводимостта на металите, но ние няма да обсъждаме тук това явление.) За обикновения парамагнетизъм ефектът е толкова по-силен, колкото е по-ниска температурата. При ниски температури атомите се подреждат в по-голяма степен, тъй като разбъркването поради топлинните трептения (сблъсквания) ще бъде по-малко. Но от друга страна, диамагнетизмът повече или по-малко не зависи от температурата. Всяко вещество с подредени магнитни моменти има както диамагнитен, така и парамагнитен ефекти. Парамагнитният ефект обикновено доминира.

В глава 11 ние описахме сегнетоелектрическите вещества, при които всичките електрически диполи се подреждат в резултат на взаимодействието на атомните електрически полета. Можем да си представим магнитен аналог на сегнетоелектричеството, в който всички атомни моменти, действувайки един на друг, се подреждат сами помежду си. Ако бихте се опитали да пресметнете как трябва да стане това, ще констатирате, че тъй като магнитните сили са много по-слаби от електрическите, топлинното движение трябва да разстройва подреждането даже при толкова ниски температури като 10° К. Така че при стайни температури всякакво постоянно подреждане на магнитните моменти би изглеждало невъзможно.

Но, от друга страна, именно това явление се наблюдава в желязото: магнитните моменти там все пак се подреждат. Между магнитните моменти на различните атоми желязо действуват ефективни сили, които са много пъти по-големи от непосредственото магнитно взаимодействие. Това е косвен ефект, който може да се обясни само с помощта на квантовата механика. Той е около десет хиляди пъти по-силен от директното магнитно взаимодействие и именно той подрежда магнитните моменти във фе-

ромагнитните материали. За това особено взаимодействие ще говорим по-нататък.

Аз се опитах да ви дам едно качествено обяснение на диамагнетизма и парамагнетизма, обаче искам веднага да направя една поправка и да кажа, че от гледна точка на класическата механика по честен път е невъзможно да се разберат магнитните ефекти. Тези магнитни ефекти представляват *изцяло квантово-механично явление.* Въпреки това все пак не е безполезно да се приведат известни „правдоподобни" класически разсъждения и да се даде представа по какъв начин става всичко това.

Да се опитаме да тръгнем по този път. Може да се дадат различни физически аргументи и да се правят предположения за това, какво става с веществото, обаче всички тези аргументи ще бъдат в една или друга степен незаконни, тъй като във всяко едно от магнитните явления съществена роля играе квантовата механика. От друга страна, съществуват такива системи, подобни на плазмата или струпването на множество свободни електрони, в които електроните все пак живеят по законите на класическата механика. При такива обстоятелства някои от теоремите на класическия магнетизъм ще бъдат много полезни. Освен това класическите разсъждения са много полезни още и по исторически причини: нали, докато хората още не са могли да разберат дълбокия смисъл и поведението на магнитните вещества, те са се ползували от класически аргументи. Така че класическата механика все пак е способна да ни дава полезни сведения. И само ако се стремим да бъдем съвсем честни, трябва да отложим изучаването на магнетизма дотогава, докато не минете квантовата механика.

А на мене все пак не ми се иска да чакам толкова дълго, за да разберем такава проста работа като диамагнетизма. За цяла редица полуобяснения на това, което става, може да се ограничим с класическата механика, съзнавайки обаче, че нашите доводи действително се нуждаят от квантово-механическа подкрепа.

34-2. Магнитни моменти и момент на количеството на движението

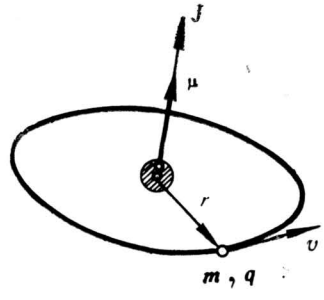
Първата теорема от класическата механика, която ние искаме да докажем, гласи: ако електронът се движи по кръгова орбита (например ако се върти около ядрото под действието на централните сили), то между магнитния момент и момента на количеството на движението съществува определена зависимост. Да означим с **J** момента на количеството на движението и с μ — магнитния момент на орбиталния електрон. Големината на момента на количеството на движението е равна на произведението от масата на електрона по скоростта и радиуса (фиг. 34-2). Той е насочен перпендикулярно към равнината на орбитата

$$J = mvr. \tag{34.1}$$

(Въпреки че тази формула е нерелативистична, за атома тя трябва да бъде достатъчно добра, защото отношението v/c за хванатия на орбита електрон в общия случай е равно по порядък на величината $e^2/\hbar c = 1/137$, или около 1 %.)

Магнитният момент на същата тази орбита е равен на произведението от тока по площта (вж. гл. 14-5). Токът е равен на положителния заряд, който преминава в единица време през всяка една точка от орбитата, т. е. на произведението от заряда по честотата на въртенето. А честотата е равна на скоростта, разделена на периметъра на орбитата, така че

$$I = q\,\frac{v}{2\pi r}.$$



Фиг. 34-2. За всяка кръгова орбита магнитният момент μ е равен на произведението от $q/2m$ по момента на количеството на движение **J**

Тъй като площта е равна на πr^2, магнитният момент ще бъде

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} qvr. \tag{34.2}$$

Той също е насочен перпендикулярно на равнината на орбитата. Следователно **J** и $\vec{\mu}$ имат еднакво направление

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \mathbf{J} \text{ (орбита).} \tag{34.3}$$

Тяхното отношение не зависи нито от скоростта, нито от радиуса. За всяка частица, която се движи по кръгова орбита, магнитният момент е равен на произведението от $q/2m$ по момента на количеството на движението. За електрона, чийто заряд е отрицателен (да го означим с $-q_e$)

$$\vec{\mu} = -\frac{q_e}{2m} \mathbf{J} \text{ (за електрон на орбита).} \tag{34.4}$$

Ето какво се получава в класическата физика и това, което е съвсем удивително, е, че точно същото е валидно и в квантовата механика. Това е един от правилните изводи. Обаче ако го развиваме по-нататък по пътя на класическата физика, ще се натъкнем на такива места, където той дава неправилни отговори. Да се оправим после в това, кои резултати са верни и кои неверни, е цяла история. По-добре е веднага да кажа кое е вярно и в квантовата механика. Преди всичко зависимостта (34.4) остава вярна за орбиталното движение; обаче това не е единственото място, където ние се срещаме с магнетизъм. Електронът освен това има и въртене около собствената си ос (подобно на въртенето на Земята около нейната ос) и в резултат на това въртене възниква както момент на количеството на движението, така и магнитен момент. Но по чисто квантовомеханически причини (класическо обяснение на този факт абсолютно липсва) отношението на $\vec{\mu}$ към **J** за собственото въртене (спина) на електрона е два пъти по-голямо, отколкото за орбиталното движение на въртящия се електрон

$$\vec{\mu} = -\frac{q_e}{m} \mathbf{J} \text{ (спин на електрона).} \tag{34.5}$$

Във всеки атом изобщо има няколко електрона и неговият пълен момент на количеството на движението и пълен магнитен момент представляват някаква комбинация от спиновите и орбиталните моменти. И без каквито и да са класически основания в квантовата механика (за изолиран атом) посоката на магнитния момент е винаги противоположна на посоката на момента на количеството на движението. Тяхното отношение не е задължено да бъде точно $-\frac{q_e}{m}$ или $-\frac{q_e}{2m}$; то е разположено някъде между тях, защото тук се „смесват“ приносите от спиновете и орбитите. Можем да напишем

$$\vec{\mu} = -g\left(\frac{q_e}{2m}\right)\mathbf{J}, \tag{34.6}$$

където множителят g характеризира състоянието на атома. За чисто орбиталните моменти той е равен на единица. За чисто спиновите — равен на 2, а за сложна система, подобна на атома, той е разположен някъде между тях. Разбира се, ползата от тази формула не е твърде голяма. Тя само говори, че магнитният момент е *успореден* на момента на количеството на движение, но може да има всякаква големина. Въпреки това формата на уравнението (34.6) все пак е удобна, защото величината g, наричана „фактор на Ланде“, е безразмерна константа от порядъка на единицата. Една от задачите на квантовата механика е да предсказва фактора g за различните атомни състояния.

Може би на вас ви е интересно да знаете какво става в ядрата на атомите. Протоните и неутроните в ядрото се движат

по своего рода орбити и в същото време, подобно на електроните, имат спин. Магнитният момент отново е успореден на момента на количеството на движение. Само че сега порядъкът на отношението на магнитния момент към момента на количеството на движение за всяка от тези частици ще бъде такъв, какъвто би могло да се очаква за протон, който се движи по окръжност; при това масата m в уравнението (34.3) трябва да се вземе равна на масата на протона.

Поради това за ядрата пишат обикновено (величината в скобките е положителна)

$$\vec{\mu}=g\left(\frac{q_e}{2m_p}\right)\mathbf{J}, \tag{34.7}$$

където m_p е масата на протона, а константата g, наричана ядрен g-фактор, е число от порядъка на единицата, което трябва да се определя отделно за всеки вид ядра.

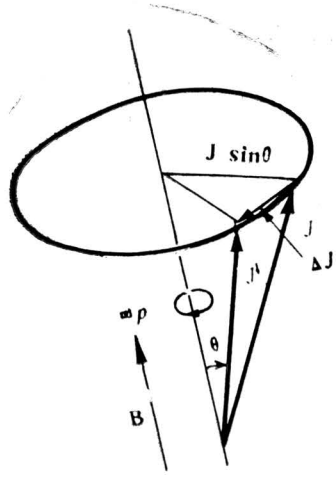
Друга важна разлика в случая на ядрата се състои в това, че g-факторът на спиновия магнитен момент на протона не е равен на 2 както у електрона. За протона $g=2.(2{,}79)$. Крайно удивително е, че спиновият магнитен момент и у неутрона представлява отношението на този магнитен момент към момента на количеството на движение, равен на $2.(-1{,}93)$. С други думи, неутронът няма да бъде точно „неутрален“ в магнитен смисъл. Той напомня малко магнитче и има същия магнитен момент, както и въртящия се отрицателен заряд.

34-3. Прецесия на атомните магнитчета

Едно от следствията на пропорционалността на магнитния момент към момента на количеството на движение се заключава в това, че атомните магнитчета, поставени в магнитно поле, ще прецесират. Да обсъдим това отначало от гледище на класическата физика. Нека имаме магнитен момент $\vec{\mu}$, който свободно виси в хомогенно магнитно поле. Той изпитва действие на момент на сила $\vec{\tau}$, равен на $\vec{\mu}\times\mathbf{B}$, който се опитва да го завърти в същата посока, в която е полето. Но атомният магнит — това е жироскоп, той притежава момент на количеството на движението **J**. Поради това моментът на силата от магнитното поле няма да предизвика завъртане в посока на полето. Вместо това магнитът, както видяхме, когато говорихме за жироскопа в глава 20 (т. I), ще започне да *прецесира*. Моментът на количеството на движение, а заедно с това и магнитният момент ще прецесират около ос, успоредна на магнитното поле. Скоростта на прецесията може да се намери по същия метод, както и в гл. 20 (т. I).

Да предположим, че в един малък интервал от време Δt моментът на количеството на движението се променя от **J** до **J′** (фиг. 34-3), като остава при това винаги под един и същ ъгъл θ към направлението на магнитното поле **B**. Да означим с ω_p ъгловата скорост на прецесията, така че за интервал от време Δt ъгълът на прецесията ще бъде равен на $\omega_p\Delta t$. От геометрията на рисунката виждаме, че изменението на момента на количеството на движението за време Δt е

$$\Delta J=(J\sin\theta)(\omega_p\Delta t),$$



Фиг. 34-3. Обект с момент на количеството на движението **J** и успореден на него магнитен момент $\vec{\mu}$ прецесира с ъглова скорост ω_p в магнитно поле **B**

а скоростта на изменението на момента на количеството на движение

$$\frac{dJ}{dt}=\omega_p J\sin\theta \tag{34.8}$$

трябва да бъде равна на момента на силата

$$\tau=\mu B\sin\theta. \tag{34.9}$$

Ъгловата скорост на прецесията ще бъде

$$\omega_p = \frac{\mu}{J} B. \tag{34.10}$$

Заместваики отношението μ/J от уравнението (34.6), виждаме, че за атомната система

$$\omega_p = -g\left(\frac{q_e}{2m}\right) B, \tag{34.11}$$

т. е. честотата на прецесията е пропорционална на B. Полезно е да се запомни, че за атома (или за електрона)

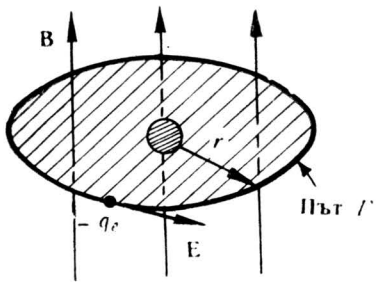
$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = (1{,}4 \text{ MHz/Gs})\, gB, \tag{34.12}$$

а за ядрото

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = (0{,}76 \text{ kHz/Gs})\, gB. \tag{34.13}$$

(Формулите за атомите и ядрата са различни само благодарение на различните стойности на g.)

И тъй в съответствие с *класическата* теория електронните орбити и спиновете в атома трябва да прецесират в магнитно поле. Вярно ли е това и в квантовата механика? Всъщност това е вярно. Обаче смисълът на „прецесията" е съвсем друг. В квантовата механика не може да се говори за *посока* на момента на количеството на движението в същия смисъл както в класическата; въпреки това аналогията тук е много близка, толкова близка, че продължаваме да използуваме термина „прецесия". Ние ще обсъждаме това по-късно, когато ще говорим за квантово-механическата гледна точка.



Фиг. 34-4. Индуцираните електрични сили, които действуват върху електрона в атома

34-4. Диамагнетизъм

Да разгледаме сега от класическа гледна точка диамагнетизма. Към него може да се подходи по няколко начина, но един от най-добрите е следният. Да предположим, че близко до атомите бавно се включва магнитно поле. При изменението на магнитното поле благодарение на магнитната индукция ще се генерира електрическо поле. По закона на Фарадей контурният интеграл от E по затворен контур е равен на скоростта на изменението на магнитния поток през този контур. Да предположим, че като контур Γ сме избрали окръжност с радиус r, чийто център съвпада с центъра на атома (фиг. 34-4). Средното тангенциално електрическо поле върху този контур се определя от израза

$$E 2\pi r = -\frac{d}{dt}(B\pi r^2),$$

т. е. възниква циркулиращо електрическо поле, чийто интензитет е

$$E = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}.$$

Индуцираното електрическо поле, действувайки върху атомния електрон, създава момент на силата, равен на $-q_e Er$, който трябва да бъде равен на скоростта на изменението на момента на количеството на движението dJ/dt

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{q_e r^2}{2}\frac{dB}{dt}. \tag{34.14}$$

Като интегрираме сега по времето, започвайки от нулево поле, намираме, че изменението на момента на количеството на движението, което се дължи на включването на полето, е

$$\Delta J = \frac{q_e r^2}{2} B. \tag{34.15}$$

Това е този допълнителен момент на количеството на движението, който се придава на електрона през време на включването на полето. Този допълнителен момент на количеството на движението води до допълнителен магнитен момент, който благодарение на това че движението е *орбитално*, е равен точно на произведението от $-q_e/2m$ по момента на количеството на движението. Възбудният диамагнитен момент е

$$\Delta\mu = -\frac{q_e}{2m}\Delta J = -\frac{q_e^2 r^2}{4m}B. \tag{34.16}$$

Знакът минус (както можем да се убедим непосредствено от закона на Ленц) означава, че посоката на допълнителния момент е противоположна на посоката на магнитното поле.

На мен ми се иска да напиша израза (34.16) малко по-иначе. Величината r^2, която се появи при нас, представлява квадрата на разстоянието от оста, която минава през атома и е успоредна на полето B, така че ако полето B е насочено по оста z, този квадрат е равен на x^2+y^2. Ако разгледаме сферически симетрични атоми (или усредним по атоми, чиито естествени оси могат да се разполагат по всички направления), то средното от x^2+y^2 е равно на 2/3 от средния квадрат на истинското радиално разстояние от центъра на атома. Поради това уравнението (34.16) обикновено се записва в по-удобния вид

$$\Delta\mu = -\frac{q_e^2}{6m}\langle r^2\rangle_{\text{ср}}B. \tag{34.17}$$

Във всеки случай намерихме, че индуцираният атомен момент е противоположен по посока и пропорционален по големина на магнитното поле B. Това е диамагнетизмът на веществото. Именно на този магнитен ефект се дължат малките сили, действуващи върху парчето бисмут в нехомогенно магнитно поле. (Можете да определите големината на тази сила, като използувате израза за енергията на възбудения момент в полето и резултатите от измерванията на изменението на енергията при движението на образеца в областта на силното поле или навън от нея.)

Но пред нас все още стои такава проблема: на какво е равен средният квадратичен радиус $\langle r^2\rangle_{\text{ср}}$? Класическата механика не може да ни даде отговор. Трябва да се върнем назад и, въоръжени с квантова механика, да започнем всичко отначало. Ние не можем да знаем къде именно се намира електронът в атома, а знаем само, че има вероятност той да бъде открит в някое място. Ако интерпретираме $\langle r^2\rangle_{\text{ср}}$ като средна стойност на квадрата на разстоянието от центъра за дадена вероятност на разпределение, то диамагнитният момент, даван от квантовата механика, се определя от същия израз (34.17). Той, разбира се, ни дава момента на един електрон. Пълният момент ще бъде сума по всички електрони в атома. Удивително е, че и класическите разсъждения, и квантовата механика дават един и същи отговор, въпреки че, както ще видим по-нататък, „класическите“ разсъждения, които водят до (34.17), са в действителност несъстоятелни в рамките на самата класическа механика.

Такъв диамагнитен ефект ще се наблюдава даже при атомите, които имат постоянен магнитен момент. Тази система също ще прецесира в магнитно поле. През време на прецесията на атома като цяло той набира малка допълнителна ъглова скорост, а подобно бавно въртене води до малък ток, който дава поправка към магнитния момент. Това е точно същият диамагнитен ефект, но третиран по друг начин. Обаче в действителност, когато говорим за парамагнетизъм, не е необходимо да се грижим за тази добавка. Ако първоначално бихме пресметнали диамагнитния ефект, както това беше направено тук, малкият допълнителен ток, получен вследствие прецесията, не трябва да ни безпокои. Той вече е включен от нас в диамагнитния член.

34-5. Теорема на Лармор

Сега вече могат да се направят някакви заключения от нашите резултати. Преди всичко в класическата теория моментът $\vec{\mu}$ е винаги пропорционален на **J**. При това всеки вид атоми има свой коефициент на пропорционалност. В класическата теория електронът няма никакъв спин и коефициентът на пропорционалност винаги е $-q_e/2m$, другояче казано, трябва да положим $g=1$ в (34.6). Отношението на $\vec{\mu}$ към **J** не зависеше от вътрешното движение на електроните. Следователно в съответствие с класическата теория всички системи електрони би трябвало да прецесират с една и съща ъглова скорост. (В квантовата механика това не е вярно). Този резултат е свързан с една теорема от класическата механика, която аз бих искал сега да докажа. Да приемем, че имаме група електрони, които се удържат заедно от притегляне към централна точка подобно на електроните, претеглени от ядрото. Тези електрони ще взаимодействуват също и помежду си и тяхното движение изобщо ще бъде много сложно. Нека вие сте намерили движението им в отсъствие на магнитно поле и искате да знаете какво ще бъде движението в слабо магнитно поле. Теоремата твърди, че движението в слабо магнитно поле винаги ще бъде такова, каквото и движението без полето с едно допълнително въртене спрямо оста на полето с ъглова скорост $\omega_L = q_e B/2m$. (Това е същото, както и ω_p при $g=1$.) Разбира се, възможните движения могат да бъдат най-различни. Цялата работа е в това, че на всяко движение без магнитно поле съответствува движение в полето, което се състои от първоначалното движение плюс равномерно въртене. Това именно е теоремата на Лармор, а честотата ω_L се нарича Ларморова честота.

Аз бих искал да ви покажа как може да се докаже тази теорема, но детайлите на доказателството ще предоставя на вас самите. Да вземем отначало електрона в централно силово поле. Върху него действува просто насочена към центъра сила $\mathbf{F}(r)$. Ако сега включим хомогенно магнитно поле, ще се появи допълнителна сила $q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, така че пълната сила ще бъде

$$\mathbf{F}(r)+q\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \tag{34.18}$$

Да разгледаме сега същите тези електрони в координатна система, която се върти с ъглова скорост ω спрямо ос, която минава през центъра на силите и е успоредна на полето **B**. Тя вече няма да бъде инерциална система и поради това ще бъде необходимо да добавим полагащите се псевдосили: центробежните сили и силите на Кориолис, за които говорихме в глава 19 (т. I). Там ние констатирахме, че в отправна система, която се върти с ъглова скорост ω, действуват фиктивни *тангенциални* сили, пропорционални на v_r — радиалната компонента на скоростта:

$$F_t = -2m\omega v_r, \tag{34.19}$$

Освен това там действува фиктивната радиална сила

$$F_r = m\omega^2 r + 2m\omega v_t, \tag{34.20}$$

където v_t е тангенциалната компонента на скоростта, измерена във въртящата се отправна система (радиалната компонента v_r е една и съща както за въртящата се, така и за инерциалната система).

Сега за достатъчно малки ъглови скорости (т. е. когато $\omega r \ll v_t$) първата (центробежната) слагаема в уравнението (34.20) може да се пренебрегне в сравнение със втората (кориолисовата). След това уравненията (34.19) и (34.20) могат да се запишат заедно като

$$\mathbf{F} = -(2m\vec{\omega}\times\mathbf{v}). \tag{34.21}$$

Ако сега *комбинираме* въртенето и магнитното поле, трябва да добавим към силата (34.18) силата (34.21). Пълната сила е такава

$$\mathbf{F}(r)+q\mathbf{v}\times\mathbf{B}+2m\mathrm{v}\times\vec{\omega} \tag{34.22}$$

В последното слагаемо в сравнение с (34.21) разместихме множителите във векторното произведение и изменихме знака). Като разгледаме сега получения резултат, виждаме, че ако

$$2m\vec{\omega} = -q\mathbf{B},$$

то последните два члена ще се съкратят и единствената сила в системата, която се върти, ще бъде силата $\mathbf{F}(r)$. Движението на електрона ще бъде същото, както и при отсъствие на магнитно поле, но ще се добави, разбира се, въртенето. Ние доказахме теоремата на Лармор за един електрон. Тъй като при доказателството предполагахме, че ω е малка, следва, че теоремата е вярна само за слаби магнитни полета. Единственото, което аз ви моля да разгледате самостоятелно — това е случаят на много електрони, които взаимодействуват помежду си в същото централно поле. Докажете теоремата и за този случай. По такъв начин, колкото и да е сложен атомът, ако неговото поле е централно, теоремата ще бъде валидна. Но това вече е край на класическата механика, защото това, че системата прецесира по такъв начин, е невярно. Честотата на прецесията ω_p в уравнението (34.11) е само тогава равна на ω_L, когато $g=1$.

34-6. В класическата физика няма нито диамагнетизъм, нито парамагнетизъм

Сега аз искам да ви покажа, че от класическата механика не може да се получи нито диамагнетизъм, нито парамагнетизъм. На пръв поглед това звучи странно — ние току-що доказахме, че там има и диамагнетизъм, и парамагнетизъм, и прецесиращи орбити и т. н., а сега се гласим да доказваме, че всичко това не е вярно. Да! Това е точно така! Аз смятам да докажа, че ако достатъчно дълго следваме класическата механика, никакви магнитни ефекти няма да се получат: те ще *изчезнат всички до един.* Ако започнете с класически разсъждения и спрете навреме, тогава можете да получите желания резултат. Но законните и последователни доказателства показват, че няма никакви магнитни ефекти.

Ето едно от следствията на класическата механика. Ако имате някаква система, затворена в кутия — да речем електронен или протонен газ, или нещо от този род, която не е способна да се върти като нещо цяло, то никакъв магнитен ефект не би могъл да възникне. Магнитният ефект може да се получи само при наличието на изолирана система, която се удържа от разлитане със свои собствени сили подобно на звезда, която, поставена в магнитно поле, може да започне да се върти. Но ако вашето парче вещество се удържа в едно положение и не може да започне да се върти, то никакъв магнитен ефект няма да се появи. По-точно под това разбираме следното: ние предполагаме, че при дадена температура съществува само едно състояние на топлинно равновесие. Тогава теоремата твърди, че ако включите магнитно поле и изчакате, докато системата дойде в топлинно равновесие, то никакъв възбуден магнитен ефект няма да се появи — нито диамагнетизъм, нито парамагнетизъм. *Доказателство*: съгласно със статистическата механика веорoятността системата да има дадено състояние на движение е пропорционална на $e^{-U/kT}$, където U е енергията на това движение. Но какво е това енергия на движението? За частица в постоянно магнитно поле тя е равна на обикновената потенциална енергия плюс $mv^2/2$, без каквито и да са добавки от магнитното поле. (Вие знаете, че силата, с която действува електромагнитното поле, е равна на $q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$, а мощността $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$ ще бъде просто $q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}$, т. е. няма и помен от влияние на магнитното поле. И тъй енергията на системата независимо от това дали тя се намира в магнитно поле, или не, винаги ще бъде сума от кинетичната и потенциалната енергия. А тъй като вероятността за всяко движение зависи само от енергията, т. е. от скоростта и положението, то за нея е безразлично дали

е включено магнитно поле, или не. Следователно магнитното поле не оказва никакво влияние върху топлинното равновесие. Ако вземем отначало една система, затворена в кутия, а след това друга във втора кутия, но този път в магнитно поле, то вероятността за някаква определена стойност на скоростта в някоя точка в първата кутия ще бъде същата, както и във втората. Ако в първата кутия липсват средни циркулиращи токове (които не би трябвало да съществуват, ако системата се намира в равновесие със стационарните стени), то в нея няма никакъв магнитен момент. А тъй като всички движения във втората кутия са такива, каквито и в първата, в нея също няма никакъв магнитен момент. Следователно ако температурата се поддържа постоянна, след включването на полето и възстановяването на топлинното равновесие според класическата механика не би трябвало да има никакъв възбуден магнитен момент. Удовлетворително обяснение на магнитните явления може да се получи само в квантовата механика.

За съжаление аз не съм уверен във вашето пълно разбиране на квантовата механика, затова едва ли е уместно да обсъждаме тези въпроси тук. Но от друга страна, не винаги трябва изучаването на нещо да се започне с написване на правилата и тяхното прилагане при различни обстоятелства. Почти всяка тема, с която имахме работа в нашия курс, ние започвахме различно. За електродинамиката например още на първата страница написахме уравненията на Максвел и след това извеждахме от тях всичките следствия. Това е един начин. Обаче аз сега нямам намерение да започвам нова „първа страница", като изпиша уравненията на квантовата теория и започна да получавам следствия от тях. Аз просто ще ви разкажа за някои резултати на квантовата механика още преди вие да сте узнали откъде се взимат те. И тъй, на работа!

34-7. Момент на количеството на движението в квантовата механика

Аз вече дадох зависимостта между магнитния момент и момента на количеството на движение. Много добре! Но какво означава магнитен момент и момент на количеството на движението в квантовата механика? Оказа се, че за да имаме пълна увереност в това какво означават те в квантовата механика, по-добре е да определяме нещата, подобни на магнитния момент, посредством други понятия, такива като енергията. Магнитният момент може лесно да се определи посредством енергията, защото енергията на магнитния момент в магнитно поле е равна в класическата теория на $\vec{\mu} \cdot \mathbf{B}$. Следователно в квантовата механика е необходимо да се вземе следното определение: ако пресмятаме енергията на системата в магнитно поле и видим, че тя е пропорционална на интензитета (за малки полета), то коефициентът на пропорционалност ще наричаме магнитен момент по посока на полето. (Засега не ни е необходима особена елегантност в нашата работа и можем да продължаваме да мислим за магнитния момент в обикновения, т. е. в известно отношение класически смисъл).

Сега аз бих желал да обсъдим понятието „момент на количество на движението в квантовата механика" или по-точно характеристиката на това, което се нарича момент на количеството на движението в квантовата механика. Вие виждате, при преход към закони от нов вид не е необходимо да се предполага, че всяка дума ще означава точно същото, каквото и по-рано. Като поразмислите, можете да кажете: „Почакайте, аз знам какво е това момент на количеството на движението. Това е нещо, което се измерва с момента на силата." Но що е това момент на силата? В квантовата механика ние трябва да имаме нови определения на старите величини. Поради това законно би било да се нарече той с някакво друго име — нещо като „ъгловквантов момент" или нещо друго в този дух. И това вече би бил момент на количе-

ството на движението по „квантово-механически“. Обаче ако можем да намерим величина, която и в квантовата механика е идентична на нашето старо понятие момент на количеството на движението, стига системата да е достатъчно голяма, то няма никаква полза от измисляне на нови думи. Тази величина също може да се нарече момент на количеството на движението. При такова разбиране това странно нещо, което ние сега се гласим да опишем, е именно моментът на количеството на движенията. Това е характеристика, която за големи системи се покрива с познатия ни момент на количеството на движението от класическата механика.

Преди всичко да вземем,система със запазващ се момент на количеството на движението подобно на атом в празно пространство. Такава система (подобно на Земята, която се върти около собствената си ос) може да се върти около всяка ос, каквато си намислим да изберем. За дадена стойност на спина са възможни много различни „състояния“ с една и съща енергия, при това всяко едно от тях съответствува на някакво направление на оста на момента на количеството на движението. По такъв начин в класическата механика с даден момент на количеството на движението са свързани безбройно много възможни състояния с една и съща енергия.

Обаче, както се оказва, в квантовата механика стават някои странни неща. Първо, броят на състоянията, в които може да се намира такава система, е ограничен — те могат да се изброят. За малка система този брой е твърде малък, но ако системата е голяма, броят става много и много голям. Второ, ние не можем да описваме „състоянията“, като задаваме посоката на момента на количеството на движенията, а можем само да даваме неговата компонента по някаква посока, да речем по посоката на оста z. Класически обект с даден пълен момент на количеството на движение J може да има в качеството на z-компонента всяка една стойност между $-J$ и $+J$. Но в квантовата механика z-компонента на момента на количеството на движението може да взима само определени дискретни стойности. Всяка дадена система, по-специално атом или ядро или нещо друго, с дадена енергия има едно характерно число j, а нейната z-компонента на момента на количеството на движението може да има само една от стойностите

$$j\hbar;\ (j-1)\hbar;\ (j-2)\hbar;\ \ldots;-(j-2)\hbar;-(j-1)\hbar;\ -j\hbar. \quad (34.23)$$

Най-голямата стойност на z-компонентата е равна на произведението от j по $\hbar$, следващата е по-малка с $\hbar$ и т. н. до $-j\hbar$. Числото j се нарича „спин на системата“. (Някои го наричат даже „квантово число на пълния момент на количеството на движение“, а ние ще го наричаме просто „спин“.)

Вероятно вас ви вълнува дали всичко, казано от нас, няма да бъде вярно само за някоя особена ос z? Това не е така. За система със спин j компонентата на момента на количеството на движение по всяка ос може да взима само една от стойностите (34.23). Въпреки че всичко това изглежда доста невероятно, аз още веднаж ви моля да ми повярвате. По-късно ние пак ще се върнем към този пункт и ще го обсъдим. Тогава вероятно ще ви бъде приятно да чуете, че z-компонентата пробягва набор от стойности от някое число до *същото това число* със знак минус, така че за щастие няма да ни се наложи да гадаем коя посока на оста z е положителна. (Разбира се, ако аз бях казал, че то пробягва стойности от $+j$ до минус някакво друго число, то това би било крайно подозрително, защото тогава ние бихме били лишени от възможността да насочим оста z в другата страна.)

Но ако z-компонентата на момента на количеството на движение се изменя с цяло число от $+j$ до $-j$, то не трябва ли самото j също да бъде цяло число? Не! Не е съвсем така, цяло трябва да бъде удвоеното j, т. е. $2j$. Другояче казано, цяла трябва да бъде само разликата между $+j$ и $-j$. Следователно спи-

нът j изобщо може да бъде или цял, или полуцял в зависимост от това дали $2j$ ще бъде нечетно, или четно. Да вземем за пример ядро от типа на лития, чийто спин е равен на 3/2. При това моментът на количеството на движение спрямо оста z взима в единици $\hbar$ една от следните стойности

$$+3/2; \quad +1/2; \quad -1/2; \quad -3/2.$$

Така че ако ядрото се намира в празно пространство и външни полета липсват, то ще има четири възможни състояния, всяко с една и съща енергия. За система със спин 2, z-компонентата на момента на количеството на движение ще взима в единици $\hbar$ само следните стойности

$$2; \quad 1; \quad 0; \quad -1; \quad -2.$$

Ако пресметнете колко са възможните състояния за даден спин j, ще получите $(2j+1)$. С други думи, ако ми кажете каква е енергията на системата и нейният спин j, то броят на състоянията със същата енергия ще бъде равен точно на $(2j+1)$ при това на всяко от тях ще съответствува различна стойност на z-компонентата на момента на количеството на движение.

Би ми се искало да прибавя още един факт. Ако вие случайно изберете някой атом с известно j и измерите неговата z-компонента на момента на количеството на движението, ще можете да получите някои от възможните стойности, при което всяка една от тях е равновероятна. Всяко състояние може да се характеризира само с една от възможните стойности, но всяка от тях е толкова добра, колкото която и да е друга. Всяка от тях има в този свят едно и също тегло (ние предполагаме, че няма никакво предварително „сортиране"). Между другото този факт има прост класически аналог. Представете си, че същият този въпрос ни интересува от класическо гледище: ако една система от набор системи, имащи един и същи момент на количеството на движение, е избрана случайно, то каква е вероятността за някаква определена стойност на z-компонентата на момента на количеството на движение? Отговор: Всяка една от стойностите, от максималната до минималната, е еднакво вероятна (в това можете леко да се убедите сами). Този класически резултат съответствува на еднаквата вероятност за всяка една от $(2j+1)$ възможности в квантовата механика.

От това, което разглеждахме досега, може да се получи и друго интересно и в известен смисъл удивително заключение. В някои класически пресмятания в окончателния резултат се появява величина, равна на квадрата на момента на количеството на движение $\mathbf{J}$, с други думи, $\mathbf{J}.\mathbf{J}$. И ето, оказва се, че правилната квантовомеханическа формула може да се налучка с помощта на класически пресмятания и следното просто правило; заменете $J^2=\mathbf{J}.\mathbf{J}$ с $j(j+1)\hbar^2$. Това правило често се използува и обикновено то дава правилен резултат, обаче *не винаги*. За да ви покажа защо това правило може да работи добре, аз ще приведа следното разсъждение:

Скаларното произведение $\mathbf{J}.\mathbf{J}$ може да се запише като

$$\mathbf{J}.\mathbf{J}=J_x^2+J_y^2+J_z^2.$$

Тъй като това е скалар, той трябва да си остава един и същи за всяка една ориентация на спина. Да предположим, че случайно сме избрали образец от някаква атомна система и сме направили измервания или на величината J_x^2, или на J_y^2, или на J_z^2, — средната стойност на всяка една от тях трябва да бъде една и съща. (Нито едно от направленията няма особено предимство пред което и да е друго.) Следователно средната стойност на $\mathbf{J}.\mathbf{J}$ е равна просто на утроената средна стойност на квадрата на всяка една компонента, например на J_z^2

$$\langle \mathbf{J}.\mathbf{J}\rangle_{\text{ср}}=3\langle J_z^2\rangle.$$

Но тъй като $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$ при всяка ориентация е едно и също, неговото средно, разбира се, ще бъде постоянна величина

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}=3\langle J_z^2\rangle_{\text{ср}}. \tag{34.24}$$

Ако сега кажем, че същото уравнение ще се използува и в квантовата механика, то лесно можем да намерим $\langle J_z^2\rangle_{\text{ср}}$. Просто трябва да вземем сумата от $(2j+1)$ възможни стойности на J_z^2 и да я разделим на броя на всички стойности

$$\langle J_z^2\rangle_{\text{ср}}=\frac{j^2+(j-1)^2+\cdots+(-j+1)^2+(-j)^2}{(2j+1)}\hbar^2. \tag{34.25}$$

Ето какво се получава за система със спин 3/2

$$\langle J_z^2\rangle_{\text{ср}}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}{4}\hbar^2=\frac{5}{4}\hbar^2.$$

Оттук заключаваме, че

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}=3\langle J_z^2\rangle_{\text{ср}}=3\,\frac{5}{4}\hbar^2=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\hbar^2.$$

За вас остава да докажете, че зависимостта (34.25) заедно със (34.24) дава в резултат

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}=j(j+1)\hbar^2. \tag{34.26}$$

Въпреки че в рамките на класическата физика ние бихме мислили, че най-голямата възможна стойност на z-компонента на $\mathbf{J}$ е равна просто на абсолютната стойност на $\mathbf{J}$, именно $\sqrt{\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}}$, в квантовата механика максималната стойност на J_z винаги е малко по-малка от нея, защото $j\hbar$ винаги е по-малко от $\sqrt{j(j+1)}\,\hbar$. Моментът на количеството на движението никога не е насочен „напълно по оста z“.

34-8. Магнитната енергия на атомите

Сега аз отново искам да поговорим за магнитния момент. Аз вече говорих, че в квантовата механика магнитният момент на атомната система може да бъде свързан с момента на количеството на движението чрез зависимостта (34.6)

$$\vec{\mu}=-g\left(\frac{q_e}{2m}\right)\mathbf{J}, \tag{34.27}$$

където $-q_e$ е зарядът, а m — масата на електрона.

Атомните магнитчета, поставени във външно магнитно поле, добиват допълнителна магнитна енергия, която зависи от компонентата на техния магнитен момент по посока на полето. Знаем, че

$$U_{\text{магн}}=-\vec{\mu}\cdot\mathbf{B}. \tag{34.28}$$

Като изберем оста z по посока на полето $\mathbf{B}$, получаваме

$$U_{\text{магн}}=-\mu_z B. \tag{34.29}$$

А като използуваме уравнението (34.27), намираме

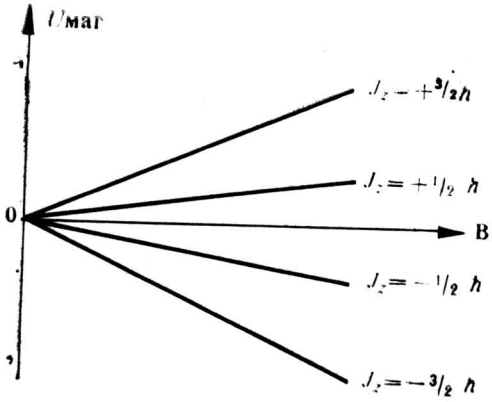
$$U_{\text{магн}}=g\left(\frac{q_e}{2m}\right)J_z B.$$

Съгласно квантовата механика величината J_z може да приема само такива стойности: $j\hbar$, $(j-1)\hbar$, . . ., $-j\hbar$. Следователно магнитната енергия на атомната система не е произволна, допустими са само някои нейни стойности. Например максималната стойност на енергията е

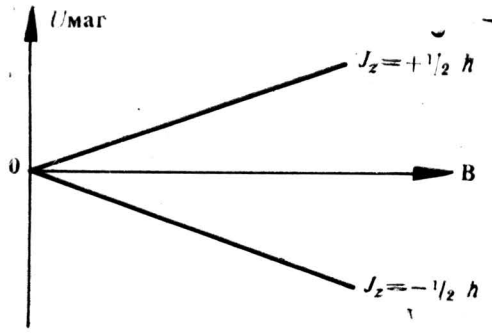
$$g\left(\frac{q_e}{2m}\right)\hbar jB.$$

Величината $q_e\hbar/2m$ обикновено се нарича „магнетон на Бор“ и се означава с μ_B

$$\mu_B=\frac{q_e\hbar}{2m}.$$



Фиг. 34-5 Възможни магнитни енергии на атомна. система със спин 3/2 в магнитно поле **B**



Фиг. 34-6 Две възможни енергетични състояния на електрона в магнитно поле **B**

Възможните стойности на магнитната енергия ще бъдат следните

$$U_{маг} = g\,\mu_B B\,\frac{J_z}{\hbar},$$

където $J_z/\hbar$ приема една от следните стойности j, $(j-1)$, $(j-2)$, . . . , $(-j+1)$, $-j$.

С други думи, енергията на атомна система, поставена в магнитно поле, се изменя с величина, пропорционална на полето и на компонентата J_z. Ние казваме, че енергията на атомната магнитна система „се разцепва от магнитното поле на $2j+1$ нива". Например атоми със спин $j = 3/2$, чиято енергия вън от магнитното поле е равна на U_0, в магнитното поле ще имат четири възможни стойности на енергията. Тези енергии могат да се изобразят на диаграма на енергетичните нива, подобна на тази на фигура (34-5) Обаче енергията на всеки атом в дадено поле B приема само една от четирите възможни стойности. Това е, което ни говори квантовата механика за поведението на атомна система в магнитно поле.

Най-простата „атомна" система — това е отделният електрон. Спинът на електрона е равен на 1/2 и затова при него са възможни две състояния $J_z = \hbar/2$ и $J_z = -\hbar/2$. За спиновия магнитен момент на отделен неподвижен електрон (при който няма орбитално движение) $g = 2$, така че магнитната енергия ще бъде $\pm\mu_B B$ На фиг. 34-6 са показани възможните енергии на електрона в магнитно поле. Грубо казано, спинът на електрона е насочен или „нагоре" (по магнитното поле), или „надолу" (срещу полето).

В системи с по-висок спин броят на състоянията също е по-голям. Поради това в зависимост от величината на J_z можем да говорим за спин, насочен „нагоре" или „надолу", или под някакъв „ъгъл".

Тези резултати на квантовата механика ще използуваме в следващата глава при обсъждането на магнитните свойства на материалите.

35

Парамагнетизъм и магнитен резонанс

35-1. Квантовани магнитни състояния

35-2. Опит на Щерн-Герлах

35-3. Метод на молекулните снопове на Раби

35-4. Парамагнетизъм

35-5. Охлаждане чрез адиабатно размагнитване

35-6. Ядрен магнитен резонанс

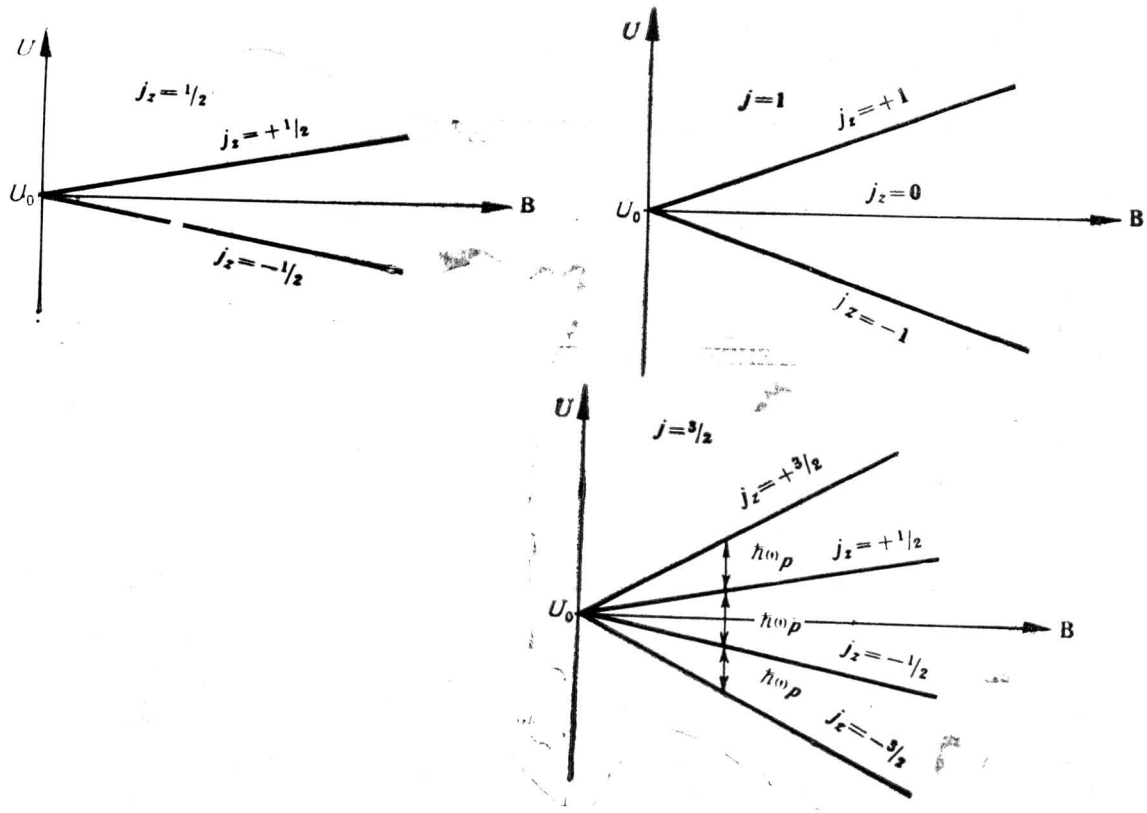
Да се повтори: глава 11 "Вътрешен строеж на диелектриците".

35-1. Квантовани магнитни състояния

В предишната глава казахме, че моментът на количеството на движението на една система в квантовата механика не може да има произволно направление и неговите компоненти по дадена ос могат да приемат само определени дискретни еквидистантни стойности. Това е поразителна, но характерна особеност на квантовата механика. На вас може да ви се стори, че още е твърде рано да се навлиза в такива неща, че трябва да почакаме, докато поне малко привикнете към тях и бъдете готови да възприемате подобни идеи. Но работата е в това, че вие никога няма да можете да привикнете към тях. Вие никога няма да можете лесно да ги възприемате. Това е може би най-сложното от всичко, което съм ви разказвал досега, и главното е, че няма начин то да се опише някакси по-ясно и не така заплетено и сложно по форма. Поведението на веществото в малки мащаби, както вече ви говорих много пъти, се различава от всичко това, към което сте свикнали, и наистина е твърде странно. Вие, разбира се, ще се съгласите, че не би било лошо да се опитаме по-отблизо да се запознаем с явленията в малките мащаби, като продължаваме заедно с това да използуваме класическата физика и да придобием като начало поне някакъв опит, даже и без да разбираме всичко достатъчно дълбоко. Разбирането на тези неща настъпва много бавно, ако то настъпи въобще. Разбира се, малко по-малко започваш да чувствуваш какво може и какво не може да стане в една квантово-механическа ситуация, а това може би именно се нарича „разбиране", но да се постигне приятното чувство за „естественост" на квантово-механическите правила тук е невъзможно. Те, разбира се, са естествени, но от гледище на нашия всекидневен опит, на привично ниво, остават твърде необичайни. На мен би ми се искало да ви обясня, че позицията, която смятаме да вземем спрямо правилото за дискретността на стойностите на момента на количеството на движението, е съвсем отлична от отношението към много други неща, за които ставаше дума. Аз даже няма да се опитвам „да ви го обясня", но трябва поне да ви *разкажа* какво се получава. Би било нечестно от моя страна, описвайки магнитните свойства на веществото, да не посоча, че класическото обяснение на магнетизма, т. е. на момента на количеството на движение и на магнитния момент, е несъстоятелно.

Едно от най-необичайните следствия на квантовата механика се състои в това, че моментът на количеството на движение по всяка една ос винаги се оказва равен на цяла или полуцяла част от $\hbar$. При това, каквато и ос да вземем, това винаги ще бъде така. Парадоксалността тук се заключава в следния любопитен факт: ако вземете която и да е друга ос, ще се окаже, че компонентите спрямо тази ос ще бъдат взети от същия набор стойности. Обаче да оставим разсъжденията дотогава, докато у вас се набере достатъчно опит и вие ще можете да се насладите на това, как този привиден парадокс в края на краищата ще се разреши.

Сега просто приемете на доверие, че за всяка атомна система има число j, наричано спин на системата (то може да бъде или цяло, или полуцяло), и че компонентите на момента на количе-



Фиг. 35-1. Атомна система със спин j в магнитно поле B има $(2j+1)$ възможни стойности на енергията
При слаби полета отместването на енергията е пропорционално на интензитета B

ството на движението спрямо всяка дадена ос винаги приемат една от стойностите между $+j\hbar$ и $-j\hbar$

$$J_z = \text{Някоя от стойностите} \left\{ \begin{matrix} j \\ j-1 \\ J-2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -j+2 \\ -j+1 \\ -j \end{matrix} \right\} \hbar. \tag{35.1}$$

Ние споменахме също, че магнитният момент на всяка една проста атомна система има същото направление, както и моментът на количеството на движение. Това е вярно не само за атомите или ядрата, но и за елементарните частици. Всяка елементарна частица притежава характерна за нея величина j и свой собствен магнитен момент (за някои частици и двете са равни на нула). Под „магнитен момент на системата“ разбираме, че нейната енергия в магнитно поле, насочено по оста z, за слаби полета може да бъде записана като $-\mu_z B$. Ние трябва да се условим да не взимаме твърде големи полета, защото те ще смущават вътрешните движения на системата и енергията няма да бъде мярка на магнитния момент, който системата е имала до включването на магнитното поле. Но ако полето е достатъчно слабо, то ще изменя енергията с величината

$$\Delta U = -\mu_z B, \tag{35.2}$$

при условие че в този израз трябва да направим заместването

$$\mu_z = g\left(\frac{q_e}{2m}\right) J_z, \tag{35.3}$$

където J_z е равно на една от стойностите (35.1).

Да си представим, че сме взели система със спин $j=3/2$. При липса на магнитно поле системата би имала четири различни възможни състояния, съответстващи на различни стойности на J_z с една и съща енергия. Но в момента, в който включваме магнитно поле, се появява допълнителна енергия на взаимодействието, която разделя тези състояния на четири слабо различаващи се по енергия състояния, или, както се казва, първоначалното *енергетичното ниво се разцепва* на четири нови нива. Тези нива се определят от енергии, пропорционални на произведението от B по $\hbar$ и по $3/2$, $1/2$ — $1/2$ или — $3/2$, в зависимост от стойността на J_z. Разцепването на енергетичните нива в атомна система със спинове $1/2$, 1 и $3/2$ е показано на фиг. 35-1. (Спомнете си, че магнитният момент за всяко разположение на електроните винаги е насочен противоположно на момента на количеството на движението.)

Обърнете внимание, че „центърът на тежестта“ на енергетичните нива на фиг. 35-1 е един и същи както при наличието на магнитно поле, така и без него. Забележете също, че за дадена частица в дадено магнитно поле всички разстояния между съседните нива са еднакви.

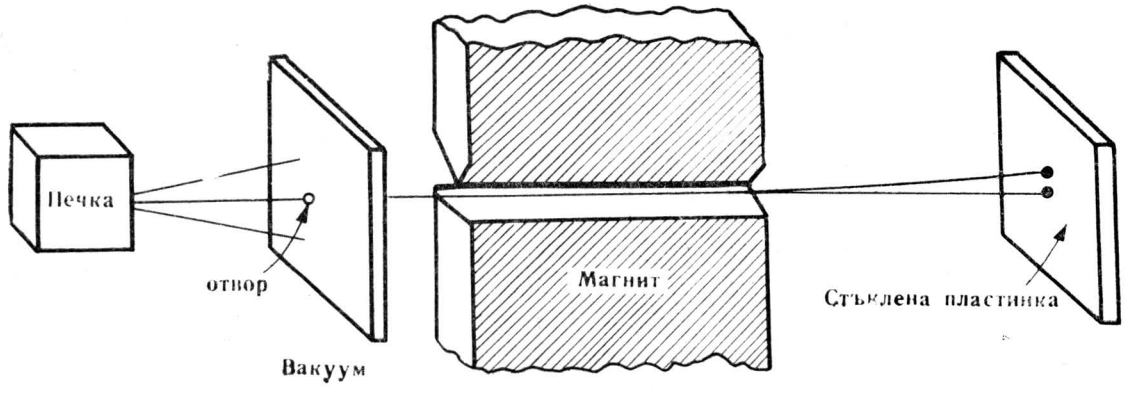
Разстоянието между нивата за дадено магнитно поле B ще записваме като $\hbar\omega_p$, което представлява просто определение на величината ω_p. Като използуваме (35.2) и (35.3), получаваме

$$\hbar\omega_p = g\frac{q_e}{2m}\hbar B \qquad \text{или} \qquad \omega_p = g\frac{q_e}{2m}B. \tag{35.4}$$

Величината g $(q_e/2m)$ е равна точно на отношението на магнитния момент към момента на количеството на движение и характеризира свойствата на частицата. Формулата (35.4) точно съвпада с формулата, получена от нас в гл. 34 за ъгловата скорост на прецесията на жироскоп с магнитен момент $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ и момент на количеството на движение $\mathbf{J}$ в магнитно поле.

35-2. Опит на Щерн-Герлах

Фактът, че моментът на количеството на движение се квантува, е нещо толкова удивително, че ние ще поговорим малко за неговата история. Научният свят е бил буквално потресен, когато е било направено това откритие (даже независимо от това, че то се е очаквало теоретически). Първи Щерн и Герлах в 1922 г. експериментално са наблюдавали този факт. Ако искате, опитът на Щерн-Герлах може да се разглежда като директно потвърждение на квантуването на момента на количеството на движението. Щерн и Герлах са поставили експеримент за измерване на магнитния момент на отделни атоми на среброто. Изпарявайки сребро в нажежена пещ и пропускайки парите на среброто през система малки отвори, те получили сноп атоми сребро. Този сноп е бил насочен между полюсните накрайници на специален магнит (фиг. 35-2). Идеята се заключавала в следното: ако магнитният



Фиг. 35-2. Опит на Щерн и Герлах

момент на атомите на среброто е равен на $\vec{\mu}$, то в магнитно поле $\boldsymbol{B}$ с посока по оста z атомите ще добият допълнителна енергия $-\mu_z B$. В класическата теория μ_z е равно на произведението от магнитния момент по косинуса от ъгъла между момента и магнитното поле, така че допълнителната енергия в полето би била

$$\Delta U = -\mu B \cos\theta. \tag{35.5}$$

Разбира се, когато атомите излитат от пещта, техните магнитни моменти са насочени по всички посоки, затова всички стойности на ъгъла са еднакво вероятни. Но ако магнитното поле бързо се променя с промяната на z, т. е. ако то има голям градиент, магнитната енергия също ще се мени с изменението на положението и поради това върху магнитните моменти ще действува сила, чиято посока зависи от това, дали косинусът ще бъде положителен, или отрицателен. Атомите при това ще се отклоняват нагоре или надолу от сила, пропорционална на производната от магнитната енергия; от принципа на виртуалната работа следва, че

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \mu \cos\theta \frac{\partial B}{\partial z}. \tag{35.6}$$

За да се получат много рязко изменения на магнитното поле Щерн и Герлах направили единия от полюсните накрайници на своя магнит много остър. Снопът атоми сребро се насочвал право покрай този остър край, така че на атомите в такова нехомогенно поле е трябвало да действува вертикална сила. Атомите сребро с хоризонтално насочен магнитен момент не биха чувствували никаква сила и биха преминавали през магнита без отклонение. На атомите, чиито магнитен момент е насочен точно вертикално, би действувала максимална сила по посока към острия край на магнита. Атомите с магнитен момент, насочен надолу, биха чувствували сила, която ги притегля надолу. Следователно, напускайки магнита, атомите би трябвало да се „разпълзят" в съответствие с вертикалните компоненти на своите магнитни моменти. В класическата теория са възможни произволни ъгли, така че след фиксирането на снопа върху стъклена пластинка би трябвало да се очаква неговото „размазване" по вертикално направление. Височината на линията при това би трябвало да бъде пропорционална на големината на магнитния момент. Обаче когато Щерн и Герлах видели какво се получава в действителност, пълното поражение на класическите идеи станало явно. На стъклената пластинка те забелязали две отделни петънца. Снопът атоми сребро се разпаднал на два снопа.

Най-удивителното е, че снопът атоми, чийто спинове трябвало да бъдат насочени съвършено случайно, се разцепил на два отделни снопа. Откъде магнитният момент би могъл да знае, че на него му се полага да има определени компоненти по посоката на магнитното поле? Този въпрос е послужил като начало за откриването на квантуването на момента на количеството на движението и засега аз няма даже да се опитам да ви дам теоретично обяснение, а просто ще ви призова да повярвате в резултатите на този експеримент така, както физиците на времето са били принудени да ги признаят. Това, че енергията на атома в магнитно поле може да приема само някакъв набор дискретни стойности, е експериментален факт. За всяка от тези стойности енергията е пропорционална на интензитета на полето. Така че в областта, в която полето се променя, принципът на виртуалната работа ни говори, че възможните магнитни сили, които могат да действуват върху атомите, могат да приемат само дискретни стойности: за всяко състояние силата се оказва различна и снопът атоми се разцепва на малък брой отделни снопчета. Измервайки отклонението на снопчето, можем да намерим големината на магнитния момент.

35-3. Метод на молекулните спинове на Раби

Сега аз бих искал да ви опиша усъвършенствуваната апаратура за измерване на магнитни моменти, разработена от И. Раби и неговите сътрудници. В експериментите на Щерн и Герлах отклонението на атомите е било твърде малко и измерването на магнитните моменти — не твърде точно. А техниката на Раби позволява да се достигне фантастична точност в измерването на магнитните моменти. Методът е основан на факта, че в магнитно поле първоначалната енергия на атомите се разцепва на краен брой енергетични нива. Фактът, че енергията на атома може да има само определени дискретни стойности, всъщност не е повече удивителен от това, че атомът *изобщо* има дискретни енергетични нива: за тях ние често говорихме в началото на курса. Защо това да *не може* да става и с атомите в магнитно поле? Именно така става и всичко. Обаче когато се опитват да свързват разцепването с идеята за *ориентирането на магнитните моменти,* в квантовата механика се появяват някои странни изводи.

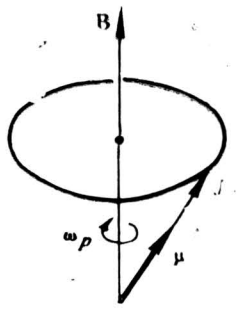
Когато атомът има две нива, различаващи се по енергия с величината ΔU, това може да предизвика преход от горното ниво към долното с излъчване на квант светлина

$$\hbar\omega = \Delta U, \tag{35.7}$$

където ω е честотата.

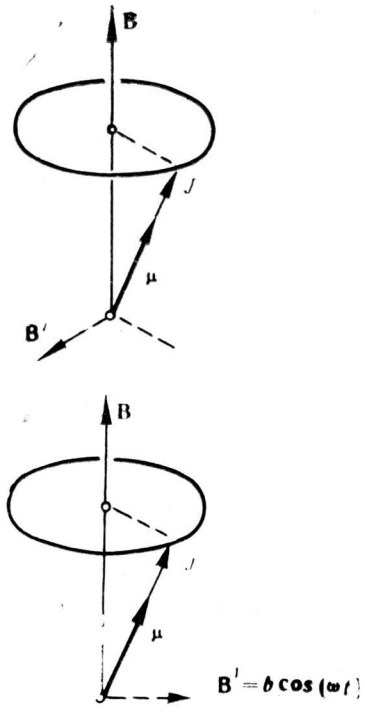
Същото може да стане и с атомите в магнитно поле. Само че тук разликата в енергиите е толкова малка, че нейната честота съответствува не на светлина, а на микровълни или на радиочестоти. Преходът от долното енергетично ниво към горното може също така да стане с поглъщане на светлина или (в случая на атоми в магнитно поле) на микровълнова енергия. И тъй ако имаме атом в магнитно поле, като приложим допълнително електромагнитно поле с определена честота, бихме могли да предизвикаме преход от едно състояние в друго. С други думи, ако имаме атом в силно магнитно поле и го „гъделичкаме“ със слабо променливо електромагнитно поле, то съществува известна вероятност той да се „избие“ на друго ниво, когато честотата на полето е близка до ω, определено от зависимостта (35.7). За атом в магнитно поле тази честота е точно равна на честотата ω_p, която зависи от магнитното поле, съгласно формулата (35.4). Ако атомът е „гъделичкан“ с друга честота, вероятността за прехода става много малка. Следователно вероятността за преход при честотата ω_p има рязък резонанс. Като измерим честотата на този резонанс в известно магнитно поле B, можем да измерим, при това с огромна точност, величината $g(q/2m)$, а следователно и g-фактора.

Интересно е, че към същото заключение можем да стигнем и от класическо гледище. В съответствие с класическата картина, ако поставим жироскоп, притежаващ магнитен момент $\vec{\mu}$ и момент на количеството на движението **J** във външно магнитно поле, жироскопът ще започне да прецесира около ос, успоредна на това поле (фиг. 35-3). Да предположим, че ни интересува как можем да изменим ъгъла на класическия жироскоп спрямо магнитното поле, т. е. спрямо оста z? Магнитното поле създава момент на силата спрямо *хоризонталната ос.* На пръв поглед изглежда, че такъв момент на силата ще се старае да подреди магнитите по посока на полето, но той предизвиква само прецесия. Ако искаме да изменим ъгъла на жироскопа спрямо оста z, трябва да приложим момент на сила спрямо оста z. Ако приложим момент на сила, действуващ в същата посока, както и прецесията, ъгълът на жироскопа ще се измени и това ще доведе до намаляване на компонентата на **J** по посока на оста z. Ъгълът между посоките на **J** и оста z на фиг. 35-3 трябва да се увеличи. Ако се опитаме да попречим на прецесията, векторът **J** ще се движи по посока на вертикалата.



Фиг. 35-3. Класическа прецесия на атом с магнитен момент $\vec{\mu}$ и момент на количеството на движението **J**

Но по какъв начин можем да приложим необходимия момент



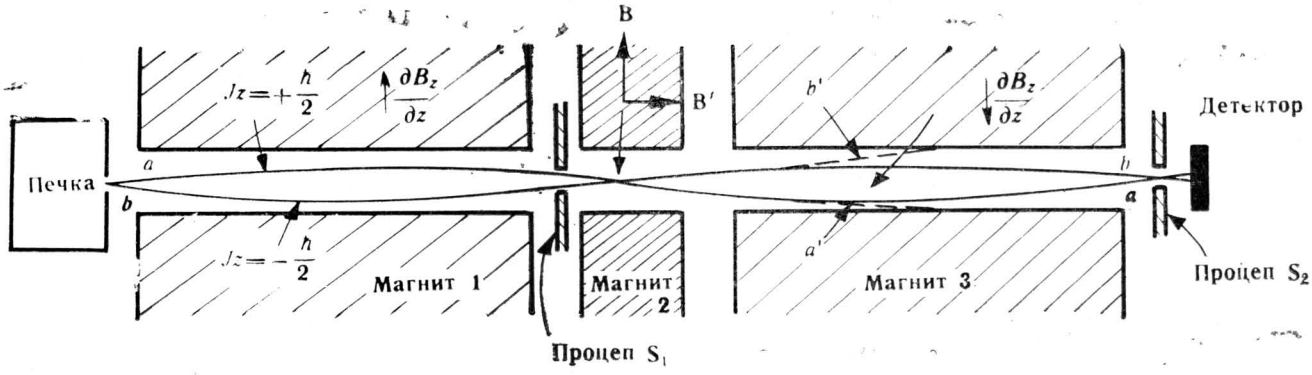
Фиг. 35-4. Ъгълът на прецесията на атомното магнитче може да се измени по два начина:

а — чрез хоризонтално магнитно поле, насочено винаги под прав ъгъл към $\vec{\mu}$; *б* — чрез осцилиращо поле

на силата към нашия прецесиращ атом? *Отговор:* с помощта на слабо магнитно поле, насочено на страни. На пръв поглед може да ви се стори, че посоката на това магнитно поле трябва да се върти заедно с прецесията на магнитния момент така, че полето винаги да бъде насочено към него под прав ъгъл, както е показано на фиг. 35-4, *а*, с помощта на полето B'. Такова поле работи много добре, обаче съвсем не по-лошо действува и *променливо* хоризонтално поле. Ако имаме хоризонтално поле B', което винаги е насочено по оста x (в положителна или отрицателна посока и което осцилира с честота ω_p, тогава през всеки полупериод двойката сили, която действува върху магнитния момент, се преобръща така, че се получава сумарен ефект, който е почти толкова ефикасен, колкото и въртящо се магнитно поле. От гледна точка на класическата физика бихме очаквали при това изменение на компонентите на магнитния момент по оста z, ако бихме имали много слабо магнитно поле, осцилиращо с честота, равна точно на ω_p. Разбира се, според класическата физика μ_z трябва да се изменя непрекъснато, но в квантовата механика z — компонентата на магнитния момент не може да бъде непрекъсната. Тя трябва неочаквано да скача от една стойност до друга. Аз сравнявах следствията от класическата и квантовата механика. за да ви дам понятие за това, какво може да става класически и как то е свързано с това, което става в действителност в квантовата механика. Обърнете внимание впрочем, че в двата случая очакваната резонансна честота е една и съща.

Още една допълнителна забележка. От това, което говорихме за квантовата механика, не се вижда защо преходите не могат да стават при честота $2\omega_p$. Оказва се, че в класическия случай няма никакъв аналог на това, но в квантовата механика такива преходи са невъзможни, поне в описания от нас начин за принудени преходи. При хоризонтално осцилиращо магнитно поле вероятността честотата $2\omega_p$ да предизвика отведнаж скок на две стъпки, е равна на нула. Всички преходи, било то преходи нагоре, или надолу, предпочитат да стават само при честота ω_p.

Ето сега ние сме готови да опишем метода на Раби. Тук ще опишем само как този метод за измерване на магнитните моменти работи в случая на частици със спин 1/2. Схемата на апаратурата е показана на фиг. 35-5. Вие виждате тук пещ, която създава поток неутрални атоми, летящи по права линия през три магнита. Магнитът 1 е същият, както и на фиг. 35-2. Той създава поле с голям, да речем, положителен градиент $\partial B_z/\partial z$. Ако атомите притежават магнитен момент, те ще се отклоняват надолу при $J_z = +\hbar/2$ или нагоре при $J_z = -\hbar/2$ (тъй като при електроните $\vec{\mu}$ е насочен противоположно на $\mathbf{J}$). Ако разглеждаме само такива атоми, които могат да преминават през процепа S_1, то както е показано на фиг. 35-5, възможни са две траектории. За да попаднат в процепа, атомите с $J_z = +\hbar/2$ трябва да летят по кривата *a*, а атомите с $J_z = -\hbar/2$ — по кривата *b*. Атомите



Фиг. 35-5. Схема на постановката на Раби в опитите смолекулни снопове

които излитат в пещта в други посоки, изобщо няма да попаднат в процепа.

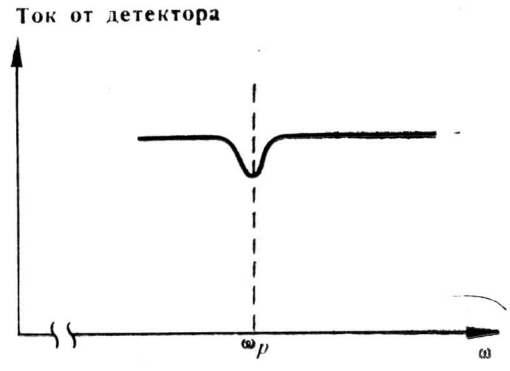
Магнитът 2 създава хомогенно поле. В тази област върху атомите не действуват никакви сили, те просто прелитат през нея и попадат в магнита 3. Този магнит представлява копие от магнита 1, но с *преобърнато* поле, така че при него $\partial B_z/\partial z$ има отрицателен знак. Атомите с $J_z=+\hbar/2$ (ще казваме „със спин, насочен нагоре"), които в магнита 1 се отклоняваха надолу, ще се отклоняват в магнита 3 нагоре; те ще продължават своя полет по траекторията a и през процепа S_2 ще попаднат в детектора. Атомите с $J_z=-\hbar/2$ („със спин, насочен надолу") също ще изпитват действието на противоположни сили в магнитите 1 и 3 и ще полетят по траекторията b, която през процепа S_2 също ще ги отведе в детектора.

Детекторът може да се направи по различни начини в зависимост от свойствата на измерваните атоми. Така като детектор за алкални метали, подобни на натрия, може да послужи тънка нажежена волфрамова жичка, включена към чувствителен галванометър. Атомите на натрия, попадайки върху тази жичка, се изпаряват във вид на йони Na^+ и оставят върху нея един електрон. Възниква ток, пропорционален на броя на попадналите за една секунда атоми на натрия.

В процепа на магнита 2 се намира набор бобини, които създават слабо хоризонтално магнитно поле $\mathbf{B}'$. Тези намотки се захранват от ток, който осцилира с променлива честота ω, така че между полюсите на магнита 2 се създава силно вертикално магнитно поле $\mathbf{B}_0$ и слабо осцилиращо хоризонтално магнитно поле $\mathbf{B}'$.

Да допуснем сега, че честотата ω на осцилиращото поле е подбрана, равна на ω_p — честотата на „прецесията" на атомите в полето $\mathbf{B}$. Променливото поле предизвиква у някои от прелитащите атоми преход от едната стойност на J_z към другата. Атомите, чиито спинове са били първоначално насочени нагоре ($J_z=+\hbar/2$), могат да се преобърнат надолу ($J_z=-\hbar/2$). Сега магнитният момент на тези атоми е обърнат, така че в магнита 3 те ще чувствуват сила, насочена *надолу,* и ще полетят по траекторията a', както е показано на фиг. 35-5. Сега те вече няма да могат да преминат през процепа S_2 и да попаднат в детектора. Точно така някои от атомите, спинът на които е бил първоначално насочен надолу ($J_z=-\hbar/2$), ще се преобърнат при преминаване през магнита 2 нагоре ($J_z=+\hbar/2$), след това те ще полетят по траекторията b' и няма да попаднат в детектора.

Ако честотата на осцилиращото поле $\mathbf{B}'$ значително се различава от ω_p, то няма да може да предизвика преобръщането на спина и атомите ще се насочат по своите „несмутени" орбити право към детектора. И тъй, както виждате, може да се намери честота „на прецесия" ω_p на атомите в полето $\mathbf{B}_0$, като се подбира честотата ω на магнитното поле $\mathbf{B}'$ дотогава, докато не получим намаляване на тока атоми, приижащи в детектора. Намаляването на тока ще се получи тогава, когато ω попадне „в резонанс" с ω_p. Графиката на зависимостта на тока в детектора от ω може да напомня кривата, показана на фиг. 35-6. Като знаем ω_p, можем да намерим стойността на g за определен атом.



Фиг. 35-6. Броят на атомите в снопа намалява при $\omega=\omega_p$

Такъв резонансен експеримент с атомни или, както често ги наричат „молекулни" снопове, представлява един много красив и точен начин за измерване на магнитните свойства на атомните обекти. Резонансната честота ω_p може да се определи с много голяма точност, всъщност значително по-точно, отколкото можем да измерим полето $\mathbf{B}_0$, необходимо при намирането на g.

35-4. Парамагнетизъм

Сега на мен ми се иска да опиша явлението парамагнетизъм на веществото. Да си представим вещество, в състава на което има атоми, които притежават постоянен магнитен момент, например кристали на меден сулфат. В тези кристали има йони на

медта, при които електроните от вътрешните обвивки имат сумарен момент на количеството на движението и магнитен момент отлични от нула. Следователно йоните на медта ще представляват източник на постоянен магнитен момент на молекулата на сулфата. Да кажем буквално няколко думи за това, какви атоми имат постоянен магнитен момент, а какви нямат. Всеки атом, при който броят на електроните е *нечетен*, подобно на натрия например, ще има магнитен момент. Върху незапълнената обвивка на натрия има един електрон. Именно от този електрон се определя спинът и магнитният момент на атома. Обаче обикновено при образуване на съединения този допълнителен електрон от външната обвивка се сдвоява с друг електрон, чийто спин има точно противоположна посока, така че сумарно моментът на количеството на движението и магнитните моменти на валентните електрони се компенсират взаимно. Ето защо молекулите в общия случай не притежават магнитен момент. Разбира се, ако имате газ от натриеви атоми, в него такава компенсация не се получава.[1] Точно така, ако имате това, което в химията се нарича „свободен радикал", т. е. обект с нечетен брой валентни електрони, то връзките се оказват не напълно наситени и се появява ненулев момент на количеството на движението.

При голяма част вещества пълен магнитен момент се появява само тогава, когато има налични атоми с незапълнена *вътрешна* електронна обвивка. Благодарение на това те могат да имат сумарен момент на количеството на движението и магнитен момент. Такива атоми принадлежат към „преходните елементи" от периодичната таблица на Менделеев, например хромът, манганът, желязото, никелът, кобалтът, паладият и платината са елементи точно от такъв вид. Освен това всички редкоземни елементи имат незапълнена вътрешна обвивка, а следователно и постоянни магнитни моменти. Наистина срещат се още странни вещества (към тях се отнасят течният кислород и азотният окис), които, както се оказва, също притежават магнитен момент, но аз предоставям на химиците да обяснят причините за тези странности.

Да си представим сега, че имаме кутия, напълнена с молекули или атоми с постоянен магнитен момент, да речем газ, течност или кристал. Ние искаме да знаем какво ще се получи, ако поставим тази кутия във външно магнитно поле. При липса на магнитно поле благодарение на топлинното движение магнитните моменти на атомите се разпределят по всички посоки. Но когато магнитното поле действува, то подрежда тези малки магнитчета така, че магнитните моменти с посока по полето стават повече, отколкото насочените срещу него. Веществото се „намагнитва".

Ние определяме намагнитването $\mathbf{M}$ на веществото като пълния магнитен момент в единица обем, под което разбираме векторната сума на всички атомни магнитни моменти в единица обем. Ако средният брой атоми в единица обем е равен на N, а техният *среден* момент е $\langle\vec{\mu}\rangle_{\text{ср}}$, то $\mathbf{M}$ може да се запише като произведение от N по средния магнитен момент

$$\mathbf{M} = N\langle\vec{\mu}\rangle_{\text{ср}}. \tag{35.8}$$

Това определение на $\mathbf{M}$ е аналогично на определението на електрическата поляризация $\mathbf{P}$, дадено в глава 10.

Класическата теория на парамагнетизма, както вече се убедихте в гл. 11, е точно аналогична на теорията на диелектрическата проницаемост. Предполага се, че магнитният момент на всеки от атомите винаги има една и съща големина, но може да бъде насочен произволно. Магнитната енергия в поле $\mathbf{B}$ е равна на $-\vec{\mu}.\mathbf{B} = -\mu B\cos\theta$, където θ е ъгълът между момента и полето. Съгласно със статистическата физика относителната вероятност за ъгъла е равна на $e^{-\text{енергията}/kT}$, така че ъгълът 0° е по-вероятен,

[1] Обикновените пари на натрия са главно многоатомни, въпреки че там рядко се срещат и молекули Na_2.

отколкото ъгълът π. Следвайки точно пътя, проправен от нас в гл. 11-3, ние ще констатираме, че магнитният момент **M** за слаби магнитни полета **B** има посоката на **B** и големина, определена от

$$\mathbf{M} = \frac{N\mu^2\mathbf{B}}{3kT}. \tag{35.9}$$

(Виж израза (11.20).) Тази приближена формула е валидна само когато отношението $\mu B/kT$ е много по-малко от единица.

Намерихме, че намагнитването, т. е. магнитният момент в единица обем, е пропорционално на магнитното поле. Именно това явление се нарича парамагнетизъм. Вие ще видите, че ефектът се проявява по-силно при ниски температури и по-слабо при високи. При поставяне на вещество в магнитно поле възникващият в него магнитен момент в случая на слаби полета е пропорционален на интензитета на полето. Отношението на M към B (за слаби полета) се нарича магнитна *възприемчивост*.

Да разгледаме сега парамагнетизма от гледна точка на квантовата механика. Да се обърнем отначало към атоми със спин 1/2. Ако при липса на магнитно поле атомите притежават напълно определена енергия, то в магнитното поле енергията ще се измени; възможни са две стойности на енергията за различните стойности на J_z. За $J_z = +\hbar/2$ магнитното поле изменя енергията със стойността

$$\Delta U_1 = +g\left(\frac{q_e\hbar}{2m}\right)\frac{1}{2}B. \tag{35.10}$$

(За атомите отместването на енергията ΔU е положително, защото зарядът на електрона е отрицателен.) За $J_z = -\hbar/2$ енергията се изменя със стойността

$$\Delta U_2 = -g\left(\frac{q_e\hbar}{2m}\right)\frac{1}{2}B. \tag{35.11}$$

За краткост да означим

$$\mu_0 = g\left(\frac{q_e\hbar}{2m}\right)\frac{1}{2}, \tag{35.12}$$

тогава

$$\Delta U = \pm\mu_0 B. \tag{35.13}$$

Съвършено ясен е и смисълът на μ_0; $-\mu_0$ е равно на z-компонентата на магнитния момент за спин, насочен нагоре, а $+\mu_0$ е равно на z-компонентата на магнитния момент за случая на спин, насочен надолу.

Статистическата механика ни говори, че вероятността за намиране на атома в някакво състояние е пропорционална на

$$e^{-(\text{енергията на състоянието})/kT}.$$

При липса на магнитно поле енергията на двете състояния е една и съща, поради това в случая на равновесие в магнитно поле вероятностите са пропорционални на

$$e^{-\Delta U/kT}. \tag{35.14}$$

Броят на атомите в единица обем със спин, насочен нагоре, е

$$N_{\text{наг}} = ae^{-\mu_0 B/kT}, \tag{35.15}$$

а със спин, насочен надолу

$$N_{\text{над}} = ae^{+\mu_0 B/kT}. \tag{35.16}$$

Константата a се определя от условието

$$N_{\text{наг}} + N_{\text{над}} = N, \tag{35.17}$$

т. е. тя е равна на пълния брой атоми в единица обем. По такъв начин получаваме

$$a = \frac{N}{e^{+\mu_0 B/kT} + e^{-\mu_0 B/kT}}. \tag{35.18}$$

Обаче нас ни интересува *средния* магнитен момент по посока на оста z. Всеки атом със спин, насочен нагоре, дава принос, равен на $-\mu_0$ в този момент, а със спин, насочен надолу, $+\mu_0$, така че средният момент ще бъде

$$\langle\mu\rangle_{\text{ср}} = \frac{N_{\text{наг}}(-\mu_0)+N_{\text{над}}(+\mu_0)}{N} \tag{35.19}$$

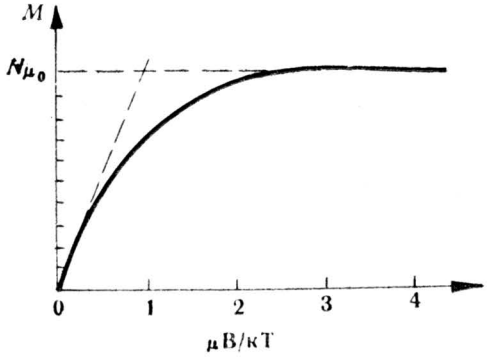
Тогава M — магнитният момент на единица обем — ще бъде равен на $N\langle\mu\rangle_{\text{ср}}$. Като използуваме изразите (35.15) — (35.17), получаваме

$$M = N\mu_0 \frac{e^{+\mu_0 B/kT} - e^{-\mu B/kT}}{e^{+\mu_0 B/kT} + e^{-\mu_0 B/kT}}. \tag{35.20}$$

Това именно представлява квантово-механическата формула за M в случая на атоми със спин $j=1/2$. За щастие тя може да се запише по-кратко посредством хиперболическия тангенс

$$M = N\mu_0 \operatorname{th}\frac{\mu_0 B}{kT}. \tag{35.21}$$

Графикът на зависимостта на M от $\mathbf{B}$ е даден на фиг. 35-7. Когато полето $\mathbf{B}$ става много голямо, хиперболичният тангенс се приближава към единица, а M — към своята гранична стойност $N\mu_0$. Това означава, че при силни полета се получава насищане. Не е трудно да се разбере защо става така — при достатъчно големи полета всички магнитни моменти се подреждат в една и съща посока. С други думи, при насищането всички атоми се намират в състояние със спин, насочен надолу, и всеки от тях дава принос в магнитния момент, равен на μ_0.



Фиг. 35-7. Изменението на намагнитването на парамагнетик при изменение на напрежението на магнитното поле $\mathbf{B}$

Обикновено при стайна температура и полетата, които могат да се получат (около 10 000 Gs), отношението $\mu_0 B/kT$ е равно приблизително на 0,02. За да се наблюдава насищане, е необходимо да се спуснем до много ниски температури. За стайна и повисоки температури обикновено $\operatorname{th}x$ може да се замени с x и да пишем

$$M = \frac{N\mu_0^2 B}{kT}. \tag{35.22}$$

Точно така, както и в класическата теория, намагнитването M се оказва пропорционално на полето B. Даже формулата се оказва същата с изключение на това, че в нея някъде е загубен множителят 1/3. Но необходимо е още да се свърже μ_0 от квантово-механическата формула с величината μ, която се появи в класическия резултат в израза (35.9).

В класическата формула се появи $\mu^2 = \vec{\mu}\cdot\vec{\mu}$ квадратът на вектора на магнитния момент или

$$\vec{\mu}\cdot\vec{\mu} = \left(g\,\frac{q_e}{2m}\right)^2 \mathbf{J}\cdot\mathbf{J}. \tag{35.23}$$

В предната глава аз вече казах, че много често правилният отговор може да се получи от класическите пресмятания, като заменим $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$ с $j(j+1)\hbar^2$. В нашия частен пример $j=1/2$, така че

$$j(j+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2.$$

Заместваики този резултат вместо $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$ в (35.23), получаваме

$$\vec{\mu}\cdot\vec{\mu} = \left(g\,\frac{q_e}{2m}\right)^2 \frac{3\hbar^2}{4},$$

или като въведем величината μ_0, определена от зависимостта (35.12), получаваме

$$\vec{\mu}\cdot\vec{\mu} = 3\mu_0^2.$$

Заместваики това вместо μ^2 в класическия израз (35.9), ние дей-

ствително възпроизвеждаме истинския квантово-механически резултат — формулата (35.22).

Квантовата теория на парамагнетизма леко се обобщава и за атоми с какъвто и да е спин j. При това за намагнитването в слабо поле получаваме

$$M = Ng^2 \frac{j(j+1)}{3} \frac{\mu_B^2 B}{kT}, \tag{35.24}$$

където

$$\mu_B = \frac{q_e \hbar}{2m} \tag{35.25}$$

представлява комбинация от константи с измерение на магнитен момент. Моментите на повечето атоми са приблизително равни на тази величина. Тя се нарича *магнетон* на Бор. Спиновият магнитен момент на електрона е почти точно равен на магнетона на Бор.

35-5. Охлаждане чрез адиабатно размагнитване

Парамагнетизмът има едно твърде интересно приложение. Пгр много ниска температура и в силно магнитно поле атомните ма-и нитчета се построяват. При това с помощта на процес, наречен *адиабатно размагнитване*, могат да се получат най-ниските температури. Да вземем някаква парамагнитна сол, съдържаща известен брой атоми на редкоземни елементи (например амониев нитрат на празеодим) и да започнем да я охлаждаме с течен хелий до 1—2°К в силно магнитно поле. Тогава показателят $\mu B/kT$ ще бъде по-голям от единица — да кажем 2 или 3. Повечето спинове ще бъдат насочени нагоре и намагнитването почти достига насищане. За простота нека да считаме, че полето е толкова голямо, а температурата толкова ниска, че всички атоми гледат в една посока. Изолирайте топлинно след това солта (като махнете например течния хелий и създадете вакуум) и изключете магнитното поле. При това температурата на солта пада.

Ако полето беше изключено *внезапно*, то раздрусването и сътресението на атомите в кристалната решетка постепенно биха разбъркали всички техни спинове. Някои от тях биха останали насочени нагоре, а други биха се обърнали надолу. Ако няма никакво поле (и ако не се отчитат взаимодействията между атомните магнитчета, което би довело само до малка грешка), няма да бъде необходима енергия за преобръщането на магнитчетата. Поради това случайното разпределение на спиновете би се установило без каквото и да е изменение на температурата.

Да си представим обаче, че през времето, докато спиновете се преобръщат, магнитното поле още не е изчезнало напълно. Тогава за преобръщането на спиновете срещу полето е необходима известна работа, *тя трябва да се изразходва за преодоляването на полето*. Този процес отнема енергия от топлинното движение и понижава температурата. Поради това, ако силното магнитно поле се изключва не много бързо, температурата на солта ще се намалява. Размагнитвайки се, тя се охлажда. От гледище на квантовата механика всички атоми се намират в най-ниско състояние, когато полето е силно, тъй като има твърде много шансове против това те да се намират в по-горно състояние. Но щом като интензитетът на полето започне да се понижава, топлинните флуктуации с все по-голяма и по-голяма вероятност ще „изтласкват“ атомите на по-високо състояние и когато това стане, атомът поглъща енергия $\Delta U = \mu_0 B$. Следователно ако магнитното поле се изключва бавно, магнитните преходи могат да отнемат енергия от топлинните трептения на кристала, като го охлаждат по този начин. Така температурата може да се понижи от няколко градуса до няколко хилядни части от градуса по абсолютната скала.

Ако ни се поиска да охладим нещо още по-силно? Оказва се, че тук природата също е била много предвидлива. Аз вече споменах, че и атомните ядра имат магнитни моменти. Нашите формули за парамагнетизма работят и в случая на ядрата, само трябва да се има предвид, че моментите на ядрата са приблизително *хиляда пъти по-малки*. (По порядък те са равни на $q\hbar/2m_p$, където m_p е масата на протона. Така че те са толкова пъти по-малки, колкото масата на електрона е по-малка от масата на протона.) За такива магнитни полета, даже при температура 2°K, показателят $\mu B/kT$ представлява всичко на всичко няколко хилядни. Но ако използуваме парамагнитното размагнитване и достигнем температура от няколко хилядни от градуса, то $\mu B/kT$ става от порядъка на единица; при толкова ниски температури вече можем да говорим за насищане на ядрения магнетизъм. Това е много добре дошло, защото сега възползувайки се от адиабатното размагнитване на *системата от магнитни ядра*, можем да достигнем още по-ниски температури. Следователно в магнитното охлаждане са възможни два стадия. Отначало използуваме диамагнитното размагнитване на парамагнитните йони и се спускаме до няколко хилядни от градуса. След това използуваме студената парамагнитна сол за охлаждане на някакво вещество, притежаващо силен ядрен магнетизъм. И накрая, когато изключваме магнитното поле, температурата на веществото идва на *милионни* от градуса до абсолютната нула, ако разбира се, всичко е било направено достатъчно грижливо.

35-6. Ядрен магнитен резонанс

Аз вече казах, че атомният парамагнетизъм е много слаб и че ядреният магнетизъм е хиляди пъти по-слаб от него. Но все пак той може да се наблюдава сравнително лесно с помощта на явлението, наречено „ядрен магнитен резонанс". Да си представим, че сме взели такова вещество като водата, при което всички електронни спинове се компенсират точно един-друг, така че техният пълен магнитен момент е равен на нула. При такива молекули все пак остава много слаб магнитен момент благодарение на наличието на магнитен момент на ядрото на водорода. Да си представим, че сме поставили малка проба вода в магнитно поле **B**. Тъй като спинът на протоните (влизащи в атома водород) е равен на 1/2, при тях са възможни две енергетични състояния. Ако водата се намира в топлинно равновесие, протоните в долното енергетично състояние, чиито моменти имат посока, успоредна на полето, ще бъдат малко повече. Поради това всяка единица обем притежава много малък магнитен момент. А тъй като протонният момент представлява само една хилядна част от атомния момент, то намагнитването, което се появява като μ^2 (вж. уравнението (35.22)), ще бъде милион пъти по-слабо от обикновеното атомно парамагнитно намагнитване. (Ето защо трябва да изберем вещество, при което липсва атомен парамагнетизъм.) След като заместим всички величини, ще се окаже, че разликата между броя на протоните със спин, насочен нагоре, и спин насочен надолу, представлява всичко на всичко няколко единици на 10^8, така че ефектът действително е много малък. Обаче той може да се наблюдава по следния начин.

Да си представим, че сме поставили ампула с вода във вътрешността на малка намотка, която създава слабо хоризонтално осцилиращо магнитно поле. Ако това поле осцилира с честота ω_p, то ще предизвика преходи между двете енергетични състояния точно така, както това се получава в опитите на Раби, които описахме в 35-3. Когато протонът се „срива" от горното енергетично състояние в долното, той отдава енергия $\mu_z B$, която, както видяхме, е равна на $\hbar\omega_p$. Ако той прескача от долното състояние към горното, то той ще *отнема* енергия $\hbar\omega_p$ от намотката. А тъй като в долното състояние има малко повече протони, отколкото в горното, то от намотката ще се *поглъща* енергия. И въпреки че

ефектът е твърде малък, с помощта на чувствителен електронен усилвател може да се наблюдава даже толкова малко поглъщане на енергия.

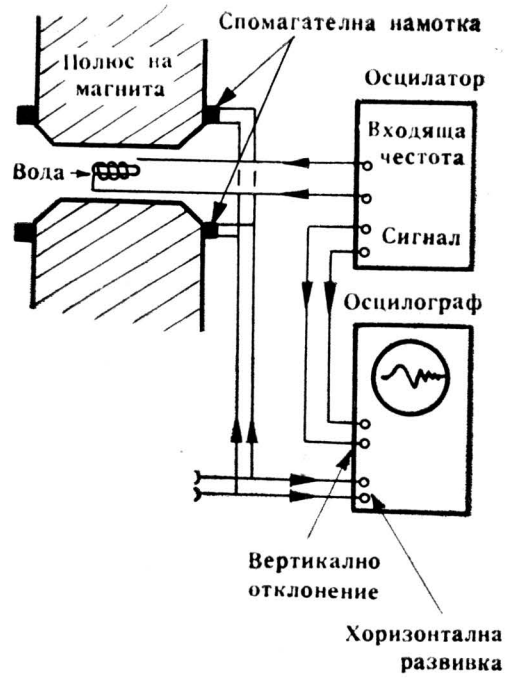
Както и в експеримента на Раби с молекулни снопове, поглъщането на енергията ще бъде забележимо само когато осцилиращото поле се намира в резонанс, т. е. когато

$$\omega = \omega_p = g\left(\frac{q_e}{2m_p}\right) B.$$

Често е по-удобно да се търси резонанс, като се изменя B, а ω се оставя постоянно. Очевидно поглъщането на енергията ще се получи, когато

$$B = \frac{2m_p}{gq_e}\,\omega.$$

Типична постановка, прилагана при изучаването на ядрения магнитен резонанс, е показана на фиг. 35-8. Между полюсите на голям електромагнит е поставена малка намотка, захранвана от високочестотен генератор. Около накрайниците на полюсите на магнита са намотани две спомагателни намотки, захранвани от ток с честота 60 Hz, така че магнитното поле малко „се колебае" около своята средна стойност. За илюстрация ще ви кажа, че токът в главния магнит създава поле от 5000 Gs, а спомагателните намотки го изменят на $\pm$ 1 Gs. Ако генераторът е настроен на честота 21,2 MHz, протонният резонанс ще се получава винаги, когато полето преминава през 5000 Gs [използувайте съотношението (34.13) за протона със стойност $g = 5{,}58$].



Фиг. 35-8. Схема на апаратурата за изучаване на ядрения магнитен резонанс

Схемата на генератора е устроена така, че той дава на изхода допълнителен сигнал, пропорционален на *изменението* на мощността, погълната от генератора, а този сигнал се подава след усилване на вертикално отклоняващите пластинки на осцилографа. В хоризонтално направление лъчът пробягва един път за всеки период на изменението на допълнителното спомагателно поле. (Впрочем, често хоризонталното разгъване се прави пропорционално на честотата на спомагателното поле.)

Дотогава, докато във вътрешността на високочестотната намотка поставим ампула с вода, мощността, отдавана от генератора, има някаква стойност. (Тя не се изменя с изменението на магнитното поле.) Но щом като в намотката се постави малка ампула с вода, на екрана на осцилографа се появява сигнал (вж. фиг. 35-8). Ние непосредствено виждаме графиката на мощността, поглъщана от протоните!

На практика е трудно да се установи кога основният магнит създава поле, точно 5000 Gs. Токът в главния магнит обикновено се подбира, като се изменя постепенно, докато на екрана не се появи резонансен сигнал. Оказва се, че понастоящем това е най-удобният начин за точно измерване на интензитета на магнитното поле. Разбира се, *някой* би трябвало някога точно да е измерил магнитното поле и честотата и да е определил величината g за протона. Обаче сега, след като това вече е направено, протонната резонансна апаратура от типа на тази, показана на фигурата, може да се използува като „протонен резонансен магнитометър".

Няколко думи за формата на сигнала. Ако бихме измерили магнитното поле много бавно, би могло да се очаква, че ще видим нормална резонансна крива. Поглъщането на енергията би достигнало максимум, когато честотата на генератора стане точно равна на ω_p. Малко поглъщане би се получавало, разбира се, и при близките честоти, тъй като не всички протони се намират точно в едно и също поле, а различни полета означават малко различни резонансни честоти.

Но дали всичко това е така? Трябва ли всъщност да видим при резонансната честота някакъв сигнал? Не следва ли да се очаква, че високочестотното поле ще изравни населеността на двете състояния така, че когато водата се постави в полето, с изключение на първия момент, никакъв сигнал да не се получи?

Не е съвсем така, защото въпреки че ние се *стараем* да изравним двете населености, топлинното движение от своя страна се старае да запази равновесните стойности, характерни за дадена температура T. Ако се намираме точно в резонанса, мощността, погълната от ядрата, е равна точно на мощността, загубена за топлинното движение. Обаче „топлинният контакт" между системата от протонни магнитни моменти и атомните движения е твърде слаб. Всеки протон е относително изолиран в центъра на електронен облак. По такъв начин чистата вода дава твърде слаб резонансен сигнал, за да може той да бъде забелязан. За увеличаване на поглъщането е необходимо да се подобри „топлинният контакт" Обикновено това се прави, като се добави малко количество железен окис във водата. Атомите на желязото са съвсем като малки магнитчета и когато те скачат насам-натам, в своя „топлинен танц" създават слабо скачащо магнитно поле, което действува на протоните. Тези изменящи се полета „свързват" протонните магнитни моменти с атомните колебания и се стремят да възстановят топлинното равновесие. Именно поради това взаимодействие протоните, които са в състояния с голяма енергия, губят своята енергия и отново стават способни да поглъщат енергия от генератора.

На практика сигналът на изхода на ядрената резонансна апаратура не прилича на обикновена резонансна крива. Обикновено това е по-сложен сигнал с осцилации, подобни на тези, които са показани на фиг. 35-8. Такава форма на сигнала е обусловена от изменящите се полета. Би следвало тя да се обясни от гледище на квантовата механика, обаче може да се покаже, че обяснението на такива експерименти с помощта на представите на класическата физика, както ги използувахме по-горе, също дава правилен отговор. От гледище на класическата физика бихме казали, че когато попаднем в резонанс, започваме синхронно да разклащаме множеството прецесиращи ядрени магнитчета. В резултат ние ги заставяме да прецесират *всички заедно.* А вътрейки се всички заедно, тези малки магнитчета създават в намотката индуцирано е. д. н. с честота, равна на ω_p. Но тъй като магнитното поле се увеличава с времето, то и честотата на прецесията се увеличава и поради това възбуденото напрежение скоро добива честота, по-голяма от честотата на генератора. Тъй като при това възбуденото е. д. н. попада последователно ту във фаза, ту в противофаза с променливото външно поле, „погълнатата" мощност става поредно ту положителна, ту отрицателна. Ето защо ние виждаме върху екрана запис на биенията между честотите на протона и честотата на генератора. Тъй като честотите на всички протони не са точно еднакви (различните протони се намират в малко различаващи се полета), а може би и поради смущенията, внасяни от атомите на желязото, които се намират във водата, свободно прецесиращите моменти скоро излизат от фазата и сигналите на биенето изчезват.

Тези явления на магнитен резонанс се използуват в много методи като начин за изясняване на нови свойства на веществото— особено в химията и физиката. Аз не говоря за това, че броят на магнитните моменти на ядрото ни говори нещичко и за неговата структура. В химията може много неща да се узнаят от структурата (или формата) на резонансите. Благодарение на магнитните полета, създавани от близките ядра, точната честота на ядрения резонанс за даден атом малко се отмества; големината на това отместване зависи от обкръжението, в което се намира той. Измерването на тези отмествания помага да се определи какви атоми се намират едни до други и хвърля светлина върху детайлите на структурата на молекулите. Също толкова важен е електронният спинов резонанс и за свободните радикали. Такива обикновено крайно неустойчиви радикали често се появяват на междинните етапи на редица химически реакции. Измерването на електронния спинов резонанс служи за много чувствителен индикатор при откриването на свободни радикали и често дава ключ за разбирането на механизма на някои химически реакции.

36

Феромагнетизъм

36-1. Токове на намагнитването

36-1. Токове на намагнитването

36-2. Поле H

36-3. Крива на намагнитването

36-4. Индуктивност с желязна сърцевина

36-5. Електромагнити

36-6. Спонтанно намагнитване

Преговорете: глава 10 „Диелектрици"; глава 17 „Закони на индукцията".

В тази глава ще поговорим за някои вещества, в които пълният ефект на магнитните моменти се проявява многократно посилно, отколкото в случая на парамагнетизма или диамагнетизма Това явление се нарича *феромагнетизъм.* При поместването на. парамагнитните и диамагнитните вещества във външно магнитно поле възниква обикновено толкова слаб индуциран магнитен момент, че не ни се налага да мислим за допълнителните магнитни полета, създавани от тези магнитни моменти. Друго нещо са магнитните моменти, които се създават от приложеното магнитно поле във *феромагнитните* вещества. Те са много големи и оказват съществено въздействие върху самото поле. Тези индуцирани магнитни моменти са така огромни, че именно те внасят главния принос в наблюдаваните полета. Поради това трябва да се погрижим за математическата теория на големите индуцирани магнитни моменти. Това е, разбира се, чисто формален въпрос. Физическият проблем се състои в това, защо магнитните моменти са толкова големи и как са „построени" те. Но към този въпрос ние ще стигнем малко по-късно.

Намирането на магнитните полета във феромагнитните материали донякъде напомня задачата за намиране на електрически полета в диелектриците. Както си спомняте, отначало ние описвахме вътрешните свойства на диелектрика посредством векторното поле **P** — диполния момент на единица обем. След това съобразихме, че ефектът от тази поляризация е еквивалентен на плътност на заряда $\rho_{пол}$, определена от дивергенцията на **P**

$$\rho_{пол} = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \tag{36.1}$$

Пълният заряд във всяка ситуация може да се запише като сума от този поляризационен заряд и всички други заряди,[1] чиято плътност ние означаваме с $\rho_{др}$. Тогава уравненията на Максвел, които свързват дивергенцията **E** с плътността на зарядите, приемат вида

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{пол} + \rho_{др}}{\varepsilon_0}$$

или

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_{др}}{\varepsilon_0}.$$

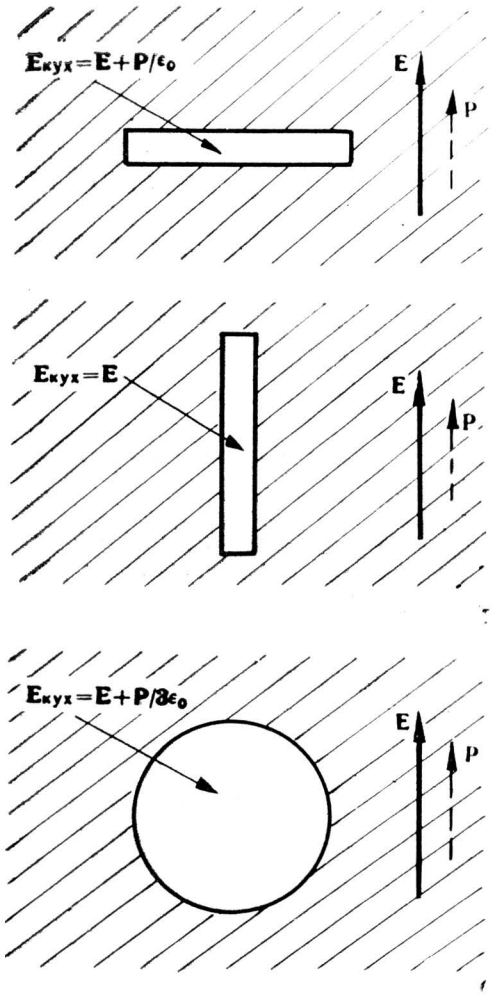
След това можем да прехвърлим поляризационната част на заряда в лявата страна на уравненията и да получим

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{др}. \tag{36.2}$$

Този нов закон ни показва, че дивергенцията на величината $(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})$ е равна на плътността на другите заряди.

Съвместното записване на **E** и **P**, както е направено това в в уравнението (36.2), е полезно, разбира се, само когато знаем някакво съотношение между тях. Ние видяхме, че теорията, свързваща възбудения електрически диполен момент с полето, е твърде сложно нещо и в действителност може да се прилага само в

[1] Ако всички „други" заряди се намираха върху проводници, то $\rho_{др}$ би било същото, както и $\rho_{своб}$ в гл. 10.



Фиг. 36-1. Електричното поле в кухина в диелектрика зависи от формата на кухината

относително прости случаи, и то само като приближение. Аз искам да ви напомня за едно приближение. За да се намери възбуденият диполен момент на атома вътре в диелектрик, е необходимо да се знае електрическото поле, което действува върху отделен атом. На времето ние използувахме едно приближение, удобно в много случаи; предположихме, че върху атома действува такова поле, каквото би се получило в центъра на малката кухина, оставаща след отстраняването на този атом (като приехме, че диполните моменти на всички останали съседни атоми при това няма да се изменят). Спомнете си също, че електрическото поле в кухина вътре в поляризиран диелектрик зависи от формата на тази кухина. Тези резултати са представени на фиг. 36-1. В тънка дискообразна кухина, перпендикулярна на направлението на поляризацията, електрическото поле, както беше показано с помощта на закона на Гаус, има вида

$$\mathbf{E}_{кух}=\mathbf{E}_{диел}+\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \qquad \text{(дискообразна кухина).}$$

От друга страна, използувайки анулирането на ротацията, ние намерихме, че електрическото поле вътре и вън от игловидна кухина е едно и също

$$\mathbf{E}_{кух}=\mathbf{E}_{диел} \qquad \text{(игловидна кухина).}$$

Накрая ние констатираме, че големината на електрическото поле в сферическа кухина е между тези две стойности

$$\mathbf{E}_{кух}=\mathbf{E}_{диел}+\frac{1}{3}\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}. \qquad \text{(сферическа кухина)} \quad (36.3)$$

Това именно беше полето, което използувахме, когато разсъждавахме за това, което става с атомите вътре в поляризиран диелектрик.

Да се опитаме да обсъдим аналогичната задача в случая на магнетизма. Най-лесно и най-кратко е да кажем, че **M**-магнитният момент на единица обем (намагнитването) — е точно аналогичен на **P** — електрическият диполен момент на единица обем (поляризацията) и че следователно отрицателната дивергенция на **M** е еквивалентна на „плътност на магнитните заряди“ ρ_m, каквото и да означава това. Но бедата е там, че във физическия свят не съществува такова нещо като „магнитен заряд“. Както знаем, дивергенцията на **B** е винаги равна на нула. Това обаче няма да ни попречи да направим една *изкуствена аналогия* и да напишем

$$\nabla\cdot\mathbf{M}=-\rho_m, \qquad (36.4)$$

но необходимо е да помним, че ρ_m е чисто математическа величина. След това можем да направим всичко напълно аналогично на електростатиката и да използуваме всички стари електростатически уравнения. Към този метод се прибягва често. Някога даже такава аналогия се считала за правилна. Учените вярвали, че ρ_m представлява плътността на „магнитните полюси“. Обаче сега ни е известно, че намагнитването на веществото се дължи на токовете, циркулиращи вътре в атомите, т. е. или от въртенето на електроните, или от тяхното движение в атома. Следователно от физическо гледище по-добре е намагнитването да се описва само с помощта на реалните атомни токове, а не да се въвежда плътност на някакви мистични „магнитни заряди“. Тези токове понякога се наричат още „амперови“, защото Ампер първи е предположил, че магнетизмът на веществото се дължи на циркулацията на атомните токове.

Микроскопичните плътности на токовете в намагнитеното вещество, разбира се, са много сложни. Тяхната стойност зависи от местоположението на атома: в някои места са големи, в други малки, в една част те текат в една страна, а в друга — в противоположната (точно както микроскопическото електрично поле, което вътре в диелектрика е в голяма степен нехомогенна). Обаче в много практически задачи нас ни интересува само полето вън от веществото

или средните магнитни полета в него. При това под средни имаме пред вид усреднение по много атоми. В такива микроскопически задачи е удобно магнитното състояние на веществото да се описва чрез намагнитването **M** — средният магнитен момент на единица обем. Аз ще ви разкажа сега как атомните токове в намагнитеното вещество нарастват до макроскопически токове, които са свързани с **M**.

Да разделим плътността на тока **j**, която представлява реален източник на магнитните полета, на различни части; една от тях описва циркулиращите токове на атомните магнитчета, а останалите — другите възможни токове. Обикновено е удобно токът да се дели на три части. В гл. 32 ние правихме разлика между токовете, които свободно текат по проводниците, и токовете, които са обусловени от движението на свързани заряди в диелектрика, ту в едната, ту в другата посока. В гл. 32-2 писахме

$$\mathbf{j}=\mathbf{j}_{\text{пол}}+\mathbf{j}_{\text{др}},$$

при което величината $\mathbf{j}_{\text{пол}}$ представляваше токовете от движението на свързаните заряди в диелектриците, а $\mathbf{j}_{\text{др}}$ всички останали токове. Да отидем по-нататък. Аз искам да разделя $\mathbf{j}_{\text{др}}$ на частта $\mathbf{j}_{\text{маг}}$, която описва усреднените токове в намагнитените вещества и на допълнителния член $\mathbf{j}_{\text{пров}}$, който ще описва всичко останало. Той изобщо се отнася към токовете в проводниците, но може да описва и други токове, например ток от заряди, които се движат свободно през празни пространства. Следователно пълната плътност на тока ще записваме във вида

$$\mathbf{j}=\mathbf{j}_{\text{пол}}+\mathbf{j}_{\text{маг}}+\mathbf{j}_{\text{пров}}. \tag{36.5}$$

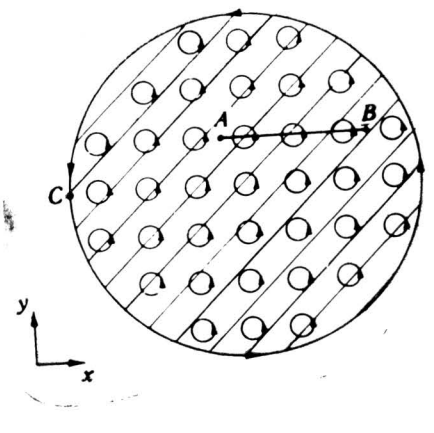
Разбира се, именно този ток влиза в уравнението на Максвел с ротацията на **B**

$$c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}+\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{36.6}$$

Сега трябва да свържем тока $\mathbf{j}_{\text{маг}}$ с вектора на намагнитването **M**. За да имате представа към какво се стремим, ще ви кажа, че трябва да получим следния резултат

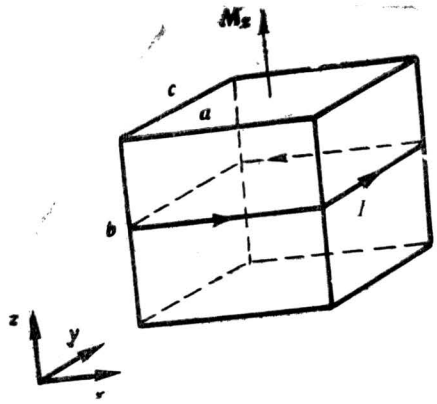
$$\mathbf{j}_{\text{маг}}=\nabla\times\mathbf{M}. \tag{36.7}$$

Отначало да вземем цилиндричен прът, равномерно намагнитен успоредно с неговата ос. Знаем, че такова равномерно намагнитване физически означава хомогенна плътност на атомните токове, циркулиращи навсякъде вътре във веществото. Да се опитаме да си представим как изглеждат тези реални токове в напречното сечение на пръта. Ние очакваме да видим токове, напомнящи картината на фиг. 36-2. Всеки атомен ток тече по кръг, образувайки микроскопична верига, при това всички токове циркулират в една и съща посока. Какъв ще бъде тогава ефективният ток? В по-голямата част от пръта, разбира се, той няма да даде изобщо никакъв ефект, защото редом с всеки ток има друг ток, течащ в противоположна посока. Ако си представим малката повърхнина, показана на фиг. 36-2 с линията AB, която обаче едва-едва е по-дебела от отделен атом, то пълният ток през такава повърхнина трябва да бъде равен на нула. Вътре във веществото няма никакъв ток. Обаче обърнете внимание, че върху повърхността на пръта атомните токове не се компенсират от съседни токове, течащи в противоположна посока. Поради това върху повърхността на пръта през цялото време тече ток в една и съща посока. Сега за вас е ясно защо аз твърдях, че равномерно намагнитеният прът е еквивалентен на соленоид с течащ по него електричен ток.



Фиг. 36-2. Схематична диаграма на циркулиращите атомни токове в напречно сечение на железен прът, намагнетизиран в посока на оста z

Как да се съгласува тази гледна точка с израза (36.7)? Преди всичко намагнитването **M** вътре във веществото е постоянно, така че всички негови производни са равни на нула. Това се съгласува с нашата геометрична картина. Обаче **M** върху повърхността в действителност не е постоянно, то е постоянно до повърхността,



Фиг. 36-3. Диполният момент μ на токов контур е равен на IA



Фиг. 36-4. Малко намагнетизирано кубче е еквивалентно на циркулиращ повърхнинен ток

а след това неочаквано пада до нула. Следователно непосредствено върху повърхността възниква грамаден градиент, който в съответствие с израза (36.7) дава огромна плътност на тока. Да си представим, че наблюдаваме това, което става близко около точката C на фиг. 36-2. Ако изберем посоките на осите x и y така, както е показано на фигурата, намагнитването **M** ще бъде насочено по оста z. Като напишем компонентите на уравнението (36.7), получаваме

$$\frac{\partial M_z}{\partial y} = (\mathbf{j}_{\text{маг}})_x, \qquad (36.8)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial x} = (\mathbf{j}_{\text{маг}})_y.$$

Въпреки че производната $\partial M_z/\partial y$ в точката C е равна на нула, производната $\partial M_z/\partial x$ ще бъде голяма и положителна. Изразът (36.7) ни говори, че в отрицателна посока на оста y тече ток с огромна плътност. Това се съгласува с нашите представи за повърхнинния ток, течащ около цилиндъра.

Сега можем да намерим плътността на тока за по-сложния случай, когато намагнитването в средата се мени от точка в точка. Качеството не е трудно да се разбере, че ако намагнитването в две съседни области е различно, пълна компенсация на циркулиращите токове няма да се получи, поради което пълният ток вътре във веществото няма да бъде равен на нула. Именно този ефект ние искаме да опишем количествено.

Преди всичко спомнете си, че в глава 14-5 изяснихме, че циркулиращият ток I създава магнитен момент

$$\mu = IA, \qquad (36.9)$$

където A е площта, ограничена от токовия контур (фиг. 36-3). Да разгледаме малко правоъгълно кубче във вътрешността на намагнитеното вещество (фиг. 36-4). Нека кубчето бъде толкова малко, че намагнитването вътре в него да може да се счита хомогенно. Ако компонентата на намагнитването на това кубче по посока на оста z е M_z, то пълният ефект ще бъде такъв, като че ли по вертикалните стени тече повърхнинен ток. Големината на този ток можем да намерим от равенството (36.9). Пълният магнитен момент на кубчето е равен на произведението от намагнитването по обема

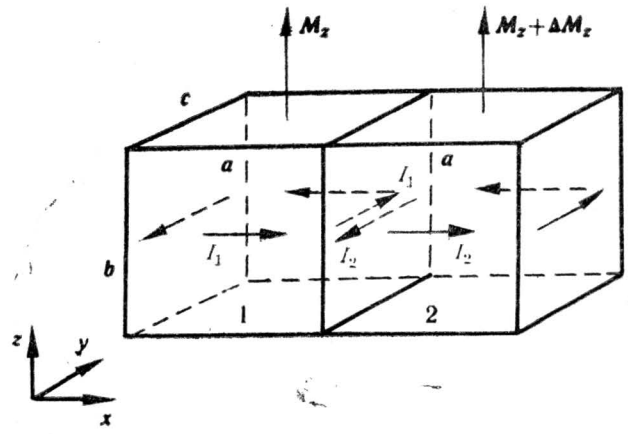
$$\mu = M_z(abc).$$

Оттук, като си спомним, че площта е равна на ac, получаваме

$$I = M_z b,$$

с други думи, върху всяка една от вертикалните равнини големината на тока на единица дължина по вертикалата е равна на M_z.

Представете си сега две такива малки кубчета, разположени едно до друго (фиг. 36-5). Кубчето 2 е малко отместено спрямо



Фиг. 36-5. Ако намагнитването на две съседни кубчета е различно, по тяхната граница тече повърхнинен ток

кубчето 1 и поради това неговата вертикална компонента на намагнитването ще бъде малко различна, да речем $M_z+\Delta M_z$. Сега пълният ток по повърхността между тези две кубчета ще се образува от две части. По кубчето 1 в положителна посока по оста y тече ток I_1, а по кубчето 2 в отрицателна посока тече ток I_2. Пълният повърхнинен ток по положителната посока на оста y ще бъде равен на сумата

$$I=I_1-I_2=M_z b-(M_z+\Delta M_z)b=-\Delta M_z b.$$

Величината ΔM_z може да се запише като произведение от производната на M_z по x и отместването на кубчето 2 спрямо кубчето 1, което е равно точно на a

$$\Delta M_z=\frac{\partial M_z}{\partial x}a.$$

Тогава токът, който тече между двете кубчета, ще бъде

$$I=-\frac{\partial M_z}{\partial x}ab.$$

За да свържем тока I със средната обемна плътност на тока $\mathbf{j}$, е необходимо да разберем, че този ток всъщност е размазан по някаква област, която има напречно сечение. Ако си представим, че целият обем на веществото е запълнен с такива малки кубчета, за такова сечение (перпендикулярно на оста x) може да бъде избрана страничната стена на едно от кубчетата[1]. Сега виждате, че площта, свързана с тока, е равна точно на площта ab на една от фронталните стени. В резултат получаваме

$$j_y=\frac{I}{ab}=-\frac{\partial M_z}{\partial x}.$$

Най-после започна да се получава ротацията на $\mathbf{M}$.

Но в израза за j_y трябва да има още едно слагаемо, свързано с изменението на x-компонентата на намагнитването при изменението на z. Този принос в $\mathbf{j}$ се получава от повърхността между две малки кубчета, поставени едно върху друго (фиг. 36-6). Като използуваме отново току-що направените разсъждения, можем да покажем, че тази повърхност ще дава принос, равен на $\partial M_x/\partial z$, във величината j_y. Само тези повърхности дават принос в y-компонентата на тока, така че пълната плътност на тока по посока на оста y се получава

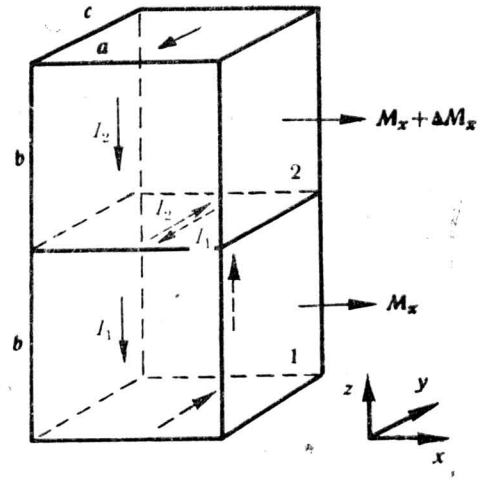
$$j_y=\frac{\partial M_x}{\partial z}-\frac{\partial M_z}{\partial x}.$$

Като определим токовете върху останалите стени на кубчето или използуваме факта, че посоката на оста z беше избрана съвсем произволно, можем да дойдем до заключението, че векторът на плътността на тока действително се определя от израза

$$\mathbf{j}=\nabla\times\mathbf{M}.$$

И тъй, ако сте решили да описвате магнитното състояние на веществото посредством средния магнитен момент на единица обем $\mathbf{M}$, оказва се, че циркулиращите атомни токове са еквивалентни на средната плътност на тока на веществото, определяна от израза (36.7). Ако материалът притежава освен това още и диалектрични свойства, в него може да възникне и поляризационен ток $\mathbf{j}_{\text{пол}}=\partial\mathbf{P}/\partial t$. А ако материалът освен това е и проводник, в него може да тече и ток на проводимост $\mathbf{j}_{\text{пров}}$. Следователно пълният ток може да се запише така

$$\mathbf{j}=\mathbf{j}_{\text{пров}}+\nabla\times\mathbf{M}+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}. \qquad (36.10)$$



Фиг. 36-6. Две кубчета, разположени едно върху друго, също могат да дават принос в j_y

[1] Или ако искате, токът I върху всяка стена може да бъде разпределен по равно между кубчетата от двете страни.

36-2. Полето H

Сега можем да заместим израза за тока (36.10) в уравнението на Максвел. Получаваме

$$c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}+\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\mathbf{j}_{\text{пров}}+\nabla\times\mathbf{M}+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}\right)+\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Събираемото с **M** можем да пренесем в лявата страна

$$c^2\nabla\times\left(\mathbf{B}-\frac{\mathbf{M}}{\varepsilon_0c^2}\right)=\frac{\mathbf{j}_{\text{пров}}}{\varepsilon_0}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}\right). \tag{36.11}$$

Както вече отбелязахме в гл. 32, понякога е удобно $(\mathbf{E}+\mathbf{P}/\varepsilon_0)$ да се запише като ново векторно поле $\mathbf{D}/\varepsilon_0$. Точно така удобно е $(\mathbf{B}-\mathbf{M}/\varepsilon_0c^2)$ да се записва като единно векторно поле. Това поле ние означаваме с **H**, т. е.

$$\mathbf{H}=\mathbf{B}-\frac{\mathbf{M}}{\varepsilon_0c^2}. \tag{36.12}$$

След това уравнението (36.11) приема вида

$$\varepsilon_0c^2\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{j}_{\text{пров}}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}. \tag{36.13}$$

То изглежда много просто, но цялата сложност сега е скрита в буквите **D** и **H**.

Искам да ви предупредя. Повечето хора, които прилагат системата СИ, ползуват друго определение на **H**. Наричайки своето поле **H′** (те, разбира се, не пишат щрих), те го определят като

$$\mathbf{H}'=\varepsilon_0c^2\mathbf{B}-\mathbf{M}. \tag{36.14}$$

(Освен това обикновено те записват величината ε_0c^2 във вида $1/\mu_0$, така че се появява още една константа, за която през цялото време трябва да се следи!). При такова определение уравнението (36.13) ще изглежда още по-просто

$$\nabla\times\mathbf{H}'=\mathbf{j}_{\text{пров}}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}. \tag{36.15}$$

Но трудността тук се заключава в това, че такова определение, първо, не се съгласува с определението, прието от тези, които не ползуват системата СИ, и второ—полетата **H′** и **B** се измерват в различни единици. Аз мисля, че по-удобно е **H** да се измерва в същите единици, както и **B**, а не в единиците на **M**, както **H′**. Но ако вие смятате да ставате инженери и да проектирате трансформатори, магнити и т. н., бъдете внимателни! Вие ще срещнете множество книги, в които определянето на **H** става чрез уравнението (36.14), а не чрез (36.12), а в други книги, особено в справочниците за магнитните материали, връзката между **B** и **H** е такава, каквато и у нас. Необходимо е да бъдете внимателни и да разбирате къде какво полагане е използувано.[1]

Един от признаците, които ни показват кое полагане е прието, това са мерните единици. Да напомним, че в системата СИ величината **B**, а следователно и нашето **H** се измерват в единици Wb/m^2. (Един $\text{Wb/m}^2=10\,000$ Gs.) Магнитният момент (т. е. произведението от тока по площта) в същата система СИ се измерва в единици Am^2. Тогава намагнитването **M** има размерност A/m. Размерността на **H′** е същата, както и размерността на **M**. Не е трудно да се види, че това се съгласува с уравнението (36.15), тъй като ∇ има измерение на реципрочна дължина.

Тези, които работят с електромагнити, са свикнали да измерват полето **H** (определено като **H′**) в *ампер-навивки на метър*,

---

[1] В системата, която тук авторът използува, $\mathbf{B}=\mathbf{H}+\frac{1}{\varepsilon_0c^2}\mathbf{M}$, но $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$. В старата добра система единици пишеха $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}\equiv\frac{1}{\varepsilon_0c^2}\mathbf{H}$ и $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}$ или $\mathbf{B}=(\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M})$ и $\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$. Необходимо е много внимание, когато формулите за магнетиците се пишат по аналогия с формулите за диелектриците (Ср. § 6). — *Заб. на руския ред.*

като имат при това пред вид навивките на проводника в намотката. Но „навивка“ е фактически безразмерна величина и тя не трябва да ви смущава. Тъй като нашето H е равно на $H'/\varepsilon_0 c^2$, то ако вие ползувате системата СИ, H (във Wb/m) е равно на произведението $4\pi.10^{-7}$ по H' (в A/m). Може би по-удобно е да се помни, че H (в Gs) е равно на 0,0126 H' (в A/m).

Тук има още едно ужасно нещо. Много хора, които използуват нашето определение за **H**, са решили да наричат единиците за измерването на **H** и **B** *различно*. И даже независимо от еднаквата размерност те наричат единицата за **B** *Гаус*, а единицата за **H** — *Оерщед* (разбира се, в чест на Гаус и Оерщед). Така в много книги ще намерите графиката на зависимостта на **B** в гауси, от **H** в оерщеди. В действителност това е една и съща единица, равна на 10^{-4} единици СИ. Тази неразбория в магнитните единици ние сме увековечили в таблица 36-1.

Таблица 36-1

Единици на магнитните величини

[B]=Вебер/m²=10^4 Гауса
[H]=Вебер/m²=10^4 Гауса или 10^4 оерщеда
[H]=A/m
[H′]=A/m
Полезни съотношения
B(Гаус)=10^4 B (Вебер/m²)
H(Гаус)=H (оерщед)=0,0126 H′ (Am)

36-3. Крива на намагнитването

Сега ще разгледаме някои прости случаи, при които магнитното поле остава постоянно или измененията на полето са толкова бавни, че $d\mathbf{D}/dt$ може да се пренебрегне в сравнение с $\mathbf{j}_{\text{пров}}$. В този случай полетата се подчиняват на уравненията

$$\nabla\times\mathbf{B}=0 \tag{36.16}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\mathbf{j}_{\text{пров}}}{\varepsilon_0 c^2} \tag{36.17}$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{B}-\frac{\mathbf{M}}{\varepsilon_0 c^2}. \tag{36.18}$$

Да си представим, че имаме железен тороид с навита на него медна жица, както е показано на фиг. (36-7, *а*). Нека по проводника тече ток I. Какво ще бъде магнитното поле? То ще бъде съсредоточено главно вътре в желязото, при това там (вж. фиг. (36-7,*б*) силовите линии трябва да бъдат кръгови. Вследствие постоянството на потока **B** неговата дивергенция е равна на нула и уравнението (36.16) се удовлетворява автоматически. Да запишем след това уравнението (36.17), като го интегрираме по затворения контур Г, показан на фиг. (36-7,*б*). От теоремата на Стокс получаваме

$$\oint_{\Gamma}\mathbf{H}\,.\,d\mathbf{s}=\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\int_S \mathbf{j}_{\text{пров}}\,.\,\mathbf{n}\,da, \tag{36.19}$$

където интегралът от j се взима по повърхността S, ограничена от контура Г. Всяка навивка от намотката пресича тази повърхност един път, поради това всяка навивка дава в интеграла принос, равен на I, а тъй като броят на всички навивки е N, то интегралът ще бъде равен на NI. От симетрията на нашата задача се вижда, че **B** е еднакво по целия контур Г, ако, разбира се, намагнитването, а следователно и полето **H** са също постоянни по контура Г. Уравнението (36.19) при такива условия добива вида

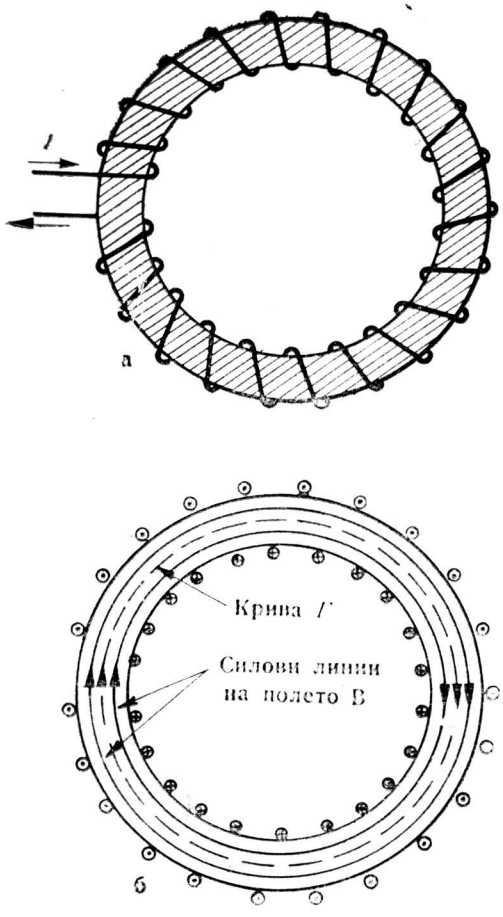
$$Hl=\frac{NI}{\varepsilon_0 c^2},$$

където l е дължината на кривата Г. Следователно

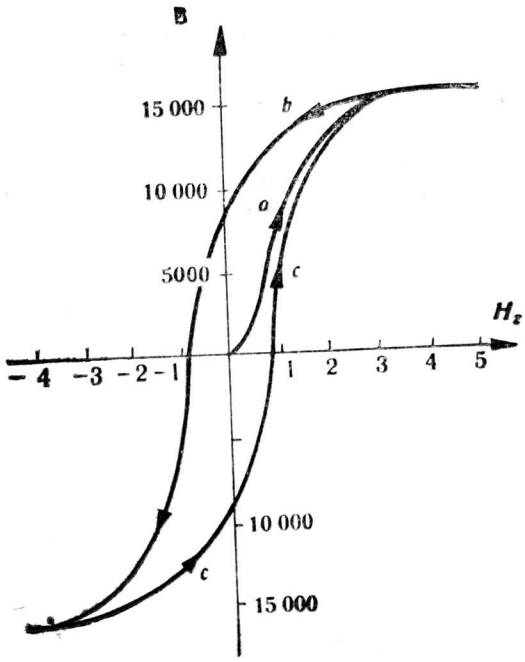
$$H=\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{NI}{l}. \tag{36.20}$$

Именно поради това че в задачи от подобен тип полето **H** е правопропорционално на намагнитващия ток, понякога то се нарича *намагнитващо*.

Единственото, което ни е необходимо сега, това е уравнение, свързващо **H** с **B**. Обаче такова уравнение просто не съществува! Ние имаме, разбира се, уравнението (36.18), но ползата от него е малка, защото във феромагнитните материали от типа на желязо-



Фиг. 36-7. Железен тороид, обвит с намотки от изолиран проводник (*а*), и неговото напречно сечение (б)
Показани са силовите линии



Фиг. 36-8. Типична крива на намагнитването и хистерезисна крива на меко желязо

то то не дава пряка връзка между **M** и **B**. Намагнитването **M** зависи от цялата предидуща история на даден образец желязо, а не само от това, какво е полето **B** в даден момент.

Впрочем, още не всичко е загубено. В някои прости случаи все пак можем да намерим решение. Ако се вземе ненамагнитено желязо, да речем отвърнато при висока температура, то за такова просто тяло като тороида магнитната предистория на цялото желязо ще бъде една и съща. Освен това от експериментални измервания можем да кажем нещичко относно **M**, а следователно и за връзката между **B** и **H**. От уравнението (36.20) се вижда, че полето **B** във вътрешността на тороида е равно на произведение от някаква константа по големината I на тока в намотката. Полето **B** може да се измери чрез интегриране по времето на е. д. с. в намагнитващата намотка, показана на рисунката (или в допълнителна намотка, поставена върху нея). Тази е.д.с. е равна на скоростта на изменението на потока **B**, така че интегралът от е.д.с. по времето е равен на произведението от **B** по площта на напречното сечение на тороида.

На фиг. 36-8 е показана зависимостта между **B** и **H**, наблюдавана в сърцевина от меко желязо. Когато токът се включи за първи път, увеличението на **B** с **H** става по кривата *a*. Обърнете внимание на разликата в мащабите по осите **B** и **H**; отначало, за да се получи голямо **B**, е необходимо относително малко **H**. Защо в случая на желязото полето **B** е много по-голямо, отколкото би било без него? Именно защото възниква голямо намагнитване **M**, еквивалентно на голям повърхнинен ток в желязото, а полето се определя от сумата от този ток и тока на проводимостта в намотката. А защо намагнитването **M** се оказва толкова голямо, ще обсъдим по-късно.

При големи стойности на **H** кривата на намагнитването „се изравнява“. Ние казваме, че желязото се *насища*. В мащабите на нашата фигура кривата става хоризонтална, в действителност намагнитването продължава слабо да расте: при големи полета **B** става равно на **H** и намагнитването **M** вече не се увеличава. Впрочем, ако сърцевината беше направена от немагнитен материал, намагнитването **M** щеше да бъде равно на нула, а **B** щеше да бъде еднакво за всички полета на **H**.

Преди всичко да отбележим, че кривата *a* на фиг. 36-8, така наречената *крива на намагнитването*, е съвсем нелинейна. Впрочем, положението тук е много по-сложно. Ако след достигането на насищането намалим тока в намотката и върнем **H** отново към нула, магнитното поле **B** ще пада по кривата *b*. Когато **H** достигне нулата, **B** още няма да бъде нула. Даже след изключване на намагнитващия ток магнитното поле в желязото остава: желязото остава постоянно намагнитено. Ако сега се включи в намотката ток в обратна посока, то кривата **B**—**H** ще тръгне по-нататък по клона *в* дотогава, докато желязото не се намагнити до насищане в противоположна посока. При по-нататъшно намаляване на тока до нула **B** ще тръгне по кривата *c*. Когато меним тока от голяма положителна до голяма отрицателна стойност, кривата **B**—**H** ще отива нагоре и надолу много близко до клоновете *b* и *c*. Ако обаче **H** се мени по някакъв произволен начин, ще възникнат по-сложни криви, които изобщо ще лежат между кривите *b* и *c*. Кривата, получена чрез повторни изменения на полетата, се нарича *хистерезисна крива*.

Виждате, че е невъзможно да се напише функционална зависимост от типа $\mathbf{B}=f(\mathbf{H})$, тъй като **B** във всеки един момент зависи не само от **H** в същия момент, но и от цялата предистория на материала. Естествено е, че намагнитването и хистерезисните криви за различни вещества са различни. Формата на кривите зависи от химическия състав на материала, а също и от детайлите при технологията на неговото приготвяне и последвалата физическа обработка. В следната глава ние ще обсъдим физическото обяснение на някои от тези усложнения.

36-4. Индуктивност с желязна сърцевина

Магнитните материали намират едно от своите най-важни приложения в електрическите устройства, например при трансформаторите, електрическите мотори и т. н. Това се обяснява преди всичко с обстоятелството, че с помощта на желязото може да се контролира поведението на магнитното поле, а също така при даден електричен ток се получават значително по-големи полета. Например типичното „тороидално" индуктивно устройство много напомня на това, което е показано на фиг. 36-7. При голяма индуктивност можем да направим устройството с много по-малък обем и да изразходваме много по-малко мед, отколкото в еквивалентно устройство с „въздушна сърцевина". Поради това при голяма индуктивност ние постигаме много по-малко съпротивление на намотката, така че устройството е много по-близко до „идеалното", особено при ниски честоти. Не е трудно да се проследи качествено как работи такова устройство. Ако в намотката тече ток I, създаваното вътре поле H, както се вижда от уравнението 36.20, е пропорционално на тока I. Напрежението $\mathcal{U}$ на изводите е свързано с магнитното поле B. Ако се пренебрегне съпротивлението на намотката, напрежението $\mathcal{U}$ ще бъде пропорционално на dB/dt. Индуктивността $\mathscr{L}$, която е равна на отношението на $\mathcal{U}$ към dI/dt (вж. гл. 17-7), зависи следователно от връзката между B и H в желязото. Тъй като B е много по-голямо от H, то това многократно увеличава индуктивността, като че ли малкият ток в намотката, който обикновено дава слабо магнитно поле, заставя малките магнити, намиращи се в желязото, да се подреждат и да създават „магнитен" ток, който е огромен брой пъти по-голям от външния ток в намотката. Всичко става така, като че ли в намотката възниква ток много по-голям, отколкото в действителност. Когато меним посоката на тока, всички малки магнитчета се преобръщат, вътрешните токове потичат в друга посока и възбудената е.д.с. се получава много по-голяма, отколкото без желязо. Ако искаме да пресметнем индуктивността, можем да направим това, като пресметнем енергията по подобие на това, което е описано в гл. 17-8. *Скоростта*, с която източникът на тока отдава енергията, е равна на $I\mathcal{U}$. Напрежението $\mathcal{U}$ е равно на площта на напречното сечение на сърцевината A, умножена по N и по dB/dt. А съгласно с израза (36.20) $I=(\varepsilon_0 c^2 l/N)H$. Следователно

$$\frac{dU}{dt}=\mathcal{U}I=(\varepsilon_0 c^2 lA)\ H\frac{dB}{dt}.$$

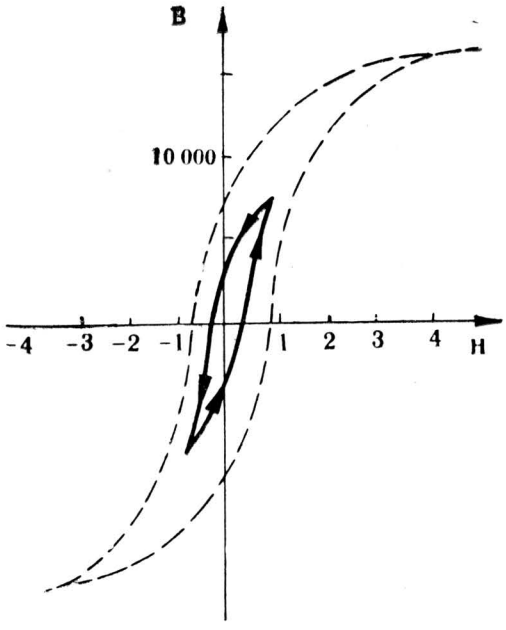
Интегрирайки по времето, получаваме

$$U=(\varepsilon_0 c^2 lA)\int HdB. \tag{36.21}$$

Забележете, че lA е равно на обема на торида, поради което плътността на енергията $u=U$ *(обема на магнитния материал)*, както показахме, е

$$u=\varepsilon_0 c^2\int HdB. \tag{36.22}$$

Тук се проявява още едно интересно обстоятелство. Когато в намотката тече променлив ток, то B в желязото „ходи" по хистерезисната крива. А тъй като B е неоднозначна функция на H, интегралът $\int HdB$ по затворен цикъл не е равен на нула, а на площта, заключена вътре в хистерезисната крива. Следователно при всеки цикъл източникът на ток отдава някаква енергия, равна на площта, затворена от хистерезисната крива. Това именно са загубите при електромагнитния цикъл; енергията отива за нагряване на желязото. Такива *загуби* се наричат *хистерезисни*. За да бъдат те по-малки, желателно е хистерезисната крива да се направи колкото е възможно по-тясна. Един от начините да се намали площта, заградена от кривата, това е да се намали максимално полето във всеки цикъл. За по-малки максимални полета получа-



Фиг. 36-9. Хистерезисна крива, при която не се достига насищане

ваме хистерезисна крива, подобна на показаната на фиг. 36-9. Освен това се използуват особени материали с много тясна крива. За да се получи това свойство, е създадено специално, така наречено *трансформаторно желязо*, което представлява сплав от желязо с малък примес силиций.

Когато хистерезисният цикъл е много малък, зависимостта между B и H може приближено да се представи като линейно уравнение. Обикновено пишат

$$B=\mu H. \tag{36.23}$$

Тук константата μ съвсем *не* е магнитният момент, който срещнахме по-рано. Тя се нарича *магнитна проницаемост*. (Понякога я наричат също *относителна проницаемост*.) Типичната проницаемост на обикновените видове желязо е равна на няколко хиляди. Обаче съществуват специални сплави от типа на така наречения „супермалой", чиято проницаемост може да бъде от порядъка на милион.

Ако в уравнението (36.21) използуваме приближението $B=\mu H$, то енергията на индуктивност, която има форма на тороид, може да се запише като

$$U=(\varepsilon_0 c^2 lA)\mu\int H dH=(\varepsilon_0 c^2 lA)\frac{\mu H^2}{2}, \tag{36.24}$$

така че плътността на енергията е приблизително

$$u\approx\frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\mu H^2.$$

Сега можем да положим израза за енергията (36.24), равен на енергията на индуктивността $\mathscr{L}I^2/2$, и да намерим $\mathscr{L}$. Получаваме

$$\mathscr{L}=(\varepsilon_0 c^2 lA)\mu\left(\frac{H}{I}\right)^2.$$

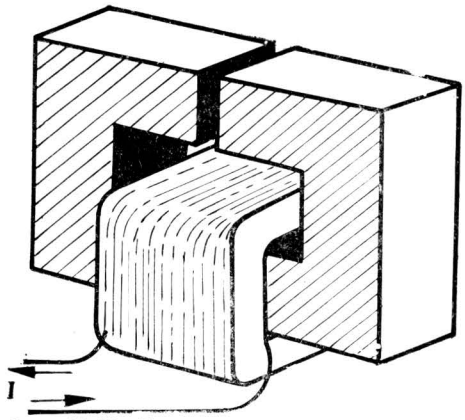
А като използуваме израза (36.20) за отношението H/I, намираме

$$\mathscr{L}=\frac{\mu N^2 A}{\varepsilon_0 c^2 l}. \tag{36.25}$$

Следователно индуктивността е пропорционална на μ. Ако ви е необходима индуктивност за такива устройства като звукови усилватели, желателно е да имате материал, при който връзката между B и H е достатъчно линейна. [Вие би трябвало да помните, че в глава 50 (т. I) говорихме за генериране на хармонични в нелинейни системи.] За такива задачи уравнението (36.23) ще представлява много добро приближенне. От друга страна, ако е необходимо да се генерират хармонични, се използуват индуктивности, които се проявяват във висша степен нелинейно. При това трябва да се използува сложната крива H—B и пресмятанията да се извършат посредством числени методи или графически.

В обикновените трансформатори на един и същ тороид или *сърцевина* от магнитен материал са намотани две бобини. (В големите трансформатори сърцевината се прави за удобство правоъгълна.) При това изменението на тока в „първичната" намотка предизвиква изменение на полето в сърцевината, при което се индуцира е.д.с. във „вторичната намотка". Тъй като потокът през *всяка навивка* от двете намотки е един и същ, отношението на е.д.с. в тези две намотки е същото като отношението на навивките в тях. Напрежението, приложено към първичната намотка, се трансформира във вторичната в напрежение с друга стойност. А тъй като за създаване на исканите изменения на магнитното поле е необходим определен пълен ток, то *алгебричната* сума на токовете в двете намотки трябва да остава постоянна и равна на изисквания „намагнитващ" ток. При изменението на напрежението се изменя и силата на тока в намотките, т. е. заедно с трансформирането на напрежението се *трансформира* и токът.

36-5: Електромагнити



Фиг. 36-10. Електромагнит

Да поговорим сега за практическата страна на работата, която е малко по-сложна. Да си представим, че имаме електромагнит със стандартна форма, показан на фиг. 36-10. Той се състои от С-образна желязна рамка, на която са намотани много навивки проводник. На какво е равно магнитното поле **B** в процепа?

Ако ширината на процепа е малка в сравнение с всички други размери, в качеството на първо приближение можем да считаме, че линиите **B** образуват затворени криви така, както това става и в обикновения тороид. Те изглеждат приблизително така, както са показани на фиг. 36-11, *а*. Те се стремят да излязат от процепа, но ако той е тесен, ефектът е много малък. Предположението за постоянството на потока **B** през всяко напречно сечение на рамката ще бъде твърде добро приближение. Ако напречното сечение на рамката се мени равномерно и ако пренебрегнем всякакви краеви ефекти около процепа или на ъглите, можем да кажем, че по цялата окръжност на рамката **B** е хомогенно.

Полето **B** в процепа ще бъде същото по големина. Това следва от уравненията (36.16). Представете си затворена повърхност S (вж. фиг. 36-11,*б*), едната страна на която се намира в процепа, а другата в желязото. Пълният поток на полето **B** през тази повърхност трябва да бъде равен на нула. Означавайки с B_1 големината на полето в процепа, а с B_2 — големината на полето в желязото, виждаме, че

$$B_1A_1-B_2A_2=0,$$

а тъй като $A_1=A_2$, оттук следва, че $B_1=B_2$.

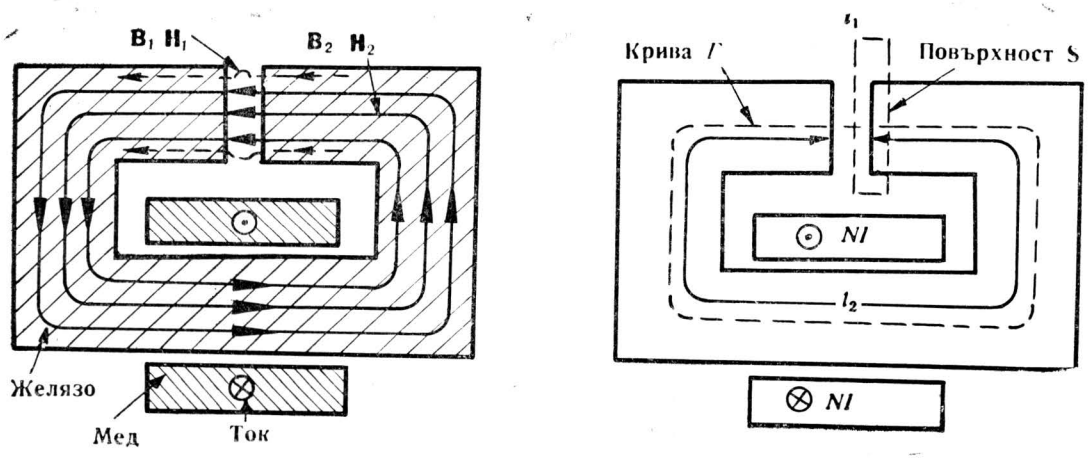
Да разгледаме сега H. Отново можем да използуваме уравнението (36.19), като вземем криволинейния интеграл по контура Г (вж. фиг. 36-11,*б*). Както и преди, дясната част е равна на NI — произведението от броя на намотките по тока. Обаче сега Н в желязото и във въздуха ще бъде различно. Означавайки с H_2 полето в желязото, а с l_2 — дължината на пътя по окръжността в рамката, виждаме, че тази част от кривата дава принос H_2l_2 в интеграла. Ако полето в процепа е H_1, а неговата ширина е l_1, то приносът на процепа се оказва равен на H_1l_1. По такъв начин получаваме

$$H_1l_1+H_2l_2=\frac{NI}{\varepsilon_0c^2}. \tag{36.26}$$

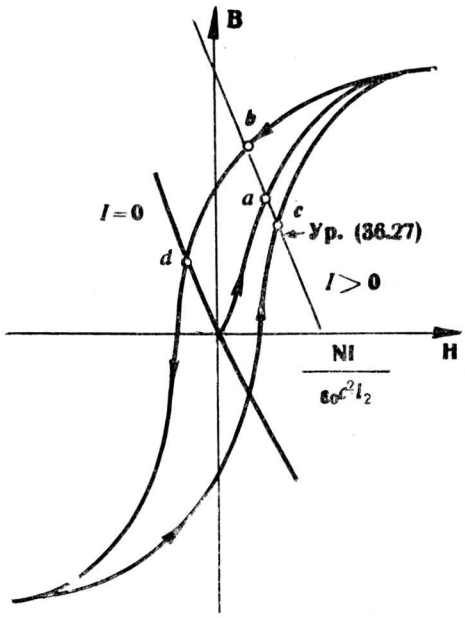
Но това още не е всичко. На нас ни е известно още, че намагнитването във въздушния процеп е пренебрежимо малко, така че $B_1=H_1$. А тъй като $B_1=B_2$, уравнението (36.26) добива вида

$$B_2l_1+H_2l_2=\frac{NI}{\varepsilon_0c^2}. \tag{36.27}$$

Остават още две неизвестни. За да намерим B_2 и H_2, е необхо



Фиг. 36-11. Напречно сечение на електромагнита



Фиг. 36-12. Определяне на полето в електромагнита

дима още една зависимост, която да свързва B с H в желязото.

Ако можем приблизително да приемам, че B_2 е равно на μH_2, то уравнението се решава алгебрически. Да разгледаме общия случай, когато кривата на намагнитването на желязото има вида, показан на фиг. 36-8. Единственото, което ни е необходимо, това е да намерим съвместно решение на тази функционална зависимост с уравнението (36.27). То може да се намери, като се построи зависимостта (36.27) на една графика с кривата на намагнитването, както е направено това на фиг. 36-12. Точките, в които кривите се пресичат, ще бъдат нашите решения.

За даден ток I уравнението (36.27) описва права линия, означена с $I>0$ на фиг. 36-12. Тази линия пресича оста H ($B_2=0$) в точката $H_2=NI/\varepsilon_0 c^2 l_2$ и има наклон — l_2/l_1. Различните стойности на токовете водят просто до хоризонтално отместване на тази линия. От фиг. 36-12 виждаме, че при даден ток съществуват няколко различни решения, които зависят от това, по какъв начин сме ги получили. Ако вие току-що сте построили магнит и сте включили ток I, полето B_2 (което е равно на B_1) ще има големина, определена от точката a. Ако отначало сте увеличавали тока до много голяма стойност, а след това сте го намалили до I, то стойността на полето ще се определя от точката b. А ако, увеличавайки тока от голяма отрицателна стойност, сте дошли до I, полето се определя от точката c. Полето в процепа зависи от това, как сте постъпвали в миналото.

Ако токът в магнита е равен на нула, зависимостта между B_2 и H_2 в уравнението (36.27) се изобразява от кривата, означена с $I=0$ на фиг. 36-12. Тук отново са възможни различни решения. Ако първоначално сте „наситили“ желязото, в магнита може да се запази значително остатъчно поле, определяно от точката d. Вие можете да снемете намотката и да получите постоянен магнит. Не е трудно да се разбере, че за добър постоянен магнит е необходим материал с *широка* хистерезисна крива. Такава много широка крива имат специални сплави, подобни на Алнико V.

36-6. Спонтанно намагнитване

Да се обърнем сега към въпроса, защо даже малки магнитни полета водят до такова голямо намагнитване във феромагнитните материали? Намагнитването на феромагнитните материали от типа на желязото или никела се осъществява благодарение на магнитните моменти на електроните на една от вътрешните обвивки на атома. Магнитният момент $\vec{\mu}$ на всеки електрон е равен на произведението от $q/2m$ по g-фактора и момента на количеството на движение **J**. При липса на чисто орбитално движение за отделния електрон $g=2$, а компонентата на **J** в произволна посока, например в посоката на оста z, е равна на $\pm\ \hbar/2$, така че компонентата на $\vec{\mu}$ по посока на оста z ще бъде

$$\mu_z=\frac{q\hbar}{2m}=0{,}928\,.\,10^{-23}\text{A/m}^2. \qquad (36.28)$$

В атомите на желязото принос за феромагнетизма дават само два електрона, така че за опростяване на разсъжденията ще говорим за атоми на никел, който е феромагнетик, подобен на желязото, но има на същата вътрешна обвивка само един „феромагнитен“ електрон. (Не е трудно след това всички разсъждения да се разпространят и върху желязото.)

Цялата работа е в това, че точно така, както и в описаните от нас парамагнитни материали, атомните магнитчета в присъствието на външно магнитно поле **B** се стремят да се подредят по полето, но топлинното движение ги разбърква. В предната глава изяснихме, че равновесието между силите на магнитното поле, което се старае да построи атомните магнитчета, и действията на топлинното движение, което се стреми да ги разбърква, во-

дят до това, че средният магнитен момент в единица обем по посока на **B** се оказва

$$\mathbf{M}=N\vec{\mu}\,\mathrm{th}\,\frac{\mu B_a}{kT}, \tag{36.29}$$

където под B_a подразбираме полето, действуващо върху атома, а под kT — топлинната (болцманова) енергия. В теорията на парамагнетизма ние използувахме в качеството на B_a само полето **B**, като пренебрегвахме при това полето, действуващо върху всеки атом от страна на съседните. Но в случая на феромагнетиците възниква едно усложнение. В желязото вече не можем да взимаме полето B_a в качеството на средно поле, действуващо върху индивидуалния атом. Вместо това трябва да постъпим така, както постъпихме при диелектриците: необходимо ни е да намерим локалното поле, действуващо върху отделния атом. При точно решаване би следвало да сумираме приносите на всички полета от другите атоми на кристалната решетка, действуващи върху разглеждания от нас атом. След това подобно на случая с диелектрика можем да приемем приближено, че полето, действуващо върху атома, ще бъде същото, както и в малка сферична кухина вътре във веществото (предполагайки, както и порано, че моментите на съседните атоми няма да се изменят при наличието на кухината).

Следвайки разсъжденията от глава 11, можем да очакваме, че ще получим формулата

$$\mathbf{B}_{\text{кухина}}=\mathbf{B}+\frac{1}{3}\,\frac{\mathbf{M}}{\varepsilon_0 c^2}\ \text{(невярно!)},$$

подобно на формулата (11.25). Но това ще бъде неправилно. Обаче ние все пак можем да използуваме получените там резултати, ако внимателно сравним уравненията от глава 11 с уравненията на феромагнетизма, които ще напишем сега. Да съпоставим отначало съответните изходни уравнения. За области, в които токовете на проводимост и заряди отсъствуват, имаме:

Електростатика	*Статически феромагнетизъм*
$\nabla\cdot\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}\right)=0$	$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$
$\nabla\times\mathbf{E}=0$	$\nabla\times\left(\mathbf{B}-\frac{\mathbf{M}}{\varepsilon_0 c^2}\right)=0$

(36.30)

Тези два набора от уравнения могат да се считат аналогични ако съпоставим *чисто математически*

$$\mathbf{E}\longrightarrow\mathbf{B}-\frac{\mathbf{M}}{\varepsilon_0 c^2},\qquad \mathbf{E}+\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}\longrightarrow\mathbf{B}.$$

Това е същото, както и

$$\mathbf{E}\longrightarrow\mathbf{H}\qquad \mathbf{P}\longrightarrow\frac{\mathbf{M}}{c^2}. \tag{36.31}$$

С други думи, ако уравненията на феромагнетизма запишем като,

$$\nabla\cdot\left(\mathbf{H}+\frac{\mathbf{M}}{\varepsilon_0 c^2}\right)=0$$
$$\nabla\times\mathbf{H}=0, \tag{36.32}$$

те ще бъдат *подобни* на уравненията на електростатиката.

По-рано това чисто алгебрично съответствие ни причини известни неприятности. Мнозина започнаха да мислят, че *именно* **H** е магнитното поле. Но както вече се убедихме, физически фундаментални полета са **E** и **B**, а полето **H** е производно понятие. Следователно въпреки че *уравненията* са аналогични, тяхната *физика* е съвсем различна. Обаче това не може да ни принуди да се откажем от принципа, че еднаквите уравнения имат еднакви решения.

Сега можем да използуваме нашите предишни резултати за полетата в кухини с различна форма в диелектриците, които са

дадени на фиг. 36-1, за да намерим полето **H**. Като знаем **H**, можем да определим и **B**. Например полето **H** вътре в игловидна кухина, успоредна на **M** (съгласно резултата, даден в § 1), ще бъде същото, както и полето **H** във вътрешността на веществото:

$$\mathbf{H}_{\text{кухина}} = \mathbf{H}_{\text{вещество}} ,$$

но тъй като в нашата кухина **M** е равно на нула, получаваме

$$\mathbf{B}_{\text{кухина}} = \mathbf{B}_{\text{вещество}} - \frac{\mathbf{M}}{\varepsilon_0 c^2}. \tag{36.33}$$

От друга страна, за дисковидна кухина, перпендикулярна на **M**,

$$\mathbf{E}_{\text{кухина}} = \mathbf{E}_{\text{диел}} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0},$$

което в нашия случай се превръща в

$$\mathbf{H}_{\text{кухина}} = \mathbf{H}_{\text{вещество}} + \frac{\mathbf{M}}{\varepsilon_0 c^2}$$

или във величините **B**

$$\mathbf{B}_{\text{кухина}} = \mathbf{B}_{\text{вещество}}. \tag{36.34}$$

Накрая за сферична кухина аналогията с уравнението (36.3) би дала

$$\mathbf{H}_{\text{кухина}} = \mathbf{H}_{\text{вещество}} + \frac{\mathbf{M}}{3\varepsilon_0 c^2}$$

или

$$\mathbf{B}_{\text{кухина}} = \mathbf{B}_{\text{вещество}} - \frac{2}{3}\frac{\mathbf{M}}{\varepsilon_0 c^2}. \tag{36.35}$$

Резултатите за магнитното поле, както виждате, се различават от тези, които имахме за електрическото поле.

Разбира се, те могат да бъдат получени и по-физически, като се използуват непосредствено уравненията на Максвел. Например уравнението (36.34) непосредствено следва от уравнението $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (вземете гаусова повърхност, която наполовина се намира в материала, а наполовина вън от него). По подобен начин можете да получите уравнението (36.33), като използувате контурния интеграл по път, който насам върви в кухината, а назад се връща през веществото. Физически полето в кухината се намалява благодарение на повърхнинните токове, определени като $\nabla \times \mathbf{M}$. За вас остава да покажете, че уравнението (36.35) може да се получи, като се разглеждат ефектите от повърхнинните токове на границата на сферичната кухина.

При намиране на равновесното намагнитване от уравнението (36.29) е по-удобно, както се оказва, да имаме работа с **H**, поради което пишем

$$\mathbf{B}_a = \mathbf{H} + \lambda \frac{\mathbf{M}}{\varepsilon_0 c^2}. \tag{36.36}$$

В приближението на сферичната кухина коефициентът λ трябва да бъде взет 1/3, но както ще видите по-късно, ще ни се наложи да използуваме малко по-различна негова стойност, а засега да го оставим като свободен параметър. Освен това ще вземем всички полета в една и съща посока, за да не бъде необходимо да се грижим за посоката на векторите. Ако сега заместим уравнението (36.36) в (36.29), ще получим уравнение, което свързва намагнитването M с намагнитващото поле H:

$$M = N\mu \operatorname{th}\left(\frac{H + \lambda M/\varepsilon_0 c^2}{kT}\right).$$

Обаче това уравнение не може да се реши точно, така че ние ще го решаваме графически.

Да формулираме задачата в по-обща форма, като запишем уравнението (36.29) във вида

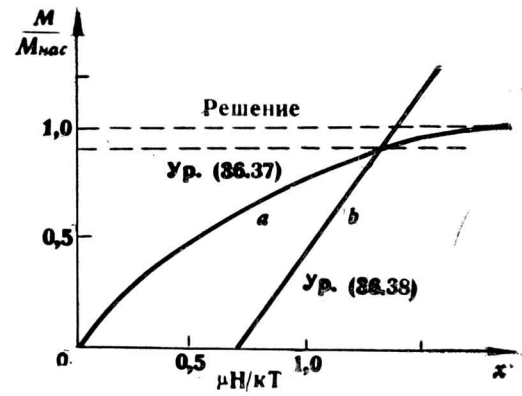
$$\frac{M}{M_{\text{нас}}} = \operatorname{th} x, \tag{36.37}$$

където $M_{нас}$ е наситеното намагнитване на веществото, т. е. $N\mu$, а x е величината $\mu B_a/kT$. Зависимостта $M/M_{нас}$ от x е показана на фиг. 36-13 (кривата a). Като използуваме още веднаж уравнението (36.36) за B_a, можем да запишем x като функция от M по следния начин

$$x=\frac{\mu B_a}{kT}=\frac{\mu H}{kT}+\left(\frac{\mu\lambda M_{нас}}{\varepsilon_0 c^2 kT}\right)\frac{M}{M_{нас}}. \qquad (36.38)$$

Тази формула определя линейната зависимост между $M/M_{нас}$ и x при всяка една стойност на H. Правата се пресича с оста x в точката $x=\mu H/kT$ и нейният наклон е равен на $\varepsilon_0 c^2 kT/\mu\lambda M_{нас}$. За всяка фиксирана стойност на H това ще бъде права, подобна на правата b на фиг. 36-13. Пресичането на кривите a и b ни дава решение за $M/M_{нас}$. И тъй задачата е решена.

Да видим сега дали тези решения са годни при различни обстоятелства. Ще започнем с $H=0$. Тук се представят две възможности, показани от кривите b_1 и b_2 на фиг. 36-14. Обърнете внимание, че наклонът на правата (36.38) е пропорционален на абсолютната температура T. По такъв начин при *високи температури* се получава права, подобна на b_1. Решение ще бъде само $M/M_{нас}=0$. Другояче казано, когато намагнитващото поле H е равно на нула, намагнитването също ще бъде равно на нула. При *ниски температури* бихме получили линия от типа b_2 и тогава ще станат възможни *две решения* за $M/M_{нас}$: едното е $M/M_{нас}=0$, а другото $M/M_{нас}$ е от порядъка на единица. Оказва се, че само второто решение е устойчиво, в което можем да се убедим, като разгледаме малките вариации в околността на указаните решения.



Фиг. 36-13. Графично решаване на уравненията (36. 37) и (36. 38)

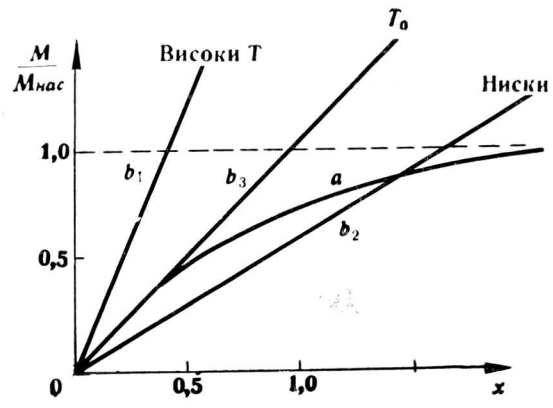
В съответствие с това при достатъчно ниски температури магнитните материали трябва да се намагнитват *спонтанно*. Накратко казано, когато топлинното движение е достатъчно малко, взаимодействието между атомните магнитчета ги заставя да се подреждат успоредно едно на друго, получава се постоянно намагнитен материал, аналогичен на постоянно поляризираните сегнетоелектрици, за които говорихме в гл. 11.

Ако тръгнем от високите температури и започнем да се движим надолу, феромагнитното поведение се проявява неочаквано при някаква критична температура T_c, наричана температура на Кюри. Тази температура съответствува на фиг. 36-14, на линията b_3, допирателна до кривата a, чийто наклон е равен на единица. Така че точката на Кюри се определя от равенството

$$\frac{\varepsilon_0 c^2 kT_c}{\mu\lambda M_{нас}}=1. \qquad (36.39)$$

При желание уравнението (36.38) може да се запише в по-прост вид посредством T_c:

$$x=\frac{\mu H}{kT}+\frac{T_c}{T}\left(\frac{M}{M_{нас}}\right). \qquad (36.40)$$



Фиг. 36-14. Определяне на намагнитването при $H=0$

Какво се получава за малки намагнитващи полета H? От фиг. 36-14 лесно може да се разбере какво ще се получи, ако нашата права линия се отмести малко вдясно. В случая на ниски температури пресечната точка ще се отмести малко надясно при слабо наклонената част на кривата a и измененията на M ще бъдат сравнително малки. Обаче в случая на висока температура пресечната точка ще се спусне бързо по стръмната част на кривата a и измененията на M ще станат относително бързо. Ние можем фактически да заменим тази част от кривата приблизително с права линия a с единичен наклон и да пишем

$$\frac{M}{M_{нас}}=x=\frac{\mu H}{kT}+\frac{T_c}{T}\left(\frac{M}{M_{нас}}\right).$$

Сега можем да решим уравнението спрямо $M/M_{нас}$

$$\frac{M}{M_{нас}}=\frac{\mu H}{k(T-T_c)}. \qquad (36.41)$$

Получаваме закон донякъде напомнящ закона за парамагнетизма:

$$\frac{M}{M_{\text{нас}}}=\frac{\mu B}{kT}. \tag{36.42}$$

Разликата се състои по-специално в това, че получихме намагнитването като функция от H, отчитайки взаимодействията на атомните магнитчета, обаче главното е, че намагнитването е обратно пропорционално на *разликата* от температурите T и T_c, а не просто на абсолютната температура T. На пренебрегването на взаимодействието на съседните атоми съответствува $\lambda=0$, което съгласно уравнението (36.39) означава $T_c=0$. Резултатът при това се получава точно такъв, както и в гл. 35.

Нашата теоретична картина може да се свери с експерименталните данни за никела. Експериментално е констатирано, че феромагнитните свойства на никела изчезват, когато температурата се покачи над 631°К. Тази стойност може да се сравни със стойността T_c, пресметната от равенството (36.39). Като си спомним, че $M_{\text{нас}}=\mu N$, получаваме

$$T_c=\lambda\,\frac{N^2\mu}{k\,\varepsilon_0\,c^2}.$$

От плътността и атомното тегло на никела намираме

$$N=9{,}1\,.\,10^{28}\text{m}^{-3},$$

а пресмятането на μ от уравнението (36.28) и заместването $\lambda=1/3$ дава

$$T_c=0{,}24°\text{К}.$$

Разлика с експеримента около 2600 пъти! Нашата теория на феромагнетизма се провали напълно!

Можем да се опитаме „да подправим“ нашата теория, както това е направил Вайс, като предположим, че поради някакви неизвестни причини λ е равно не на 1/3, а на (2600) . 1/3, т. е. около 900. Оказва се, че подобна стойност се получава и за другите феромагнитни материали от типа на желязото. Да се върнем към уравнението (36.36) и да се опитаме да разберем какво може да означава това? Виждаме, че голямата стойност на λ означава, че B_a (локалното поле, действуващо върху атома) трябва да бъде по-голямо, много по-голямо, отколкото ние мислехме. Фактически, записвайки $H=B-M/\varepsilon_0 c^2$, ние получихме

$$B_a=B+\frac{(\lambda-1)M}{\varepsilon_0\,c^2}.$$

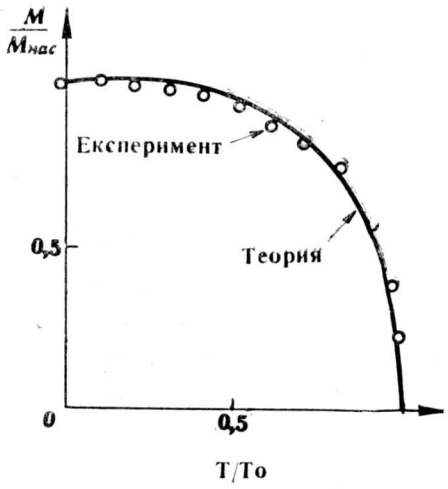
В съответствие с нашата първоначална идея, когато приехме $\lambda=1/3$, локалното намагнитване M *намалява* ефективното поле B_a с величината $2M/3\varepsilon_0$. Даже ако нашият модел на сферична кухина не беше много добър, ние все пак бихме очаквали *някакво* намаление. Вместо това, за да обясним явлението феромагнетизъм, ние сме принудени да смятаме, че намагнитването *увеличава* локалното поле огромен брой пъти: 1000 и даже повече. Както изглежда не съществува никакъв разумен начин за създаване на поле, действуващо върху атома с такава ужасна стойност, нито даже поле с необходимия знак! Ясно е, че нашата „магнитна теория“ на феромагнетизма претърпя досаден провал. Ние сме принудени да заключим, че във феромагнетизма имаме работа с някакви *немагнитни* взаимодействия между въртящите се електрони от съседните атоми. Това взаимодействие трябва да поражда в съседните спинове силна тенденция към подреждане в една посока. Ние ще видим по-късно, че това взаимодействие е свързано с квантовата механика и принципа на забраната на Паули.

И накрая да видим какво става при ниски температури, когато $T<T_c$. Ние видяхме, че даже при $H=0$ в този случай трябва да съществува спонтанно намагнитване, определяно от пресичането на кривите a и b_2 на фиг. 36-14. Ако изменяйки наклона на линията b_2, намираме M за различни температури, ще получим

теоретичната крива, показана на фиг. 36-15. За всички феромагнитни материали, атомните моменти на които са обусловени от един електрон, тази крива трябва да бъде една и съща. За другите материали подобните криви трябва да се различават много малко.

В граничния случай, когато T се стреми към абсолютната нула, M се стреми към $M_{нас}$. При увеличаване на температурата намагнитването намалява, падайки до нула при температурата на Кюри. Точките на фиг. 36-15 показват експерименталните данни за никел. Те доста добре лежат върху теоретичната крива. Въпреки че ние не разбираме механизма, който лежи в основата, общите свойства на теорията, както изглежда, все пак са правилни,

Но в нашия опит да разберем феромагнетизма има още една неприятна несъгласуваност, която трябва да ни безпокои. Ние намерихме, че над някаква температура веществото трябва да се проявява като парамагнитна среда, чието намагнитване е пропорционално на H (или B), а под тази температура трябва да възниква спонтанно намагнитване. Но при построяването на кривата на намагнитването на желязото такова нещо не се получи. Желязото става постоянно намагнитено само *след* като ние го „намагнитим“. А в съответствие с току-що изказаните идеи то трябва да се намагнитва само! Кое е невярно? Оказва се, че ако разглеждате *достатъчно малък* кристал от желязо или никел, ще видите, че той е изцяло намагнетизиран. А голямо парче желязо се състои от множество такива малки области или „домени“, които са намагнетизирани в различни посоки, така че *средното* намагнетизирване в голям мащаб се оказва равно на нула. Обаче във всеки малък домен желязото все пак се намагнетизирва от само себе си, при това M е приблизително равно на $M_{нас}$. Като следствие от тази доменна структура свойствата на голям къс вещество трябва да бъдат съвсем различни от микроскопичните свойства, както именно се оказва в действителност.



Фиг. 36-15. Зависимост на спонтанното намагнитване на никела от температурата

37

Магнитни материали

37-1. Същност на феромагнетизма

37-2. Термодинамични свойства

37-3. Хистерезисни криви

37-4. Феромагнитни материали

37-5. Необикновени магнитни материали

37-1. Същност на феромагнетизма

В тази глава ще поговорим за особеностите и поведението на феромагнетиците и някои други необичайни магнитни материали Но преди да пристъпим към тази тема, аз ще направя малък обзор на някои въпроси от общата теория на магнитните вещества, които изучихме в предната глава.

Отначало ние си представяхме, че „магнитните" токове текат във вътрешността на веществото и пораждат магнетизма, а след това започнахме да ги описваме посредством обемната плътност на токовете $\mathbf{j}_{маг} = \nabla \times \mathbf{M}$. Забележете, че тези токове са *нереални*. Даже когато намагнитването на веществото е хомогенно, токовете в него в *действителност* не изчезват изцяло: кръговият ток на електрона в един атом и кръговият ток на електрона в друг атом, препокривайки се, не дават сумарно точно нула. Даже и във всеки отделен атом разпределението на магнетизма *не е твърде гладко*. В атома на желязото например намагнитването е разпределено повече или по-малко по сферична повърхност, която се намира не твърде близо до ядрото, но и не твърде далеч от него. Оказва се, че магнетизмът във веществото е твърде сложна в своите детайли и твърде неравномерна работа. Но сега трябва да забравим за тези усложнения и да разгледаме явлението, като използуваме един по-груб усреднен модел. Само тогава ще бъде вярно твърдението за анулирането на *средния* ток при $\mathbf{M} = 0$ във всяка ограничена вътрешна област, която е голяма в сравнение с размерите на атома. Следователно под магнитен момент на единица обем (намагнитване) и под $\mathbf{j}_{маг}$ и т. н. на нашето сегашно ниво на разглеждане ние разбираме средни стойности, взети по области, големи в сравнение с пространството, заемано от отделния атом.

В предната глава констатирахме, че феромагнитните материали притежават следното интересно свойство: над някаква определена температура техните магнитни свойства се проявяват слабо и само под тази температура те стават силни магнити. Този факт лесно може да се демонстрира. Парченце никелов проводник при стайна температура се притегля от магнита. Но ако го нагреем в пламъка на газова горелка над температурата на Кюри, то ще стане фактически немагнитно и няма да се притегля към магнита даже ако го поднесем съвсем близко. Ако го оставим да изстива около магнита, то в момента, когато неговата температура падне под критическата, то внезапно отново ще се притегли към магнита!

В общата теория на магнетизма, която ние използуваме, се предполага, че намагнитването се причинява от спина на електрона. Спинът на електрона е равен на 1/2 и се съпровожда от магнитен момент, равен на един магнетон на Бор $\mu = \mu_B = q_e \hbar/2m$. Спинът на електрона може да бъде насочен или нагоре, или надолу. Тъй като зарядът на електрона е отрицателен, неговият магнитен момент е *насочен надолу*, когато спинът е насочен нагоре, и *насочен нагоре*, когато спинът е насочен надолу. В съответствие с нашето обичайно приемане магнитният момент на електрона μ е отрицателно число. Ние намерихме, че потенциалната енергия на магнитен дипол в дадено приложно поле $\mathbf{B}$ е равна на $-\vec{\mu}\mathbf{B}$. Енергията на въртящия се електрон зависи също и от разположението на съседните спинове. Ако моментът на един атом в желязото е насочен нагоре, то моментът на съседния

атом има силна тенденция също да се насочи нагоре. Именно благодарение на това желязото, кобалтът и никелът са такива силни магнити — всички моменти на атомите в тях се стремят да бъдат успоредни. И ето първият въпрос, който трябва да обсъдим — *защо* става така?

Скоро след развитието на квантовата механика беше забелязано, че съществуват извънредно мощни *привидни* сили (обаче не магнитни и не други известни сили), които се стараят да подредят спиновете на съседните електрони, *противоположно* един на друг. Тези сили са свързани тясно със силите на химичната валентност. В квантовата механика съществува така наречениият *принцип на забраната*, който говори, че два електрона не могат да заемат точно едно и също състояние, т. е. те не могат да се намират в едни и същи условия в смисъл на положение и ориентация на спина. Ако два електрона се намират в едно и също място, то единствената възможност да се различават ще бъде само противоположното насочване на техните спинове. По такъв начин, ако между атомите има пространствена област, където електроните се натрупват (така става при химичната връзка), и ако на нас ни се поиска да поставим до някой седящ вече там електрон друг, то единственият начин да направим това е да насочим спина на втория електрон, противоположно на спина на първия. Успоредността на спиновете противоречи на принципа на забраната, разбира се, ако електроните са разположени в една и съща точка. В резултат двойка близки един до друг електрони с успоредни спинове притежава много по-голяма енергия, отколкото двойка електрони с противоположни спинове; в крайна сметка ефектът ще бъде такъв, като че ли действува сила, която се старае да разгъне спиновете противоположно един на други. Понякога такива „спиновъртящи“ сили се наричат *обменни*, но това название само увеличава тайнствеността така, че този термин не е твърде удачен. Стремежът на електроните да имат противоположни спинове се дължи просто на принципа на забраната. Но фактически това обяснява *липсата* на магнетизъм почти у всички вещества! Спиновете на свободните електрони по покрайнините на атомите се стремят да се уравновесяват в противоположни посоки. Проблемата се заключва в това, да си обясним защо материалите, подобни на желязото, се проявяват съвсем не така, както се очаква.

Ние отчетохме предполагаемия ефект на подреждане, като добавихме подходящо събираемо в израза за енергията, приемайки, че ако съседните електронни магнитчета дават средно намагнитване M, то магнитният момент на електрона има силна тенденция да гледа в същата посока, в която е и средното намагнитване на съседните атоми. По такъв начин за двете възможни ориентации на спиновете може да се напише[1]

$$\text{Енергията на спин, насочен нагоре} = +\,\mu\left(H+\frac{\lambda M}{\varepsilon_0 c^2}\right),$$

$$\text{Енергията на спин, насочен надолу} = -\,\mu\left(H+\frac{\lambda M}{\varepsilon_0 c^2}\right). \qquad (37.1)$$

Когато стана ясно, че квантовата механика може да ни обясни огромните спин-ориенитарищи сили, въпреки и с очевидно неправилен знак, беше предположено, че феромагнетизмът възниква именно за сметка на тези сили, но че вследствие сложността на желязото и големия брой участвуващи в играта електрони знакът на енергията на електроните се получава обратен. Щом като това стана ясно, т. е около 1927 г., когато беше разбрана квантовата механика, много изследователи започнаха да правят различни оценки, нагласявания, полупресмятания, като се стремяха да

[1] Вместо B ние записахме това уравнение посредством $H=B-M/\varepsilon_0 c^2$, за да съгласуваме с казаното в предната глава. Ако повече ви се харесва, можете да напишете $U=\pm|\mu|\,B_a=\pm\,\mu|\,(B+\lambda' M/\varepsilon_0 c^2)$, където $\lambda'=\lambda-1$. Това е едно и също.

получат теоретически величината λ. Но въпреки всичко последните пресмятания на енергията на взаимодействието между два електронни спина в желязото, предполагащи непосредствено взаимодействие между два електрона в съседни атоми, дадоха *неправилен знак*. Сега, описвайки това явление, казват, че за всичко някакси е отговорна сложността на ситуацията и че има надежда, че някой, който ще съумее да направи изчисленията за по-сложния случай, ще успее да получи правилен отговор!

Смята се, че насоченият нагоре спин на един от електроните от вътрешната обвивка, който е отговорен за магнетизма, се стреми да застави спиновете на проводящите електрони, витаещи около него, да се обърнат в противоположна посока. Можем да се надяваме, че това ще му се удаде напълно, защото проводящите електрони се движат в същата област, в която се движат и „магнитните електрони", а тъй като те се движат ту насам, ту натам, те могат да предадат нареждането спиновете на електроните от другите атоми да се преобърнат „нагоре с краката", по такъв начин „магнитният електрон" заставя проводящите електрони да си насочат спиновете в противната страна, а те на свой ред заставят следващия „магнитен" електрон да насочи своя спин противоположно на *неговия* спин. Това двойно взаимодействие е еквивалентно на взаимодействие, което се стреми да построи двата „магнитни" електрона в една и съща посока. С други думи, тенденцията на съседните спинове да са успоредни е резултат от действието на междинната среда, която в известен смисъл се стреми да се противопостави и на двата спина. Този механизъм не изисква всички проводящи електрони да са преобърнати „нагоре с краката". Достатъчно е те само леко да се стремят да се преобърнат надолу и шансовете на „магнитните" електрони да се преобърнат нагоре ще преобладават. Както смятат изследователите, които работят с тези вещества, това именно е механизмът, който е отговорен за феромагнетизма. Но трябва да се отбележи, че чак до днешния ден никой не може да пресметне величината λ на дадено вещество, като знае просто, че в периодичната система на елементите това вещество стои, да речем, под номер 26. Накратко казано, ние все още не можем да разберем явлението докрай.

Сега ще продължим разсъжденията за нашата теория, а след това ще се върнем отново назад и ще обсъдим някои грешки на избрания път. Ако магнитният момент на някакъв електрон е насочен нагоре, неговата енергия, от една страна, се дължи на външното поле, а от друга, е свързана с тенденцията на спиновете да бъдат успоредни. Тъй като при паралелни спинове енергията е по-малка, ефектът се получава същият, както и от „външно ефективно поле". Но вие помните, че това се дължи не на истински магнитни сили, а на по-сложно взаимодействие. Във всеки случай като израз за енергията на двете спинови състояния на „магнитния" електрон, ние ще приемем уравнението (37.1). Относителната вероятност на тези две състояния при температура T е пропорционална на exp (— енергията/kT), което може да се запише като $e^{\pm x}$, където $x = |\mu|(H + \lambda M/\varepsilon_0 c^2)/kT$. Ако след това пресметнем средната стойност на магнитния момент, ще намерим (както и в предната глава), че:

$$M = N\,|\mu|\,\mathrm{th}\,x. \tag{37.2}$$

Сега аз мога да пресметна вътрешната енергия на веществото. Да отбележим, че енергията на електрона е точно пропорционална на магнитния момент, така че все едно е дали ще пресмятаме средния момент, или средната енергия. Средната стойност на енергията ще бъде при това

$$\langle U\rangle_{\text{ср}} = -N\,|\mu|\left(H + \frac{\lambda M}{\varepsilon_0 c^2}\right)\mathrm{th}\,x.$$

Но това не е съвсем вярно. Изразът $\lambda M/\varepsilon_0 c^2$ представлява взаимодействието между всички възможни *двойки* атоми, а ние трябва да помним, че всяка двойка трябва да се отчита само

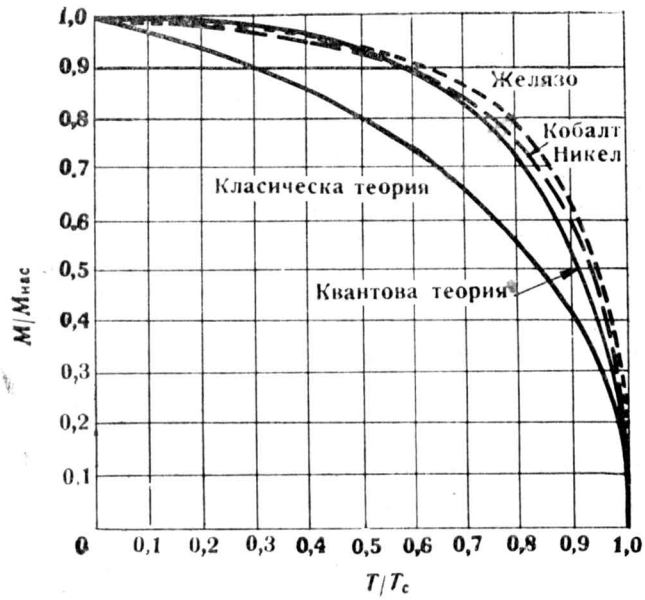
един път. (Когато отчитаме енергията на един електрон в полето на останалите, а след това енергията на втория електрон в полето на останалите, то ние още един път отчитаме част от първата енергия.) Поради това трябва да разделим на две *изразът за взаимодействието* и нашата форма за енергията добива вида

$$\langle U\rangle_{\text{ср}} = -N|\mu|\left(H+\frac{\lambda M}{2\varepsilon_0 c^2}\right)\operatorname{th} x. \qquad (37.3)$$

В предната глава ние забелязахме една много интересна особеност: за всеки материал под определена температура съществува такова решение на уравненията, при което магнитният момент *не е равен на нула,* даже в отсъствие на външно намагнитващо поле. Ако положим $H=0$ в уравнението (37.2), ще намерим

$$\frac{M}{M_{\text{нас}}} = \operatorname{th}\left(\frac{T_c}{T}\frac{M}{M_{\text{нас}}}\right), \qquad (37.4)$$

където $M_{\text{нас}}=N|\mu|$ и $T_c=\mu\lambda M_{\text{нас}}/k\varepsilon_0 c^2$. Като решим това уравнение (графически или по някакъв друг начин), намираме, че отношението $M/M_{\text{нас}}$ като функция от T/T_c представлява крива, наречена на фиг. 37.1 „квантова теория". Пунктираната крива „Кобалт, Никел" представлява експериментално получената крива за кристалите на тези елементи. Теорията и експериментът се намират в разумно съгласие. Там също са представени резултатите от класическата теория, при която пресмятанията са правени при предположението, че атомните магнитчета могат да имат всевъзможни ориентации в пространството. Можете да се убедите, че това предположение води до резултати, които са твърде далеч от експерименталните данни.



Фиг. 37-1. Зависимост на спонтанното намагнитване ($H=0$) на феромагнитни кристали от температурата

Даже квантовата теория описва недостатъчно добре наблюдаваното поведение при високи и ниски температури. Причината за това отклонение е заключена в приетото от нас твърде грубо приближение: ние предполагахме, че енергията на атома зависи само от *средното* намагнитване на съседните атоми. С други думи, всеки атом със спин, насочен нагоре, намиращ се близко до даден атом, вследствие на квантово-механическия ефект на подреждане внася своя принос в енергията. А колко са тези атоми? Средно взето, това се измерва с големината на намагнитването, но това е само *средно* взето. Може да се окаже, че за някой си атом спиновете на *всички* негови съседи са насочени нагоре. Тогава неговата енергия ще бъде над средната. У друг спиновете на някои съседи са насочени нагоре, а на някои надолу и средната стойност може да бъде нула, тогава изобщо

няма да има никакъв принос в енергията и т. н. Поради това че атомите в различни места имат различно окръжение, различен брой насочени нагоре и надолу спинове, би следвало да се възползуваме от по-сложен начин за усредняване. Вместо да взимаме един атом, подложен на средното влияние, би трябвало да вземем всеки атом в неговата реална обстановка, да пресметнем неговата енергия и след това да намерим *средната енергия*. Но как все пак да се определи колко съседи на атома са насочени нагоре и колко надолу? Именно това е необходимо да се пресметне, но тук се срещаме с една много сложна задача за вътрешни корелации — задача, която още никой не е успял да реши. Тази животрептяща и интригуваща проблема вълнува умовете на физиците в течение на много години, по този въпрос са писани многобройни статии от най-големи учени, но и досега те не могат да намерят пълното решение.

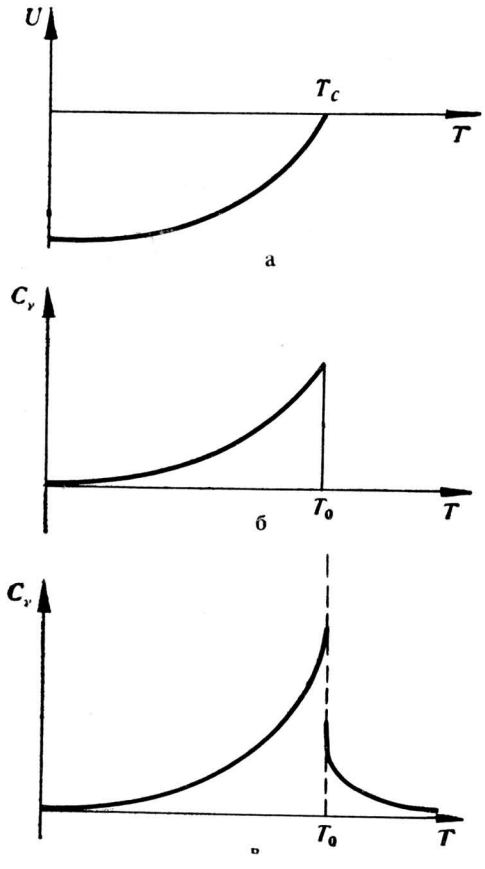
Оказва се, че при ниски температури, когато почти всички атомни магнити са насочени нагоре и само някои са насочени надолу, задачата се решава твърде лесно; същото може да се каже и за високите температури, които значително надхвърлят температурата на Кюри T_c, когато почти всички посоки са съвършено случайни. Често е по-лесно да се пресметнат малките отклонения от някоя проста идеализирана теория, и твърде ясно е защо такива отклонения се получават при ниски температури. Физически е ясно, че поради статистически причини намагнитването при високи температури трябва да изчезне. Но точното поведение близо около точката на Кюри никога не е било установено във всички подробности. Това е една много интересна задача, над която си струва да се потрудите, ако някога решите да се заловите с още нерешена проблема.

37-2. Термодинамични свойства

В предишната глава ние положихме основата, необходима за пресмятането на термодинамичните свойства на феромагнитните материали. Те естествено са свързани с вътрешната енергия на кристала, която е обусловена от взаимодействието между различните спинове и се определя от формулата (37.3). За намиране на енергията, свързана със спонтанното намагнитване (под точката на Кюри), можем да положим $H=0$ в уравнението (37.3) и като вземем предвид, че $\operatorname{th} x = M/M_{\text{нас}}$, ще намерим, че средната енергия е пропорционална на M^2

$$\langle U\rangle_{cp} = -\frac{N\,|\mu|\,\lambda\,M^2}{2\varepsilon_0\,c^2 M_{\text{нас}}}. \qquad (37.5)$$

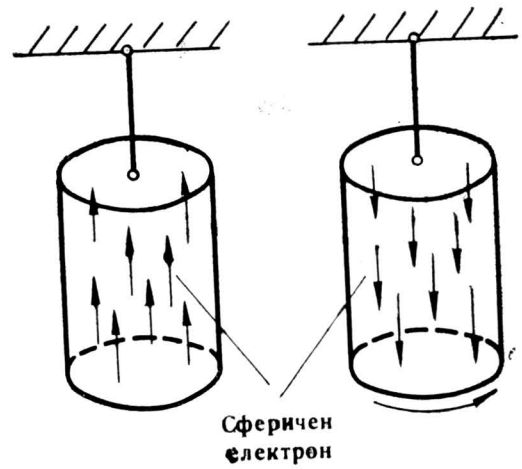
Ако сега построим графиката на зависимостта на намагнитването от температурата, ще получим крива, която се описва с отрицателния квадрат на функцията (37.1) и е представена на фиг. 37-2, *а*. Ако при това измерваме специфичната топлоемност на същия материал, бихме получили кривата на фиг. 37-2, *б*, която представлява производната на кривата, показана на фиг. 37-2. *а*. С увеличаване на температурата тази крива бавно расте, но след това при $T=T_c$ неочаквано пада до нула. Рязкото падане, предизвикано от изменението на наклона на кривата на магнитната енергия и кривата на нейната производна, попада право в точката на Кюри. По такъв начин без никакви магнитни измервания, само наблюдавайки термодинамични свойства, бихме могли да установим, че вътре в желязото или никела става нещо. Обаче както от експеримента, така и от усъвършенствуваната теория (с отчитане на вътрешните флуктуации) следва, че тези прости криви са неправилни и че истинската картина в действителност е по-сложна. Пикът на тези криви се издига по-нагоре, а падането до нула става малко по-бавно. Даже ако температурата е достатъчно голяма, така че спиновете *средно* да са разпределени съвсем случайно, все едно намират се области с определени стойности на



Фиг. 37-2. Енергия в единица обем и специфична топлоемност на феромагнитен материал

намагнитване и спиновете в тези области продължават да дават малка допълнителна енергия на взаимодействие, която бавно намалява с нарастването на температурата и увеличаването на безпорядъка. Така че реалната крива изглежда, както е показано на фиг. 37-2, *в*. Една от целите на физиката на днешния ден е да се намери точно теоретично описание на специфичната топлоемност близо до точката на прехода на Кюри — една увлекателна проблема, нерешена досега. Естествено че тази проблема е свързана много тясно с формата на кривата на намагнитването в същата област.

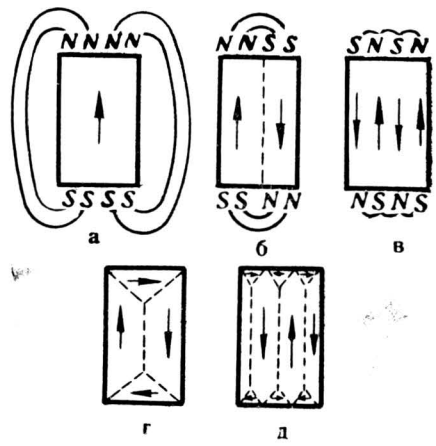
Да опишем сега някои експерименти, които съвсем нямат термодинамичен характер, показващи, че ние все пак в известен смисъл сме *прави* при нашата интерпретация на магнетизма. Когато даден материал се намагнитва до насищане при достатъчно ниски температури, то M е много близко до $M_{нас}$, така че почти всички спинове, както и магнитните моменти, са успоредни. Това може да се провери експериментално. Да си представим, че сме окачили магнитна пръчица на тънка струна, а след това сме я обхванали с бобина, така че можем да меним магнитното поле, без да се докосваме до магнита и без да прилагаме към него никакъв момент на сили. Това е много труден експеримент, защото магнитните сили са толкова големи, че всека нехомогенност, всяко изкривяване или всяко несъвършенство в желязото могат да дадат случаен момент. Обаче такъв експеримент е бил направен с цялата необходима акуратност и ролята на случайните моменти е била сведена до минимум. С помощта на магнитното поле на бобината, която окръжава пръчицата, можем наведнаж да преобърнем всички магнитни моменти. Когато направим това, ще се преобърнат „отгоре надолу“ и всички моменти на количеството на движението, свързани със спиновете (фиг. 37-3). Но тъй като пълният момент на количеството на движение трябва да се запази, то тогава, когато всички спинове са се преобърнали, моментът на количеството на движение на пръчицата трябва да се измени в противоположната страна. Целият магнит трябва да започне да се върти. Това е станало и в действителност. Когато опитът е бил направен, било е констатирано слабо въртене на магнита. Ние можем да измерим пълния момент на количеството на движението, предаден на целия магнит, който е равен просто на произведението от N по $\hbar$ и на изменението на момента на количеството на движението на всеки спин. Оказало се, че измереното по този начин отношение на момента на количеството на движението към магнитния съвпада с 10% точност с нашите пресмятания. В действителност в нашите пресмятания ние изхождахме от предположението, че атомният магнетизъм се дължи изцяло на електронните спинове, обаче в повечето материали има още и орбитално движение. Орбиталното движение е свързано с решетката, но тя дава не повече от няколко процента принос в магнетизма. Действително, ако вземем $M_{нас} = N\mu$ и за плътността на желязото вземем стойността 7,9, а за μ — момента на електрона, свързан с неговия спин, то за магнитното поле ще получим насищане около 20 000 Gs. Обаче опитът показа, че в действителност то има стойност близо до 21500 Gs. Грешката от 5 или 10 % възниква именно поради това че пренебрегнахме приноса от орбиталните моменти. Следователно, малката разлика с гиромагнитните измервания е съвършено разбираема.



Фиг. 37-3. При „пренамагнитването на желязно блокче то добива някаква ъглова скорост

37-3. Хистерезисни криви

Ние заключихме от нашия теоретичен анализ, че магнитните материали под известна температура трябва да се намагнитват, спонтанно, така че всички магнитчета в тях трябва да гледат в една и съща посока. Обаче за обикновено парче *ненамагнитено* желязо това, както знаем, не е вярно. Защо желязото не се намагнитва цялото? С помощта на фиг. 37-4 аз мога да ви обясня това. Да допуснем, че цялото желязо представлява един голям



Фиг. 37-4. Образуване на домени в монокристал желязо

кристал с такава форма, каквато е показана на фиг. 37-4, а и че този кристал изцяло би се намагнитил в една посока. При това би се създало значително външно магнитно поле, съдържащо в себе си огромна енергия. Ние можем да намалим тази енергия на полето, ако разположим атомите така, че една част от кубчето да бъде намагнитена нагоре, а другата надолу, както е показано на фиг. 37-4, *б*. При това, разбира се, полето вън от желязото ще заема по-малък обем и ще носи в себе си по-малко енергия.

Почакайте, почакайте! В слоя между двете области редом с електроните със спин, насочен нагоре, стоят електрони със спин, насочен надолу. Но феромагнетизмът се появява само в тези вещества, за които енергията се *намалява,* когато спиновете са *успоредни*, а не *противоположни.* Така че по пунктираната линия на фиг. 37-4, *б* възниква известна допълнителна енергия. Тази енергия понякога се нарича *енергия на стеничката.* Областта, която има само една посока на намагнитване, се нарича *домен.* На всяка единица площ от разделната повърхност между два домена в стеничката на домена, от двете страни на която са разположени атоми, чийто магнитни моменти са насочени противоположно, е съсредоточена енергия. Разбира се, не може да се говори строго, че на границата моментите на два съседни атома са точно противоположни. Природата е направила този преход попостепенен. Но сега не си струва да се интересуваме от такива тънки детайли.

Главният въпрос сега се заключава ето в какво: изгодни ли са такива стенички, или не? Отговорът зависи от *размерите* на домените. Да предположим, че сме увеличили размерите така, че всичко е станало два пъти по-голямо. При това обемът на външното пространство, запълнено с магнитното поле с даден интензитет, ще стане осем пъти по-голям, а енергията на магнитното поле, която е пропорционална на обема, също нараства осем пъти. Но площта от границите между двата домена, в който е съсредоточена енергията на стената, ще нарасне само четири пъти. Следователно, ако късчето желязо е достатъчно голямо, на него му е изгодно да се разцепи на известен брой домени. Ето защо само много малки кристалчета могат да се състоят само от един домен. Всеки голям обект, чийто размер е повече от около една хилядна от милиметъра, ще има най-малко една междудоменна стена, а обикновен „сантиметров" обект се разцепва, както е показано на фигурата на множество домени. Разцепването на домени ще става *дотогава, докато енергията, необходима за установяване на още една допълнителна стеничка, не стане сравнима със намаляването на енергията на магнитното поле вън от кристала.*

Природата е намерила още един начин за понижаване на енергията. Полето може да не чувствува никаква необходимост да излиза навън[1], ако вземем, както е показано на фиг. 37-4, *г*, малки триъгълни области, *насочени към страната* на намагнитването. При такова разположение както на фиг. 37-4, *г* външното поле изцяло отсъствува, а площта на доменните стенички става незначително по-голяма.

Но това води до нова проблема. Оказва се, че ако се намагнити отделен кристал желязо, той променя своята дължина в посока на намагнитването; така че „идеален" куб, намагнитен „нагоре", вече няма да бъде безупречен куб. Неговият „вертикален" размер ще се различава от „хоризонталния". Този ефект се нарича *магнитострикция.* В резултат на такива геометрични изменения малкото триъгълно парченце, показано на фиг. 37-4, *г*,

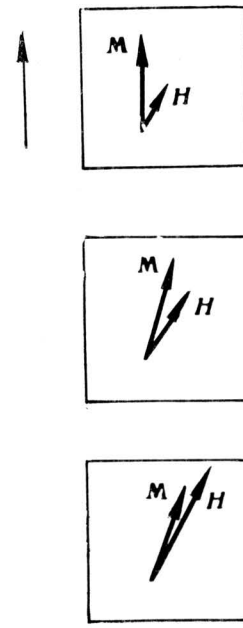
[1] Вие може да се учудите по какъв начин спиновете, които трябва да са насочени или „нагоре", или „надолу", могат също така да бъдат насочени „настрани"! Това, разбира се, е правилно, но на мен, право да си кажа, не би ми се искало да се спирам на този въпрос сега. Ние ще застанем просто на класическа гледна точка, като си представим атомните магнитчета във вид на магнитни диполи, които могат да бъдат ориентирани и в странична посока. За да се разбере как е възможно в квантовата механика в едно и също време да се квантува както „нагоре-надолу", така и „надясно-наляво", трябва да се съберат повече знания.

няма да може повече, така да се каже, „да се вмества“ в отреденото му пространство: в едно направление кристалът става твърде дълъг, а в друго — твърде къс. Фактически той, разбира се, се вмества, но само след като малко се сплеска, което води до известни механически напрежения. Оттук възниква допълнителна енергия. Пълният баланс на приносите в енергията именно определя сложния вид на разполагането на домените в къс ненамагнитено желязо.

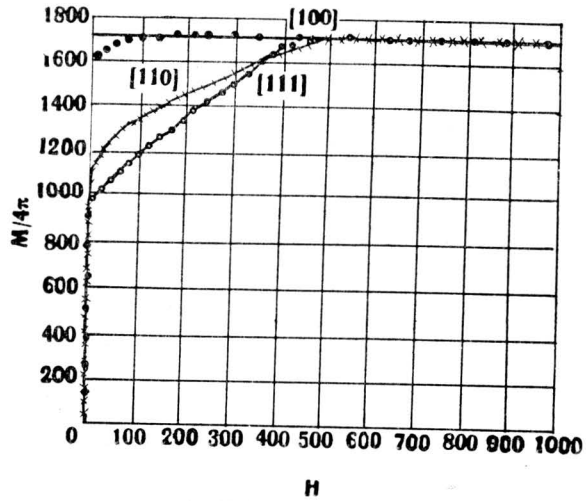
А какво ще се получи, ако приложим външно магнитно поле? Като прост пример да разгледаме кристал, чийто домени са показани на фиг. 37-4, *д*. Как ще става намагнитването на кристала, ако приложим магнитно поле, насочено нагоре? Преди всичко средната доменна стеничка може да се *придвижи встрани* (надясно) и да намали енергията. Тя се премества по такъв начин, че областта на посоките „нагоре“ е станала по-голяма от областта на посоките „надолу“. Елементарните магнитчета, насочени по полето, стават повече, а това води до понижаване на енергията. По такъв начин в къс желязо в слаби магнитни полета от самото начало на намагнитването доменната стеничка започва да се движи и „изяжда“ областите, намагнитени противоположно на полето. С увеличаването на полето целият кристал постепенно се превръща в един голям домен, в който външното поле помага да се запази посоката „нагоре“. В силно магнитно поле кристалът се намагнитва в една посока именно защото тяхната енергия се намалява в приложеното поле. Външното магнитно поле на кристала сега вече не е така съществено.

А какво ще стане, ако геометрията на кристала не е толкова проста? Какво ще стане, ако някоя ос на кристала и неговото спонтанно намагнитване са насочени на една страна, а ние прилагаме поле, *насочено в друга,* да речем под ъгъл 45°? Може да се мисли, че домените ще се обърнат така, че тяхното намагнитване ще стане успоредно на полето, а след това те, както и преди, ще могат да се слеят в един домен. Но не е лесно да се направи това за желязото, *защото енергията, необходима за намагнитване на кристала, зависи от направлението на намагнитващото поле спрямо кристалната ос.* Да се намагнити желязото в направление, успоредно иа кристалната ос, е относително лесно. Но за да се намагнити то в някакво друго направление, да речем под ъгъл 45° към направлението на оста, се иска *повече* енергия. Следователно, ако се приложи магнитно поле за такова направление, отначало ще се получи нарастване на домените, намагнитени в едно от избраните направления, *близки* до направлението на приложното поле, докато в тази страна не бъде насочено намагнитването на всички области. След това при *много по-силни полета* общото намагнитване постепенно се обръща към посоката на полето, както е показано това на фиг. 37-5.

На фиг. 37-6 са показани получените експериментални криви



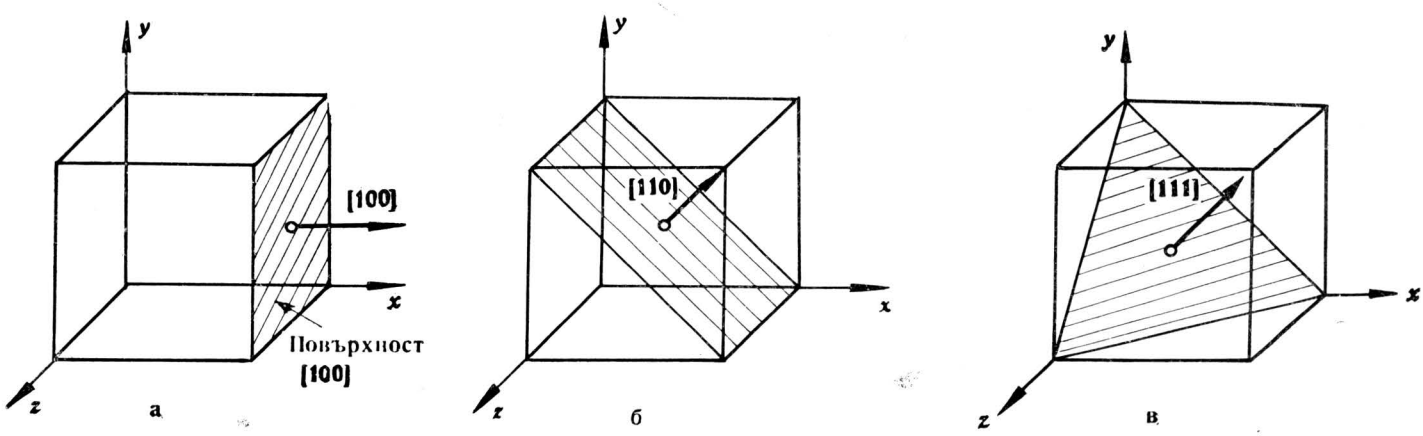
Фиг. 37-5. Намагнетизирващото поле **H**, насочено под някакъв ъгъл към кристалната ос, постепенно променя посоката на намагнитването **M**, без да изменя нейната стойност



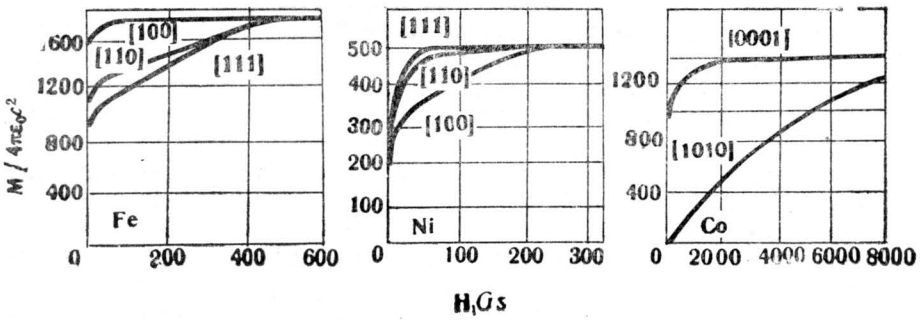
Фиг. 37-6. Графика на компонентата на **M**, успоредна на полето **H**, при различни посоки на **H** (спрямо осите на кристала)

на намагнитването на монокристали желязо. За да ги разберете, предварително трябва да ви обясня някои означения, които се използуват за описване на посоките в кристала. Съществуват много начини за разслояване на кристала на равнини, в които са разположени атомите. Всеки от вас, който по-рано е работил или е бил в овощна градина или лозе, познава тази любопитна гледка. Като погледнете в една страна, виждате линия дървета, ако погледнете в друга, пред вас се открива съвсем друга редица и т. н. Така е и в кристала — там има определени семейства равнини, които съдържат много атоми; тези равнини имат една важна особеност (за простостота ще разгледаме кубичен кристал). Ако отбележим къде тези равнини пресичат трите координатни оси, ще се окаже, че *обратните стойности* на разстоянията от трите пресечни точки до началото се отнасят като цели числа. Именно тези три цели числа се приемат за означаване на равнините. На фиг. 37-7, *а* например е показана равнината, успоредна на равнината yz. Тя се нарича равнина (100), тъй като обратните стойности на отсечките, отсичани от тази равнина по осите y и z, са равни на нула. Направлението, перпендикулярно на тази равнина (в кубическия кристал), се дава със същия набор числа, но се записва в квадратни скоби: [100]. Основната идея в случая на кубическия кристал може да се разбере много лесно, защото символът [100] означава векторът, който има единична компонента в посока на оста x и нулеви в посоките на осите y и z. Комбинацията [110] означава направление под 45° към осите x и y, както е показано на фиг. 37-7, *б*, а [111] — направлението на диагонала на куба (фиг. 37-7, *в*).

Да се върнем сега към фиг. 37-6. На нея виждаме криви на намагнитване на монокристал в различни направления. Преди всичко забележете, че за много слаби полета, толкова слаби, че в нашия мащаб е трудно те да се изобразят, намагнитването извънредно бързо нараства до твърде големи стойности. Ако приложим поле в направлението [100], т. е. в едно от направленията на лесното намагнитване, кривата върви нагоре до още по-големи стойности, след това малко се закръгля и настъпва насищане. Това става, защото домените, които вече са там, се ликвидират много лесно. За да се придвижат доменните стенички и да се „погълнат“ всички „неправилни“ домени, необходимо е съвсем слабо поле. Монокристалите на желязото притежават огромна проницаемост (в магнитен смисъл), много по-голяма, отколкото в поликристалното желязо. Съвършеният кристал се намагнитва много лесно. Защо все пак неговата крива се закръгля? Защо тя не върви право до насищането? Точно не е известно. Може би на вас някога ще ви се удаде да изучите това явление. Ние разбираме защо при големи полета тя е плоска. Когато цялото кубче става един домен, то допълнително магнитно поле не може да създаде по-голямо намагнитване, то вече е равно на $M_{нас}$ — значи спиновете на всички електрони са насочени нагоре.



Фиг. 37-7. Начини за означаване на кристалните равнини



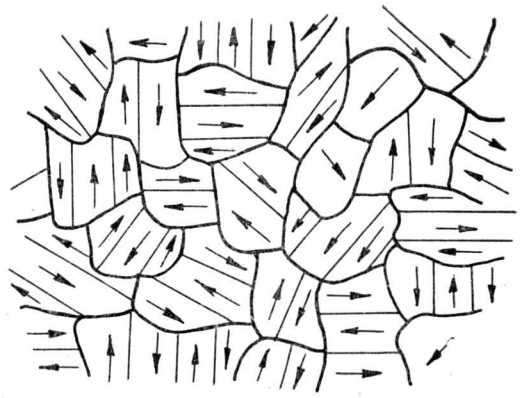
Фиг. 37-8 Криви на намагнитването за монокристали на желязо, никел и кобалт

Какво ще се получи, ако се опитаме да повторим същото за направлението [110], което лежи в равнината xy под ъгъл 45° към оста x? Ние включваме неголямо поле и намагнитването за сметка на нарастването на домена рязко се увеличава. Ако след това продължаваме да увеличаваме полето, изяснява се, че за достигане на насищане полето трябва да бъде твърде голямо защото векторът на намагнитването трябва да се *завърти встрани* от направлението на лесното намагнитване. Ако това обяснение е правилно, то при екстраполиране на кривата [110] точката на пресичане с вертикалната ос трябва да дава стойностите на намагнитване, представляващо $1/\sqrt{2}$ от намагнитването при насищане Оказва се, че и в действителност става точно така. Това отношение е много, много близко до $1/\sqrt{2}$. Аналогично за направлението [111], което върви по диагонала на куба, намираме, както и очаквахме, че при екстраполирането кривата ще пресече вертикалната ос на разстояние, представляващо $1/\sqrt{2}$ от стойността, съответстващата на насищането.

На фиг. 37-8 е показано съответното поведение на два други феромагнетици: никела и кобалта. Никелът се различава от желязото. Оказва се, че направлението на лесното намагнитване при него ще бъде направлението [111]. Кобалтът има хексагонална кристална структура; за този случай системата на означенията е изменена. Тук в основата на шестоъгълника се разполагат три оси и още една ос, перпендикулярна към тях. Така че тук се използуват четири числа. Направлението [0001] — това е направлението на хексагоналната ос, а [1010] — направлението, перпендикулярно към тази ос. Вие виждате, че кристалите на различните метали са построени различно.

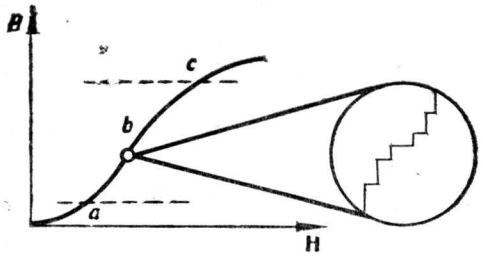
Сега ще разгледаме такъв поликристален материал, като обикновено парче желязо. Вътре в него се съдържат огромен брой малки кристалчета, чиито кристални оси са насочени по всички страни. Но това *не е същото, каквото са домените.* Спомнете си, че всички домени бяха части от *един кристал*, а в къс желязо, както се вижда от фиг. 37-9, се съдържат много *различни кристалчета* с различна ориентация. Във всяко от тези кристалчета изобщо се съдържат няколко домена. Когато прилагаме слабо магнитно поле към парче поликристален материал, доменните бариери в кристалчетата започват да се преместват и домените, чието направление на намагнитване съвпада с направлението на лекото намагнитване, растат все повече и повече. Дотогава, докато полето остава много слабо, това нарастване е обратимо. Ако изключим полето, намагнитването отново се връща до нула. Тази част от кривата на намагнитването е означена на фиг. 37-10 с буквата a.

За големи полета в областта, означена с буквата b, всичко става много по-сложно. Във всяко малко кристалче от материала се срещат напрежения и дислокации. Там има и примеси, замърсявания и дефекти. И при всички полета, с изключение на много слабите, стеничките на домените при своето движение се натъкват на тях. Между доменната стеничка и дислокацията (или границите на зърното, или примесът) възникват взаимодействия. В резултат,



Фиг. 37-9 Микроструктура на немагнетизиран поликристален феромагнитен материал

Всяко кристалче има посока на лесно намагнитване и се разбива на домени, които обикновено са намагнетизирани спонтанно в тази посока



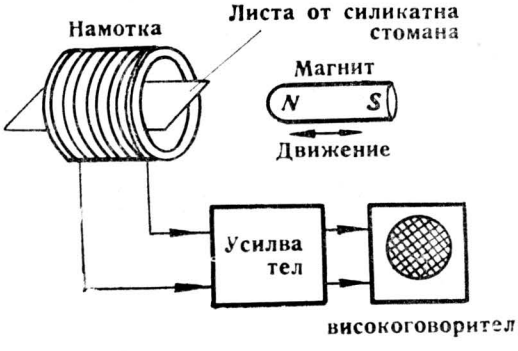
Фиг. 37-10 Кривата на намагнитването на поликристално желязо

когато стеничката се натъква на препятствие, тя като че ли се залепва и се държи там, докато полето не достигне определена големина. След това, когато полето малко нарасне, стеничката внезапно се срива. По такъв начин движението на доменната стеничка се оказва съвсем не плавно както в идеалния кристал: тя се движи скокообразно, а понякога и за миг се спира. Ако ние бихме разгледали кривата на намагнитването в микроскопичен мащаб, бихме видели нещо подобно на показаното на приложението към фиг. 37-10.

Но най-важното се заключава в това, че тези скокове в намагнитването могат да предизвикат загуба на енергия. Преди всичко, когато стеничката на домена прескача на края препятствието, тя много бързо се движи към следното. Бързото движение влече след себе си и бързо изменение на магнитното поле, което на свой ред създава вихрови токове в кристала. Последните разпиляват енергия за нагряване на метала. Друг ефект се състои в това, че когато доменът неочаквано се изменя, част от кристалите изменят своите размери поради магнитострикцията. Всякоо нечаквано преместване на доменната стеничка създава малка звукова вълна, която също отнася енергия. Благодарение на такива ефекти тази част от кривата на намагнитването е *необратима:* става *загуба на енергия.* В това се заключава причината на хистерезисния ефект, защото движение със скокове напред е едно, а движението назад е вече друго, и в двата случая се изразходва енергия. Това прилича на каране по разбито шосе.

В крайна сметка при достатъчно силни полета, когато всички доменни стенички са отместени и намагнитването на всяко кристалче е насочено по най-близката до полето ос на лесно намагнитване, остават още някои кристалчета, за които оста на лесното намагнитване е далеч от направлението на външното магнитно поле. За да се завъртят техните магнитни моменти, е необходимо още допълнително поле. По такъв начин в силните полета, именно в областта, означена на фиг. 37-10 с буквата *в*, намагнитването нараства бавно, но гладко. Намагнитването не достига веднага своето насищане, защото в тази последна част от кривата се получава *дозавъртане* на атомните магнитчета в силното поле. Сега виждаме защо кривата на намагнитването на поликристален материал обикновено има вида, показан на фиг. 37-10: отначало тя нараства слабо и това нарастване е *обратимо,* след това нараства бързо, но вече необратимо, а след това бавно се закривява. Разбира се, между тези три области няма никакъв рязък преход — те плавно преминават една в друга.

Не е трудно да се убедим, че в средната част на кривата процесът на намагнитването носи скокообразен характер, че доменните стенички при придвижването отскачат и даже щракат. Затова ни е необходима само бобина с много хиляди навивки проводник, свързана посредством усилвател с репродуктор (фиг. 37-11). Ако поставим вътре в бобината няколко листчета силициева стомана (от такъв вид, както и в трансформаторите) и бавно приближаваме към тази пачка постоянен магнит, скокообразните изменения на намагнитването ще създават в бобината импулси е. д. н., които ще се чуват в репродуктора като отделни щракания. С приближаването на магнита към желязото върху вас се изсипва цял град от щракания, напомнящ шума, създаван от падащи една след друга песъчинки, изсипвани от наклонена тенекия. Това са доменните стенички, които подскачат, люлеят се и щракат с увеличаването на магнитното поле. Това явление се нарича *ефект на Баркхаузен.*



Фиг. 37-11 Скокообразни изменения на намагнетизирването на листове силициева стомана се съпровожда от пръщене в репродуктора

С приближаването на магнита към железните листчета шумът известно време все нараства, но когато магнитът се оказва съвсем близко, шумът започва да затихва. Защо? Защото всички доменни стенички са се придвижили вече толкова, колкото е възможно, и сега всяко увеличаване на полето просто *завърта* векторите на намагнитването във всеки от домените, а това вече е един напълно плавен процес.

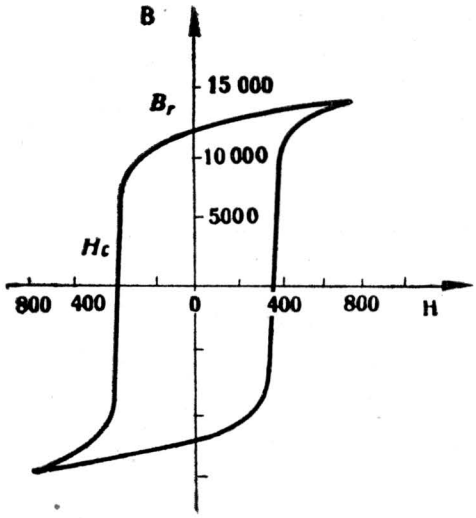
Ако сега плавно отдръпвате магнита, така че да се върнете

назад по долната линия на хистерезиса, всички домени също ще се стремят да се върнат назад в положението на най-ниска енергия и вие отново ще чуете град от щракания. Обърнете внимание, че ако отдръпнете магнита до някакво определено положение, а след това започнете леко да го движите напред-назад, звукът ще бъде относително слаб. Това отново напомня поведението на наклонена тенекия с пясък: когато песъчинките са „заседнали" на своето място, малък наклон на тенекията вече няма да ги разтревожи. Малко изменение на магнитното поле в желязото е неспособно да застави доменната стеничка да прескочи през „гърбицата".

37-4. Феромагнитни материали

Сега би било добре да се разкаже за различните видове магнитни материали, използувани в техниката, и за някои проблеми, свързани със създаването на магнитни материали за различни цели. Преди всичко за самия термин „магнитни свойства на желязото", който често ни се случва да чуваме. Той, строго казано, няма смисъл и е способен да предизвика заблуждение: „желязо" като строго определен материал не съществува. Свойствата на желязото зависят от количествата примеси, а също така и от начинът на неговото приготвяне. Вие разбирате, че магнитните свойства ще зависят от това, колко леко се движат доменните стенички. Именно това свойство ще бъде *определящо*, а съвсем не начинът, по който се проявяват отделните атоми. Така че практически феромагнетизмът не представлява свойство на *атомите* на желязото: това е свойство на *към желязо в определено състояние*. Желязото например може да се намира в две различни кристални форми. Обикновената форма има обемноцентрирана кубична решетка, но може още да има и стеноцентрирана решетка, която обаче е стабилна само при температура над 1100°C. При тези температури, разбира се, желязото вече е нахвърлило точката на Кюри. Обаче ако приготвим сплав от желязо, хром и никел (един от възможните състави съдържа 18% хром и 8% никел), можем да получим това, което се нарича неръждаема стомана; въпреки че се състои главно от желязо, тя запазва стеноцентрираната решетка даже и при ниски температури. Благодарение на своята кристална структура този материал притежава съвършено други магнитни свойства. Обикновено неръждаемата стомана не притежава магнитни свойства в някаква забележима степен, но има видове с друг състав на сплавта, които до известна степен са магнитни. Въпреки че такава сплав, както и всяко вещество, представлява магнетик, тя не е феромагнетик като обикновеното желязо, независимо от това, че основната съставна част е желязо.

Съществуват специални материали, които са били създадени, за да бъдат получени особени магнитни свойства. Искам да ви разкажа за някои от тях. Ако е необходимо да се направи *постоянен* магнит, трябва да се намери материал с извънредно широка хистерезисна крива, така че при изключването на тока, когато се спущаме до нулево намагнитващо поле, намагнитването все пак да остане голямо. За такива материали границите на домените би трябвало да бъдат „замразени" по местата си, колкото е възможно по-здраво. Един от тези материали е забележителната сплав АлникоV (51% Fe, 8% Al, 14% Ni, 24% Co, 3% Cu). Твърде сложният състав на тази сплав говори за търпеливия труд, който е трябвало да бъде вложен, за да се създаде добър магнит. Колко търпение е било необходимо, за да се смесват в различни пропорции петте компонента, да се проверяват различните състави, докато не е била намерена идеалната сплав! Когато Алнико V се втвърдява, в нея се появява „втора фаза", която утаявайки се, образува множество малки зърна и предизвиква много големи вътрешни напрежения. Движението на доменните стенички в този материал е много затруднено. А за да получи освен това необходимия строеж, Алнико V се обработва механи-



Фиг. 37-12 Хистерезисна крива на сплава Алнико V

чески, така че кристалите да се построят под формата на продълговати зърна в направлението на бъдещото намагнитване. При това намагнитването естествено се стреми да гледа в необходимото направление и да противостои на ефектите на анизотропията. Освен това в процеса на приготвянето материалът даже се охлажда във външно магнитно поле, така че зърната да растат с правилна ориентация на кристалите. Хистерезисна крива на Алнико V е дадена на фиг. 37-12. Вие виждате, че тя е 500 пъти по-широка от хистерезисната крива на мекото желязо, която ви показвах по-рано (вж. фиг. 36-8 на стр. 510)

Да се обърнем сега към други видове материали. За направата на трансформатори и мотори е необходим материал, който би бил „мек" в магнитно отношение, т. е. такъв, че неговото намагнитване да може леко да се изменя, така че даже много малко приложено поле да довежда до много голямо намагнитване. Затова са необходими чисти, добре обработени материали с много малък брой дислокации и примеси, така че доменните стенички да могат леко да се движат. Желателно е анизотропията да се направи колкото е възможно по-малка. Тогава, даже ако зърната на материала са разположени под „неправилни ъгли" спрямо полето, материалът все пак лесно ще се намагнитва. Ние казахме, че желязото предпочита да се намагнитва в направление [100], докато никелът предпочита направлението [111], така че ако смесваме желязо и никел в различни пропорции, можем да се надяваме да намерим такава пропорция, при която сплавта няма да има *никакво* предпочитано направление, т. е. направленията [100] и [111] ще бъдат еквивалентни. Оказва се, че това се постига при смесване на 70% никел и 30% желязо. Като добавка (вероятно по щастлива случайност, а може би и поради някаква физическа връзка между анизотропията и магнитострикционните ефекти) се оказало, че коефициентите на *магнитострикцията* на желязото и никела имат противоположни знаци. За сплав от тези два метала магнитострикцията изчезва при съдържание на никел около 80%. Така че при съдържание на никел някъде между 70 и 80% получаваме много „меки" магнитни материали — сплави, които много лесно се намагнитизират. Тези сплави се наричат с общото име *пермалой*. Пермалоите се използуват във високочестотните трансформатори (при ниско ниво на сигналите), но съвсем не са годни за постоянни магнити. Пермалоите трябва да се приготвят и да се работи с тях много внимателно. Магнитните свойства на пермалоя коренно се променят, ако той се деформира над границата на неговата еластичност, така че този материал по никакъв начин не трябва да се прегъва. В противен случай вследствие възникването на дислокации, повърхности на плъзгане и други механични деформации, неговата проницаемост намалява и границите на домените вече няма да се движат така леко. Впрочем, предишната висока проницаемост може да се възстанови посредством отвръщане при висока температура.

Полезно е да се оперира с някакви числа за характеризиране на различните магнитни материали. Две такива характеристики представляват стойностите на B и H в точките на пресичането на хистерезсината крива с координатните оси (фиг. 37-12). Тези стойности се наричат *остатъчно магнитно поле* B_r и коерцитивна сила H_c. В таблица 37-1 са дадени тези характеристики на някои материали.

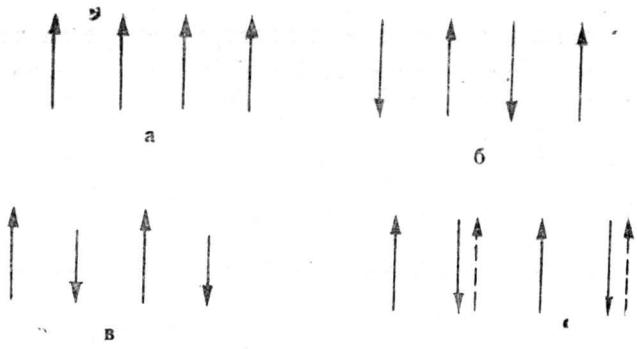
Таблица 37.1

Свойства на някои феромагнитни материали

Материал	Остатъчно магнитно поле B_r G$_s$	Коерцитивна сила H_c G$_s$
Супермалой	(≈5000)	0,004
Силициева (трансформаторна) стомана	12000	0,05
Желязо Армко	4000	0,6
Алнико V	13000	550

37-5. Необичайни магнитни материали

Тук би ми се искало да разкажа за някои по-екзотични магнитни материали. В периодичната таблица има немалко елементи, които имат незапълнени вътрешни електронни обвивки, а следователно и атомни магнитни моменти. Така веднага след феромагнитните елементи — желязото, никела и кобалта, ще намерите хрома и мангана. Защо *те* не са феромагнитни? Отговорът се заключава в това, че в израза (37.1) членът с λ за тези елементи

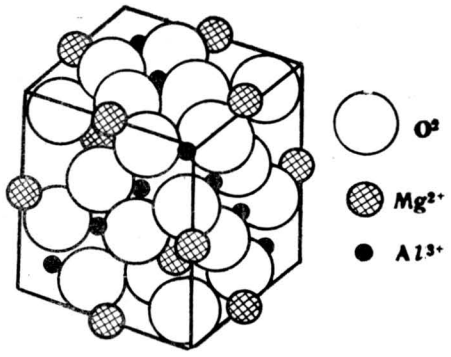


Фиг. 37-13. Относително ориентиране на електронните спинове в различни материали:

а — феромагнетик; *б* — антиферомагнетик; *в* — ферит; *г*—итриево-желязна сплав

има *противоположен знак*. В решетката на хрома, например посоките на магнитните моменти на атомите се редуват *една след друга* (фиг. 37-13, *б*) . Така че от своя гледна точка хромът *все пак* е „магнетик", но от гледище на техническите приложения това не представлява интерес, тъй като няма *външен* магнитен ефект. Следователно хромът е пример за материал, в който квантово-механическият ефект предизвиква редуване на посоките на спиновете. Такъв материал се нарича *антиферомагнетик*. Подреждането на магнитните моменти в антиферомагнитните вещества зависи и от температурата. Под критичната температура всички спинове се построяват в редуваща се последователност, но ако веществото е нагрято над определена температура, която, както и по-рано, се нарича температура на Кюри, посоките на спиновете внезапно стават случайни. Този рязък вътрешен преход може да се наблюдава и върху кривата на специфичната топлоемност. Той се проявява още и в някои особени „магнитни" ефекти. Например съществуването на редуващи се спинове може да се провери посредством разсейване на неутрони от кристал на хром. Неутронът сам по себе си има спин (и магнитен момент), поради което амплитудата на разсейването е различна, в зависимост от това, дали неговият спин е успореден на спина на разсейвателя, или е в противоположна посока. В резултат неутронната интерференционна картина за редуващите се спинове е различна от картината при тяхното случайно разпределение.

Съществува още един вид вещества, при които квантово-механическият ефект води до редуващи се спинове на електроните, но които въпреки това представляват *феромагнетици*, т. е. техният кристал има постоянно резултатно намагнитване. Идеята, лежаща в основата на обяснението на свойствата на такива материали, се илюстрира от схемата на фиг. 37-14. На схемата е показана кристалната структура на минерала, известен под названието шпинел ($MgOAl_2O_3$), който, както е показано това, не представлява магнетик. Този минерал съдържа два вида метални атома — магнезий и алуминий. Ако сега магнезият и алуминият се заменят с магнитни елементи от типа на желязото, т. е. вместо немагнитните атоми се поставят *магнитни*, ще се получи крайно интересен ефект. Нека да наречем единия вид атоми на метала *а*, а другия вид — *b*; необходимо е да разгледаме различните комбинации от силите! Съществува взаимодействие *а—b*, което се старае да насочи спиновете на атома *а* и атома *b* противоположно, защото квантовата механика винаги изисква спиновете да са противоположни (с изключение на тайнствените кристали на желязото, никела и кобалта). След това съществува взаимодействие *а—а*, което се старае да насочи противоположно спиновете на атомите *а*. Освен това има още взаимодействие *b—b*, което се старае да насочи противоположно спиновете на атомите *b*. Разбира се, невъзможно е да се направи всичко противоположно на всичко (*а* да бъде противоположно на *b*, *а* да бъде противоположно на *а* и *b* да бъде противоположно на *b*). Както изглежда, благодарение на раздалечеността на атомите *а* и наличието на атоми кислород (обаче със сигурност ние не знаем защо) се оказва, че взаимодействието *а—b* е по-силно от взаимодействието *а—а* и *b—b*. Буквално природата в този случай се е възпол-



Фиг. 37-14. Кристална структура на минерала шпинел ($MgOAl_2O_3$).

Йоните на Mg^{2+} заемат тетраедричните места и всеки от тях е окръжен от четири йони на кислород; йоните на Al^{3+} заемат октаедричните места и всеки е окръжен от шест йони на кислорода

зувала от решение, в което спиновете на всички атоми *b*, *са успоредни един на друг*, а всички атоми *a също са успоредни един на друг*, но помежду си тези две системи спинове са противоположни. Такова подреждане благодарение на по-силното взаимодействие *a—b* съответствува на най-ниска енергия. В резултат спиновете на всички атоми *a* са насочени нагоре, а спиновете на всички атоми *b* — надолу (разбира се, може и обратно). Но ако *магнитните моменти* на атомите *a* и атомите *b* не са равни един на друг, създава се картината, показана на фиг. 37-13, *в*: материалът може да се окаже спонтанно намагнетизиран, при това той ще бъде феромагнетик, въпреки и малко по-слаб от истинските. Такива материали се наричат ферити. При тях поради очевидни причини наситеното намагнитване не е толкова голямо, както при желязото, така че те са полезни само при слаби магнитни полета. Но те притежават едно много важно преимущество — това са изолатори, т. е. феритите представляват *феромагнитни изолатори*. Вихровите токове, създавани в тях от високочестотни полета, са много малки и благодарение на това феритите може да се използуват, да речем, в микровълнови системи. Микровълновите полета са способни да проникват във вътрешността на такива непроводящи материали, докато в проводниците от типа на желязото това проникване е възпрепятствувано от вихровите токове.

Съществуват още един вид магнитни материали, открити съвсем неотдавна — това са членове от семейство със структурата на ортосиликатите, наричани *гранати*. Това са също кристали, в чиято решетка се съдържат два вида метални атоми; тук отново се срещаме със ситуация, когато двата вида атоми могат да се заменят почти по желание. Между множеството състави, които ни интересуват, има един, който притежава феромагнетизъм. В структурата на граната той съдържа атоми на итрий и желязо и причината за неговия феромагнетизъм е твърде любопитна. Тук отново според квантовата механика съседните спинове са противоположни, така че това е отново затворена система спинове, в която електронните спинове на йоните на желязото са насочени в една страна, а електронните спинове на йоните на итрия — в противоположната. Но атомите на итрия са много сложни. В тях орбиталното движение на електроните внася голям принос в магнитния момент. Приносът на орбиталното движение на итрия е *противоположен* на приноса от спина и освен това той е по-голям от него. По такъв начин, въпреки че квантовата механика, опирайки се на своя принцип на забраната, се стреми да насочи *спиновете* на йоните на итрия противоположно на спиновете на йоните на желязото, резултантният магнитен момент на итрия поради орбиталния ефект се оказва *успореден* на спиновете на йоните на желязото [фиг. 37-13 (*г*)] И това съединение работи като истински феромагнетик.

Друг интересен пример за феромагнетизъм дават някои редкоземни елементи. Тук срещаме още по-големи странности в разположението на спиновете. Тези метали не са феромагнетици, в смисъл че всички спинове в тях са успоредни и не са антиферомагнетици, в смисъл че спиновете на съседните атоми са противоположни. В тези кристали всички спинове в *един слой* са успоредни и лежат в равнината на слоя. В следващия слой всички спинове са отново успоредни един на друг, но гледат вече в малко по-друга посока. В по-следващия слой те отново са насочени в друга страна и т. н. В резултат векторът на локалното намагнитване (в слоевете) се мени по спирала: магнитните моменти на последователните слоеве се завъртат при движение около линия, перпендикулярна на слоя. Интересно е да се опитаме да анализираме какво се получава, когато към такава спирала се приложи поле, да намерим всички усуквания и завъртания, които трябва да стават с всички тези атомни магнитчета. (Някои хора просто са увлечени от теорията на подобни неща!) В природата се срещат не само „плоски“ спирали, но съществуват още случаи, когато посоките на магнитните моменти на последователните слоеве обра-

зуват конус, така че при тях има не само спирална компонента, но и хомогенна феромагнитна компонента в същата посока!

Магнитните свойства на материалите на по-високо ниво, отколкото се занимаваме ние с вас, очароват много физици. Преди всичко от това се увличат хора с практическа насоченост, които обичат да измислят начини за подобряване на разни неща; на тях им прави удоволствие да откриват все по-съвършени и интересни магнитни материали. Откриването на такива материали, като феритите или тяхното приложение, веднага доведе във възторг тези, които търсят нови остроумни пътища да направят нещата по-съвършени. Но има още хора, които намират очарование в тази ужасна сложност, която природата създава само въз основа на няколко фундаментални закона. Въз основа на една и съща обща идея природата е дошла от феромагнетизма на желязото и неговите домени до антиферомагнетизма на хрома, магнетизма на ферите и гранатите, до спиралната структура на редкоземните елементи и крачи все по-далеч и далеч. Колко е приятно да се откриват експериментално всички тези странни явления, скътани в подобни особени вещества! А на физиците-теоретици феромагнетизмът подари цяла редица най-интересни и още нерешени красиви проблеми. Една от тях е защо изобщо съществува феромагнетизмът? Друга е да се изведе статистиката на взаимодействуващите спинове в идеална решетка. Даже ако се пренебрегнат допълнителните усложнения, тези проблеми досега не се поддават на пълно разбиране. Причината, поради която те са така интересни, това е удивителната простота на постановката на задачата: в правилна решетка са дадени множество електронни спинове, взаимодействуващи по такъв и такъв закон; какво ще стане с тях в края на краищата? Леко е да се постави задачата, но пълният анализ от много години все още не се удава. И въпреки че за температури, които не са много близки до точката на Кюри, тя е била анализирана твърде подробно, теорията на внезапния преход в точката на Кюри и досега още чака своето решение.

На края задачата за поведението на системи атомни магнитчета: и феромагнетизмът, и парамегнетизмът, и ядреният магнетизъм са изключително полезни неща за студентите-физици от горните курсове. Върху система спинове може да се въздействува посредством външно магнитно поле и така, и иначе, поради което могат да се измислят множество фокуси с резонанси, процеси на релаксации, спиново ехо и други ефекти. Тази задача служи като прототип за много сложни термодинамични системи с това преимущество, че в парамагнитните материали положението обикновено е много по-просто и изследователите поставят тук с удоволствие експерименти и обясняват явленията теоретично.

Ние завършваме нашето изучаване на електричеството и магнетизма. В глава 1, т. I говорихме за великия път, изминат от времето, когато древните гърци наблюдавали странното поведение на кехлибара и магнитната желязна руда. Но още никъде в нашите дълги и забъркани разсъждения ние не сме обяснили защо, когато натриваме късче кехлибар, върху него възниква заряд. Не сме обяснили и това, защо е намагнитена природната магнитна желязна руда! Вие може да възразите: „Ние просто не успяхме да получим правилен знак.“ Не, работата стои много по-зле. Ако ние все пак бяхме получили правилен знак, както и преди би останал въпросът: защо парченцето магнитна желязна руда в земята се оказва намагнитено? Разбира се, съществува магнитното поле на Земята, но откъде се е взело това магнитно поле на Земята? Ето това в действителност никой не знае и се налага да се задоволяваме само с някои правдоподобни догадки. Така че, както виждате, нашата прехвалена съвременна физика е пълна измама: ние започнахме с желязната руда и янтара, а завършихме с това, че не разбираме достатъчно добре нито едното, нито другото. Затова пък в процеса на изучаването научихме огромен брой удивителни и много полезни за практиката неща!

38

Еластичност

38-1 Закон на Хук

38-2. Хомогенна деформация

38-3 Усукване на прът; вълни на отместване

38-4. Извиване на греда

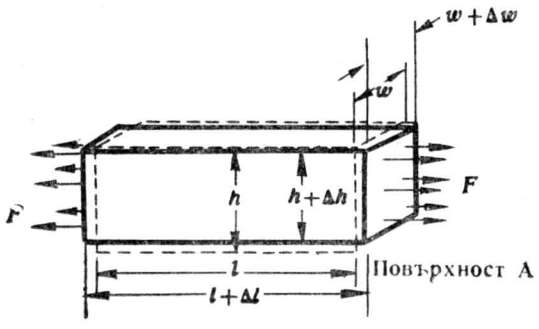
38-5. Надлъжно извиване

Да се повтори: глава 47 (т. I) „Звук, вълново уравнение“

38-1. Закон на Хук

Теорията на еластичността се занимава с поведението на такива тела, които притежават свойството да възстановяват своя размер и форма след премахване на деформиращите сили. В известна степен всички твърди тела притежават тези еластични свойства. Ако имахме време да се занимаваме с този предмет повечко, бихме могли да разгледаме множество въпроси: Поведението на напрегнатите материали, законите на еластичността и общата теория на еластичността, атомния механизъм, определящ еластичните свойства, и на края ограниченията върху законите на еластичността, когато силите стават толкова големи, че възниква пластично протичане и разрушаване. Детайлното разглеждане на всички тези въпроси би искало много повече време от това, с което разполагаме, и поради това ще се наложи да се откажем от някои неща. Например ние няма да обсъждаме въпросите на пластичността и ограниченията върху законите на еластичността (до това ще се докоснем само съвсем накратко, когато ще стане дума за дислокациите в металите). Ние не можем също да обсъдим механизма на еластичността, така че нашето изследване няма да притежава тази пълнота, към която се стремихме в предните глави. Основната цел на лекцията е да ни запознае с някои начини за третиране на такива практически задачи, като например задачата за извиване на гредичка.

Ако натиснете парче материал, то материалът „ще се поддаде“ — той се деформира. При достатъчно малки сили относителното преместване на различните точки от материала е пропорционално на силата. Такова поведение се нарича *еластично*. Ние ще говорим само за такова еластично поведение. Отначало ще напишем фундаменталния закон на еластичността, а след това ще го приложим към няколко различни случая.



Фиг. 38-1 Разтегляне на блокче под действието на хомогенно натоварване

Да си представим, че сме взели правоъгълно блокче с дължина l, ширина w и височина h (фиг. 38,-1). Ако ние го разделим със сила F, неговата дължина се увеличава с Δl. Във всички случаи ще предполагаме, че изменението на дължината представлява малка част от първоначалната дължина. В действителност материалите, подобни на стоманата или дървото, се разрушават още преди изменението на дължината да достигне няколко процента от първоначалната стойност. Опитите показват, че за повечето материали при достатъчно малко удължение силата е пропорционална на удължението

$$F \sim \Delta l. \tag{38.1}$$

Тази зависимост е известна като *Закон на Хук.*

Удължението Δl на блокчето зависи и от неговата дължина. Това може да се покаже със следните разсъждения: ако закрепим заедно две еднакви блокчета от край до край, то върху всяко от тях ще действува една и съща сила и всяко от тях ще се удължи с Δl. Следователно удължението на блокче с дължина $2l$ ще бъде два пъти по-голямо от удължението на блокче със същото напречно сечение, но с дължина l. За да получим величина, която напълно характеризира самия материал и по-малко зависи от формата на образеца, ще оперираме с отношението $\Delta l/l$ (удължението към първоначалната дължина). Това отношение е про-

порционално на силата, но не зависи от l:

$$F \sim \frac{\Delta l}{l}. \tag{38.2}$$

Силата F зависи също от площта на сечението на блокчето. Да предположим, че сме поставили две блокчета странично едно до друго. Тогава за дадено удължение Δl трябва да приложим сила F, към всяко блокче или за комбинацията от две блокчета трябва два пъти по-голяма сила. При дадена стойност на разтеглянето силата трябва да бъде пропорционална на площта на напречното сечение на блокчето A. За да получим закон, в който коефициентът на пропорционалност не зависи от размерите на тялото, ще пишем закона на Хук за правоъгълно блокче във вида

$$F = YA\frac{\Delta l}{l}. \tag{38.3}$$

Константата Y се определя само от свойствата на материала; тя е наречена *модул на Юнг*. (Обикновено модулът на Юнг се означава с буквата E, но ние вече използувахме тази буква за електрическото поле, за енергията и за е. д. н. така че сега по-добре е да вземем друга.)

Силата, *която действува върху единична площ*, се нарича напрежение, а удължаването на участъка, отнесено към неговата дължина, т. е. относителното удължаване се нарича *деформация*. Уравнението (38.3) може да се препише по следния начин:

$$\frac{F}{A} = Y \times \frac{\Delta l}{l} \tag{38.4}$$

Напрежението = (Модулът на Юнг) × (Деформацията).

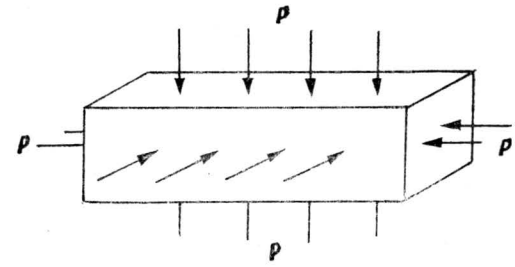
При разтегляне, което се подчинява на закона на Хук, възниква още едно усложнение: ако блокчето материал се *разтегля* по едно направление, то се *свива* под прав ъгъл към разтеглянето. Намаляването на дебелината е пропорционално на самата дебелина и още на отношението $\Delta l/l$. Относителното странично свиване е еднакво както за ширината, така и за височината и обикновено се записва във вида

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\sigma\frac{\Delta l}{l}, \tag{38.5}$$

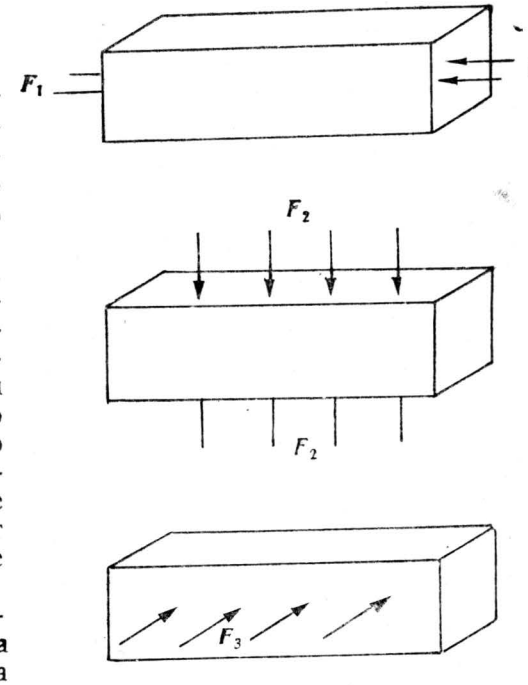
където константата σ характеризира едно ново свойство на веществото и се нарича *отношение на Поасон*. Това число е положително по знак и по-малко от $^1/_2$ по големина. (Това, че константата σ в общия случай трябва да бъде положителна, е „разумно“, но отникъде не следва, че тя *трябва* да бъде именно такава.)

Двете константи Y и σ изцяло определят еластичните свойства на *хомогенния изотропен* (т. е. некристален) материал. В кристалните материали разтеглянето и скъсяването в различни направления може да бъде различно, поради което и еластичните константи могат да бъдат много повече. Временно ние ще ограничим нашите обсъждания с хомогенни и изотропни материали, чиито свойства могат да бъдат описани от константите Y и σ. Както обикновено съществуват множество начини за описване на свойствата. На някои например им се харесва да описват еластичните свойства на материалите с други константи, но винаги се взимат две такива константи и те могат да бъдат свързани с нашите Y и σ.

Последният общ закон, който ни е необходим, това е принципът на суперпозицията. Тъй като двата закона (38.4) и (38.5) са линейни по отношение на силите и преместванията, принципът на суперпозицията ще действува. Ако при даден набор от сили вие получите някакво допълнително преместване, резултантното пре-



Фиг. 38-2. Блокчето под действие на равномерно хидростатическо налягане



Фиг. 38-3. Хидростатичното налягане е равно на суперпозиция на три свивания

местване ще бъде сума от преместванията, които биха се получили при независимото действие на тези набори от сили.

Сега ние имаме всички необходими общи принципи: принципът на суперпозицията и уравненията (38.4) и (38.5), т. е. всичко което е необходимо за описване на еластичността. Впрочем, със същото право би могло да се заяви: Ние имаме законите на Нютон, а това е необходимо за механиката. Или като зададем уравненията на Максвел, имаме всичко необходимо за описване на електричеството. То, разбира се, си е така; от тези принципи вие действително може да получите всичко, защото вашите сегашни математически възможности ви позволяват да отидете достатъчно далеч. Но ние все пак ще разгледаме само някои специални положения.

38-2. Хомогенна деформация

Като първи пример ще разгледаме какво става с правоъгълно блокче при хомогенно хидростатично свиване. Нека поставим блокчето в резервоар с вода. При това ще възникне сила, която ще действува върху всяка стена на блокчето и ще бъде пропорционална на нейната площ (фиг. 38-2). Тъй като хидростатичното налягане е хомогенно, *напрежението* (силата върху единична площ) върху всяка стена на блокчето ще бъде едно и също. Преди всичко да намерим изменението на дължината на блокчето. Това изменение може да се разглежда като сума от измененията на дължините, които биха се получили в трите независими задачи, показани на фиг. 38-3.

Задача 1. Ако приложим към краищата на блокчето налягане p, то деформацията на свиване ще бъде отрицателна и равна на p/Y

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{p}{Y}.$$

Задача 2. Ако подложим на натиск хоризонталните стени на блокчето, деформацията по височина ще бъде $-p/Y$, а съответната деформация в странична посока ще бъде $+\sigma p/Y$. Получаваме

$$\frac{\Delta l_2}{l} = +\sigma\frac{p}{Y}.$$

Задача 3. Ако приложим към страните на блокчето налягане p деформацията от налягането отново ще бъде p/Y, но сега трябва да определим деформацията на дължината. За тази цел е необходимо да умножим страничната деформация с $-\sigma$. Страничната деформация е

$$\frac{\Delta w}{w} = -\frac{p}{Y},$$

така че

$$\frac{\Delta l_3}{l} = +\frac{\sigma p}{Y}.$$

Комбинирайки резултатите от тези три задачи, т. е. като запишем Δl като $\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$, получаваме

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{p}{Y}(1-2\sigma). \tag{38.6}$$

Задачата, разбира се, е симетрична по всичките три направления, поради което

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\frac{p}{Y}(1-2\sigma). \tag{38.7}$$

Интересно е също да се намери изменението на *обема* при хидростатично налягане. Тъй като $V = lwh$, то за малки премествания можем да запишем

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta w}{w} + \frac{\Delta h}{h}.$$

Използувайки (38,6) и (38.7), получаваме

$$\frac{\Delta V}{V}=-3\frac{p}{Y}(1-2\sigma) \qquad (38.8)$$

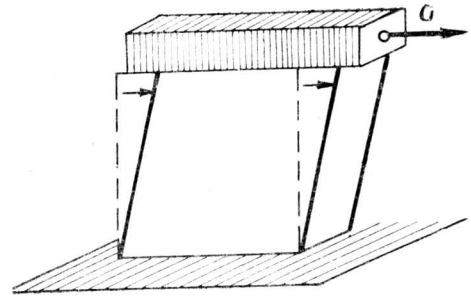
Намират се хора, които наричат $\Delta V/V$ *обемна деформация* и пишат

$$p=-K\frac{\Delta V}{V}.$$

Обемното напрежени p (хидростатичното налягане) е пропорционално на предизвиканата от него обемна деформация — отново закона на Хук. Коефициентът K се нарича *обемен модул* и е свързан с другите константи със зависимостта

$$K=\frac{Y}{3(1-2\sigma)}. \qquad (38.9)$$

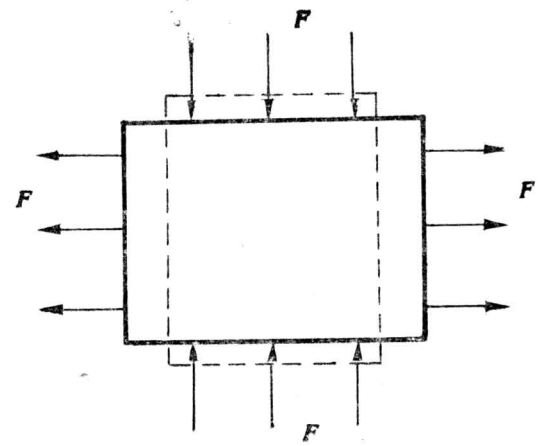
Тъй като коефициентът K представлява известен практически интерес, то в много справочници вместо Y и σ се дават Y и K. Но ако вие трябва да знаете σ, винаги можете да получите неговата стойност от формулата (38.9). От тази формула се вижда също, че коефициентът на Поасон σ трябва да бъде по-малък от 1/2. Ако това не би било така, то обемният модул K щеше да бъде отрицателен и материалът щеше да се разширява при увеличаване на налягането. Това би позволило да се добива механична енергия от всяко кубче, т. е. би означавало, че кубчето се намира в неустойчиво равновесие. Ако то би почнало да се разширява, разширението би продължавало от само себе си с освобождаване на енергия.



Фиг. 38-4. Хомогенно плъзгане

Да видим какво ще се получи, ако приложим към някакъв предмет „косо“ напрежение. Под косо напрежение разбираме такова въздействие, каквото е показано на фиг. 38-4. Като предварителна задача да видим каква ще бъде деформацията на кубче под действието на силите, показани на фиг. 38-5. Отново може да разделим тази задача на две: вертикално налягане и хоризонтално разтегляне. Означавайки с A площта на стените на кубчето, получаваме за изменението на хоризонталната дължина

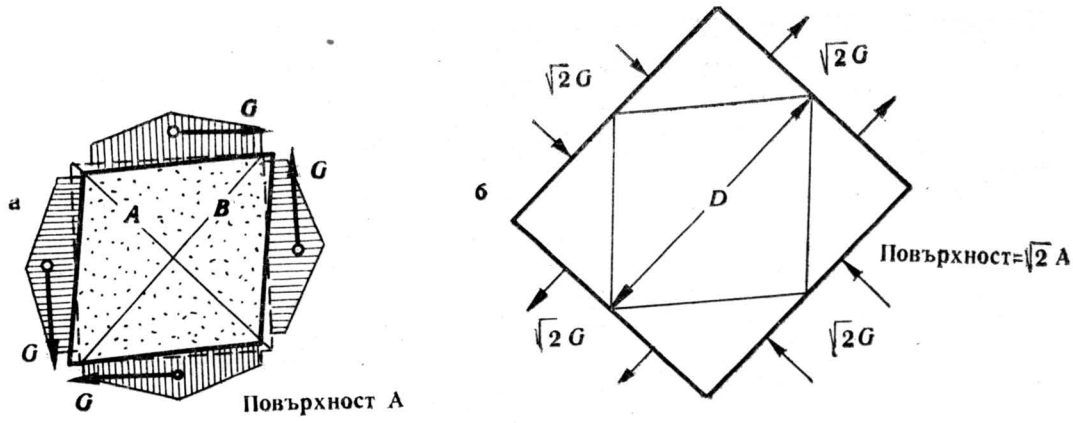
$$\frac{\Delta l}{l}=\frac{1}{Y}\frac{F}{A}+\sigma\frac{1}{Y}\frac{F}{A}=\frac{1+\sigma}{Y}\frac{F}{A}. \qquad (38.10)$$



Фиг. 38-5. Действие на свиващите сили, които налягат върху горната и долната стени и на равни по големина разтеглящи сили от двете страни

Изменението на височината по вертикалата е равно просто на този израз с обратен знак.

Да предположим сега, че имаме същото кубче и да го подложим на действието на силите, показани на фиг. 38-6 *а*. Да отбележим сега, че всички тези сили трябва да бъдат равни, защото върху тялото не трябва да действува никакъв момент на сили и то трябва да се намира в равновесие. (Подобни сили трябва да действуват също и в случая, показан на фиг. 38-4, тъй като кубчето се намира в равновесие. Те се осигуряват от това, че кубчето е „залепено“ за масата.) При такива условия се казва, че кубчето се намира в състояние на чисто хлъзгане. Но обърнете внимание, че ако разрежем кубчето с равнини под ъгъл 45°, да речем по диагонала A на фиг. 38-6*а*, пълната сила, действуваща в тази равнина, ще бъде нормална към нея и равна на $\sqrt{2}\,G$. Площта, върху която действува тази сила, е $\sqrt{2}\,A$; следователно нормалното към тази равнина напрежение ще бъде просто G/A. Точно така, ако вземем равнина, наклонена под ъгъл 45° на другата страна, т. е. по диагонала B, ще видим че върху нея действува нормално притискащо напрежение, равно на — G/A. От всичко това е ясно, че напрежението при „чистото свиване“ е еквивалентно на комбинация от разтеглящо и свиващо напрежения, насочени под прав ъгъл едно към друго и под ъгъл 45° към първоначалните стени на кубчето. Вътрешното напрежение и деформациите ще бъдат същите, както и в голямото кубче материал, под действието на сили, показани на фиг. 38-6,*б*. Но тази задача



Фиг. 38-6. Двете двойки сили на плъзгане (*а*) създават същото напрежение, каквото и свиващо-разтеглящите сили (*б*)

ние вече решихме. Изменението на дължината на диагонала се дава с уравнението (38.10):

$$\frac{\Delta D}{D}=\frac{1+\sigma}{Y}\frac{G}{A}. \tag{38.11}$$

(Единият диагонал се скъсява, а другият се удължава.)

Често деформацията на хлъзгане се описва удобно с помощта на ъгъла на „изкривяването“ на кубчето θ, показано на фиг. 38-7. От геометрията на фигурата виждате, че хоризонталното отместване δ на горния край е равно на $\sqrt{2}\,\Delta D$, така че

$$\theta=\frac{\delta}{l}=\frac{\sqrt{2}\,\Delta D}{l}=2\frac{\Delta D}{D}. \tag{38.12}$$

Напрежението на отместването g се определя като отношение на тангенциалната сила, действуваща върху стената към площта на стената $g=G/A$. Като използуваме уравнението (38.11), получаваме от (38.12):

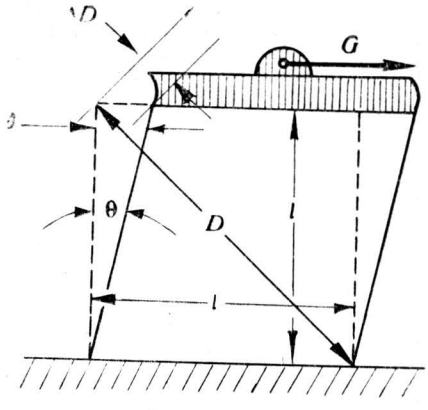
$$\theta=2\frac{1+\sigma}{Y}g.$$

Или ако напишем това във формата „напрежението = константа $\times$ деформацията“,

$$g=\mu\theta. \tag{38.13}$$

Коефициентът на пропорционалност μ се нарича *модул на отместването* (или понякога коефициент на твърдостта). Ето как се изразява той посредством Y и σ:

$$\mu=\frac{Y}{2(1+\sigma)}. \tag{38.14}$$



Фиг. 38-7. Напрежението на плъзгантео θ е равно на $2\Delta D/D$

Между другото модулът на отместването трябва да бъде положителен, иначе бихме могли да получим енергия от самоволното отместване на кубчето. От уравнението (38.14) е очевидно, че константата σ трябва да бъде по-голяма от —1. Сега знаем, че σ е заключена между —1 и 1/2, но на практика обаче тя винаги е по-голяма от нула. Като последен пример за състояние от подобен тип, когато напрежението е постоянно по целия материал, нека разгледаме задачата за блокче, което се разтегля и в същото време е закрепено така, че *странично свиване* е невъзможно. (Технически е малко по-лесно да се свива блокчето и да се удържат неговите страни от „раздуване“, но всъщност това е една и съща задача.) Какво става при това? Върху блокчето трябва да действуват странични сили, които предотвратяват изменението на неговата дебелина — сили които ние не знаем непосредствено, но които трябва да пресметнем. Задача от същия вид сме реша-

вали вече, но само че с малко по-друга алгебра. Представете си сили, които действуват по всичките три страни, както е показано на фиг. 38-8. Ние ще пресметнем изменението на размерите и ще подберем такива напречни сили, че ширината и височината да остават постоянни. Като следваме обичайните разсъждения, получаваме за трите напрежения

$$\frac{\Delta l_x}{l_x}=\frac{1}{Y}\frac{F_x}{A_x}-\frac{\sigma}{Y}\frac{F_y}{A_y}-\frac{\sigma}{Y}\frac{F_z}{A_z}=\frac{1}{Y}\left[\frac{F_x}{A_x}-\sigma\left(\frac{F_y}{A_y}+\frac{F_z}{A_z}\right)\right], \quad (38.15)$$

$$\frac{\Delta l_y}{l_y}=\frac{1}{Y}\left[\frac{F_y}{A_y}-\sigma\left(\frac{F_x}{A_x}+\frac{F_z}{A_z}\right)\right], \quad (38.16)$$

$$\frac{\Delta l_z}{l_z}=\frac{1}{Y}\left[\frac{F_z}{A_z}-\sigma\left(\frac{Fz}{A_x}+\frac{F_y}{A_y}\right)\right]. \quad (38.17)$$

Но тъй като по условие Δl_y и Δl_z са равни на нула, уравненията (38.16) и (38.17) дават две зависимости, които свързват F_y и F_z с F_x. Като ги решим, съвместно намираме

$$\frac{F_y}{A_y}=\frac{F_z}{A_z}=\frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{F_x}{A_x}, \quad (38.18)$$

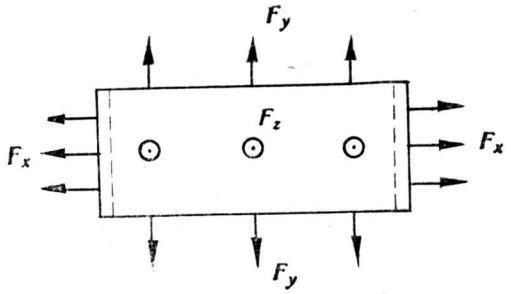
а като заместим (38.18) в (38.15), получаваме

$$\frac{\Delta l_x}{l_x}=\frac{1}{Y}\left(1-\frac{2\sigma^2}{1-\sigma}\right)\frac{F_x}{A_x}=\frac{1}{Y}\left(\frac{1-\sigma-2\sigma^2}{1-\sigma}\right)\frac{F_x}{A_x}. \quad (38.19)$$

Тази зависимост често може да се срещне „преобърната“ и с преобразуван квадратичен полином по σ, т. е.

$$\frac{F}{A}=\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}Y\frac{\Delta l}{l}. \quad (38.20)$$

Когато удържате страните, модулът на Юнг се умножава по някаква сложна функция от σ. От уравнението (38.19) може веднага да се види, че множителят пред Y е винаги по-голям от единица. Много по-трудно е да се разтегли блокчето, когато неговите стени се фиксират. Това означава също, че блокчето става по-твърдо, когато неговите странични стени са закрепени, отколкото когато те са свободни.



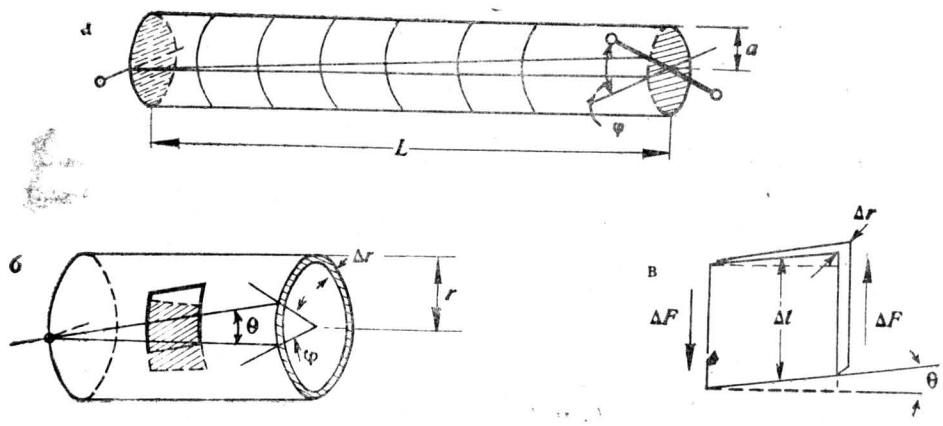
Фиг. 38-8. Разтегляне без скъсяване на страничния размер

38-3. Усукване на прът; вълни на отместването

Да се обърнем сега към по-сложния пример, когато различните части от материала са напрегнати различно. Да разгледаме усукан прът — да речем вал, който задвижва някаква машина, или кварцова нишка за окачване, използувана в точните прибори. От опитите с торзионното махало вие знаете, че моментът на силите, който действува върху усукващ се прът, е пропорционален на ъгъла, при това коефициентът на пропорционалност очевидно зависи от дължината на пръта, неговия радиус и свойствата на материала. Но по какъв начин — ето в какво е въпросът? Сега ние сме в състояние да отговорим на този въпрос: просто необходимо е малко да вникнем в геометрията.

На фиг. 38-9,*а* е показан цилиндричен прът с дължина L и радиус a, единият от краищата на който е усукан на ъгъл φ спрямо другия. Ако искаме да свържем деформацията с това, което е вече известно, прътът може да се представи като състоящ се от множество цилиндрични обвивки и да си изясним какво става във всяка една от тези обвивки. Да започнем с разглеждане на тънък и къс цилиндър с радиус r (по-малък от a) и дебелина Δr, както е показано на фиг. (38-9, *б*). Ако сега разглеждаме едно парченце вътре в този цилиндър, което първоначално е било малко квадратче, можем да забележим, че то се е превърнало в паралелограм. Всеки елемент от цилиндъра се отмества, а ъгълът на отместването θ е

$$\theta=\frac{r\varphi}{L}.$$



Фиг. 38-9. Усукване на цилиндричен прът (а), усукване на цилиндричен слой (б) и плъзгане на всяка малка частица в слоя (в)

Поради това напрежението от отместването в материала ще бъде [от уравнение (38.13)]

$$g=\mu\theta=\mu\frac{r\varphi}{L}. \tag{38.21}$$

Режещото напрежение е равно на тангенциалната сила ΔF, действуваща върху края на квадратчето, разделена на неговата площ $\Delta l\,\Delta r$ (вж. фиг. 38-9, *в*):

$$g=\frac{\Delta F}{\Delta l\Delta r}.$$

Силата ΔF, която действува върху края на това квадратче, създава спрямо оста на пръта момент на силата $\Delta\tau$, равен на

$$\Delta\tau=r\Delta F=rg\,\Delta l\,\Delta r. \tag{38.22}$$

Пълният момент τ е равен на сумата от тези моменти по целия периметър на цилиндъра. Като съберем достатъчен брой такива части, така че всичките Δl да съставят $2\pi r$, намираме, че пълният момент на силата за куха тръба е

$$rg\,(2\pi r)\,\Delta r. \tag{38.23}$$

Или като използуваме уравнението (38.21),

$$\tau=2\pi\mu\frac{r^3\Delta\, r\,\varphi}{L}. \tag{38.24}$$

Получихме, че твърдостта τ/φ на куха тръба по отношение на усукването е пропорционална на куба на радиуса r и на дебелината Δr и е обратно пропорционална на нейната дължина L.

Сега представете си, че прътът е направен от цяла серия такива концентрични тръби, всяка от които е усукана на ъгъл φ (въпреки че вътрешните напрежения във всяка тръба са различни). Пълният момент е равен на сумата от моментите, необходими за усукването на всяка обвивка, така че за твърд прът

$$\tau=2\pi\mu\frac{\varphi}{L}\int r^3\,dr,$$

където интегралът се взима от 0 до a — радиусът на пръта. След интегрирането получаваме

$$\tau=\mu\frac{\pi a^4}{2L}\varphi. \tag{38.25}$$

Ако усучем пръта, неговият момент се оказва пропорционален на ъгъла и на *четвъртата степен* на диаметъра: прът с два пъти по-голям радиус е шестнадесет пъти по-твърд спрямо усукване.

Преди да се разделим с усукването, да разгледаме приложението на теорията към една интересна задача — вълни на усукването. Да вземем дълъг прът и неочаквано да завъртим единия му край; по протежението на прът, както е показано на фиг. 38-10, *а* ще тръгне вълна на усукването. Това явление е още по-интересно от простото статическо усукване. Да видим, можем ли да разберем и как става това.

Нека z е разстоянието от някоя точка до основата на прът. За статическото усукване момента на силата по цялото протежение на прът е един и същи и пропорционален на φ/L — пълният ъгъл на въртене на пълна дължина. Но в нашата задача е важна локалната деформация на усукване, която както вие веднага ще разберете, е равна на $\partial\varphi/\partial z$. Ако усукването на прът е неравномерно, уравнението (38.25) трябва да се замени със следното

$$\tau(z)=\mu\frac{\pi a^4}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{38.26}$$

Да видим сега какво става с елемент с дължина Δz, който е показан в увеличен мащаб на фиг. 38-10, *б*. На края 1 на малък отрязък от прът действува момент $\tau(z)$, а на края 2 друг момент на силата $\tau(z+\Delta z)$. Ако величината Δz е достатъчно малка, можем да използуваме разлагане в тейлъров ред и като запазим само два члена, да напишем

$$\tau(z+\Delta z)=\tau(z)+\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)\Delta z. \tag{38.27}$$

Пълният момент на силата $\Delta\tau$, който действува върху малкия отрязък от прът между z и Δz, е равен на разликата между $\tau(z)$ и $\tau(z+\Delta z)$ или $\Delta\tau=(\partial\tau/\partial z)\Delta z$. Като диференцираме уравнението (38-26), получаваме

$$\Delta\tau=\mu\frac{\pi a^4}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\Delta z. \tag{38.28}$$

Действието на този пълен момент трябва да предизвика ъглово ускорение на отрязъка от прът. Нейната маса е

$$\Delta M=(\pi a^2\Delta z)\rho,$$

където ρ е плътността на материала. В гл. 19, т. I намерихме, че инерчният момент на кръгов цилиндър е $mr^2/2$; като означим инерчният момент на нашия отрязък с ΔI, получаваме

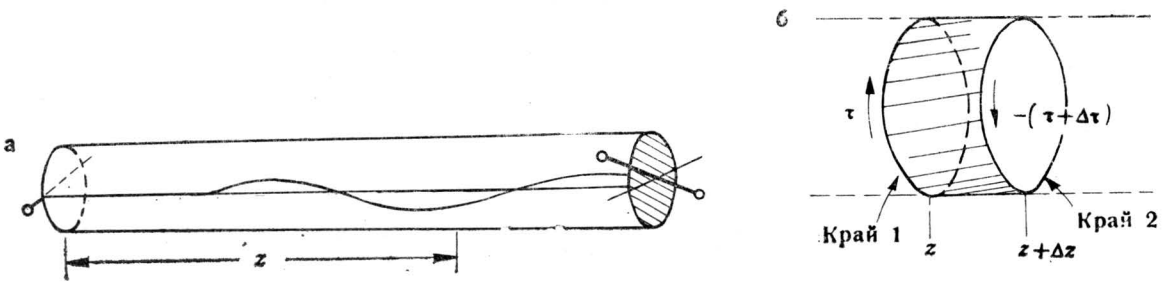
$$\Delta I=\frac{\pi}{2}\rho a^4\Delta z. \tag{38.29}$$

Законът на Нютон ни говори, че моментът на силата е равен на произведението от инерчния момент по ъгловото ускорение или

$$\Delta\tau=\Delta I\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{38.30}$$

Като съберем сега всичко заедно, намираме

$$\mu\frac{\pi a^4}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\Delta z=\frac{\pi}{2}\rho a^4\Delta z\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$



Фиг. 38-10. Вълна на усукване в прът (*а*) и елемент на обема на прът (*б*)

или

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0. \tag{38.31}$$

Вие би трябвало вече да сте познали какво е това: това е едномерно вълнево уравнение. Получихме, че вълната на усукването се разпространява по пръта със скорост

$$C_{\text{усукване}}=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{38.32}$$

Колкото е *по-плътен* прътът при една и съща твърдост, толкова по-бавно се движи вълната, а колкото е по-твърд, толкова по-бързо бяга вълната. Нейната скорост не зависи от диаметъра на пръта.

Вълните на усукването представляват частен случай на вълните на отместване. Вълните на отместването в общия случай са такива вълни, при които деформацията не изменя обема на която и да е част от средата. Във вълните на усукване срещаме особено разпределение на напреженията на отместване — те са разпределени по кръг. Но при всяко разпределение на напреженията на отместване вълните ще се разпространяват с една и съща скорост, която се определя от формулата (38.32). Сеизмолозите например са открили, че такива вълни на отместване се разпространяват и във вътрешността на Земята.

В света на еластичните явления е възможен и друг вид вълни в твърд материал. Ако вие чукнете по нещо, можете да възбудите „надлъжни“ вълни, така наречените вълни на „свиване“. Те са подобни на звуковите вълни във въздуха или във водата, т. е. преместването на веществото в тях става в същата страна, в която се разпространява вълната. (Върху повърхността на еластично тяло могат да се разпространяват и други видове вълни, наричани „вълни на Релей“. Деформацията в тях не е нито надлъжна, нито напречна. Обаче ние нямаме време да говорим за тях по-подробно.)

Щом като засегнахме въпроса за вълните, то каква е скоростта на вълните на чистото свиване в *голямо* твърдо тяло, подобно на Земята? Аз казах „голямо“, защото скоростта на звука в масивно тяло е различна от скоростта, свойствена да речем на тънък прът. Под масивно тяло разбирам тяло, чийто напречни размери са много по-големи от дължината на звуковата вълна. Поради това, като натиснем такъв обект, можем да констатираме, че той не се „раздува“ в страни. Той може да се свива само в едно направление. За щастие обаче ние вече разгледахме един специален случай на свиване на „притиснат“ еластичен материал, а в глава 47 (т. I) ние се запознахме освен това със скоростта на звука в газ. Като разсъждаваме така, както и по-горе, можем да се убедим, че скоростта на звука в твърдо тяло е $\sqrt{Y'/\rho}$, където Y' е „напречният модул“, т. е. налягането, разделено на относителното изменение на дължината (за случая на „притиснат“ прът). Това е равно просто на отношението на $\Delta l/l$ към F/A, получено вече от нас в уравнението (38.20) Следователно скоростта на надлъжните вълни се определя от израза

$$C^2_{\text{надл}}=\frac{Y'}{\rho}=\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{Y}{\rho}. \tag{38.33}$$

Тъй като стойността на σ е заключена между 0 и 1/2, модулът на отместването μ е по-малък от модула на Юнг Y, а Y' освен това е по-голямо от Y, така че

$$\mu<Y<Y',$$

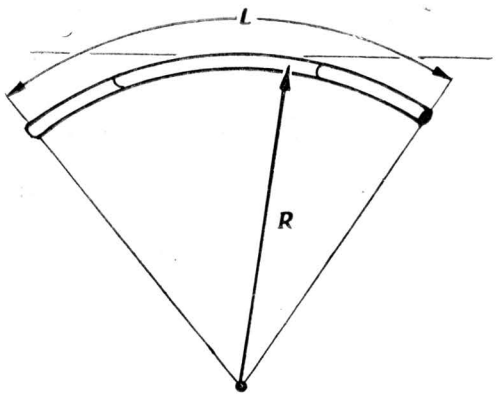
Това означава, че надлъжните вълни се разпространяват по-бързо, отколкото вълните на отместването. Един от най-точните начини за определяне на еластичните константи на веществото се основава на измерването на плътността на материала и скоростта на двата вида вълни. От тази информация могат да се полу-

чат както Y, така и σ. Между другото именно измервайки разликата във времето на идването на двата вида вълни от земетресението, сеизмолозите само по сигналите, приети от една станция, могат да установят разстоянието до епицентъра.

38-4. Огъване на греда

Да разгледаме сега друг практически въпрос — огъване на греда, прът или блокче. На какво са равни силите, необходими за огъването на греда с произволно напречно сечение? Ние ще определим тези сили за прът с кръгло сечение, но отговорът ще бъде валиден за прът с всякаква форма. За да спестим време, тук-там ще опростим нещата така, че теорията, която ще развием, ще бъде само приблизителна. Нашите резултати ще бъдат верни само при условие че радиусът на огъването е много по-голям от дебелината на гредата.

Представете си, че сте хванали за двата края права гредичка и сте я извили, както е показана на фиг. 38-11. Какво става вътре в гредата? Щом като тя е изкривена, значи материалът от вътрешна страна на извивката е свит, а от външната страна разтеглен. Но има някаква повече или по-малко успоредна на оста на гредата повърхнина, която не е нито свита, нито разтеглена. Тя се нарича неутрална повърхнина. Както се вижда, тази повърхнина минава някъде „по средата“ на напречното сечение. Може да се покаже (но аз няма да правя това тук), че за слабо огъване на проста греда неуралната повърхнина минава през „центъра на тежестта“ на напречното сечение. Но това е валидно само за „чисто“ огъване, т. е. когато прътът не се разтегля и не се свива като цяло.



Фиг. 38-11. Извита греда

При чисто огъване всеки тънък напречен отрязък от гредата е деформиран (фиг. 38-12, *а*). Материалът под неутралната повърхнина изпитва деформация на свиване, която е пропорционална на разстоянието от неутралната повърхнина, а материалът над нея е разтеглен също пропорционално на разстоянието от неутралната повърхнина. Следователно надлъжното удължение Δl е пропорционално на височината Y. Коефициентът на пропорционалност е равен просто на дължината l, делена на радиуса на кривината на гредата (вж. фиг. 38-12):

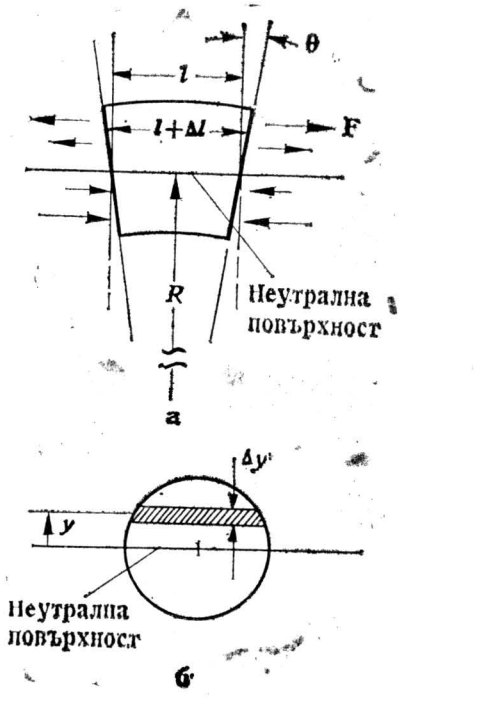
$$\frac{\Delta l}{l}=\frac{y}{R}.$$

Така че напрежението, т. е. силата, действуваща върху единица площ в известна малка ивица, близо до y е също пропорционална на разстоянието от неутралната повърхнина

$$\frac{\Delta F}{\Delta A}=Y\frac{y}{R}. \tag{38.34}$$

Сега да разгледаме тези сили, които биха довели до подобна деформация. Силите, които действуват върху малкия отрязък, показан на фиг. 38-12, са дадени на същата фигура. Ако вземем което и да е напречно сечение, действуващите върху него сили са насочени в една страна над неутралната повърхнина и в противоположната под нея. Получава се двойка сили, която създава „огъващ момент“ $\mathcal{M}$, под който разбираме момента на силите относно неутралната линия. Интегрирайки произведението от силата по разстоянието от неутралната повърхнина, можем да пресметнем пълния момент върху една от стените на отрязъка на фиг. 38-12

$$\mathcal{M}=\int_{\substack{\text{напр.}\\ \text{сечение}}} y\,dF. \tag{38.35}$$



Фиг. 38-12. Малка отсечка от извитата греда (*а*) и напречно сечение на гредата (*б*)

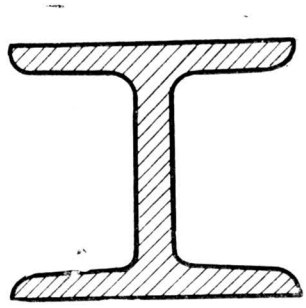
Съгласно (38.34) $dF=Y(y/R)\,dA$, така че

$$\mathcal{M}=\frac{Y}{R}\int y^2\,dA.$$

Но интервалът от y^2dA може да се нарече „инерчен момент“ на геометрическото напречно сечение спрямо хоризонталната ос, която минава през неговия „център на масите“[1]; ние ще го означаваме с I, т. е.

$$\mathfrak{M} = \frac{YI}{R} \tag{38.36}$$

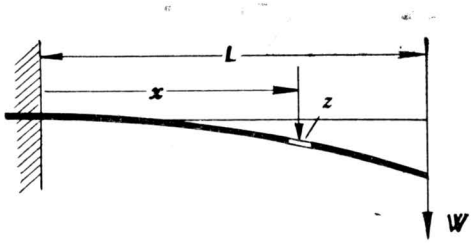
$$I = \int y^2 dA. \tag{38.37}$$



Фиг. 38-13. Двойно Т-образна греда

Уравнението (38.36) ни дава зависимостта между огъващия момент $\mathfrak{M}$ и кривината на гредата $1/R$. „Твърдостта“ на гредата е пропорционална на Y и инерчния момент I. С други думи, ако искате да направите колкото е възможно по-твърда някаква греда, да речем от алуминий, трябва да поставите колкото е възможно повече вещество, колкото е възможно по-далеч от оста, спрямо която се взима инерчният момент. Но това не трябва да се довежда до крайност, тъй като тогава гредата няма да се изкривява така, както предположихме: тя ще се прегъне или усуче и отново ще стане слаба. Ето защо гредите за скелите се правят във формата на буквата I или H (фиг. 38-13).

Като пример за прилагане на нашето уравнение (38.36) за гредата ще пресметнем отклонението на конзолна греда от действието на сила W, която е съсредоточена върху свободния й край (фиг. 38-14). (Конзолната греда е закрепена в единия край, който е зазидан в стената.) Каква ще бъде тогава формата на гредата? Да означим отклонението на разстояние x от закрепения край с z; ние искаме да намерим $z(x)$. Ще пресмятаме само малки отклонения. Както знаете от курса по математика, кривината $1/R$ на всяка крива $z(x)$ се дава с израза



Фиг. 38-14. Конзолна греда, натоварена в края

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2z/dx^2}{[1+(dz/dx)^2]^{3/2}}. \tag{38.38}$$

Нас ни интересуват само малките огъвания (които са обичайни в инженерните конструкции), поради това можем да пренебрегнем квадрата на производната $(dz/dx)^2$ спрямо единицата и да смятаме, че

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2z}{dx^2}. \tag{38.39}$$

Необходимо е още да знаем огъващия момент $\mathfrak{M}$. Той представлява функция от x, тъй като във всяко напречно сечение е равен на момента спрямо неутралната ос. Ще пренебрегнем теглото на самата греда и ще имаме предвид само силата W, която действува надолу върху свободния край. (Ако искате, можете сами да отчетете теглото.) При това огъващият момент на разстояние x е

$$\mathfrak{M}(x) = W(L-x),$$

защото това е моментът на силата спрямо точката x, с който действува товарът W, т. е. теглото, което гредата трябва да поддържа. Получаваме

$$W(L-x) = \frac{YI}{R} = YI\frac{d^2z}{dx^2}$$

или

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{W}{YI}(L-x). \tag{38.40}$$

Можем да интегрираме това уравнение без никакви фокуси и да получим

$$z = \frac{W}{YI}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right), \tag{38.41}$$

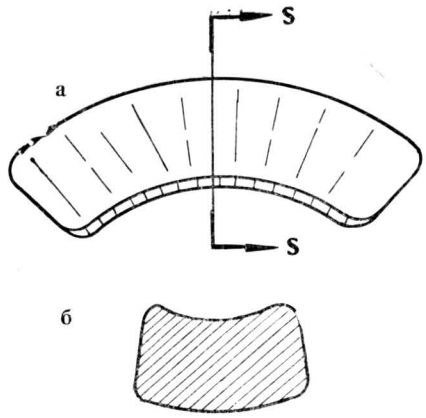
[1] Това именно е инерчният момент на пластинка с единична плътност и единична площ на сечението.

като използуваме предварително нашето предположение, че $z(0)=0$ и че dz/dx в точката $x=0$ също е равно на нула. Това именно са граничните условия. А отклонението в края ще бъде

$$z(L)=\frac{W}{YI}\frac{L^3}{3}, \tag{38.42}$$

т. е. отклонението нараства пропорционално на куба на дължината на гредата.

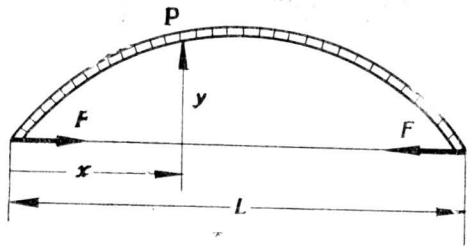
При извода на нашата приблизителна теория предполагахме, че напречното сечение на гредата не се изменя при огъване. Когато дебелината на гредата е малка в сравнение с радиуса на кривината, напречното сечение се изменя много малко и всичко е наред. Обаче в общия случай тези ефекти не може да се пренебрегнат — прегънете с пръсти канцеларска гумичка и сами ще се убедите в това. Ако първоначално напречното сечение е било правоъгълно, то, като огънете гумичката, ще видите как тя изтънява в средата (фиг. 38-15). Това става така, защото в съответствие с отношението на Поасон при свиването на основите на материала той се раздува встрани. Гумичката може много лесно да се огъне или разтегли, но тя донякъде напомня течността в това отношение, че е много трудно да се измени нейният обем. Това именно се проявява при огъването на гумичката. За несвиваемите материали отношението на Поасон би било точно 1/2, за гумичката то е близко до тази стойност.



Фиг. 38-15. Извита гумичка (*а*) и нейното напречно сечение (*б*)

38-5. Надлъжно огъване

Сега ще използуваме нашата теория, за да разберем какво става при надлъжно огъване на греда, опора или прът. Да разгледаме това, което е показано на фиг. 38-16. Тук прътът, обикновено прав, се удържа огънат от двете противоположни сили, които налягат върху неговите краища. Да намерим формата на пръта и големината на силата, действуващи върху краищата.



Фиг. 38-16. Надлъжно извита греда

Нека отклонението на пръта от правата линия между краищата бъде $y(x)$, където x е разстоянието от единия край. Огъващият момент $\mathfrak{M}$ в точката P на фигурата е равен на силата F, умножена по рамото, перпендикулярно на направлението на y

$$\mathfrak{M}(x)=Fy. \tag{38.43}$$

Като използуваме израза за момент (38.36), имаме

$$\frac{YI}{R}=Fy. \tag{38.44}$$

При малки отклонения можем да смятаме, че $1/R=-d^2y/dx^2$ (отрицателният знак е избран, защото кривината е насочена надолу). Оттук

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{F}{YI}y, \tag{38.45}$$

т. е. появи се диференциалното уравнение за синуса. Следователно за малки отклонения кривата на такъв надлъжно огънат прът представлява синусоида. „Дължината на вълната“ λ на тази синусоида е два пъти по-голяма от разстоянието L между краищата. Ако огъването не е голямо, тя е равна просто на удвоената дължина на неогънатия прът. По такъв начин се получава кривата

$$y=K\sin\frac{\pi x}{L}.$$

Като вземем втората производна, намираме

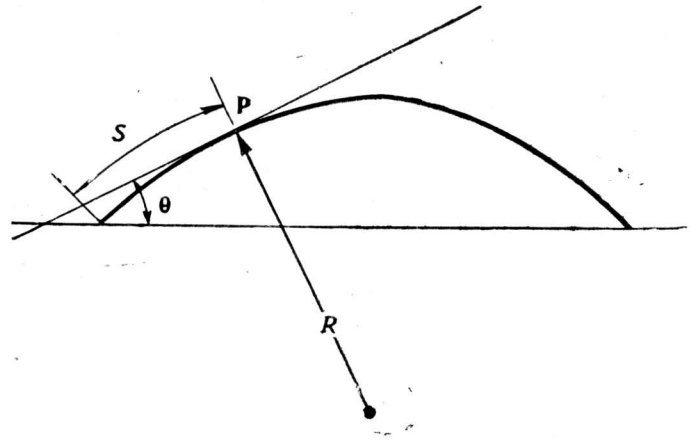
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\pi}{L^2}y.$$

Сравнявайки това с (38.45), виждаме, че силата е

$$F=\pi^2\frac{YI}{L^2}. \tag{38.46}$$

За малко надлъжно огъване силата не зависи от преместването y.

Физически се получава ето какво. Ако силата F е по-малка от определената от уравнението (38.46), никакво надлъжно огъване не се получава. Но ако тя е поне малко по-голяма от тази сила, прътът внезапно и много силно се огъва, т. е. под действието на сила, надвишаваща критичната стойност π^2YI/L^2 (често наричана „сила на Ойлер"), прътът ще се „огъне". Ако разместите на втория етаж от зданието такъв товар, че натоварването върху поддържащата колона надхвърли силата на Ойлер, зданието ще рухне. Друга област, където надлъжно огъващите сили са много важни — това са космическите ракети. От една страна, ракетата трябва да издържа цялото свое тегло на стартовата площадка и да понесе напреженията през време на ускоряването, а от друга, е много важно теглото на цялата конструкция да се сведе до минимум, така че полезният товар и полезната мощност на двигателите да са колкото е възможно по-големи.



Фиг. 38-17. Координати S и θ върху кривата на надлъжно извита греда

Фактически превишаването на силата на Ойлер съвсем не означава, че след това прътът ще се разруши напълно. Когато отклонението стане голямо, силата благодарение на члена $(dz/dx)^2$, който пренебрегнахме в уравнението (38.38), ще бъде всъщност по-голяма от пресметнатата. За да намерим силата при голямо надлъжно огъване на пръта, трябва да се върнем към точното уравнение (38.44), което получихме, преди да използуваме приближената връзка между R и y. Уравнението (38.44) има твърде прости геометрични свойства*. То се решава малко по-сложно, но затова пък е много по-интересно. Вместо да описваме кривата чрез x и y, можем да използуваме две нови променливи: S — разстоянието по кривата и θ — наклона на допирателната към кривата (фиг. 38.17). Тогава кривината ще бъде равна на скоростта на изменението на ъгъла с разстоянието

$$\frac{1}{R}=\frac{d\theta}{dS}.$$

Поради това точното уравнение (38.44) може да се запише във вида

$$\frac{d\theta}{dS}=-\frac{F}{YI}y.$$

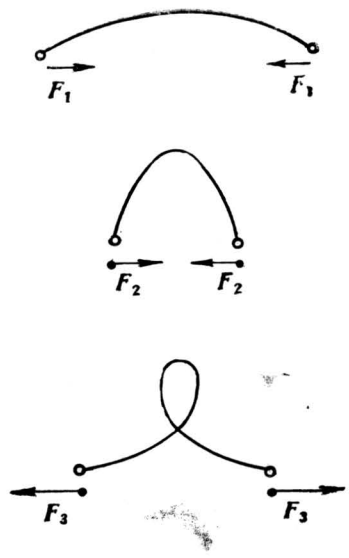
* Между другото, точно такова уравнение възниква и в други физически ситуации — например в менискуса на повърхността на течност, която се намира между две паралелни стени и, поради това можем да използуваме и там същото геометрическо разглеждане.

След като вземем производна по S от това уравнение и заменим dy/ds със $\sin\theta$, получаваме

$$\frac{d^2\theta}{dS^2} = -\frac{F}{YI}\sin\theta. \tag{38.47}$$

(Ако ъглите θ са малки, отново идваме до уравнението (38.45) и както изглежда, всичко е в ред.)

Не зная дали вие още можете да се удивлявате, но уравнението (38.47) се получи точно същото, както и за люлеенето на махалото с голяма амплитуда (разбира се, като F/YI се замени с друга константа). Още по-рано в глава 9 (т. I) ние научихме как се намират решения на това уравнение посредством числени методи.[1] В отговор вие ще получите очарователна крива. На фиг. 38-18 са показани три криви за различни стойности на константата F/YI.



Фиг. 38-18. Форми на надлъжно извит прът

[1] Това решение може да се изрази също чрез особени функции, наричани „елиптични функции на Якоби", които веднаж завинаги са пресметнати и табулирани.

39

Еластични материали

39-1. Тензор на деформацията

39-2. Тензор на еластичността

39-3. Движение в еластично тяло

39-4. Нееластично поведение

39-5. Пресмятане на еластичните константи

39-1. Тензор на деформацията

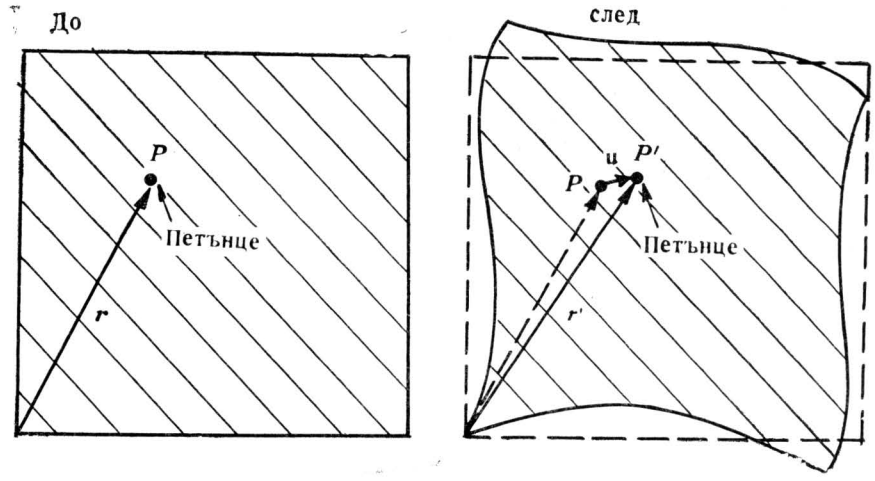
В предната глава говорихме за деформации на еластични тела в прости случаи. В тази глава ще видим какво може да става във вътрешността на еластичен материал в общия случай. Как да се опишат условията на напрежението и деформациите в голям къс еластичен материал, усукан и свит по някакъв много сложен начин? За тази цел е необходимо да се опише локалната деформация във всяка точка на еластичното тяло, а това може да се направи, като се зададе в нея набор от шест числа — компоненти на симетричен тензор. По-рано (гл. 31) говорихме за тензора на напреженията, сега ще ни потрябва тензорът на деформациите.

Да си представим, че сме взели недеформиран материал и прилагайки някакво напрежение, наблюдаваме движението на малко петънце от примес, попаднал вътре. Петънцето, което отначало се е намирало в точка P и е имало положение $r=(x, y, z)$, се е придвижвало в нова точка P', т. е. в положение $r'=(x', y', z')$, както е показано на фиг. 39-1. Ние ще означаваме с $\mathbf{u}$ вектора на преместването от точката P в точката P', т. е.

$$\mathbf{u}=\mathbf{r}'-\mathbf{r}. \tag{39.1}$$

Преместването $\mathbf{u}$ зависи, разбира се, от точката P, от която излиза то, така че $\mathbf{u}$ е векторна функция от $\mathbf{r}$ или от (x, y, z).

Отначало ще разгледаме най-простия случай, когато деформацията в целия материал е постоянна, т. е. това, което се нарича хомогенна деформация. Да си представим например, че сме взели греда от някакъв материал и сме я разтеглили равномерно. Другояче казано, ние просто равномерно сме изменили нейния размер



иг. 39-1. Петънце от примес в материала на недеформираното кубче след деформирането се премества от точката P в точката P'

Литература: Ch. Kittel, Introduction to Solid State Physics, 2nd ed., New York, 1956.
(Руски превод: Ч. Киттель, Введение в физику твердого тела, Физматгиз М., 1962).

в едно направление, да речем в направление на оста x (фиг. 39-2). Преместването u_x на петното с координата x е пропорционално на самото x. Действително

$$\frac{u_x}{x}=\frac{\Delta l}{l}$$

Ние ще записваме u_x по следния начин:

$$u_x=e_{xx}x.$$

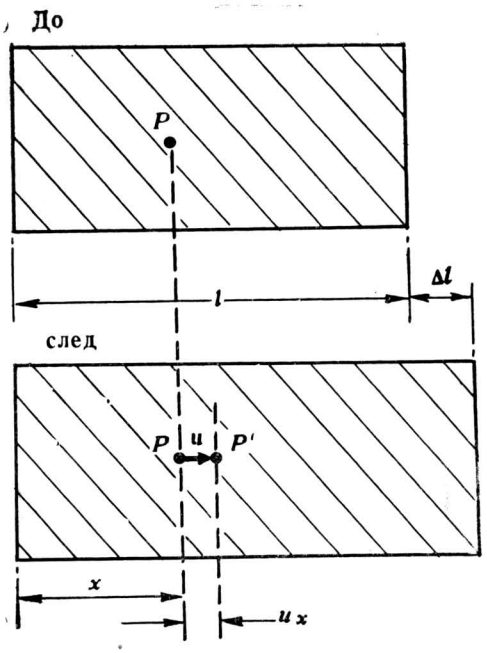
Разбира се, коефициентът на пропорционалност e_{xx} е същото нещо, каквото беше нашето старо отношение $\Delta l/l$. (Скоро ще видите. защо ни е необходим двоен индекс.)

Ако деформацията е нехомогенна, връзката между x и u_x в материала ще се изменя от точка в точка. В този общ случай ще определим e_{xx} като своего рода локална величина $\Delta l/l$, т. е.

$$e_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x}. \tag{39.2}$$

Това число, което сега ще бъде функция от x, y и z, описва големината на разтеглянето в направление на оста x по целия къс от материала. Разбира се, възможни са разтегляния и в направленията на осите y и z. Ние ще ги опишеме с величините

$$e_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y},\quad e_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z}. \tag{39.3}$$



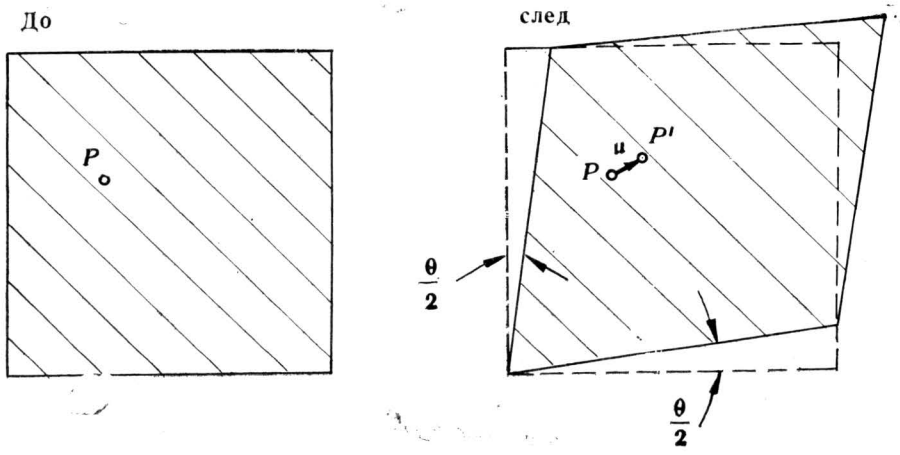
Фиг. 39-2. Хомогенна деформация на разтегляне

Освен това необходимо е да опишем и деформациите от типа на отместванията. Представете си, че сте отделили малко кубче в първоначално недеформирания материал. Като натиснем върху материала, изменяме неговата форма и нашето кубче може да се превърне в паралелограм (фиг. 39-3)[1] При такава деформация преместването в направлението на x за всяка частица е пропорционално на нейната координата y

$$u_x=\frac{\theta}{2}y, \tag{39.4}$$

а преместването в направление y е пропорционално на x

$$u_y=\frac{\theta}{2}x. \tag{39.5}$$



Фиг. 39-3. Хомогенна деформация на плъзгане

Следователно деформация от типа на отместване може да се опише с помощта на

$$u_x=e_{xy}y,\quad u_y=e_{yx}x,$$

където

$$e_{xy}=e_{yx}=\frac{\theta}{2}.$$

[1] Да предположим за минута, че пълният ъгъл на отместване θ се дели на две равни части, така че деформацията да бъде симетрична спрямо осите x и y.

Сега вие ще сметнете, че при нехомогенна деформация обобщената деформация на отместване може да се опише, като величините e_{xy} и e_{yx} се определят по следния начин

$$e_{xy}=\frac{\partial u_x}{\partial y},\quad e_{yx}=\frac{\partial u_y}{\partial x}. \tag{39.6}$$

Обаче тук има известно затруднение. Да предположим, че преместванията u_x и u_y имат вида

$$u_x=\frac{\theta}{2}y;\quad u_y=-\frac{\theta}{2}x.$$

Те напомнят уравненията (39.4) и (39.5) с изключение на това, че при u_y стои обратен знак. При такова преместване малкото кубче от еластичния материал търпи просто завъртане на ъгъл $\theta/2$ (фиг. 39-4). Тук няма изобщо никаква деформация, а само просто въртене в пространството. При това не става никаква деформация на материала и относителното положение на всички атоми ни най-малко не се изменя. Необходимо е някак си да направим така, че чистото въртене да не влиза в нашето определение на деформацията на отместването. Като указание може да ни послужи това, че ако $\partial u_y/\partial x$ и $\partial u_x/\partial y$ са равни и противоположни, няма никакво напрежение; това можем да постигнем, като *определим*

$$e_{xy}=e_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right).$$

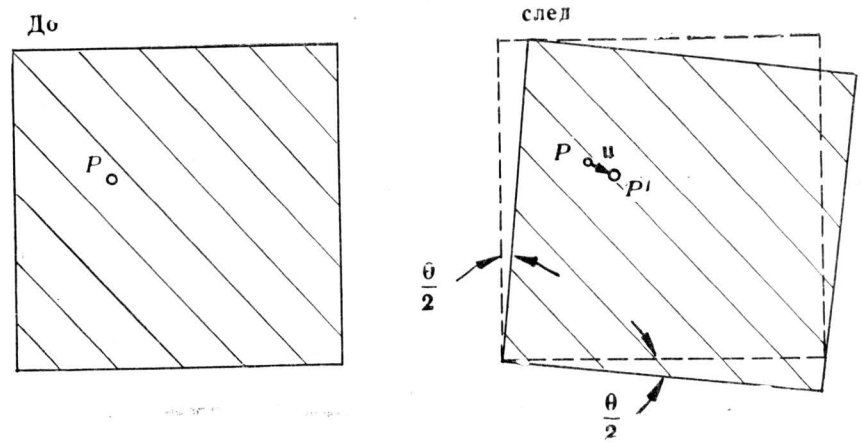
За чисто въртене и двете са равни на нула, но за чисто отместване получаваме, както искахме, $e_{xy}=e_{yx}$.

В най-общия случай на деформация, при който наред с отместването може да съществува разтегляне или свиване, ние ще определяме състоянието на деформация, като зададем деветте числа

$$e_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$e_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right).$$



Фиг. 39.4 Хомогенно завъртане. Няма никакви деформации

Те образуват компонентите на *тензора на деформацията*. Тъй като тензорът е *симетричен* (съгласно с нашето определение e_{xy} винаги е равно на e_{yx}), всъщност тук имаме само шест различни числа. Вие помните (вж. гл. 31) общото свойство на всички тензори — техните елементи се трансформират при въртене подобно на произведенията от компонентите на два вектора. (Ако $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ са вектори, то $C_{ij}=A_iB_j$ е тензор.) Всяко наше e_{ij} е произведение (или сума от такива произведения) — от компонентите на вектора $\mathbf{u}=(u_x, u_y, u_z)$ и оператора $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, който, както знаем, се трансформира като вектор. Нека вместо x, y и z да пишем x_1, x_2 и x_3, а вместо u_x, u_y и u_z да пишем u_1, u_2 и u_3; тогава общият вид на елемента от тензора e_{ij} ще изглежда така

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \tag{39.8}$$

където индексите i и j могат да взимат стойностите 1, 2 или 3.

Когато имаме работа с хомогенна деформация, която може да включва както разтегляния, така и отмествания, всички e_{ij} са константи и можем да пишем

$$u_x=e_{xx}x+e_{xy}y+e_{xz}z. \tag{39.9}$$

Началото на координатите е избрано в точка, в която $\mathbf{u}$ равно на нула.) В тези случаи тензорът на деформацията e_{ij} дава зависимостта между двата вектора — векторът на координатите $\mathbf{r}=(x, y, z)$ и векторът на преместването $\mathbf{u}=(u_x, u_y, u_z)$.

Ако деформацията е нехомогенна, всеки къс от материала може да бъде някак си изкривен и освен това могат да възникнат местни завъртания. Когато всички деформации са малки, получаваме

$$\Delta u_i=\sum_j (e_{ij}-\omega_{ij})\,\Delta x_j, \tag{39.10}$$

където ω_{ij} е *антисиметричният тензор*

$$\omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \tag{39.11}$$

който описва завъртането. Ние няма защо да се безспокоим за завъртанията; ще се заемем само с деформацията, която се описва от симетричния тензор e_{ij}.

39-2. Тензор на еластичността

Сега, за да ги опишем, трябва да свържем деформациите с вътрешните сили — с напреженията в материала. Ние предполагаме, че законът на Хук важи за всяко късче от материала, т. е. че напреженията са навсякъде пропорционални на деформациите. В гл. 31 определихме тензора на напреженията S_{ij}, като i-тата компонента на силата, действуваща върху единична площадка, перпендикулярна на оста j. Законът на Хук ни говори, че *всяка* компонента S_{ij} е свързана линейно с всяка компонента на напрежението. Но тъй като S и e съдържат по девет компоненти, за описване на еластичните свойства на материала са необходими всичко $9\times 9=81$ възможни константи. Ако материалът е хомогенен, всички тези коефициенти ще бъдат константи. Ние ги означаваме с C_{ijkl}, като ги определяме посредством уравненията

$$S_{ij}=\sum_{kl} C_{ijkl}e_{kl}, \tag{39.12}$$

където всеки индекс i, j, k и l може да взима стойностите 1, 2 или 3. Тъй като коефициентите C_{ijkl} свързват един тензор с друг, те също образуват тензор — този път *тензор от четвърти* ранг. Не можем да го наречем *тензор на еластичността*.

Да приемем сега, че всички C_{ijkl} са известни и че към тяло с някаква произволна форма са приложили сложни сили. При това ще възникнат всички видове деформации — тялото ще се изкриви по някакъв начин. Какви ще бъдат преместванията? Вие разбирате, че това е твърде сложна задача. Ако са ви известни деформациите, от уравнението (39.12) могат да се намерят напреженията и обратно. Но напреженията и деформациите, които са възникнали във всяка една точка, зависят от това, което става в цялата останала част от материала.

Най-простият начин да се подходи към такава задача е да се помисли за енергията. Когато силата F е пропорционална на преместването x, да речем $F=kx$, работата, изразходвана за всяко преместване x е равна на $kx^2/2$. По подобен начин енергията w, вложена във *всяка една единица обем* от деформирания материал, се оказва

$$w=\frac{1}{2}\sum_{ijkl}C_{ijkl}e_{ij}e_{kl}. \tag{39.13}$$

Пълната работа W, изразходвана за деформиране на цялото тяло, ще бъде интеграл от w по целия обем

$$W=\int\frac{1}{2}\sum_{ijkl}C_{ijkl}e_{ij}e_{kl}dV. \tag{39.14}$$

Следователно това именно е потенциалната енергия, която се дължи на вътрешните напрежения в материала. Когато тялото се намира в равновесие, тази вътрешна енергия трябва да бъде минимална. Следователно проблемата за определянето на деформациите в дадено тяло може да бъде решена с намирането на такива премествания по цялото тяло, при които W е минимална. В глава 19 аз ви говорих за някои общи идеи на вариационното смятане, използувано за решаване на задачи за минимизиране от подобен вид. Обаче сега повече няма да се впускаме в подробностите на тази задача.

Сега нас главно ще ни интересува това, което може да се каже за общите свойства на тензора на еластичността. Преди всичко е ясно, че всъщност в C_{ijkl} не се съдържат 81 различни параметра. Тъй като S_{ij} и e_{ij} са симетрични тензори, всеки един от които включва само шест различни елемента, то C_{ijkl} се състои максимум от 36 различни компоненти. Обикновено те са много по-малко.

Да разгледаме специалния случай на кубичен кристал. За него се получава следната плътност на енергията w

$$\begin{aligned}w=\frac{1}{2}(&C_{xxxx}e_{xx}^2+C_{xxxy}e_{xx}e_{xy}+C_{xxxz}e_{xx}e_{xz}+\\&+C_{xxyx}e_{xx}e_{yx}+C_{xxyy}e_{xx}e_{yy}+\cdots\text{ и т. н.}+\\&+C_{yyyy}e_{yy}^2+\cdots\text{ и т. н.}\ldots,\text{и. т. н.}\ldots),\end{aligned} \tag{39.15}$$

т. е. всичко 81 събираеми! Но кубичният кристал притежава определени симетрии. По-специално, ако кристалът се завърти на 90°, всички негови физически свойства ще останат същите. Например той трябва да има една и съща твърдост спрямо разтегляне както по направление на оста y, така и по направление на оста x. Следователно ако разменим нашите определения на координатните оси x и y в уравнението (39.15), енергията не трябва да се измени. Поради това за кубичния кристал

$$C_{xxxx}=C_{yyyy}=C_{zzzz}. \tag{39.16}$$

Можем още да покажем, че компонентите, подобни на C_{xxxy}, трябва да бъдат равни на нула. Кубичният кристал притежава това свойство, че той е симетричен при отражение спрямо всяка една равнина, перпендикулярна към една от координатните оси. Ако заменим y с $-y$, нищо не трябва да се промени. Но изменението на y с $-y$ изменя e_{xy} на $-e_{xy}$, тъй като преместването

в посоката $+y$ ще бъде сега преместване в посоката $-y$. За да не се изменя енергията при това, C_{xxxy} трябва да преминава в $-C_{xxxy}$. Но отразеният кристал ще бъде същият, както и преди, така че C_{xxxy} трябва да бъде *същото*, както и $-C_{xxxy}$. Това може да стане само когато и двете са равни на нула.

Но вие можете да кажете; „Като разсъждаваме по такъв начин, можем да направим и $C_{yyyy}=0$.“ Това е невярно. Нали тук имаме четири игрека. Всеки y изменя знака, а четири минуса дават плюс. Ако y се среща два или четири пъти, такива компоненти не трябва да бъдат равни на нула. На нула са равни само тези компоненти, при които y се среща или един, или три пъти. Следователно за кубичния кристал са различни от нула само тези C, при които един и същи индекс се среща четно число пъти. (Разсъжденията относно y са валидни и за x, и за z.) Следователно оцеляват само компонентите от типа C_{xxyy}, C_{xyxy}, C_{xyyx} и т. н. Обаче ние вече показахме, че ако изменим всички x на y и обратно (или всички z на x и т. н.), трябва да получим за кубичния кристал същото число. Това означава, че остават *само три* различни ненулеви възможности

$$\begin{aligned} &C_{xxxx}\ (=C_{yyyy}=C_{zzzz});\\ &C_{xxyy}\ (=C_{yyxx}=C_{xxzz}=\text{и т. н.}),\\ &C_{xyxy}\ (=C_{yxyx}=C_{xzxz}=\text{и т. н.}). \end{aligned} \tag{39.17}$$

Плътността на енергията за кубичния кристал изглежда така

$$\begin{aligned} w=\frac{1}{2}\,[&C_{xxxx}\,(e_{xx}^2+e_{yy}^2+e_{zz}^2)+\\ &+2\,C_{xxyy}\,(e_{xx}\,e_{yy}+e_{yy}\,e_{zz}+e_{zz}\,e_{xx})+\\ &+4\,C_{xyxy}\,(e_{xy}^2+e_{yz}^2+e_{zx}^2)]. \end{aligned} \tag{39.18}$$

При изотропен, т. е. некристален материал, симетрията е още по-висока. Числата C трябва да бъдат едни и същи при всеки избор на координатните оси. При това, както се оказва, съществува друга връзка между коефициентите C

$$C_{xxxx}=C_{xxyy}+C_{xyxy}. \tag{39.19}$$

Това може да се види от следните общи разсъждения. Тензорът на напреженията S_{ij} трябва да бъде свързан с e_{ij} по начин, който ни най-малко не зависи от посоките на координатните оси, т, е. той трябва да бъде свързан само с помощта на скаларни величини. „Това е много просто“ — ще кажете вие. „Единственият начин да се получат S_{ij} от e_{ij} това е да се умножи последният тензор по някаква скаларна константа. По този начин се получава точно законът на Хук: $S_{ij}=$(константа)$\times e_{ij}$.“ Обаче това не е съвсем вярно. Тук може допълнително да се постави единичният тензор δ_{ij}, умножен по някакъв скалар, линейно свързан с e_{ij}. Единственият инвариант, който може да се състави, и който е линеен по e — това е Σe_{jj}. (Той се преобразува подобно на $x^2+y^2+z^2$ и следователно представлява скалар.) Така най-общата форма на уравнението, което свързва S_{ij} с e_{ij}, ще бъде за изотропен материал

$$S_{ij}=2\,\mu\,e_{ij}+\lambda\left(\sum_k e_{kk}\right)\delta_{ij}. \tag{39.20}$$

(Първата константа обикновено се записва като $2\,\mu$; при това коефициентът μ е равен на модула на отместването, определен в предната глава.) Константите μ и λ се наричат еластични константи на Ламе. Като сравним уравнението (39.20) с уравнението (39.12), виждаме, че

$$\begin{aligned} &C_{xxyy}=\lambda\\ &C_{xyxy}=2\mu\\ &C_{xxxx}=2\mu+\lambda. \end{aligned} \tag{39.21}$$

По такъв начин доказахме, че уравнението (39.19) действително е вярно. Вие виждате също, че еластичните свойства на изотропния материал, както вече се каза в предната глава, напълно се определят от две константи.

Коефициентите C могат да бъдат изразени посредством всеки две от еластичните константи, които бяха използувани по-рано, например чрез модула на Юнг Y и отношението на Поасон σ. На вас се пада да покажете, че

$$C_{xxxx}=\frac{Y}{1+\sigma}\left(1+\frac{\sigma}{1-2\sigma}\right),$$

$$C_{xxyy}=\frac{Y}{1+\sigma}\left(\frac{\sigma}{1-2\sigma}\right), \qquad (39.22)$$

$$C_{xyxy}=\frac{Y}{1+\sigma}.$$

39-3. Движения в еластично тяло



Фиг. 39-5. Малък обемен елемент V ограничен от повърхнината A

Ние подчертахме, че в еластично тяло, което се намира в равновесие, вътрешните напрежения се разпределят така, че енергията да бъде минимална. Да видим сега какво става, ако вътрешните сили не са уравновесени. Да вземем малко късче материал, обхванато от някаква повърхнина A (фиг. 39.5). Ако това късче се намира в равновесие, пълната сила $\mathbf{F}$, действуваща върху него, трябва да бъде равна на нула. Може да се счита, че тази сила се състои от две части, една от които е обусловена от „външни“ сили, подобни на гравитацията, които действуват през разстояние върху веществото от нашето късче и водят до сила $\mathbf{f}_{\text{вън}}$, действуваща върху единица обем. Пълната външна сила $\mathbf{F}_{\text{вън}}$ е равна на интеграла от $\mathbf{f}_{\text{вън}}$ по целия обем на късчето.

$$\mathbf{F}_{\text{вън}}=\int \mathbf{f}_{\text{вън}}\, dV. \qquad (39.23)$$

При равновесие тези сили се балансират от пълната сила $\mathbf{F}_{\text{втр}}$, действуваща по повърхността A от страна на обкръжаващия материал. Когато това късче не се намира в равновесие, а се движи, сумата от вътрешните и външните сили ще бъде равна на произведението от масата по ускорението. При това получаваме

$$\mathbf{F}_{\text{вън}}+\mathbf{F}_{\text{втр}}=\int \rho\, \ddot{\mathbf{r}}\, dV, \qquad (39.24)$$

където ρ е плътността на материала, а $\ddot{\mathbf{r}}$ неговото ускорение. Сега можем да комбинираме уравненията (39.23) и (39.24) и да напишем:

$$\mathbf{F}_{\text{втр}}=\int_v (-\mathbf{f}_{\text{вън}}+\rho\ddot{\mathbf{r}})\, dV. \qquad (39.25)$$

Нашият запис може да бъде опростен, като положим

$$\mathbf{f}=-\mathbf{f}_{\text{вън}}+\rho\ddot{\mathbf{r}}. \qquad (39.26)$$

Тогава уравнението (39.25) се записва във вида

$$\mathbf{F}_{\text{втр}}=\int_v \mathbf{f}\, dV. \qquad (39.27)$$

Величината, наречена от нас $\mathbf{F}_{\text{втр}}$, е свързана с напреженията в материала. Тензорът на напреженията S_{ij} беше определен от нас в гл. 31 по такъв начин, че x-компонентата на силата dF, действуваща върху елемент от повърхнината da с нормала $\mathbf{n}$, се дава от израза

$$dF_x=(S_{xx}\, n_x+S_{xy}\, n_y+S_{xz}\, n_z)\, da. \qquad (39.28)$$

Оттук x-компонентата на силата $F_{\text{втр}}$, действуваща върху нашето

късче, е равна на интеграла от dF_x по цялата повърхнина. Заместваики това в x-компонентата на уравнението (39.27), получаваме

$$\int_A (S_{xx}\, n_x + S_{xy}\, n_y + S_{xz}\, n_z)\, da = \int_v f_x\, dV. \tag{39.29}$$

Оказа се, че повърхнинният интеграл е свързан с интеграла по обем, а това ни напомня нещо познато от главите по електричество. Забележете, че ако не обърнем внимание на първия индекс x във всеки от S-овете в лявата част на (39.29), тя изглежда точно като интеграл от величината $(\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})$, т. е. от нормалната компонента на вектор по повърхността. Тя би била равна на потока $\mathbf{S}$ през обема. А като използуваме теоремата на Гаус, потокът може да се запише като обемен интеграл от дивергенция на $\mathbf{S}$. Всъщност всичко това е валидно независимо от това дали имаме индекс x, или не. Това е просто математическа теорема, която се доказва чрез интегриране по части. С други думи, уравнението (39.29) може да се превърне в

$$\int_v \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z}\right) dV = \int_v f_x\, dV. \tag{39.30}$$

Сега можем да изоставим интеграла по обема и да напишем диференциалното уравнение за всяка една от компонентите на $\mathbf{f}$

$$f_i = \sum_j \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}. \tag{39.31}$$

То ни говори как е свързана с тензора на напреженията S_{ij} силата, която действува върху единица обем.

Ето как работи тази теория на вътрешните движения на твърдото тяло. Ако първоначално са ни известни преместванията, дадени да речем с вектора U, можем да намерим деформациите e_{ij}. От деформациите можем да получим напреженията с помощта на уравнението (39.12). След това с помощта на уравнението (39.31) можем да намерим от напрежението плътността на силата $\mathbf{f}$. А като знаем $\mathbf{f}$, можем да получим от уравнението (39.26) ускорението $\ddot{\mathbf{r}}$ в материала, което ще ни подскаже как се изменят преместванията. Като съберем всичко това заедно, получаваме ужасно сложните уравнения за движението на еластично твърдо тяло. Аз просто ще ви напиша отговора за изотропен материал. Ако използувате за S_{ij} уравнението (39.20) и запишете e_{ij} във вида $1/2\ (\partial u_j/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$, окончателно ще получите векторното уравнение

$$\mathbf{f} = (\lambda+\mu)\,\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mu\,\nabla^2\mathbf{u}. \tag{39.32}$$

Вие можете много просто да се убедите, че уравнението трябва да има такава форма. Силата трябва да зависи от втората производна на преместването $\mathbf{u}$. Но какви втори прозводни от $\mathbf{u}$ могат да се съставят така, че те да бъдат вектори? Едната от тях — $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})$ е съвсем истински вектор. Има само още една такава комбинация — това е $\nabla^2\mathbf{u}$. Така че най-общата форма на силата ще бъде

$$\mathbf{f} = a\,\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + b\,\nabla^2\mathbf{u},$$

което точно дава (39.32) с други означения на константите. Можете да се учудите защо липсва трето събираемо $\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}$, което също е вектор. Но спомнете си, че $\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}$ е равно точно на $\nabla^2\mathbf{u} - \nabla\cdot(\nabla\mathbf{u})$, т. е. това е линейна комбинация от вече написаните две събираеми. Така че то няма да добави нищо ново. Ние доказахме още един път, че в изотропен материал има само две еластични константи.

За да получим уравненията на движението на материала, можем да положим израза (39.32), равен на $\rho\,\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2$, и като пренебрегнем обемните сили от типа на силата на теглото, да напишем

$$\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\,\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mu\,\nabla^2\mathbf{u}. \tag{39.33}$$

Това уравнение изглежда подобно на вълновото уравнение, с което се запознахме в електромагнетизма с изключение на едно допълнително събираемо, което отежнява работата. За материали, чиито еластични свойства са навсякъде еднакви, можем да видим как изглежда общото решение. Вие вероятно помните, че всяко векторно поле може да бъде записано във вид на сума от два вектора, единият от които има дивергенция, равна на нула, а другият — ротация, равна на нула. С други думи, можем да положим

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2, \tag{39.34}$$

където

$$(\nabla\cdot\mathbf{u}_1)=0, \qquad \nabla\times\mathbf{u}_2=0. \tag{39.35}$$

Като заместим $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2$ вместо $\mathbf{u}$ в уравнението (39.33), получаваме

$$\rho\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=(\lambda+\mu)\,\nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbf{u}_2)+\mu\,\nabla^2(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2). \tag{39.36}$$

Взимайки дивергенция от това уравнение, можем да изключим от него $\mathbf{u}_1$

$$\rho\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla\cdot\mathbf{u}_2)=(\lambda+\mu)\,\nabla^2(\nabla\cdot\mathbf{u}_2)+\mu\,\nabla\cdot\nabla^2\mathbf{u}_2.$$

Тъй като операторите ∇^2 и ∇ могат да бъдат разместени, можем да изнесем оператора на дивергенцията и да получим

$$\nabla\cdot\left\{\rho\,\frac{\partial^2\mathbf{u}_2}{\partial t^2}-(\lambda+2\mu)\,\nabla^2\mathbf{u}_2\right\}=0. \tag{39.37}$$

А тъй като $\Delta\times\mathbf{u}_2$ по определение е равна на нула, ротацията на израза в средните скоби също ще бъде нула, така че изразът в скобите сам по себе си тъждествено се анулира и

$$\rho\,\frac{\partial^2\mathbf{u}_2}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\,\nabla^2\mathbf{u}_2. \tag{39.38}$$

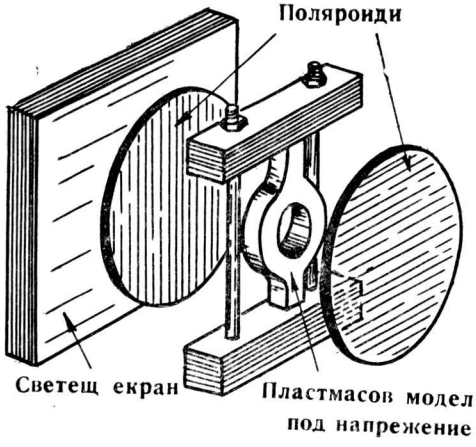
Това е векторно вълново уравнение за вълни, които се движат със скорост $C_2=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$. Тъй като ротацията на $\mathbf{u}_2$ е нула, тези вълни не са свързани с отместване, а представляват просто вълни на свиване, подобни на звуковите, които изучавахме в предните глави и чиято скорост именно е равна на намерената от нас $C_{\text{надл}}$.

По подобен начин, като вземем ротация от уравнението (39.36), можем да покажем, че $\mathbf{u}_1$ удовлетворява уравнението

$$\rho\,\frac{\partial^2\mathbf{u}_1}{\partial t^2}=\mu\,\nabla^2\mathbf{u}_1. \tag{39.39}$$

Това е отново векторно вълново уравнение за вълни, които се разпространяват със скорост $C_2=\sqrt{\mu/\rho}$. Тъй като $\nabla\cdot\mathbf{u}_1$ е равен на нула, преместването $\mathbf{u}_1$ не води до изменение на плътността; векторът $\mathbf{u}_1$ съответствува на напречни вълни или вълни на отместване, които ние срещахме в предната глава, а $C_2=C_{\text{отм}}$.

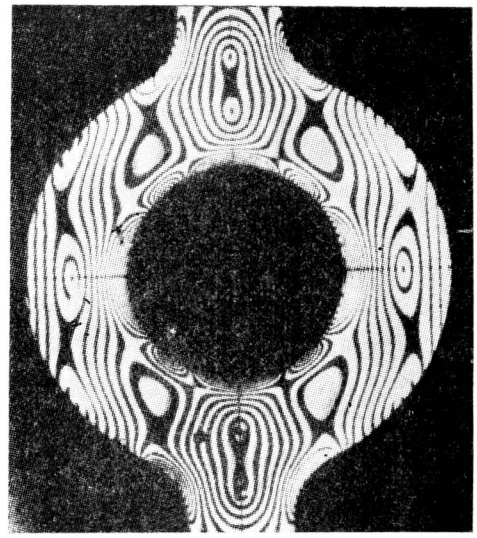
Ако искаме да знаем статическите напрежения в изотропен материал, по принцип можем да ги намерим, като решим уравнението (39.32) с $\mathbf{f}=0$ (или равно на статическите обемни сили, които се дължат на силата на теглото, например ρg) при определени условия, свързани със силите, действуващи върху повърхността на нашия голям къс материал. Да се направи това тук е малко по-сложно, отколкото в съответните задачи от електромагнетизма. Първо, това е по-трудно, защото самите уравнения са малко по-сложни и второ, формите на тези еластични тела, от които обикновено се интересуваме, са много по-сложни. На лекциите по електричество често се интересувахме от решенията на уравненията на Максвел за области със сравнително проста геометрична форма като цилиндър, сфера и т. н. В теорията на еластичността ни се налага да се занимаваме с много по-сложни по форма обекти, например куката на подемен кран или автомобилен ко-



Фиг. 39-6. Измерване на вътрешните напрежения с помощта на поляризирана светлина

лянов вал или ротор на газова турбина. Такива задачи понякога могат да се решат приближено с числени методи, като се използува принципът за минималната енергия, за който споменавахме по-рано. Друг начин е да се използуват модели на предметите и да се измерват вътрешните напрежения експериментално с помощта на поляризирана светлина.

Този метод се състои в следното. Когато парче еластичен изотропен материал, например прозрачна пластмаса от типа на плексигласа, се подложи на напрежение, в нея възниква двойно лъчепречупване. Ако се пропуска поляризирана светлина през тази пластмаса, плоскостта на поляризацията ще се затвърди на ъгъл, свързан с напреженията. Като се измери ъгълът, на който се е завъртяла тази равнина, може да се определи напрежението. На фиг. (39-6) е показан схематичният вид на такова устройство, а на фиг. (39-7) е дадена фотоснимка на еластичния модел със сложна форма под напрежение.



Фиг. 39-7. Вид на напрежението в пластмасов модел между два кръстосани поляроида

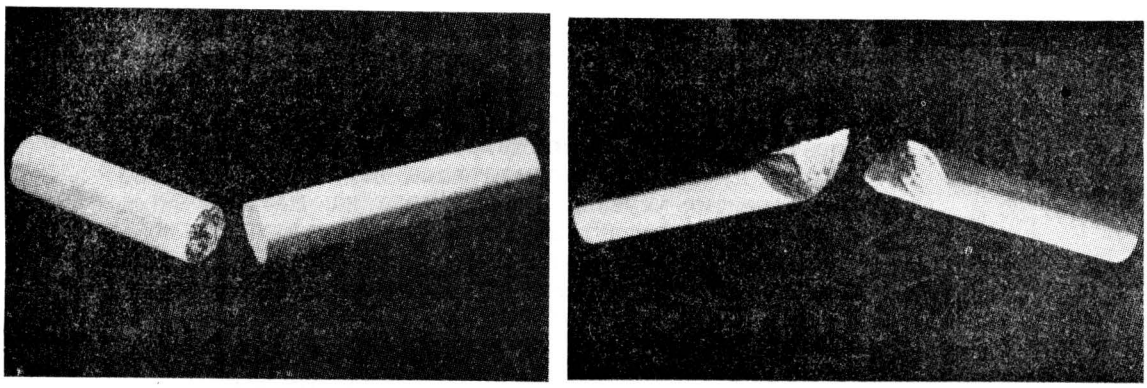
39-4. Нееластично поведение

Във всичко, което говорихме досега, предполагахме, че напрежението е пропорционално на деформацията, а това не е вярно в общия случай. На фиг. 39-8 е дадена типична диаграма напрежение-деформация на еластичен материал. За малки деформации напрежението е пропорционално на деформацията. Обаче след определена точка зависимостта на напрежението от деформацията започва да се отклонява от правата линия. За много материали, които ще наречем „крехки", разрушаването настъпва, когато деформацията превиши малко точката, в която кривата започва да завива. В общия случай има и други усложнения в диаграмата напрежение-деформация. Например когато деформирате някакъв предмет, съществуващите големи напрежения могат след това бавно да намаляват във времето. Ако достигнете високи напрежения обаче под точката на разкъсването, а след това намалявате деформацията, напрежението ще се връща назад вече по друга крива. Възниква малък хистерезисен ефект (подобен на този, който видяхме във връзката между B и H в магнитните материали).



Фиг. 39-8. Типична диаграма напрежение-деформация за големи деформации

Напреженията, при които се получава разрушаване, силно се изменят за различните материали. Някои материали се разрушават при максимално разтеглящо напрежение. Други се разрушават при определена стойност на напрежение на отместване. Например тебеширът много по-слабо се противопоставя на разтегляне, отколкото на отместване. Ако разтеглите за двата края парче тебешир, то ще се счупи перпендикулярно на направлението на приложената сила (фиг. 39-9, *отдясно*). Това е така, защото тебеширът е само пресовани частички, които лесно се разделят настрани, за-



Фиг. 39-9. Счупено парче тебешир:
вдясно — при разтеглено за краищата; вляво — при усукване

това той се чупи перпендикулярно на приложената сила. А по отношение на хлъзгането този материал е много по-здрав, тъй като в този случай частиците си пречат една на друга. Спомнете си сега, че когато усукваме прът, във всяко негово напречно сечение възникват отмествания. Ние показахме освен това, че отместването е еквивалентно на комбинация от разтегляне и свиване под ъгъл 45°. Поради тази причина при усукване парчето тебешир ще се разчупи по сложна повърхнина, която е разположена под ъгъл 45° към образуващите. На фиг. 39-9 *(отляво)* е дадена снимка на парче тебешир, счупено по такъв начин. Тебеширът се чупи там, където напреженията са максимални.

Има и други материали, които се проявяват по един странен и сложен начин. Колкото е по-сложен материалът, толкова по-причудливо е неговото поведение. Ако вземем и смачкаме лист найлон и го хвърлим на масата, постепенно той ще се изправи и ще вземе своята първоначална плоска форма. На пръв поглед изглежда съблазнително да считаме, че тук основна роля играе именно еластичността. Но едно просто пресмятане ще покаже, че тя е твърде слаба, за да влияе по някакъв начин на този ефект (няколко порядъка по-слаба). Оказва се, че тук се конкурират два механизма: „нещо“ вътре в материала „помни“ първоначалната форма и се „опитва“ да се върне към стария вид, а „нещо друго „предпочита“ новата форма и се противи на връщането към старата.

Аз не искам да се впущам в подробности и да описвам механизма, който играе роля в поведението на смачкания лист найлон, но представа за това как стават такива ефекти може да получите от следния *модел*: представете си материал, изготвен от дълги еластични, но здрави нишки, размесени с кухи килийки, запълнени с вискозна течност. Представете си, че между всеки две съседни килийки има тесни проходи, по които течността може бавно да прониква от една килийка в друга. Ако смачкаме лист от такъв материал, дългите нишки ще се деформират и течността ще преминава от едни килийки в други. Когато отпускаме листа, дългите нишки ще се стремят да се върнат към своята първоначална форма, обаче за да направят това, те трябва да принудят течността да се върне на своето предишно място, което става достатъчно бавно поради нейната вискозност. Силите, които прилагаме, когато смачкаме листа, са много по-големи от силите, развивани от нишките. Листът ще може да се смачка много бързе, но към предишния вид той ще се върне много по-бавно. Несъмнено тук основна роля играе комбинацията от големи — здрави и по-малки, но по-подвижни молекули. Този механизъм се съгласува също с факта, че материалът приема по-бързе своята първоначална форма, ако е нагрят, и обратно — в студено състояние това става по-бавно: топлината увеличава подвижността (намалява вискозитета) на малките молекули.

Въпреки че обсъждахме как става нарушаването на закона на Хук, но както изглежда, най-удивително все пак не е нарушаването на този закон при големите деформации, а неговата универсалност. Известно понятие за това, защо става така, можете да получите, като разглеждате енергията на деформирането на материала. Твърдението, че напрежението е пропорционално на деформацията, е равносилно на твърдението, че енергията на деформацията се изменя като квадрата на напрежението. Да си представим, че сме усукали някакъв прът на малък ъгъл θ. Ако законът на Хук е валиден, енергията на деформацията трябва да бъде пропорционална на квадрата на θ. Да предположим, че енергията представлява някаква произволна функция на ъгъла. Ние можем да запишем това във вид на Тейлорово разлагане около нулата

$$U(\theta)=U(0)+U'(0)\theta+\frac{1}{2}U''(0)\theta^2+\frac{1}{6}U'''(0)\theta^3+\ldots. \qquad (39.40)$$

Моментът на силата τ представлява производната на U по ъгъла, така че

$$\tau(\theta)=U'(0)+U''(0)\,\theta+\frac{1}{2}U'''(0)\,\theta^2+\ldots. \qquad (39.41)$$

Ако сега отчитаме ъгъла от положението на равновесие, то първото събираемо ще бъде равно на нула. Следователно първото събираемо, което остава, е пропорционално на θ и при достатъчно малки ъгли то ще преобладава над събираемото θ^2. (В действителност вътрешно материалите са достатъчно симетрични, така че $\tau(\theta)=-\tau(-\theta)$; събираемото с θ^2 се оказа равно на нула, а отклонението от линейността се дължи само поради събираемото с θ^3. Обаче няма причини, поради които това да е вярно за разтегляне и за свиване.) Единственото, което ние не обяснихме, това е защо материалите обикновено се разрушават скоро, след като членовете от по-високия порядък стават съществени.

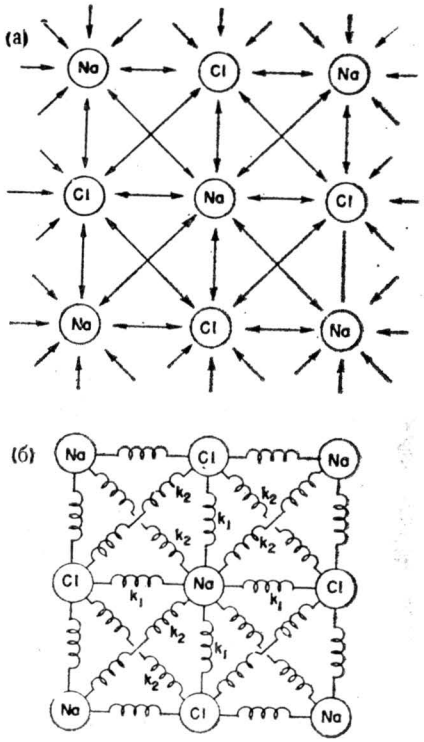
39-5. Пресмятане на еластичните константи

Последният въпрос от теорията на еластичността, който ще разгледам, ще бъде опит да се пресметнат еластичните константи на материала, като изхождаме от някои свойства на атомите, образуващи този материал. Ние ще разгледаме простия случай на йонен кубичен кристал от типа на натриевия хлорид. Размерите или формата на деформирания кристал се променят. Такива изменения водят до увеличаване на потенциалната енергия на кристала. За пресмятане на изменението на енергията на деформацията трябва да се знае къде отива всеки атом. За да остане пълната енергия колкото е възможно по-малка, атомите в решетката на сложните кристали се прегрупират по твърде сложен начин. Това твърде много затруднява пресмятането на енергията на деформацията. Но все пак в случая на прост кубичен кристал може да се разбере какво става. Деформациите вътре в кристала ще бъдат геометрически подобни на деформациите на неговите външни стени.

Еластичните константи на кубичния кристал могат да се пресметнат по следния начин. Преди всичко ще предположим наличието на някакъв закон за взаимодействие между всяка двойка атоми в кристала. След това ще пресметнем изменението на вътрешната енергия на кристала при отклонението от равновесната форма. Това ни дава зависимост между енергията и деформацията, която е квадратична по деформациите. Като сравним енергията, получена по такъв начин с уравнението (39.13), можем да идентифицираме коефициентите при всяко събираемо с еластичните константи C_{ijkl}.

В нашия пример ще предполагаме следния прост закон за взаимодействието: между съседните атоми действуват централни сили — имаме предвид, че те действуват по линията, която съединява два съседни атома. Ние очакваме, че силите в йонните кристали трябва да бъдат именно от този тип, защото в тяхната основа лежи просто кулоново взаимодействие (при ковалентната връзка силите обикновено са по-сложни, защото те водят и до странично налягане върху съседните атоми; но всички тези усложнения не са ни потребни). Освен това ние смятаме да отчетем само силата на взаимодействието на всеки атом с *най-близките* до него и със *следните* по близост съседи. С други думи, ще направим приближение, в което ще пренебрегнем силите между далечните атоми. На фиг. 39-10, *а* са показани силите в равнината xy, които ще отчитаме. Следва още да се отчетат съответните сили в равнините yz и xz.

Тъй като се интересуваме само от еластичните константи, които описват малките деформации и следователно в израза за енергията запазваме само събираемите, които са квадратични по деформациите, можем да смятаме, че силите между всяка двойк



Фиг. 39-10 Междуатомните сили, приети от нас при пресмятането (а) и модел, в който атомите са свързани с пружинки (б)

атоми се изменят линейно с преместването. Поради това за нагледност можем да си представим, че всяка бройка атоми е съединена с „линейна“ пружинка (фиг. 39-10, *б*). Всички пружинки между атомите на натрия и хлора трябва да имат една и съща константа на еластичност, да речем k_1. Пружинките между два атома натрий и два атома хлор могат да имат различни константи, но аз искам да опростя нашите разсъждения и затова ще считам, че тези константи са равни. Да ги означим с k_2 (по-късно, когато ще видим как ще тръгнат пресмятанията, вие ще можете да се върнете назад и да ги направите различни).

Да предположим сега, че кристалът е подложен на хомогенна деформация, описвана от тензора e_{ij}. В общия случай той ще притежава компоненти, съдържащи x, y и z, но за по-голяма нагледност ще разгледаме само деформации с три компоненти: e_{xx}, e_{xy} и e_{yy}. Ако един от атомите бъде избран като начало на координатната система, преместването на всеки друг атом се дава от уравнение от типа (39.9)

$$u_x = e_{xx}\,x + e_{xy}\,y, \tag{39.42}$$

$$u_y = e_{xy}\,x + e_{yy}\,y.$$

Да наречем атома с координати $x=y=0$ „атом 1“, номерата на неговите съседи са показани на фиг. 39-11. Като означим константата на решетката с a, получаваме x- и y-компонентите напреместванията u_x, u_y, написани в таблица 39-1.

Таблица 39-1

Компоненти на преместванията u_x, u_y

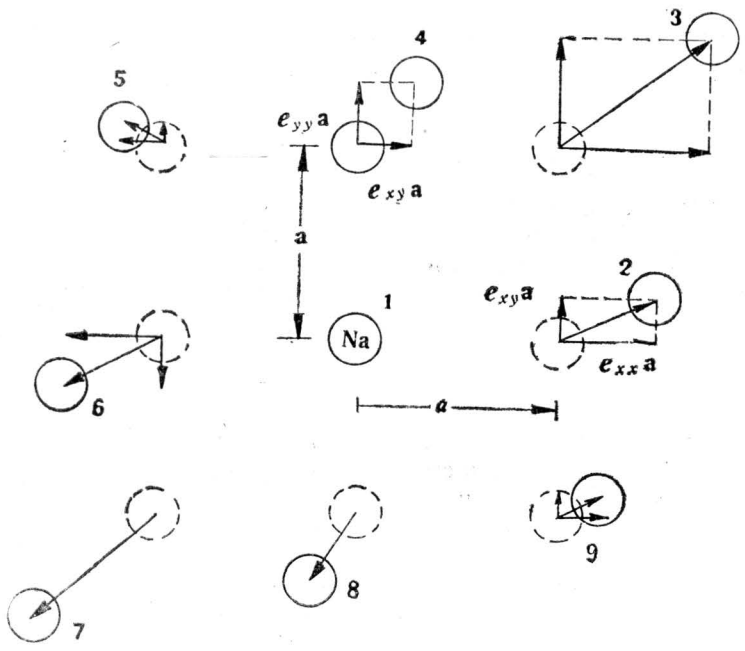
Атом	Положение x, y	u_x	u_y	k
1	$0,\ a$	0	0	—
2	$a,\ 0$	$e_{xx}a$	$e_{yx}a$	k_1
3	$a,\ a$	$(e_{xx}+e_{xy})\,a$	$(e_{yx}+e_{yy})\,a$	k_2
4	$0,\ a$	$e_{xy}a$	$e_{yy}a$	k_1
5	$-a,\ a$	$(-e_{xx}+e_{xy})\,a$	$(-e_{yx}+e_{yy})\,a$	k_2
6	$-a,\ 0$	$-e_{xx}a$	$-e_{yx}a$	k_1
7	$-a,\ -a$	$-(e_{xx}+e_{xy})\,a$	$-(e_{yx}+e_{yy})\,a$	k_2
8	$0,\ -a$	$-e_{xy}a$	$(e_{yx}-e_{yy})\,a$	k_1
9	$a,\ -a$	$-(e_{xx}-e_{xy})\,a$	$(e_{yx}-e_{yy})\,a$	k_2

Сега можем да пресметнем енергията, натрупана в пружинките, която е равна на произведението от $k^2/2$ по квадрата от разтеглянето на всяка пружинка. Така енергията на хоризонталната пружинка между атомите 1 и 2 ще бъде

$$\frac{k_1\,(e_{xx}a)^2}{2}. \tag{39.43}$$

Забележете, че с точност до първи порядък y-преместването на атома 2 не променя дължината на пружинките между атомите 1 и 2. Обаче за да получим енергията на деформацията на диагоналната пружинка, тази, която отива към атома 3, ни е необходимо да пресметнем изменението на дължината както поради вертикалното, така и поради хоризонталното преместване. За малки отклонения от началото на координатите на куба изменението на разстоянието до атома 3 може да се запише като сума от компонентите u_x и u_y в диагонално направление

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,(u_x+u_y)\cdot$$



Фиг. 39-11 Преместване на най-близките и следните по-близост съседи на атома 1 (мащабът е силно изменен)

Като използуваме величините u_x и u_y, можем да получим израза за енергията

$$\frac{k_2}{2}\left(\frac{u_x+u_y}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{k_2a^2}{4}(e_{xx}+e_{yx}+e_{xy}+e_{yy})^2. \tag{39.44}$$

За пълната енергия на всички пружинки в равнината xy ни е необходима сума от осем члена от типа (39.43) и (39.44). Означавайки тази енергия с U_0, получаваме

$$\begin{aligned}U_0=\frac{a^2}{2}\Big[&k_1e_{xx}^2+\frac{k_2}{2}(e_{xx}+e_{yx}+e_{xy}+e_{yy})^2+\\&+k_1e_{yy}^2+\frac{k_2}{2}(e_{xx}-e_{yx}-e_{xy}+e_{yy})^2+\\&+k_1e_{xx}^2+\frac{k_2}{2}(e_{xx}+e_{yx}+e_{xy}+e_{yy})^2+\\&+k_1e_{yy}^2+\frac{k_2}{2}(e_{xx}-e_{yx}-e_{xy}+e_{yy})^2\Big].\end{aligned} \tag{39.45}$$

За да намерим пълната енергия на всички пружинки, свързани с атома 1, трябва да направим известна добавка към уравнението (39.45). Въпреки че са ни необходими само x- и y-компонентите на деформацията, принос в тях дава и известна допълнителна енергия, свързана с диагоналните съседи, вън от равнината xy. Тази допълнителна енергия е

$$k_2(e_{xx}^2a^2+e_{yy}^2a^2). \tag{39.46}$$

Еластичните константи са свързани с плътността на енергията w посредством уравнението (39.13). Енергията, която пресметнахме, е свързана с един атом, по-точно това е *удвоената* енергия, която се пада на един атом, защото на всеки един от два атома, съединени с пружинка, трябва да се пада по 1/2 от нейната енергия. Тъй като в единица обем се намират $1/a^3$ атоми, то w и U_0 са свързани със зависимостта

$$w=\frac{U_0}{2a^3}.$$

За да намерим еластичните константи C_{ijkl}, е необходимо само да се вдигне на квадрат сумата в скобките в уравнението (39.45), да се прибави (39.46) и да се сравнят коефициентите при $e_{ij}e_{kl}$ със съответните коефициенти в уравнението (39.13). Например

като съберем членовете с e_{xx}^2 и e_{yy}^2, намираме, че множителят при тях е

$$(k_1+2k_2)\,a^2$$

и затова

$$C_{xxxx}=C_{yyyy}=\frac{k_1+2k_2}{a}.$$

При останалите събираеми ще срещнем малко усложнение. Тъй като не можем да различим произведенията $e_{xx}e_{yy}$ от $e_{yy}e_{xx}$, то коефициента при тях в израза за енергията е равен на сумата от двата члена в уравнението (39.13). Коефициентът при $e_{xx}e_{yy}$ в уравнението (39.45) е $2k_2$, така че получаваме

$$C_{xxyy}+C_{yyxx}=\frac{2k_2}{a}.$$

Обаче поради симетрията на израза за енергията при разместване на двете първи стойности с двете последни можем да смятаме, че $C_{xxyy}=C_{yyxx}$, така че

$$C_{xxyy}=C_{yyxx}=\frac{k_2}{a}.$$

По същия начин можем да получим

$$C_{xyxy}=C_{yxyx}=\frac{k_2}{a}.$$

Забележете на края, че всеки член, който съдържа един път индекса x или y, е равен на нула, както това беше намерено по-рано от съображения за симетрия. Да резюмираме нашите резултати:

$$\begin{aligned}
C_{xxxx}&=C_{yyyy}=\frac{k_1+2k_2}{a}\\
C_{xyxy}&=C_{yxyx}=\frac{k_2}{a}\\
C_{xxyy}&=C_{yyxx}=C_{xyyx}=C_{yxxy}=\frac{k_2}{a}\\
C_{xxxy}&=C_{xyyy}=\text{и т. н. }=0.
\end{aligned}\qquad(39.47)$$

И тъй, оказва се, че можем да свържем макроскопическите еластични константи с атомните свойства, които се проявяват в константите k_1 и k_2. В нашия частен случай $C_{xyxy}=C_{xxyy}$. Тези членове, както вие вероятно сте забелязали от хода на пресмятанията, за кубическия кристал, се оказват ***винаги*** равни, каквито и сили да вземем под внимание, но само при ***условие*** че силите действуват по линията, която съединява всяка двойка атоми, т. е. дотогава, докато силите между атомите са подобни на пружинки и нямат странична съставяща (която несъмнено съществува при ковалентната връзка).

Нашите пресмятания могат да се сравнят с експерименталните измервания на еластичните константи. В таблица 39-2 са дадени наблюдаваните стойности на три еластични коефициента за някои кубични кристали[1]. Вие вероятно сте обърнали внимание, че C_{xxyy}, общо казано, не е равно на C_{xyxy}. Причината се заключава в това, че в металите, подобни на натрия и калия, междуатомните сили не са насочени по линиите, съединяващи атомите, както предполагахме в нашия модел. Диамантът също не се подчинява на този закон, защото силите са ковалентни сили, които притежават особено свойство на посоката: „пружинките“ предпочитат да свързват атомите, разположени във върховете на тетраедъра. Такива йонни кристали като литиевия хлорид или натриевият хлорид и т. н. притежават почти всички физически свойства, предположени в нашия модел.

Съгласно с данните от таблица 39-2 константите C_{xxyy} и C_{xyxy} при тях са почти равни. Само сребърният хлорид кой знае защо не иска да се подчини на условието $C_{xxyy}=C_{xyxy}$.

Таблица 39-2

Еластични константи в кубичните кристали в 10^{12} дина. см^2 (в 10^3 Нютон. м^2)

Кристал	C_{xxxx}	C_{xxyy}	C_{xyxy}
N	0,055	0,042	0,049
K	0,046	0,037	0,026
Fe	2,37	1,41	1,16
Диамант	10,76	1,25	5,76
Al	1,08	0,62	0,28
LiF	1,19	0,54	0,53
NaCl	0,486	0,127	0,128
KCl	0,40	0,062	0,062
NaBr	0,33	0,13	0,13
KJ	0,27	0,043	0,042
AgCl	0,60	0,36	0,062

[1] В литературата често ще срещнете други означения. Така мнозина пишат:

$$C_{xxxx}=C_{11},\quad C_{xxyy}=C_{12}\quad\text{и}\quad C_{xyxy}=C_{44}.$$

40

Как тече „сухата“ вода

40-1. Хидростатика

Кого не пленява течението на водата? Кой не се любува на това течение! Всички ние в детинството си сме обичали да пляскаме във ваната или да играем в калните локви. Вече по-възрастни сме се възхищавали от плавното течение на реката, от водопадите и водовъртежите; ние им се любуваме и наред с твърдите тела те ни се струват почти одушевени.

Предмет на тази и следната глава ще бъде толкова неочакваното и толкова интересното поведение на течността. Опитите на детенцето да прегради пътя на малкия ручей, който тече по улицата, и неговото удивление пред това, как водата се изхитря все пак да си пробие път, напомнят нашите дългогодишни опити да разберем механизма на протичането на течността. Ние се опитваме мислено да преградим пътя на водата с преграда, т. е. да получиме законите и уравненията, които описват потока. Настоящата глава е посветена на разказ за тези опити. А в следната глава ще опишем този уникален начин, с чиято помощ водата разкъсва преградата и се изплъзва от нас, без да ни даде да я разберем.

Аз предполагам, че елементарните свойства на водата вече са ви известни. Основното свойство, което отличава течността от твърдото тяло, се *заключава* в това, че течността не е способна да удържа нито за момент напрежение на отместване. Ако се приложи напрежение на отместване към течността, тя започва да се движи. Гъстите течности, подобни на меда, се движат потрудно, отколкото течностите от типа на водата или въздуха. Мярка за лекотата, с която течността тече, представлява нейният вискозитет. В тази глава ние ще разглеждаме случаите, при които вискозитетът може да се пренебрегне. А ефектите на вискозитета ще отложим до следната глава.

Да започнем с разглеждането на *хидростатиката,* т. е. теорията на неподвижната течност. Ако течността се намира в покой, то върху нея не действуват никакви сили на отместване (даже във вискозна течност). Поради това законът на хидростатиката се заключава в това, че напреженията вътре в течността винаги са нормални към всяка нейна повърхнина. Нормалната сила върху единица площ се нарича *налягане.* От факта, че в неподвижна течност няма отместване, следва, че напрежението на налягането е еднакво във всички направления (фиг. 40-1). Заемете се самостоятелно да докажете, че ако върху всяка една равнина в течността липсва отместване, налягането във всички направления трябва да бъде еднакво.

Налягането в течността може да се изменя от точка в точка. Така налягането в неподвижна течност върху повърхността на Земята ще се изменя с височината поради теглото на течността. Ако плътността на течността ρ се смята за постоянна и налягането върху някое нулево ниво означим с p_0 (фиг. 40-2), налягането на височина h над тази точка ще бъде $p=p_0-\rho gh$, където g е силата на теглото на единица маса.

Комбинацията $p+\rho gh$ остава постоянна в неподвижна течност. Вие знаете тази зависимост, но сега ще получим по-общ резултат, в който нашата зависимост ще бъде само частен случай. Да вземем малко кубче вода. Каква сила действува върху него в резултат на оказваното налягане? Тъй като налягането във всяко

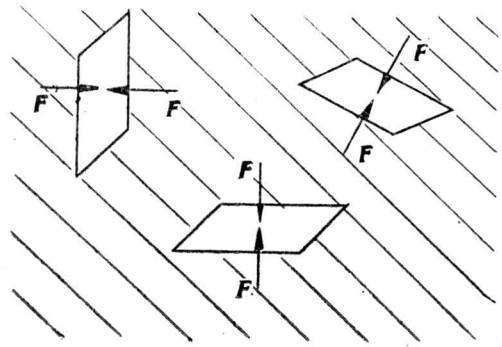
40-1. Хидростатика

40-2. Уравнения на движението

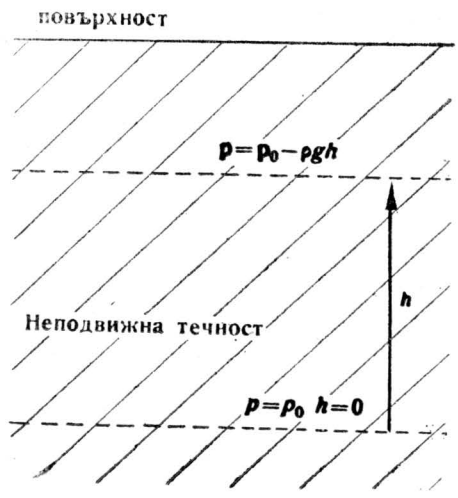
40-3. Стационарен поток; теорема на Бернули.

40-4. Циркулация

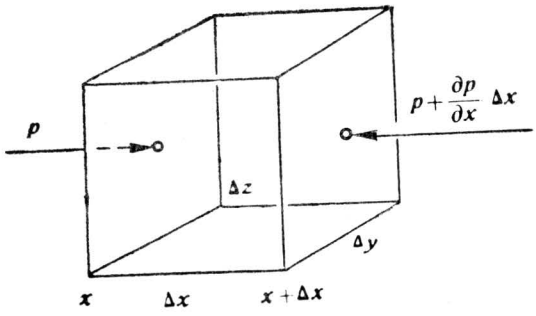
40-5. Вихрови линии



Фиг. 40-1. В неподвижна течност силата, която действува върху единица площ от всяка повърхност, е перпендикулярна на тази повърхност и при произволни ориентации на повърхността е една и съща.



Фиг. 40-2. Налягане в неподвижна течност



Фиг. 40-3 Пълната сила на налягането, която действува върху куба, представлява — ∇p на единица обем

място и във всяко направление е еднакво, то пълната сила, действуваща върху единица обем, може да бъде обусловена само от изменението на налягането от точка в точка. Да предположим, че налягането се изменя в направление на оста x и да изберем направленията на другите координатни оси, успоредни на ребрата на кубчето. Налягането върху стената с координата x ще даде сила $p\Delta y\Delta z$ (фиг. 40-3), а налягането върху стената с координатата $x+\Delta x$ дава сила—$[p+(\partial p/\partial x)\Delta x]\,\Delta y\Delta z$, така че резултантната сила е равна на $-(\partial p/\partial x)\,\Delta x\Delta y\Delta z$. Ако сега отчетем останалите двойки стени на куба, не е трудно да се убедим, че силата на налягането върху единичния обем е $-\nabla p$. Ако като добавка има още и други сили, подобни на силата на теглото, налягането при равновесие трябва да се компенсира от тях.

Да разгледаме случая, когато такива допълнителни сили, подобно на теглото, могат да се опишат с потенциална енергия. Да означим с φ потенциалната енергия на единица маса (за притеглянето например φ е равно просто на gz). Силата, действува върху единица маса, се дава посредством потенциала φ с израза $-\nabla\varphi$. а ако плътността на течността е равна на ρ, върху единица обем ще действува силата $-\rho\nabla\varphi$. В състояние на равновесие на тази сила, действуваща в единица обем, събрана със силата на налягането, трябва да дава нула

$$-\nabla p-\rho\nabla\varphi=0. \tag{40.1}$$

Това именно представлява уравнението на хидростатиката. *В общия случай* то *няма решение.* Ако плътността се променя в пространството по някакъв произволен начин, няма възможност да се уравновесят всичките сили и течността не може да се намира в състояние на статическо равновесие. В нея ще възникнат разни конвекционни потоци. Това се вижда непосредствено от уравнението, защото членът с налягането представлява чист градиент, докато вторият член поради плътността ρ не може да бъде такъв. И само когато величината ρ е постоянна, потенциалният член става чист градиент. Решението на уравнението в този случай има вида

$$p+\rho\varphi=\text{const}.$$

Друга възможност, допускаща състояние на равновесие, имаме, когато ρ зависи само от p. Обаче с това ние ще се разделим с хидростатиката, защото тя не е така интересна както движещата се течност.

40-2. Уравнение на движението

Отначало ще обсъдим движението на течността от чисто абстрактна теоретична страна, а след това ще разгледаме някои частни примери. За да опишем движението на течността, трябва да зададем във всяка точка някакви нейни свойства. Например водата (ще наричаме течността просто „вода“) в различните места се движи с различни скорости. Следователно, за да определим характера на потока, трябва да зададем във всяка точка и във всеки момент от времето трите компоненти на скоростта Ако успеем да намерим уравненията, които определят скоростта, ще знаем във всеки момент по какъв начин се движи течността. Но скоростта не е единствената характеристика на течността, която се мени от точка в точка. Ние току-що изучавахме изменението на *налягането* от точка в точка. А има още и други променливи. От точка към точка може да се мени също плътността. Като добавка течността може да бъде проводник и да пренася електричен ток, чиято плътност $\mathbf{j}$ също се изменя от точка в точка както по големина, така и по посока. От точка към точка може да се изменя и *температурата, магнитното поле* и т. н. Така че броят на полетата, необходими за пълното описване на ситуацията, зависи от сложността на задачата. Много интересни

явления възникват, когато при определяне поведението на течността доминираща роля играят токовете и магнетизмът. Тази наука носи названието *магнитохидродинамика.* Понастоящем на нея й се отделя много голямо внимание. Но ние нямаме намерение да разглеждаме тези твърде сложни случаи, защото има много други не толкова сложни, но също така интересни явления и даже това по-елементарно ниво ще бъде достатъчно трудно.

Да вземем случая, когато няма нито магнитно поле, нито проводимост и освен това няма да ни се наложи да се безпокоим за температурата, защото ще предположим, че температурата във всяка една точка се определя от налягането и плътността. Фактически ние ще намалим сложността на нашата работа, като допуснем, че плътността е постоянна, т. е. че течността е съществено несвиваема. С други думи, предполагаме, че измененията на налягането са толкова малки, че предизвиканите от тях изменения на плътността могат да се пренебрегнат. Ако това не би било така, то в допълнение към явленията, разглеждани тук, би трябвало да отчитаме и други явления, да речем разпространяването на звукови или ударни вълни. Ние изучихме до известна степен разпространяването на звуковите и ударните вълни, така че при нашето разглеждане на хидродинамиката ще се абстрахираме от тези явления, като допуснем, че плътността ρ с достатъчно приближение е постоянна. Лесно е да се определи кога това предположение за постоянството на ρ ще бъде добро. Ако скоростта на потока е много по-малка от скоростта на звуковата вълна, можем да не се грижим за изменението на плътността. Фактът, че водата се изплъзва от нас при опита да я разберем, не е свързан с това приближение за постоянната плътност. Усложненията, които все пак й позволяват да остане непонятна, ще обсъдим в следната глава.

Ние ще започнем общата теория на течностите с *уравнението за състоянието* на течността, което свързва налягането и плътността. В нашето приближение то има много прост вид

$$\rho = \text{const.}$$

Това е първото уравнение за нашите променливи. Следващата зависимост изразява запазването на веществото. Когато веществото се оттича от някаква точка, то неговото количество в тази точка трябва да намалява. Ако скоростта на течността е $\mathbf{v}$, то масата, която протича за единица време през единица площ от повърхнината, е равна на нормалната към повърхнината компонента на $\rho\mathbf{v}$. Подобна зависимост бяхме получили в теорията на еластичността. От запознаването с електричеството знаем също, че дивергенцията на такава величина се определя от скоростта на намаляването на плътността. Така че и тук уравнението

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{40,2}$$

изразява запазването на масата на течността: това е хидродинамическото *уравнение на непрекъснатостта.* В нашето приближение, т. е. в праближението на несвиваемата течност, плътността ρ е постоянна и уравнението за непрекъснатостта се превръща просто в

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0. \tag{40.3}$$

Дивергенцията на скоростта на течността $\mathbf{v}$, както и при магнитното поле $\mathbf{B}$, е равна на нула. (Хидродинамичните уравнения много често се оказват аналогични на уравненията на електродинамиката; ето защо ние отначало изучавахме електродинамика. Някои предпочитат друг път, като смятат, че отначало трябва да се изучи хидродинамиката, за да се разбере след това по-лесно електричеството. В действителност обаче електродинамиката е много по-проста, отколкото хидродинамиката.)

Следното уравнение ще получим от закона на Нютон. То ще ни опише как протича изменението на скоростта в резултат на

действието на силите. Произведението от масата на даден обемен елемент от течността по ускорението трябва да бъде равно на силите, действуващи върху този елемент. Като изберем като обемен елемент единичния обем и означим силата, действуваща върху единичния обем с $\mathbf{f}$, получаваме

$$\rho \times (\text{ускорението}) = \mathbf{f}.$$

Плътността на силите може да се запише като сума от три събираеми. Едното от тях е силата на налягането върху единица обем $-(\nabla p)$, ние вече го разглеждахме. Но има още „външни" сили, действуващи през разстояние, подобно на теглото или електричеството. Ако тези сили са консервативни, с потенциал, който, отнесен към единица маса, е равен на φ, те ще водят до плътност на силите $-\rho(\nabla\varphi)$. (Ако външните сили не са консервативни, ние сме принудени да пишем външната сила, която се пада на единица обем като $\mathbf{f}_{\text{вън.}}$) Освен нея върху единицата обем действува още една „вътрешна" сила, която възниква, поради това че в движещата се течност могат да действуват сили на отместване. Те се наричат сили на вискозитета и ние ще ги означаваме с $\mathbf{f}_{\text{виск}}$. Тогава нашето уравнение на движението добива вида

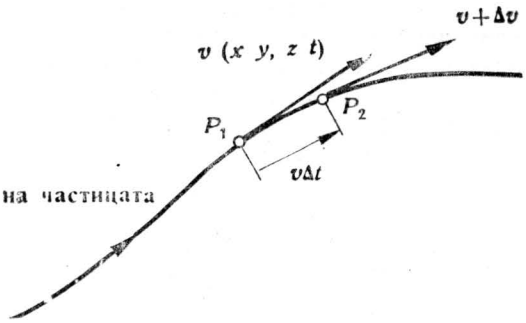
$$\rho \times (\text{ускорението}) = -(\nabla p) - \rho(\nabla\varphi) + \mathbf{f}_{\text{виск}} . \qquad (40.4)$$

В тази глава ще предполагаме, че нашата вода „е течна" в смисъл, че нейният вискозитет е несъществен, така че ще изпущаме събираемото $\mathbf{f}_{\text{виск}}$. Като изхвърляме събираемото с вискозитета, ние правим приближение, което описва някакво идеално вещество, а не реалната вода. На времето Джон фон Нойман е разбирал огромната разлика, възникваща в зависимост от това дали ще оставим събираемото с вискозитета, или не. На него му било известно също, че през времето на най-големия разцвет на хидродинамиката, т. е. около 1900 г., основните усилия са били насочени към решаването на красиви *математически* задачи в рамките именно на това приближение, което няма нищо общо с реалните течности. Поради това той е наричал теоретиците, които са занимавали с подобни вещества, хора, изучаващи „суха вода". Те отхвърляли *най-важното* свойство на течността. Именно поради това че в тази глава при нашите пресмятания ние също ще пренебрегнем това свойство, аз я озаглавих „как тече на сухата вода". А обсъждането на *истинската* „мокра вода" ще отложим за следната глава.

Ако отхвърлим $\mathbf{f}_{\text{виск}}$ в уравнението (40.4), всичко ще ни бъде известно с изключение на израза за ускорението. Може да изглежда, че формулата за ускоряването на частиците на течността трябва да бъде много проста, защото е очевидно, че ако $\mathbf{v}$ е скоростта на частицата в някое място от течността, нейното ускорение ще бъде равно просто на $\partial\mathbf{v}/\partial t$. Но това е *съвсем невярно* и то по една твърде хитра причина. Производната $\partial\mathbf{v}/\partial t$ изразява изменението на скоростта $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ във *фиксирана точка* от пространството. А на нас ни е необходимо да знаем как се изменя скоростта на *дадена капка* от течността. Представете си, че сме отбелязали една капка от водата с цветна боя и можем да следим за нея. За един малък интервал от време Δt тази капка ще се придвижи в друго положение. Например по пътя, показан на фиг. 40-4, за интервал Δt тя ще се премести от точката P_1 в точката P_2. Фактически по посока на оста x тя ще се придвижи на разстояние $v_x\Delta t$, по посока на оста y — на разстояние $v_y\Delta t$, а в посока на оста z — на разстояние $v_z\Delta t$. Виждаме, че ако $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ е скоростта на частицата в момента t, то скоростта на *същата тази* частица в момента $t+\Delta t$ ще представлява величината $\mathbf{v}(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+\Delta t)$, при това

$$\Delta x = v_x\Delta t, \quad \Delta y = v_y\Delta t \quad \text{и} \quad \Delta z = v_z\Delta t.$$

От дефиницията за частните производни (спомнете си уравненията



Фиг. 40-4. Ускорението на частица от течността

от глава II, т. I) получаваме с точност до членовете от втори порядък

$$\mathbf{v}\,(x+v_x\Delta t,\ y+v_y\Delta t,\ z+v_z\Delta t,\ t+\Delta t)=$$
$$=\mathbf{v}\,(x,y,z,t)+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}v_x\Delta t+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}v_y\Delta t+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}v_z\Delta t+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\Delta t.$$

Ускорението $\Delta v/\Delta t$ ще бъде

$$v_x\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}+v_y\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}+v_z\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

Като считаме ∇ за вектор, може да се напише символично

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\cdot\mathbf{v}+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \tag{40.5}$$

Обърнете внимание, че даже когато $\partial\mathbf{v}/\partial t=0$, т. е. когато скорстта в *дадена точка* не се изменя, ускорението все пак остава. Като пример може да ни служи водата, която тече с постоянна скорост по окръжност: тя се ускорява даже тогава, когато скоростта в дадена точка не се променя. Причината, разбира се, се състои в това, че скоростта на дадена капка вода, която първоначално се е намирала в една точка, момент по-късно ще има друга посока — това е от центростремителното ускорение.

Останалата част от нашата теория е чисто математическа: намиране на решенията на уравнението на движението, получено като в (40.4) се замести ускорението (40.5), т. е.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}-\nabla\varphi, \tag{40.6}$$

където събираемото с вискозитета вече е изхвърлено. Като използуваме известното тъждество от векторния анализ, това уравнение може да се препише по друг начин

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}=(\nabla\times\mathbf{v})\times\mathbf{v}+\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}).$$

Ако определим ново векторно поле Ω, като ротация от скоростта $\mathbf{v}$, т. е.

$$\Omega=\nabla\times\mathbf{v}, \tag{40.7}$$

то векторното тъждество може да се запише така:

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}=\Omega\times\mathbf{v}+\frac{1}{2}\nabla v^2,$$

а нашето уравнение на движението (40.6) приема вида

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\Omega\times\mathbf{v}+\frac{1}{2}\nabla v^2=-\frac{\nabla p}{\rho}-\nabla\varphi. \tag{40.8}$$

Вие можете да проверите еквивалентността на уравненията (40.6) и (40.8), като ги напишете по компоненти и ги сравните, използувайки при това израза (40.7).

Ако Ω навсякъде е равно на нула, потокът се нарича *безвихров* (или потенциален). В гл. 3-5 (т. I) ние вече определихме

величината, наречена *циркулация* на векторното поле. Циркулацията по всеки затворен контур в течността е равна на криволинейния интеграл от скоростта на течността по този контур, взет в даден момент от времето.

$$\text{Циркулацията} = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}.$$

Циркулацията *на единица площ* за безкрайно малък контур, по теоремата на Стокс ще бъде тогава равна на $\nabla \times \mathbf{v}$. Следователно $\boldsymbol{\Omega}$ представлява циркулацията около единица площ (перпендикулярна на посоката на $\boldsymbol{\Omega}$). Освен това ясно е, че ако в произволно място от течността се постави малка прашинка (именно прашинка, а не безкрайно малка точка), тя ще се върти с ъглова скорост $\boldsymbol{\Omega}/2$. Опитайте се да докажете това. Вие можете също да се опитате да докажете, че за ведро вода, поставено върху въртящо се столче, $\boldsymbol{\Omega}$ е равна на удвоената локална ъглова скорост на водата.

Ако ни интересува само полето на скоростите, можем да изключим налягането от нашите уравнения. Като вземем ротация от двете страни на уравнението (40.8) и си спомним, че ρ е постоянна величина, а ротацията на всеки градиент е равна на нула, а също така като използуваме уравнението (40.3), намираме

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = 0. \tag{40.9}$$

Това уравнение заедно с уравненията

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v} \tag{40.10}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{40.11}$$

напълно описва полетата на скоростите $\mathbf{v}$. На езика на математиката, ако знаем в някой момент $\boldsymbol{\Omega}$, то ние знаем ротацията на вектора на скоростта и освен това знаем, че неговата дивергенция е равна на нула. Така че в тези физически условия имаме всичко необходимо за определяне на скоростта $\mathbf{v}$ навсякъде. (Всичко това точно напомня познатите ни условия в магнетизма, където $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ и $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/\varepsilon_0 c^2$). Оказва се, че величината $\boldsymbol{\Omega}$ определя $\mathbf{v}$ точно така, както $\mathbf{j}$ определя $\mathbf{B}$. След това при известна стойност на $\mathbf{v}$ уравнението (40.9) ни дава скоростта на изменението на $\boldsymbol{\Omega}$, откъдето можем да получим новата $\boldsymbol{\Omega}$ в следващия момент. Като използуваме отново уравнението (40.10), ще намерим нова стойност на $\mathbf{v}$ и т. н. Сега виждате как целият механизъм, необходим за пресмятане на потока, влиза в тези уравнения. Забележете обаче, че тази процедура дава само скоростта, а цялата информация за налягането се губи.

Да отбележим едно особено следствие от нашето уравнение. Ако в някакъв момент от времето t навсякъде $\boldsymbol{\Omega} = 0$, то $\partial\boldsymbol{\Omega}/\partial t$ също изчезва, така че $\boldsymbol{\Omega}$ навсякъде остава равно на нула и в момента $t + \Delta t$. Оттук следва, че потокът през цялото време остава безвихров. Ако в началото потокът не се е въртял, той никога няма и да започне да се върти. При това уравненията, които ще трябва да решаваме, са следните

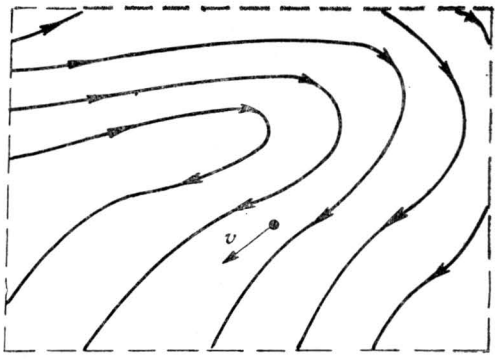
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v} = 0.$$

Те точно напомнят уравненията на електростатиката или магнитостатиката в празно пространство. По-късно ще се върнем към тях и ще разгледаме някои частни задачи.

40—3. Стационарен поток; теорема на Бернули

Да се върнем към уравненията на движението (40.8), но като се ограничим сега с приближени на „стационарния“ поток. Под стационарен поток аз подразбирам поток, чиято скорост в произволно място от течността никога не се изменя. Течността

във всяка точка постоянно се заменя с нова течност, която се движи точно по същия начин. Картината на скоростите винаги изглежда еднаква, т. е. $\mathbf{v}$ представлява статическо векторно поле. Както в магнитостатиката ние рисувахме силовите линии, така и тук можем да начертаем линии, които винаги са допирателни към скоростта на течността (фиг. 40-5). Тези линии се наричат „токови линии“. За стационарен поток те действително представляват реалните пътища на частиците на течността. (В нестационарен поток картината на линиите на тока се мени с времето, обаче във всеки един момент от времето тя не представлява път на частица от течността.)



Фиг. 40-5. Токовите линии на стационарен поток

Стационарността на потока съвсем не означава, че нищо не става — частичките на течността се движат и изменят своите скорости. Това означава само това, че $\partial\mathbf{v}/\partial t=0$. Ако сега умножим скаларно уравнението на движението по $\mathbf{v}$, то събираемото $\mathbf{v}.(\Omega\times\mathbf{v})$ ще изпадне и остава само

$$\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\varphi+\frac{1}{2}v^2\right)=0 \qquad (40.12)$$

Съгласно с това уравнение изразът вътре в скобите не се изменя при *малки премествания в посока на скоростта на течността*. В стационарен поток всички пресмятания са насочени по линиите на тока; поради това уравнението (40.12) ни говори, че *за всички точки по една токова линия*

$$\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+\varphi=\text{const.} \qquad (40.13)$$

Това именно е *теоремата на Бернули*. Константата в общия случай може да бъде различна за различните токови линии; ние знаем само, че лявата част на уравнението (40.13) е една и съща навсякъде по дадена токова линия. Забележете впрочем, че ако стационарният поток е безвихров, т. е. ако за него $\Omega=0$ уравнението на движението (40.8) ни дава зависимостта

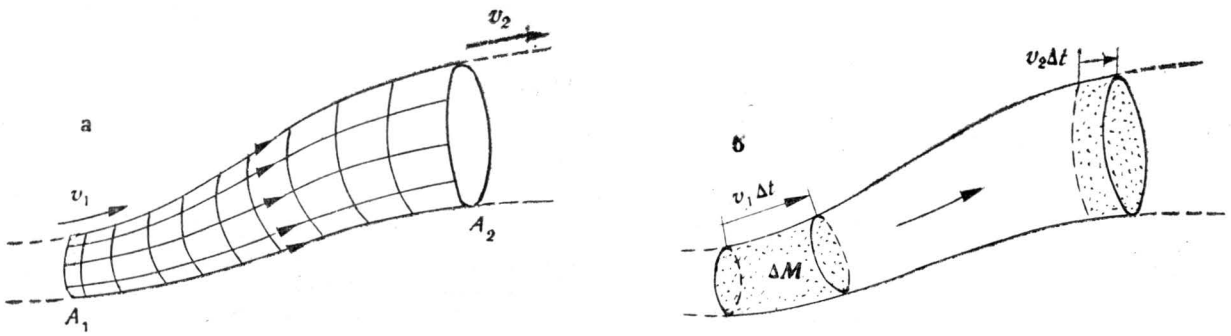
$$\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+\varphi\right)=0,$$

така че

$$\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+\varphi=\text{const}\quad\text{(навсякъде)}. \qquad (40.14)$$

То съвсем точно ни напомня уравнението (40.13) *с изключение на* това, че *сега* константата в *цялата течност е една и съща*.

Всъщност теоремата на Бернули не означава нищо повече, отколкото твърдението за запазването на енергията. Подобни теореми за запазване ни дават маса информации за потока без детайлно решаване на уравненията. Теоремата на Бернули е толкова важна и толкова проста, че на мен ми се иска да ви покажа как тя може да бъде получена по друг начин, различен от тези формални пресмятания, които току-що направихме. Представете си сноп токови линии, образуващи токова тръба (фиг. 40-6, *а*). Тъй като стените на тръбата се образуват от токови линии, през тях



Фиг. 40-6. Движение на течността в тръба

течност не протича. Да означим площта на единия край на тръбата с A_1, скоростта на течността с v_1, плътността с ρ_1, а потенциалната енергия с φ_1. Съответните величини на другия край на тръбата ще означим с A_2, v_2, ρ_2 и φ_2. След един малък интервал от време Δt течността на единия край ще се придвижи на разстояние $v_1\Delta t$, а течността на другия край на разстояние $v_2\,\Delta t$ (вж. фиг. 40-6, *б*). Запазването на *масата* изисква масата, която е влезнала през A_1, да бъде равна на масата, която е излезнала през A_2. Изменението на масата в тези два края трябва да бъде еднакво

$$\Delta M=\rho_1 A_1 v_1 \Delta t=\rho_2 A_2 v_2 \Delta t.$$

Така получаваме равенството

$$\rho_1 A_1 v_1=\rho_2 A_2 v_2. \tag{40.15}$$

То ни говори, че при постоянно ρ скоростта се изменя обратно пропорционално на площта на токовата тръба.

Да пресметнем сега работата, извършена от налягането в течността. Работата, извършена над течността, влизаща от страна на сечението A_1, е равна на $p_1 A_1 v_1 \Delta t$, а работата, извършена в сечението A_2, е равна на $p_2 A_2 v_2 \Delta t$. Следователно пълната работа, извършена над течността, заключена между A_1 и A_2, ще бъде

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t-p_2 A_2 v_2 \Delta t,$$

което трябва да бъде равно на нарастването на енергията на масата ΔM от течността при преминаването от A_1 до A_2. С други думи,

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t-p_2 A_2 v_2 \Delta t=\Delta M\,(E_2-E_1), \tag{40.16}$$

където E_1 е енергията на единица маса от течността в сечението A_1, а E_2 — енергията на единица маса в сечението A_2. Енергията на единица маса от течността може да се запише във вида

$$E=\frac{1}{2}\,v^2+\varphi+U,$$

където $\frac{1}{2}\,v^2$ е кинетичната енергия на единица маса, φ — потенциалната енергия, а U — е допълнителен член, който представлява вътрешната енергия на единица маса от течността. Вътрешната енергия може да съответствува например на топлинната енергия на свиваема течност или на химическа енергия. Всички тези величини могат да се изменят от точка в точка. Като заместим в уравнението (40.16) израза за енергията, получаваме

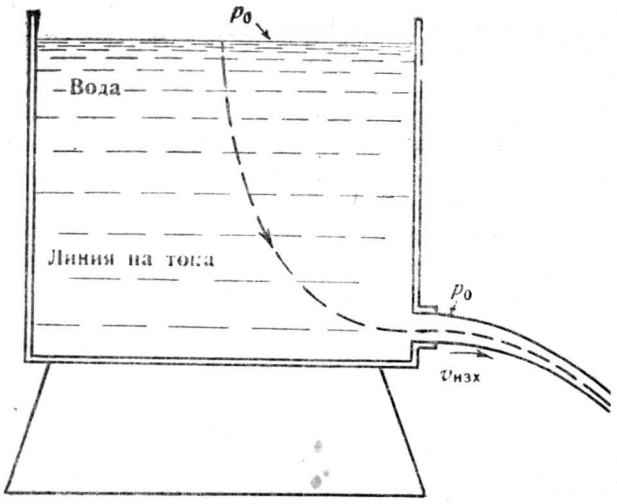
$$\frac{p_1 A_1 v_1 \Delta t}{\Delta M}-\frac{p_2 A_2 v_2 \Delta t}{\Delta M}=\frac{1}{2}\,v_2^2+\varphi_2+U_2-\frac{1}{2}\,v_1^2-\varphi_1-U_1.$$

Но ние видяхме, че $\Delta M=\rho A v \Delta t$ и получихме

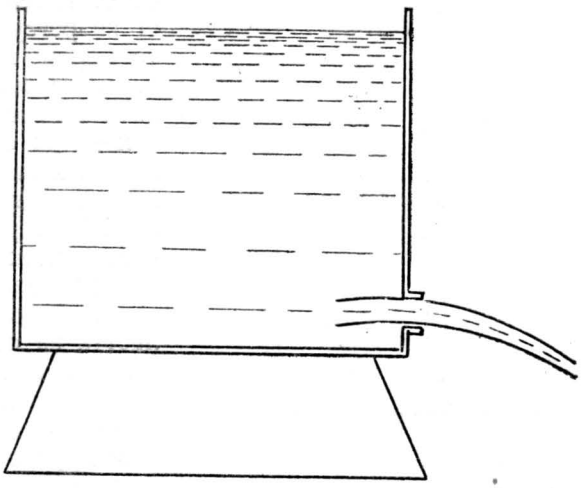
$$\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{1}{2}\,v_1^2+\varphi_1+U_1=\frac{p_2}{\rho_2}+\frac{1}{2}\,v_2^2+\varphi_2+U_2, \tag{40.17}$$

а това ни води точно до резултата на Бернули с един допълнителен член, който представлява вътрешната енергия. Ако течността е несвиваема, вътрешната енергия от двете страни е една и съща и ние отново се убеждаваме във валидността на уравнението (40.14) по всяка токова линия.

Да разгледаме сега някои прости примери, в които интегралът на Бернули ни позволява веднага да опишем потока. Да си представим, че от отвор близо до дъното на резервоар изтича вода (фиг. 40-7), ще разгледаме случая, когато скоростта на потока $v_{\text{отв}}$ в отвора е много по-голяма от скоростта на потока, близо до повърхността на водата в резервоара; с други думи, предполагаме диаметърът на резервоара толкова голям, че скоростта на падането на нивото на течността да може да се пренебрегне (при желание бихме могли да направим и по-акурат-



Фиг. 40-7. Изтичане на течност от резервоар



Фиг. 40-8. Ако изходната тръба е поставена във вътрешността на течността, свиването на струята представлява половината от площта на отвора

ни пресмятания). Налягането върху повърхността на водата в резервоара е p_0 (атмосферното налягане), т. е. токова, каквото е налягането върху струята. Да напишем сега уравнението на Бернули за токова линия, подобна на тази, която е показана на фиг. 40-7, приемаме, че в горната част на резервоара скоростта v е равна на нула; гравитационният потенциал φ тук също ще приемем равен на нула. В отвора скоростта е $v_{отв}$, а $\varphi = -gh$, така че

$$p_0 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_{отв}^2 - \rho g h$$

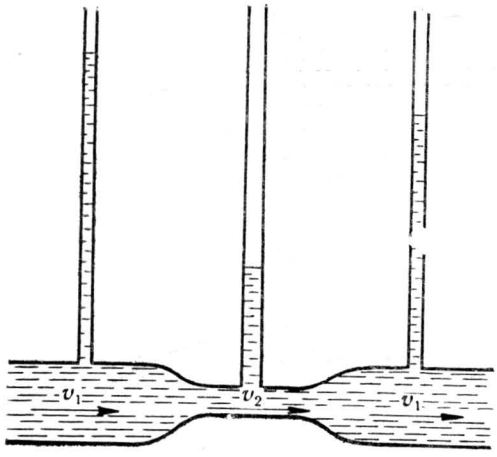
или

$$v_{отв} = \sqrt{2gh}. \qquad (40.18)$$

Скоростта се получи точно равна на скоростта на предмет, който пада от височина h. В това няма нищо удивително — нали в крайна сметка водата на изхода получава своята кинетична енергия от запаса потенциална енергия на водата, която се намира в горната част на резервоара. Обаче не си въобразявайте, че можете да определите скоростта на оттичането на течността от резервоара, като умножите тази скорост $v_{отв}$ по площта на отвора. Скоростите на частиците от течността в момента, когато струята се откъсва от отвора, не са успоредни една на друга, а имат компонента, насочена към центъра на потока; струята се свива. След като измине малко разстояние, струята престава да се свива и скоростите стават успоредни. Следователно пълният поток е равен на скоростта, умножена по площта именно в *това място*, в което свиването на струята се е прекратило. В действителност ако нашият изходен отвор представлява просто кръгла дупка с остър край, сечението на струята се намалява до 62% от площта на отвора. Намаляването на ефективната площ на изходния отвор за различни форми на изходни тръби е различно, а неговата експериментална стойност може да се намери в таблица за *коефициентите на изтичането.*

Ако изходната тръба навлиза в резервоара, както това е показано на фиг. 40-8, може много красиво да се докаже, че коефициентът на изтичането е равен точно на 50%. Аз само ще ви намекна как се провежда това доказателство.

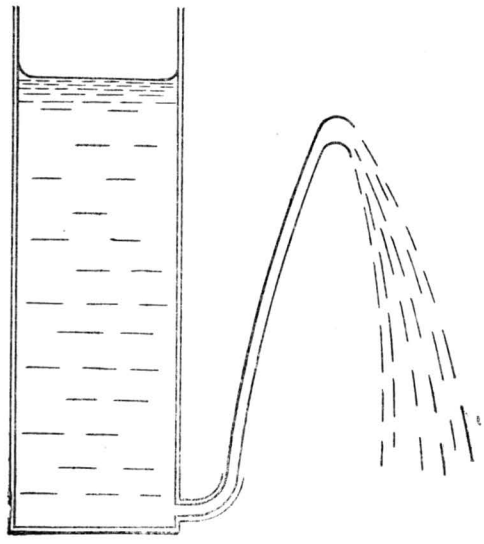
За да получим скоростта, ние използувахме закона за запазването на енергията (вж. уравнение (40-18)). Можем още да разгледаме закона за запазването на импулса. Тъй като с излизащата струя трябва да изтича и импулс, то към напречното сечение на изходната тръба трябва да бъде приложена сила. Откъде се взима тя? Тази сила трябва да се поражда от налягането върху стените. Но нашият изходен отвор е малък и разположен далеч



Фиг. 40-9. Там, където скоростта се повишава, налягането се понижава

от стените, поради това скоростта на течността близо до стените на резервоара ще бъде твърде малка. Следователно налягането върху всяка стена съгласно (40-14) е почти същото както статическото налягане в неподвижна течност. При това статическото налягане върху всяка точка от едната страна на резервоара трябва да се уравновесява от равно налягане върху противоположната стена с изключение на точките от страната, противоположна на изходната тръба. Ако сега пресметнем импулса, изтласкван от струята с това налягане, можем да покажем, че коефициентът на изтичането е равен на 1/2. Обаче този метод не може да бъде използуван за отвор, подобен на показания на фиг. 40-7, защото увеличаването на скоростта около стените, близо до областта на отвора, води до падане на налягането, което не може да се пресметне.

Да разгледаме сега друг пример — хоризонтална тръба с променливо напречно сечение (фиг. 40-9), по която от единия край към другия тече вода. Запазването на енергията, а именно формулата на Бернули, ни говори, че в стеснената област, където скоростта е по-голяма, налягането ще бъде по-малко. Този ефект може лесно да се демонстрира, като се измери налягането в различните места с различно сечение с помощта на стълбче вода, свързано с потока през достатъчно малки отвори, които не смущават потока. При това налягането се измерва с височината на вертикалния стълб вода. И в тесните места то действително се оказва по-малко, отколкото в широките. Ако след стесняването площта на сечението се връща към своята предишна стойност — тази, която е била преди стесняването, налягането отново нараства. Формулата на Бернули предсказва, че налягането преди стесняването трябва да бъде същото, както и след него, обаче в действителност то е чувствително по-малко. Грешката на нашето предсказване се крие в това, че пренебрегнахме триенето, вискозната сила, която предизвиква падане на налягането по протежение на тръбата. Обаче независимо от това падане налягането в тясното място е определено по-малко (поради нарастването на скоростта), отколкото налягането в широката част, така както това се предсказва от Бернули. Скоростта v_2 трябва да превишава скоростта v_1, тъй като през тясната част за единица време преминава същото количество вода. Поради това водата трябва да се ускорява, преминавайки от широката част в тясната. Силата, която води това ускоряване, представлява именно пада на налягането.



Фиг. 40-10. Доказателство, че v не е равна на $\sqrt{2gh}$

Този резултат може да се провери с помощта на още един прост опит. Да си представим, че имаме резервоар с вода и изходна тръба, която изхвърля струята вода нагоре (фиг. 40-10). Ако скоростта на изтичането е равна точно на $\sqrt{2gh}$, излизащата вода трябва да се издига чак до нивото на водата в резервоара. Обаче при опита тя започва да пада малко по-ниско от него. Нашето приближение се оказва твърде грубо; вискозното триене, което не отчетохме в нашата формула за запазване на енергията, води до загуба на енергия.

Опитвали ли сте се някога да разделите две слепени листчета хартия, като духнете между тях? Опитайте се! Те ще се *събират* отново. Причината, разбира се, се състои в това, че въздухът между листчетата има по-голяма скорост, отколкото когато той излиза навън. Поради това налягането между листовете е *по-ниско* от атмосферното и те вместо да се разлетят в различни страни, се слепват.

40-4. Циркулация

В началото на предния параграф видяхме, че ако имаме безвихрова несвиваема течност, потокът удовлетворява следните две уравнения

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v} = 0. \tag{40.19}$$

Тези уравнения са аналогични на уравненията на електростатиката или магнитостатиката в празното пространство. При отсъствие на заряди дивергенцията на електрическото поле е равна на нула, а ротацията на електростатическото поле винаги е равна на нула. Ротациятана магнитното поле е равна на нула при отсъствие на токове, а дивергенцията на магнитното поле винаги е равна на нула. Следователно уравненията (40.19) имат същите решения, както и уравненията за **E** в електростатиката или уравненията за **B** в магнитостатиката. Фактически в гл. 19-5 ние вече решихме задачата за обтичането на сфера от поток в качеството на електростатически аналог. Електростатическият аналог представлява хомогенното електростатическо поле плюс поле на дипол, при това полето на дипола се подбира такова, че скоростта на потока, която е нормална към повърхността на сферата, да бъде равна на нула. Задачата за обтичането на цилиндър може да се реши по същия начин, като се избере подходяща посока на дипола спрямо хомогенния поток. Тези решения са валидни и в случаите, когато скоростта на течността на големи разстояния е постоянна както по големина, така и по посока. Те са показани на фиг. 40-11, *а*.

Задачата за обтичане на цилиндър има и друго решение, когато условията са такива, че потокът на големи разстояния се движи по окръжности около цилиндъра. Тогава потокът ще бъде навсякъде кръгов (фиг. 40-11, *б*). При такъв поток има циркулация около цилиндъра, въпреки че $\nabla\times\mathbf{v}$ в *течността* си остава нула. Но по какъв начин циркулацията може да съществува без ротация? Ние имаме циркулация около цилиндъра, защото криволинейният интеграл по затворен контур, който *обхваща* цилиндъра, не е равен на нула. В същото време криволинейният интеграл от **v** по всеки затворен път, който *не* обхваща цилиндъра, ще бъде нула. Аналогични неща срещахме и по-рано, когато определяхме магнитното поле около проводник. Ротацията на **B** беше нула вън от проводника, въпреки че криволинейният интеграл от **B** по път, който обхваща проводника, не изчезва. Полето на скоростите в безвихровата циркулация около цилиндъра е точно същото, както и магнитното поле около проводника. За кръгов път с център, съвпадащ с центъра на цилиндъра, криволинейният интеграл от скоростта е

$$\oint \mathbf{v}\,.\,d\mathbf{s}=2\pi r v.$$

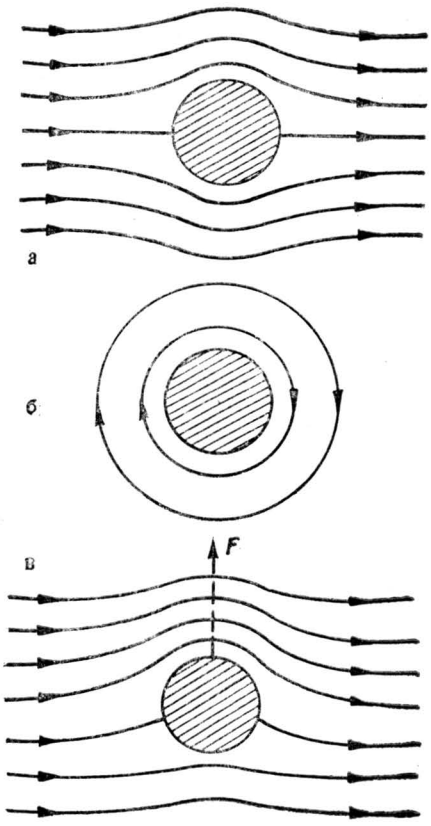
За безвихров поток интегралът не трябва да зависи от r. Като го означим с константата C, получаваме

$$v=\frac{C}{2\pi r}, \tag{40.20}$$

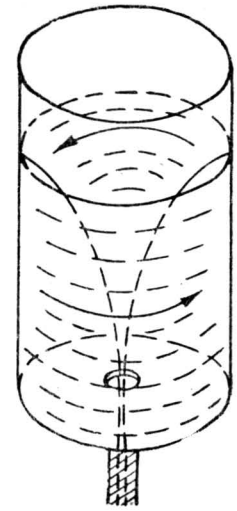
където v е тангенциалната скорост, а r — разстоянието от оста.

Съществува един много хубав начин за демонстриране на циркулацията на течност в тръба. Взимате прозрачен цилиндричен резервоар с тръбичка в центъра на дъното. Напълвате го с вода, малко я разбърквате с пръчица, махате запушалката от отводната тръба и получавате красивия ефект, показан на фиг. 40-12. (Вероятно много пъти сте виждали подобно явление във ваната.) Въпреки че в началото сте създали някаква ъглова скорост ω, тя поради вискозитета скоро затихва и потокът става безвихров. Обаче все пак около тръбата остава известна циркулация.

От теорията може да се пресметне формата на повърхността на водата в цилиндъра. С придвижването на частиците навътре те набират скорост. Съгласно с уравнението (40.20) тангенциалната скорост се увеличава като $1/r$—просто благодарение на закона за запазване на момента на количеството на движението, както при фигурист, който прибира ръцете си към тялото. Радиалната скорост също нараства като $1/r$. Ако пренебрегнем тангенциалните движения, ще получим, че водата отива навътре по радиуса към отвора, а от уравнението $\nabla\,.\,\mathbf{v}=0$, следва, че радиалната скорост е



Фиг. 40-11. Обтичане на цилиндър от идеална течност:
(*а*)—циркулация около цилиндъра — (*б*) и суперпозиция на случаите *а* и *б*- (*в*)



Фиг. 40-12. Водата, циркулирайки, изтича от резервоара

пропорционална на $1/r$. Следва, че пълната скорост също нараства като $1/r$ и водата върви по спирала на Архимед. Повърхността между вода — въздух, изцяло се намира под атмосферното налягане, така че съгласно уравнението (40.14) тя трябва да притежава свойството

$$gz+\frac{1}{2}mv^2=\text{const.}$$

Но тук v е пропорционално на $1/r$, поради това формата на повърхността ще бъде такава

$$(z-z_0)=\frac{k}{r^2}.$$

Обърнете внимание на една интересна особеност, която се наблюдава в случая на несвиваем безвихров поток (в общия случай нея я няма): ако имаме някакво решение и някакво второ решение, то тяхната сума също ще бъде решение. Това е валидно, защото уравненията (40.19) са линейни. Пълният набор от хидродинамични уравнения, т. е. уравненията (40.8) — (40.10), не е линеен, а това вече е съвсем друга работа. Обаче за безвихров поток около цилиндъра можем да наложим единия поток (фиг. 40-11, *а*) върху другия поток (фиг. 40-11, *б*) и да получим нов вид поток (фиг. 40-11, *в*). Този нов поток е особено интересен. Скоростта на потока върху горната страна на цилиндъра се оказва по-голяма, отколкото от долната, така че когато върху циркулацията около цилиндъра се налага чист хоризонтален поток, възниква действуваща върху цилиндъра вертикална сила; тя се нарича подемна сила. Разбира се, ако циркулацията липсва, то в съответствие с нашата теория за „сухата“ вода за всяко тяло сумарната сила се обръща в нула.

40-5. Вихрови линии

Ние вече писахме общите уравнения за потока на несвиваема течност при наличие на завихряне

$$\text{(I)} \qquad \nabla\cdot\mathbf{v}=0,$$

$$\text{(II)} \qquad \boldsymbol{\Omega}=\nabla\times\mathbf{v},$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial t}+\nabla\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v})=0.$$

Физическото съдържание на тези уравнения е било словесно описано от Хелмхолц в три теореми. Преди всичко представете си, че вместо линии на потока сме начертали *вихрови линии*. Под вихрови линии подразбираме линии на полето, които имат посоката на вектора $\boldsymbol{\Omega}$, а тяхната плътност във всяка област е пропорционална на големината на $\boldsymbol{\Omega}$. От уравнението (II) дивергенцията на $\boldsymbol{\Omega}$ е *винаги* равна на нула (спомнете си глава 3-7: дивергенцията на ротацията е винаги нула). Следователно вихровите линии са подобни на линиите на полето $\mathbf{B}$: те никъде не завършват и никъде не започват и винаги се стремят да се затворят. Формулата (III) Хелмхолц е описал с думите: Вихровите линии *се движат заедно с течността*. Това означава, че ако вие бихте отбелязали частичките на течността, разположени по някоя вихрова линия, например като ги боядисате с мастило, то в процеса на движението на течността и пренасянето на тези частички те винаги биха отбелязвали новото положение на вихровата линия. Както и да се движат атомите на течността, вихровите линии се движат винаги с тях. Това е един от начините за описване на законите. Той също съдържа и метода за решаване на всякакви задачи. Като зададем първоначалния вид на потока, да речем като зададем навсякъде $\mathbf{v}$, ще можем да пресметнем $\boldsymbol{\Omega}$. Като знаем $\mathbf{v}$, можем също да кажем къде ще бъдат вихровите линии малко по-късно: те се движат със скорост $\mathbf{v}$. А като знаем

новата стойност на Ω, можем, използувайки уравненията (I и II), да намерим новата величина v. (Точно както е в задачата за намиране на полето **B** по дадени токове.) Ако ни е даден видът на потока, в който и да е момент, то по принцип можем да го пресметнем за всички следващи моменти. Така получаваме общото решение за невискозен поток.

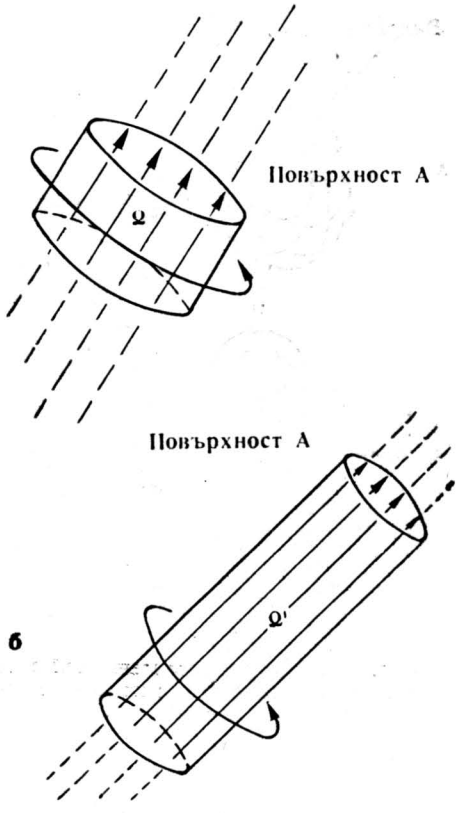
На мен би ми се искало да ви покажа как (в краен случай частично) може да се разбере твърдението на Хелмхолц, а следователно формулата (III). Фактически това е просто законът за запазване на момента на импулса, приложен към течността. Представете си малък цилиндър от течност, чиято ос е успоредна на вихровите линии (фиг. 40-13, *а*). След известно време същият този обем от течността ще се намира някъде на друго място. Изобщо той ще има формата на цилиндър с друг диаметър и ще се намира на друго място. Той може да има освен това и друга ориентация (фиг. 40-13, *б*). Но ако диаметърът се изменя, дължината също трябва да се изменя така, че обемът да остава постоянен (тъй като смятаме, че течността е несвиваема). Освен това, тъй като вихровите линии са свързани с веществото, тяхната плътност се увеличава обратно пропорционално на намаляването на площта на напречното сечение на цилиндъра. Произведението от Ω по площта на цилиндъра A ще остава постоянно, така че в съответствие с Хелмхолц

$$\Omega_2 A_2 = \Omega_1 A_1. \tag{40.21}$$

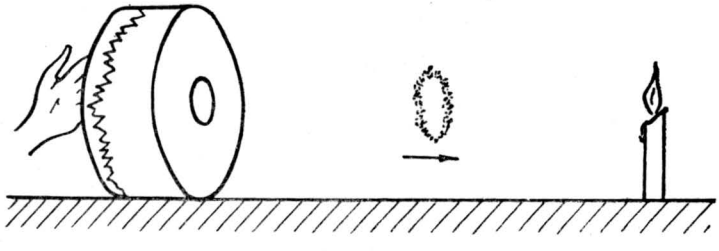
Сега обърнете внимание, че при нулев вискозитет всички сили върху повърхността на цилиндричния обем (или на всеки обем в това вещество) са перпендикулярни на повърхността. Силите на налягането могат да го принудят да си измени формата, но без *тангенциални сили големината на момента на количеството на движение на течността вътре* не може да се измени. Моментът на количеството на движение на течността вътре в малкия цилиндър е равен на произведението от неговия инерчен момент I по ъгловата скорост на течността, която е пропорционална на завихрянето Ω. Инерчният момент на цилиндъра е пропорционален на mr^2. Поради това ние бихме заключили от запазването на момента на количеството на движението, че

$$(M_1 R_1^2)\,\Omega_1 = (M_2 R_2^2)\,\Omega_2.$$

Но масата ще бъде една и съща ($M_1 = M_2$), а площта е пропорционална на R^2, така че отново ще получим просто уравнението (40.21). Твърдението на Хелмхолц, което е еквивалентно на формулата (III), е просто следствие от факта, че при липса на вискозитет моментът на количеството на движението на елемента течност не може да се измени.

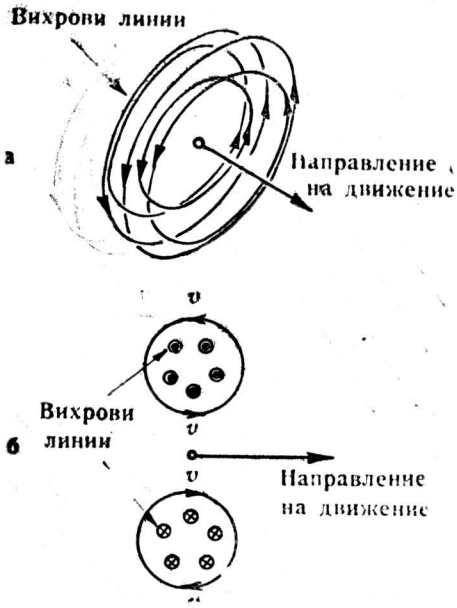


Фиг. 40-13 Група вихрови линии в момента t(*а*) и същите линии в по-късен момент t'(*б*)



Фиг. 40-14 Разпространяващи се вихрови пръстени

Има един хубав начин да се демонстрира движещият се вихър с помощта на апаратурата, показана на фиг. (40-14). Това е „барабан" с диаметър и дължина около 60 cm, който се състои от цилиндрична кутия с опънат върху нейната открита основа дебел гумен лист. Барабанът стои на страната си, а в центъра на неговото твърдо дъно е изрязан отвор с диаметър около 8 cm. Ако рязко ударим по гумената мембрана с ръка, то от отвора ще излети пръстеновиден вихър. Въпреки че този вихър не може да се види, смело може да се твърди, че той съществува, тъй



Фиг. 40-15 Вихров пръстен, който се движи (*а*) и неговото напречно сечение (*б*)

като той гаси пламъка на свещ, отстояща на 3—6 m от барабана. По закъснението на този ефект вие можете да кажете, че „нещо“ се разпространява с крайна скорост. Това, което излита, може да се разгледа по-добре, ако предварително барабанът се напълни с дим. Тогава вие ще видите вихрите във вид на великолепни пръстени от „тютюнев дим“.

Пръстенът от дим (фиг. 40-15, *а*) — това е просто геврек от вихрови линии. Тъй като $\Omega=\nabla\times\mathbf{v}$, тези вихрови линии описват също циркулацията на $\mathbf{v}$ (фиг. 40-15, *б*). За да обясним защо пръстенът се движи напред (т. е. в посока, която дава десен винт с посоката на Ω), можем да разсъждаваме така: Скоростта на циркулацията се увеличава към *вътрешната* повърхност на пръстена, при това скоростта вътре в пръстена е насочена напред. Тъй като линиите Ω се пренасят заедно с течността, то и те се движат напред със скорост $\mathbf{v}$. (Разбира се, голямата скорост по вътрешната част на пръстена е отговорна за движението напред на вихровите линии върху неговата външна част.)

Тук е необходимо да посочим една сериозна трудност. Както вече отбелязахме, уравнението (40.90) ни говори, че ако завихрянето Ω е било първоначално равно на нула, то винаги остава равно на нула. Този резултат е крушение на теорията на „сухата“ вода, защото той означава, че ако в някакъв момент стойността на Ω е равна на нула, то тя *винаги* ще бъде равна на нула и при никакви обстоятелства няма да бъде възможно да се *създадат* вихри. Обаче в нашия прост опит с барабана ние можахме да създадем вихрови пръстени във въздуха, който преди това се намираше в покой. (Ясно е, че докато не ударим по барабана, вътре в него $\mathbf{v}=0$ и $\Omega=0$.) Всички знаят, че загребвайки с веслото, можем да създадем вихри във водата. Несъмнено за пълното разбиране на поведението на течността трябва да се премине към теорията на „мократа“ вода.

Друго невярно твърдение в теорията на „сухата“ вода е предположението, което направихме при разглеждането на потока на границата между него и повърхността на твърд предмет. Когато обсъждахме обтичането на цилиндъра от потока (например фиг. 40-11), приехме, че течността се плъзга по повърхността на твърдото тяло. В нашата теория скоростта върху повърхността на твърдото тяло можеше да има произволна стойност, зависеща от това, как е започнало движението и ние не отчитахме никакво „триене“ между течността и твърдото тяло. Обаче това, че скоростта на реалната течност трябва да стане нула върху повърхността на твърдото тяло, е експериментален факт. Следователно нашите решения за цилиндъра и с циркулацията, и без нея са неправилни, както и резултатът за създаването на вихъра. За по-правилните теории ще ви разкажа в следната глава.

41

Как тече „мократа“ вода

41-1. Вискозитет.

41-2. Вискозен поток.

41-3. Число на Рейнолдс.

41-4. Обтичане на кръгов цилиндър.

41-5. Граничен случай на нулев вискозитет.

41.6. Поток на Куете.

41-1. Вискозитет

В предната глава говорихме за поведението на водата, като пренебрегвахме при това ефектите от вискозитета. Сега на мен би ми се искало да обсъдим как вискозитетът влияе върху движението на течността. Да разгледаме *реалното поведение* на течността. Аз ще ви опиша качествено как се проявява тя в най-различни условия, така че вие да почувствувате по-добре тази наука. И въпреки че ще видите сложни уравнения и ще чуете за трудни неща, нашата цел съвсем не е в това да изучим всички тънкости. Целта на тази глава е по-скоро „общообразователна“, аз просто искам да ви дам някои понятия за това как е устроен светът. Обаче тук все пак има един пункт, който си струва да се изучи: полезно е да се знае простото определение на вискозитета. С него именно ще започнем. Всичко останало е предназначено за вашето удоволствие.

В предната глава намерихме, че законите за движението на течността се съдържат в уравнението

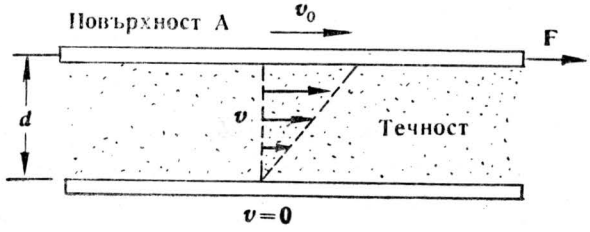
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}=-\frac{\nabla\cdot p}{\rho}-\nabla\varphi+\frac{\mathbf{f}_{\text{виск}}}{\rho}. \tag{41.1}$$

В нашето приближение на „сухата“ вода ние изоставихме последното събираемо така, че пренебрегнахме всички ефекти от вискозитета. Освен това понякога правехме още едно допълнително приближение, като смятахме течността несвиваема. При това получихме допълнителното уравнение

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0.$$

Това приближение често се оказва напълно прилично особено когато скоростта на потока е много по-малка от скоростта на звука. Но в реалните течности ние почти никога не можем да пренебрегнем вътрешното триене, наричано от нас вискозитет; повечето интересни неща в поведението на течността така или иначе са свързани именно с това свойство. Така ние научихме, че циркулацията на „сухата“ вода никога не се изменя: ако тя е липсвала в началото, то никога няма да се появи. Но от друга страна, ние всекидневно се срещаме с циркулация в течността. Така че нашата теория трябва да се поправи.

Да започнем с един важен експериментален факт. Когато се занимавахме с потока на „сухата“ вода, обтичаща някакъв предмет или течаща покрай него, т. е. така наречения „потенциален поток“, нямахме причини да забраним на водата да има съставяща на скоростта тангенциална към повърхността на предмета; само нормалната компонента трябваше да бъде равна на нула. Ние не взимахме под внимание възможността за възникване на сили на отместване между течността и твърдото тяло. А ето, оказва се, въпреки че това далеч не е очевидно, че във всички случаи, в които е била направена експериментална проверка, *скоростта на течността върху повърхността на твърдото тяло е почти точно равна на нула.* Вие сте забелязали, разбира се, че лопатките на вентилатора събират върху себе си тънък слой прах независимо от това, че те се въртят във въздуха. Същият ефект може да се наблюдава даже в големите аеродинамични тръби. Защо прахът не се издухва от въздуха? Независимо от това, че лопатките на вентилатора се въртят бързо във въздуха,



Фиг. 41-1 Увличане на течността между две успоредни пластинки

скоростта на въздуха спрямо тях, измерена непосредствено върху тяхната повърхност, е равна на нула, така че потокът от въздух не смущава най-малките прашинки[1]. Ние трябва да модифицираме теорията така, че тя да се съгласува с експерименталния факт, че във всички обикновени течности молекулите, които се намират до повърхността, имат нулева скорост (относно повърхността)[2].

Отначало ние характеризирахме течността така, че ако към нея се приложи напрежение на отместване, колкото и малко да е то, течността се „подава“ и тече. В статическия случай няма никакви напрежения на отместване. Обаче когато още няма равновесие, в момент когато вие налягате върху течността, сили на отместване могат напълно да съществуват. *Вискозитетът* именно описва тези сили, възникващи в течност, която се движи. За да определим силите на отместването в процеса на движение на течността, нека разгледаме следния експеримент: да предположим, че имаме две успоредни твърди пластинки, между които се намира вода (фиг. 41-1). При това едната от пластинките е неподвижна, докато другата се движи спрямо нея с малка скорост v_0. Ако измервате силата, необходима за поддържане на движението на горната пластинка, ще намерите, че тя е пропорционална на площта на пластинката и на отношението v_0/d, където d е разстоянието между пластинките. Оказва се, че напрежението на отместването F/A е пропорционално на v_0/d:

$$\frac{F}{A}=\eta\frac{v_0}{d}.$$

Коефициентът на пропорционалност η се нарича коефициент на вискозитета.

Ако имаме пред нас по-сложен случай, винаги можем да разгледаме във водата малък правоъгълен обем, чиито стени са успоредни на потока (фиг. 41-2). В този обем силите се определят от израза

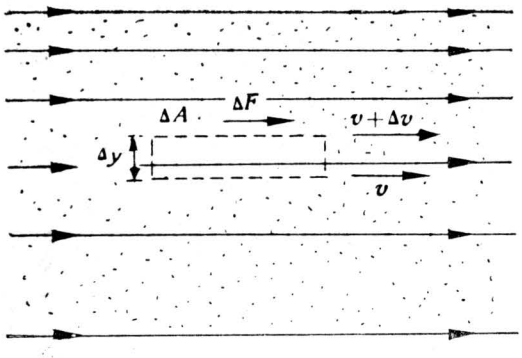
$$\frac{\Delta F}{\Delta A}=\eta\frac{\Delta v_x}{\Delta y}=\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}. \tag{41.2}$$

По-нататък $\partial v_x/\partial y$ представлява скоростта на изменението на деформациите на отместването, определени от нас в гл. 38, така че силите в течността са пропорционални на скоростта на изменението на деформациите на отместване.

В общия случай пишем

$$S_{xy}=\eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \tag{41.3}$$

При равномерно въртене на течността производната $\partial v_x/\partial y$ е равна на $\partial v_y/\partial x$ с обратен знак, а S_{xy} ще бъде равна на нула, както това се изисква, защото в равномерно въртяща се течност липсват напрежения (подобно нещо направихме в глава 39 при определянето на e_{xy}). Разбира се, за S_{yz} и S_{zx} също има съответни изрази.



Фиг. 41-2 Напрежение на плъзгане във вискозна течност

[1] *Големи прашинки могат* да се издухат от масата, а най-малките — не. Техните връхчета не се „всмукват“ в потока.

[2] Можем да си представим и такъв случай, когато това би се оказало невярно. Теоретически стъклото също представлява „течност“, обаче то може свободно да се плъзга по стоманена повърхност. Така че и такава теория някъде трябва да се оправя.

Като пример за прилагането на тези идеи ще разгледаме движението на течността между два коаксиални цилиндъра. Нека радиусът на вътрешния цилиндър е a, неговата скорост да бъде v_a, а радиусът на външния цилиндър нека бъде b и скоростта му v_b (фиг. 41-3). Възниква въпросът какво е разпределението на скоростите между цилиндрите? За да отговорим на този въпрос, да започнем с получаването на формулата за вискозното отместване в течността на разстояние r от оста. От симетрията на задачата можем да предположим, че потокът винаги е тангенциален и че неговата стойност зависи само от r; $v=v(r)$. Ако следим за прашинка във водата, която се намира на разстояние r от оста, нейните координати като функция от времето ще бъдат

$$x=r\cos\omega t, \quad y=r\sin\omega t,$$

където $\omega=v/r$. При това x- и y-компонентите на скоростта са

$$v_x=-r\omega\sin\omega t=-\omega y \quad \text{и} \quad v_y=r\omega\cos\omega t=\omega x. \tag{41.4}$$

От формулата (41.3) получаваме

$$S_{xy}=\eta\left[\frac{\partial}{\partial x}(x\omega)-\frac{\partial}{\partial y}(y\omega)\right]=\eta\left[x\frac{\partial\omega}{\partial x}-y\frac{\partial\omega}{\partial y}\right]. \tag{41.5}$$

За точките с $y=0$ имаме $\partial\omega/\partial y=0$, а $x(\partial\omega/\partial x)$ ще бъде равно на $r(d\omega/dr)$. Така че в тези точки

$$(S_{xy})_{y=0}=\eta r\frac{d\omega}{dr}. \tag{41.6}$$

(Разумно е да се мисли, че величината S трябва да зависи от $\partial\omega/\partial r$, когато ω не се изменя с r, течността се намира в състояние на равномерно въртене и в нея не възникват напрежения.)

Пресметнатото от нас напрежение представлява тангенциално отместване еднакво навсякъде около цилиндъра. Ние можем да получим *момента на силата*, действуваща върху *цилиндричната повърхност* с радиус r, като умножим напрежението на отместването по рамото r на импулса и площта $2\pi rl$:

$$\tau=2\pi r^2 l\,(S_{xy})_{y=0}=2\pi\eta\, lr^3\frac{d\omega}{dr}. \tag{41.7}$$

Тъй като движението на водата е стационарно и липсва ъглово ускорение, пълният момент, който действува върху цилиндричната повърхност във водата между радиусите r и $r+dr$, трябва да бъде нула; другояче казано, моментът на силите на разстояние r трябва да се уравновесява от равен и противоположно насочен момент на силите на разстояние $r+dr$, така че τ не трябва да зависи от r. С други думи, $r^3(d\omega/dr)$ е равно на някаква константа, да речем A и

$$\frac{d\omega}{dr}=\frac{A}{r^3}. \tag{41.8}$$

Като интегрираме, намираме по какъв начин се изменя ω с r

$$\omega=-\frac{A}{2r^2}+B. \tag{41.9}$$

Константите A и B трябва да се определят от условието, че $\omega=\omega_a$ в точката $r=a$, а $\omega=\omega_b$ в точката $r=b$. Тогава намираме

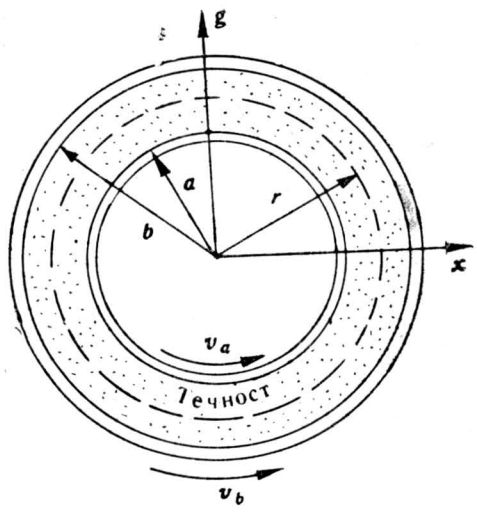
$$A=\frac{2a^2b^2}{b^2-a^2}(\omega_b-\omega_a). \tag{41.10}$$

$$B=\frac{b^2\omega_b-a^2\omega_a}{b^2-a^2}.$$

Сега вече ω ни е известна като функция от r и следователно известно е и $v=\omega r$.

Ако искаме да определим момента на силата, можем да го получим от изразите (41.7) и (41.8)

$$\tau=2\pi\eta lA$$



Фиг. 41-3 Поток на течността между два концентрични цилиндъра, които се въртят с различни ъглови скорости

или

$$\tau = \frac{4\pi\eta\, la^2b^2}{b^2-a^2}(\omega_b - \omega_a). \qquad (41.11)$$

Той е пропорционален на относителната ъглова скорост на двата цилиндъра. Съществува стандартен уред за измерване на коефициента на вискозитета, който е устроен по следния начин: единият от цилиндрите (да речем външният) е поставен на ос, но се удържа в неподвижно състояние от пружинен динамометър, който измерва действуващия върху него момент на сила, а вътрешният цилиндър се върти с постоянна ъглова скорост. Коефициентът на вискозитета се определя от формулата (41.11).

От определението на коефициента на вискозитета виждате, че η се измерва в *нютон.сек/м²*. За водата при 20°C

$$\eta = 10^3 \text{ нютон.сек/м}^2.$$

Често е по-удобно да се използува специфичният вискозитет, който е равен на η, разделена на плътността ρ. При това големините на специфичните вискозитети на водата и въздуха са сравними

$$\text{Вода при } 20°\text{C} \quad \frac{\eta}{\rho} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

$$\text{Въздух при } 20°\text{C} \quad \frac{\eta}{\rho} = 15.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Обикновено вискозитетът зависи много силно от температурата. Например за водата непосредствено над точката на замръзване отношението η/ρ е 1,8 по-голямо, отколкото при 20°C.

41-2. Вискозен поток

Да преминем сега към общата теория на вискозния поток, по-не дотолкова обща, доколкото това е известно на човека. Вие вече разбирате, че компонентите на напреженията на отместването са пропорционални на пространствените производни от различните компоненти на скоростта, такива като dv_x/dy или dv_y/dx. Обаче в общия случай на *свиваема* течност в напреженията има и друг член, който зависи от други производни на скоростта. Общият израз има видът

$$S_{ij} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \eta'\delta_{ij}(\nabla \cdot \mathbf{v}), \qquad (41.13)$$

където x_i означава всяка една от координатите x, y или z; v_i — всяка една от правоъгълните компоненти на скоростта (символът δ_{ij} представлява символът на Кронекер, който е равен на единица при $i=j$ и нула при $i \neq j$). Към всички диагонални елементи S_{ij} на тензора на напреженията се добавя допълнителният член $\eta'\nabla \cdot \mathbf{v}$. Ако течността е несвиваема, то $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ и допълнителният член не се появява, така че той действително има отношение към вътрешните сили при свиване. За описването на течността точно така, както и за описването на хомогенно твърдо тяло, са необходими две константи. Коефициентът η представлява „обикновеният“ коефициент на вискозитет, който вече отчетохме. Той се нарича също така *първи коефициент на вискозитета*, а новият коефициент η' се нарича *втори коефициент на вискозитета*.

Сега ни предстои да намерим вискозната сила $f_{\text{виск}}$, която действува върху единица обем, след което ще можем да я заместим в уравнението (41.1) и да получим уравнението на движението на реалната течност. Силата, която действува върху малък кубичен обем от течността, представлява равнодействуващата на всички сили, действуващи върху всичките шест стени. Като ги вземем по две наведнъж, ще получим разликата, която зависи от производните на напреженията и следователно от вторите производни на скоростите. Това е приятен резултат, защото той ни

води отново към векторно уравнение. Компонентата на вискозната сила, действуваща върху единица обем по посока на оста x_i, е

$$(f_{\text{виск}})_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} = \eta \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta' \nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (41.14)$$

Обикновено зависимостта на коефициентите на вискозитета от координатите, т. е. от положението, е несъществено и тя може да се пренебрегне. Тогава вискозната сила в единица обем съдържа само вторите производни на скоростта. Ние видяхме в гл. 39, че най-общата форма на вторите производни в едно векторно уравнение ще бъде сумата от Лапласиана $(\nabla \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla^2\mathbf{v}$ и градиента на дивергенцията $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$. Изразът (41.14) представлява именно такава сума с коефициенти η и $(\eta + \eta')$. Получаваме

$$\mathbf{f}_{\text{виск}} = \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta') \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (41.15)$$

В случая на несвиваема течност $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ и вискозната сила в единица обем ще бъде просто $\eta \nabla^2 \mathbf{v}$. Това е всичко, което обикновено се използува; обаче ако ви се наложи да пресмятате поглъщане на звук в течност, ще ви потрябва и втория член.

Сега можем да завършим извода на уравнението на движението на реална течност. Като заместим (41.15) в уравнението (41.1), получаваме

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot)\nabla\right] = -\nabla p - \rho \nabla \varphi + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta') \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

Уравнението, което се получи, разбира се, е сложно, но няма какво да се прави, такава е природата.

Ако въведем $\Omega = \nabla \times \mathbf{v}$, както направихме това по-рано, нашето уравнение може да се запише във вида

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Omega \times \mathbf{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2\right] = -\nabla p - \rho \nabla \varphi + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta') \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (41.16)$$

Отново предполагаме, че единствената обемна сила представлява консервативната сила на тежестта. За да разберем смисъла на новия член, нека разгледаме случая на несвиваема течност. Ако вземем ротация от уравнението (41.16), ще получим

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times \mathbf{v}) = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \Omega. \quad (41.17)$$

Това напомня (40.9) само с тази разлика, че в дясната част има още едно събираемо. Когато дясната част беше равна на нула, имахме теоремата на Хелмхолц за това, че вихрите винаги се движат заедно с течността. Сега в дясната част се появи един твърде сложен израз, от който обаче не следват веднага физически изводи. Ако ние бихме пренебрегнали члена $\nabla \times (\Omega \times \mathbf{v})$, бихме получили *уравнението на дифузията*. Новият член означава, че вихрите дифундират в течността. При голям градиент вихрите се разпълзяват в съседните области от течността.

Именно поради това колелцата от тютюнев дим се уголемяват. С това е свързано едно красиво явление, което възниква при преминаването на пръстен от „чист“ вихър (т. е. „бездимен“ пръстен, създаден с помощта на апаратурата, описана в предната глава) през облак дим. Когато той излиза от облака, към него „прилепва“ известно количество дим и ние виждаме куха обвивка от дим. Известно количество завихреност Ω дифундира в околния дим, продължавайки своето движение напред заедно с вихъра.

41-3. Число на Рейнолдс

Да разгледаме сега как се изменя протичането на течността поради новия член с вискозитета. Ще разгледаме малко по-подробно две задачи. Първата — това е обтичането на цилиндър от течност; ние се опитвахме да решим тази задача в третата глава, като използувахме теорията на невискозните течности. Оказва се, че понастоящем може да се намери решение на вискозните уравнения само за някои специални случаи. Така че, част от това, което ще ви разкажа, е основано на експериментални измервания, като се предполага, разбира се, че експерименталният модел удовлетворява уравнението (41.17).

Математически задачата се състои в следното: искаме да намерим решение за потока несвиваема вискозна течност близко до дълъг цилиндър с диаметър D. Потокът трябва да се определя от уравнението (41.17) и

$$\Omega=\nabla\times\mathbf{v} \tag{41.18}$$

с условието, че скоростта на големи разстояния е равна на някаква константа V (успоредна на оста x), а върху повърхността на цилиндъра тя е равна на нула. Така че

$$v_x=v_y=v_z=0 \tag{41.19}$$

при

$$x^2+y^2=\frac{D^2}{4}.$$

Това напълно определя математическата задача.

Ако се вгледате в тези изрази, ще видите, че в задачата има четири различни параметъра: η, ρ, D и V. Може да се помисли, че ще ни се наложи да имаме работа с цяла серия решения, за различни V, различни D и т. н. Съвсем не. Всички възможни различни решения съответствуват на различни стойности на един параметър. Това е най-важното общо нещо, което можем да кажем за вискозния поток. А за да разберете защо това е така, забележете отначало, че вискозитетът и плътността се появяват във вид на отношението η/ρ, т. е. специфичен вискозитет. Това намалява броя на независимите параметри до три. Да предположим сега, че всички разстояния се измерват в единиците на тази единствена дължина, която се появява в задачата: диаметърът на цилиндъра D, т. е. вместо x, y, z ние въвеждаме новите променливи x', y', z', при което

$$x=x'D,\quad y=y'D,\quad z=z'D.$$

При това параметърът D от (41.19) изчезва. Точно така, ако измерваме всички скорости в единици V, т. е. ако положим $v=v'V$, ще се избавим от V, а v' на големи разстояния ще бъде равна просто на единица. Тъй като ние фиксирахме нашите единици за дължина и скорост, единицата за време сега трябва да бъде D/V, така че трябва да направим заместването

$$t=t'\frac{D}{V}. \tag{41.20}$$

В нашите нови променливи производните в уравнението (41.18) също се изменят така $\partial/\partial x$ преминава в $(1/D)(\partial/\partial x')$ и т. н., така че уравнението (41.18) се превръща в

$$\Omega=\nabla\times\mathbf{v}=\frac{V}{D}\nabla'\times\mathbf{v}'=\frac{V}{D}\Omega'. \tag{41.21}$$

А нашето основно уравнение (41.17) преминава в

$$\frac{\partial\Omega'}{\partial t'}+\nabla'\times(\Omega'\times\mathbf{v}')=\frac{\eta}{\rho VD}\nabla'^2\Omega'.$$

Всички константи при това се събират в един множител, който следвайки традицията, ще означим с $1/\mathcal{R}$

$$\mathcal{R}=\frac{\rho}{\eta}VD. \tag{41.22}$$

Ако сега просто запомним, че всички наши уравнения трябва да се пишат за величини, които се измерват в новите единици, можем да изпуснем всички щрихове. Тогава уравненията за потока приемат вида

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t}+\nabla\times(\Omega\times\mathbf{v})=\frac{1}{\mathcal{R}}\nabla^2\Omega \tag{41.23}$$

и

$$\Omega=\nabla\times\mathbf{v},$$

с условията

$$\mathbf{v}=0$$

за

$$x^2+y^2=\frac{1}{4} \tag{41.24}$$

и

$$v_x=1 \qquad v_y=v_z=0$$

за

$$x^2+y^2+z^2\gg 1.$$

Какво значи всичко това? Ако например сме решили задачата за поток с една скорост V_1 и някакъв цилиндър с диаметър D_1, а след това се интересуваме от обтичането на цилиндър с друг диаметър D_2 от друга течност, то потокът ще бъде един и същи при такава скорост V_2, която отговаря на това същото число на Рейнолдс, т. е. когато

$$\mathcal{R}_1=\frac{\rho_1}{\eta_1}V_1D_1=\mathcal{R}_2=\frac{\rho_2}{\eta_2}V_2D_2. \tag{41.25}$$

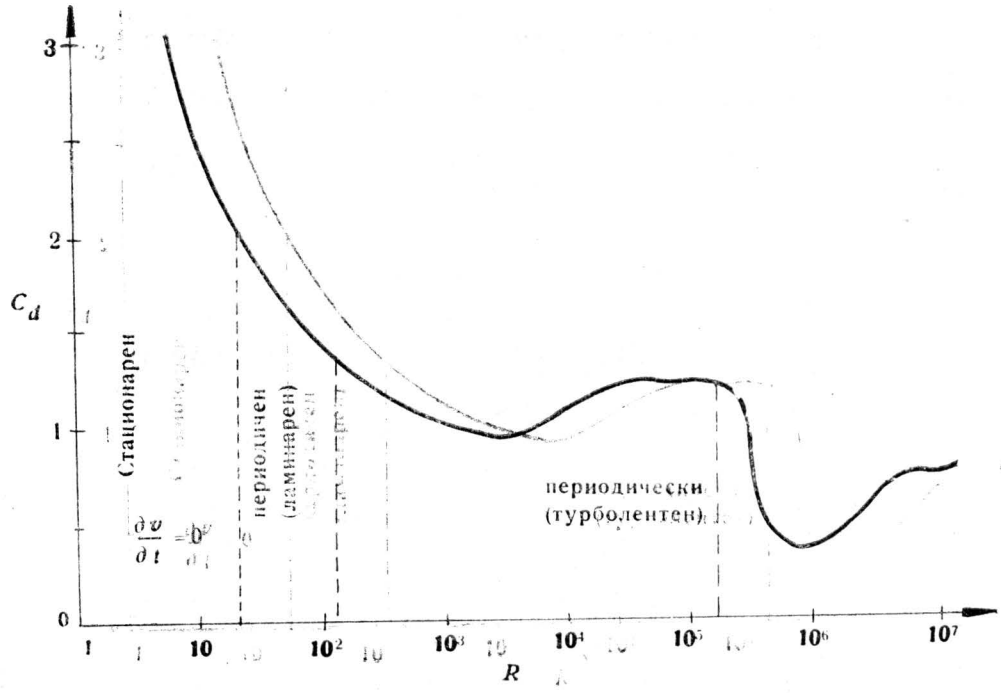
Във всички случаи, когато числата на Рейнолдс са еднакви, потокът при избора на подходящ мащаб x', y', z' и t' ще „изглежда“ по един и същи начин. Това е много важно твърдение, защото то означава, че можем да определяме поведението на потока въздух при обтичането на крилата на самолета, без да строим самия самолет и без да го изпитваме. Вместо това можем да построим модел и да направим измервания, като използуваме скорост, която дава същото число на Рейнолдс. Именно този принцип ни позволява да прилагаме резултатите от измерванията над малък модел на самолета в аеродинамичната тръба или резултатите, получени с модела на кораб, към истински обекти. Ще ви напомня обаче, че това е възможно при условие, че свиваемостта на течността може да се пренебрегне. В противен случай ще влезе нова величина — скоростта на звука. При това различните модели действително ще съответствуват един на друг само тогава, когато отношението на V към скоростта на звука е също приблизително еднакво. Отношението на скоростта V към скоростта на звука се нарича *число на Мах*. Следователно за скорости, близки до скоростта на звука или по-големи от нея, потокът в двете задачи ще изглежда еднакво, ако и *числото на Мах* и *числото на Рейнолдс* в двете ситуации са *еднакви.*

41-4. Обтичане на кръгов цилиндър

Да се върнем сега обратно към задачата за обтичане на цилиндъра от бавен (почти несвиваем) поток. Аз ще ви дам качествени описания на потока от реална течност. За такъв поток е необходимо да се знаят множество неща. Например каква увличаща сила действува върху цилиндъра? Силата, която увлича цилиндъра, е показана на фиг. 41-4 като функция на величината $\mathcal{R}$, която е пропорционална на скоростта V, ако всичко останало е фиксирано. Фактически на графиката е даден *коефициентът на увличането* C_d — безразмерно число, равно на отношението на силата към $1/2\rho V^2Dl$ (D е диаметърът, l е дължината на цилиндъра, а ρ — плътността на течността)

$$C_d=\frac{F}{\frac{1}{2}\rho V^2Dl}.$$

Коефициентът на увличане се изменя по един твърде сложен начин, като че ли намеквайки, че в потока става нещо интересно



Фиг. 41-4. Коефициент на увличането C_d на кръгов цилиндър като функция на числото на Рейнолдс

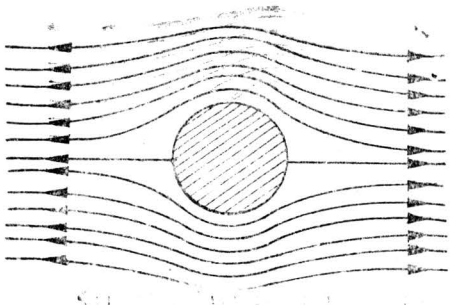
и сложно. Полезно е свойствата на потока да се описват за различни области на изменението на числото на Рейнолдс. Преди всичко, когато числото на Рейнолдс е много малко, потокът е напълно стационарен, скоростта във всяка точка от потока е постоянна и той плавно обтича цилиндъра. Обаче разпределението на линиите на потока не прилича на тяхното разпределение в потенциалния поток. Те описват решението на малко по-друго уравнение. Когато скоростта е много малка или, което е еквивалентно — вискозитетът много голям, така че веществото по своята консистенция напомня мед, можем да отхвърлим инерционните членове и да опишем потока с уравнението

$$\nabla^2 \Omega = 0.$$

Това уравнение е било решено за първи път от Стокс. Той също е решил задачата за сфера. Когато малка сфера се движи при малки числа на Рейнолдс, към нея е приложена сила, равна на $6\pi\eta aV$, където a е радиусът на сферата, а V нейната скорост.

Това е много полезна формула: тя ни дава скоростта, с която малки частички, които приближено могат да се считат за топчета, се движат в течността под действието на дадена сила, както става това например в центрофуга или при утаяване, или накрая в процеса на дифузията. В областите на малките числа на Рейнолдс, т. е. при $\mathcal{R}<1$, линиите $\mathbf{v}$ около *цилиндъра* имат вида, показан на фиг. 41-5.

Ако сега увеличим скоростта на потока, така че числото на Рейнолдс да стане малко по-голямо от единица, ще видим, че потокът ще се измени. Както е показано на фиг. 41-6, *б*, зад сферата ще възникнат вихри. И досега не е изяснено дали вихрите са съществували и при малките числа на Рейнолдс, или те възникват неочаквано при някакво определено число? Обикновено са смятали, че циркулацията нараства постепенно. Обаче сега смятат, че по-скоро тя се проявява неочаквано и нараства с увеличението на $\mathcal{R}$. Във всеки случай потокът в интервала от $\mathcal{R}=10$ до $\mathcal{R}=30$ мени своя характер. Зад цилиндъра се образува двойка вихри.



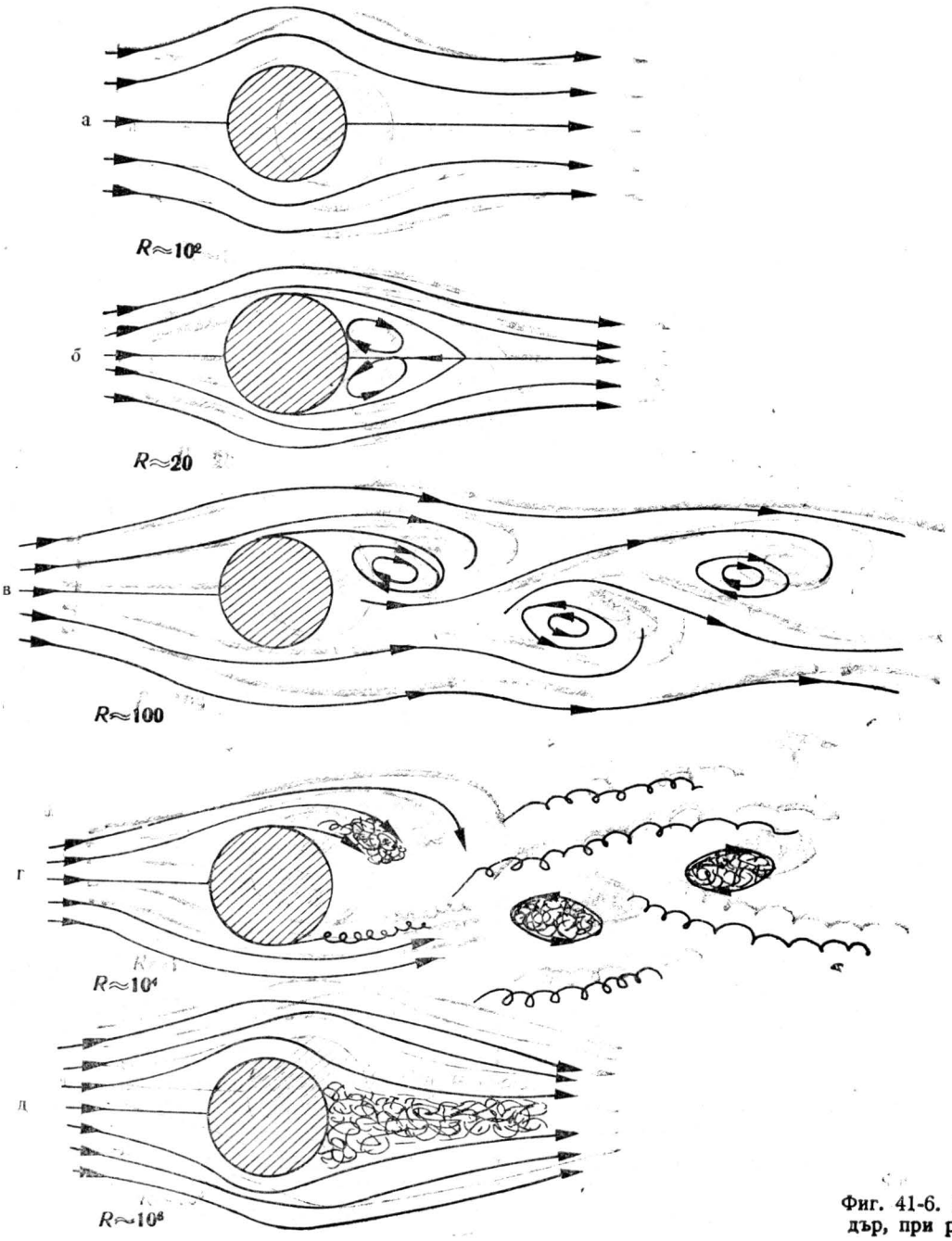
Фиг. 41-5. Вискозен поток близо до цилиндъра (малък вискозитет)

Когато числото на Рейнолдс минава през стойности около 40, потокът отново се мени. Характерът на движението търпи неочаквано и рязко изменение. Единият от вихрите зад цилиндъра става толкова дълъг, че той се откъсва и плува надолу по течението заедно с течността. При това течността зад цилиндъра

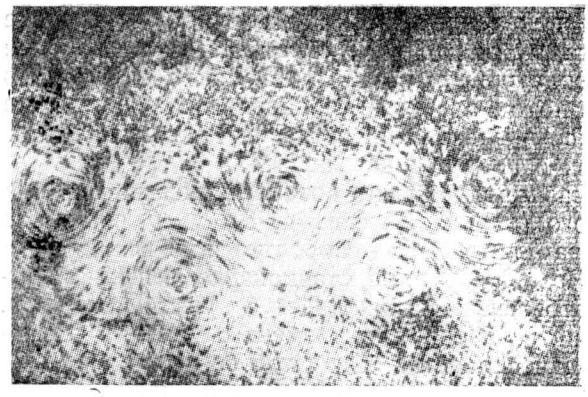
отново се завива и възниква нов вихър. Тези вихри поредно се откъсват ту от едната, ту от другата страна, така че в даден момент потокът изглежда приблизително така, както е показано на фиг. 41-6, *в*. Такъв поток от вихри се нарича вихрова верижка на Карман. Тя винаги се проявява при числа на Рейнолдс $\mathcal{R}>40$. Снимка на такъв поток е показана на фиг. 41-7.

Разликата в режима между двата потока, показани на фиг 41-6, *а*, *б* или *в* е много голяма. На фиг. 41-6,*а* и *б* скоростта е постоянна, докато на фиг. 41-6,*в* скоростта във всяка точка се изменя с времето. Над $\mathcal{R}=40$ няма стационарно решение. Границата на прехода е отбелязана на фиг. 41-4 с пунктирана линия. За такива по-високи числа потокът се изменя с времето по някакъв *правилен* периодически начин. Създават се вихри.

Можем да си представим физическата причина за възникването на тези вихри. Ние знаем, че върху повърхността на цилиндъра скоростта на течността трябва да бъде равна на нула, но при отдалечаване от повърхността скоростта бързо нараства. Това голямо местно изменение на скоростта на течността именно създава вихрите. Когато скоростта на основния поток е доста-



Фиг. 41-6. Поток, който обтича цилиндър, при различни числа на Рейнолдс



Фиг. 41-7. Снимка на верижка вихри в потока след цилиндъра

тъчно малка, вихрите имат достатъчно време, за да дифундират от тънкия слой близо до повърхността на твърдото тяло, където те се създават, и да се „разпилеят“ по голяма област. Тази физическа картина трябва да ни подготви към следващото изменение на природата на потока, когато скоростта на основния поток или числото $\mathcal{R}$ се увеличава още повече.

С нарастването на скоростта на вихъра му остава все по-малко и по-малко време, за да се „разпилее“ по голяма област от течността. В момента когато числото на Рейнолдс достигне няколко хиляди, вихрите започват да запълват тънка лента (фиг. 41-6, *г*). В такъв слой потокът е хаотичен и неправилен. Такава област се нарича *пограничен слой* и този нередовен поток с увеличаването на $\mathcal{R}$ си пробива път все по-далече и по-далече надолу по течението. В областта на турбулентността скоростите са съвсем неправилни и „безредни“ и освен това потокът вече не е двумерен. Той се върти във всичките три измерения. Освен това върху турбулентното движение се налага още и правилното променливо движение.

При по-нататъшното увеличаване на числото на Рейнолдс областта на турбулентността се промъква напред, докато при поток с $\mathcal{R}$, което превишава 10^5, не достигне място, където токовите линии обхващат цилиндъра. При това потокът ще прилича на това, което е показано на фиг. 41-6, *д* и ние получаваме така наречената „турбулентна следа“. Освен това стават коренни изменения в силата на увличането — тя, както се вижда от фиг. 41-4, силно пада. При такива скорости увличащата сила действително намалява с нарастването на скоростта. Както изглежда, тук се проявява някакъв стремеж към периодичност.

А какво става при още по-големи числа на Рейнолдс? С по-нататъшното увеличаване на скоростта размерите на областта на турбуленциите отново се увеличават и силата на съпротивлението нараства. Последните експерименти, които стигат до областта $\mathcal{R}=10^7$ или малко повече, показват, че в турбулентната област се появява нова периодичност, може би поради това че цялата област се колебае напред и назад в общото движение, а може би поради нов вид вихри, които се появяват заедно с неправилното „шумово“ движение. Неговите детайли не са още напълно ясни и те се изучават експериментално и понастоящем.

41-5. Граничен случай на нулев вискозитет

На мен ми се иска да подчертая, че нито един от описаните потоци в никакво отношение не прилича на решението на уравненията на потенциалния поток, за което говорихме в предната глава. На пръв поглед това е твърде удивително. Та нали $\mathcal{R}$ в края на краищата е пропорционално на $1/\eta$, така че преходът $\eta \to 0$ е еквивалентен на прехода $\mathcal{R} \to \infty$. И ако преминем към граничния случай на големи $\mathcal{R}$ в (41.23), ще се избавим от дясната част и ще получим именно уравненията от предната глава. Но все пак е трудно да се повярва, че силно турбулентният поток с $\mathcal{R}=10^7$ даже и в някаква малка степен се приближава към гладкия поток,

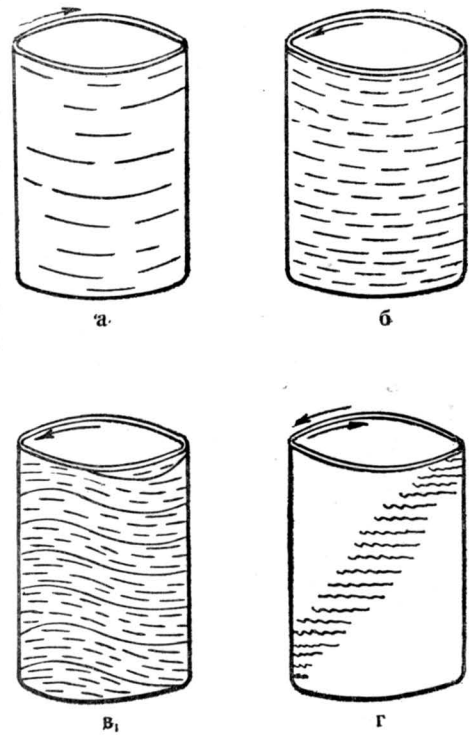
пресметнат от уравненията на „сухата“ вода. Как може да стане така, че при $\mathcal{R}=\infty$ потокът, който се описва от уравнението. (41.23), да дава решение, напълно различно от решението, получено при $\eta=0$, с което започнахме? Отговорът е много интересен. Обърнете внимание, че в дясната част на (41.23) се намира произведението от $1/\mathcal{R}$ по *втората производна*. Това е най-голямата степен на производната в уравнението: отляво има само първи производни. Получава се така, че въпреки че коефициентът $1/\mathcal{R}$ става малък, в пространството близо до повърхността Ω търпи много бързи промени. Тези резки промени компенсират намаляването на коефициента и произведението *не клони към нула* с увеличаването на $\mathcal{R}$. Поради това въпреки че коефициентът пред $\nabla^2\Omega$ клони към нула, решенията не се приближават към пределния случай.

Вие можете да се учудите: „Каква е тази дребномащабна турбулентност и как тя може да се поддържа сама себе си? По какъв начин завихрянето, което се създава някъде по краищата на цилиндъра, води до такъв шум зад него? Отговорът отново е много интересен. Завихрянето има тенденция към самоусилване. Ако за минута забравим за дифузията на вихрите, която предизвиква загуби, законите на потока говорят (както вече видяхме), че вихровите линии се пренасят заедно с течността със скорост $\mathbf{v}$. Представете си известен брой линии, които се преплитат в една много сложна картина на скоростите на потока. Преди всичко простите линии ще се забъркат и слеят. Големината на завихрянето ще нараства така, както и неговите неправилности (положителни и отрицателни), които, общо казано, също ще се увеличават. По такъв начин завихрянето в трите измерения ще нараства с размесването на течността.

Вие можете също така да запитате: „Кога в края на краищата е валидна теорията на потенциалния поток?“ Преди всичко тя е удовлетворителна вън от турбулентната област, където проникването на завихрянето вследствие на дифузията е незначително. Като изработваме специални обтекаеми тела, ние се стараем да направим колкото е възможно по-малка областта на турбулентността. Потокът, който обтича крилата на самолета, които имат специално пресметната форма, е почти истински потенциален поток.

41-6. Поток на Куете

Може да се покаже, че сложният и променлив характер на потока покрай цилиндъра не е изключение и че такова разнообразие на възможностите се получава и в общия случай. В § 1 ние намерихме решение за вискозна течност между два цилиндъра и можем да сравним тези резултати с това, което се получава в действителност. Ако вземем два концентрични цилиндъра и запълним пространството между тях с масло, в което е добавено ситна алуминиева пудра, лесно ще можем да наблюдаваме потока. Ако започнем бавно да въртим външния цилиндър, няма да се получи нищо неочаквано (фиг. 41-8, *а*). Можем бавно да въртим и вътрешния цилиндър — все пак нищо потресаващо няма да стане. Но ето, ако започнем много бързо да въртим вътрешния цилиндър, ще се случи нещо удивително. Течността ще се разбие на хоризонтални ивици (фиг. 41-8, *б*). Ако с подобна скорост въртим външния цилиндър, а вътрешния оставим в покой, няма да възникне никакъв подобен ефект. Как става така, че не е едно и също кой от цилиндрите ще въртим — вътрешния или външния? Нали в края на краищата видът на потока, който намерихме в § 1, зависеше само от $\omega_b-\omega_a$! Отговора можем да получим, като разгледаме сечението на цилиндъра, показано на фиг. 41-9. Когато вътрешните слоеве на течността се движат по-бързе, отколкото външните, те се стремят да се движат навън; центробежната сила става по-голяма сила от удържащото налягане. Но слоя като цяло не може да се движи равномерно,



Фиг. 41-8. Вид на потока течност между два прозрачни въртящ се цилиндъра

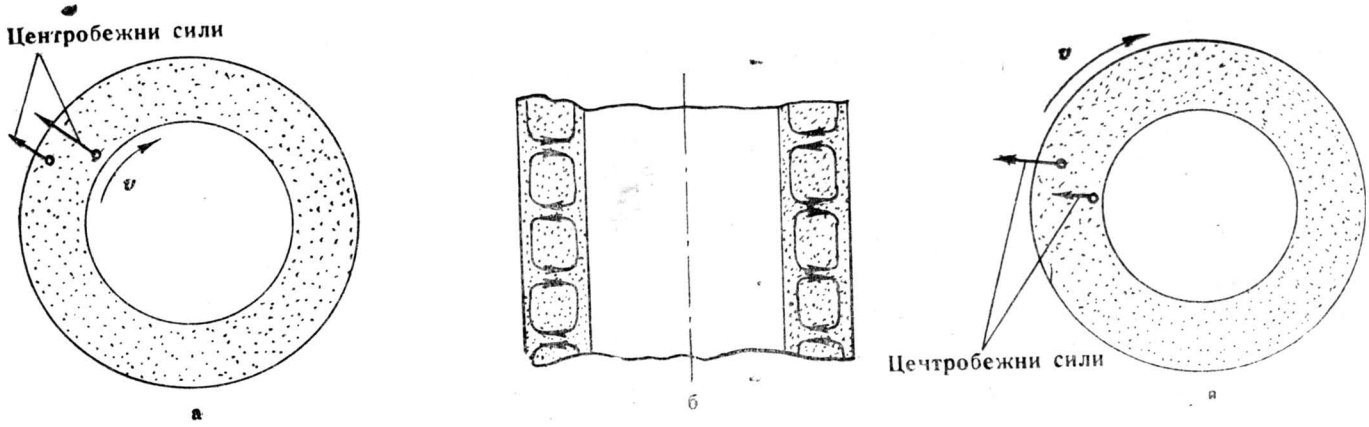
тъй като на неговия път стоят външните слоеве. Поради това те се разбиват на клетки и циркулират, както е показано на фиг. 41-9, *б*. Това напомня конвекционните токове в стая, в която на нивото на пода има слой топъл въздух. Когато вътрешният цилиндър се намира в покой, а външният цилиндър се върти с голяма скорост, центробежните сили създават градиент на налягането, който удържа всичко в равновесие (фиг. 41-9, *в*) както топлият въздух, който се намира до тавана.

Сега да ускорим вътрешния цилиндър. Отначало броят на ивиците ще се увеличи. След това неочаквано ивиците ще станат вълнообразни (вж. фиг. 41-8, *в*) и вълните ще започнат да обтичат цилиндъра. Скоростта на тези вълни може да се измери лесно. При големи скорости на въртене тя се приближава до 1/3 от скоростта на вътрешния цилиндър, а защо става така, никой не знае. Тук има над какво да се помисли. Простото число 1/3 и пълна липса на обяснение! Изобщо целият механизъм за образуването на вълните също далеч не е ясен, въпреки че имаме работа със стационарен, ламинарен поток.

Ако сега започнем да въртим и външния цилиндър, но в противоположна страна, картината на потока ще започне да се разбива. Вълновите области ще започнат да се редуват със спокойни на вид области, образувайки спирална картина (вж. фиг. 41-8, *г*). Обаче в тези „спокойни“ области потокът, както може да се забележи, в действителност съвсем не е правилен; той е напълно турбулентен. Освен това във вълновите области започва да се появява и неправилен турбулентен поток. Ако цилиндрите се въртят още по-бърже, целият поток става хаотично турбулентен.

Този прост експеримент ни показва много интересни режими на потока, които са съвършено различни един от друг и все пак се съдържат в нашето просто уравнение при различни стойности на един единствен параметър $\mathcal{R}$. С помощта на нашите въртящи се цилиндри можем да наблюдаваме много ефекти, проявяващи се в потока, който преминава покрай цилиндъра: първо това е стационарен поток, второ — цял набор от потоци, които се изменят с времето, но по един правилен и гладък начин, и накрая потокът става изцяло неправилен. Всеки от вас е виждал същите ефекти в стълбче дим, струящ от цигара, когато въздухът е спокоен. Отначало струята е гладка, след това тя някак си се усуква, след това димът започва да се разрушава и накрая всичко завършва с безредни кълбета.

Основното, което трябва да извлечете от всичко казано, се заключава в това, че в един прост набор уравнения (41.23) се крие огромно разнообразие от поведения. Всичко това представлява решение на едно и също уравнение при различни стойности на $\mathcal{R}$. Ние нямаме причини да смятаме, че в това уравнение сме изпуснали някакви членове. Единствената трудност се заключава в това, че засега не ни стигат математически знания, за да анализираме уравнението с изключение на случаите, когато числото



Фиг. 41-9. Ето защо потокът се разбива на ивици

на Рейнолдс е много малко, т. е. когато течността е много вискозна. Като написахме уравнението, ние не отнехме от потока течност нито неговата очарователна прелест, нито неговата тайнственост, нито неговата поразителност.

Какво ни очаква в по-сложните уравнения, ако даже в такова просто уравнение с един единствен параметър виждаме толкова разнообразни възможности! Напълно е възможно, че основното уравнение, което описва завихрянето на мъглявините или възникването на въртенето, или взривовете на звезди и галактики, ще бъде всичко на всичко простото уравнение на хидродинамиката на почти чистия водород. Често хората, изпадайки в някакъв неоправдан страх от физиката, казват, че е невъзможно да се напише уравнението на живота. А може би това е възможно. Много е възможно, че всъщност ние вече разполагаме с едно достатъчно добро приближение, когато пишем уравнението на квантовата механика

$$H\psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Ние току-що видяхме как явленията в цялата тяхна сложност леко и поразително се получават от прости уравнения, които ги описват. Без да подозират възможностите на простите уравнения, хората често заключават, че за обясняването на цялата сложност на света е необходимо нещо дадено от бога, а не просто уравненията.

Ние написахме уравненията за протичането на водата. Но от нашия опит у нас се оформиха някакви понятия и приближения. Като ги използуваме, ние можем да обсъждаме разни решения— верижка от вихри, турбулентна следа, пограничен слой. Когато подобни уравнения се срещат в по-малко познати ситуации, където още не можем да експериментираме, ние се опитваме да решаваме такива уравнения посредством един примитивен, криволичест и забъркан път, като се стремим да определим какви качествени явления могат да се получат от тях или какви нови качествени форми представляват следствия от тези уравнения. Нашите уравнения за Слънцето например, които го представят като водородно кълбо, описват Слънцето без слънчеви петна, без зърнестата структура на неговата повърхност, без неравностите и короната. Обаче всичко това действително се намира в уравненията, само че ние нямаме още начин да го измъкнем оттам.

Има такива хора, които ще бъдат много разстроени, ако на другите планети не бъде намерен живот. Аз не принадлежа към тях. И аз никога няма да мога да престана да се удивлявам и радвам на резултатите от междупланетните изследвания, които откриват безкрайно разнообразие на нови явления, породени от едни и същи прости принципи. Критерият на науката — това е нейната способност да предсказва. Бихте ли могли вие да предскажете бурите, вулканите, океанските вълни, зората и пурпурния залез, ако никога не сте били на Земята?

Скъпоценно съкровище ще бъде за нас всичко това, което ще узнаем за ставащото на всяка една от мъртвите планети, на всяко едно от десетките кълбета, образувани от същия облак прах и подчиняващи се на същите закони на физиката, както и нашата планета.

Идващата велика ера на пробуждането на човешкия разум ще донесе със себе си метод за разбирането на *качественото* съдържание на уравненията. Днес ние още не сме способни на това. Днес ние не можем да видим в уравненията на потока вода такива неща, като спиралния строеж на турболентността, който виждаме между въртящите се цилиндри. Днес ние не можем да кажем с увереност дали уравнението на Шрьодингер съдържа и жабите, и композиторите, и даже морала или там няма и не може да има нищо подобно. Ние не можем да кажем необходимо ли е нещо повече от уравненията, нещо подобно на някакви богове, или не. Поради това всеки от нас би могъл да има свое особено мнение по този въпрос.

Печатни грешки

стр.	ред	напечатано	да се чете	по вина на
31	7 отдолу	$(\nabla\,\mathbf{h})\,x_x$	$(\nabla\times\mathbf{h})_x$	печатницата
33	11 отдолу	$(\nabla\times(\nabla)\,T$	$(\nabla\times(\nabla\,T)$	редактора
35	17 отгоре	$-(\nabla\,\ldots\,\nabla)\,\mathbf{h}$	$-(\nabla\,.\,\nabla)\,\mathbf{h}$	печатницата
68	17 отгоре	$\underline{\sigma\,A}$	$\dfrac{\sigma\,A}{\varepsilon_0}$	печатницата
77	16 отгоре	$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,r^3qd$	$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{z}{r^3}\,q\,d$	печатницата
192	24 отгоре	U	μ	печатницата
195	31 „	I	I_1	преводача
196	17 отгоре	пълната	действителната (реалната)	преводача
196	16 отгоре	$^1/_2\,CV^2$	$-^1/_2\,CV^2$	печатницата
233	4 отдолу	L	F	печатницата
234	4 отгоре	$p-mv$	$p=mv$	печатницата
250	19 отгоре	$c\,\nabla$	$c^2\,\nabla$	редактора
269	28 отдолу	y	x	преводача
273	16 отдолу	електричното	магнитното	преводача
276	в 20.25	cB_y cB_z	cB_z cB_y	редактора
286	2 отгоре	$\mathbf{e}_r$	$e_{r'}$	„
295	в 21.29	r'_n	r'_{12}	печатницата
307	в чер. 22—10	стрелките към I_1, в горния ред и към I_2, I_3, I_4 са обърнати		редактора
308	20 отгоре	$e,\ ,\ g\ h$	$e,\ f,\ g,\ h$	печатницата
320	12 отгоре	гл. 2	гл. 23	печатницата

Р. Файнман, Р. Лейтон, М. Сендс

ФАЙНМАНОВИ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКА, т. II

Превели *Анастас Анастасов, Николай Николов, Николай Карабашев, Иван Карабашев*

Редактор *М. Паликарска*
Художник *Ив. Марков Стоянов*
Художествен редактор *Ив. Марков*
Технически редактори *Сн. Стоева и Н. Стойкова*
Коректори *Е. Димова и М. Василева*
Калиграф *Б. Кесяков*

Българска. I издание. ЛГ III-с. Темат. № 1207/72 г. Дадена за набор на 9. XII. 1971 г. Подписана за печат на 30. III. 1972. Излязла от печат на 29 VII. 1972 г. Формат 59×84/8. Издател. коли 61 Печатни коли 74 Тираж 4500+83 Поръчка № 290 Цена 4,51 лв.

Държавно издателство *„Народна просвета“*
Държавна печатница *„Георги Димитров“*
София, 1972 г.

4·51 лв.