НМАН Р.ЛЕЙТОН М.СЕНДС

ФАЙНМАНОВИ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКА

ТОМ 1

НАРОДНА ПРОСВЕТА

Р. Файнман, Р. Лейтон, М. Сендс

Файнманови лекции по физика

том 1

СЪВРЕМЕННАТА НАУКА ЗА ПРИРОДАТА. ЗАКОНИ НА МЕХАНИКАТА. ПРОСТРАНСТВО, ВРЕМЕ, ДВИЖЕНИЕ. ИЗЛЪЧВАНЕ, ВЪЛНИ, КВАНТИ, КИНЕТИКА, ТОПЛИНА, ЗВУК

Иван Емануилов
Марчо Краев
Превели от руски: *Иван Лалов*
Димитър Трифонов
Дочо Факиров

Р. ФАЙНМАН
Р. ЛЕЙТОН
М. СЕНДС

ФАЙНМАНОВИ
ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКА
ТОМ 1

НАРОДНА ПРОСВЕТА 1970

Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сендс

ФЕЙНМАНОВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР"
МОСКВА 1965 г.

КЪМ БЪЛГАРСКИТЕ ЧИТАТЕЛИ

Предлаганите на българската общественост „Файнманови лекции по физика" силно нашумяха между физиците от цял свят още веднага след излизането им в оригинал. Реакцията включваше цял диапазон от оценки, от най-възторжени до такива като „Нашите уважения към автора, всички знаем какъв крупен физик е той, но на кой студент от първи и втори курс бихте могли да обясните, да кажем, квантовата механика по този начин." При това възторжените оценки преобладаваха между по-младите и занимаващите се повече с научни разработки, отколкото с преподаване физици, а обратните оценки — между по-рутинираните и по-опитни преподаватели. Струва ни се, че времето ще бъде най-добрият арбитър. Самата бурна реакция обаче показва, че пред нас е едно крупно явление в преподаването на физиката.

Защо все пак тези лекции така развълнуваха научната общественост? Сигурно причината не е в това, че лекторът-професор Файнман е един от най-крупните физици-теоретици на нашето време, Нобелов лауреат за 1965 г., който при все това е отделил две години за начинаещите специалисти. Известно е, че крупни учени могат да бъдат и твърде посредствени лектори. Причината би трябвало да търсим преди всичко в това, че тези лекции не приличат на нищо, което ни бе известно преди тях, дотолкова те са оригинални и по съдържание, и по стил. И все пак, ако тази оригиналност ни бе поднесена по-рано, на друг етап от развитието на физиката, тя би изглеждала по-скоро като куриоз и далеч не би дала този отзвук. Работата е в това, че сегашното бурно развитие на науката поставя пред преподаването съвсем нови проблеми, поради което почвата за революционни преобразования не само че е подготвена, но тези преобразования се очакват като жизнено необходими.

Известно е, че по ред показатели (като брой на учените, научни статии, инвестиции и пр.) науката се развива експоненциално, като удвоява тези свои показатели на всеки 10—11 години, период няколко пъти по-къс от периода на удвояване населението на Земята. Очевидни са трудностите, срещани от системата на образованието при възникналата обстановка, която не може да не се сблъска с ограничените човешки възможности на учащите се. Колкото и да държим на добрите стари традиции за усвояване на класическите понятия, не можем да не видим, че ако продължаваме обучението по същия начин както досега, неминуемо ще увеличаваме пропастта между нивото на подготовка на завършващия университет и онова, което ще му е нужно, за да започне да твори в своята област

При сегашното положение не би трябвало да ни учудва, че във физиката се правят експерименти за революционни промени в преподаването. Трудностите в особена степен важат за нея — една от фундаменталните природни науки, на мираща се в процес на бурно развитие и представляваща основа на ред други природни науки и отрасли на техниката. От един период през миналия век, когато на известния Планк на младини са могли да кажат: „Млади човече, защо искате да си провалите живота, та нали теоретичната физика вече в основата си е завършена... Струва ли си да се захващате с такава безперспективна работа?!", тя измина пътя до открития с огромно мирогледно и практическо значение, които разрушиха много закостенели представи и занимават умовете далеч не само на физиците. Вече се вижда ролята на тези открития дори за другите фундаментални природни науки: те дадоха принципно обяснение на химическите явления, а тяхното значение за обяснение на биологическите явления макар и още спорно, се развива не в полза на песимистите.

Не може да не се държи сметка и за факта, който отбелязва самият Файнман в своя предговор — днешните младежи имат много по-висока научно-популярна култура. Днешните студенти — това са бивши ученици, които още като такива са слушали доста за модерните и интересни проблеми на физиката. Всеки преподавател може да забележи обаче как при традиционното преподаване тех-

ният ентусиазъм постепенно се изпарява, тъй като често до тези именно проблеми по традиционния път въобще не се стига.

Но може би, както считат някои, в основните курсове не може да се стигне до тези въпроси, поради това, че те са много трудни? Може да се види, че далеч не математическите трудности са главните, които стоят на пътя към съвременните представи на физиката. Наблюдава се например фактът, че неизкушени в тънкостите на класическата физика студенти от близки, но други специалности, като че ли по-лесно стигат до тези представи. Това едва ли е само защото те „не са свикнали да мислят достатъчно точно". Възможно е причината да се крие в една картинна забележка на редактора на руския превод на лекциите — Смородинский: „Би било странно отначало да разказваме на учениците „за простота", че Земята е плоска, а после, като откритие, да им съобщим, че тя е сферична. А така ли е далеч от този абсурден пример пътят, по който бъдещите специалисти навлизат в съвременния свят от идеи на теорията на относителността и квантите?"

И така, пред нас е един извънредно интересен педагогически експеримент от най-висок ранг, направен в Калифорнийския технологически институт, Съединените щати. Тези лекции представляват курс по обща физика за студентите от първите две години. Група преподаватели във физическия факултет на този институт набелязват своите идеи като кратка програма, след което те са осъществени от Файнман, записани на магнетофонна лента и обработени за издаване, така както е описано в един от авторските предговори. Самият лектор се оказва изключително подходящ за осъществяване на набелязаната цел. В своите научни работи — неговата разработка на квантовата електродинамика е призната навсякъде и използувана в ред други области — както и в преподаването, той е ярко оригинален.

Свежият и интересен стил ни кара да възприемаме курса почти като роман. Демонстрирано е, че живият и увлекателен език не пречи на „научността". Тривиални неща, обяснявани другаде с много думи, въобще се изпускат. По-голяма част от мястото е посветена на тънкости, които другаде се преподават лошо или никак.* С цел да се развива творчески подход у начинаещите и в пълен контраст с много курсове, втълпяващи чувството за сигурност чрез поднасяне само на добре потвърдени закони, тук, напротив, се обръща повече внимание на нарушенията им, най интересни от гледна точка на развитието на науката. Особено внимание се обръща на т. н. физическо мислене. Авторът, като голям теоретик, най-малко би могъл да бъде упрекнат в пренебрегване на точния математически извод. И все пак физиката не е математика — това е основна мисъл, прокарвана в целия курс. Липсата на физичен поглед прави често добри математици безпомощни при решаването на физични теоретични задачи.

Читателят изпитва при четенето чувството, че говори с автора, който му поднася своето физическо „верую". На редица места той изказва своето отношение към приципиалните философски проблеми на физиката. Като творческа личност от голям мащаб, взел лично участие в революционните преобразования на физиката, той добре разбира значението на тези преобразования. С малко, но сполучливи забележки, той ликвидира философски спекулации, по които е изписана томове хартия.

На някои при повърхностно наблюдение може да се види, че Файнман като физик надценява физиката за сметка на нейните съседи, като изтъква значението ѝ за химията и биологията по отношение на теорията, а не само чрез прибори и методи. Авторът обаче неведнъж посочва, че обяснението по принцип, което физиката дава на химичните явления, е все пак само обяснение по принцип и не означава, че физикът може да предскаже какво точно ще се случи при дадена конкретна химична реакция, така както знанието на шахматните правила не значи умение да се играе на шах. Разбира се, дори при тази постановка могат да бъдат предявени от някои философи обвинения, особено по отношение на все още спорния въпрос за физиката като теоретична основа на биологията. Но ясно е, че въпросът за биологията ще бъде разрешен в една или друга посока от развитието на науките, а не от умуването на някои „пророци", така както той бе вече разрешен по отношение на химията.

При такъв оригинален подход е безсмислено да се иска да бъде спазвано класическото подреждане на материала и то не е спазено. Често явления, отнасяни към различни раздели на физиката, се разглеждат на едно място, за да се

---

* Виж ред примери по този и следващите въпроси в статия — разширен вариант на този предговор — от същия автор, Физико-математическо списание, том 10 (кн. 2), стр. 132—142, 1967.

прокара мисълта, че еднакви уравнения имат еднакви решения независимо от разликата в същността на явленията. В този произвол се отива понякога и до крайности. Може да се каже, че се чувствува и неравномерност на вниманието, посветено на едни или други въпроси. В това се състои и ролята на един експеримент — в него не може да не се намерят недостатъци. Поради тях може би много преподаватели не биха намерили за възможно да го вземат за основа на своето преподаване. Това е обаче експеримент, проведен по вдъхновение, и ние бихме могли да си представим какво би останало от свежестта на Файнман, ако някой се опита да „изправя" недостатъците.

Курсът на Файнман ще бъде особено интересен за преподавателите по физика във висшите учебни заведения, а също и в училищата. Прочитането му положително ще повлияе преподаването им значително да се измени, тъй като в него те ще намерят много ценни идеи. Тях те могат да използуват и без да го приемат за основа на своето обучение. По-инициативните ще бъдат предизвикани да се замислят и да внесат свои модификации. Той може най-горещо да се препоръчва на студентите по физика в допълнение към лекциите и обикновените учебници — от него те ще научат не само неща, които няма да срещнат другаде, но и най-главното: как мислят физиците. От него положително ще се заинтересуват ученици и любознателни хора — без да разберат всичко, те ще намерят в него и неща за себе си. Това се дължи на особения педагогически подход на автора, който прави тези лекции пригодни за твърде широк кръг читатели. Този подход е характеризиран в авторския предговор така: стремеж в лекциите да съществува някакво основно ядро с цел то да достигне и до оня читател, който далеч няма да разбере всичко.

Най-ценното, което в края на краищата всеки читател ще може да получи от този курс, е характеризирано най-добре от Файнман в неговия епилог:

„Аз исках преди всичко да Ви помогна да оцените нашия прекрасен свят и да добиете физически поглед върху него, което, аз мисля, е главна част от истинската култура на съвременната епоха."

Емил Наджаков



Предговор

Р. Файнман

Това са лекциите по физика, които аз четох миналата и по-миналата година в Калифорнийския технологически институт на студентите от първи и втори курс. Но това не е техният буквален запис. На места ги поизгладиха твърде много, а на други — по-малко. Всъщност това е само част от пълния курс на обучението. Два пъти седмично в голямата аудитория се събираха 180 слушатели и след изслушване на лекцията, на групи по 15—20 човека, провеждаха семинарни упражнения под ръководството на асистенти. Допълнително се провеждаха и лабораторни работи веднаж седмично.

Какво искахме да постигнем, четейки тези лекции? Ние искахме да утвърдим интерес към физиката в младите ентусиасти, във вчерашните випускници на средните училища. Преди постъпването си в института те много са слушали колко интересна и увлекателна е съвременната физика — теорията на относителността, квантовата механика и т. н. Но ако този курс беше четен така, както се четеше по-рано, за две години целият им ентусиазъм малко по малко би се изпарил — при обичайното обучение твърде рядко се срещат действително величествени, нови, съвременни идеи. Студентите биха били заставени да изучават наклонената плоскост, електростатиката и др. неща от този род и всички техни пориви биха били сведени до нула. Целият въпрос беше в това, ще съумеем ли така да построим курса, че да се запази и укрепи ентусиазмът в най-способните най-пламенните студенти.

Не считайте тези лекции като някакъв обзорен курс. Не, това е съвсем сериозен курс. Като го четях, аз се ориентирах по най-съобразителните, исках по възможност дори най-способните слушатели да не са в състояние да усвоят докрай всичко, което се съдържа в тези лекции. Затова аз им подхвърлях мисли за възможните приложения на основните идеи и понятия извън основната линия на настъпление. За тази цел се стараех да формулирам по-точно всички твърдения, да им показвам, там където е възможно, какви уравнения и идеи се съдържат във физическата картина на света и как те могат да се изменят при понататъшно задълбочаване. Разбирах също, че на такива студенти е много важно да се посочи какво от изучавания материал (ако, разбира се, умеят да съобразяват) те могат сами да изведат от вече известното, и обратно, кое за тях е съвършено ново. Когато формулирах новите идеи, аз се опитвах да ги изведа, ако те можеха да бъдат изведени, или да обясня, че това е нова идея, че в никакъв случай не може да се опрем на вече изучени понятия и затова тази идея не бива да я считаме доказуема, а можем само да я включим странично.

Пристъпвайки към лекциите, аз предполагах, че студентите все пак са извлекли нещо от средното училище — разните геометрични оптики, простички понятия от химията и др. подобни. Не виждах също така смисъл да установявам някакъв определен порядък в лекциите, да не може да се споменава за неща, за които ще се говори подробно едва по-късно. Обратно, аз често говоря накратко за това, което студентът ще изучи както трябва много по-късно, когато ще бъде по-добре подготвен. Например понятието за индуктанса или за енергетичните нива се дава на първо време съвсем приблизително и едва по-късно се развива както трябва.

Като насочвах курса към най-активния слушател, аз все пак взимах под внимание интересите и на такъв младеж, който би се разтревожил и уплашил от тези фойерверки на мисълта и разнообразни приложения, от който въобще не може да се очаква, че ще усвои по-голямата част от материала. Аз исках в лекциите да има за него поне основно ядро или скелет на това, което той може да получи. Надявам се, че той няма много да нервничи, ако не разбере всичко в лекцията. Нека не разбира всичко, нека схване само същността, най-биещото в очи. Разбира се, и за това той трябва да прояви известна съобразителност, трябва да поиска да разбере кои теореми и представи са най-главни, а това което ще може да разбере едва по-късно, засега да остави настрана.

Когато четях тези лекции, имах едно сериозно затруднение — не действуваше обратната връзка — от студента към преподавателя; аз не виждах колко добре се възприемат тези лекции. Това е твърде сериозна пречка и аз и до днес не знам добри ли са тези лекции. Това по същество е експеримент и ако се случи да го извърша още един път, бих го направил иначе. Надявам се обаче, че няма да ми се наложи да се занимавам повторно с тази работа! И все пак ми се струва, че за първата част на курса, поне по отношение на физиката, всичко изглежда напълно прилично.

От втората част на курса не съм много доволен. В началото на тази част, когато говорех за електричеството и магнетизма, аз не можах да измисля някакъв особен начин на изложение, различен от общоприетия, не можах да намеря такъв подход към темата, който би възбуждал интерес към нея. По такъв начин не ми се удаде да направя много нещо с електричеството и магнетизма. След тази тема (в края на втория курс) отначало смятах да прочета няколко лекции за свойствата на твърдите тела, засягайки главно такива неща, като нормалните трептения, решението на уравнението на дифузията, трептящи системи, ортогоналните функции и т. н., т. е. да изложа принципите на това, което обикновено наричат „методи на математическата физика". Трябва да призная със закъснение, че ако се реша да чета втори път този курс, аз непременно бих се върнал към това намерение. Но тъй като повторение на тези лекции не се планира, а вместо това ми казаха, че не би било лошо да дам въведение в квантовата механика, то това вие ще откриете в края на настоящия курс.

Съвсем ясно е, че студентите, желаещи да се ориентират добре във физиката, биха могли да почакат с изучаването на квантовата механика и до третия курс. Но възразявайки ми, изтъкнаха довода, че много студенти от моя курс изучават физика само като основа за занимания с други науки. Обикновеният начин на изучаване на квантовата механика я прави почти недостъпна за повечето студенти, защото те нямат възможност да я изучават толкова дълго. Същевременно цялата система от диференциални уравнения, целият подход към квантовата механика рядко се използува в нейните приложения, по-специално в такива сложни случаи, като електрониката и химията. Затова аз се опитах да опиша принципите на квантовата механика така, че в началото да не е нужно познаването на уравнения с частни производни. Мисля, че дори за един физик ще бъде интересно такова изложение на квантовата механика (по причини, които ще станат ясни от самите лекции). И все пак, струва ми се, че експериментът с квантовата механика не е особено сполучлив главно поради това, че не ми достигна времето и се наложи да свия края (трябваха ми още 3 — 4 лекции, за да изложа по-пълно такива въпроси, като енергетическите нива и пространствената зависимост на амплитудите). Освен това по-рано аз никога не съм излагал материала по такъв начин и чувствувах много остро липсата на обратната връзка. Сега мисля, че все пак квантовата механика трябва да се излага по-късно. Не е изключено да ми се представи възможност още веднаж да прочета този курс. Тогава ще направя по-добре това.

В този курс няма лекции, посветени на решаването на задачи. Такива се решаваха на семинарите. Макар че на три лекции аз решавах задачи, те не бяха включени в курса. След лекцията за въртящи се системи беше прочетена лекция

за инерционната навигация, но за съжаление в изданието тя беше пропусната. Петата и шестата лекция прочете М. Сендс (тогава бях извън града).

Възниква естественият въпрос, доколко е сполучлив този опит. Моето мнение, с което впрочем не са съгласни преподавателите, работещи със студентите, е доста песимистично. Не мисля, че постъпих добре със студентите. Като наблюдавах как повечето студенти решават задачките на изпитите, аз все си мислех за краха на цялата моя система на преподаване. Наистина, моите приятели ми напомниха, че сред студентите има десетина и повече, които са се справили, колкото и да е странно това, почти с всичко, след като са се трудили активно над материала и дълго, с увлечение са се мъчили над трудните въпроси. Тези младежи според мен сега имат първокласна подготовка по физика и аз ще се опитам накрая да ги взема при мен на работа. Впрочем „обучението рядко носи плодове на някого, освен на онези, които са предразположени към него, но на тях то почти не е нужно“ (Гибонс).

Още повече, че аз не бих искал да оставя на произвола на съдбата някой студент, както е ставало по време на четенето на курса. Как все пак ще се помогне на студентите? Може би трябва повече да се поработи над съставянето на комплекс от задачи, които биха хвърлили светлина върху идеите, развивани в лекциите? Задачите ще дадат добра възможност да се разшири лекционният материал и ще помогнат идеите на лекциите да станат по-осезаеми и пълни, по-добре да се наместят в главата.

Все пак, аз мисля, че най-правилното решение на проблема за образованието е да се разбере, че най-доброто обучение е пряката, лична връзка между ученика и добрия учител, когато ученикът обсъжда идеите, мисли върху разни неща и беседва по тях. Невъзможно е да се научи много, само като се прослушват лекции или само като се решават задачи. Но в наше време е необходимо да се обучат толкова много студенти, че вместо идеали е необходимо да се търсят ерзаци. Може би моите лекции ще помогнат в тази насока. Може би там, където може да се намери отделен учител за всеки ученик, тези лекции ще могат да вдъхновят учителя и ще му подскажат някои идеи. Може би, като поразмисли над тях, той само ще се поразвлече, а може и да ги развие по-нататък.

Юни 1963 г. Ричард Файнман

Предговор

В основата на тази книга са залегнали лекциите по обща физика, които проф. Р. Файнман чете през 1961—1962 учебна година в Калифорнийския технологически институт. Това е първата половина от двегодишния встъпителен курс, задължителен за всички студенти на Калифорнийския технологически институт. През 1962—1963 учебна година бе прочетен вторият цикъл лекции, с което бе завършена основната част от работата по преустройството на встъпителния курс по физика, определена за четири години.

Необходимостта от такова коренно преразглеждане на курса възникна не само поради бързото развитие на физиката през последните десетилетия, но и поради това, че през последните години първокурсниците идваха в Калифорнийския технологически институт с по-задълбочена математическа подготовка от предишната — резултат от подобреното преподаване на математиката в средните училища. Искаше ни се, като използуваме преимуществата на по-здравия математически фундамент, да изложим повече съвременен материал, което би направило курса по-интересен, подтикващ към размисъл, и по-добре отразяващ физиката на нашето време.

За да имат представа какво трябва да се включи в курса и как да се направи това, на преподавателите от физическия факултет бе предложено да изразят своите идеи във вид на кратка програма на курса. Възникнаха няколко проекта за преустройство, които бяха обсъдени обстойно и с пристрастие. Почти всички се съгласиха с едно — преустройството на курса не бива да започва просто с преправянето на вече съществуващите учебници, нито даже със създаването на нов учебник; новият курс трябва да се построи на основата на лекции, лекциите трябва да се четат два или три пъти в седмицата. Създаването на съответни печатни ръководства ще бъде вече следващата стъпка; тези лекции ще определят и съдържанието на бъдещите лабораторни работи. Грубо бяха начертани общите контури на курса, но това беше само предварителна скица; много в нея изглеждаше спорно и би могло да се измени по усмотрение на този, който би се заел с четенето на лекциите.

Обсъждаха се и многочислените варианти за осъществяването на проекта. Първоначално се предполагаше, че ще се създаде група от N основни участници (лектори), които ще си разделят работата по равно; всеки ще вземе $1/N$ част от материала, ще прочете лекциите и ще ги подготви за печат. Липсата обаче на необходимия брой участници и трудността да се изработи всред тях еднакво гледище, което е свързано с индивидуалните вкусове, възгледи и даже с характера на всеки, направиха този план неосъществим.

Щастливата идея, че все пак е възможно да се създаде не просто нов курс, различен от другите, а може би уникален, изказа проф. Сендс. Той предложи проф. Файнман да подготви и прочете лекциите, които да бъдат записани на магнетофонна лента. След обработването и издаването на тези лекции ще се получи и новият учебник. Ето същността на приетия план.

Отначало се мислеше, че необходимата редакторска работа ще бъде сведена до подбора на илюстрациите, до поставянето на запетаите и поправянето на граматическите грешки; с това биха могли да се заемат между другото един-двама студенти от горните курсове. За нещастие тези надежди не живяха дълго. Оказа се, че дори простото привеждане записите на лекциите до пригоден за четене вид, даже без разработка и преглеждане на лекционния материал, изисква много време. Такава работа не е по силите на техническия редактор или студента, тя изисква зоркото внимание на физика-професионалист, при това над всяка лекция той ще трябва да се потруди около десет-двадесет часа.

Трудността на редакторската работа, а също и необходимостта колкото може по-скоро да се предадат лекциите в ръцете на студентите затрудниха много крайното „довеждане“ на материала и ние бяхме принудени да се ограничим със създаването на предварителен, но годен за издаване вариант на лекциите, който можеше да се използува веднага, макар да не можеше да се счита окончателен.

Крайната нужда от голямо количество екземпляри, необходимо за нашите студенти, а също така и интересът към лекциите на студентите и преподавателите от другите институти ни заставиха да издадем лекциите в техния предварителен вид, без да чакаме окончателната редакция, каквато може би никога няма да има. Ние никак не се заблуждаваме по отношение на пълнотата, свързаността и логическата стройност на материала; нещо повече, в най-близко бъдеще ние възнамеряваме отново да модернизираме курса и смятаме, че нито неговата форма, нито неговото съдържание ще останат дълго без изменения.

Освен за лекциите — най-важната част от курса — беше необходимо да се погрижим за задачите, развиващи опита и умението на студентите и за лабораторните работи, за да могат студентите „да пипнат с ръка" изложения в лекциите материал. Нито едното, нито другото още не са достигнали онази завършеност, която имаше материалът от лекциите, макар че нещичко е направено, разбира се, в тази насока. Някои задачи бяха измислени още по времето на четенето на лекциите, после бяха подобрени, а при повторното четене на курса броят им беше увеличен. Но ние още не сме уверени, че тези задачи са достатъчно разнообразни и спомагат за задълбочаването на лекциите дотолкова, че студентите сами да могат да разберат какъв мощен апарат са овладели. Затова задачите ще се публикуват отделно и в такъв вид, който би позволявал тяхната повече или по-малко честа преработка.

Проф. Неер предложи да се включат в курса няколко нови опита. Сред тях са опитите, основани на използуването на въздушните лагери със съвсем малко триене: новият линеен въздушен жлеб, с чиято помощ може количествено да се изучи едномерното движение, сблъскването между телата и хармоничното движение; а също и поддържания на въздушна възглавница и движен от въздуха максвеловски пумпал, с чиято помощ може да се изучи въртенето с ускорение, прецесията и нутацията на жироскопа. Разработката на новите лабораторни опити ще продължи, както се вижда, значително време.

Това преразглеждане на учебната програма бе оглавено от професорите Р. Лейтон, Т. Неер и М. Сендс. Официално в тази работа взеха участие професорите Р. Файнман, Т. Нойгебауер, Р. Саттон, Г. Стаблер, Ф. Стронг и Р. Фогт от катедрите по физика, математика и астрономия, а също така професорите Т. Кофи, М. Плесет и К. Уилтс от катедрата по технически науки. Ние благодарим сърдечно за ценната помощ на всички, които взеха участие в преработката на курса. Особено сме задължени на фонда на Форд, без чиято финансова помощ тази работа никога не би се осъществила.

Юли 1963 г. Роберт Б. Лейтон

СЪДЪРЖАНИЕ

Към българските читатели 5
Предговор на Р. Файнман 9
Предговор 12

1. АТОМИТЕ В ДВИЖЕНИЕ

1. Увод 17
2. Веществото се състои от атоми 18
3. Атомни процеси 21
4. Химически реакции 23

2. ОСНОВНИ ФИЗИЧЕСКИ ВЪЗГЛЕДИ

1. Увод 27
2. Физиката до 1920 година 29
3. Квантова физика 32
4. Ядра и частици 35

3. ФИЗИКАТА И ДРУГИТЕ НАУКИ

1. Въведение 39
2. Химия 39
3. Биология 40
4. Астрономия 45
5. Геология 46
6. Психология 47
7. Как започна всичко? 48

4. ЗАПАЗВАНЕ НА ЕНЕРГИЯТА

1. Какво е енергия? 50
2. Потенциална енергия на привличането 51
3. Кинетична енергия 55
4. Други форми на енергия 56

5. ВРЕМЕ И РАЗСТОЯНИЕ

1. Движение 59
2. Време 59
3. Малки времена 60
4. Големи времена 62
5. Единици и еталони за време 63
6. Големи разстояния 64
7. Малки разстояния 65

6. ВЕРОЯТНОСТ

1. Вероятност 68
2. Флуктуации 70
3. Случайни блуждаения 73
4. Разпределение на вероятностите 76
5. Принцип на неопределеността 78

7. ТЕОРИЯ НА ГРАВИТАЦИЯТА

1. Движение на планетите 81
2. Закони на Кеплер 82
3. Развитие на динамиката 82
4. Нютонов закон на гравитацията 83
5. Всемирно привличане 86
6. Опит на Кавендиш 89
7. Какво е гравитация? 90
8. Гравитация и относителност 92

8. ДВИЖЕНИЕ

1. Описание на движението 93
2. Скорост 95
3. Скоростта като производна 98
4. Разстоянието като интеграл 100
5. Ускорение 101

9. НЮТОНОВИ ЗАКОНИ НА ДИНАМИКАТА

1. Импулс и сила 104
2. Компоненти на скоростта, ускорението и силата 106
3. Какво е сила? 107
4. Смисълът на уравненията на динамиката 108
5. Числено решение на уравненията 109
6. Движение на планетите 110

10. ЗАКОН ЗА ЗАПАЗВАНЕТО НА ИМПУЛСА

1. Трети закон на Нютон 115
2. Закон за запазването на импулса 116
3. Все пак импулсът се запазва 119
4. Импулс и енергия 122
5. Релативистичен импулс 123

11. ВЕКТОРИ

1. Симетрията във физиката 126
2. Пренасяния на началото 127
3. Въртения 128
4. Вектори 130
5. Векторна алгебра 132
6. Законите на Нютон във векторна форма 134
7. Скаларно произведение на векторите 135

12. ХАРАКТЕРИСТИКА НА СИЛАТА

1. Какво е сила? 138
2. Триене 140
3. Молекулни сили 143
4. Фундаментални сили. Полета 145
5. Псевдосила 145
6. Ядрени сили 151

13. РАБОТА И ПОТЕНЦИАЛНА ЕНЕРГИЯ

1. Работата на падащо тяло 152
2. Работата, извършвана от силата на тежестта 155
3. Събиране на енергиите 158
4. Гравитационното поле на големите тела 159

14. РАБОТА И ПОТЕНЦИАЛНА ЕНЕРГИЯ

1. Работа 163
2. Движение при наложени връзки 165
3. Консервативни сили 166
4. Неконсервативни сили 169
5. Потенциали и полета 170

15. СПЕЦИАЛНА ТЕОРИЯ НА ОТНОСИТЕЛНОСТТА

1. Принцип на относителността 175
2. Лоренцови трансформации 177
3. Опит на Майкелсон — Морли 178
4. Трансформация на времето 180
5. Лоренцово скъсяване 183
6. Едновременност 183
7. Четиривектори 184
8. Релативистична динамика 185
9. Еквивалентност на масата и енергията 186

16. РЕЛАТИВИСТИЧНА ЕНЕРГИЯ И РЕЛАТИВИСТИЧЕН ИМПУЛС

1. Относителност и „философи“ 188
2. Парадокс на близнаците 190
3. Трансформация на скоростите 191
4. Релативистична маса 194
5. Релативистична енергия 196

17. ПРОСТРАНСТВО — ВРЕМЕ

1. Геометрия на пространство — времето 199
2 Пространство — временни интервали 201
3. Минало, настояще, бъдеще 202
4. Още за четиривекторите 204
5. Алгебра на четиривекторите 206

18. ДВУМЕРНИ ВЪРТЕНИЯ

1. Център на масите 209
2. Въртене на твърдо тяло 211
3. Момент на количество на движение 215
4. Закон за запазване момента на количеството на движение 216

19. ЦЕНТЪР НА МАСИТЕ, ИНЕРЧЕН МОМЕНТ

1. Свойства на центъра на масите 218
2. Положение на центъра на масите 221
3. Пресмятане на инерчния момент 223
4. Кинетична енергия на въртенето 226

20. ВЪРТЕНЕ В ПРОСТРАНСТВОТО

1. Моменти на сили в тримерното пространство 229
2. Уравнение на въртенето във векторен вид 233
3. Жироскоп 234
4. Момент на количеството на движение на твърдо тяло 237

21. ХАРМОНИЧЕН ОСЦИЛАТОР

1. Линейни диференциални уравнения 239
2. Хармоничен осцилатор 240
3. Хармонично движение и движение по окръжност 242
4. Начални условия 243
5. Трептения под действие на външна сила 244

22. АЛГЕБРА

1. Събиране и умножение 246
2. Обратни действия 247
3. Абстракция и обобщение 248
4. Приблизително пресмятане на ирационални числа 249
5. Комплексни числа 253
6. Имагинерни експоненти 256

23. РЕЗОНАНС

1. Комплексните числа и хармоничното движение 258
2. Принудени трептения със затихване 260
3. Електрически резонанс 262
4. Резонансът в природата 265

24. ПРЕХОДНИ РЕШЕНИЯ

1. Енергия на осцилатора 269
2. Затихващи трептения 271
3. Преходни трептения в електрически вериги 273

25. ЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ И ОБЗОР

1. Линейни диференциални уравнения 276
2. Суперпозиция на решенията 278
3. Трептения в линейните системи 281
4. Аналогиите във физиката 283
5. Последователни и успоредни съпротивления 285

26. ОПТИКА. ПРИН ЦИП НА НАЙ-МАЛКОТО ВРЕМЕ

1. Светлина 287
2. Отражение и пречупване 288
3. Принцип на най-малкого време на Ферма 289
4. Приложение на принципа на Ферма 291
5. По-точна формулировка на принципа на Ферма 294
6. Квантов механизъм 295

27. ГЕОМЕТРИЧНА ОПТИКА

1. Увод 297
2. Фокусно разстояние на сферична повърхнина 297
3. Фокусно разстояние на леща 300
4. Увеличение 302
5. Сложни лещи 303
6. Аберация 304
7. Разделителна способност 305

28. ЕЛЕКТРОМАГНИТНО ЛЪЧЕНИЕ

1. Електромагнетизъм 306
2. Излъчване 309
3. Диполен излъчвател 310
4. Интерференция 311

29. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

1. Електромагнитни вълни 313
2. Енергия на лъчението 314
3. Синусоидни вълни 314
4. Два диполни излъчвателя 316
5. Математично описание на интерференцията 318

30. ДИФРАКЦИЯ

1. Резултантно поле на n еднакви осцилатора 322
2. Дифракционна решетка 325
3. Разделителна способност на дифракционната решетка 328
4. Параболични антени 329
5. Оцветени слоеве; кристали 330
6. Дифракция от непрозрачен екран 331
7. Поле на система от осцилатори, разположени в една равнина 333

31. КАК ВЪЗНИКВА ПОКАЗАТЕЛЯТ НА ПРЕЧУПВАНЕ

1. Показател на пречупване 336
2. Поле, излъчвано от среда 339
3. Дисперсия 341
4. Поглъщане 343
5. Енергия на светлинната вълна 344
6. Дифракция на светлината от непрозрачен екран 346

32. РАДИАЦИОННО ЗАТИХВАНЕ. РАЗСЕЙВАНЕ НА СВЕТЛИНАТА

1. Радиационно съпротивление 348
2. Интензивност на излъчването 349
3. Радиационно затихване 351
4. Независими източници 352
5. Разсейване на светлината 354

33. ПОЛЯРИЗАЦИЯ

1. Вектор на електричното поле на светлинната вълна 358
2. Поляризация на разсеяната светлина 360
3. Двойно пречупване на светлината 360
4. Поляризатори 363
5. Оптична активност 364
6. Интензивност на отразената светлина 365
7. Аномално пречупване 367

34. РЕЛАТИВИСТИЧНИ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ИЗЛЪЧВАНЕТО

1. Движещи се източници 370
2. Определение на „привидното“ движение 371
3. Синхотронно лъчение 373

4. Космично синхротронно лъчение 375
5. Спирачно лъчение 376
6. Ефект на Доплер 377
7. Четиривектора (w, k) 379
8. Аберация 381
9. Импулс на светлинната вълна 381

35. ЦВЕТНО ЗРЕНИЕ

1. Човешко око 384
2. Цветът зависи от интензивността 385
3. Измерване на възприятието за цвят 387
4. Диаграма на цветовете 391
5. Механизъм на цветното зрение 392
6. Физико-химични свойства на цветното зрение 394

36. МЕХАНИЗЪМ НА ЗРЕНИЕТО

1. Усещане на цвета 396
2. Физиология на зрението 398
3. Пръчици 402
4. Фацетни очи на насекомите 403
5. Други видове очи 406
6. Нервни механизми на зрението 406

37. КВАНТОВО ПОВЕДЕНИЕ

1. Атомна механика 412
2. Опит с картечна стрелба 413
3. Опит с вълни 415
4. Опит с електрони 416
5. Интерференция на електромагнитни вълни 417
6. Как да се проследи електронът? 419
7. Начални принципи на квантовата механика 423
8. Принцип на неопределеността 424

38. ВРЪЗКА МЕЖДУ ВЪЛНОВОТО И КОРПУСКУЛЯРНОТО ГЛЕДИЩЕ

1. Вълни на амплитудите на вероятността 426
2. Измерване на положението и импулса 427
3. Дифракция от кристал 430
4. Размер на атома 432
5. Енергетични нива 433
6. Малко философия 435

39. КИНЕТИЧНА ТЕОРИЯ НА ГАЗОВЕТЕ

1. Свойства на веществото 438
2. Налягане на газа 439
3. Свиваемост на излъчването 443
4. Температура и кинетична енергия 444
5. Закон за идеалния газ 449

40. ПРИНЦИПИ НА СТАТИСТИЧЕСКАТА МЕХАНИКА

1. Експоненциална атмосфера 452
2. Закон на Болцман 453
3. Изпарение на течност 455
4. Разпределение на молекулите по скорости 456
5. Специфични топлоемности на газовете 460
6. Поражение на класическата физика 462

41. БРОУНОВО ДВИЖЕНИЕ

1. Равно разпределение на енергията 465
2. Топлинно равновесие на излъчването 468
3. Равномерното разпределение и квантовият осцилатор 471
4. Случайни блуждаения 474

42. ПРИЛОЖЕНИЕ НА КИНЕТИЧНАТА ТЕОРИЯ

1. Изпарение 477
2. Термойонна емисия 481
3. Топлинна йонизация 482
4. Химическа кинетика 484
5. Закони на Айнщайн за излъчването 486

43. ДИФУЗИЯ

1. Сблъсквания на молекулите 490
2. Средна дължина на свободния пробег 493
3. Скорост на дрейфа 494
4. Йонна проводимост 496
5. Молекулна дифузия 497
6. Топлопроводност 500

44. ЗАКОНИ НА ТЕРМОДИНАМИКАТА

1. Топлинни машини, първи закон 502
2. Втори закон 504
3. Обратими машини 506
4. Коефициент на полезното действие на идеалната машина 509
5. Термодинамична температура 512
6. Ентропия 513

45. ПРИМЕРИ ОТ ТЕРМОДИНАМИКАТА

1. Вътрешна енергия 518
2. Приложения 521
3. Уравнение на Клаузиус-Клапейрон 523

46. ОСТРОЗЪБО КОЛЕЛО И ПАЛЕЦ

1. Как действува острозъбото колело 527
2. Острозъбото колело като машина 528
3. Обратимост в механиката 531
4. Необратимост 532
5. Порядък и ентропия 534

47. ЗВУК. ВЪЛНОВО УРАВНЕНИЕ

1. Вълни 537
2. Разпространение на звука 539
3. Вълново уравнение 540
4. Решения на вълновото уравнение 543
5. Скорост на звука 544

48. БИЕНЕ

1. Сумиране на две вълни 546
2. Някои забележки за биенето и модулацията 548
3. Странични ивици 549
4. Локализиран вълнов пакет 551
5. Амплитуда на вероятността на частиците 554
6. Вълни в тримерното пространство 556
7. Собствени трептения 557

49. СОБСТВЕНИ ТРЕПТЕНИЯ

1. Отражение на вълните 559
2. Вълни в ограничено пространство и собствени честоти 560
3. Двумерни собствени трептения 562
4. Свързани махала 562
5. Линейни системи 566

50. ХАРМОНИЧНИ

1. Музикални звуци 568
2. Ред на Фурие 569
3. Качество и хармония 570
4. Коефициенти на Фурие 573
5. Теорема за енергията 576
6. Нелинейна реакция 577

51. ВЪЛНИ

1. Вълна от движещ се предмет 580
2. Ударни вълни 581
3. Вълни в твърдо тяло 584
4. Повърхностни вълни 588

52. СИМЕТРИЯ НА ЗАКОНИТЕ НА ФИЗИКАТА

1. Симетрични операции 592
2. Симетрия в пространството и времето 593
3. Симетрията и законите за запазването 595
4. Огледално отражение 596
5. Полярен и аксиален вектор 599
6. Коя ръка е дясна? 601
7. Четността не се запазва 602
8. Антивещество 604
9. Нарушената симетрия 605

1

Атомите в движение

1. Увод

1. Увод
2. Веществото се състои от атоми
3. Атомни процеси
4. Химически реакции

Този двегодишен курс по физика, читателю, е изграден с оглед на това, че вие възнамерявате да станете физик. Да предположим, че това не е съвсем задължително, но кой ли преподавател не се надява на това! Ако вие наистина искате да станете физик, ще трябва много да поработите. Двеста години бурно развитие на най-мощната област на знанието все нещичко означава! Такова изобилие от материал не се усвоява за четири години; след това трябва да се посещават и специални курсове.

И все пак, целият резултат от колосалната работа, извършена през тези столетия, може да се кондензира — да се сведе до малко на брой *закони*, които са равносметка на всички наши знания. Тези закони обаче също не се усвояват лесно и просто, би било нечестно към вас, ако изучаването на такъв труден предмет започне без някаква схема или описание на връзката между отделните клонове от науката. Първите три глави представляват такова описание. В тях ние ще се запознаем с това, как е свързана физиката с останалите науки, как се отнасят тези останали науки една към друга и какво е това наука. Това ще ни помогне „да усетим“ предмета на физиката.

Ще запитате: защо да не дадем основните закони веднага, още на първата страница, а после само да показваме как действуват в различни условия? Точно така постъпват в геометрията: формулират аксиоми, а после остава само да се правят изводи. (Хубавичка мисъл: да изложим за 4 минути онова, за което не са достатъчни и 4 години.) Това е невъзможно да се направи по две причини. Първо, не всички основни закони са ни известни, обратно, колкото повече неща усвоим, толкова по-широки стават границите на онова, което трябва да опознаем! Второ, точната формулировка на законите на физиката е свързана с много необикновени идеи и понятия, изискващи за своето описание също толкова необикновена математика. Нужна е доста практика само за това, да се научиш да разбираш смисъла на *думите*. Така че вашето предложение няма да мине. Ще трябва да се придвижваме постепенно, стъпка по стъпка.

Всяка крачка в изучаването на природата — това е винаги само *приближаване* към истината, по точно към това, което считаме за истина. Всичко, което ще научим, е някакво приближение, защото знаем, че *още не всички закони са ни известни.* Всичко се изучава само затова, за да стане отново непонятно или в най-добрия случай, за да се търси поправка.

Принципът на науката, почти определението й, се състои в следното: *пробният камък на всички наши знания е опитът.* Опитът, експериментът, това е *единственият съдия* на научната „истина“. А къде е източникът на знания? Откъде идват законите, които проверяваме? Разбира се, от същия този опит; той ни помага да извеждаме закони, в него се крият намеци за тях. А на всичко отгоре е нужно и *въображение*, за да се види зад намеците нещо голямо и главно, за да се отгатне неочакваната, проста и прекрасна картина зад тях и после да се постави опит, който би ни убедил в правилността на догадката. Този процес на въображението е толкова труден, че се налага трудът да бъде разделен: има физици-*теоретици*, те фантазират, съобразяват и отгатват новите закони, но не правят опити, а има и физици-*експериментатори*, чието занятие е да правят опити, да

фантазират, съобразяват и отгатват.

Ние казахме, че законите на природата — това са приближения. Отначало откриват „неправилни“ закони, а след това вече „правилните“. Но как може да бъде „погрешен“ опитът? Първо, по най-простата причина: когато във вашите прибори нещо не е в ред, а вие не го забелязвате. Такава грешка лесно се улавя, трябва само всичко да се проверява и проверява. Ако не се хващаме за дребното, могат ли все пак резултатите от опита да бъдат погрешни? Могат, поради недостиг на точност. Например масата на предмета изглежда неизменна; въртящият се пумпал тежи толкова, колкото и неподвижния. Ето ви готовия „закон“: масата е постоянна и не зависи от скоростта. Но този „закон“, както става ясно, не е верен. Оказа се, че масата расте с увеличението на скоростта, само че, за да се забележи нарастването ѝ, са необходими скорости, близки до светлината. Правилният закон е следният: ако скоростта на предмета е по-малка от 100 km/s, масата е постоянна с точност до една милионна. В такава приблизителна форма този закон е верен. Може да се помисли, че практически няма съществена разлика между стария закон и новия. И да, и не. За обикновените скорости може и да забравим уговорките и с добро приближение да считаме за закон твърдението, че масата е постоянна. Но при големи скорости, колкото скоростта е по-голяма, ще започнем да грешим все повече и повече.

Но най-удивителното е, че *от обща гледна точка всеки приблизителен закон е абсолютно погрешен.* Нашият мироглед ще трябва да бъде преразгледан дори тогава, когато масата се изменя даже и с капчица. Това е характерно свойство на общата картина на света, която стои зад законите. Дори един незначителен ефект понякога изисква коренно изменение на нашите възгледи.

А какво ни е необходимо да изучим в началото? Да учим ли ***правилните***, но необикновени закони с техните странни и трудни понятия, например теорията на относителността, четириизмеримото пространство — време и т. н.? Или да започнем с простия закон за „постоянната маса“? Той е приблизителен, но затова пък минава без трудни представи. Първото, безспорно, е по-приятно, по-привличащо; първото е много съблазнително, но да се започне с второто е по-лесно и после, нали това е първата стъпка към задълбоченото разбиране на правилната идея. Този въпрос възниква винаги, когато преподаваш физика. На различните етапи на курса ние ще го решаваме по различен начин, но на всеки стадий ще се стараем да изложим какво е известно в момента и с каква точност, как то се съгласува с останалото и какво може да се промени, когато научим повече за него.

Нека преминем към нашата схема, към очерка на нашето разбиране на съвременната наука (на първо място на физиката, но също и на другите близки до нея науки), така че по-късно, когато ще трябва да вникнем в различни въпроси, да можем да виждаме какво лежи в основата им, кое е интересното в тях и какво място заемат в общата структура.

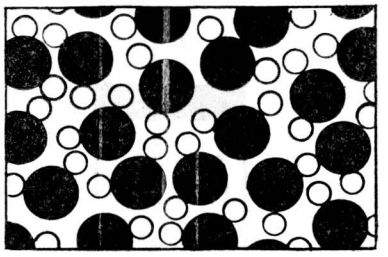
И така, *как изглежда* картината на света?

§ 2. Веществото се състои от атоми

Ако вследствие на някаква световна катастрофа всички научни познания биха били унищожени и само една фраза би стигнала до бъдещите поколения живи същества, то кое твърдение, съставено от най-малко думи, би пренесло най-голяма информация? Аз мисля, че това е *атомната хипотеза* (можете да я наричате не хипотеза, а факт, но това не променя нищо): ***всички тела се състоят от атоми — малки телца, които се намират в непрекъснато движение, привличат се на близко разстояние, но се отблъскват, ако някое от тях бъде по-плътно притиснато до друго.*** В тази единствена фраза, както ще се убедите, се съдържа *невероятно* количество информация за света,

стига само към нея да се приложи малко въображение и някои съображения.

За да се покаже силата на идеята за атома, да си представим капчица вода с размер 0,5 cm. Ако я разгледаме много внимателно, нищо друго освен вода, спокойна, разна вода, няма да видим. Дори и под най-добрия оптичен микроскоп при 2000 пъти увеличение, когато капката вземе размерите на голяма стая, ние *все още* ще виждаме относително спокойна вода, само че по нея ще започнат да пробягват някакви „футболни топки". Това е чехълче — много интересно нещо. Сега вие можете да спрете и да се заемете с чехълчето, с ресничките му, да гледате как то се свива и разпуща и да не обръщате внимание повече на неговото по-нататъшно увеличение (ако не ви се прииска да го разгледате отвътре). С чехълчето се занимава биологията и ние ще го отминем и, за да разгледаме още по-добре водата, ще я увеличим още 2000 пъти. Сега капката ще порасне до 20 km и ние ще видим, че в нея нещо мърда; тя вече не е така спокойна и непрекъсната, сега напомня тълпата на стадиона в деня на футболен мач, гледана от височината на птичи полет. Какво мърда там? За да разгледаме по-добре, ще увеличим още 250 пъти. Пред погледа ни ще се разкрие нещо подобно на фиг. 1. 1. Това е капка вода, увеличена милиард пъти, но тази картина, разбира се, е условна. Преди всичко изобразените частици са опростени, с резки краища — това е първата неточност. За простота са разположени на плоскост, а в същност те блуждаят и в трите измерения — това второ. На фигурката се виждат два вида петна (или кръгчета) — черни (кислород) и бели (водород); ясно е, че към всеки кислород са се прикрепили два водорода. (Такава група от един атом кислород и два атома водород се нарича молекула). Накрая, третото опростяване се състои в това, че истинските частици в природата непрекъснато трептят и подскачат една около друга. Вие трябва да си представите на картината не покой, а движение. На фигурата не може също да се покаже как частиците прилепват една към друга, как се привличат, как се държат една за друга и т. н. Може да се каже, че цели техни групи са като че ли „залепени" с нещо. Обаче нито едно от телцата не е способно да се промъкне през друго. Ако вие се опитате насила да ги притиснете едно към друго, те ще се отблъснат.

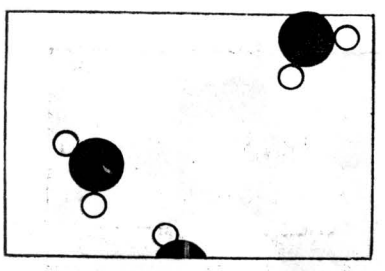


Фиг. 1.1. Капка вода (увеличена един милиард пъти)

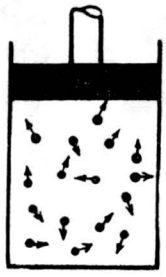
Радиусът на атомите е равен приблизително на 1 или 2 по 10^{-8} cm. Величината 10^{-8} cm е ангстрьом, така че радиусът на атома е равен на 1 или 2 ангстрьома (Å). А ето и друг начин да се запомни размерът на атома: ако една ябълка увеличим до размерите на Земята, то атомите в ябълката ще нараснат до размера на ябълката.

Представете си сега тази капка вода с нейните частички, които танцуват, играят на гоненица и се прилепят една към друга. Водата запазва обема си и не се разпада на части именно поради взаимното притегляне на молекулите. Дори като се хлъзга по стъклото, капката не се разлива пак поради притеглянето. И всички вещества не се изпаряват по същата причина. Движението на частиците ние възприемаме като *топлина*: колкото по-висока е температурата, толкова по-силно е движението. При нагряване на водата блъсканицата сред частиците нараства, промеждутъците между тях растат и настъпва миг, когато притеглянето между молекулте вече не е достатъчно, за да ги задържи заедно; тогава те се *изпаряват*, отдалечават се една от друга. Така се получава водната пара: при повишаване на температурата се усилва движението и частиците се вдигат във въздуха.

На фиг. 1. 2 е показана пара. Тази фигура е лоша в едно отношение — при избраното от нас увеличение на една стая ще се паднат само няколко молекули, при това съмнително е дали цели 2 1/2 молекули ще има на такава малка фигура. На такава площ по-скоро няма да има нито една частица. Но все пак трябва нещо да се нарисува, за да не бъде съвсем празна фигурата. Като се гледа парата, по-лесно се виждат характерните черти на



Фиг. 1.2. Пара под микроскоп



Фиг. 1.3. Цилиндър с бутало

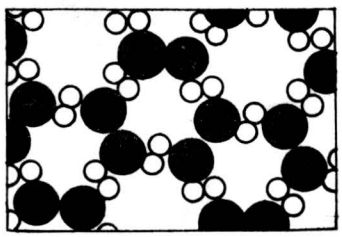
водата. За простота на рисунката ъгълът между атомите на водорода е взет 120°. Всъщност той е равен на 105°3′, а разстоянието между центровете на кислородните и водородните атоми е равно на 0,957 Å. Както виждате, доста добре си представяме тази молекула.

Нека разгледаме някои свойства на водната пара или на други газове. Отделните молекули на парата непрекъснато се удрят в стените на съда. Представете си стая, в която множество тенисни топки (около стотина) безпорядъчно и непрекъснато подскачат навсякъде. Под град от удари стените ще се разкъсат (така че трябва да се придържат). Нашите груби органи на чувствата (тяхната чувствителност не е нараснала милиард пъти) възприемат като постоянен натиск тази нестихваща атака от ударите на атомите. За да задържим газа в неговите предели, трябва да приложим налягане. На фиг. 1.3 е показан обикновен съд с газ (без него не минава никой учебник) — цилиндър с бутало. Молекулите за простота са представени като тенисни топки или точици, защото формата им не е от значение. Те се движат хаотично и непрекъснато. Голяма част от молекулите непрекъснато удрят по буталото. Техните непрекъснати удари ще го изтласкат от цилиндъра, ако не се приложи някаква сила върху буталото — натиск (сила, всъщност — това е налягане, умножено по площта). Ясно е, че силата е пропорционална на площта на буталото, защото ако увеличим неговата площ, като запазим същото количество молекули във всеки кубически сантиметър, то и броят на ударите върху буталото ще нарасне толкова пъти, колкото се е разширила площта.

А ако се удвои броят на молекулите в съда (и съответно нарасне тяхната плътност), а скоростта им (и съответно температурата) останат предишните? Тогава доста точно ще се удвои и числото на ударите, а тъй като всеки от тях е така „енергичен", както и по-рано, то ще излезе, че налягането е пропорционално на плътността. Ако се вземе под внимание истинският характер на силите на взаимодействие на атомите, трябва да се очаква и малко спадане на налягането поради увеличението на привличането между атомите и леко нарастване на налягането поради увеличението на частта на общия обем, зает от самите атоми. И все пак с добро приближение, когато атомите сравнително не са много (т. е. при не високи налягания), *налягането е пропорционално на плътността.*

Лесно е да се разбере и нещо друго. Ако се повиши температурата на газа (скоростта на атомите), без да се променя плътността му, какво ще стане с налягането? Като се движат по-бързо, атомите ще започнат да удрят по буталото по-силно и по-често и налягането ще нарасне. Вие виждате колко са прости идеите на атомната теория.

А сега да разгледаме друго явление. Нека буталото бавно да се придвижи напред, заставяйки атомите да се намират в по-малък обем. Какво става, когато атомът се удари в пълзящото бутало? Ясно е, че след удара неговата скорост се повишава. Можете да проверите това, когато играете пинг-понг: след удара с хилката, топчицата отлита от нея по-бързо, отколкото е долетяла преди това (частен пример: неподвижният атом след удара на буталото придобива скорост). Излиза, че атомите, като отлетят от буталото, стават „по-горещи", отколкото са били преди удара. Затова всички атоми в съда ще наберат скорост. Това означава, че *при бавно свиване на газа неговата температура расте.* Когато бавно *свиваме* газа, неговата температура *се повишава*, а когато бавно го *разширяваме*, температурата *спада.*



Фиг. 1.4. Молекули на леда

Да се върнем към нашата капчица вода и да проследим какво ще стане с нея, когато температурата се понижи. Да допуснем, че блъсканицата сред молекулите на водата постепенно намалява. Между тях, както знаем, съществуват сили на притегляне; прилепналите една към друга молекули вече лесно се поклащат и подскачат. На фиг. 1.4 е показано какво става при ниски температури; вече виждаме нещо ново. Образувал се е лед. Разбира

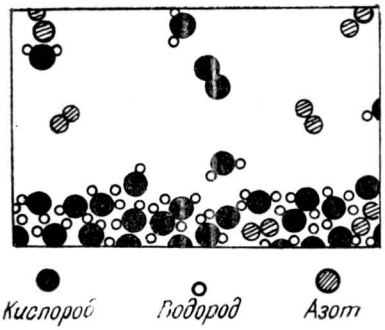
се, тази картинка също е условна — ледът няма две измерения, както е показано тук, но в общи черти тя е вярна. Интересното е, че в това вещество *всеки атом си има свое място* и ако по някакъв начин подредим атомите всеки на своето място на единия край на капката, то на много километри от него, на другия край (в нашия увеличен мащаб), поради твърдата структура на атомните връзки също ще възникне определеното правилно разположение. Затова ако се дръпне единият край на ледения кристал, то след него, противопоставяйки се на разкъсването, ще повлече и другия — за разлика от водата, в която това правилно разположение е разрушено от интензивните движения на атомите. Разликата между твърдите и течни тела се състои в това, че в твърдите тела атомите са разпределени по особен начин, наречен *кристална структура*, и даже тогава, когато се намират далеч един от друг, нищо случайно не се забелязва в тяхното подреждане — положението на атома на единия край на кристала се определя от положението на атомите на другия край, дори между тях да има милиони атоми. В течностите пък на далечни разстояния атомите са събрани, както е паднало. На фиг. 1.4. подреждането на молекулата на леда е измислена от мен и макар някои свойства на леда да са отразени, в общи черти тя е неправилна. Вярно е схванатa например част от шестостенната симетрия на кристалите на леда. Вижте: ако обърнете картинката на 120°, ще се получи същото разположение. По такъв начин ледът има *симетрия*, вследствие на което всички снежинки са шестостенни. От фиг. 1.4 може още да се разбере, защо, като се разтопи, ледът заема по-малък обем. Вижте колко много „празни“ места има на рисунката; в истинския лед също ги има много. Когато системата се руши, всички тези празни места се запълват с молекули. Болшинството прости вещества, с изключение на леда и харта (букволедярска сплав), при разтопяване се *разширяват*, защото в твърдите кристали атомите са опаковани по-плътно, а след разтапянето им трябва място, за да трептят; по-разредените структури, подобни на леда, разрушавайки се, стават по-компактни.

Но макар че ледът има „твърда“ кристална структура, неговата температура също може да се мени, в него има запас от топлина. Този запас можем да променяме по желание. Що за топлина е това? Атомите на леда все едно не се намират в покой. Те трептят и се люлеят. Даже когато има определен ред в кристала (структура), всички атоми все пак трептят „на едно място“. С повишаването на температурата размахът на тяхното люлеене нараства, докато не се изместят от мястото си. Това се нарича *топене*. Обратно, с падане на температурата трептенията все повече замират, докато не станат възможно най-малки (при абсолютната нула на температурата), макар че пълно спиране не ще настъпи).

Това минимално количество на движението не е достатъчно, за да се разтопи тялото. Но има едно изключение — хелия. Хелият при охлаждане също намалява движението на атомите си до предела, но дори при абсолютна нула, в тях се намира достатъчен запас от движение, за да го предпази от замръзване. Хелият не замръзва и при абсолютната нула, ако не го свием под високо налягане. Повишавайки налягането, може да се постигне втвърдяване на хелия.

3. Атомни процеси

Така се описват от атомна гледна точка твърдите, течните и газообразните тела. Но атомната хипотеза описва и *процеси* от атомна гледна точка. Най-напред ще говорим за процесите, които стават на повърхността на водата. Какво става тук? Ще си улесним задачата, ще я доближим до реалната действителност, като предположим, че над повърхността има въздух. Погледнете фиг. 1.5. Както по-рано виждаме молекули, образуващи масата на водата, но освен това тук е изобразена и повърхността ѝ, а над



Фиг. 1.5. Молекули на водата, изпаряващи се във въздуха

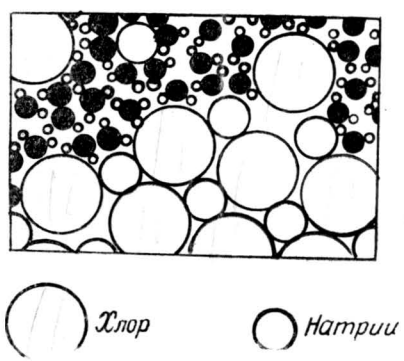
нея — различни молекули; преди всичко молекули на водата във вид на *водна пара*, каквато винаги се появява над водната повърхност (парата и водата се намират в равновесие, за което скоро ще говорим). Освен това, над водата витаят и други молекули — ту свързани в едно два атома кислород, образуващи *молекулата на кислорода*, ту два атома азот, също слепени в молекула на азота. Въздухът почти изцяло се състои от азот, кислород, водна пара и малки количества въглеродиокис, аргон и други примеси. И така, над повърхността на водата се намира въздух — газ, съдържащ известно количество водна пара. Какво става на тази рисунка? Молекулите на водата през цялото време се движат. От време на време някоя от близките до повърхността молекули получава по-силен тласък от останалите и изскача нагоре. Това не се вижда на тази рисунка, защото тук всичко е *неподвижно*. Но опитайте се просто да си представите как една от молекулите току-що е изпитала удар и излита нагоре, а с другата тъкмо се е случило същото и т. н. Така, молекула след молекула водата изчезва — тя се изпарява. Ако се *покрие* съдът, ние ще открием, че сред молекулите на намиращия се в него въздух има много водни молекули. Постоянно някои от тях отново попадат във водата и остават там. Това, което ни се струваше мъртво и безинтересно (да кажем покритата с нещо чаша вода, която може би 20 години е стояла на мястото си), всъщност крие сложен и интересен, непрекъснат динамичен процес. За нашето грубо око в чашата нищо не става, но ако бихме били милиарди пъти по-зорки, ние бихме видели как всичко се мени: едни молекули излитат, други се спущат.

Защо *не виждаме тези изменения*? Защото, колкото молекули излитат, толкова се и спущат! В общи черти там „нищо не се случва". Ако се открие чашата и се издуха влажният въздух, него ще го смени вече сух; броят на молекулите, напускащи водата, ще остане предишният (нали то зависи само от движението на водата), а броят на връщащите се молекули ще се намали много, защото почти ги няма вече над водата. Броят на излитащите молекули ще превиши броя на спускащите се, водата ще започне да се изпарява. Затова, ако искате да изпарявате вода, включете вентилатор!

Но това още не е всичко. Нека помислим какви молекули излитат от водата? Ако молекулата изскочи, това означава, че тя случайно е набрала в себе си излишък енергия, който ѝ е необходим, за да разкъса оковите на притеглянето на съседите си. Енергията на излитащите молекули надхвърля средната енергия на молекулите във водата, затова енергията на оставащите молекули е *по-ниска* от тази, която са имали преди изпаряването. Тяхното движение намалява. От изпарението водата постепенно изстива. Разбира се, когато молекулата на парата се окаже отново до повърхността на водата, тя изпитва силно притегляне и може отново да попадне във водата. Притеглянето я ускорява и в крайна сметка възниква топлина. И така, отивайки си, молекулите отнасят топлина; когато се връщат — донасят топлина. Когато чашата е покрита, балансът се изравнява, температурата на водата не се променя. Ако духаме над водата за да превиши изпарението връщането на молекулите, водата се охлажда. Затова, за да изстудите супата, духайте!

Вие разбирате, че в действителност всичко става много по-сложно, отколкото е описано тук. Не само водата минава във въздуха, но молекулите на кислорода или азота от време на време преминават във водата и „се губят" в масата водни молекули. Попадането на атоми кислород и азот във водата означава разтваряне на въздуха във водата; ако внезапно изтеглим въздуха от съда, то молекулите на въздуха ще започнат да се отделят от водата по-бързо, отколкото проникват в нея. Ние ще видим как нагоре се издигат мехурчета. Вие навярно сте чували, че това явление е много вредно за подводните плувци.

Сега да минем на друг процес. На фиг. 1.6 виждаме как (от атомна гледна точка) се разтваря солта във водата. Какво се по-

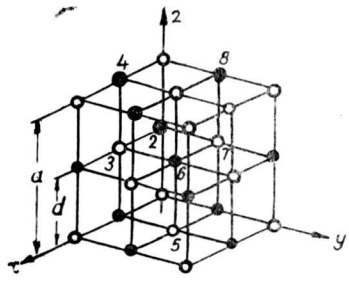


Фиг. 1.6. Молекули на солта, разтварящи се във вода

лучава, ако хвърлим кристалче сол във водата? Солта — това е твърдо тяло, кристал, в който „атомите на солта“ са разположени в правилни редици. На фиг. 1.7 е показан тримерният строеж на обикновената сол (натриев хлорид). Строго казано, кристалът се състои не от атоми, а от йони. Йоните — това са атоми, които или имат в излишък, или пък не им достигат електрони. В кристала на солта ние намираме йоните на хлора (атоми на хлора с един излишен електрон) и йоните на натрия (неговите атоми са лишени от един електрон). Йоните в твърдата сол са скрепени един за друг чрез електрическо притегляне, но във водата някои от тях, притеглени към положителния водород или отрицателния кислород, започват да се движат свободно. На фиг. 1.6 се вижда освободилият се йон на хлора и други атоми, плуващи във водата във вид на йони. На рисунката са подчертани нарочно някои детайли на този процес. Забележете например, че водородните краища на молекулите на водата обикновено заграждат йона на хлора, а около йона на натрия по-често се намира кислород (йонът на натрия е положителен, а атомът на кислорода в молекулата на водата е отрицателен, затова те се притеглят). Може ли да се разбере от рисунката *разтваря ли се* тук солта във водата, или *изкристализира* от водата? Ясно е, че *не може*; част от атомите излизат от кристала, друга част се присъединяват към него. Този процес е *динамичен*, подобен на изпарението; всичко зависи от това, много или малко е солта във водата, в каква посока е нарушено равновесието. Под равновесие се разбира такова състояние, когато количеството на излизащите атоми е равно на това на влизащите. Ако във водата почти няма сол, то повече атоми отиват във водата, отколкото се връщат от нея — солта се разтваря. Ако пък „атомите на солта“ са доста поповече, то приходът надвишава загубата и солта изкристализира.

Ние споменахме между другото, че понятието *молекула* на веществото не е съвсем точно и има смисъл само за някои видове вещества. То е приложимо за водата, в нея наистина три атома винаги са свързани помежду си, но то не подхожда много за твърдия натриев хлорид. Натриевият хлорид — това са йони на хлора и натрия, образуващи кубическа структура. Не може по естествен начин да ги групираме в „молекули на солта“.

Да се върнем към въпроса за разтварянето и утайването на солта. Ако се повиши температурата на солния разтвор, то ще нарасне броят на разтварящите се атоми и броят на утаяващите се. Оказва се, че в общия случай е трудно да се предскаже в каква посока ще протече процесът, по-бързо или по-бавно ще става разтварянето. С нарастването на температурата болшинството от веществата започват да се разтварят повече, а за някои разтворимостта намалява.



Разтояние до най-близкия съсед d. a/2

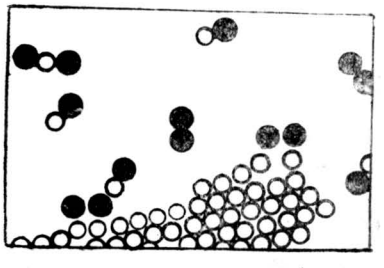
Фиг. 1.7. Структура на кристала на солта

Кристал	●	○	a, Å
Каменна сол	Na	Cl	5,64
Силвин	K	Cl	6,28
	Ag	Cl	5,54
	Mg	O	4,20
Оловен блясък	Pb	S	5,97
	Pb	Se	6,14
	Pb	Te	6,34

4. Химически реакции

Към всички описани процеси атомите и йоните не сменяха своите партньори. Но, разбира се, възможни са и обстоятелства, при които съчетанията на атомите се променят, образувайки нови молекули. Това е показано на фиг. 1.8. Процесът, при който атомите партньори си разменят местата, се нарича *химическа реакция*. По-горе описаните процеси се наричат физически, но е трудно те да бъдат рязко разграничени от другите. (На природата е безразлично как ще наречем това, тя просто си върши работата.) На картинката искахме да покажем как гори въглен в кислород. Молекулата на кислорода се състои от *два атома*, съединени много здраво. (А защо не от *три* или даже от *четири*? Такава е една от характерните черти на атомните процеси: атомите са много взискателни, нравят им се определени партньори, определени посоки и т. н. Едно от задълженията на физиката е да обясни защо те искат именно това, което искат. Във всеки случай *два* атома кислород, доволни и наситени, образуват молекула.)

Да предположим, че атомите на въглерода образуват твърд



Фиг. 1.8. Въглен, горящ в кислород

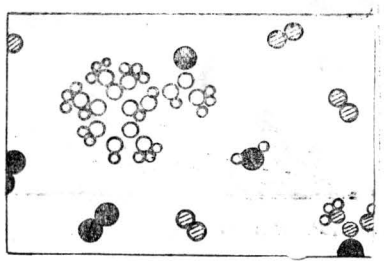
кристал (графит или диамант[1]). Една от молекулите на кислорода може да се промъкне до въглерода, всеки неин атом ще хване по един атом въглерод и ще излети в ново съчетание въглерод — кислород. Такива молекули образуват газ, наречен задушлив. Неговото химическо име е CO. Какво значи това? Буквите CO — това всъщност е картината на тази молекула: C — въглерод; O — кислород. Но въглеродът притегля кислорода или въглеродът — въглерод. Затова при този процес кислородът може да дойде с малка енергия, но хващайки се с неимоверна жажда и страст за въглерода, освобождава енергия, която се поглъща от от всички съседни атоми. Образува се голямо количество енергия на движението (кинетична енергия). Това е, разбира се, самото *горене*; ние получаваме топлина от съчетанието на кислорода и въглерода. Топлината при обикновени условия се проявява във вид на движение на молекулите на нагретия газ, но понякога може да бъде толкова много, че тя предизвиква и *светлина*. Така се получава *пламъкът*.

Освен това молекулите CO могат да не се задоволят с постигнатото. Те имат възможност да присъединят още един атом кислород, възниква по-сложна реакция; кислородът от двойката кислород — въглерод ще се сблъска с другата молекула CO. Атомът на кислорода ще се присъедини към CO и накрая ще се образува молекула от един въглерод и два кислорода. Означават я с CO_2 и я наричат въглеродвуокис. Когато изгаря много бързо въглерод (да кажем в мотора на автомобил, където взривовете са така чести, че не успява да се образува въглената киселина), възниква много задушлив газ. В много такива разместванията на атомите се отделя огромно количество енергия, наблюдават се взривове, избухва пламък и т. н., всичко зависи от реакцията.

Химиците са изучили тези разположения на атомите и са установили, че всяко вещество — това е своеобразен тип на *разположение на атомите*.

За да обясним тази мисъл, ще разгледаме нов пример. До леха теменужки вие веднага чувствате техния „мирис“. Това значи, че в носа ви са попаднали *молекули* или атоми, разположени по особен начин. Как са попаднали там? Е, това е просто. Щом мирисът е молекули от особен вид, то движейки се и блъскайки се навсякъде, те *случайно* могат да попаднат и в носа. Разбира се, те не са се стремили да попаднат там. Това са просто безпомощни тълпи от молекули; в своите безцелни блуждаения тези късчета от веществото понякога се оказват и в носа.

Химиците могат да вземат дори такива необикновени молекули като молекулите на мириса на теменужките, да анализират техния строеж и да ни *опишат* точното разположение на техните атоми в пространството. Ние например знаем, че молекулата на въглеродвуокиса е права и симетрична: O—C—O (това може лесно да се разбере и посредством физически методи). Но и за безкрайно по-сложни разположения на атомите, отколкото тези, с които се занимава химията, може след дълги увлекателни търсения да се разбере как изглежда такова разположение. На фиг. 1.9 е изобразен въздух над теменугите. Отново намираме тук азот, кислород, водна пара . . . (А тя пък откъде се взе? От *влажните* теменужки. Всички растения изпаряват вода.) Сред тях обаче витае „чудовището“, което се състои от атоми въглерод, водород и кислород, които са си харесали особен вид разположение. Това разположение е доста по-сложно, отколкото това на въглената киселина. За съжаление не можем да го нарисуваме, макар че е известно съвсем точно на химиците, но е триизмеримо, а как да го изобразим в две измерения?! Как да нарисуваме шест въглерода, които образуват пръстен, но не плосък, а като „хармоничка“? Всички ъгли, всички разстояния в него са известни. Така химическата *формула* е просто картина на такава молекула. Когато химикът пише формула на дъската, той, грубо казано, се опитва да



Фиг. 1 9. Мирис на теменужка

[1] Диамантът също може да изгори във въздуха.

нарисува молекулата в две измерения. Например ние виждаме пръстен от шест въглерода; въглеродна верижка, висяща на единия край; кислород, стърчащ на края на верижката; трите водорода, закачени на онзи там въглерод; два въглерода и три водорода, прилепени ето тук, и т. н.

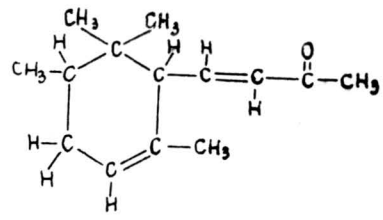
Как разбира химикът, що за разположение е това? Той ще вземе две епруветки с вещество, ще смеси съдържанието им и гледа: ако сместта почервенее, значи към еди-кое си място в молекулата е прикрепен един водород и два въглерода, ако е посиняла, то . . . то това нищо не значи. Органичната химия може да поспори с най-фантастичните страници от детективските романи. За да узнае как са разположени атомите в някаква невероятно сложна молекула, химикът гледа какво ще стане, ако се смесят две различни вещества. Физикът за нищо на света не би повярвал, че химикът, като описва разположението на атомите, разбира за какво говори. Но ето вече повече от 20 години, откакто се е появил физичният метод, който позволява да се разглеждат молекулите (не толкова сложни, но поне сродни) и да се описва разположението на атомите не по цвета на разтвора, а чрез *измерване разстоянието между атомите*. И какво? Оказа се, че химиците почти никога не грешат!

Оказва се, че действително в мириса на теменужките присъствуват три малко различни молекули, те се различават само по разположението на атомите на водорода.

Една от проблемите в химията е да се измисли такова название на веществото, че по него да може да се разбере какво представлява то. Да се намери име за неговата форма! Но то трябва не само да описва формата, а още и да показва, че тук има кислород, а там — водород, за да бъде точно отбелязано къде какво стои. Сега вие разбирате защо химическите наименования са така сложни. Те не са сложни, а пълни. Затова названието на молекулата на мириса на теменужките е следното: 4-(2, 2, 3, 6-тетраметил-5-циклохексан)-3-бутан-2-ОН. То напълно описва строежа на молекулата (изобразена на фиг. 1.10), а дължината му се обяснява със сложността на молекулата. Всъщност химиците съвсем не искат да ни замъгляват мозъците, просто имат да решават най-сложна задача — описанието на молекулата с думи.

Но откъде ние все пак *знаем*, че атомите съществуват? Тук важи описаният вече подход: ние *предполагаме*, че съществуват и всички резултати един след друг се оказват такива, каквито предсказваме — каквито трябва да бъдат, ако всичко *се състои* от атоми. Съществуват и по-преки доказателства. Ето едно от тях. Атомите са толкова малки, че не ще ги видиш в никакъв микроскоп (дори в *електронен*, още повече пък светлинен). Но атомите през цялото време се движат и ако се хвърли във водата голямо топче (голямо в сравнение с атомите), то също започва да потрепва. Все едно да се играе на пушбол*, при който два отбора тласкат огромна топка от разни страни. Тласкат в различни посоки и накъде ще се търколи топката не можеш да отгатнеш. Точно така ще се движи и „голямата топка“ във водата: в различни моменти от време от разни страни върху нея ще се сипят нееднакви удари. Затова когато гледаме в добър микроскоп някакви много малки частички във водата, то виждаме безспирното им блъскане — резултат от атомната бомбардировка върху тях. Това наричаме *Брауново движение*.

Други доказателства за съществуването на атомите може да се получат от строежа на кристалите. В много случаи техният строеж, определен чрез опитите с преминаване на рентгенови лъчи през кристалите, се съгласува по своето пространствено разположение с формата на самия природен кристал. Ъглите между различните стени на кристала се съгласуват с точност не до градуси, а до секунда, с ъглите, изчислени при предположението, че кристалът се състои от много „слоеве“ атоми.



Фиг. 1.10. Структурна формула на мириса на теменужката

* Игра с голяма топка.

Всичко се състои от атоми. Това е най-основното твърдение. В биологията например най-важното предположение се състои в това, че *всичко което прави животното, се върши от атомите.* С други думи, *в живите същества няма нищо, което не би могло да бъде разбрано от тази гледна точка, че те се състоят от атоми, действуващи по законите на физиката.* Някога това не беше ясно. Нужни бяха много опити и размишления, преди да се изрази това предположение, но сега то е прието навсякъде и носи огромна полза, като поражда нови идеи в областта на биологията.

Помислете сами! Ако кубчето стомана или кристалчето сол, състоящо се от еднакви редици еднакви атоми, може да проявява такива интересни свойства; ако водата — простите капчици, неразличими една от друга и покриващи километри от повърхността на Земята — е способна да поражда вълни и пяна, гърма на прибоя и странните шарки по гранита на кея, ако всичко това, цялото богатство на водния живот не е нищо друго освен купчина от атоми, то *колко възможности още се крият в тях?* Ако вместо да ги строяваме по височина, ред по ред, колона след колона, даже вместо да построяваме от тях чудноватите молекули на мириса на теменужките, ако вместо това само ги подреждаме *всеки път по различен начин*, като разнообразяваме мозайката им, без да повтаряме онова, което вече е било — представяте ли си колко необикновени, неочаквани неща могат да възникнат в тяхното поведение. Нима е невъзможно онези „тела", които се разхождат по улицата и беседват с вас, да не са нищо друго, освен купчинки сгъстени атоми, но толкова сложни, че вече не стига фантазията, за да се предскаже по техния вид поведението им. Когато наричаме себе си купчинки атоми, това не значи, че ние сме *само* сбор от атоми, защото такава купчинка атоми, която никога не се повтаря, прекрасно може да се окаже способна да седи на масата и да чете тези редове.

2

Основни физически възгледи

§ 1. Увод

§ 2. Физиката до 1920 г.

§ 3. Квантова физика

§ 4. Ядра и частици

§ 1. Увод

В тази глава ще бъдат разгледани най-основните представи за физиката; тук ще се говори за това, как ние сега си представяме природата на нещата. Не ще разказвам историята как е станало известно, че тези представи са правилни; това ще отложим за друг път.

Предметът на науката се явява пред нас с много прояви, с изобилие от признаци. Спуснете се в морето, вгледайте се в него. Нали това не е просто вода. Това е вода и пяна, това са малки вълнички и връхлитащи вълни, това са облаци, слънце и синьо небе, това е светлина и топлина, шум и дъх на вятъра, това са пясък и скали, водорасли и риба, техният живот и гибел, това сте и вие самите, вашите очи и мисли, вашето усещане за щастие. И не е ли същото навсякъде, не е ли такова разнообразието на явленията и влиянията? Вие не ще намерите в природата нищо просто, всичко в нея е преплетено и слято. А нашата любознателност изисква да се намери простотата, изисква да си задаваме въпроси, да се мъчим да схванем същността на нещата и да разберем тяхната многостранност, като последствие от действието на сравнително малко количество от най-прости процеси и сили, които се съчетават всестранно.

И ние се питаме: различава ли се пясъкът от камъка? Може би това е само множество камъчета? А може би и Луната — това е огромен камък? Тогава, като разберем какво представляват камъните, не ще ли разберем и природата на пясъка и Луната? А вятърът — какво е това? Може би това са плясъци на въздуха като онези плясъци на водата в брега? Какво общо има между различните движения? И има ли нещо общо във всевъзможните звуци? Колко ще се получи, ако се преброят всички цветове? И така нататък и така нататък. Ето така се опитваме постепенно да анализираме всичко наоколо, стремим се да свържем онова, което като че ли не може да бъде свързано, с надеждата, че ще ни се удаде да *намалим* количеството на *различните* явления и така по-добре да ги разберем.

Начин да се получават частични отговори на подобни въпроси е бил измислен още преди няколко стотици години. *Наблюдение, разсъждение и опит* — ето какво представлява така наречения *научен метод.* Тук ще се ограничим само с голо описание на най-основните идеи на физиката, основите на мирогледа, възникнал във физиката при прилагането на научния метод.

Какво значи „да се разбере нещо“? Представете си, че сложният ред на движещите се предмети (какъвто всъщност е светът) е нещо като гигантски шахмат, на който играят боговете, а ние следим тяхната игра. Какви са правилата на играта, ние не знаем, разрешили са ни само *да наблюдаваме* играта. Разбира се, ако погледаме по-дълго, то все някакви правила ще можем да схванем. Под *основни физически възгледи,* под *фундаментална физика* ние разбираме *правилата на играта.* Но дори и да знаем всички правила, може да не разберем някой ход просто поради неговата сложност или поради ограничеността на нашия ум. Този, който играе шахмат, знае, че е лесно да се научат правилата, но да разбереш хода на играча или да избереш най-добрия ход понякога е много трудно. Не по-добре, а дори много по-зле е всичко в природата. Не е изключено в края на краищата всички правила да бъдат открити, но засега съвсем не всички са ни известни. Постоянно те заплашва рокада или някакъв друг неразбираем ход.

Дори да знаем всички правила, то много рядко ни се случва да обясним нещо, позовавайки се на тях. Та почти всички срещани положения са толкова сложни, че няма никаква възможност, като си служим с правилата, да проследим плана на играта, а още по-малко, да предскажем следващия ход. Налага се да се ограничим с най-основните правила. Когато ги проумяваме, вече смятаме, че сме „разбрали" света.

Но откъде знаем, че правилата, които ние „усещаме", са действително верни? Та ние не сме способни разумно да се оправим в хода на играта. Съществуват, грубо казано, три начина на проверка. Първо, може да се мисли, че природата е устроена (или ние я устройваме) съвсем просто, само от няколко части — тогава може точно да се предскаже всичко, което ще се случи, и така се проверяват самите правила. (В ъгъла на дъската може да се окажат само няколко фигури и е лесно да си представим всичките им движения.)

Има и втори доста добър начин за проверка на правилата: трябва от тези правила да се изведат нови, по-общи. Да кажем, офицерът ходи само по диагонал; значи колкото и да ходи, той винаги ще се окаже например на черно поле. Значи, без да се вниква в детайлите, нашите представи за движението на офицера винаги могат да се проверят по това, остава ли той през цялото време на черно поле. Разбира се, не е изключено офицерът внезапно да се озове в бяло поле: след като са го взели, пешката е стигнала до последния хоризонтал и се е превърнала в офицер на бяло поле. Така е и във физиката. Дълго време ние разполагаме с правилото, което действува отлично навсякъде, дори и когато детайлите на процеса не са известни за нас и изведнаж понякога изплува ново правило. От гледна точка на основите на физиката най-интересните явления стават в новите места, там, където правилата не действуват, а не в онези места, където те *действуват!* Така се откриват новите правила.

Има и трети начин да се убедим, че нашите представи за играта са правилни; малко оправдан по същество, той е може би най-мощният от всички способи. Това е пътят на грубите приближения. Ние може да не знаем защо Алехин е тръгнал *точно с тази фигура.* Но *в общи черти* ние можем да разбираме, че той явно събира всички фигури за защита на царя и да съобразим, че при тези обстоятелства това е най-разумното. Точно така ние често повече или по-малко разбираме природата, макар и да не знаем и да не разбираме всеки ход на отделната фигура.

Някога всички явления в природата са били грубо делени на класове — топлина, електричество, механика, магнетизъм, свойства на веществата, химически явления, светлина (или оптика), рентгенови лъчи, ядрена физика, привличане, мезонни явления и т. н. Целта обаче е в това, *цялата природа* да бъде разбрана като различни страни *на една съвкупност от явления.* В това се състои задачата на фундаменталната теоретична физика на днешното време: *да открие законите, стоящи зад опита, да обедини тези класове.* Исторически, рано или късно, винаги се удавало да бъдат слети, но минавало време, възниквали нови открития и отново се поставяла задачата за тяхното включване в общата схема. Веднаж била възникнала общата картина на света — но внезапно били открити лъчите на Рентген.

След време станало ново сливане ... и изведнаж открили съществуването на мезоните. Затова на всеки стадий играта изглежда безпорядъчна, незавършена. Много неща се обясняват от една гледна точка, но винаги някакви жички и нишки се мотаят, винаги някъде стърчи нещо нелепо. Такова е сегашното положение на нещата, които ние ще се опитаме да опишем.

Ето взетите от историята примери на сливане. Първо *топлината* беше сведена до *механиката.* Колкото е по-силно движението на атомите, толкова по-голям е запасът от топлина в системата — излиза, че *топлината, а и всички температурни ефекти могат да бъдат разбрани с помощта на законите на механиката.* Другото величествено обединение беше отпразну-

вано, когато беше открита връзката между електричеството, магнетизма и светлината. Оказа се, че това са различни страни на една същност, сега ние я наричаме *електромагнитно поле*. А химическите явления, свойствата на различните вещества и поведението на атомните частици се обединиха от *квантовата химия*.

Възниква естественият въпрос: ще бъде ли възможно в края на краищата *всичко* да бъде слято в едно цяло и да се разбере, че целият наш свят представлява просто различни страни на *някаква единствена вещ*. Това никой не знае. Ние знаем само, че според степента на нашето придвижване напред понякога ни се отдава да слеем едно нещо с друго, а после пак нещо престава да се побира в общата картина и ние отново започваме да подреждаме частите на кръстословицата, надявайки се да направим от тях нещо цяло. А колко части има тази кръстословица и ще има ли тя край — това никому не е известно. И не ще бъде известно, докато не довършим цялата картина, ако това някога въобще бъде направено. Тук ние искаме само да покажем колко далеч е отишъл процесът на сливане, как стои въпросът с обяснението на основните явления за сметка на най-малко количество принципи. Или, изразено по-просто, *от какво се състои всичко и колко са тези елементи?*

2. Физиката до 1920 година

За нас би било трудно да започнем направо с днешните възгледи. По-добре да видим как е изглеждал светът примерно в в 1920 г., а след това ще изтрием излишното от тази картина.

До 1920 г. картината беше примерно следната. „Сцената", на която излиза Вселената — това е тримерното *пространство*, описано още от Евклид; всичко се изменя в среда, наричана *време*. Елементите, излизащи на сцената — това са *частиците*, например атомите; те притежават известни свойства, да кажем свойството инерция: когато частицата се движи в някакво направление, то тя върши това дотогава, докато не ѝ подействуват *сили*. Следователно, вторият елемент — това са силите; считало се, че те са два вида. Първият — много объркан тип, е силата на взаимодействието, т. е. силата, свързваща атомите в различните им комбинации, която решава дали при нагряване солта ща започне да се разтваря по-бързо или по-бавно. Другият вид сили — това е взаимодействието на далечни разстояния — привличане, спокойно и гладко; то се мени обратно пропорционално на квадрата на разстоянието и се нарича *притегляне* или *гравитация*. Законът ѝ е известен и прост. Но *защо* телата остават в движение, след като са започнали да се движат, или *поради какво* съществува законът на притеглянето — това е било неизвестно.

Продължаваме нашето описание на природата. От тази гледна точка *газът*, както и впрочем веществото *въобще*, представлява безброй движещи се частици. По такъв начин много от това, което виждаме на брега на морето, сега лесно се подрежда в едно цяло. Налягането се свежда до удари на атомите по стеничката; струпването на атомите (тяхното движение в една посока) — това е вятърът; *хаотичните* вътрешни движения — това е *топлината*. Вълните — това е излишък от налягане, места, където са се събрали прекалено много частици; като се разлетят, те образуват в новите места също такива натрупвания от частици; тези вълни на излишък на плътност са същността на *звуците*. Не е било малко постижение разбирането на всичко това (нещичко писахме вече в предидущата глава).

Какви *сортове* частици съществуват? По онова време са мислели, че те са 92; били са открити дотогава 89 типа атоми. Всеки тип е имал свое название.

По-нататък възникнал проблемът: *какво е това сили на близко действие*. Защо атомът на въглерода притегля един, в най-добрия случай два атома кислород, но не повече? В какво се състои механизмът на взаимодействие между атомите? Не е ли

това привличане? Не. То е твърде слабо, за да бъде привличане Трябва да си представим сила, сходна с привличането, също обратно пропорционална на квадрата на разстоянието, но несравнено по-мощна. В нея има и друга разлика. Притеглянето — това винаги е привличане; да допуснем сега, че има „предмети“ от *два сорта* и тази нова сила (има се пред вид електричеството, разбира се) притежава такова свойство, че еднаквите сортове се *отблъскват*, а различните се притеглят. „Предметът,“ носещ това силно взаимодействие, се нарича *заряд*.

Какво се получава тогава? Да допуснем, че два различни сорта (плюс и минус) са прилепени плътно един към друг. Третият заряд се намира далеч. Ще почувствува ли той притеглянето? *Практически не*, ако първите два са еднакви по големина: притеглянето на единия и отблъскването на другия се уравновесяват. Значи, на значителни разстояния силата е незабележима. Но когато третият заряд се *приближи плътно*, то възниква привличане: отблъскването на еднородните заряди и привличането на разнородните ще се стремят да съединят разнородните заряди и да отдалечат еднородните. В крайна сметка отблъскването ще се окаже по-слабо от привличането. По тази причина атомите, образувани от положителни и отрицателни заряди, малко си влияят на далечни разстояния. Затова пък, ако се приближат, те свободно могат да се разглеждат „вътрешно“, един друг да преустройват разположението на своите заряди и силно да си взаимодействуват. В крайна сметка именно *електрическата* сила обяснява взаимодействието на атомите. Тази сила е толкова голяма, че всички плюсове и минуси обикновено влизат в съвсем тясна връзка един с друг: те са сбити до краен предел. Всички тела, даже нашите собствени, се състоят от най-малки частички плюс и минус, взаимодействуващи си много силно. Количеството плюсове и минуси е добре балансирано. Само за миг случайно може да се изстържат няколко плюсове и минуси (обикновено по-лесно се изстъргват минусите); тогава електрическата сила ще се окаже *неуравновесена* и може да се почувствува електрическото притегляне.

За да дадем представа за това, колко електричеството е посилно от гравитационното привличане, нека да разположим две песъчинки с милиметров размер на 30 m една от друга. Нека зарядите само се привличат и тяхното взаимодействие вътре в песъчинките да не се погасява взаимно. С каква сила биха се привличали тези две песъчинки? Със сила, равна на *три милиона тона*. Сега разбирате защо и *най-малкото* излишество или недостиг на положителни или отрицателни заряди е достатъчно, за да се получи забележимо електрическо действие? По същата причина заредените тела не се отличават нито по маса, нито по размер от незаредените — нужни са съвсем малко частици, за да се зареди тялото, за да се почувствува, че то е заредено.

Като знаем всичко това, лесно е да си представим и устройството на атома. Смятало се е, че в неговия център се намира масивно „ядро“, заредено с положително електричество, което е обкръжено с известен брой „електрони“, съвсем леки и заредени отрицателно. Като избързаме напред, ще забележим, че впоследствие в самото ядро са били намерени два вида частици — протони и неутрони, доста тежки и имащи близки маси. Протоните са заредени положително, а неутроните въобще не са заредени. Когато в ядрото на атома има шест протона и ядрото е обкръжено с шест електрона (отрицателните частици на обикновения свят на материалните тела са само електроните, доста по-леки от протоните и неутроните), то този атом в химическата таблица стои под номер 6 и се нарича въглерод. Атомът, имащ номер 8, се нарича кислород и т. н. Химическите свойства зависят от външната *обвивка* — електроните, а по-точно само от това, какъв е броят им там, всички *химически* особености на веществото зависят от едно единствено число — количеството електрони. (Списъкът от названия на елементите, съставен от химиците, всъщност би могъл да се замени с номерацията 1, 2, 3 и т. н. Вместо да се казва „въглерод“, може да се каже „елемент шест“, като

се разбира шест електрона. Но разбира се, когато са откривали елементите, не са подозирали, че могат така да ги номерират; при това да бъдат назовавани по номера не е много удобно. Подобре е всеки от тях да си има собствено име и символ.)

И още много неща станаха известни за електрическата сила. Естествено би било да се тълкува електрическото взаимодействие като просто привличане на два предмета, заредени положително и отрицателно. Но се изясни, че такъв подход не помага за изясняването природата на електрическата сила. Тълкуването, което отговаря по-добре на положението на нещата, е следното: когато някъде има положителен заряд, то той изкривява в някакъв смисъл пространството, създава в него някакво условие, така че зарядът-минус, който се намира в това пространство, да усети действието на силата. Тази възможност да се пораждат сили се нарича *електрическо поле*. Когато електронът се намира в електрическото поле, ние казваме, че той „се притегля". Тогава действуват две правила: а) зарядите създават поле и б) на зарядите в полето действуват сили, които ги заставят да се движат. Причината за това ще се изясни, когато разгледаме следното явление. Ако заредим тяло, например гребен, с електричество, а след това сложим до него зареден със хартия и започнем да движим гребена напред-назад, хартията през цялото време ще се обръща към гребена. Като ускорим движението на гребена, ще видим, че хартията изостава малко от неговото движение, възниква *закъснение на действието*. (Отначало, когато движим бавно гребена, работата се усложнява от *магнетизма*. Магнитните влияния се появяват, когато зарядите се движат един спрямо друг, така че магнитните и електрическите сили могат в действителност да се окажат проява на едно и също поле, две страни на едно и също явление. Не може да съществува изменящо се електрическо поле без магнитно действие.) Ако се отдалечи хартията, закъснението се увеличава. И тогава се вижда нещо интересно. Макар силата, действуваща между двете заредени тела, да се изменя обратно на *квадрата* на разстоянието, при трептене на заряда неговото влияние *се простира много по-далеч*, отколкото може да се очаква. Това значи, че то се намалява по-бавно, отколкото по закона за обратните квадрати.

Нещо подобно става, ако в басейн с вода се хвърли коркова тапа. Може да й се въздействува „непосредствено", като се хвърли наблизо във водата друга тапа; при това, ако сте гледали *само тапите* (не водата), ще видите само че едната от тях се е нагодила към движението на другата, т. е. между тях съществува някакво *взаимодействие*. А работата е там, че вие сте развълнували *водата:* тази вода е поклатила втората тапа. От това може даже да се изведе „закон": ако се поклати едва-едва една тапа, всички съседни тапи ще се поклатят. Ако тапата е по-далече, тя едва-едва ще се мръдне, та нали ние сме развълнували повърхността на водата веднаж и *на едно място*. Но когато започнем непрекъснато да разклащаме тапите, възниква ново явление: ще тръгнат *вълни* и влиянието на трептенията на тапата ще се разпространи *много по-далеч*. Това ще бъде колебливо влияние и него вече не ще може да обясним с пряко взаимодействие между тапите. Мисълта за непосредственото взаимодействие ще трябва да се замени с предположението за съществуването на вода или за електрически заряди — с това, което се нарича *електромагнитно поле*.

Електромагнитното поле може да предава вълни: някои от тях са светлините, други — радиовълните, но тяхното общо название е електромагнитни вълни. Честотата на трептенията на тези вълни е различна. Само с това те се различават една от друга. Като се движи все по-често зарядът нагоре-надолу и като наблюдаваме какво ще стане след това, ще видим различни ефекти; всички те могат да бъдат сведени до единна система, ако на всеки от тях се даде свой номер — броят на трептенията в секунда. Обикновените смущения от тока, течащ по жиците в жилищните домове, имат честота около стотина трептения в секунда.

Като повишим честотата до 500 — 1000 килохерца (1 kHz = 1000 колебания в секунда), ние вече сме „във въздуха“, защото това е областта на радиочестотите. (Въздухът тук, разбира се, няма нищо общо!) Радиовълните се разпространяват и в безвъздушно пространство. (Като увеличим още честотата, ние ще се доберем до ултракъсите вълни и телевизията. След това ще дойдат съвсем късите вълни, чието предназначение е радиолокацията. Още по-далеч и вече не са ни нужни прибори, за да регистрираме тези вълни, може да се видят с просто око. В диапазона на честотите от 5.10^{14} до 5.10^{15} Hz трептенията на заредения гребен (ако ни се удаде да го движим така бързо) ще ни се представят в зависимост от честотата като червена, синя или виолетова светлина. Честотите от едната страна на този интервал се наричат инфрачервени, а от другата — ултравиолетови. Фактът, че ние сме способни да виждаме при определени честоти, от физическа гледна точка не прави тази част на електромагнитния спектър по-интересна, но от човешка гледна точка тя, разбира се, е най-интересната част от спектъра. Като вървим още по-нататък по честотата, ние ще получим рентгеновите лъчи, това е само високочестотна светлина. А още по-далеч ще започне гама-излъчване (табл. 2.1). Гама-излъчването и рентгеновите лъчи са почти едно

Таблица 2.1

Електромагнитен спектър

Честоти, Hz	Име	Общо положение
10^2	Електрически смущения	Поле
$5.10^5 - 5.10^6$	Радиовълни	
10^8	Ултракъси вълни и телевизия	Вълни
10^{10}	Радиолокация	
$5.10^{14} - 5.10^{15}$	Светлина	
10^{18}	Рентгенови лъчи	
10^{21}	Гама излъчване (ядрено)	
10^{24}	„ (изкуствено)	Частици
10^{27}	„ (в космическите лъчи)	

и също. Обикновено онези електромагнитни вълни, които произхождат от ядрата, се наричат гама-излъчване, а онези, които произхождат от атомите — ренгенови лъчи. Ако тяхната честота съвпадне, физически не можем да различим тези вълни, какъвто и да е източникът им. Вълните с още по-висока честота, например 10^{24} Hz, може, както се оказа, да бъдат получени изкуствено, в ускорителите. В синхротрона в Калифорнийския технологически институт това се прави.

И накрая, нечувано високи честоти (хиляди пъти повече) се откриват по-нататък, във вълните, намиращи се в космическите лъчи. Тези вълни ние не можем да контролираме.

§ 3. Квантова физика

Ние описахме електромагнитното поле и разбрахме, че то може да се предава като вълни. Сега ще видим, че тези вълни всъщност се държат много странно, те съвсем не приличат на вълни. Във високите честоти те по-скоро приличат на частици! Науката, която умее да обяснява това странно поведение — квантовата механика — беше открита малко след 1920 г. Още преди това обикновената картина на тримерното пространство и отделно съществуващото време бе изменена от Айнщайн. Отначало той я превърна в съчетание, наричано „пространство-време“, а после, за да обясни привличането, още и в „изкривено пространство-време“. По такъв начин стана „сцена“ пространството-време а привличането, по всяка вероятност, е видоизменено пространство-време,

А след това се изясни също, че и законите за движението на частиците не са верни. Механическите закони на „инерцията“ и „силата“, законите на Нютон — всички се оказаха непригодни в света на атомите. Беше открито, че поведението на най-малките телца с нищо не напомня поведението на обикновените, големи тела. Разбира се, от това физиката става по-трудна, но затова пък много по-интересна. По-трудна затова, че поведението на малките телца е съвършено „неестествено“; то противоречи на нашия опит, то въобще не прилича на нищо и не може да се опише по никакъв друг път, освен аналитичния; а това пък изисква голямо въображение.

Квантовата механика има много особености. На първо място тя забранява да се мисли, че частицата може да се движи през определено точно указано място с определена точно указана скорост. За да покажем колко погрешна е обикновената механика, ще отбележим, че в квантовата механика има правило, според което никой в едно и също време не може да знае и мястото, и бързината на движението на частицата. Неопределеността в импулса и неопределеността в положението на частицата се допълват взаимно: тяхното произведение е постоянно. Засега ние ще напишем това правило в следния вид $\Delta x \Delta p \geq h/2\pi$, без да навлизаме в подробностите. Това правило представлява обяснение на тайнствения парадокс: щом като атомите са образувани от плюс- и минус-заряди, защо пък минус-зарядите просто да не се разположат върху плюс-зарядите (нали те се привличат), защо да не се сближат така тясно, че да се угасят взаимно? Защо атомите са така големи? Защо ядрото се намира в центъра, а електроните — около него? Отначало се обясняваше с това, че ядрото е много голямо; но това не е така, то е много малко. Диаметърът на атома е например 10^{-8}cm, а този на ядрото — около 10^{-13}cm. За да се види ядрото, би трябвало атомът да бъде увеличен до размерите на стая и пак ядрото ще ни изглежда мъничко, едва-едва различимо петънце; при това обаче почти цялото тегло на атома ще се падне на безкрайно малкото ядро. Но защо електроните не падат върху него? Пак поради онзи принцип на неопределеността: ако електроните се окажеха в ядрото, ние съвсем точно бихме знаели тяхното положение и следователно техният импулс непременно щеше да стане много голям (но неопределен) и значи кинетичната енергия също рязко би нараснала. С такава енергия той би изскочил от ядрото. Не е чудно, че ядрото влиза в съглашение с електроните: те си оставят някакво място за тази неопределеност и после трептят с някакъв минимален запас от движение само за да не нарушат това правило. (Спомнете си още, че когато кристалът е охладен до абсолютната нула, ние считаме, че атомите все пак не прекратяват своето движение, те все още трептят. Защо? Та ако атомите спрат, то ние бихме знаели, че те стоят и къде стоят, а това противоречи на принципа на неопределеността. Ние не можем да знаем къде са те и колко бързо се движат, така че атомите са принудени непрекъснато да трептят!)

А ето и друго много интересно изменение в идеите и философията на науката, осъществено от квантовата механика: никога не е възможно да се предскаже *точно* какво ще се случи при еди-какви си обстоятелства. Например може да се приготви атом, способен да излъчва светлина; моментът на изпускане на светлина ние можем да забележим, като хванем фотона (ще дойде време, ще поговорим за това). Но ние не можем да предскажем кога той се гласи да излъчва или, ако атомите са няколко, то кой от тях ще изпусне светлината? Може би, според вас, това се дължи на някакви вътрешни „колелца“ в атомите, които ние още не сме разгледали? Не, в атомите няма тайни колела; природата, доколкото я познаваме днес, се държи така, че *по принцип* е невъзможно да се направят точни предсказания, какво именно ще стане в даден опит. Ужасно е, нали? Нали философите порано все ни учеха, че едно от основните свойства на науката, неотделимо от нея, това е изискването при еднакви условия винаги

да стават едни и същи събития. Но това просто не е вярно, това съвсем не е основното условие на науката. Всъщност при еднакви обстоятелства не стават еднакви събития, те могат да бъдат предсказани само средно, само статистически. И все пак, науката още не е загинала.

Между другото, философите много говорят понякога за неща, съвършено необходими за науката; и това, както можем да се убедим, винаги е доста наивно и както се вижда, погрешно. Например някои философи, и не само философи, твърдяха, че същественото за научните открития е един и същи опит, направен, да кажем в Стокхолм и Кито, да довежда до едни и същи резултати. Но това пък е съвсем погрешно. За *науката* това условие не е задължително, то може да бъде установено след опита, но не бива да се иска преди опита. Ако например в Стокхолм е направен опит по наблюдение на северното сияние, откъде накъде той трябва да сполучи в Кито? Вие там даже сияние няма да видите. „Но това е ясно — ще кажете вие. Нищо друго не би могло да се случи, щом като изследвате нещо външно, далеч от нас." „Добре тогава, влезте в един сандък в Стокхолм и спуснете капаците на сандъка, ще се получи ли някакво различие? Безспорно. Сложете в сандъка махало с шарнирно окачване, неговата плоскост по време на люлеенето в Стокхолм ще започне бавно да се върти, а в Кито — не, макар че и там, и тук капаците са спуснати. Но и този факт няма да доведе до гибелта на науката. Все пак в какво се състои нейното основно предположение, нейната фундаментална философия? Ние вече говорихме за това в глава 1: единственото мерило за верността на всяка идея, това е опитът. Щом като е ясно, че болшинството експерименти в Кито доказват същото, както и в Стокхолм, то от това „болшинство експерименти" може да се изведе общ закон, а за онези експерименти, които не довеждат до еднакви резултати, ще кажем, че върху тях е повлиял характерът на местността около Стокхолм. Ние можем по различни начини да обобщаваме опитите, но нека преждевременно да не ни учат какви са тези начини. Ако ни кажат, че едни и същи опити винаги трябва да водят до едни и същи резултати, това е прекрасно, но когато проверката покаже, че това не е така, значи това *не е така*. Вярвайте само на собствените си очи, а останалите си идеи формулирайте вече въз основа на опита.

Да се върнем пак към квантовата механика и към основите на физиката. Засега не ще навлизаме в детайлите на квантовомеханичните принципи, те не са така лесни за разбиране. Ние просто ще ги приемем такива, каквито са, а ще се спрем на някои техни следствия. Ето едно от тях: онова, което ние обикновено считаме вълна, може да се държи като частица; частиците пък се държат като вълни същото се отнася за всички тела. Между вълната и частицата; просто няма разлика. Квантовата механика *обединява* идеята за поле, вълни на полето и частици в едно общо. При ниските честоти вълновите свойства се проявяват по-явно и затова се оказват по-полезни за приблизителното описание в образи на нашия всекидневен опит. Но заедно с нарастването на честотата става все по-очевидно, че през приборите, измерващи нашето явление, преминава не вълна, а частица. Всъщност, въпреки че говорим за високи честоти, вече не е възможно да забележим вълновите явления, ако тяхната честота превишава 10^{12} Hz. Ние само *идваме до извода* за наличие на висока честота, знаейки енергията на частиците и предполагайки, че е вярна идеята на квантовата механика за частицата-вълна.

При това възниква и нов възглед за електромагнитното взаимодействие. В добавка към електрона, протона и неутрона се появява нова *частица*, наречена *фотон*. Самото това ново виждане на взаимодействието между електроните и протоните, т. е. електромагнитната теория, правилна в квантовомеханичен смисъл, наричат *квантова електродинамика*. Тази фундаментална теория на взаимодействието между светлината и веществото или между електрическото поле и зарядите трябва да се смята най-голямото

достижение на физиката. В нея се крият главните правилана всички обикновени явления, освен привличането и ядрените процеси. Например от квантовата електродинамика се извеждат всички известни електрически, механически и химически закони: законите за сблъскването между билярдните топки, за движението на проводник в магнитно поле, за специфичната топлоемност на въглеокиса, за цвета на неоновите букви, плътността на солта и реакцията за образуване на вода от водород и кислород. Всичко това се поддава на пресмятане, ако условията, в които протича явлението, са прости. Практически това никога не се случва, но все пак ние повече или по-малко разбираме какво става. И до ден днешен не е намерено нито едно изключение от законите на квантовата електродинамика, само в атомните ядра тя се оказва недостатъчна; но дори и за тях не можем да кажем, че тук се наблюдават някакви изключения, просто ние не знаем какво става там.

По-нататък, квантовата електродинамика — това е по принцип също така теорията на цялата химия и на всички жизнени процеси, ако предположим, че животът в крайна сметка се свежда до химия, а значи и до физика (самата химия вече се сведе до физика и тази част на физиката, която включва в себе си химията, вече е разработена). Нещо повече, същата тази квантова електродинамика, тази величествена наука, предсказва и немалко нови явления. Първо, тя говори за свойствата на фотоните с много високи енергии, гама-излъчванията и т. н. Тя предсказа още едно много оригинално явление, а именно, че освен електрона трябва да съществува друга частица със същата маса, но с противоположен заряд, така наречения позитрон, и че електронът и протонът, срещайки се, могат да се унищожат един друг, като при това излъчват светлина или гама-кванти (което всъщност е едно и също; светлината и гама-излъчването — това са само различни точки от скалата на честотите).

Очевидно правилно е и обобщението на това правило: съществуването на античастица за всяка частица. Античастицата на електрона носи името позитрон; на другите частици имената са дадени на друг принцип: ако частицата е наречена *така*, то античастицата се нарича *анти-така*, да кажем антипротон, антинеутрон. В квантовата електродинамика се въвеждат всичко две числа, (те се наричат маса на електрона и заряд на електрона) и се предполага, че всички останали числа в света могат да се изведат от тези две. Всъщност това не е съвсем вярно, защото съществува още цяла съвкупност от химически числа — теглата на атомните ядра. С тях трябва сега да се заемем.

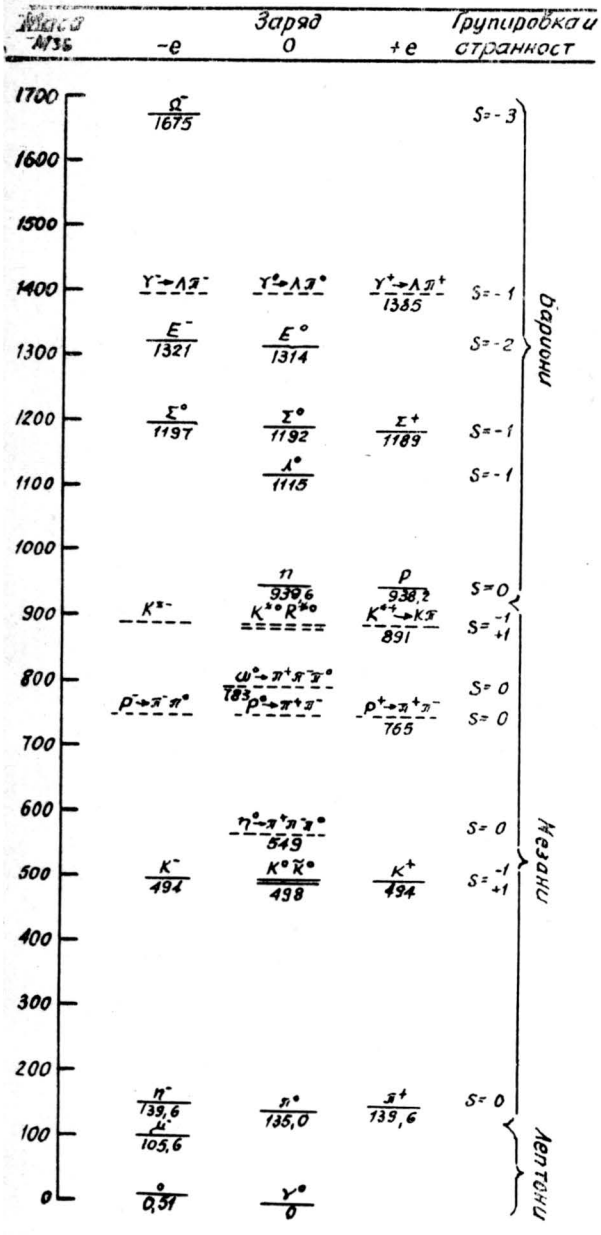
§ 4. Ядра и частици

От какво се състоят ядрата? Какво държи частите на ядрото заедно? Открито е, че съществуват сили с огромна стойност които именно държат съставните части на ядрото. Когато тези сили се освобождават, то отделяната енергия в сравнение химическата е огромна, все едно да се сравни взривът на атомната бомба с взрива на тротила. Обяснението е в това, че атомният взрив е предизвикан от изменения вътре в ядрото, докато при взрива на тротила се преустройват само електроните от външната обвивка на атома.

И така, какви са онези сили, с които са скрепени неутроните и протоните в ядрото?

Електрическото взаимодействие се свързва с частицата-фотон. По аналогия Юкава предположил, че силите на привличане между протона и неутрона имат поле от особен род, а колебанията на това поле се изявяват като частици. Значи не е изключено освен неутроните и протоните в света да съществуват и някакви други частици. Юкава успя да изведе свойствата на тези частици от вече известните характеристики на ядрените сили. Например той предсказал, че те трябва да имат маса 200—300 пъти по-голяма от тази на електрона. И — о, чудо! В космическите лъчи изве-

Таблица 2.2. Елементарни частици



наж откриха частица с такава маса! Впрочем, малко по-късно се изясни, че това съвсем не е онази частица. Нарекли я μ-мезон или мюон.

И все пак, малко по-късно, в 1947 или 1948 г., беше открита частицата π-мезон или пион, която удовлетворява изискванията на Юкава. Излиза, че за да се получат ядрени сили, към протона и неутрона трябва да се прибави пион. „Прекрасно! — ще кажете вие. С помощта на тази теория сега ще построим квантовата ядродинамика и пионите ще служат за тези цели, заради които ги въведе Юкава. Да видим дали ще заработи тази теория и ако — да, ще си обясним всичко." Напразни надежди! Изясни се, че сметките в тази теория са толкова сложни, че никому още не се е удало да ги направи и да извлече от теорията някакви следствия, никому не се падна щастието да я сравни с експеримента. И това продължава вече почти 20 години!

Нещо в теорията куца. Не знаем вярна ли е или не, но ние вече знаем, че в нея нещо не достига, че в нея се крият някакви неправилни неща. Докато ние тъпчехме около теорията, като се мъчехме да изчислим следствията, експериментаторите откриха нещичко. Е, същият μ-мезон или мюон. А ние до ден днешен не знаем за какво служи той. Пак в космическите лъчи откриха много „излишни частици". До днес те вече са повече от 30, а все още е трудно да се хване връзката между тях и не се знае какво иска природата от тях и кой от кого зависи. Засега тези частици не ни се представят като различни прояви на една същност и фактът, че има куп различни частици е само отражение на наличието на несвързана информация без сносна теория. След неоспоримите успехи на квантовата електродинамика — само някакъв сбор от сведения от ядрената физика, късчета знания, полуопитни — полутеоретични. Захванат се, да кажем, с характера на взаимодействието между протона и неутрона и гледат какво ще излезе от това, без да разбират всъщност откъде се взимат тези сили. Не е постигнато нищо повече от описаното.

Но химическите елементи също са били множество и изведнъж са успели да намерят връзка между тях, изразена чрез периодичната таблица на Менделеев. Да кажем, калий и натрий — вещества, близки по химически свойства, в таблицата са попаднали в една колонка. Опитаха се да направят таблица от типа на Менделеевата и за новите частици. Подобна таблица предложиха независимо един от друг Гел-Ман в САЩ и Нишиджима в Япония. Основа за тяхната класификация е едно ново число, подобно на електрически заряд. То се приписва на всяка частица и се нарича нейна „странност". Това число не се мени (както и електрическият заряд) в реакциите, които произхождат от ядрените сили.

В табл. 2.2 са дадени новите частици. Засега не ще говорим за това подробно. Но от таблицата поне се вижда колко малко знаем ние. Под символа на всяка частица стои нейната маса, изразена в определени единици, наречени мегаелектронволт или MeV(I MeV — това е $1{,}782 \cdot 10^{-27}$ g.). Няма да се спираме на историческите причини, поради което е въведена тази единица. Помасивните частици стоят по-горе в таблицата. Протонът и неутронът имат почти еднакви маси (p — 938,3, n — 939,6). В една колонка стоят частици с еднакъв електрически заряд, неутралните са в средата, положителните — вдясно, отрицателните — вляво.

Частиците са подчертани с непрекъсната линия, „резонансите" — с щрихи. Няма някои частици в таблицата: няма фотонът и гравитонът, много важни частици с нулева маса и нулев заряд (те не попадат в барион-мезон-лептонната схема на класификацията), няма и някои от най-новите резонанси (φ, f, Y*′ и др.) В таблицата фигурират античастиците на мезона, а за античастиците на лептоните и барионите би трябвало да се състави нова таблица, подобна на тази, само че огледално отразена спрямо нулевата колонка. Макар че всички частици, с изключение на електрона, неутриното, фотона, гравитона и протона, са неустойчиви, продуктите на разпадането им са отбелязани само от резонансите. Странността на лептоните също не е отразена, тъй като това понятие не е подходящо за

тях — те не си взаимодействуват силно с ядрата.

Частиците, стоящи заедно с неутрона и протона, се наричат бариони. Това е „ламбда“ с маса 1115,4 MeV и три други — „сигми“, наричани сигма-минус, сигма-нула, сигма-плюс, с почти еднакви маси. Групите частици с почти еднаква маса (с разлика до 1—2%) се наричат мултиплети. Всички частици в мултиплета имат еднаква странност. Първият мултиплет — това е двойка (дублет) от протон и неутрон, след това идва синглет (единичен) ламбда, след това — триплет (тройка) сигми, дублет кси и синглет омега-минус. От 1961 г. започнаха да откриват нови тежки частици, но това частици ли са? Те живеят толкова малко (едва възникнали и се разпадат на Λ и π), така че не се знае да ги наричаме ли нови частици, или да ги считаме „резонансно“ взаимодействие между Λ и π при известна фиксирана енергия.

За ядрените взаимодействия освен бариони са необходими и други частици — мезони. Това са три разновидности на пионите (плюс, нула и минус), които образуват нов триплет. Открити са и нови частици — К-мезони (това е дублет K^+ и K°). Всяка частица има и своя античастица, само ако частицата не е своя собствена античастица, например π^+ и π^- са античастици една на друга, а π° е сам на себе си античастица. Античастици са K^- с K^+ и K° с $\overline{K}^\circ$. Освен това, след 1961 г. започнахме да откриваме нови мезони, или нещо като мезони, разпадащи се почти мигновено. Едно такова чудо се нарича омега, нейната маса е 783, тя се превръща в 3 пиона; има и друго образувание, от което се получава двойка пиони.

Както и от много сполучливата таблица на Менделеев отпаднаха някои редкоземлени елементи, така и от нашата таблица отпадат някои частици. Това са онези частици, които не взаимодействуват силно с ядрата, нямат отношение към ядреното взаимодействие и помежду си също не взаимодействуват силно (под силно се разбира мощен тип взаимодействие, даващо атомна енергия). Тези частици се наричат лептони, към тях се отнасят електронът (много лека частица с маса 0,51 MeV) и мюонът (с маса 206 пъти по-голяма от масата на електрона). Доколкото можем да съдим от всичките експерименти, електронът и мюонът се различават само по масата си. Всички свойства на мюона, всичките му взаимодействия с нищо не се различават от свойствата на електрона, само единият е по-тежък от другия. Защо той е по-тежък, каква полза има той от това, не знаем. Освен тях има още и неутрален лептон-неутрино с нулева маса. Нещо повече, сега е известно, че има два сорта неутрино — едните са свързани с електроните, а другите — с мюоните.

И накрая, съществуват още две частици, които също не взаимодействуват с ядрата. Едната вече я знаем — фотон. Ако гравитационното поле също притежава квантовомеханични свойства (макар че засега квантовата теория на привличането не е разработена), то възможно е да съществува и частица гравитон с нулева маса.

Какво е това „нулева маса“? Масите, които привеждахме досега, са маси на частици в покой. Ако една частица има нулева маса, това значи, че тя не се осмелява *да бъде в покой*. Фотонът никога не стои на едно място, скоростта му е равна винаги на 300 000 km/s. По-нататък ние ще навлезем в теорията на относителността и ще се опитаме да вникнем по-дълбоко в смисъла на понятието маса.

И така, ние се срещнахме с цял строй частици, които заедно, както се вижда, се явяват фундаментална част на веществото. За щастие *не всички* частици се различават една от друга по своето взаимодействие. Ясно е, че има само четири типа на взаимодействие между тях. Да ги изброим по реда на намаляването на силата: ядрени сили, електрически взаимодействия, взаимодействието при β-разпадане и привличането. Фотонът взаимодействува с всички заредени частици със сила, която се характеризира с някакво постоянно число 1/137. Детайлният закон на тази връзка е известен — това е квантовата електродинамика.

Таблица 2.3 **Елементарни взаимодействия**

Взаимодействие	Сила[1]	Закон
Фотон със заредени частици	$\sim 10^{-2}$	Известен
Привличане с енергията	$\sim 10^{-40}$	„
Слаби разпади	$\sim 10^{-5}$	Частично известна
Мезони с бариони	~ 1	Не е известен (освен някои правила).

[1] „Сила“ — мярка без измерение на константата на връзката, която се проявява във всяко взаимодействие (знакът $\sim$ означава „приблизително“).

Привличането е взаимодействие с всякаква *енергия*, но извънредно слабо, къде по-слабо от електричеството. И този закон е известен. След това идват така наречените слаби разпади: β-разпад, поради който неутронът се разпада доста бавно на протон, електрон и неутрино. Тук законът е изяснен само частично. А така наричаното силно взаимодействие (връзката на мезона с бариона) има сила по тази скала, равна на единица, а законът му е съвсем тъмен, макар че са известни някакви правила, като това, че количеството бариони в никоя реакция не се мени.

Положението, в което се намира съвременната физика, трябва да се счита ужасно. Аз бих го преценил със следните думи: извън ядрото ние явно знаем всичко, вътре в него действува квантовата механика, там не са открити нарушения на нейните принципи. Сцената, на която действуват всички наши знания — това е релативистичното пространство-време; не е изключено с него да е свързано и привличането. Ние не знаем как е започнала Вселената и ние нито веднаж не сме правили опити, целещи точната проверка на нашите представи за пространство-времето на малки разстояния; ние знаем само, че извън тези разстояния нашите възгледи са безпогрешни. Може още да се прибави, че правилата на играта — това са принципите на квантовата механика. Към новите частици те, доколкото ни е известно, са приложими не по-зле, отколкото към старите. Търсенето на произхода на ядрените сили ни довежда до нови частици, но всички тези открития предизвикват само объркване. Ние не разбираме напълно техните взаимни отношения, макар че вече сме убедени в някои поразителни връзки между тях. Както се вижда, ние постепенно се приближаваме до разбирането на света на частиците, които стоят зад атомите, но не е известно колко далеч сме отишли по този път.

3

Физиката и другите науки

§ 1. Въведение
§ 2. Химия
§ 3. Биология
§ 4. Астрономия
§ 5. Геология
§ 6. Психология
§ 7. Как започна всичко?

§ 1. Въведение

Физиката — това е най-фундаменталната, най-всеобхващащата от всички науки; влиянието ѝ върху цялостното развитие на науката е било огромно. Действително сегашната физика е напълно равностойна на предишната *натурална-философия*, от която са възникнали болшинството от съвременните науки. Ненапразно студенти от всевъзможни специалности са принудени да изучават физика; в много явления тя играе основна роля.

В тази глава ще се опитаме да разкажем какъв вид фундаментални проблеми стоят пред съседните науки. Жалко, че няма да можем истински да се заемем с тези науки, с техните проблеми, не ще можем да почувствуваме цялата им сложност, тънкост и красота. Поради недостиг на място не ще се докоснем също и до връзката на физиката с техниката, с промишлеността, с обществения живот и военното изкуство. Не ще се задържим дори на забележителната връзка, обединяваща физиката с математиката. (Математиката от наша гледна точка не е наука в такъв смисъл, че не се отнася към *естествените науки*. Нали мерилото за нейната истинност съвсем не е опитът.) Впрочем не всичко, което не е наука, непременно е лошо. Любовта например също не е наука. С една дума, когато нещо не е наречено наука, това не значи, че в него има нещо нередно, то просто не е наука и толкова.

§ 2. Химия

Химията изпитва влиянието на физиката върху себе си и при това по-силно от която и да е друга наука. Някога, в младенческите си години, когато химията почти изцяло се е свеждала до това, което сега наричаме неорганична химия (т. е. химия на веществата, които не са свързани с живите тела), когато благодарение на упоритя труд на химиците са били откривани много химични елементи, техните връзки, изучавани са били съединенията им, анализиран е бил съставът на почвата и минералите, в онези години химията е изиграла важна роля при формирането на физиката. Тези науки си взаимодействуват много силно, цялата теория на атомния строеж на веществото е получила основна поддръжка в химическия експеримент. Периодичната система на Менделеев е направила равносметка на химическата теория, т. е. на теорията на самите реакции. Тя показала много удивителни връзки между различните елементи — станало ясно кой с кого и как се съединява; всички тези правила съставили неорганичната химия. Те бяха в последна сметка обяснени от квантовата механика. Значи, всъщност теоретичната химия — това е физика. Обаче обяснението, което се дава от квантовата механика, — това е *принципно* обяснение. Ние казахме вече, че знанието на шахматните правила е едно, а умението да се играе — съвсем друго. Може да знаеш правилата, а да играеш лошо. Така, съвсем не е просто точно да се предскаже какво ще стане в някоя химична реакция. И все пак в дълбочината на теоретичната химия лежи квантовата механика.

Освен това има клон от физиката и химията, и то много важен клон, върху който те и двете са сложили ръка. Става дума за приложението на статистиката в онези случаи, когато действуват законите на механиката, т. е. за *статистическата* механика.

Във всяка химическа реакция действуват много атоми, а движе ните им са случайни и заплетени. Ако бихме могли да анализираме всяко стълкновение, подробно да проследим движението на всяка молекула, то ние винаги щяхме да знаем какво ще се случи. Но за да се отбележи пътят на всички молекули, са необходими толкова много числа, че за това не би стигнал никакъв капацитет на изчислителна машина, а пък във всеки случай не ще бъде достатъчен и капацитетът на мозъка. Значи важно е да се научим да работим с такива сложни системи. Статистическата механика освен това лежи в основата на теорията на топлинните явления или термодинамиката.

В наше време неорганичната химия като наука се сведе в основни черти до физическата и квантовата химия; първата изучава скоростите на реакциите и другите техни детайли (как попада молекула в друга молекула, коя от частите на молекулата първа ще се откъсне и т. н.), а втората помага да се разбере това, на което става езика на физическите закони.

Другият клон на химията — *органичната химия* — е химия на веществата, свързани с жизнените процеси. По-рано мислели, че подобни вещества са толкова необикновени, че не ще ги направиш със собствените си ръце от неорганичните вещества. Но това не излезе така — органичните вещества се отличават от неорганичните само с по-голямата сложност на разположението на атомите. Органичната химия, естествено, е тясно свързана с биологията, която я снабдява с вещества, и с промишлеността; понататък, много неща от физическата химия и квантовата механика са толкова приложими в органичните съединения, колкото и в неорганичните. Впрочем главните задачи на органичната химия съвсем не са в това, а в анализа и синтеза на веществата, които се образуват в биологичните системи, в живите тела. Оттук постепенно може да се премине към биохимията и към самата биология, т. е. към молекулярната биология.

§ 3. Биология

И така, ние дойдохме до науката, която изучава живото — към *биологията*. Когато тя правеше своите първи крачки, биолозите решаваха чисто описателни задачи; на тях им трябваше да изяснят какво е живото, на тях им се налагаше, да кажем, да пресмятат колко косми има на крака на бълхата и т. н. Когато всичко това (с голям интерес) беше изучено, те се обърнаха към механизма на функциониране на живото, естествено отначало твърде грубо, в общи черти, защото не беше просто да се оправиш в разните тънкости.

Някога между биологията и физиката са съществували интересни отношения: именно биологията е помогнала на физиката да открие *закона за запазване на енергията*; нали Майер е установил този закон при изучаването на количеството топлина, отделяно и поглъщано от живия организъм.

Ако се вгледаме в биологията на живите организми, може да се забележат много чисто физични явления: циркулацията на кръвта, налягането и т. н. Да вземем например нервите. Като настъпим остро камъче, ние мигновено узнаваме за това: нещо ни говори за това, някаква информация се изкачва нагоре по крака. Как става това? Изучавайки нервите, биолозите дойдоха до извода, че това са много нежни тръбички със сложни, много тънки стени. През тези стени в клетката постъпват йони; получава се нещо като кондензатор с положителни йони отвън и отрицателни отвътре. Такава мембрана има забележително свойство: ако в едно място тя се „разреди“, т. е. ако в някакво място йоните преминават през нея така, че тук електрическото напрежение да спадне, то съседните йони ще почувствуват това електрическо влияние; това ще подействува така на мембраната в съседното място, че тя също ще пропусне през себе си йони. На свой ред това ще повлияе на съседното място и т. н. Ще възникне вълна на „про-

ницаемост“ на мембраната; тя ще пробяга по нервното влакно, ако единият му край се „възбуди“ от острия камък. Излиза също като дълга верижка от плочки за домино, поставени прави; бутнеш крайната, тя — следващата и т. н. Разбира се, така няма да предадеш повече от едно съобщение, трябва отново да се повдигнат всички плочки; и в нервната клетка също след това настъпват процесите на бавно натрупване на йони и на подготовка на нерва за нов импулс. Така ние ще узнаем какво правим (или най-малко къде се намираме). Електрическите явления при преминаването на нервен импулс, разбира се, могат да се регистрират с електрически прибори. Доколкото тези явления *съществуват*, то без физиката на електричеството не може да се разбере проводимостта на нерва.

Обратното явление става, когато от мозъка се предава съобщение по нерва. Какво става тогава на края на нерва? Там нервът има разклонения, които са свързани с мускулната структура; наричат ги *крайни разклонения*. По причини, неизвестни точно, в момента, когато импулсът достига края на нерва, от него излитат малки пакетчета реактиви, наречени *ацетилхолин* (5 — 10 молекули наведнъж); те влияят на мускулното влакно и то се свива — виждате колко е просто всичко! Но какво все пак кара мускула да се свие? Мускулът — това е голямо число плътно разположени влакна. В тях има две различни вещества — миозин и актомиозин; и въпреки това механизмът, с чиято помощ химическата реакция, предизвикана от ацетилхолина, променя размерите на молекулите, засега още не е изяснена. Казано по друг начин, неизвестни са основните процеси, отговорни за механическото движение на мускулите.

Биологията — това е толкова широко поле за дейност, че има куп проблеми, за които ние даже и не споменаваме. Например как се осъществява зрението (какво прави светлината вътре в окото) или как работи ухото и т. н. (Как работи мисълта, ще обсъдим по-късно, когато ще говорим за психологията.)

Всички тези въпроси, стоящи пред биологията, всъщност съвсем не са най-главните за биолога, съвсем не лежат в основата на живота. Ако ги разберем, все едно, няма да разберем същността на живота. Ето ви пример: хората, изучаващи нервите, разбират, че тяхната работа е много нужна, нали няма животно без нерви. Но *живот* без нерви е *възможен*. Растенията нямат нито нерви, нито мускули и все пак работят, живеят (което е едно и също). Следователно най-основните проблеми на биологията трябва да се търсят по-дълбоко.

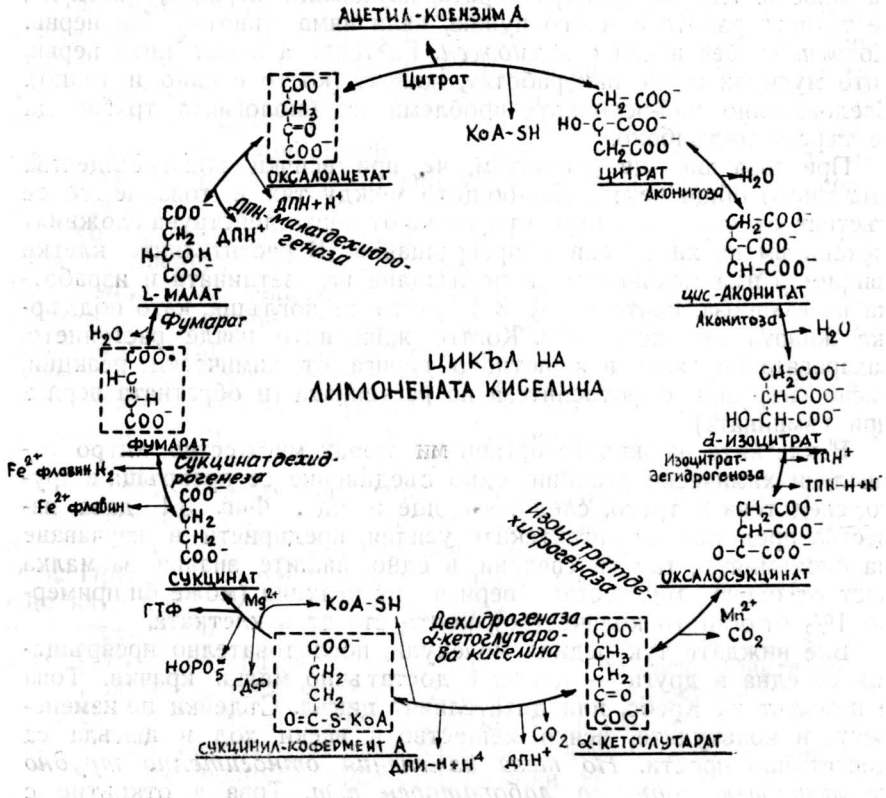
При това ние ще установим, че при всички живи същества има много общи черти. Най-общото между тях е това, че те се състоят от *клетки*, вътре във всяка от които действува сложният механизъм на химическите превръщания. В растителните клетки например има механизъм на поглъщане на светлината и изработка на захароза, която после в тъмното се поглъща, като поддържа живота на растението. Когато животното изяде растението, захарозата поражда в животното верига от химически реакции, тясно свързани с фотосинтеза на растенията (и обратната верига при тъмнината).

В клетките на живите организми стават множество хитро замислени химически реакции: едно съединение се превръща в друго, след това в трето, след това още и още. Фиг. 3.1 дава известна представа за гигантските усилия, предприети в изучаване на биохимията; там са сведени в едно нашите знания за малка част от онова множество вериги от реакции (може би примерно 1% от общото количество), които стават в клетката.

Вие виждате тук редица молекули, последователно превръщащи се една в друга — цикъл с достатъчно малки крачки. Това е цикълът на Кребс, или дихателният цикъл. Съдейки по измененията в молекулите, всяко вещество и всеки ход в цикъла са достатъчно прости. *Но тези изменения относително трудно се възпроизвеждат по лабораторен път.* Това е откритие с необикновена важност в биохимията. Ето в какво е работата. Ако

има две сходни вещества, то често е невъзможно да ги превърнем едно в друго, защото тези две форми обикновено са отделени с енергетическа бариера „превал". Ако искате да пренесете предмет на ново място, на същото ниво от другата страна на превала, вие първо трябва да го издигнете над превала. Това изисква допълнителна загуба на енергия. По тази причина много реакции не протичат, не им достига така наречената енергия на *активация*. Ако вие искате да присъедините към химично съединение един атом в повече, то за да застане той където е нужно, трябва да го придвижите *плътно*, в противен случай необходимото преместване няма да стане, той само малко ще се издигне по „склона" и ще се търкулне обратно. Но ако вие бихте могли, буквално като повъртите молекулата в ръце, да разместите нейните атоми, да вмъкнете в образувалата се дупка вашия атом и след това да закриете отвора, то вие бихте *минали* височината, не би се наложила никаква загуба на енергия и реакцията би протекла по-лесно. В клетката действително съществуват *твърде* големи молекули (къде по-големи от тези, чиито изменения са изобразени на фиг. 3.1), които умеят по някакъв начин да разместят малките молекули така, че реакцията да протече без труд. Те, тези големи и сложни устройства, се наричат *ензими* (или мая; нарекли са ги така заради това, че са ги открили при ферментацията на захарта. Между впрочем първите от реакциите на цикъла на Кребс са били открити именно при ферментацията). Реакциите на цикъла стават само в присъствието на ензими.

Самият ензим е изграден от друго вещество — *белтък*. Молекулите на ензимите са големи и сложни. Всички ензими се отличават един от друг, при което всеки е предназначен за контрол на някоя определена реакция. На фиг. 3.1 до всяка реакция са означени названията на нужния ензим (а понякога един ензим контролира и две реакции). Ще подчертаем, че самият ензим не влиза в реакция. Той не се изменя, неговата работа е само да премести атома от едно място на друго. Премести атом в една молекула и вече е готов да се заеме със следващата. Съвсем като на стан във фабрика, при това трябва да има запас от нужните атоми и



Фиг. 3.1. Цикъл на Кребс

възможност да се избавя от ненужните. Да вземем например водорода: съществуват ензими, които имат специални клетки за пренасяне на водорода във всяка химическа реакция. Да кажем, има три или четири ензима, които намаляват количеството на водорода, те се използуват на много места в цикъла. Интересно е, че механизмът, освобождаващ водород на едно място, задържа този атом, за да го използува още някъде.

Най-важната част на цикъла, приведен на фиг. 3.1, това е превръщането на ГДФ в ГТФ (гуанозин дифосфат в гуанозин трифосфат), защото във второто вещество — ГТФ — енергията е много повече, отколкото в първото. Подобно на това, както е в някои ензими има „кутия" за пренос на атомите на водорода, има още и особени „кутии" за пренасяне на *енергията*; в тях влиза трифосфатната група. В ГТФ има повече енергия, отколкото в ГДФ и когато цикълът върви в една посока, се създават молекули с излишък на енергия; те могат да приведат в действие други цикли, за които се *изисква* енергия, например цикъла на свиването на мускула. Мускулът няма да се свие, ако няма ГТФ. Може да се постави във вода мускулно влакно и да се добави там ГТФ, тогава влакното ще се свие, превръщайки ГТФ в ГДФ (само ако присъствуват необходимите ензими). По такъв начин свиването на мускула е превръщане на ГТФ в ГДФ; натрупаният през деня ГДФ се използува на тъмно, за да се пусне целият цикъл в обратна посока. Както виждате, на ензима му е все едно в каква посока върви реакцията; ако това не беше така, би се нарушил един от законите на физиката.

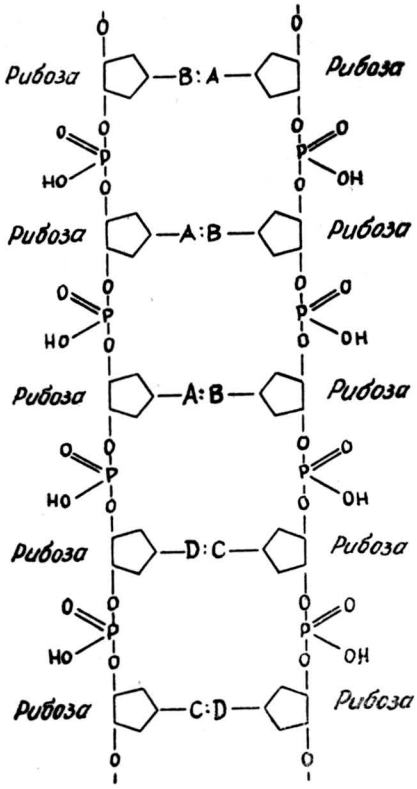
Има и друга причина, поради която за биологията и другите науки е важна именно физиката — това е *техниката на експеримента*. Например описаната биохимическа схема не би била и досега известна, ако зад нея не стояха големите достижения на експерименталната физика. Работата е в това, че за анализа на тези невъобразимо сложни системи няма по-добро средство, от това да се поставят *отличителни знаци* на атомите, участвуващи в реакцията. Ако се въведе в цикъла малко въглена киселина със зелен „знак" и се проследи къде ще се окаже знакът след 3 сек., после след 10 сек. и т. н., може да се проследи протичането на цялата реакция. Но как да се направи зеленият „знак"? С помощта на различни *изотопи*. Ще напомним, че химическите свойства на атомите се определят от числото на електроните, а не от масата на ядрото. Но в атома на въглерода например може да има било шест, било седем неутрона наред със задължителните за въглерода шест протона. В химическо отношение атомите C^{12} и C^{13} не се различават, но по маса и ядрени свойства те са различни, а значи и различими. Като се използуват тези изотопи, може да се проследи ходът на реакцията. Още подобър за това е радиоактивният изотоп C^{14}, с негова помощ може да се проследят много точно малки количества вещества.

Да се върнем обаче към описанието на ензимите и белтъците. Не всички белтъци са ензими, но всички ензими — са белтъци. Съществуват много белтъци, такива като белтъците на мускулите, структурни белтъци, да кажем, в хрущяла, космите, кожата, които не са ензими. И все пак белтъците — това е твърде характерна за живота субстанция; първо, това е съставна част на всички ензими, второ, съставна част на много други живи вещества. Структурата на белтъците е проста и достатъчно занимателна. Те представляват редове или вериги на различни *аминокиселини*. Съществуват две десетки различни аминокиселини и всички те могат да се съчетават една с друга, като образуват вериги, възлите на които се явяват групите CO—NH и т. н. Белтъкът — това е само верижки, съставени от тези двадесет аминокиселини. Всяка аминокиселина по всяка вероятност служи за някакви специални цели. В някои аминокиселини на определено място се намира атомът на сярата; два атома на сярата в един и същи белтък образуват връзка, т. е. захващат се за веригата в две точки и образуват пръстен. В други има излишен атом кислород, придаващ им киселинни свойства; характеристиките на трети са ал-

кални. В някои има големи групи атоми, увиснали от едната страна и заемащи много място. Една от аминокиселините — пролин, всъщност не е амино-, а иминокиселина. Тази малка разлика води до това, че когато във веригата има пролин, то веригата се прегъва. Ако вие бихте желали да създадете някой определен белтък, то ще трябва да ви се дадат такива указания: тук поставете сярна кука, след това добавете нещо, за да запълните мястото, сега привържете нещо, за да се прегъне веригата и т. н. Биха се получили свързани помежду си остроумни верижки със сложна структура — всички ензими, очевидно, са построени именно така. Един от триумфите на съвременната наука беше откриването (в 1960 г.) на точното пространствено разположение на атомите на някои белтъци; в тях 56—60 аминокиселини са свързани една за друга. Беше установено точното разположение на повече от 1000 атома (даже 2000, ако се смята и водородът), влизащи в сложната структура на два белтъка (един от тях е хемоглобинът). А една от печалните страни на това откритие се прояви в това, че от тази картина нищо не може да се види; ние не разбираме защо тя е такава. Именно този проблем следва сега да се атакува.

Има и друг проблем в биологията: откъде ензимите „знаят" какви да станат? От червенооката муха се ражда пак червенооко мушица; значи цялата информация за ензимите, създаващи червения пигмент, трябва да премине към поредната мушица. Тази информация предава не белтъка, а веществото вътре в ядрото на клетката — ДНК (дезоксирибонуклеиновата киселина). Това е тази ключова субстанция, която се предава от една клетка на друга (половите клетки например почти изцяло се състоят от ДНК) и носи със себе си инструкцията как да се правят ензими. ДНК — това е „копие", печатна матрица. На какво прилича това копие, как то трябва да действува? Първо—то трябва да възпроизвежда само себе си, второ — то трябва да бъде способно да дава нареждания на белтъка. Колкото до първото, то би могло да се мисли, че това става така, както възпроизвеждането на клетките: клетките порастват и се делят наполовина. Може би молекулите на ДНК също растат и също се делят? Не, това е изключено. Нали атомите сигурно не растат и не се делят? Очевидно за репродукцията на молекулите е нужен друг път, по-хитър.

Структурата на ДНК се изучаваше дълго, отначало химически (съставните части), след това рентгенографически (пространствена структура). В резултат се стигна до следното знаменателно откритие: молекулата на ДНК — това е двойка вериги, навити една върху друга. Скелетът на всяка верига, макар и приличащ на белтъчните вериги, но различен химически от тях — това е ред от захарни и фосфатни групи, както е показано на фиг. 3.2. От тази схема се вижда как във веригата може да се съхранява инструкция или, като разделите веригата на две нишки, вие получавате ред вещества BAADC . . ., не е изключено, че този ред за всеки организъм си е специфичен. Значи може да се мисли, че всеки особен *ред* на ДНК съдържа в себе си особени *указания*, как да се произвеждат белтъците.



Фиг. 3.2. Схема на ДНК

На схемата се виждат двойки напречни звена, присъединени към захарните групи и стягащи между себе си две нишки. Тези звена не са еднакви; има четири сорта звена — аденин, тимин, цитозин, гуанин, означени с *A*, *B*, *C* и *D*. Интересно е, че не всички звена се съединяват по двойки. Например възможни са двойките *AB* или *CD*; те са разположени на двете нишки така, че „подхождат една към друга", притежават силна енергия на взаимодействие. Но *C* към *A* или *B* към *C* не подхождат; ако във веригата има *C*, то в другата верига на това място трябва да бъде само *D*. На всяка буква в едната верига съответствува определена буква в другата.

Как тогава да си мислим възпроизвеждането? Нека веригата да е разцепена на две. Как да се направи друга такава? Ако във веществото на клетката има фабрика, изработваща фосфат, захар и звената *A*, *B*, *C*, *D* (засега непривързани към веригата),

към нашата половина на веригата ще се присъединят само подходящите звена, допълващи *BAADC*, т. е. *ABBCD* . . . При деленето на клетката веригата се разделя по средата на две нишки, всяка преминава в своята клетка и там набира своето допълнение.

Накрая, последният въпрос: как редът на следването на *A*, *B*, *C*, *D* в ДНК определя разположението на аминокиселините в белтъците? Отговор засега няма. Това е основният нерешен проблем в съвременната биология. Засега ние разполагаме само с някакви откъслечни информации за това. В клетката има най-малки частици — микрозоми: сега е известно, че в тях се изработват белтъците. Но микрозомите не се намират в ядрата, не там, където се намира ДНК със своите инструкции. Очевидно в това има някакъв смисъл. Известно е, обаче, че от ДНК се откъсват парченца молекули, не така дълги като ДНК, носеща в себе си цялата информация, а нещо като малки нейни части. Тях ги наричат РНК, но не е там работата. Това е нещо като умалено копие на ДНК. Известно е, че РНК някак си пренася в микрозомата съобщението за това какъв вид белтък е нужно да се изработи. (Този факт е вече известен.) След това в микрозомата се образува белтък. Това е също известно. Но различните подробности на това как аминокиселините влизат в белтъка и как те се разполагат в съгласие с кода, зашифрован в РНК, засега не са известни. Ние не умеем да четем този код. Ако е написано, например, *ABCCA*, то ние не знаем какъв белтък ще бъде приготвен.

Вярно е, нито една наука, нито един отрасъл на знанията не се движи така бурно по всички посоки напред, както биологията. Но ако ние трябва да назовем това най-главно, което ни води сега все напред и напред в нашите опити да разберем явлението живот, ние щяхме да бъдем задължени да кажем: „*всички тела се състоят от атоми*," всичко, което става в живите същества, може да бъде разбрано на езика на движението и трептенето на атомите.

4. Астрономия

Дойде ред на астрономията в нашия стремителен обзор на цялата Вселена. Астрономията е по-стара от физиката. Фактически физиката е възникнала от нея, когато астрономията забелязала поразителната простота на движението на звездите и планетите; обяснението на това движение е станало *начало* на физиката. Но най-забележителното откритие на астрономията било това, че *звездите се състоят от същите атоми, от каквито и Земята*[1]. Как е било доказано това? Всеки атом изпуска светлина с определени честоти подобно на музикалните инструменти, всеки от които има свое звучене — определен набор от честоти или височини на звука. Като слушаме едновременно няколко тона, ние можем да ги разделим, но способностите на нашето

---

[1] Как смело се оправих с всичко това! Колко много се крие зад всяка фраза на този кратък разказ. „Звездите и Земята са направени от еднакви атоми." Обикновено на мен ми стига една такава тема за цяла лекция. Поетите твърдят, че науката лишава звездите от красота, за нея звездите са просто газови кълба. Нищо не е „просто". Аз също се любувам на звездите и чувствувам тяхната красота. Но кой от нас вижда повече? Широтата на небесата превъзхожда моето въображение . . . Загубено в тази вртележка, моето малко око е способно да види светлина, която е на милион години. Безбрежното зрелище на Вселената . . и аз самият — част от нея . . . Може би веществото на моето тяло е изригнато от някаква забравена звезда, също такава като онази там, чийто взрив аз виждам сега. Или пък аз гледам звездите с гигантското око на Паломарския телескоп и виждам как те се устремяват в различни посоки от онази първоначална точка, където те може би някога са съществували рамо до рамо. Що за картина е това и какъв е нейният смисъл? *И за какво е всичко това?* Нашето проникване в някои от тайните на Вселената не ще причини ущърб на тайнствеността ѝ, защото истината е по-поразяваща от онова, което е било нарисувано от въображението на художниците от миналото! Защо сегашните поети не говорят за това? Що за хора са тези лирици, ако те са способни да говорят за Юпитер само като за човек, и мълчат, ако това е огромно въртящо се кълбо от метан и амоняк?

око съвсем не са толкова големи в това отношение, то не може да раздели смес от цветове на съставните ѝ части. Обаче с помощта на спектроскоп *става възможен* анализът на честотите на светлинните вълни, той позволява да се видят истинските тонове на атомите на различните звезди. Та дори два химчески елемента бяха открити на звездите преди това да стане на Земята: хелий (той беше открит на Слънцето, затова е и наречен така) и технеций (него го намериха на някои студени звезди). Но щом като звездите се състоят от същите атоми, както и Земята, то това силно ни придвижва напред при разбирането същността на звездите. На нас ни е известно поведението на атомите при високи температури и неголеми плътности и това позволява с помощта на статистическата механика да се анализира поведението на звездното вещество. Дори и без да умеем да възпроизвеждаме зведното състояние на Земята, но като се опираме на основните физически закони, ние често съвсем точно (а понякога почти точно) можем да покажем какво става на звездите. Така физиката помага на астрономията. Може да изглежда странно, но разпределението на веществото в Слънцето ние знаем много по-добре, отколкото неговото разпределение вътре в Земята. Чудно ни се вижда какво може да се разбере, като се гледа през телескоп едно петънце светлина? Обаче *недрата* на звездите са ни известни много по-добре, отколкото би могло да се очаква, тъй като ние умеем да *преценяваме* какво ще се случи с атомите на звездите при много обстоятелства.

Едно от най-поразителните открития на астрономията — това е откриването източника на енергията на звездите, поддържаща тяхното горене. Един от тези, който откри това, отишъл на разходка с момиче точно през нощта, след като разбрал, че на звездите става ядрена реакция и че това е причината на тяхното светене. Тя казала: „Погледни как хубаво сияят звездите!“ А той отговорил; „Да. Чудесно. А пък днес аз съм единственият човек в света, който знае защо сияят те!“ Тя само се разсмяла. Не ѝ направило впечатление, че той е единственият човек, който разбира защо светят звездите. Е какво, колкото и да е печално, да бъдеш самотен и неразбран — това е в реда на нещата.

Ето че Слънцето получава енергия от ядреното „изгаряне“ на водорода, който се превръща при това в хелий. От водорода в дълбочините на звездите се образуват по-нататък други химически елементи. Веществото, от което сме направени *ние*, е било някога „изпечено“ в звездата и изхвърлено навън. Но откъде е известно това? Ето откъде. Съдържанието на различни изотопи във веществото C^{12}, C^{13} и т. н. никога не се изменя при химическите превръщания, защото за двата изотопа С химическите реакции са еднакви. Тези пропорции са резултат единствено на *ядрените* реакции. Като изучаваме пропорцията на изотопите в изстиналата, мъртва пепел, каквато сме ние, можем да се досетим на какво е приличала *пещта,* в която се е сформирало нашето вещество. Тя е приличала на звездите и твърде вероятно е елементите да са „направени“ в звездите и да са изхвърлени оттам при взривовете, наричани от нас нови и свръхнови звезди. Астрономията е толкова близка с физиката, че още не един път в този курс ние ще се обръщаме към нея.

5. Геология

Сега да преминем към така наричаните *науки за Земята,* или *геологията.* Към тях се отнася преди всичко метеорологията, или науката за времето. Метеорологическата апаратура — това са физически прибори, така че метеорологията е снабдена с прибори благодарение на развитието на експерименталната физика (ние говорихме вече за това). Другояче стои въпросът с теорията на метеорологията, тя никога не е била разработена удовлетворително от никой физик. „Чудно — ще кажете Вие, — та това е

само въздух, нима не знаем уравненията на движението на въздуха?“ Да, знаем. „Защо тогава, като знаем състоянието на въздуха днес, не можем да предскажем какво ще бъде неговото състояние утре?“ Първо, ние не знаем какво е *всъщност* истинското състояние на въздуха днес, тъй като той непрекъснато някъде се завихря и тече. Въздухът е много чувствителен към всякакви промени и просто е неустойчив. За да разберете за каква неустойчивост говоря, погледнете как спокойно тече водата над язовирната стена и изведнаж, като пада, се превръща в множество мехурчета и капки. Вие знаете състоянието на водата в момента, когато тя минава през стената — тя е съвсем спокойна; откъде се взимат капките в момента на падането? От какво зависи на какви струи ще се разбие потокът, къде ще възникнат те, къде ще паднат? Всичко това е неизвестно, защото течението на водата е неустойчиво. Точно така дори спокойният поток на въздуха, като минава между планините, капризно се разпада на отделни вихри. В много области на науката ние се сблъскваме с това, което носи наименованието *турбулентно течение*, което засега не се поддава на анализ. Така че по-добре е по-скоро да преминем от темата „време“ към геологията!

Главният въпрос на геологията се състои в това, какво е направило Земята такава, каквато е? Най-очевидните от тези процеси стават пред очите ни: реките подкопават бреговете, прах посипва полетата т. н. Да се разбере това е доста леко, обаче освен ерозия трябва да става и нещо обратно на разрушението. Средно планините сега не са по-ниски, отколкото в миналото. Следователно трябва да става и процес на *планинообразуване*. Като изучавате геологията, ще се убедите, че действително става и планинообразуване, и вулканизъм, но никой не ги разбира, не разбира онова, което представлява половината от геологията. Наистина природата на вулканите не е разбрана. От какво стават земетресения в крайна сметка също не е разбрано. Разбират, че ако нещо се сблъска с нещо, то нещо ще гръмне, нещо ще се придвижи — всичко това е добре. Но какво е дало тласъка, защо го е дало? Съществува теория, че вътре в Земята има течения — става циркулация поради различната температура вън и вътре — и те в своето движение леко бутат повърхността на Земята. А ако някъде се срещат две противоположни течения, там трябва да се натрупа вещество, трябва да се появят планински хребети, те ще се окажат в много силно напрежение, ще възникнат вулкани, ще станат земетресения.

Какво може да се каже за недрата на Земята? Добре известна е скоростта на вълните на земетресенията в Земята и разпределението на плътността вътре в нашата планета. Но физиците не можаха да създадат добра теория за плътността на веществото при налягания, очаквани в центъра на Земята. С други думи, ние не си представяме съвсем добре свойствата на веществото в такива условия. С нашата планета ние се справяме далеч по-лошо, отколкото със състоянието на веществото в звездите. Не е разработен необходимият за това математически апарат, той, както се вижда, е много сложен; не е изключено обаче да се намери някой, който да разбере важността на този проблем и да го разработи. Отделен въпрос е, че дори като изчислим плътността, не ще можем да си представим циркулиращите течения или да се оправим в свойствата на скалите при свръхвисоки налягания. Ние не умеем да предсказваме с каква бързина тези скали „ще се поддадат“ на налягането; само опитът ще отговори на тези въпроси.

6. Психология

Да разгледаме накрая още една наука — *психологията*. Уместно е веднага да отбележим, че психоанализът — това не е наука; в най-добрия случай това е медицински процес, но по-скоро — знахарство. В психоанализа съществува теория за произхода на

болестите — разни „духове“ и прочее. Знахарът също има теория, според която болестта, например малария, е предизвикана от дух, витаещ във въздуха; няма да я излекуваш, ако поразмахаш змия над главата на болния, но хининът помага. И така, ако вие заболеете, съветвам ви да отидете при знахаря, защото той най-добре от всички в племето се оправя с болестите; обаче неговото знание — не е наука. Психоанализът не е достатъчно проверен експериментално и е невъзможно да се изброят случаите кога той помага и кога не помага и т. н.

Другите клонове на психологията, а в нея влиза например физиологията на усещането (какво става в окото и какво — в мозъка), извинете, не са толкова интересни. Но в тях са достигнати, макар и малки, но напълно реални успехи. Ето една от най-интересните технически задачи (ако искате наричайте я психология, ако искате — не). Централната проблема в изучаването на мисленето или, ако ви е удобно, на нервната система е такава: нека животното да се научи на нещо, нека то да може да прави какво и да е, което по-рано да не е могло да прави; значи клетките на неговия мозък, ако те се състоят от атоми, са се изменили. *В какво се състои това изменение*? Ние сме запечатали нещо в своята памет. Къде? Какво може да се види сега там? Това ние не знаем. Ние сме запомнили някакво число. Какво значи това? Какво се е изменило в нервната система? Неизвестно. Това е много важна проблема, при това съвсем нерешена. Даже ако допуснем, че у нас има някакъв механизъм на паметта, то все едно, мозъкът — това е такава невъобразима маса от пресичащи се проводници и нерви, че по всяка вероятност прекият анализ е невъзможен. Аналог на това са изчислителните машини и техните елементи; в тях също има множество проводници, има и елементи, приличащи на синапси (нервни връзки). Жалко, че ние нямаме време да разгледаме интересния въпрос за отношението между мисълта и изчислителните машини. Все пак трябва да се разбира, че този въпрос много малко ще ни каже за реалната сложност на ежедневното поведение на човека. Хората са така различни! И ще трябва не малко време, за да се оправим в това. Трябва да се започне отдалече. Ако даже би ни се удало да си представим как действува кучето, то и това би се оказало твърде малко. Къде по-лесно е да се разбере кучето, но въпреки това никой не може да обясни как то действува.

7. Как започна всичко?

За да може физиката да бъде полезна на другите науки по отношение на *теорията*, а не само със своите прибори и изобретения, тези науки трябва да снабдят физиката с описание на техните обекти на физически език. Ако биологът запита: „Защо скача жабата?,“ то физикът не ще може да отговори. Но ако той разкаже какво е това жаба, че в нея има еди-колко си молекули, че ето на това място в нея са нервите и т. н., то това е вече съвсем друга работа. Ако геологът повече или по-малко смислено ни обясни какво е Земята, а астрономът — какво са звездите, тогава ние можем да се опитаме да се оправим в това. За да има някакъв смисъл от физическата теория, трябва да се знае къде са разположени атомите. За да разберем химията, ние трябва точно да знаем от какви атоми са съставени интересуващите ни вещества, иначе ние нищо няма да анализираме. Разбира се, това е само едно от ограниченията.

Съществува и друг *тип* задачи в съседните науки, който липсва във физиката. Ще го наречем, нямайки по-добър термин, въпрос на история. *Как започва всичко?* Как всичко е станало такова, каквото е? Ако например всичко в биологията ни стане ясно, възниква естественият въпрос: как са се появили всички същества на Земята? С това се занимава теорията на еволюцията — важна част от биологията. В геологията ни се иска да знаем не само как се образуват планините, но и как в началото е въз-

никнала самата Земя, Слънчевата система и т. н. Това естествено ни води до желанието да узнаем от какъв род материя се е състояла тогава Вселената. Как са се развивали звездите? Какви са били началните условия? Това е проблема на астрономическата история. Сега се изясниха много неща за произхода на звездите, за елементите, от които ние сме съставени, и даже мъничко по-ясен стана произходът на самата Вселена.

Сега физиката не изучава въпросите на историята. Ние не задаваме въпроса: „Ето законите на физиката, как са възникнали те? Сега ние не считаме, че законите на физиката някак си се изменят с времето, че те по-рано са били по-други, отколкото сега. Разбира се, това *не е изключено* и ако се изясни, че е *точно така*, то историческите въпроси на физиката ще се преплетат с останалата история на Вселената и тогава физикът ще обсъжда същите проблеми каквито и астрономите, геолозите и биолозите.

Накрая, съществува физическа проблема, обща за много науки, при това твърде стара, но досега нерешена. Това не е проблемата за търсенето на нови елементарни частици, не, това е друг въпрос — въпрос отдавна, преди повече от сто години, оставен настрана от науката. Нито един физик още не е могъл математически безупречно да го анализира независимо от неговата важност за съседните науки. Това е анализът на *циркулацията* или на *вихровата течност*. Ако се проследи еволюцията на звездата, то рано или късно ще дойдем до този момент, когато в звездата започва конвекция; и от този момент ние вече не знаем какво ще стане по-нататък. След няколко милиона години звездата се взривява, но причината за това остава загадка за нас. Ние не умеем да анализираме времето. Ние не знаем картината на движенията, които трябва да стават вътре в Земята. В най-проста форма задачата е такава: да пропуснем през много дълга тръба вода с голяма скорост. Пита се: какво налягане е нужно, за да премине през тръбата дадено количество вода? И никой, като се основава само на първичните закони и на свойствата на самата вода, не може да отговори на този въпрос. Ако водата тече бавно или се точи гъста каша, нещо като мед, то ние прекрасно умеем всичко. Отговора вие можете да намерите например във всеки ваш учебник. А ето, с истинската, мократа вода, бликаща от крана, не е по силите ни да се справим. Това е централната проблема, която в един прекрасен ден ще ни се наложи да решим, а ние не умеем това.

Веднаж един поет е казал: „Целият свят е в чаша вино.“ Ние вероятно никога не ще разберем какъв смисъл той е влагал в това, тъй като поетите пишат не за това, за да бъдат разбирани. Но безспорно е, че ако се вгледаме внимателно в чашата с вино, ние наистина ще открием цял един свят. В нея има и физически явления (искряща течност, изпарение, което се мени в зависимост от времето, и вашето дихание, блясък на стъкло), и атоми (за които ни говори вече нашето въображение). Стъклото — това е пречистена скала. В неговия състав се крият тайните на възрастта на Вселената и развитието на звездите. А от какъв удивителен набор от реактиви се състои виното! Как са възникнали те! Там има мая, ензими, сокове и разни други продукти. Нали във виното се крие голямото обобщение: целият живот е брожение. Като изучаваме химията на виното, не можем да не открием, както е направил Луи Пастьор, причината на много болести. Колко живот има в това евтино вино, ако то налага на нашето съзнание своя дух, ако трябва да бъдем толкова внимателни с него! За удобство нашият ограничен ум дели тази чаша вино, този мир на части: физика, биология, геология, астрономия, психология и т. н., но природата всъщност не знае никакво деление! Нека и ние съединим всичко заедно, като не забравяме все пак какво сме видели. Нека тази чаша вино ни достави накрая още една наслада: да го изпием и да забравим за всичко!

4

Запазване на енергията

§ 1. Какво е енергия?

§ 2. Потенциална енергия на привличането

§ 3. Кинетична енергия

§ 4. Други форми на енергия

§ 1. Какво е енергия?

След като свършихме с общото описание на природата на нещата, от тази глава ние ще започнем подробното изучаване на различни физически въпроси. За да се покаже характерът на идеите и типът на разсъжденията, които могат да се приложат в теоретическата физика, ние ще разгледаме един от основните закони на физиката — запазването на енергията.

Съществува факт, или ако искате *закон*, който управлява всички явления в природата, всичко, което е известно досега. Изключения от този закон не съществуват; доколкото знаем, той е абсолютно точен. Нарича се *запазване на енергията*. Той твърди, че съществува определена величина, наречена енергия, която не се мени при никакви превръщания, ставащи в природата. Самото това твърдение е много отвлечено; по същество то е математически принцип, който твърди, че съществува някаква числена величина, която не се променя при никакви обстоятелства. Това съвсем не е описание на механизма на явлението или нещо конкретно, чисто и просто се отбелязва странното обстоятелство, че може да се пресметне някакво число и след това спокойно да се следи как природата ще прави свои трикове, а след това отново да се пресметне това число — то ще си остане същото. (Също като офицерът на черно шахматно поле: както и да се развиват събитията на дъската, каквито и ходове да се правят, офицерът винаги ще бъде на черното поле. Нашият закон е точно от такъв тип.) Тъй като това твърдение е отвлечено, то ние ще покажем неговия смисъл чрез някоя аналогия.

Да се запознаем с едно момче, например Монтигомо ястребовия нокът! Той има големи кубчета, които той даже не може нито да счупи, нито да раздели на части. Всички те са еднакви. Нека той да има 28 парчета. Майка му го оставя сутрин сам с тези кубчета. Всяка вечер тя преброява колко кубчета има той (тя е малко любопитна!) и открива поразителна закономерност: каквото и да е правило нейното синче с кубчетата, те си остават 28! Това продължава достатъчно дълго и изведнъж в един прекрасен ден тя преброява само 27 парчета. След кратки търсения откриват кубчето под килима; наложило й се е да претърси навсякъде, за да се убеди в неизменността на броя на кубчетата. Друг път кубчетата се оказват 26. Отново щателното изследване показва, че прозорецът е отворен, и поглеждайки долу, тя вижда двете кубчета в тревата. Третият път преброяването дава 30 кубчета! Това довежда мама в пълно объркване, но след това тя си спомня, че им е идвало на гости момчето на съседите — Коженият чорап. Очевидно той е взел със себе си своите кубчета и ги е забравил тук. Тя събира излишните кубчета, затваря плътно прозореца, не пуска повече гости в къщи и тогава отново всичко върви както трябва, докато веднаж сметката не дава 28 кубчета... Вярно, в стаята има сандък за играчки, мама иска и в него да погледне, но момчето крещи: „Не ми отваряй сандъка!“ и започва да плаче; мама не се допуска до сандъка. Какво ще стане? Но мама е любопитна и хитра, тя измисля изход! Тя знае, че кубчето тежи 500 g; тя претегля сандъка; когато всичките 28 кубчета са на пода, той тежи 1 kg. Когато следващия път проверява количеството на кубчетата, тя отново претегля сандъка, изважда 1 kg и дели на 500 g. Открива, че

$$\left(\begin{array}{c}\text{Броят на наличните}\\ \text{кубчета}\end{array}\right)+\frac{\text{Теглото на сандъка — 1 kg}}{\text{500 g}}=$$

$$=\text{Постоянна величина.} \qquad (4.1)$$

Но отново възникват отклонения и от тази формула. Отново в резултат на грижливи проучвания става ясно, че нивото на водата в пералната машина се е изменило по някаква причина. Оказва се, че детето хвърля кубчета във водата, а майката не може да ги види — водата е сапунена; но тя може да узнае колко кубчета има във водата, като добави във формулата нов член. Първоначалното ниво на водата е 40 cm, а всяко кубче повдига водата с 1/3 cm, така че новата формула е такава:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Броят на налич-}\\ \text{ните кубчета}\end{array}\right)+\frac{\text{Теглото на сандъка — 1 kg}}{\text{500 g}}+$$

$$+\frac{\text{Нивото на водата — 40 cm}}{\text{1/3 cm}}=\text{Постоянна величина.} \qquad (4.2)$$

Светът, който се представя на майката, постепенно се разширява, тя намира целия ред от членове, които позволяват да се пресметне колко кубчета се намират там, където тя не може да погледне. В крайна сметка тя открива сложна формула за количеството, което *трябва да бъде пресметнато* и което винаги остава същото, каквото и да направи нейното дете.

Къде е аналогията между този пример и запазването на енергията? Най-същественото, от което трябва да се откъснем в тази картинка, е, това че *кубчетата не съществуват*. Изхвърлете в изразите (4.1) и (4.2) първите членове и вие ще откриете, че пресмятате повече или по-малко отвлечени количества. Аналогията е в следното. Първо, при пресмятането на енергията от време на време част от нея излиза от системата, а от време на време се появява някаква енергия. За да се провери запазването на енергията, ние трябва да бъдем уверени, че не сме забравили да сметнем нейното намаляване или печалба. Второ, енергията има множество *различни форми* и всяка от тях има своя формула: енергия на привличането, кинетична енергия, топлинна енергия, еластична енергия, електроенергия, химическа енергия, енергия на излъчването, ядрена енергия, енергия на масата. Когато ние обединим формулите за приноса на всяка от тях, то тяхната сума не ще се мени, ако не се смятат загубите на енергия и нейният приток.

Важно е да се разбере, че във съвременната физика е неизвестно *какво е това* енергия. Ние не смятаме, че енергията се предава във вид на малки хапчета. Нищо подобно. Просто съществуват формули за пресмятането на определени числени величини, след събирането на които ние получаваме числото 28 — винаги едно и също число. Това е нещо отвлечено, нищо не говорещо нито за механизма, нито за причината за появяването във формулата на различните членове.

§ 2. Потенциална енергия на привличането

Запазването на енергията може да се разбере само ако съществуват формули за всички нейни видове. Сега аз ще разгледам формулата за енергията на привличането, близо до земната повърхност; аз искам да я изведа, но не така, както тя е била получена първо исторически, а с помощта на специално измислена за тази лекция линия на разсъждения. Аз искам да ви покажа този забележителен факт, че няколко наблюдения и едно строго размисляне са достатъчни, за да се узнае за природата твърде, твърде много. Вие ще видите в какво се състои работата на физика-теоретик. Изводът е подсказан от блестящите разсъждения на Карно за к. п. д. на топлинните машини.[1]

[1] Тук ни интересува не толкова крайната формула (4.3) (тя трябва да ви е позната), колкото възможността да я получим по теоретичен път.



Фиг. 4.1. Проста товароподемна машина

Да разгледаме товароподемните машини, способни да повдигат един товар, спускайки при това друг. Да предположим още, че *вечното движение на тези машини е невъзможно.* (Именно недопустимостта на вечното движение е и общата формулировка на закона за запазване на енергията.) Като определяме вечното движение, трябва да бъдем много внимателни. Нека направим това отначало за товароподемните машини. Ако ние сме повдигнали и спуснали някакви товари, възстановили сме предишното състояние на машината и след това сме открили, че в крайна сметка *товарът е повдигнат*, то ние сме получили вечен двигател: повдигнатият товар може да приведе в действие нещо друго. Съществените тук е, че машината, която е повдигнала товара, се е върнала в *първоначалното положение* и че тя от *нищо не е зависела* (да не е получавала от външен източник енергия за повдигането на товара, с други думи, да не е идвал на гости Коженият чорап със своите кубчета).

Твърде проста товароподемна машина е показана на фиг. 4.1. Тя повдига тройно тегло. На едната чаша на везната се слагат три тегловни единици, на другата — една. Вярно, за да заработи тя направо, трябва да снемем от лявата чаша дори и минимален товар. И обратно, за да се повдигне единичният товар, спускайки тройния, също е необходимо малко да се изхитрим и да махнем от дясната чаша част от товара. Ние разбираме, че в истинската подемна машина трябва да се създаде известно претоварване на едната страна, за да се повдигне другата. Но засега да изоставим това. Идеалните машини, въпреки че всъщност ги няма, не се нуждаят от превес. Машините, от които фактически ние се ползуваме, можем да ги смятаме в известен смисъл *почти* обратими, т. е. ако те повдигат тройното тегло с помощта на единичното, то те могат да повдигнат също почти единичното тегло, като спускат тройното.

Да си представим, че съществуват два класа машини — *необратими* (тук влизат всички реални машини) и *обратими*, които всъщност не съществуват, колкото и старателно да се изготвят лагерите, лостовете и т. н., такива машини не могат да се построят. Но да предположим все пак, че обратима машина съществува и е способна, като спуска единичния товар (килограм или грам — все едно) на единица дължина да повдигне в същото време тройния товар. Да наречем тази обратима машина машина А. Да допуснем, че дадената обратима машина повдига тройния товар на височина X. След това да предположим, че съществува друга машина B, не обезателно обратима, която също спуска единичния товар на единица дължина, но повдига тройния товар на височина $У$. Сега може да се докаже, че $У$ не е по-голямо от X, т. е., че не може да се построи машина, която би могла да повдигне товара *по-високо*, отколкото обратимата. Защо? Вижте. Нека $У$ е по-голямо от X. Ние взимаме единичното тегло и го спускаме на единица дължина с машината B; чрез това повдигаме тройния товар на височина $У$. След това можем да спуснем товара от височината $У$ до X, *получавайки свободна енергия*, и да включим обратимата машина A в обратна посока, за да спусне тройния товар на X и да издигне единичния товар на единична височина. Единичният товар ще се окаже там, където е бил по-рано и двете машини ще се окажат в състояние да започнат работа отново! И така, ако $У$ е по-голямо от X, то възниква вечен двигател, а ние предположихме, че такъв няма. Ние идваме към извода, че $У$ е *не по-голямо* от X, т. е. от всички машини, които могат да се направят, обратимата е най-хубава.

Лесно е да се разбере също, че всички обратими машини трябва да повдигат товара *на една и съща височина.* Да допуснем, че машината B е също обратима. Това, че $У$ не е по-голямо от X, остава, разбира се, вярно, но ние можем да пуснем машината в обратна посока, да повторим тези разсъждения и да получим, че X не е по-голямо от $У$. Това е много знаменателно наблюдение, тъй като то позволява да се разбере на каква височина различните машини могат да повдигат товарите, *без да се*

гледа тяхното вътрешно устройство. Ако някой е измислил невероятно забъркана система от лостове за повдигане на тройния товар на някаква височина за сметка на спускането на единичен товар на единица височина и ако ние сравним тази машина с простия обратим лост, способен да извърши същото, то първата машина не ще повдигне товара по-високо от втората (по-скоро обратното). А ако неговата машина е обратима, то ние знаем точно на *каква* височина тя ще повдигне товарите.

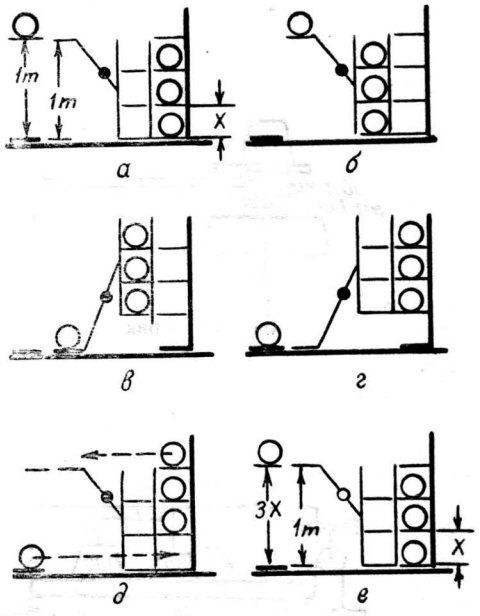
Извод: всяка обратима машина, както и да действува, като спуска 1 kg на 1 m винаги повдига 3 kg на една и съща височина X. Ясно е, че ние доказахме твърде полезен общ закон. Но възниква въпросът: на какво е равно X?

Нека ние имаме обратима машина, способна да повдигне 3 kg за сметка на 1 kg на височина X. Да поставим три топки на рафтовете (както на фиг. 4.2). Четвъртата лежи на поставка на един метър от пода. Машината може да повдигне трите топки, спускайки едната топка на 1 m. Да построим подвижна платформа с три полици с височина X и нека височината на полиците на рафтовете също да бъде X (фиг. 4.2, а). Да прехвърлим отначало топките от рафтовете на полиците на платформата (фиг. 4.2. б); да предположим, че за това не е необходима енергия, защото полиците и рафтовете са на една височина. След това да включим обратимата машина: тя ще свали единичната топка на пода и ще издигне платформата на височина X (фиг. 4.2, в). Но ние сме конструирали платформата така остроумно, че топките отново са се оказали точно на нивото на полиците на рафтовете. Да разтоварим топките от платформата върху рафтовете (фиг. 4.2, г). След разтоварването машината ще се върне в първоначалното положение. Сега вече трите топки лежат на трите горни полици на рафтовете, а четвъртата топка — на пода. Но вижте какво чудно нещо: по същество ние изобщо не повдигахме *две* топки, нали на втора и трета полица топките лежат така, както лежаха отначало. В крайна сметка се е повдигнала само *една топка*, но затова пък на височина $3X$. Ако височината $3X$ се окажеше по-голяма от 1 m, то би могло да се *спусне топката*, за да се върне машината към началните условия (фиг. 4.2, е) и да започне работа отначало. Значи, височината $3X$ не може да бъде по-голяма от 1 m или ще започне вечно движение. Точно така може да се докаже, че 1 m *не може да бъде повече* от $3X$: машината е обратима, ще я пуснем назад и ще го докажем. И така, $3X$ *не е нито по-малко*, нито повече от 1 m. Ние открихме само с помощта на разсъждения закона: $X = 1/3$ m. Лесно е да го обобщим: 1 kg пада от някаква височина при работа на обратимата машина; тогава машината е способна да повдигне p kg на $1/p$ височина. С други думи, ако 3 kg умножим по височината на тяхното изкачване (X), то това е равно на 1 kg, умножен по височината на неговото падане (1 m). Нека след като умножим всички товари в машината по височината, на която стоят, машината да поработи и пак да умножим всички тежести по височината на подема им: в крайна сметка *трябва да излезе същото*. (Ние преминахме от случая, когато се движеше само един товар, към случая, когато за сметка на спускането на един товар се повдигат няколко товара. Но надявам се, това е ясно?)

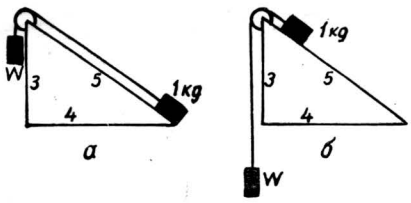
Ще наречем сумата на теглата, умножени по височината, *потенциална енергия* на привличането, т. е. енергия, която притежава тялото вследствие на своето положение в пространството по отношение на земята. Формулата на енергията на привличането, докато тялото не е много далече от земята (теглото при изкачване се намалява), е такава:

$$\begin{pmatrix}\text{Потенциалната енергия на}\\ \text{привличането за едно тяло}\end{pmatrix} = (\text{Теглото}) \times (\text{височината}). \qquad (4.3)$$

Много красиво разсъждение, нали? Въпросът е само в това, вярно ли е то. (В края на краищата природата *не е длъжна* да следва нашите разсъждения.) Например не е изключено в действителност да е възможно вечното движение. Или другите предположения са грешни. Или ние сме пропуснали нещо в своите



Фиг. 4.2. Обратима машина
а — начално положение; б — товарене на топките; в — 1 kg повдига 3 kg на височина X; г — разтоварване на топките; д — възстановяване; е — крайно положение



Фиг. 4.3. Наведена равнина

разсъждения. Затова непременно трябва да ги проверим. И ето — тяхната истинност се *потвърждава от опита.*

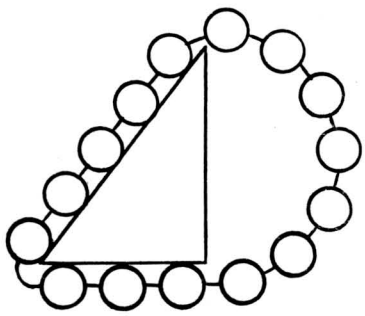
Потенциална енергия — това е общо название на енергията, свързана с разположението относно каквото и да е. В дадения частен случай това е *потенциална енергия на привличането.* Ако се извърши работа против електрическите сили, а не против силите на земното привличане, ако ние „повдигаме" заряди „над" други заряди с помощта на многочислени лостове, тогава запасът от енергия се нарича *електрическа потенциална енергия.* Общият принцип се състои в това, че измененията на енергията са равни на силата, умножена по това разстояние, на което тя действува:

$$\begin{pmatrix}\text{Изменението}\\ \text{на енергията}\end{pmatrix} = (\text{Силата}) \times \begin{pmatrix}\text{Разстоянието, на което}\\ \text{тя действува}\end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

По време на четенето на курса ние неведнаж още ще се връщаме към други видове потенциална енергия.

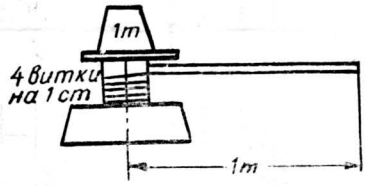
Принципът за запазването на енергията се оказва при много обстоятелства полезен при предсказване на това, което може да стане. В гимназията ние сме учили много правила за макарите и лостовете. Ние можем да се убедим сега, че всичките тия „закони" се *свеждат към един* и няма нужда да се помнят 75 правила. Ето ви един прост пример: наведената равнина. Нека това е триъгълник със страни 3, 4 и 5 (фиг. 4.3). Да окачим на макарата тежест от 1 kg и да я поставим върху равнината, а от другата страна да окачим тежестта W.

Ние искаме да знаем каква трябва да бъде тежестта W, за да уравновеси товара от 1 kg. Разсъждаваме така. Ако тежестите W и 1 kg са уравновесени, то това е обратимо състояние и въжето може да се движи нагоре-надолу. Нека в началото (фиг. 4.3, а) 1 kg да се намира на долния край на равнината, а тежестта W — на горния. Когато W се плъзне надолу, тежестта 1 kg ще се окаже горе, а W ще се спусне по дължината на склона, т. е. на 5 m. Но нали ние повдигнахме 1 kg само на 3 m, въпреки че спуснахме W на 5 m. Значи $W=3/5$ kg. Забележете, че този ловък извод е получен не от разлагането на силите, а от *запазването на енергията.* Ловкостта, разбира се, е относителна. Съществува друг извод, къде по-красив. Той е измислен от Стевин и даже е издълбан на неговия надгробен камък. Фиг. 4.4 обяснява защо трябва да се получат 3/5 kg: веригата не се върти и долната й част се уравновесява сама, значи силата на тегленето на петте звена от едната страна трябва да изравнява силата на тегленето на трите звена от другата страна (по дължината на страните). Гледайки диаграмата, става очевидно, че $W=3/5$ kg (не би било лошо, ако някога нещо подобно изсекат и на вашия надгробен камък).



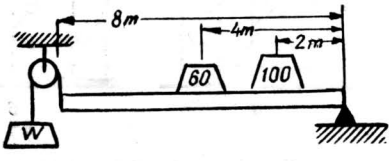
Фиг. 4.4. Това е гравирано на надгробния камък на Стевич

А ето по-сложна задача: крикът, показан на фиг. 4.5. Да видим как в случая се прилага този принцип. За въртене на крика служи ръчка с дължина 1 m, а резбата на винта има 4 нареза на 1 cm. Каква сила трябва да се приложи към дръжката, за да се повдигне 1 t? Ако искаме да повдигнем 1 t на 1 cm, ние трябва да завъртим крика четири пъти, правейки всеки път по 6,28 m ($2\pi r$), всичко 25,12 m. Като използуваме различни макари и т. н., ние действително можем да повдигнем 1 t с помощта на неизвестен товар W, приложен в края на ръчките. Ясно е, че W е равно например на 400 g. Това е следствие от запазването на енергията.



Фиг. 4.5. Крик

И още по-сложен пример (фиг. 4.6). Да подпрем единия край на лоста (или греда) с дължина 8 m. В средата на гредата да поставим товар 60 kg, а на 2 m от подпората — товар 100 kg. Каква сила е необходима, за да се удържи гредата за другия край в равновесие, като се пренебрегне теглото й? Нека да поставим макара и да прехвърлим през нея въже, завързвайки го за края на гредата. Какво трябва да бъде теглото W, което уравновесява гредата? Да си представим, че теглото се е спуснало на произволно разстояние (за простота нека то бъде 4 cm), тогава с колко ще се повдигнат нашите два товара? Средата на гредата е на 2 cm, а вторият товар (той лежи на 1/4 от дължината



Фиг. 4.6. Натоварен прът, подпрян в единия край

на гредата) — на 1 cm. Значи в съответствие с правилото, че сумата на теглата, умножена по височината, не се мени, ние трябва да напишем: теглото W по 4 cm надолу плюс 60 kg по 2 cm нагоре плюс 100 kg по 1 cm нагоре, което след събирането трябва да даде нула:

$$-4W+2\times60-1\times100=0, \quad W=55 \text{ kg}. \qquad (4,5)$$

Излиза, че за да се задържи гредата, са достатъчни 55 kg. По такъв път могат да се разработят законите на „равновесието" — статиката на сложните мостови съоръжения и т. н. Такъв подход наричат *принцип на виртуалната* (т. е. възможната или въображаемата) *работа*, защото заради неговото прилагане ние сме длъжни *да си представим*, че нашата система мъничко се е помръднала, даже ако тя *в действителност* не се е движела или въобще *не е способна* да се движи. Ние използуваме малки, въображаеми движения, за да приложим принципа за запазване на енергията.

§ 3. Кинетична енергия

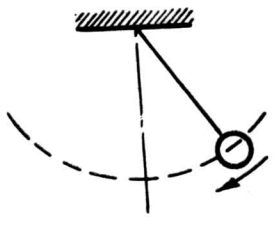
За да разкажа за друг вид енергия, нека разгледаме махалото (фиг. 4.7). Да го отместим настрана и след това да го пуснем. То започва да се люлее назад-напред. Движейки се от края към средата, то губи височина. Къде отива потенциалната енергия? Когато то се спусне най-ниско, енергията на привличането пропада, обаче то отново се изкачва нагоре. Излиза, че енергията на привличането трябва да се превръща в друга форма. Ясно е, че способността на махалото да се изкачва нагоре остава благодарение на това, че *то се движи*; значи в най-ниската точка на люлеенето енергията на привличането преминава в друг вид енергия.

Ние трябва да получим формулата за енергията на движението. Като си припомним нашите разсъждения за необратимите машини, ние лесно ще разберем, че движейки се покрай най-ниската точка, махалото трябва да притежава някакво количество енергия, която ще му позволи да се издигне на определена височина, и при това независимо от *механизма* на изкачването или *пътя* на изкачването. Възниква формула, изразяваща равностойността на тези два вида енергия, подобна на тази, която написа майката, когато пресмяташе кубчетата. Получава се друга форма на представянето на енергията. Лесно е да се разбере каква трябва да бъде тя. Кинетичната енергия долу е равна на теглото, умножено по височината, на която това тегло може да се издигне поради своята скорост: к. е. $= W.H$.

Нужна ни е формула, предсказваща височината на издигането по скоростта на движението на тялото. Ако ние хвърлим нещо с определена скорост, да кажем, право нагоре, то това тяло ще достигне определена височина; ние не знаем засега каква е тази височина, но ни е ясно, че тя зависи от скоростта и че тя ще влезе в необходимата ни формула. Значи, за да се намери формулата за кинетичната енергия на тяло, движещо се със скорост v, е необходимо да се изчисли височината, до която то може да се добере, и да се умножи по теглото на тялото. В една от следващите глави ние ще се убедим, че се получава

$$\text{к. е.} = \frac{W \cdot v^2}{2g}. \qquad (4.6)$$

Разбира се, този факт, че движението притежава енергия, никак не е свързан с полето на земното привличане, в което се намира тялото. Не е важно *откъде* е дошло движението. Това е обща формула за всички скорости. Между впрочем и (4.3), и (4.6) са приближени формули, първата става неправилна при големи височини (толкова големи, че теглото на телата намалява), а втората — при големи скорости (толкова големи, че са необходими релативистични поправки). Обаче, когато въведем точните формули за енергията, законът за запазване на енергията отново се спазва.



Фиг. 4.7. Махало

4. Други форми на енергия

Ето в такъв вид може и по-нататък да се показва съществуването на енергията в различни форми. Да отбележим първо еластичната енергия. Като разтягаме пружината, ние трябва да извършим някаква работа, нали разтегнатата пружина е способна да повдигне товар. След разтягането тя получава възможността да извършва работа. Ако ние сега съставим сумата от произведенията на теглата по височините, тя не би се запазила повече и на нас би ни се наложило да поставим нещо в нея, за да отчетем напрегнатостта на пружината. Еластичната енергия — това е и формулата за разтегнатата пружина. Колко енергия има в нея?

Когато отпускате пружината, еластичната енергия при преминаването на пружината през точката на равновесието се превръща в кинетична енергия; и по-нататък се извършват непрекъснато преходи от свиване и разтягане на пружината към кинетичната енергия на движението (в тези преходи се намесва и изменението на енергията на привличането, но ако това ни пречи, то може да не се окачва пружината, а да се положи в хоризонтално положение). И така се продължава дотогава, докато загубите на енергия ... Чакайте! Излиза, че през цялото време сме лъгали: ту натоварвахме в повече, за да се наклони лостът, ту казвахме, че машините са обратими, ту уверявахме, че те ще работят вечно. А машината в крайна сметка спира. Къде тогава, когато пружината престане да се свива-разпуща, се намира енергията? Тя е преминала в *нова* форма на енергия — *топлина.*

В пружината или в лоста има кристали, които се състоят от множество атоми. При направата на частите на машината се изисква особено внимание и точност, така че по време на работата на машината нито един атом да не мръдне от мястото си, да не затрепти. Трябва да бъдем особено внимателни. Обикновено, когато машината се върти, възникват някакви удари, поклащания, предизвикани от негладкостта на материала, и атомите започват да трептят. Така се губят малки части енергия; по време на забавянето на движението все по-силни стават случайните, неочакваните трептения на атомите на веществото в машината. Разбира се, това е все още кинетична енергия, но несвързана с видимото движение.

Моля ви, каква кинетична енергия? Що за приказка? Откъде е известно, че това е все още кинетична енергия? Оказва се, че термометърът е способен да открие, че пружината или лостът се *нагряват,* т. е. че наистина има определен прираст на кинетичната енергия. Наричаме я *топлина* и помним, че това не е никаква нова форма на енергията, а само кинетична, но на вътрешното движение. Една от трудностите при всички опити с големи количества вещества се състои в това, че е невъзможно да се покаже правилно запазването на енергията, да се направи истинска обратима машина; всеки път когато се завърти голям къс вещество, атомите не остават в предишното състояние, в тяхната система се включва известно количество случайно движение. Това не може да се види, но може да се измери с термометри и други уреди.

Съществуват още немалко други форми на енергията, но ние не можем да ги описваме сега повече или по-малко подробно.

Има енергия електрическа, свързана с притеглянето и отблъскването на електрическите заряди.

Има енергия на излъчването или енергия на светлината — тя е една от формите на електрическата енергия, защото светлината може да бъде представена като трептения на електромагнитното поле.

Има енергия химическа — енергия, освобождавана при химическите реакции. Еластичната енергия е донякъде подобна на химическата; и химическата енергия е енергия на привличането на атомите един към друг, и еластичната енергия — също. Сега ние разбираме това така: химическата енергия се състои от две части— енергия на движението на електроните вътре в атомите, т. е. от

кинетична част и електрическа енергия на привличането на електроните към протоните, т. е. от електрическа част.

По-нататък, има ядрена енергия, свързана с разположението на частиците в ядрото; за нея също съществува формула, въпреки че основните закони не са ни известни. Ние знаем, че това не е електричество, не е привличане, не е чиста химия ... А какво е? Кой го знае! Изглежда, че това е добавъчна форма на енергията.

Накрая теорията на относителността видоизменя формулата на кинетичната енергия така, че това название става условно, съчетавайки го с друго понятие: *енергия на масата*. Всеки обект притежава енергия поради това, че *съществува*. Ако електронът и позитронът си стоят спокойно един до друг, като не се занимават с нищо (нито с притегляне, нито с нещо друго), а след това се сливат и изчезват, то се освобождава определена порция енергия на излъчването и тази порция може да се пресметне. Всичко, което е нужно за тази цел, е да знаем масата на обекта. Не е важно какво е това — изчезнали са две тела, появила се е определена енергия. Формулата за пръв път е измислил Айнщайн: $E=mc^2$.

От нашите разсъждения е ясно, че законът за запазване на енергията е незаменим при анализа на явленията; ние вече показахме това в редица примери, за които не знаехме всички формули. Ако владеехме формулите за всички видове енергия, ние бихме могли да узнаваме, без да се впускаме в детайлите, колко процеси протичат в еди-кое си явление. Затова законите за запазването са толкова важни. Възниква естественият въпрос: какви още закони за запазването има във физиката.

Съществуват още два закона, сходни със закона за запазването на енергията. Единият се нарича запазване на импулса (или количеството на движението). Другият — запазване на момента на количеството на движението. По-късно ние подробно ще се запознаем с тях.

В крайна сметка ние не разбираме законите за запазването достатъчно дълбоко. Непонятно ни е запазването на енергията. Не можем да си представим енергията като някакво количество неделими порции. Вие вероятно сте слушали, че фотоните излитат на порции, че тяхната енергия е равна на константата на Планк, умножена по честотата. Това е вярно, но тъй като честотата на светлината може да бъде всякаква, то няма никакъв закон, по който енергията трябва да има някаква определена големина. Това вече не са кубчетата на Ястребовия нокът: сега са допустими всякакви количества енергия. За нас енергията не е това, което може да се пресметне, а само математическа величина, абстракция — доста странно обстоятелство. В квантовата механика се изяснява, че запазването на енергията е тясно свързана с други важни свойства на света — с *независимостта от абсолютното време*. Ние можем да направим опит в някакъв момент, а после още веднаж в друг момент — той ще протече еднакво. Абсолютно вярно ли е това твърдение или не — ние не знаем. Но ако приемем, че то е *абсолютно* вярно и добавим принципите на квантовата механика, от това може да се изведе принципът за запазване на енергията. Това е доста тънко и интересно нещо, което не е лесно да се поясни. Другите закони за запазването също са свързани помежду си: запазването на импулса в квантовата механика — с твърдението, че не е важно *къде* протича опитът, неговият резултат от това не се изменя. И подобно на това както независимостта от мястото е свързана със запазването на импулса, а независимостта от времето — със запазването на енергията, също така нищо не трябва да се измени от *завъртването* на нашите прибори; независимостта от ориентацията в пространството има отношение към запазването *момента на количеството на движението*.

Освен това съществуват още три закона за запазването; доколкото сега на нас ни е известно, те са точни и да се разберат е много по-лесно, тъй като по-своята природа те са близки до

преброяването на кубчетата. Първият от тях е *запазването на заряда*, той означава просто, че ако пресметнем колко са положителните заряди и от тях извадим количеството на отрицателните, то това число никога няма да се измени. Вие можете да се избавите от положителните заедно с отрицателните, но никога няма да създадете чист превес на едните над другите. И другите два закона са подобни на този. Единият го наричат *запазване на броя на барионите*. Съществува известно количество удивителни частици (примери: протон и неутрон), наричани бариони. Във всяка реакция, където и в природата да протича тя, ако се пресметнат колко бариони са били в началото на процеса (смятайки антибариона за —1 барион), то накрая техният брой ще се окаже същият. Другият закон е *запазване на броя на лептоните*. Групата частици, наричани лептони, включва електрона, мюона и неутриното. Антиелектронът, т. е. позитронът, се смята за —1 лептон. Пресмятането на общия брой на лептоните в реакцията открива че на входа и на изхода на реакцията това число е еднакво, поне доколкото на нас това ни е известно.

Ето ви шестте закона за запазването: три заплетени, свързани с пространството и времето, и три прости, свързани с обикновени сметки.

Към запазването на енергията *достъпността* и *полезността* нямат никакво отношение. В атомите на морската вода има немалко енергия на движението, тъй като температурата на морската вода е достатъчно висока, но няма никаква възможност да се насочи тази енергия в определено русло, без да се вземе друга отнякъде. Казано по друг начин, въпреки че ни е известен фактът, че енергията се запазва, то не е току-така просто да запазиш енергия, полезна за човека. Законите, които управляват количеството на полезната за човека енергия, се наричат *закони на термодинамиката* и включват понятието, наречено *ентропия на необратимите термодинамически процеси.*

Накрая ще се спрем на това, откъде днес можем да получим необходимия запас от енергия. С енергия ни снабдяват Слънцето и дъждовете, въглищата, уранът и водородът. Впрочем и дъждовете, и въглищата в края на краищата биха били невъзможни без Слънцето. Въпреки че енергията се запазва, природата по всяка вероятност съвсем не се интересува от това; тя освобождава от Слънцето много енергия, но само една двумилиардна част от нея пада на Земята. Природата запазва енергията, но в действителност не се грижи за нея, като разточителствува наляво и надясно. Ние вече получаваме енергия от урана, можем да я получаваме и от водорода, но засега това получаване е свързано с взривове, с голяма опасност. Ако ние бихме могли да се научим да управляваме термоядрените реакции, то енергията, която може да се получи, като изразходваме по 10 л. вода в секунда, би се равнявала на цялата електроенергия, произвеждана сега за същото време в Съединените щати. Шестотин литра речна вода в минута биха стигнали, за да се снабдява с енергия цялата страна! Именно на физиците се пада да измислят как да ни избавят от нуждата за енергия. И това безспорно е достижимо.

5

Време и разстояние

1. Движение
2. Време
3. Кратки времена
4. Големи времена
5. Единици и еталони за време
6. Големи разстояния
7. Малки разстояния

1. Движение

В тази глава ние ще разгледаме понятията *време* и *разстояние*. Ние вече говорихме, че физиката както впрочем всяка друга наука се основава на *наблюденията*. Може даже да се каже, че развитието на физическите науки до тяхното съвременно ниво е зависело в огромна степен от фактите, основани на количествени наблюдения. Само с помощта на количествени наблюдения може да се получат количествени съотношения — сърцето на съвременната физика.

Мнозина смятат, че физиката води своето начало от опита, проведен от Галилей преди 350 г., а самият Галилей за първия физик. До това време изучаването на движението било чисто философско и се основавало на доводи, които са били плод на фантазията. Болшинството от тия доводи са били измислени от Аристотел и други гръцки философи и са се разглеждали като „доказани". Но Галилей бил скептик и направил следния опит: той пускал топка по наведена равнина и наблюдавал нейното движение (фиг. 5. 1.). Галилей не гледал просто как се търкаля топката, а измервал *това разстояние,* което изминавала топката, и определял *времето,* в течение на което топката изминавала това разстояние. Начинът за измерване на разстоянието бил добре известен дълго преди Галилей, обаче точен начин за мерене на времето, особено на кратки интервали — нямало. Въпреки че впоследствие Галилей изобретил по-съвършен часовник (съвсем не приличащ на сегашните), то в своите първи опити за отчитане на равни интервали от време той използувал собствения си пулс. Нека да направим същото.

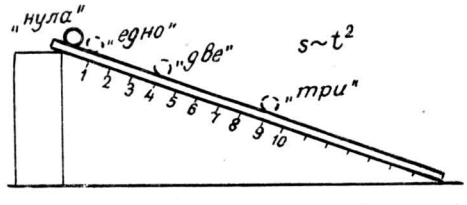
Ще отчитаме ударите на пулса по времето, докато топката се търкаля надолу: „Едно ... две ... три ... четири ... пет ... шест ... седем ... осем ..." Нека някой да отбелязва положението на топката при всяко броене. Сега може да се измери *разстоянието,* което топката е изминала за един, два, три и т. н. равни интервала от време. Галилей формулирал резултатите от своите наблюдения по следния начин: ако отбелязваме положението на топката през 1, 2, 3, 4, ... единици време от началото на движението, то ще се окаже, че тези знаци са отдалечени от началното положение пропорционално на числата 1, 4, 9, 16, ... Сега ние бихме казали, че разстоянието е пропорционално на квадрата на времето:

$$s \sim t^2.$$

По такъв начин изучаването на процеса на движението (основите на съвременната физика) започва с въпросите: къде и кога?

2. Време

Отначало да определим какво разбираме под думата време *Какво е това?* Не би било лошо да се намери подходящо определение за понятието „време". В тълковния речник на Вебстер например „времето" се определя като „период", а самият „период" — като „време". Обаче малка е ползата от такова определение. Но и в определението: „време е това, което се мени, когато повече нищо не се изменя", няма по-голям смисъл. Може би трябва да се признае фактът, че времето е едно от понятията, които е невъзможно да се определят, и просто да се каже, че



Фиг. 5.1. Топчето се търкаля по наведената равнина

това е нещо, известно за нас: което отделя две последователни събития!

Работата обаче не е в това как да дадем *определение* на понятието „време“, а в това как да го измерим. Един от начините за измерване на времето е да се използува нещо редовно повтарящо се, нещо *периодично*. Например денят. изглежда, че дните следват равномерно един след друг. Но като поразмислиш малко, се сблъскваш с въпроса: периодически ли са те? Всички дни ли имат еднаква дължина? Създава се впечатлението, че летните дни са по-дълги от зимните. Впрочем, някои зимни дни изглеждат ужасно дълги, особено ако са скучни. Обикновено за тях казват: „Ужасно дълъг ден!“

Всички дни обаче изглеждат средно еднакви. Може ли да се провери дали действително те са еднакви и от един ден до друг, макар и средно, протича ли едно и също време? За това е необходимо да се проведе сравнение с някакъв друг периодичен процес. Нека да видим как може да се проведе такова сравнение например с помощта на пясъчния часовник. С помощта на такъв часовник ние можем да създадем периодичен процес, ако стоим край него ден и нощ и го обръщаме всеки път, когато се изсипят последните песъчинки.

Ако след това изчислим броя на преобръщанията на пясъчния часовник от всяка сутрин до следващата, то може да се открие, че броят на „часовете (т. е. броят на преобръщанията) в различните дни е различен. Кой е виновен за това? Може би Слънцето? Може би часовникът? А може и едното, и другото? След известни разсъждения може да се дойде до мисълта, че трябва да се броят „часовете“ не от утро до утро, а от полуден до полуден (полуден — това, разбира се, не е 12^{00} часа, а моментът, когато Слънцето се намира в най-високото си положение). Но този път се оказва, че във всички денонощия броят на „часовете“ е еднакъв.

Сега може да се твърди, че „часът“ и „денонощието“ имат равномерна периодичност, т. е. отбелязват последователни равни интервали от време, въпреки че *не сме доказали,* че всеки от процесите е действително периодичен. Могат да ни попитат: а ако изведнаж се появи някое всемогъщо същество, което забавя протичането на пясъка през нощта и го ускорява през деня? Нашият експеримент, разбира се, не може да даде отговор на такъв вид въпроси. Очевидно е само това, че периодичността на единия процес се съгласува с периодичността на другия. Затова *при определяне* на понятието „време“ ние просто ще изхождаме от повторението на някои очевидно периодични събития.

3. Малки времена

Да забележим, че в процеса на проверката на „възпроизводимостта“ на дните ние сме намерили метод за измерване на *части* от деня, т. е. метод за измерване на по-малки промеждутъци от време. Не можем ли да продължим този процес и да се научим да измерваме още по-малки промеждутъци от време?

Галилей предположил, че всяко махало се отклонява и връща назад за равни интервали от време (ако отклоненията не са големи). Сравнението на броя на отклоненията на махалото с „часа“ показва, че това е действително така. По такъв начин могат да се измерят части от „часа“. Ако за определянето броя на люлеенията на махалото употребим механичен брояч, то ние ще получим часовника с махало на нашите деди.

Да се уговорим сега, че ако махалото се залюлее 3600 пъти в един час (и ако в денонощието има 24 часа), периодът на люлеенето на такова махало ще наречем „секунда“. И така, нашата първоначална единица „денонощие“ ние разделихме приблизително на 10^5 части. Като се използува този принцип на сравнение, може да се раздели и секундата на все по-малки и по-малки части. Оказва се, че за това е по-удобно да се изпол-

зува не просто механично, а *електрическо* махало, наречено осцилатор, чийто период на люлеене може да бъде твърде малък. В такива електронни осцилатори ролята на махало изпълнява електрическият ток, който тече ту в една, ту в друга посока.

Нека да си представим цял ред такива осцилатори и че периодът на люлеенето на всеки следващ е десет пъти по-малък от този на предишния. Това може да се провери по пътя на простото преброяване броя на трептенията на следващия осцилатор за едно трептене на предишния; само че сега това преброяване е трудно да се направи без устройство, което разширява възможността за наблюдения, своеобразен „микроскоп за време". Като такова устройство може да служи електронно-лъчев осцилограф, на чийто светещ екран се построява графика на зависимостта на електрическия ток (или напрежението) от времето.

Като съединим отначало осцилографа с единия осцилатор, а след това с другия, ние ще получим на екрана графиката на зависимостта на тока от времето в единия и другия осцилатор (фиг. 5. 2.). А сега не е трудно да се пресметне какъв брой периоди на „бързия" осцилатор се поместват в един период на „бавния".

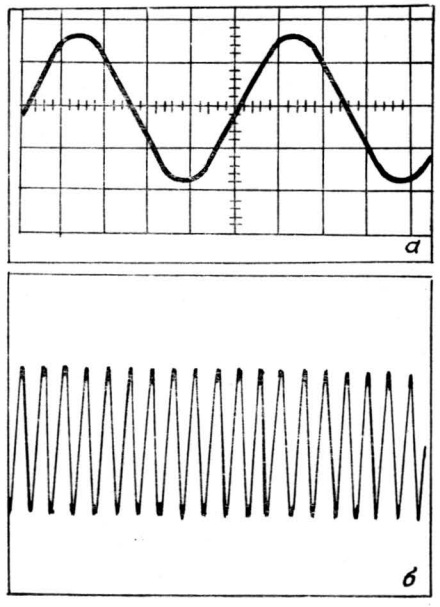
Съвременната електроника позволява да се създадат осцилатори с периоди 10^{-12} s, които се проверяват (калибрират) по метода на сравняване, подобен на гореописания, със стандартната единица за време — секундата. В последните няколко години във връзка с изобретяването и усъвършенстването на „лазера" или усилвателя на светлината, се появи възможност да се направят осцилатори с още по-къс период. Засега още е невъзможно те да се калибрират по същия начин, обаче несъмнено е, че и това скоро ще бъде постигнато.

Могат да се измерят промеждутъци от време, много по-малки от 10^{-12} s, но затова се използуват съвършено други методи. В същност се използува друго *определение* на понятието „време".Един от тези методи — това е измерването на *разстоянието* между две събития, протичащи върху движещ се обект. Например нека в движещ се автомобил отначало включват, а после изключват фаровете. Ако е известно *къде* са били включени и изключени фаровете и каква е била скоростта на автомобила, може да се изчисли колко време те са горели. За това е необходимо *разстоянието,* в протежение на което са горели фаровете, да се раздели на скоростта на автомобила.

Именно по такъв начин през последните години се измерваше времето на живот на π^0-мезона. При наблюдение под микроскоп на най-малките следи, оставени във фотоемулсията, в която се е родил π^0-мезонът, било открито следното: π^0-мезонът, като се движи със скорост, близка до скоростта на светлината, преди да се разпадне, преминава средно едно разстояние около 10^{-7} m. По такъв начин времето на живот на π^0-мезона съставлява всичко 10^{-16} s! Необходимо е да се подчертае, че тук беше използувано малко по-друго определение за понятието „време", но доколкото то не води към каквито и да е противоречия, можем да бъдем уверени в това, че тези определения са в достатъчна степен еквивалентни едно на друго.

Развивайки техниката на експеримента и ако е необходимо, като изменяме понятието „време", може да се открият и още по-бързи физически процеси. Ние например можем да говорим за период на вибрациите на ядрото или за времето на живот на неотдавна откритите „странни резонанси" (частици), които вече споменахме в гл. 2. Времето на живот на тези частици е само малко по-голямо от 10^{-24} s! Приблизително толкова време трябва на светлината (която има най-голяма скорост на разпространение), за да измине разстояние, равно на диаметъра на ядрото на водорода (най-малкият от известните обекти).

Какво може да се каже за още по-малките интервали от време? Има ли смисъл въобще да се говори за тях, ако е невъзможно не само да се измерят, но даже и разумно да се съди за процесите, протичащи в толкова кратки интервали? Възможно е да ня-



Фиг. 5.2. Две осцилограми, заснети от екрана на осцилографа
а — от осцилограф, свързан с един осцилатор; б — от осцилограф, свързан към осцилатор, чийто период на колебания е десет пъти по-малък от първия

ма. Това е един от тези въпроси, на които няма отговор. Може би на някой от вас ще му се усмихне щастието да отговори на него в близките 20—30 години.

4. Големи времена

Да разгледаме сега промеждутъците от време, по-големи от денонощието. Лесно е да се измерват големите времена: просто е нужно да броим дните, докато не измислим нещо по-добро. Първото, с което ние се сблъскваме, това е годината — втората естествена периодичност, състояща се приблизително от 365 дни. Интересно е, че в природата съществуват естествени броячи на годините във вид на годишните пръстени на дърветата или отлаганията на речния нанос. В някои случаи тези естествени броячи могат да се използуват за определяне времето, отделящо ни от някакво далечно събитие в миналото.

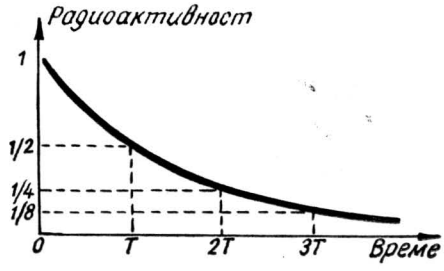
Но когато е невъзможно да се преброят годините за твърде големи отрязъци от времето, необходимо е да се търсят някакви други способи за измерване. Един от най-ефективните методи е използуването на радиоактивно вещество в качеството на „часовник". Тук ние се сблъскваме с „равномерност" от друг вид, различна например от случая при махалото. Радиоактивността на което и да е вещество за последователни равни *интервали* от време се изменя един и същ брой пъти. Ако се начертае графика на зависимостта на радиоактивността от времето, ние ще получим крива от типа на изобразената на фиг. 5.3. Ние виждаме, че ако радиоактивността за T дни (периода на полуразпада) се намалява два пъти, за $2T$ дни тя ще се намали 4 пъти и т. н. Произволен интервал от време t съдържа t/T „периоди на полуразпадане" и следователно количеството на началното вещество ще се намали $2^{t/T}$ пъти.

Ако ние знаем, че някакъв материал, например дърво, при своето образуване е съдържал някакво количество A от радиоактивното вещество, а преките измервания показват, че сега той съдържа количество B, възрастта на този материал може да се изчисли просто, като се реши уравнението

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T} = \frac{B}{A}.$$

Такива случаи, когато ние знаем първоначалното количество на радиоактивното вещество, за щастие съществуват. Известно е например, че въглеродният двуокис във въздуха съдържа малка част радиоактивен изотоп C^{14}, чийто период на полуразпадане е 5000 год. Благодарение на действието на космическите лъчи неговото количество постоянно се попълва в замяна на разпадналото се. Ако ние измерим *пълното* съдържание на въглерода в някакъв предмет и знаем, че определена част от този въглерод е била първоначално радиоактивният C^{14}, на нас ни е известно и първоначалното количество A и можем да използуваме приведената по-горе формула. Ако по пътя на точни измервания е установено, че на останалото количество C^{14} съответствуват 20 периода на полуразпадане, може да се каже, че този органически предмет е живял приблизително преди 100 000 години.

Би ни се искало обаче да узнаем възрастта на още по-древни неща. Това може да се направи, като се измери съдържанието на другите радиоактивни елементи с големи периоди на полуразпадане. Например уранът има изотоп с период на полуразпадане около 10^9 години, така че ако някакъв материал при своето образуване преди 10^9 години е съдържал уран, днес от него е останало само половината от първоначалното количество. При своето разпадане уранът се превръща в олово. Как да се определи възрастта на скала, която се е образувала преди много-много години в резултат на някакъв химически процес? Оловото се отличава от урана по своите химически свойства, затова първоначално те са вли-



Фиг. 5.3. Намаление на радиоактивността с времето

Радиоактивността пада два пъти за всеки период на полуразпад T

зали в различни видове скали. Ако се вземе такъв вид скала, която отначало трябва да е съдържала само уран, ние ще открием в него известно количество олово. Сравнявайки частите на оловото и урана, може да се определи тази част от урана, която в резултат на разпадане се е превърнала в олово. По този начин е било установено, че възрастта на някои скали е няколко милиарда години. Прилагайки по-широко този метод на сравняване на съдържанието на уран и олово не само в някои скали, но и във водата на океаните, а след това усреднявайки всички данни по цялото земно кълбо, са установили, че нашата планета е навършила приблизително 5,5 милиарда години.

Интересно е, че възрастта на метеоритите, падащи на Земята, изчислена по урановия метод, съвпада с възрастта на самата Земя. Още повече, оказа се, че и метеоритите, и скалите на Земята са съставени от един и същ материал, затова съществува мнението, че Земята се е образувала от скалните маси, „плуващи“ някога в „околослънчевото“ пространство.

Някога, във времена по-стари и от самата Земя (т. е. преди 5 милиарда години), е започнала своята история Вселената. Сега се смята, че възрастта поне на нашата част на Вселената е около 10 — 12 милиарда години. На нас не ни е известно какво е било дотогава. Всъщност отново може да се запита: „А има ли смисъл да се говори за това, какво е било дотогава, И има ли смисъл самото понятие „време“ преди „раждането“ на Вселената?“

5. Единици и еталони за време

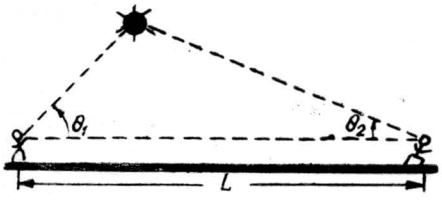
Ние вече казахме, че е удобно да се брои времето в някакви стандартни единици, например в дни или секунди, и да се измерва продължителността в количества на тази единица или на нейните части. Но какво да се избере за основна стандартна единица? Може ли например да се вземе за изходна единица човешкият пулс? Очевидно не. Тази единица е много непостоянна. По-добре стои работата с часовете. Два часовника се съгласуват много по-добре, отколкото пулсът. Вие ще кажете: „Добре, нека да вземем часовник“. Но чий? Съществува легенда за едно швейцарско момче, на което се искало всички часовници в неговия град да показват 12 часа в едно и също време. То ходело из града и доказвало на всички колко важно е това. Всеки смятал, че действително би било чудесно, ако всички други часовници в града показват 12 часа по *неговия* часовник! Всъщност много трудно е да се реши чий часовник трябва да изберем в качеството на еталон. За щастие съществува часовник, признат от всички — това е нашата Земя. Дълго време в качеството на еталон се избираше периодът на въртене на Земята. Обаче колкото измерванията ставаха по-точни, откриваше се, че въртенето на Земята не е строго периодично, ако го сравним с най-добрите часовници. А на тези „най-добри часовници“ може да се доверим, ако те се съгласуват един с друг. Сега е известно, че по различни причини едни дни се оказват по-дълги от други и освен това средният период на въртенето на Земята в продължение на столетия малко се удължава.

Доскоро не беше намерено нищо по-точно от въртенето на Земята и затова всички часовници се сверяваха по дължината на астрономическите денонощия, а секундата се определяше като 1/86 400 част от средното денонощие. Обаче сега ние се научихме да работим с някои естествени осцилатори, които са по-точни еталони за време, отколкото въртенето на Земята. Това са така наречените „атомни часовници“. Те са основани на колебанията на атомите, чийто период е нечувствителен към температурата и другите външни въздействия. Тези часовници позволяват да се измерва времето с точност, по-добра от $10^{-7}\%$. През последните две години професорът от Харвардския университет Норман Рамзей проектира и построи подобрен атомен часовник, използуващ колебанията на атомите на водорода. Той смята, че този часовник може да бъде още сто пъти по-точен. Сега се провеж-

дат измервания, които ще покажат доколко той е прав.

А доколкото се оказа възможно да се създаде часовник, много по-точен от астрономическия, учените се договарят да определят единицата за време с помощта на новите еталони — атомните часовници[1].

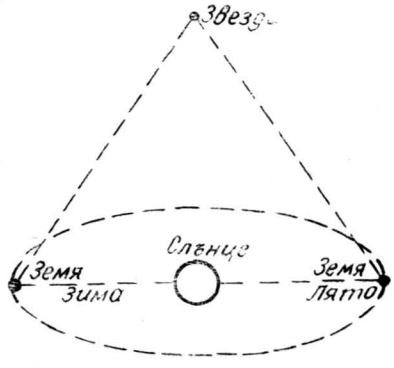
6. Големи разстояния



Фиг. 5.4 Определяне височината на изкуствен спътник по метода на циркулацията

Да се върнем сега към въпроса за *разстоянието*. Колко далече от нас стоят обкръжаващите ни предмети и колко са големи те? На всички е известно, че за измерване на разстоянието е нужно да се вземе някаква единица за дължина и да се преброи колко от тези единици се поместват в дадения отрязък. Но как да измерим тези предмети, които са по-малки от единицата за дължина? Как да разделим избраната единица дължина? Ами точно така, както и времето: взимаме по-малка единица и пресмятаме колко такива единици се събират в по-голямата. По такъв начин ние можем да измерим все по-малки и по-малки дължини.

Обаче под разстояние ние не разбираме само това, което може да се измери с метър. Как например да се измери с метър разстоянието между върховете на две планини? Тук на помощ вече идва друг метод за измерване на разстоянията — триангулацията. Въпреки че това означава използуването на друго определение за понятието „разстояние", в тези случаи, когато е възможно прилагането на двата метода, те дават еднакъв резултат. Пространството все пак повече или по-малко съответствува на Евклидовите представи, затова двете определения са еквивалентни. Е, а щом те се съгласуват на Земята, ние сме по-уверени и в законността на прилагането на триангулацията и за големи разстояния. По този начин е била измерена например височината на първия спътник (фиг. 5.4). Тя се оказала приблизително равна на 5.10^5 m. При по-голяма взискателност към измерванията по същия метод се определяше и разстоянието до Луната. Направленията на два телескопа (в различни точки на Земята) дават необходимите два ъгъла. Оказа се, че Луната е отдалечена от нас на разстояние 4.10^8 m. Обаче невъзможно е да се проведат такива измервания за Слънцето, най-малко на никой досега не се е удало. Работата е в това, че точността, с която може да се фокусира телескоп в дадена точка на Слънцето и с която могат да се измерят ъглите, не е достатъчна за изчисляване на разстоянието до Слънцето. Как все пак да се определи то? Необходимо е някак-си да се разшири принципът на триангулацията. Астрономическите наблюдения позволяват да се измери *относителното* разстояние между планетите и Слънцето и да се определи тяхното относително разположение. По такъв начин ние получаваме плана на слънчевата система в неизвестен мащаб. За да се определи мащабът, се изисква само абсолютното разстояние, което е било намерено по много различни начини. Един от начините, смятан до последно време за най-точен, се състои в определянето на разстоянието от Земята до Ерос — малка планета, която от време на време минава недалеч от Земята. С помощта на триангулацията може да се определи разстоянието до този малък обект и да се получи необходимият мащаб. Като знаем относителните разстояния, можем да определим например всички абсолютни разстояния от Земята до Слънцето или до планетата Плутон.



Фиг. 5.5. Определяне разстоянието до най-близката звезда по метода на триангулацията
В качеството на база се използува диаметъра на орбитата на Земята

Постигнати са големи успехи в определянето мащаба на слънчевата система. В лабораторията за ракетни двигатели с помощта на пряка радиолокационна връзка бяха проведени много точни измервания на разстоянието от Земята до Венера. Тук ние имаме работа с още едно определение на понятието „разстояние". На нас ни е известна скоростта на разпрост-

[1] Учените се договориха за това в края на 1964 г., когато се е готвело руското издание на тази книга. Бел. на руската редакция.

ранение на светлината (значи и скоростта на разпространение на радиовълните) и ние предполагаме, че тази скорост е постоянна по цялото протежение между Земята и Венера. Изпращайки радиовълна по посока към Венера, ние определяме времето до пристигането на обратно отразената вълна. А като знаем *времето* и *скоростта*, ние получаваме *разстоянието*.

А как да измерим разстоянието до още по-отдалечени обекти, например до звездите? За щастие тук отново можем да се върнем към нашия метод на триангулацията, понеже движението на Земята около Слънцето позволява да се измери разстоянието до обекти, намиращи се извън слънчевата система. Ако насочим телескопа към някоя звезда веднаж през зимата, а друг път през лятото (фиг. 5.5), може да се надяваме достатъчно точно да измерим ъглите и да определим разстоянието до тази звезда.

Но какво да се прави, ако звездата се намира толкова далече от нас, че е вече невъзможно да се ползуваме от метода на триангулацията? Астрономите винаги изобретяват все нови и нови способи за определяне на разстоянието. Така те се научиха да определят размера и яркостта на звездите по техния цвят. Оказа се, че цветът и истинската яркост на много от близкостоящите звезди, разстоянието до които се определяше по метода на триангулацията, в болшинството случаи са свързани помежду си в правилна зависимост. Ако сега се измери цветът на отдалечена звезда, по тази зависимост може да се определи нейната истинска яркост, а като се измери *видимата яркост* на звездата (по-вярно по това, доколко *мътна* ни се вижда звездата), може да се изчисли разстоянието до нея. (За дадена истинска яркост видимата яркост се намалява както квадрата на разстоянието.) Правилността на този метод намери неочаквано потвърждение в резултатите на измерванията, проведени за група звезди, известни под името „кълбовидно струпване". Фотографията на тази група звезди е дадена на фиг. 5.6. Достатъчно е да се погледне фотографията, за да се убедим, че всички тези звезди са разположени на едно място. Същият резултат се получава и с помощта на метода на сравнение на цвета и яркостта.

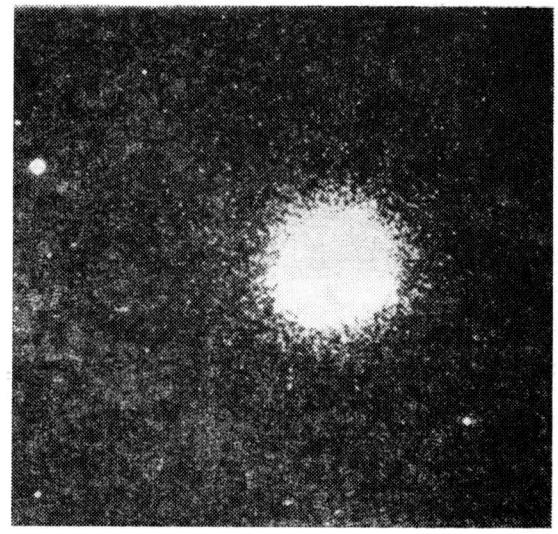
Изучаването на много кълбовидни струпвания дава още една важна информация. Оказа се, че съществува участък от небето с голяма концентрация на такива кълбовидни струпвания, при това болшинството от тях се намират на едно и също разстояние от нас. Като сравним тези данни с някои други, ние идваме до заключението, че тези натрупвания са център на нашата Галактика. По такъв начин ние определяме, че разстоянието до центъра на Галактиката е приблизително 10^{20} m.

Данните за размера на нашата Галактика дават ключа към определянето на още по-големите разстояния между галактиките. На фиг. 5.7 е дадена фотографията на галактика, която по форма много прилича на нашата галактика. Възможно е и размерът ѝ да е същият. (Има още редица съображения, съгласно които размерите на всички галактики са приблизително еднакви.) Ако това е така, може да се узнае и разстоянието до нея. Ние измерваме ъгловия размер на галактиката (т. е. ъгъла който тя заема на небосвода), знаем нейния диаметър, а значи, можем да изчислим и разстоянието. Отново триангулация!

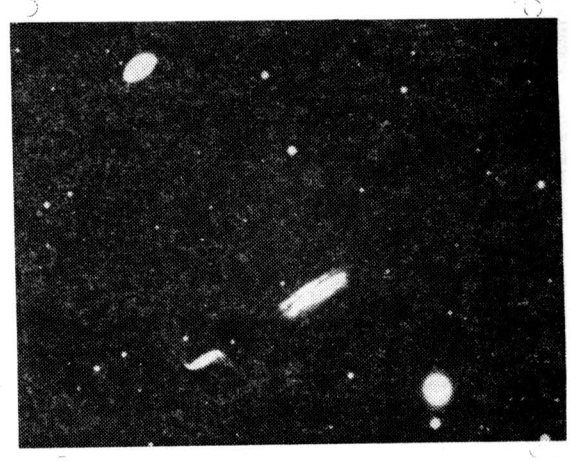
Неотдавна с помощта на гигантския паломарски телескоп бяха получени фотографии на неимоверно далечни галактики. Една от тези фотографии е дадена на фиг. 5.8. Сега предполагат, че разстоянието до някои от тях е равно приблизително на половината от размера на Вселената (10^{26} m) — най-голямото разстояние, което можем да си представим!

7. Малки разстояния

Да се обърнем сега към малките разстояния. Да се раздели метърът е просто. Без особени трудности може да го разделим на хиляда равни части. По такъв начин, макар и малко по-сложно

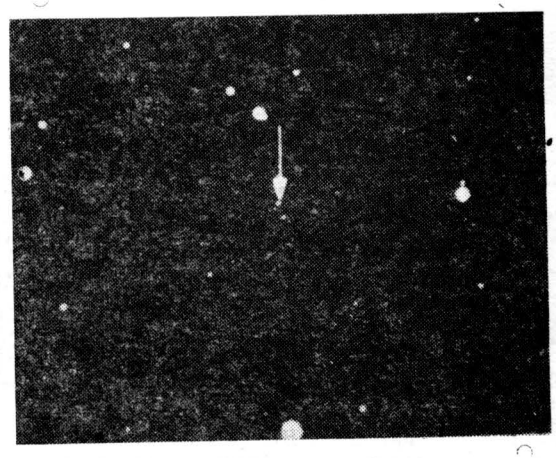


Фиг. 5.6. Струпване на звездите близо до центъра на нашата Галактика, отдалечено от нас на разстояние 30 000 светлинни години или около $3 \cdot 10^{20}$ m

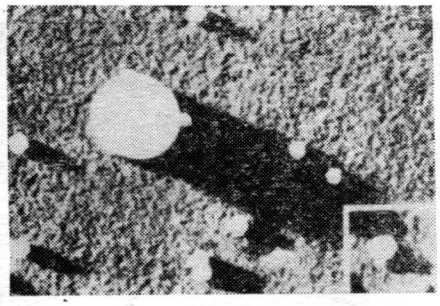


Фиг. 5.7. Спирална Галактика, подобна на нашата

Ако предположим, че диаметърът на тази Галактика е равен на диаметъра на нашата Галактика, то, като излезем от нейните видими размери, може да се пресметне разстоянието — то се оказва равно на 30 милиона светлинни години (3.10^{23} m)



Фиг. 5.8. Най-отдалечения от нас обект 3 *C* 295 в съзвездието Воловар (показан със стрелка), който е измерен през 1960 година с помощта на 200-дюймов телескоп



Фиг. 5.9. Фотография на вируси, получена с помощта на електронен микроскоп

Вижда се „голяма сфера, показана за сравнение: нейният диаметър е равен на 2.10^{-7}m, или 2000Å

(като се използува добър микроскоп), може да се раздели милметърът на хиляда части и да се получи микрон (милионна част от метъра). Трудно става обаче да се продължава това деление, понеже е невъзможно да се „видят“ обекти, по-малки от дължината на вълната на видимата светлина (около 5.10^{-7} m).

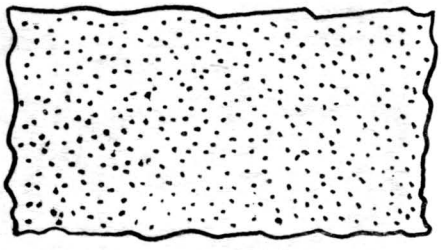
Все пак, ние не спираме до това, което е недостъпно за окото. С помощта на електронния микроскоп могат да се получат фотографии, помагащи да се видят и измерят още по-малки обекти — чак до 10^{-8} m (фиг. 5.9). А с помощта на косвени измервания (особена триангулация в микроскопически мащаб) може да се измерват все по-малки и по-малки обекти. Отначало от наблюдението на отражението на светлина с малка дължина на вълната (рентгенови лъчи) от обект с нанесени на него на известни разстояния знаци се измерва дължината на вълната на светлината. След това по картината на разсейването на същата светлина от кристал може да се определи относителното разположение на атомите в него, при което резултатът се съгласува добре с данните за разположението на атомите, получени по химически път. По такъв начин се определя диаметърът на атомите (около 10^{-10} m).

По-нататък в скалата на разстоянията има достатъчно голяма, незапълнена „празнина“ между атомните размери 10^{-10} m и 10^5 пъти по-малките размери на ядрата (около 10^{-15} m). За определянето на ядрените размери се прилагат вече съвършено други методи: измерва се *видимата площ* σ или така наречената *ефективно напречно сечение*. Ако искаме да определим радиуса, ще използуваме формулата $\sigma=\pi r^2$, доколкото ядрата могат да се разглеждат приблизително като сферични.

Ефективните сечения на ядрата могат да се определят, като се пусне поток от частици с висока енергия през тънка пластинка вещество и се измери броят на частиците, които не са преминали през нея. Тези високоенергетични частици се промъкват през лекото облаче от електрони, но при попадане в тежко ядро се спират или се отклоняват. Да предположим, че имаме пластинка с дебелина 1 cm. В такава дебелина се побират приблизително 10^8 атомни слоя. Обаче ядрата са толкова малки, че вероятността едно ядро да засенчи друго е твърде незначителна. Може да си представим, че високоенергетичната частица, попадаща върху пластинка въглерод с дебелина 1 cm, „вижда“ приблизително това, което в силно увеличен мащаб е показано на фиг. 5.10.

Вероятността за това, че много малка частица ще се сблъска с ядрото, е равна на отношението на площта, заета от ядрата (черни точки), към общата площ на картината. Нека над област с площ A да се намират по цялата дебелина N атоми (разбира се, всеки с едно ядро). Тогава частта от площта, закрита от ядрата, ще бъде $N\sigma/A$. Нека сега броят на частиците в нашия поток пред пластинката да бъде равен на n_1, а след нея равен на n_2; тогава частта от частиците, *не* преминали през пластинката, ще бъде $(n_1-n_2)/n_1$, което трябва да бъде равно на частта от площта, заета от ядрата. Радиусът на ядрата се пресмята от равенството[1]

$$\pi r^2=\sigma=\frac{A}{N}\,\frac{n_1-n_2}{n_1}.$$



Фиг. 5.10. Въображаема пластинка от въглерод с дебелина 1 cm при голямо увеличение (ако биха се виждали само ядрата на атомите)

От такива експерименти ние намираме, че радиусите на ядрата лежат в границите от $1\,.\,10^{-15}$ до $6\,.\,10^{-15}$ m. Между другото единицата за дължина 10^{-15} m се нарича ферми в чест на Енрико Ферми (1901 — 1958).

Какво може да се очаква в областта на още по-малките разстояния? Може ли да се измерват? На този въпрос още няма отговор. Може би именно тук, в някакво изменение на понятието

[1] Това равенство е правилно само тогава, когато площта, заемана от ядрата, представлява малка част от общата площ, т. е. $(n_1-n_2)/n_1$ е много по-малко от единица. В противен случай е необходимо да се отчита поправката за частичното „засенчване“ на едно ядро от друго.

за пространството или измерването на малки разстояния, се крие разгадаването на тайната на ядрените сили.

Няколко думи за еталона за дължина. Разумно е в качеството на еталон да се използува някаква единица за дължина, например радиусът на Земята или някаква негова част. Именно по такъв начин е възникнал метърът. Първоначално той се определя като $(\pi/2) \cdot 10^{-7}$ част от радиуса на Земята. Обаче такова определение не трябва да се смята нито особено точно, нито удобно. Затова в продължение на дълго време по международно съглашение в качеството на еталон за метъра се приемаше дължината между два белега, направени на особен прът, който се пази в специална лаборатория във Франция. Много по-късно разбраха, че и такова определение на метъра не е така точно, както е необходимо, и не е така универсално и постоянно, както би ни се искало. Затова сега е приет нов стандарт за дължината — някакъв предварително установен брой дължини на вълни на определена спектрална линия.

■ ■ ■

Резултатите от измерванията на разстоянията и времето зависят от наблюдателя. Двама наблюдатели, движещи се един спрямо друг, измервайки един и същи предмет или времетраенето на един и същи процес, получават различни стойности, макар да изглежда, че са мерили едно и също. Разстоянията и интервалите от време в зависимост от координатната система (т. е. от системата на отчитане), в която се провеждат измерванията, имат различна големина. В следващите глави ние ще разгледаме по-подробно този въпрос.

Законите на природата не позволяват да се направят абсолютно точни измервания на разстоянията или интервалите от време. Ние вече споменахме по-рано, че грешката в определянето на положението на предмета не може да бъде по-малка, отколкото

$$\Delta x = \frac{h}{\Delta p},$$

където h е малка величина, наречена „константа на Планк“, а Δp е грешката в измерването на импулса (масата, умножена по скоростта) на този предмет. Както вече се каза, тази неопределеност в измерването на положението е свързана с вълновата природа на частиците.

Относителността на пространството и времето води до това, че измерванията на интервалите от време също не могат да бъдат по-точни, отколкото

$$\Delta t = \frac{h}{\Delta E},$$

където ΔE е грешката на измерването на енергията на този процес, от чиято продължителност ние се интересуваме. За да знаем *по-точно кога* нещо е станало, ние сме принудени да се задоволим с това, че ще знаем по-малко *какво именно* е станало, защото нашите знания за енергията, участвуваща в процеса, ще бъдат по-малко точни. Тази неопределеност на времето, така както и неопределеността на положението, е свързана с вълновата природа на веществото.

6
Вероятност

Истинската логика на нашия свят — това е пресмятането на вероятностите.
Джеймс Кларк Максвел

1. Вероятност и правдоподобност
2. Флуктуации
3. Случайни блуждения
4. Разпределение на вероятностите
5. Принцип на неопределеността

1 Вероятност и правдоподобност

„Вероятност“ или „шанс“ — тази дума вие слушате почти ежедневно. Ето по радиото предават прогнозата за времето за утре: „Вероятно ще вали дъжд.“ Вие можете да кажете: „Аз имам малко шансове да доживея до сто години“. Учените също често употребяват тези думи. Сеизмологът се интересува от въпроса каква е вероятността, че идущата година в Южна Калифорния ще стане земетресение с еди-каква си сила? Физикът може да попита с каква вероятност този Гайгеров брояч ще зарегистрира двадесет импулса през следващите десет секунди? Дипломатът или държавният деец се вълнуват от въпроса какви са шансовете на еди-кой си кандидат да бъде избран за президент? Е, а вас, разбира се, ви интересува има ли шансове да разберете нещо в тази глава?

Под вероятност ние разбираме нещо като предположение или догадка. Но защо и кога ние гадаем? Това се прави тогава, когато ние искаме да направим някакво заключение или извод, но нямаме достатъчно информация или знания, за да направим напълно определено заключение. Ето че се налага и да гадаем: може би — така, а може би — не е така, но повече прилича на това, че е именно така. Много често ние гадаем, когато е необходимо да вземем някакво решение, например: „Да си взема ли днес дъждобран, или не си струва?, „За каква сила на земетресението трябва да пресметна проектираното здание?“, „Трябва ли да правя по-надеждна защита?“, „Следва ли да си променя позицията на предстоящите международни преговори?“, „Да ида ли днес на лекции?“

Понякога ние правим догадки поради това, че искаме при ограничеността на своите знания да кажем колкото може *повече* за дадено положение. Всъщност нали всяко обобщение носи характер на догадка. Всяка физическа теория — това е своего рода догадка. Но догадките също биват различни: хубави и лоши, близки и далечни. На това, как да правим най-добрите догадки, ни учи теорията на вероятностите. Езикът на вероятностите ни позволява да говорим количествено за такива положения, когато изходът е много и много неопределен, но за който все пак нещо средно може да се каже.

Нека да разгледаме класическия пример с хвърлянето на монета. Ако монетата е „честна“, то ние не можем сигурно да знаем на коя страна ще падне тя. Обаче ние предчувствуваме, че при голям брой хвърляния броят на „ези“ и „тура“ трябва да бъде приблизително еднакъв. В такъв случай казват: вероятността за падането на „ези“ е петдесет на сто.

Ние можем да говорим за вероятността за изхода само на тези наблюдения, които смятаме да извършим в бъдещето. *Под вероятност на даден частен резултат от наблюдението се разбира очакваната от нас най-правдоподобна част на изходите с даден резултат при някакъв брой на повторение на наблюденията.* Представете си повтарящо се N пъти наблюдение, например хвърлянето на монета нагоре. Ако N_A е *нашата оценка* за най-правдоподобния брой на падания с резултат A, например падането на „тура“, под вероятност $P(A)$ на резултата A ние разбираме отношението

$$P(A) = \frac{N_A}{N} . \qquad (6.1)$$

Нашето определение изисква някои коментарии. Преди всичко ние говорим за вероятност на някакво събитие само в този случай, ако то представлява възможен резултат от изпитване, което може да се *повтаря*. Но съвсем не е ясно има ли смисъл такъв въпрос: каква е вероятността, че в този дом се е заселил дух?

Вие, разбира се, можете да възразите, че никоя ситуация не може *точно* да се повтори. Това е вярно. Всяко ново наблюдение трябва да стане поне в друго време или на друго място. По този повод аз мога да кажа само едно: необходимо е всяко „повторно" наблюдение да ни се *струва еквивалентно*. Ние трябва да предполагаме поне, че всеки нов резултат на наблюдението възниква от равностойните начални условия и от един и същ уровен на началните знания. Последното е особено важно. (Ако сте надникнали в картите на противника, разбира се, вашите прогнози за шансовете за победа ще бъдат съвсем други, отколкото ако бяхте играли честно!)

Искам да отбележа, че аз *не смятам* да разглеждам стойностите N и N_A в (6.1) само като резултат на някакви действителни наблюдения. Числото N_A — това е просто най-добрата *оценка* за това, какво *би могло* да стане при *въображаемите* наблюдения. Затова вероятността зависи от нашите знания и способности да бъдем пророци, всъщност от нашия здрав смисъл! За щастие здравият смисъл не е толкова субективен, както това изглежда на пръв поглед. Здрав смисъл притежават много хора и техните съждения за степента на правдоподобност на това или друго събитие в болшинството случаи съвпадат. Обаче вероятността все пак не е „абсолютно" число. Доколкото в известен смисъл тя зависи от степента на нашето невежество, дотолкова с изменението на нашите знания тя може да се мени.

Ще отбележа още една „субективна" страна на нашето определение за вероятност. Ние казахме, че N_A — това е „нашата оценка за най-вероятния брой случаи". При това, разбира се, ние не се надяваме, че броят на необходимите ни случаи ще бъде *точно* равен на N_A, но той трябва да бъде някъде *близо* до N_A; този брой е *по-вероятен* от всеки друг. Ако се подхвърли монетата нагоре 30 пъти, едва ли може да се очаква, че броят на падванията на „тура" ще бъде точно 15; по-скоро това ще бъде някое число около 15, може би 12, 13, 14, 15, 16 или 17. Обаче, ако е *необходимо* да се избере от тези числа едно число, ние бихме решили, че числото 15 е *най-правдоподобно*. Затова и пишем, че $P(\text{тура}) = 0{,}5$.

Но защо все пак числото 15 е най-правдоподобно в сравнение с всички останали? Може да се разсъждава по следния начин: ако най-вероятният брой на падванията на „тура" е $N_\text{Т}$, а пълният брой на подхвърлянията — N, то най-вероятният брой на падането на „ези" ще е равен на $N - N_\text{Т}$. (Нали се предполага, че при всяко подхвърляне трябва да се пада или само „ези", или „тура" и нищо повече!) Но ако монетата е „честна", няма основания да се мисли, че например броят на падванията на „ези" трябва да бъде по-голям от броя на падванията на „тура"? Така че, дотогава, докогато нямаме основанията се съмняваме в честността на хвърлящия, ние трябва да смятаме, че $N_\text{Е} = N_\text{Т}$, следователно $N_\text{Е} = N_\text{Т} = N/2$ или $P(\text{тура}) = P(\text{ези}) = 0{,}5$.

Нашите разсъждения могат да се обобщят за *всяка* ситуация, в която са възможни m различни, но „равностойни" (т. е. равновероятни) резултати на наблюдението. Ако наблюдението може да се приведе към m различни резултати и към нищо повече и ако нямаме основания да мислим, че един от резултатите е за предпочитане пред останалите, вероятността за всеки *частен* изход на наблюдението A ще бъде $1/m$, т. е. $P(A) = 1/m$.

Нека например в затворено чекмедже да се намират седем топки с различен цвят и напосоки, т. е. като не гледаме, да вземем една от тях. Вероятността че в ръката ни ще се окаже червена топка, е равна на $1/7$. Вероятността, че от колода от 36 карти ще извадим дама пика, е равна на $1/36$, съ-

щата както и при падането на две шестици при хвърлянето на два зара за игра.

■ ■ ■

В глава 5 ние определихме размера на ядрото с помощта на засенчената от него площ или така нареченото ефективно сечение. По същество ставаше дума за вероятностите. Ако „обстрелваме" с бързи частици тънка пластинка от вещество, има някаква вероятност те да преминат през нея, без да закачат ядрото, обаче има и известна вероятност да попаднат в ядрото. (Ядрата са толкова малки, че не можем да *ги видим*, не може следователно да се прицелим и „стрелбата" се води слепешката.) Ако в нашата пластинка има n атоми и ядрото на всеки от тях покрива площ σ, цялата площ, закрита от ядрата, ще бъде равна на $n\sigma$. При голямо число N случайни изстрели ние очакваме, че числото на попаденията N_C ще се отнася към *пълното* число изстрели така, както закритата от ядрата площ се отнася към цялата площ на пластинката:

$$\frac{N_C}{N}=\frac{n\sigma}{A}. \tag{6.2}$$

Затова може да се каже, че *вероятността* на попадението на всяка от изстреляните частици в ядрото при преминаването през пластинката ще бъде равна на

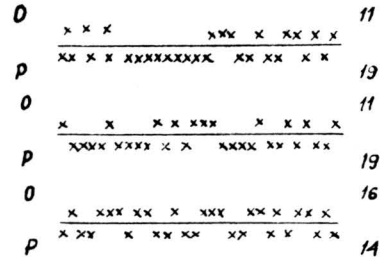
$$P_C=\frac{n}{A}\sigma, \tag{6.3}$$

където n/A е просто броят на атомите, които се падат на единица площ на пластинката.

2. Флуктуации

Сега бих искал да покажа малко по-подробно как може да се използува идеята за вероятността, за да се отговори на въпроса: колко падания „тура" би трябвало *да очаквам*, ако подхвърля монетата N пъти? Обаче, преди да отговорим на този въпрос, нека видим какво все пак ни дава този „експеримент". На фиг. 6.1 са показани резултатите, получени в първите три серии опити, във всяка от които са направени по 30 опита. Последователността на падането на „тура" и „ези" е показана в такъв ред, както са следвали. Първия път са получени 11 падания „тура", втория — също 11, в третия — 16. Може ли въз основа на това да се подозира, че монетата е била „нечестна?" Или, може би, ние се излъгахме, като приехме 15 за най-вероятното число на падане на „тура" във всяка серия от опити?

Да направим още 97 серии, т. е. 100 серии по 30 опита във всяка от тях. Резултатите от тях са приведени в табл. 6.1.[1]



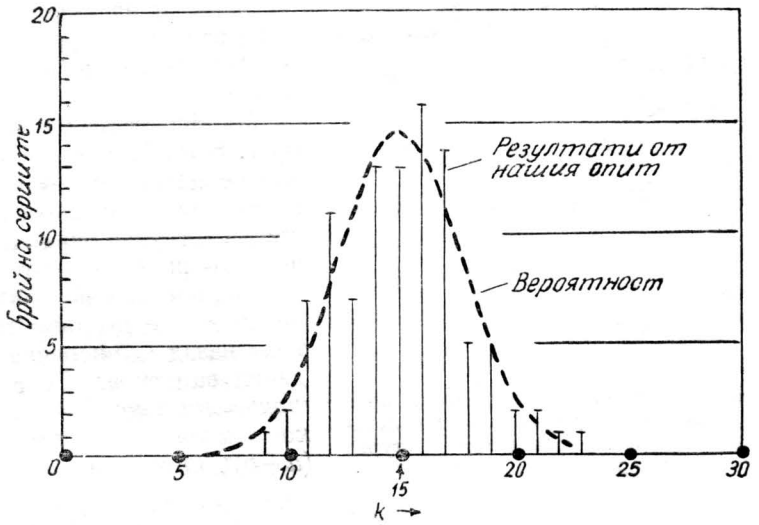
Фиг. 6.1. Последователност на падането на „тура" и „ези"

Три серии на опити с подхвърляне на монетата по 30 пъти във всяка серия.

Таблица 6.1. Число на попаденията на „тура". Проведени са няколко серии опити с 30 подхвърляния на монетата във всяка от тях

11	16	17	15	17	16	19	18	15	13
11	17	17	12	20	23	11	16	17	14
16	12	15	10	18	17	13	15	14	15
16	12	11	22	12	20	12	15	16	12
16	10	15	13	14	16	15	16	13	18
14	14	13	16	15	19	21	14	12	15
16	11	16	14	17	14	11	16	17	16
19	15	14	12	18	15	14	21	11	16
17	17	12	13	14	17	9	13	16	13

[1] Тези 97 експеримента бяха проведени по следния начин. Сандък, в който имаше 30 монети, беше разтърсван енергично, след това бяха преброявани паданията на „тура".



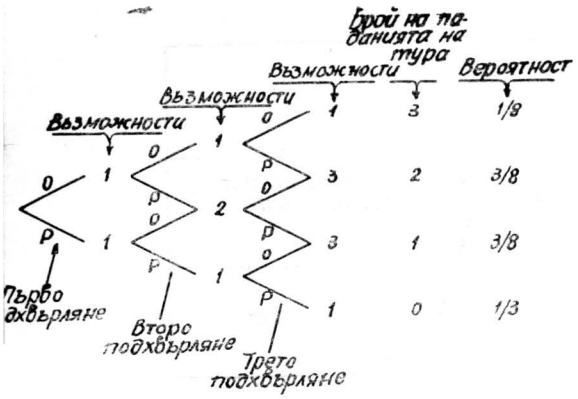
Фиг. 6.2. Справка за резултатите от 100 серии по 30 опита във всяка

Вертикалните линии показват броя на сериите, в които се е паднало k пъти „тура“. Пунктирната крива показва очаквания брой на сериите с падане k пъти на „тура“, получена от изчислението на вероятностите

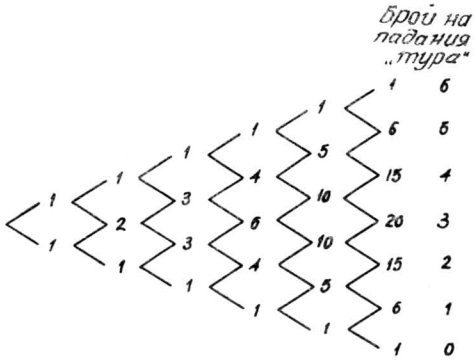
Погледнете числата, приведни в тази таблица. Виждате, че болшинството от резултатите са „близки“ до 15, така че почти всички са разположени между 12 и 18. За да се почувствуват по-добре тези резултати, ще нарисуваме графика на тяхното *разпределение*. Трябва да преброим броя на опитите, в които се получиха k падания на „тура“, и да поставим това число над k. В резултат ще получим фиг. 6.2. Действително в 13 серии бяха получени 15 падания на „тура“, същото число серии даде 14 падания на „тура“; 16 и 17 падания се получаваха *повече* от 13 пъти. Трябва ли да правим извод от това, че на монетите им е по-приятно да падат нагоре с „тура“? А може би ние сме сбъркали в избора си на числото 15 като най-правдоподобно? Може би е по-правдоподобно, че за 30 опита се получават 16 падания „тура“? Минутка търпение! Ако съберем резултатите от всички серии, общото число на опитите ще бъде 3000, а общото число на паданията на „тура“ в тези опити достига 1492, така че частта от опитите с падане на „тура“ ще бъде в крайна сметка 0,497. Това е съвсем близо до половината, но все пак *по-малко*. Не, ние *не можем* да предполагаме, че вероятността за падане на „тура“ е по-голяма от 0,5! Фактът, че в отделни опити „тура“ падаше по-често по 16 пъти, отколкото по 15, се явява просто *случайно* отклонение или *флуктуация*. Както преди ние очакваме, че *най-правдоподобното* число на падания трябва да бъде 15.

Може да попитате: а каква е вероятността, че в серия от 30 опита „тура“ ще се падне 15, 16 или някакво друго число пъти? Ще отговорим, че вероятността от падане на „тура“ в серия от *един* опит е равна на 0,5: съответно вероятността за непадане също е равна на 0,5. В серия от два опита са възможни *четири* изхода: *ТТ, ТЕ, ЕТ, ЕЕ*. Тъй като всеки от тях е равновероятен, може да се извадят следните заключения: а) вероятността за две падания на „тура“ е равна на 1/4; б) вероятността за едно падане на „тура“ е равна на 1/4; в) вероятността за непадане на „тура“ е равна на 1/4. Това е така, защото съществуват *две* възможности от четири равни да се получи едно падане на „тура“ и само една възможност — да се получат две падания или да не се получи нито едно.

Да разгледаме сега серия от три опита. Третият опит може да даде с равна вероятност или „тура“, или „ези“, затова съществува само един начин за получаване на три падания на „тура“; *трябва да получим* две падания „тура“ в първите два опита и в последния — пак падане „тура“. За получаването на две падания „тура“ има вече *три начина*: след две падания „тура“ може да се падне „ези“ и още два начина — след едно падане на „тура“ в първите два опита да се падне „тура“ в третия. Така че числото на равновероятните начини да се получат



Фиг. 6.3. Диаграма, илюстрираща броя на различните възможности за получаване на 0, 1, 2 и 3 падания на „тура“ в серия от три опита



Фиг. 6.4. Диаграма, подобна на изобразената на фиг. 6.3, за серия от шест опита

3, 2, 1 и 0 падания „тура“ ще бъде съответно равно на 1, 3, 3 и 1; пълното число на всички възможни начини е равно на 8. По такъв начин се получават следните вероятности: 1/8, 3/8, 3/8, 1/8.

Удобно е тези резултати да се запишат във вид на диаграма (фиг. 6.3). Ясно е, че тази диаграма може да бъде продължена, ако се интересуваме от по-голям брой опити. На фиг. 6.4 е приведена аналогична диаграма за шест опита. Числото на „начините“, съответстващи на всяка точка от диаграмата, това е просто числото на различните „пътища“ (т. е., по-просто казано, последователността на падане на тура“ и „ези“), чрез които може да се дойде до тази точка от началната, без да се връщаме при това назад, а височината на тази точка дава общото число падания на „тура.“ Този набор от числа е известен под названието *триъгълник на Паскал*, а самите числа се наричат *биномиални коефициенти*, тъй като се появяват при развиване на израза $(a+b)^n$. Обикновено тези числа се обозначават в нашата диаграма със символа $\binom{n}{k}$ или C_k^n (числото от съчетанията от n по k), където n е пълният брой на опитите, а k — броят на паданията на „тура“. Ще отбележа между другото, че биномиалните коефициенти могат да се изчислят по формулата.

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \tag{6.4}$$

където символът $n!$, наричан „n-факториел“, обозначава произведението на всички цели числа от 1 до n, т. е. $1.2.3\ldots(n-1).n$.

Сега вече всичко е готово, за да пресметнем с помощта на израза (6.1) вероятността $P\ (k, n)$ на падането k пъти на „тура“ в серията от n опити. Пълното число на всички възможности ще бъде 2^n (доколкото във всеки опит са възможни два изхода), а числото на равновероятните комбинации, в които попада „тура“, ще бъде $\binom{n}{k}$, така че

$$P\,(k, n)=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}. \tag{6.5}$$

Тъй като $P\ (k, n)$ е частта от онези серии опити, в които падането на „тура“ се очаква $к$ пъти, то от 100 серии падането k пъти „тура“ се очаква $100.P\ (k, n)$ пъти. Пунктираната крива на фиг. 6.2 е прокарана точно през точките на функцията $100\ P\ (k, 30)$. Както виждате, ние *очаквахме* да получим 15 падания на „тура“ в 14 или 15 серии опити, а получихме само в 13. Ние *очаквахме* да получим 16 падания на „тура“ в 13 или 14 серии опити, а получихме в 16. Но такива флуктуации са напълно допустими от „правилата на играта“.

Използуваният тук метод може да се приложи и в по-общи ситуации, където във всеки единичен опит са възможни само два изхода. Да ги означим с $П$ (печелещ) и $Г$ (губещ). Общо казано, вероятностите на $П$ и $Г$ във всеки отделен опит могат да бъдат различни. Нека p например бъде вероятност на резултата $П$. Тогава q (вероятност на резултата $Г$) трябва да бъде равна на $(1-p)$. В серията от n опити вероятността резултатът $П$ да се получи k пъти е равна на

$$P\,(k, n)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}. \tag{6.6}$$

Тази функция на вероятностите се нарича *биномиален закон на разпределението на вероятността.*

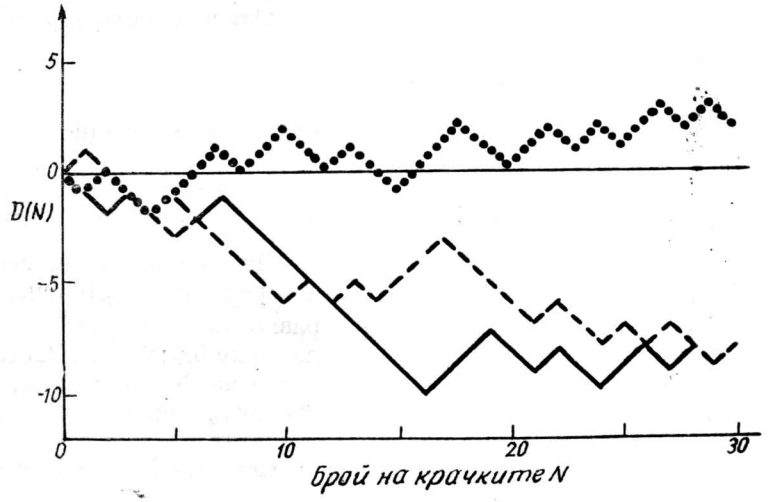
3. Случайни блуждаения

Съществува още една интересна задача, при чието решение не ще минем без понятие за вероятност. Това е проблемата за „случайните блуждаения". В най-простия вариант тази задача изглежда така. Представете си една игра, в която играчът, като започне от точката $x=0$, за всеки ход може да се придвижи *или* напред (до точката x), *или* назад (до точката $-x$) и при това решението накъде да се върви се взима съвсем *случайно*, например чрез подхвърляне на монета. Как да се опише резултатът от такова движение? В най-обща форма тази задача описва движението на атомите (или другите частици) в газа — така наричаното брауново движение — или образуването на грешки при измерванията. Ще видите колко тясно е свързана проблемата за „случайните блуждаения" с описания по-горе опит с подхвърлянето на монетата.

Преди всичко нека разгледаме няколко примера на случайни блуждаения. Можем да ги опишем като „чисто" придвижване D_N за N крачки. На фиг. 6.5 са показани три примера на пътища при случайно блуждаене. (При тяхното чертаене в качеството на случайна последователност на решението, къде да бъде направена следващата стъпка, са използувани резултатите от подхвърлянето на монетата, приведени във фиг. 6.1.)

Какво може да се каже за такова движение? Първо, можем да попитаме: колко далеч средно ще се придвижим? Трябва да се *очаква*, че средно придвижване въобще няма да има, тъй като ние с равна вероятност можем да вървим както напред, така и назад. Чувствува се обаче, че с увеличаването на N ние с все по-голяма вероятност можем да блуждаем някъде все по-далеч и по-далеч от началната точка. Затова възниква въпросът: какво е средното *абсолютно разстояние*, т. е. какво е средното значение на $|D|$? Впрочем по-удобно е да имаме работа не с $|D|$, а с D^2; тази величина е положителна както за положителното, така и за отрицателното движение и затова също може да служи като разумна *мярка* за такива случайни блуждаения.

Може да се покаже, че очакваната величина D_N^2 е равна просто на N — броя на направените крачки. Впрочем под „очаквана величина" разбираме най-вероятното значение (което е намерено по най-добрия начин), за което може да се мисли като за *очаквано* средно значение на *голямо число повтарящи* се процеси на блуждаене. Тази величина се означава като $\langle D_N^2 \rangle$ и се нарича при това „среден квадрат на разстоянието". След една крачка D^2 винаги е равно на $+1$, затова без съмнение $\langle D_1^2 \rangle = 1$ (За единица разстояние навсякъде ще избираме една крачка и затова понататък аз няма да пиша единица дължина.)



Фиг. 6.5. Три примера на случайно блуждаене

По хоризонталата е нанесен броят на стъпките N, по вертикалата — координатата $D(N)$, т.е. чистото разстояние от началната точка

Очакваната величина D_N^2 за $N>1$ може да се получи от D_{N-1}. Ако след $(N-1)$ крачки се окажем на разстояние D_{N-1}, то още една крачка ще даде *или* $D_N=D_{N-1}+1$ *или* $D_N=D_{N-1}-1$. Или за квадратите

$$D_N^2=\begin{cases} D_{N-1}^2+2D_{N-1}+1, \\ \text{или} \\ D_{N-1}^2-2D_{N-1}+1. \end{cases} \tag{6.7}$$

Ако процесът се повтаря голям брой пъти, можем да очакваме, че всяка от тези възможности се осъществява с вероятност $^1/_2$, така че средната очаквана величина ще бъде просто средно аритметично на тези значения, т. е. очакваната величина D_N^2 ще бъде просто D_{N-1}^2+1. Но каква е величината D_{N-1}^2, по-точно, какво очакваме да бъде нейното значение? Просто, по определение е ясно, че това трябва да бъде „средното очаквано значение“ $<D_{N-1}^2>$, така че

$$<D_N^2>=<D_{N-1}^2>+1. \tag{6.8}$$

Ако сега си спомним, че $<D_1^2>=1$, ще получим много прост резултат:

$$<D_N^2>=N. \tag{6.9}$$

Отклонението от началното положение може да се характеризира с величина от типа на разстоянието (а не от квадрата на разстоянието); трябва само да се извлече корен квадратен от $<D_N^2>$ и да се получи така наричаното „средно квадратично разстояние“ $D_{с.к.}$:

$$D_{с.к.}=\sqrt{<D_N^2>}=\sqrt{N}. \tag{6.10}$$

Ние вече казахме, че случайните блуждаения са много сходни на опита с подхвърлянето на монетата, с който започнахме тази глава. Ако си представим, че всяко придвижване напред или назад се обуславя от падането на „тура“ или „ези,“ D_N ще бъде равно просто на N_T-N_E, т. е. разликата между числото на падането на „тура“ или „ези“. Или тъй като $N_T+N_E=N$ (където N е пълният брой на подхвърлянията), $D_N=2N_T-N$. Спомнете си че по-рано ние получихме израз за очакваното разпределение на величината N_T [тогава я обозначавахме с κ, вж. уравнение (6.5)]. А тъй като N е просто константа, то сега се получава такова разпределение и за D. (Падането на всяко „тура“ означава непадане на „ези“, затова във връзката между N_T и D се появява множителят 2.) По такъв начин на фиг. 6.2 графиката представлява едновременно и разпределение на разстоянията, на които можем да се придвижим за 30 случайни крачки ($\kappa=15$ съответствува на $D=0$, а $\kappa=16$ съответствува на $D=2$ и т. н.).

Отклонението N_T от очакваната величина $N/2$ ще бъде равно

$$N_T-\frac{N}{2}=\frac{D}{2}, \tag{6.11}$$

откъдето за средното квадратично отклонение получаваме

$$\left(N_T-\frac{N}{2}\right)_{с.к.}=\frac{1}{2}\sqrt{N}. \tag{6.12}$$

Да си припомним сега нашия резултат за $D_{с.к.}$. Ние очакваме, че средното разстояние, изминато за 30 крачки, трябва да бъде равно на $\sqrt{30}=5{,}5$, откъдето средното отклонение κ от 15 трябва да бъде $5{,}5:2=2{,}8$. Забележете, че средната полуширина на нашата крива на фиг. 6.2 (т. е. полуширината на „камбаната“ някъде по средата), е приблизително равна на 3, което се съгласува с този резултат.

Сега можем да разгледаме въпроса, който избягвахме дотук.



Фиг. 6.6. Част на паданията на „тура" в някаква частна последователност на N подхвърляния на монетата

Как да разберем „честна" ли е нашата монета? Веднага, макар и частично, можем да отговорим на този въпрос. Ако монетата е „честна", то ние очакваме, че в половината случаи ще се падне „тура", т. е.

$$\frac{<N_T>}{N}=0{,}5. \tag{6.13}$$

Едновременно очакваме, че действителното число на попаденията на „тура" трябва да се различава от $N/2$ с величина от порядъка на $\sqrt{N}/2$ или, ако се говори за *частта* на отклонението, тя е равна на

$$\frac{1}{N}\frac{\sqrt{N}}{2}=\frac{1}{2\sqrt{N}},$$

т. е. колкото е по-голямо N, толкова е по-близо до половината отношението N_T/N.

На фиг. 6.6 са нанесени числата N_T/N за онези подхвърляния на монетата, за които говорихме по-рано. Както виждате, при увеличаване на числото N кривата идва все по-близо и по-близо до 0,5. Но за съжаление няма никакви *гаранции*, че за всяка дадена серия или комбинация от серии наблюдаваното отклонение ще бъде близо до *очакваното* отклонение. Винаги съществува крайна вероятност, че ще стане голяма флуктуация — появяване на голям брой попадения на „тура" или „ези", която ще даде произволно голямо отклонение. Единственото, което може да се каже е, че *ако* отклоненията са близки до очакваното $1/2\sqrt{N}$ (да кажем, с множител 2 или 3), то няма никакво основание да се счита монетата за „фалшива" (или, че партньорът хитрува).

Не сме разглеждали още случая, когато за монетата или друг обект за опит, подобен на монета (в смисъл, че са възможни два или няколко невъзможни за достоверно предсказване изхода от наблюдението, например камък, който може да падне само на някоя от двете си страни) има достатъчно основания да се мисли, че вероятностите за различните изходи не са равни. Ние определихме вероятността $P(T)$ като отношение $<N_T>/N$. Но какво да приемем за величина $<N_T>$? По какъв начин може да се разбере какво *се очаква*? В много случаи, най-доброто, което може да се направи, това е да се пресметне числото на попаденията на „тура" в голяма серия опити и да се вземе $<N_T>=N_T$ (наблюдаваното). (Как може да се очаква нещо повече.) Трябва обаче да се разбира, че различните наблюдатели и различните серии опити могат да дадат друго значение на $P(T)$, различно от нашето. Трябва да *се очаква* обаче че всички тези различни отговори няма да се различават с повече от $1/2\sqrt{N}$ (ако $P(T)$ е близо до половината). Физиците-експериментатори обикновено казват, че в „експериментално намерената" вероятност има „грешка" и записват това така

$$P(T)=\frac{N_T}{N}\pm\frac{1}{2\sqrt{N}}. \tag{6.14}$$

При това записване, разбира се, съществува някаква „истинска“ вероятност, която по принцип *може да бъде пресметната*, но различните флуктуации водят до грешка при нейното експериментално определяне. Обаче тези съждения не могат да се направят логически съгласувани. По-добре е все пак вие да разберете, че вероятността в известен смисъл е нещо субективно, че тя винаги се основава на някаква неопределеност на нашите знания и величината ѝ се колебае при тяхното изменение.

4. Разпределение на вероятностите

Нека се върнем към проблема за случайните блуждаения, но вече с някои изменения. Нека като допълнение на случайния избор *на посоката* на крачката (+ или —) по някакъв непредсказваем начин да се изменя и нейната *дължина*, като при това се изисква изпълнението само на едно единствено условие — дължината на крачката *средно* да бъде равна на единица. Тази задача повече прилича на топлинното движение на молекулите в газа. Да означим дължината на крачката със S, която, общо казано, може да бъде всякаква, но най-често ще приема значение „близо“ до единица. За по-голяма определеност нека положим $<S^2>=1$ или, което е еквивалентно, $S_{с.к.}=1$. Изводът на израза за $<D^2>$ ще остане същия, с изключение на това, че уравнението (6.8) ще се измени сега по следния начин:

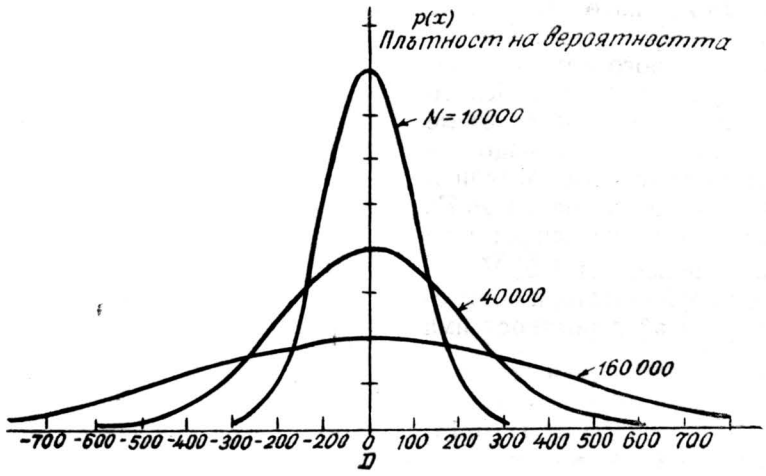
$$<D_N^2>=<D_{N-1}^2>+<S^2>=<D_{N-1}^2>+1. \qquad (6.15)$$

Така че, както и по-рано,

$$<D_N^2>=N. \qquad (6.16)$$

Какво ще бъде в такъв случай разпределението на разстоянията? Каква е например вероятността, че след 30 крачки D ще се окаже равно на нула? Вероятността за това е равна на нула! Въобще вероятността за всяка *зададена величина* на D е равна на нула. Наистина, съвсем невероятно е сумата от всички крачки назад (при произволна дължина на всяка от тях) съвсем точно да се компенсира от крачките напред. В този случай ние не можем да построим графика от типа на изобразената на фиг. 6.2.

Ако пък не изискваме D да бъде равно точно на нула, единица или две, а вместо това казваме, че има вероятност да се получи D *близо* до нулата, единицата или двойката, тогава можем да начертаем график, подобен на приведения на фиг. 6.2. Да означим с $P(x, \Delta x)$ вероятността, че D ще се намира някъде в интервала Δx около величината x (да кажем, някъде между x и $x+\Delta x$). Ако Δx е достатъчно малко, вероятността D да попадне в този интервал трябва да бъде пропорционална на не-



Фиг. 6.7. Плътност на вероятността да се окажем при случайно блуждаене след N крачки на разстояние D

D се измерва в единици на средната квадратична дължина на крачката

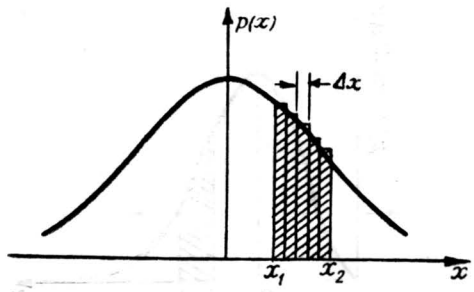
говата ширина, т. е. Δx. Затова можем да твърдим, че

$$P(x,\ \Delta x)=p\ (x)\ \Delta x. \tag{6.17}$$

Функцията $p\ (x)$ се нарича *плътност на вероятността.*

Видът на кривата $p(x)$ зависи както от броя на крачките N така и от разпределението на крачките по дължините (т. е. от това, каква част съставляват крачките от дадената дължина). За съжаление не мога тук да се занимавам с доказателството на това, а само ще кажа, че при достатъчно голямо число крачки N плътността $p(x)$ е *еднаква* за всички разумни разпределения на крачките по дължините и зависи единствено от самото N. На фиг. 6.7 са показани три графики $p\ (x)$ за различни N. Забележете, че „полуширините" на тези криви, както и трябва да бъде по нашите предишни сметки, са равни приблизително на $\sqrt{N}$.

Вие вероятно сте забелязали още, че величината $p(x)$ близо до нулата е обратно пропорционална на $\sqrt{N}$. Това е така, понеже всички криви по форма много си приличат, само едните са повече „размазани", а другите — по-малко и освен това, площите, ограничени от всяка крива и оста x, трябва да бъдат равни. Действително, нали $p\ (x)\Delta x$ е вероятността за това, че D се намира някъде вътре в интервала Δx (Δx е малко). Как да се определи вероятността за това, че D се намира някъде между x_1 и x_2? Ще трябва да разбием интервала между x_1 и x_2 на тесни ивици с ширина Δx (фиг. 6.8) и да изчислим сумата на членовете $p\ (x)\ \Delta x$ за всяка такава ивица. Геометрически тази вероятност [ще я запишем във вида $P\ (x_1 < D < x_2)$] е равна на площта на защрихованата област на фиг. 6.8. При това, колкото са по-тесни нашите ивици, толкова по-точен ще бъде резултатът. Затова можем да пишем



Фиг. 6.8. Вероятността [защрихованата област под кривата $p\ (x)$] за това, че при случайно блуждаене изминатото разстояние D ще се окаже между x_1 и x_2

$$P(x_1 < D < x_2)=\sum p\ (x)\ \Delta x=\int_{x_1}^{x_2} p\ (x)\,dx. \tag{6.18}$$

Площта пък, ограничена от цялата крива, е равна просто на вероятността за това, че D добива някакво значение между $-\infty$ и $+\infty$. Ясно е, че тя трябва да бъде равна на единица, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p\ (x)\,dx=1. \tag{6.19}$$

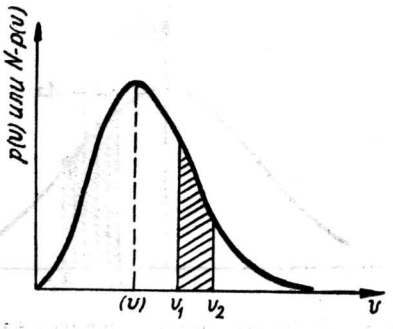
Тъй като ширината на кривите на фиг. 6.7 е пропорционална на $\sqrt{N}$, за да се запази същата площ, тяхната височина трябва да бъде пропорционална на $1/\sqrt{N}$.

Плътността на вероятността, която току-що описахме, се среща най-често. Тя е известна също под названието *нормална* или *гаусова* плътност на вероятността и се записва така

$$p\ (x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2}, \tag{6.20}$$

където величината σ се нарича *стандартно отклонение.* В нашия случай $\sigma=\sqrt{N}$ или $\sqrt{N}S_{\text{с.к}}$, ако средната квадратична дължина на крачката е различна от единица.

Ние вече говорихме за това, че движенията на молекулите или на които и да са частички в газа са подобни на случайните блуждаения. Представете си, че сме отворили в стаята флаконче с парфюм или някакво друго органическо вещество. Молекулите на това вещество моментално ще започнат да се изпаряват във въздуха. Ако в стаята има някакви въздушни течения, да кажем циркулация на въздуха, то те ще пренесат със себе си парите на това вещество. Но даже в *съвършено спокоен въздух* молекулите ще се разпространяват, докато не проникнат във всички ъгълчета на стаята. Това може да се определи по миризмата или цвета. Ако ни е известен средният размер на „крачката" и броят на крач-



Фиг. 6.9. Разпределение на молекулите на газа по скорости

ките в секунда, можем да пресметнем вероятността за откриването на една или няколко молекули от веществото на известно разстояние от флакона след известен промеждутък от време. С течение на времето броят на крачките нараства и газът „плъзва" по стаята подобно на нашите криви на фиг. 6.7. Дължината на крачките и тяхната честота, както ще узнаете впоследствие, са свързани с температурата и налягането на въздуха в стаята.

Вие знаете, че налягането на газа се дължи на това, че неговите молекули бомбардират стените на съда. По-късно, когато преминем към количественото описание на това явление, ще ни потрябва да знаем с каква скорост се движат молекулите, като се удрят в стената, доколко силата на техните удари зависи от скоростта. Но да се говори за някаква *определена скорост* на молекулите е съвършено невъзможно. В този случай трябва да се използува вероятностно описание. Молекулата може да има каквато и да е скорост, но някои скорости са за предпочитане. Всичко, което става в газа, може да бъде описано, като се каже, че вероятността дадена молекула да се движи с някаква скорост между v и $v+\Delta v$, ще бъде равна на $p(v)\Delta v$, където $p(v)$ е плътността на вероятността, която зависи от скоростта v. По-късно ще разкажа как Максвел, като използувал общи понятия и идеи от теорията на вероятностите, е намерил математически израз за функцията $p(v)$.*

Примерният вид на функцията $p(v)$ е показан на фиг. 6.9. Скоростта може да има всякаква големина, но най-големи са шансовете тя да се окаже около най-вероятното или очакваното значение на $\langle v\rangle$.

За кривата, показана на фиг. 6.9, често се говори в малко подруг смисъл. Ако вземем газ, затворен в някакъв съд (да кажем с обем 1 l.), ще се окаже, че в него има огромно количество молекули ($N\approx 10^{22}$). Тъй като $p(v)\Delta v$ е вероятността, че първата попаднала молекула ще лети със скорост, намираща се в интервала Δv, то по определение *очакваното* число молекули $\langle \Delta N\rangle$ със скорост, намираща се в същия интервал, ще бъде равно на

$$\langle \Delta N\rangle = Np(v)\Delta v. \tag{6.21}$$

Затова $Np(v)$ може да се нарече „разпределение на молекулите по скорости". Площта под кривата между двете значения на скоростите v_1 и v_2 [защрихованата област на фиг. 6.9 за кривата $Np(v)$] представлява очакваното число молекули със скорости между v_1 и v_2. Но в газа, който съдържа обикновено голямо количество молекули, отклоненията от очакваното число ще бъдат много малки (от порядъка на $1/\sqrt{N}$), затова често изхвърляме думата „очаквано" и казваме просто: „Броят на молекули със скорости между v_1 и v_2 е равно на площта на защрихования участък." Обаче, нужно е все пак да се помни, че в такива случаи става дума за *вероятно* число.

5. Принцип на неопределеността

Понятията за вероятността се оказаха много полезни при описанието на поведението на газа, състоящ се от огромно количество молекули. Немислимо е наистина да се опитваме да определим положението и скоростта на всяка от тези 10^{22} молекули! Когато за пръв път теорията на вероятностите беше приложена към такива явления, тя се разглеждаше просто като удобен метод за работа в толкова сложната обстановка. Сега обаче ние считаме, че вероятността е *съществено необходима* за описването на различните атомни процеси. Съгласно квантовата механика тази ма-

* Максвел е получил израза $p(v)=Cv^2e^{-av^2}$, където a е някаква свързана с температурата константа, а C се избира по такъв начин, че пълната вероятност да бъде равна на единица.

тематическа теория за малките частички при определяне положението на частичката и нейната скорост винаги съществува някаква неопределеност. В най-добрия случай ние можем да кажем само, че съществува някаква вероятност частицата да се намира близо до точката x.

За описването на местоположението на частицата може да се въведе плътността на вероятността $p_1(x)$, така че $p_1(x)\,\Delta x$ да бъде вероятността за това, че частицата се намира някъде между x и $x+\Delta x$. Ако положението на частицата е установено достатъчно добре, то примерният вид на функцията $p_1(x)$ може да се илюстрира с графиката на фиг. 6.10,а. Точно такова е положението и със скоростта на частицата — тя също не ни е известна точно. С някаква вероятност $p_2(v)\Delta v$ частицата може да се движи със скорост, намираща се в интервала между v и $v+\Delta v$.

Един от основните резултати на квантовата механика се състои в това, че тези две плътности $p_1(x)$ и $p_2(v)$ не могат да бъдат избрани независимо една от друга в такъв смисъл, че те двете не могат да бъдат колкото ни е угодно тесни. Ако вземем „полуширините“ на кривите $p_1(x)$ и $p_2(v)$ и ги означим съответно с $[\Delta x]$ и $[\Delta v]$ (вж. фиг. 6.10), то природата изисква *произведението* на тези две полуширини да не бъде по-малко от величината h/m, където m е масата на частицата, а h — някаква фундаментална физическа константа, наричана *константа на Планк*. Това съотношение се записва по следния начин:

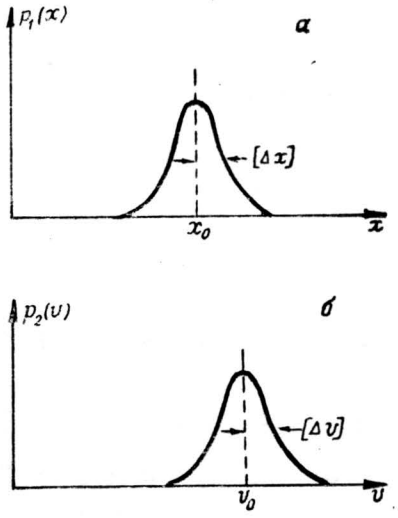
$$[\Delta x]\ [\Delta v] \geqslant \frac{h}{m} \tag{6.22}$$

и се нарича *принцип на неопределеността на Хайзенберг*.

За да е вярно това съотношение, частицата трябва да се държи много странно. Виждате, че дясната част на съотношението (6.22) е постоянно, а това означава, че ако ние се опитаме да „приковем“ частицата на някакво определено място, този опит ще завърши така, че ние няма да можем да разберем накъде лети и с каква скорост. Точно така, ако заставим частицата да се движи съвсем бавно, или с някаква *определена* скорост, то тя ще се „разлива“ и ние не ще можем да посочим точно къде се намира тя.

Принципът на неопределеността изразява онази неяснота, която трябва да съществува при всеки опит за описване на природата. Най-точното и пълно описание на природата трябва да бъде само вероятностно. Но на някои физици такъв начин на описание не им се нрави. На тях им се струва, че за *реалното* поведение на частицата може да се говори само когато са зададени едновременно импулсите и координатите. На времето, в зарята на развитието на квантовата механика, тази проблема много силно е вълнувала Айнщайн. Той често е клател глава и е казвал: „Но нали господ не хвърля „ези-тура“, за да реши, накъде трябва да се движи електронът!“ Този въпрос го е безпокоял в течение на много дълго време и до края на своя живот той явно не е могъл да се примири с факта, че вероятностното описание на природата е максимумът на онова, на което сме способни засега. Има физици, които интуитивно чувствуват, че нашият свят може да бъде описан другояче, че може да се изключат тези неопределености в поведението на частиците. Те продължават да работят над тази проблема, но засега никой от тях не е постигнал съществен резултат.

Тази присъща на света неопределеност в определянето на положението на частицата се явява най-важната черта на описанието на структурата на атомите. В атома на водорода например който се състои от един протон, образуващ ядрото, и електрон, намиращ се някъде извън него, неопределеността на местоположението на електрона е такава, каквито са размерите на самия атом! Затова ние не можем с положителност да кажем къде, в каква част на атома се намира нашият електрон и съвсем не може да става дума за каквито и да било „орбити“. С увереност може да се говори само за *вероятността* $p(r)\,\Delta V$ да се намери електронът

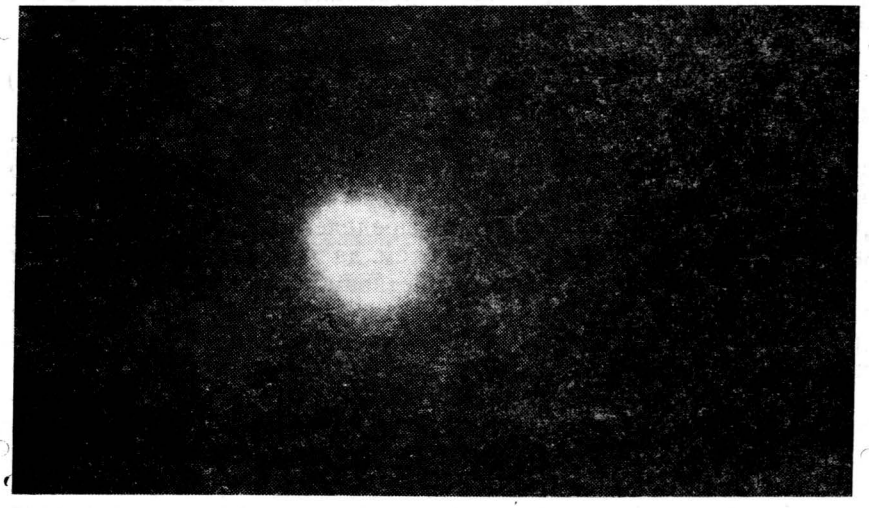


Фиг. 6.10. Плътност на вероятността на координатата (а) и скоростта (б) на частицата

в елемента на обема ΔV на разстояние r от протона. Квантовата механика позволява в такъв случай да се изчисли плътността на вероятността $p(r)$, която за несмущаван атом на водорода е равна на $Ae^{-r^2a^2}$. Това е камбановидна функция, подобна на изобразената на фиг. 6.8, където числото a представлява характерната големина на радиуса, след който функцията намалява много бързо. Без да се взима под внимание, че съществува вероятност (макар и съвсем малка) да се намери електрона на разстояние от ядрото, по-голямо от a, ние наричаме тази големина „радиус на атома". Тя е равна приблизително на 10^{-10} m.

Ако искате да си представите някак атома на водорода, представете си ей такъв „облак", плътността на който е пропорционална на плътността на вероятността. Пример за такъв облак е показан на фиг. 6.11. Такава нагледна картинка като че ли е най-близка до истината, макар че тук трябва да се помни, че това *не е реален* „електронен облак", а само „облак на вероятностите". Някъде вътре в него се намира електронът, но природата ни позволява само да гадаем къде именно се намира той.

В стремежа си да узнае колкото се може повече за природата на нещата, съвременната физика е открила, че съществуват неща, които тя никога не ще може да опознае съвсем точно. На много от нашите знания е съдено завинаги да останат неопределени. Разрешено ни е да знаем *само* вероятностите.



Фиг. 6.11. Въображаем атом на водорода
Плътността („белотата") на облачето е пропорционална на плътността на вероятността

7

Теория на гравитацията

§ 1. Движение на планетите

В тази глава ще се говори за едно от най-големите обобщения, които някога е направил човешкият ум. Ние заслужено се възхищаваме от ума на човека, но добре би било да постоим известно време в благоговение и пред *природата*, която се подчинява напълно безпрекословно на такъв изящен и такъв прост закон — закона за гравитацията. В какво се състои този закон? Във Вселената всеки обект се привлича към всеки друг обект със сила, пропорционална на техните маси и обратно пропорционална на квадрата на разстоянията между тях. Математически законът се записва така:

$$F=G\frac{m\,m'}{r^2}.$$

Ако към това добавим, че всяко тяло реагира на приложената към него сила с ускорение, насочено по посока на действието на тази сила, и по големина е обратно пропорционално на масата на тялото, то за способния математик тези сведения са достатъчни за извеждане на всички по-нататъшни следствия.

Но тъй като, както предполагаме, вие не сте още толкова талантливи, ще ви въоръжим само с тези две аксиоми. Нека заедно да обсъдим следствията от тях. Ще изложим накратко историята на откриването на закона за гравитацията, ще се спрем на някои изводи от него и на неговото влияние върху историята, на загадките на този закон и на неговото уточняване от Айнщайн; ние искаме още да обсъдим връзката на закона за гравитацията с другите закони на физиката. Всичко това не може да бъде направено в една глава, но на съответните места в другите глави отново ще се връщаме към този проблем.

Историята започва от древните, които са наблюдавали движението на планетите сред звездите и в края на краищата са разбрали, че планетите се движат около Слънцето — факт, отново открит по-късно от Коперник. Малко повече труд се изисквало, за да се открие *как* именно те се движат. В началото на XV столетие се спорило много по въпроса, дали наистина планетите обикалят около Слънцето, или не. Тихо Брахе по този въпрос имал свое мнение, твърде различно от това, което са мислили древните: неговото мнение било, че всички спорове за природата на движението на планетите ще се разрешат, ако достатъчно точно се измери положението на планетите на небето. Ако измерванията установят точно как се движат планетите, то не е изключено, че от двете становища ще може да бъде избрано едно. Това е било нечувана идея — за да се открие нещо, по-добре е да се направят акуратни опити, отколкото да се привеждат дълбоки философски доказателства. Следвайки тази идея, Тихо Брахе в продължение на много години е изучавал положенията на планетите в своята обсерватория на остров Фюн, близо до Копенхаген. Той съставил обемисти таблици, които след неговата смърт били изучени от математика Кеплер. От неговите данни Кеплер е извлякъл чудесни, много красиви и прости закони, които управляват движението на планетите.

§ 1. Движение на планетите

§ 2. Закони на Кеплер

§ 3. Развитие на динамиката

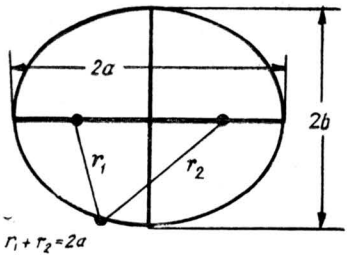
§ 4. Нютонов закон за гравитацията

§ 5. Всемирно привличане

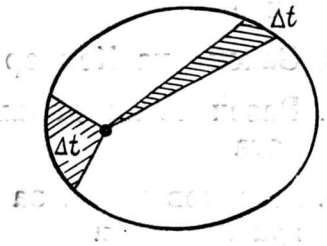
§ 6. Опит на Кавендиш

§ 7. Какво е гравитация?

§ 8. Гравитация и относителност



Фиг. 7.1. Елипса



Фиг. 7.2. Кеплеров закон за площната скорост

§ 2. Закони на Кеплер

Преди всичко Кеплер разбрал, че всички планети се движат около Слънцето по крива, наречена елипса, като при това Слънцето се намира в един от фокусите на елипсата. Елипсата е точно определена по особен начин крива. Такава крива може да бъде получена, като във фокусите се забоде по една карфица, към всяка от които са завързани краищата на един конец, опънат с молив. Изразявайки се математически, това е геометричното място на точки, сумата от разстоянията на които до две зададени точки (фокуси) е постоянна. Или, ако предпочитате, това е окръжност, гледана под ъгъл към нейната равнина (фиг. 7.1).

Другото заключение на Кеплер е, че планетите не се движат с постоянна скорост: по-близо до Слънцето — по-бързо, а по-далеч — по-бавно. По-точно: нека планетата да се наблюдава в два последователни момента, разделени например от едноседмичен интервал, и към всяко положение на планетата да е прекаран радиус-вектор*. Дъгата на орбитата, измината от планетата за една седмица, и двата радиус-вектора заграждат някаква площ, защрихованата на фиг. 7.2. Ако също такива две наблюдения, разделени от едноседмичен интервал, се направят през друго време, когато планетата се движи по по-отдалечен участък от орбитата (т. е. по-бавно), то построената по същия начин фигура ще се окаже по площ, равна на първата. И така съгласно втория закон орбиталната скорост на всяка планета е такава, че радиусът „измита“ равни площи за равни интервали от време.

Третият закон е бил открит от Кеплер много по-късно; той се различава от първите два: отнася се не за една планета, а свързва различни планети. Законът гласи, че ако се сравнят периодите на обикалянето и размерите на орбитите на две планети, периодите са пропорционални на размерите на орбитите на степен 3/2. Периодът е времето, необходимо на планетата за изминаване на цялата орбита; размерът пък се измерва с дължината на най-голямия диаметър на елиптичната орбита, нейната голяма ос. Считайки орбитите за окръжности (каквито те са приблизително), може да се каже по-просто: времето, нужно за една обиколка по окръжността, е пропорционално на нейния диаметър (или радиус) на степен 3/2. И така трите закона на Кеплер са следните:

1. Всички планети се движат около Слънцето по елипса, в един от фокусите на която се намира Слънцето.

2. Радиус-векторът от Слънцето до планетата „измита“ равни площи за равни интервали от време.

3. Квадратите на времената на обиколките на две планети са пропорционални на кубовете на големите полуоси на техните орбити: $T^2 \sim a^3$.

§ 3. Развитие на динамиката

В същото време, когато Кеплер е открил тези закони, Галилей е изучавал законите на движението. Той се опитвал да изясни какво кара планетите да се движат. (В онези дни една от предлаганите теории е твърдяла: планетите се движат затова, защото зад тях летят невидими ангели, които, размахвайки криле, гонят планетите напред. В наши дни тази теория, както вие скоро ще видите, е до известна степен видоизменена! По всяка вероятност, за да накарат планетите да се движат, невидимите ангели са длъжни да летят във всевъзможни посоки и да не се нуждаят от крила. По всичко друго тези теории си приличат!) Галилей открил едно важно свойство на движението, което е достатъчно, за да се разберат тези закони. Това е принципът за *инерцията*: ако при движението на тялото до него не се допира нищо, нищо не

* Отсечка, която съединява Слънцето с точка от орбитата.

му пречи, то може да лети вечно с постоянна скорост по права линия (А *защо* това е така? Ние не знаем отговора на този въпрос.)

След това Нютон видоизменил тази мисъл, казвайки, че единственият начин да се измени движението на тялото е върху него да се приложи *сила*. Ако тялото се ускорява, силата е приложена в *посока на движението*. Ако тялото се отклони, това означава, че силата е била приложена под ъгъл към направлението на движението. Ако например завържем камък с въже и го завъртим по окръжност, то за да го задържим на окръжността, е нужна сила. Ние трябва през цялото време да *дърпаме* въжета. Законът се състои в следното: *ускорението, което се придава от силата, е обратно пропорционално на масата*. Или другояче: *силата е пропорционална на масата и ускорението*. Колкото по-масивно е тялото, толкова по-голяма сила е необходима, за да се създаде нужното ускорение. (Масата може да се измери, като се завърже за въжета друг камък и се завърти по същата окръжност и със същата скорост. Така може да се намери, че за масивните тела е нужна по-голяма сила. (Тези разсъждения довели до блестящата мисъл: за да се удържи планетата на нейната орбита, не е нужна никаква *допирателна* сила (за ангелите не е нужно да летят по допирателната), защото планетата и без това ще лети в нужната посока. Ако нищо не й пречеше, тя щеше да се движи по *права линия*. Но истинското движение се отклонява от тази права и се отклонява именно напречно на движението, а не по посока на движението. С други думи, благодарение на принципа за инерцията, силата, която е необходима за управляването на движението на планетите около Слънцето, това не е силата, която ги движи около Слънцето, а силата, която е *насочена* към Слънцето (и тъй като силата е насочена към Слънцето, то, безспорно, това е именно същият този ангел!).

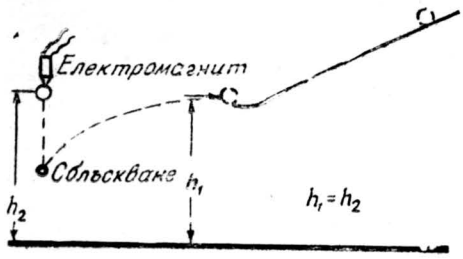
§ 4. Нютонов закон за гравитацията

Разбирайки природата на движението по-добре от другите, Нютон е съобразил, че именно *Слънцето* може да е източникът, щаб-квартирата на силите, управляващи движението на планетите. Той се убедил (скоро, може би, в това ще се убедим и ние), че „измитането“ на равни площи за равни интервали от време е верен признак за това, че всички отклонения от правата линия са напълно радиални, или че законът за площите е пряко следствие на това, че всички сили са насочени точно към *Слънцето*.

Освен това от анализа на третия закон на Кеплер може да се направи изводът, че колкото по-далеч от Слънцето е планетата, толкова по-слаба е силата. От сравнението на две планети, намиращи се на различни разстояния, следва, че силите са обратно пропорционални на квадратите на относителните разстояния. Комбинирайки двата закона, Нютон идва до заключението, че трябва да съществува сила, обратна на квадрата на разстоянието и насочена по правата линия между Слънцето и планетата.

Като човек, склонен към обобщения, Нютон, разбира се, предположил, че тази връзка е характерна не само за Слънцето, което задържа планетите, но че тя носи по-общ характер. Вече било известно например, че около Юпитер обикалят луни подобно на обикалянето на Луната около Земята и на Нютон се е струвало естествено, че и планетите със сила задържат своите луни около себе си. Тогава той вече знаел за силата, която ни задържа на Земята, и предположил, че тази сила е *всеобща* и че *всички тела взаимно се привличат*.

Нютон се запитал: дали Земята привлича хората също така, както и Луната („също така“ значи обратно пропорционално на квадрата на разстоянието). Ако близо до повърхността на Земята падащо тяло изминава през първата секунда (от състоянието на покой) 4,9 m, то на какво разстояние ще падне Луната? Може да се възрази, че Луната въобще не пада. Но ако на Луната не действуваше сила, тя щеше да се отдалечава по права линия;



Фиг. 7.3. Прибор за демонстриране на независимостта на вертикалните и хоризонталните движения

в действителност тя обикаля около Земята по кръгова орбита. Следователно тя *пада* от това място, където би се намирала, ако не й действуваше сила. Знаейки радиуса на орбитата на Луната (около 384 000 m) и времето за една обиколка около Земята (около 29 дни), можем да пресметнем пътя, който тя изминава за 1 s и разстоянието, на което тя пада* за това време. Оказва се, че това разстояние е равно на около 1,36 mm. Това е в съгласие със закона за обратните квадрати, защото радиусът на Земята е 6370 km, и ако на такова разстояние телата, падайки, изминават през първата секунда 4,9 m, то на разстояние 384 хиляди km, т. е. 60 пъти по-далеч от центъра на Земята, те трябва да падат на 1/3600 от 4,9 m или тъкмо 1,36 mm. Желаейки да потвърди своята теория на гравитацията с подобни пресмятания, Нютон ги направил акуратно и . . . получил голямо несъответствие. Той решил, че теорията противоречи на фактите и не я публикувал. Шест години по-късно новите измервания на радиуса на Земята показали, че приетото тогава от астрономите разстояние до Луната не било вярно. Като научил за това, Нютон направил ново пресмятане с уточнените цифри и този път получил отлично съвпадение.

Мисълта, че Луната „пада", предизвиква известно смущение; защо тогава тя не се *приближава*? Тази мисъл е толкова интересна, че заслужава по-нататъшно пояснение: Луната „пада" в смисъл, че се *отклонява от правата линия, по която тя би се движила, ако нямаше повече никакви сили.*

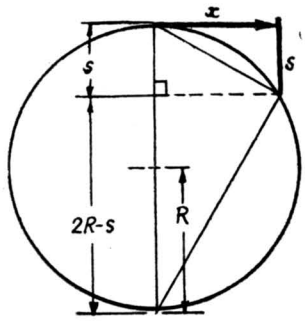
Нека разгледаме друг, вече чисто земен пример. Тялото, оставено свободно близо до земната повърхност, пада през първата секунда 4,9 m. Тялото, хвърлено *хоризонтално*, също пада на 4,9 m.

На фиг. 7.3 е показан прибор, който демонстрира това явление. От хоризонталния улей изскача и лети напред топче. От същата височина пада вертикално надолу друго топче (електрическа схема освобождава второто топче точно в този момент, когато първото се отделя от улея). Те се сблъскват във въздуха, т. е. за еднакво време те са се спуснали надолу еднакво. Куршум, изстрелян хоризонтално, може да измине за 1 s даже половин километър, а надолу за това време ще падне 4,9 m. Какво ще стане, ако куршумът излита от дулото все по-бързо? Не забравяйте, че повърхността на Земята е крива. Куршумът може да излети с такава скорост, че, след като падне на 4,9 m, той ще остане по отношение на Земята на първоначалната височина. Може ли да се случи това? Да; той пада, но Земята се изкривява и ето получава се падане „около" Земята. Трябва само да се узнае на какво разстояние повърхността на Земята ще се окаже с 4,9 m по-ниско от хоризонта. На фиг. 7.4 е изобразена Земята с нейния радиус (6370 km) и допирателният прав път на куршума (при отсъствие на сили). Остава да си спомним една от интересните геометрични теореми, която гласи, че дължината на полухордата, перпендикулярна на диаметъра, е равна на средното геометрично между дължините на отсечките на диаметъра. Значи разстоянието, изминато от куршума, е средното пропорционално между 4,9 m на падането и 12 740 km на диаметъра на Земята, т. е.

$$\sqrt{0{,}0049 . 12\,740} \approx 7{,}9 \text{ km}.$$

И така, ако куршумът се движи със скорост 7,9 m/s, той както и по-рано ще пада всяка секунда 4,9 m, но никога няма да се приближи до повърхността, която се отдалечава от него вследствие на своята кривина. Така беше и с космонавта Гагарин, който се задържаше на една и съща височина при скорост приблизително 8 km в секунда, т. е. 40 000 km за една обиколка (в действителност малко повече, тъй като той летя малко по-високо).

Всяко откриване на нов закон е полезно само тогава, когато от него може да се извлече повече от това, което е било вложе-



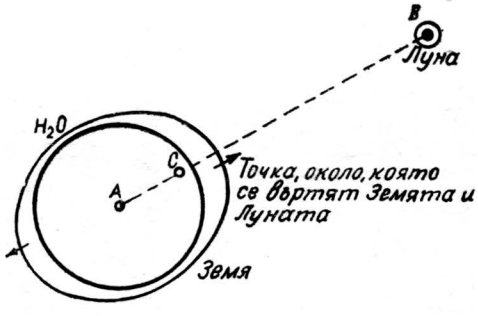
Фиг. 7.4. Ускорение на центъра при движение по окръжност.
От планиметрията е известно, че $x/s = (2R-s)x \approx 2Rx$, където R е радиусът на Земята (6370 km); x е разстоянието, „изминато хоризонтално" за 1 s; s е дължината на пътя на „падането" за 1 s (4,9 m).

* С други думи, на какво разстояние окръжността (орбитата на Луната) се отдалечава от допирателната към нея, след като Луната се е движила 1 s.

но. Нютон е *приложил* втория и третия закони на Кеплер, за да изведе закона за гравитацията. Какво *предсказа* той? Първото предсказание беше неговият анализ на движението на Луната: това движение се подчинява на същата закономерност както падането на телата на Земята. Второто беше отговор на въпроса, *дали орбитите са елипси* Може точно да се пресметне движението, може да се докаже и това, че траекторията е елипса*; това значи, че никакви допълнителни факти за доказването на *първия* закон на Кеплер не са нужни. Така Нютон направи своето първо мощно предсказване.

Законът за гравитацията обясни много явления, които преди това бяха неясни. Например привличането на Луната предизвиква на Земята приливи — дотогава тайнствено явление. Хората и порано се досещали, че Луната привлича водата, която е под нея, и се получава прилив, но те не са били толкова умни като Нютон и са мислели, че трябва да има само един прилив в денонощие. Считали, че Луната привлича водата и предизвиква прилив, но тъй като Земята се върти, във всяко място водата трябва един път в денонощие да се повдигне и снижи. В действителност на всеки 12 часа има прилив. Имало е и друга школа на прогресивната мисъл; по нейно мнение трябвало да има прилив и на противоположната страна на Земята, защото Луната винаги откъсва сушата от водата! И двете теории не са верни. Истинското обяснение е приблизително следното: привличането от Луната на сушата и водата е „уравновесено“ в центъра. Но привличането от Луната на тези маси вода, които се намират на „лунната“ страна на Земята, е *по-силно*, отколкото средното привличане на цялата Земя, а привличането на масите вода на обратната страна на Земята е *по-слабо* от средното. Освен това водата, за разлика от сушата, може да тече. Истинската причина за приливите се определя от тези два фактора.

Какво разбираме под думата „уравновесено“ ? Какво именно се уравновесява? А ето какво. Ако Луната привлича към себе си цялата Земя, то защо Земята не пада „нагоре“ към Луната? Поради същата причина, поради която и Луната не пада на Земята: Земята се върти около точка, която се намира вътре в Земята (но не в нейния център). Луната не се върти около Земята, а те двете се въртят около общ център и двете падат към него, както е показано на фиг. 7.5. Това движение около общия център уравновесява падането на всяко едно от двете небесни тела. Така че и Земята също се движи не по права линия, а по кръгова орбита. Водните маси на далечната страна се отхвърлят поради „центробежната сила“ по-силно, отколкото центърът на Земята, който се уравновесява от привличането на Луната. Привличането от Луната на далечната страна е по-слабо и „центробежната сила“ е по-голяма. Това води до нарушаване равновесието на водата: тя се отдалечава от центъра на Земята. На близката страна Луната привлича по-силно, обаче поради по-малката големина на радиус-вектора „центробежната сила“ се оказва по-малка, равновесието се нарушава в обратна посока, но както и по-рано *от* центъра на Земята. В резултат на това се появяват *две* приливни „гърбици“.



Фиг. 7.5. Системата Земя — Луна с приливите

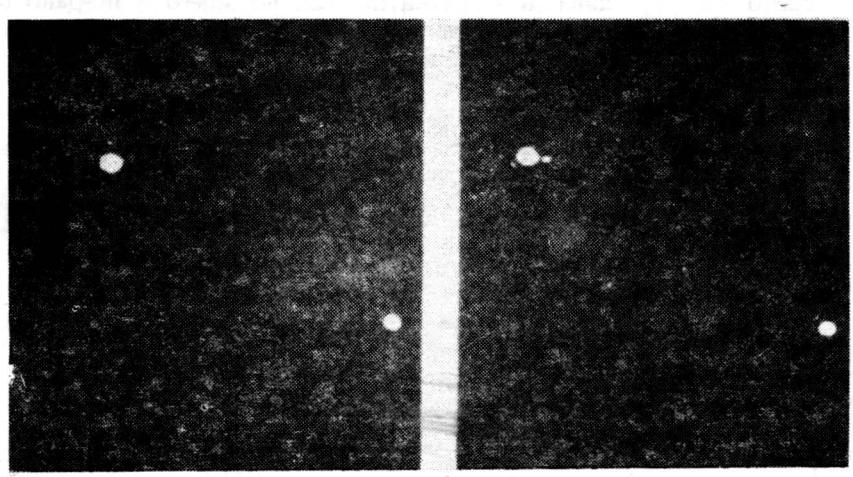
* В нашия курс това доказателство не е приведено.

§ 5. Всемирно привличане

Какво още можем да разберем, след като знаем за съществуването на гравитацията? На всички е известно, че Земята е кръгла. Но защо? Това е ясно: разбира се, благодарение на гравитацията. Земята е кръгла затова, защото между всички тела съществува привличане и всичко, от което е възникнала Земята, също се е привличало взаимно дотогава, докато е имало къде да се привлича! Казано по-точно, Земята *не е празилна* топка; тя се върти и центробежната сила на екватора противодействува на привличането. Излиза, че Земята трябва да бъде елипсоид и неговата правилна форма може даже да бъде получена. И така, от закона за гравитацията следва, че и Слънцето, и Луната, и Земята трябва да бъдат (приблизително) топки.

Какво още следва от закона за гравитацията? Наблюдавайки спътниците на Юпитер, ние можем да разберем всичките закони на тяхното движение около планетата. В тази връзка е интересно да се разкаже за една трудност, с която се е срещнал законът за гравитацията във връзка с движението на луните на Юпитер. Тези спътници са били изучавани много подробно от Рьомер, който забелязал, че от време на време те нарушават разписанието: ту закъсняват, ту идват на определеното място по-рано (разписание може да се направи, след като спътниците се наблюдават достатъчно дълго и се пресметне по много обиколки средният период на обиколката). Нещо повече, той забелязал, че закъсненията стават, когато Юпитер е отдалечен от Земята, а когато ние сме близо до Юпитер, то движението на луните изпреварва разписанието. Много трудно било да се обясни това нещо със закона за гравитацията и той щял да бъде заплашен от близка смърт, ако не било намерено друго обяснение. Ако на закона противоречи дори само един случай, той не е верен. Но причината за това явление се оказала много естествена и красива: работата се състои в това, че е необходимо известно време, за да се види Луната на нужното място, тъй като светлината от нея до нас идва не мигновено. Това време не е голямо, когато Юпитер се намира близо до Земята, но то се удължава, когато Юпитер се отдалечава от нея. Ето защо изглежда, че луните избързват или изостават в зависимост от това, дали те се намират близо, или далеч от Земята. Това явление е доказало, че светлината се разпространява не мигновено и ни е снабдило с първата оценка на нейната скорост (това е станало в 1676 г.).

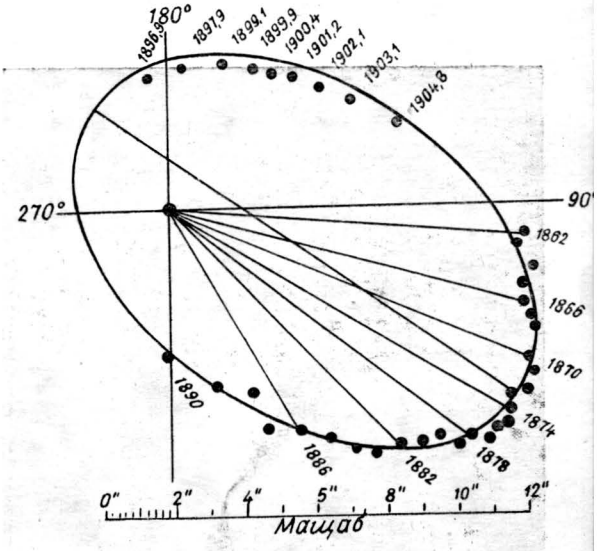
Ако всички планети се привличат една към друга, то силата, която управлява например движението на Юпитер около Слънцето, това не е само силата на привличането към Слънцето, тъй като съществува например и привличане към Сатурн. То не е голямо (Слънцето е много по-голямо от Сатурн), но то *съществува* и затова орбитата на Юпитер не може да бъде точна елипса; тя се отклонява незначително от елиптичната траектория, така че



Фиг. 7.6. Системата двойна звезда

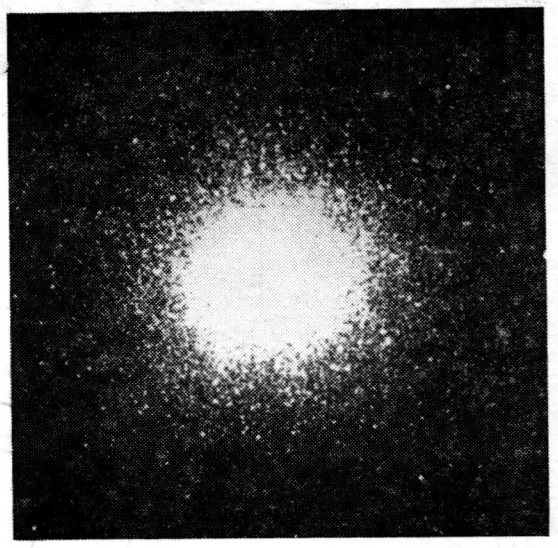
движението се усложнява. Били предприети опити да се проанализира движението на Юпитер, Сатурн и Уран въз основа на закона за гравитацията. За да се провери дали малките отклонения и неправилности в движението на планетите могат напълно да се обяснят само въз основа на този закон, било пресметнато влиянието на всяка планета върху останалите. За Юпитер и Сатурн всичко се получило както трябва, но Уран имал твърде странно поведение. Той се движел не по точна елипса, което впрочем и трябвало да се очаква поради влиянието на привличането на Юпитер и Сатурн. Но и с вземането под внимание на тяхното привличане движението на Уран *все пак* било неправилно; по такъв начин законът за гравитацията се оказал в опасност (тази възможност не би могла да се изключи). Двама учени, Адамс в Англия и Леверие във Франция, независимо един от друг се замислили над друга възможност: няма ли там *още една* планета, бледа и невидима, още неоткрита. Тази планета, нека да я наречем *N*, би могла да привлича Уран. Те пресметнали къде трябва да се намира тази планета, за да причини наблюдаваната пертурбация на пътя на Уран. Те изпратили писма в съответните обсерватории, в които се казвало: „Господа, насочете своите телескопи в такова и такова място и вие ще видите там нова планета.“ Ще ви обърнат ли внимание или не, често зависи от това, с кого вие работите. На Леверие обърнали внимание, послушали го и открили планетата *N*! Тогава и друга обсерватория побързала да започне наблюдения и работата се увенчала с успех.

Това откритие показва, че в слънчевата система законите на Нютон са абсолютно верни. Но верни ли са те на разстояния по-големи от относително малките разстояния до планетите? Първо, може да се постави въпрос: привличат ли се *звездите помежду си* така, както планетите? Положителни доказателства за това намираме в *двойните звезди*. На фиг. 7.6 е показана двойна звезда — две близки звезди (трета звезда е нужна, за да се убедим, че фотографията не е обърната); втората фотография е направена след няколко години. Сравнявайки с „фиксираната“ звезда, ние виждаме, че оста на двойната звезда се е завъртяла, т. е. звездите се движат една около друга. Движат ли се те в съгласие със законите на Нютон? Акуратните измервания на относителната позиция на двойната звезда Сириус са дадени на фиг. 7.7. Получава се отлична елипса (измерванията са започнати в 1862 г. и са продължили до 1904 г.; оттогава беше направена още една обиколка). Всичко става в съгласие със законите на Нютон с изключение на това, че Сириус *A* се получава *не във фокуса*. В какво се състои работата? В това, че равнината на елипсата не съвпада с „равнината на небето“. Ние виждаме Сириус не под прав ъгъл към равнината на неговата орбита, а ако гледаме елипсата отстрана, тя не престава да бъде елипса, но фокусът може да се измести. Така че и двойните звезди могат да бъдат анализирани в съгласие с изискванията на закона за гравитацията.



Фиг. 7.7. Орбитата на Сириус *B* по отношение на Сириус *A*;

Валидността на закона за гравитацията на големи разстояния се вижда от фиг. 7.8. Трябва да си лишен от въображение, за да не видиш тук работата на гравитацията. Тук е показано едно от най-красивите небесни зрелища — кълбовидно звездно натрупване. Всяка точка е звезда. Струва ни се, че в центъра те са натрупани плътно; причина за това е слабата чувствителност на телескопа; в действителност разстоянията между звездите даже в средата са много големи, а сблъскванията крайно редки. Най-много звезди има в центъра, а при отдалечаване от него те стават все по-малко и по-малко. Ясно е, че между звездите действува привличане, т. е. че гравитацията съществува и на такива гигантски разстояния (от порядъка на 100 000 диаметра на слънчевата система).

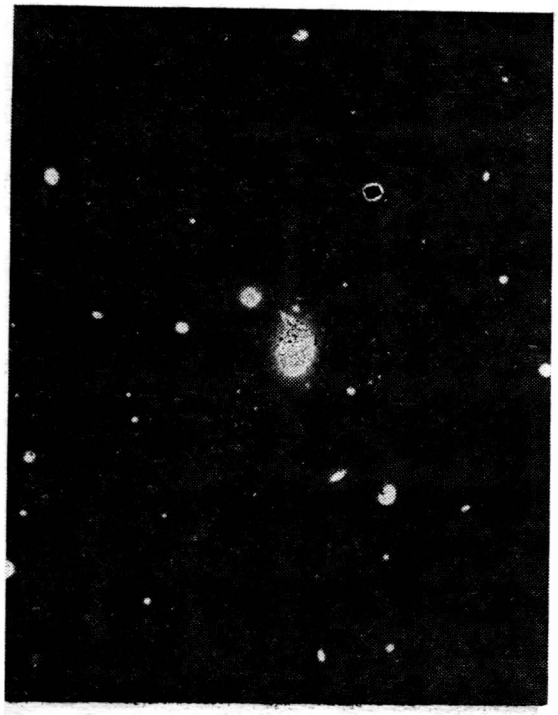


Фиг. 7.8. Кълбовидно звездно натрупване

Но нека да се отправим по-нататък и да разгледаме *цялата галактика* (фиг. 7.9.). Формата ѝ явно показва стремежа на нейното вещество да се свие. Разбира се, не е възможно да се докаже, че тук действува законът на обратните квадрати; вижда се само, че и на такова огромно пространство има сили, които не дават на галактиката да се разпадне. Вие можете да

Фиг. 7.9. Галактика





Фиг. 7.10. Облак от галактиката

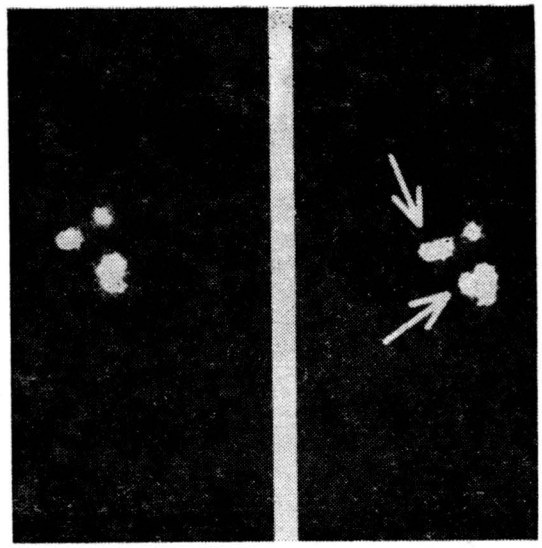
кажете: „Добре, всичко това е разумно, но защо това нещо, галактиката, вече не прилича на топка?“ Затова, защото тя се *върти*, защото има *момент на количеството на движението* (запас от въртене); ако се свие, тя няма къде да го дене; остава ѝ само да се сплесне. (Впрочем ето ви една хубава задача: как се образуват ръкавите на галактиката? От какво се определя нейната форма? Подробен отговор на тези въпроси още няма.) Ясно е, че очертанията на галактиката се определят от гравитацията, макар че засега е невъзможно да се обясни напълно сложността на нейната структура. Размерите на галактиката са около 50 000 — 100 000 светлинни години. (Земята се намира на разстояние 8 1/3 светлинни минути от Слънцето).

Но гравитацията се проявява и на по-големи разстояния. На фиг. 7.10 са показани някакви натрупвания на дребни петна. Това е *облак от галактики*, подобен на звездно натрупване. Следователно и галактиките се привличат помежду си на такива разстояния, в противен случай те не биха се събрали в „облак“. По всяка вероятност гравитацията се проявява и на разстояния от *десетки милиони* светлинни години; доколкото сега е известно, законът на обратните квадрати все още действува навсякъде.



Фиг. 7.11. Междузвезден облак от прах

Законът за гравитацията води не само до разбирането на природата на мъглявините, но и до някои идеи за произхода на звездите. В големия облак от прах и газ, подобен на изобразения на фиг. 7.11, привличането на частиците на праха ще ги събере в топчици. На фигурата се виждат „малки“ черни петна — може би начало на натрупване на газ и прах, от които благодарение на тяхното привличане започва да възниква звезда. Дали някога сме били свидетели на раждането на нова звезда, е спорен въпрос. На фиг. 7.12 е дадено свидетелство за това, че сме били. Отляво е показан светещ газ, а вътре в него — няколко звезди. Това е снимка от 1947 г. Снимката отдясно е направена след 7 години; сега вече се виждат две нови ярки петна. Не се ли е натрупал тук газ, не го ли е принудила гравитацията да се събере в кълбо, достатъчно голямо, за да започне в него звездна ядрена реакция, която го превръща в звезда? Може би да, а може би и не. Малко е вероятно, че ни е провървяло да видим как само за седем години звездата е станала видима, но още по-малко вероятно е да се види раждането изведнъж на *две* звезди.



Фиг. 7.12. Образуване на нови звезди?

6. Опит на Кавендиш

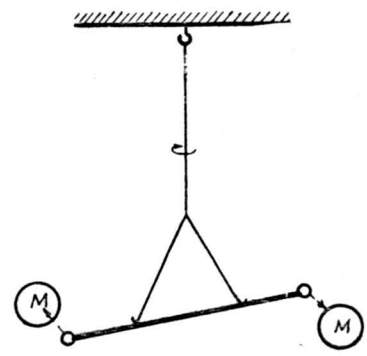
И така, гравитацията се разпространява на огромни разстояния. Но ако съществува привличане между два произволни обекта, то трябва да съществува и възможност да се измери силата, която действува между тях. И не е задължително да се следи движението на звездите; защо да не се вземат две топки — оловна и мраморна, и да се проследи как едната ще се движи към другата? Трудността на толкова прост по идея опит се заключава в извънредната слабост, незабележимост на силите. Той трябва да се извърши с изключителна предпазливост: отначало трябва да изпомпим въздуха от апарата, да се убедим, че никъде няма електрически заряди и т. н. и едва тогава можем да се опитаме да измерим силата. За пръв път тя е била измерена от Кавендиш с помощта на устройство, което е изобразено схематически на фиг. 7.13. Опитът на Кавендиш доказал, че съществува сила, която действува между две големи закрепени оловни топки и две помалки (също от олово); в опита топките са били закрепени на двата края на една кобилица, окачена на много тънък еластичен конец. По степента на усукването на конеца било възможно да се узнае големината на силата и да се установи, че тя е обратно пропорционална на квадрата на разстоянието. По такъв начин е бил точно определен коефициентът G във формулата

$$F = G\frac{mm'}{r^2},$$

тъй като всички маси и разстояния тук са известни. Вие можете да възразите: „Всичко това за Земята е било известно и по-рано.“ Всичко, освен *масата* на Земята. Определяйки с този опит величината G и знаейки силата на привличането на Земята, би могло косвено да се определи нейната маса! Поради това опитът се нарича „теглене на Земята“. Кавендиш твърдял, че е претеглил Земята, макар той да е измерил само коефициента G; но това е единственият начин за определяне на масата на Земята. Коефициентът G се оказал равен на

$$6{,}670 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2.$$

Трудно е да се преувеличи силата на влиянието на теорията на гравитацията, на нейните величествени успехи върху историята на науката. Вместо царувалите в предшествуващите векове неувереност, съмнения, непълнота на знанията, безкрайни спорове и парадокси пред хората застанал новият закон с цялата си яснота и простота. Колко важно е било, че всички луни, всички планети, всички звезди се подчиняват на толкова *просто правило!* Но още по-важно е това, че човекът се оказал в състояние да *раз-*



Фиг. 7.13. Опростена схема на прибора, който е бил ползуван от Кавендиш за проверка на закона за всемирното привличане за малки маси и за измерване на гравитационната константа G

бере това правило и да предсказва пътищата на планетите! То определило бързия, успешен ръст на науката в следващите години; у хората се появила надежда, че и в другите явления на света се крият също такива прости закономерности.

7. Какво е гравитация?

Но защо законът е така прост? Какво може да се каже за причината на тази простота? Досега ние само описвахме *как* Земята се върти около Слънцето, но нищо не казахме за това, *какво я принуждава да се движи.* Нютон не е правил предположения в това отношение; за него е било достатъчно да открие *какво* става, без да влиза в механизма на това, което става. *Но и никой друг досега не е открил никакъв механизъм.* Всички физически закони се отличават в това отношение със своя абстрактен характер. Законът за запазването на енергията представлява теорема за величините, които трябва да се пресметнат и съберат, без да се мисли за причината за това; също така и великите закони на механиката представляват количествени математически закономерности, за вътрешния механизъм на които няма никакви данни. Защо ние можем да използуваме математиката за описването на законите, без да знаем тяхната причина? Никой не знае и това. Ние продължаваме да вървим по този път, защото по него все още стават открития.

Предлагани са много механизми за гравитацията. Интересно е да се разгледа един от тях, защото до идеята за него са идвали от време на време ту един, ту друг учен. При това всеки отначало е ощастливен от своето „откритие", но след това започва да разбира, че тук не всичко е в ред. За пръв път това откритие е било направено в 1750 г. Представете си, че в пространството летят в различни посоки и с огромна скорост много частици, които слабо се поглъщат от веществото. Поглъщайки се, те предават своя импулс на Земята. Но тъй като във всички посоки тяхното количество е еднакво, то всички импулси се уравновесяват. Когато пък Слънцето се намира близо, частиците, които се приближават към Земята през Слънцето, частично ще се поглъщат от него, така че откъм Слънцето ще идват по-малко частици, отколкото от обратната страна. Следователно Земята ще изпита импулс, насочен към Слънцето, и не е трудно да се види, че той ще бъде обратен на квадрата на разстоянието: такъв е законът за изменението на пространствения ъгъл, под който се вижда Слънцето, с увеличаване на разстоянието. Какво е лошото в този механизъм? Не са верни изводите, които следват от него. Появява се нова трудност: Земята при своето движение около Слънцето ще изпитва повече удари с частици отпред, отколкото отзад (когато бягаш срещу дъжда, лицето се мокри повече, отколкото тила!). Ето защо отпред Земята ще получи повече импулси, отколкото отзад, и трябва да изпита *съпротивление против своето движение*, а това би довело до забавянето ѝ по орбитата. Може да се пресметне колко време ще бъде нужно на Земята, за да се спре в резултат на такова съпротивление; оказва се, че не е така много; и тъй като Земята продължава да се движи по своята орбита, то тази механика е невалидна. И не е бил предложен ни един механизъм, „обясняващ" гравитацията, който да не предсказва допълнителни *несъществуващи* явления.

Нека да разгледаме още възможната връзка на гравитацията с другите сили. Понастоящем не е възможно гравитацията да бъде сведена към други сили. Гравитацията в никой случай не е проявление на електричеството или на нещо друго от този род; с това тя не може да бъде обяснена. И все пак гравитацията прилича на другите сили и любопитно е да се види по какво. Например електрическата сила между две еднакво заредени тела прилича извънредно много на гравитацията: тя е равна на постоянна величина, умножена по големините на зарядите на телата и

и се зменя обратно на квадрата на разстоянието. Наистина тя действува в обратна посока, т. е. отблъсква, но по-важна е еднаквата зависимост от разстоянието в двата закона. Не е изключено, че гравитацията и електричеството да са свързани значително по-силно, отколкото ние мислим. Бяха направени много опити те да бъдат обединени; тъй наречената единна теория на полето е само един от многото красиви опити за обединяването на електричеството и гравитацията. Но най-интересното нещо е *относителната големина* на тези сили. Всяка теория, в която фигурират двете сили, ще трябва също така да обясни големината на гравитационната константа (G).

Ако измерим в естествени единици отблъскването на два електрона (възникващо поради това, че те имат заряд) и тяхното привличане (възникващо поради наличието на маса у тях), ние можем да получим и отношението на електрическото отблъскване към гравитационното привличане. Това отношение не зависи от разстоянието, то е фундаментална мирова константа. Тя е изобразена на фиг. 7. 14. Гравитационното привличане се равнява на $1/4,17.10^{42}$ от електрическото отблъскване! Откъде възниква такова огромно число в знаменателя? То не е случайно, тъй като не представлява отношението на обема на Земята към обема на листната въшка. Ние разглеждаме две естествени свойства на едно и също тяло — електрона. Това фантастично число е естествена константа и в него се крият някакви дълбоки свойства на природата. От какви свойства зависи то? Някои се надяват, че ако някой веднаж напише „универсално уравнение", то един от неговите корени ще бъде това число. Но много е трудно да се намери уравнение, което би имало за корен такова немислимо число. Били разгледани и други възможности; една от тях го свързва с възрастта на Вселената. С други думи, необходимо е да се намери в природата *още* едно такова огромно число. При това възрастта не изчисляват в години, тъй като годината не е „естествена" величина, а е въведена от хората.

$$\frac{\text{Гравитац. притегляне}}{\text{Електрично отблъскване}} = \frac{1}{4,17 \cdot 10^{42}} =$$

$$= 1/4\,170\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

Фиг. 7.14. Относителната сила на електрическото и гравитационното взаимодействие на два електрона

Като пример за нещо естествено нека да изберем времето, за което светлината преминава през протона, т. е. 10^{-24} s. Като разделим това число на възрастта на Вселената (2.10^{10} години, $\approx 10^{18}$ s), ще получим 10^{-42} — число със също толкова нули; затова предлагат постоянната на всемирното привличане да се счита свързана с възрастта на Вселената. Ако това беше така, то тя щеше да се изменя с времето; със стареенето на Вселената отношението на нейните години към интервала от време, в течение на който светлината преминава през протона, би се увеличавало. Възможно ли е гравитационната константа наистина да се изменя с годините? Ясно е, че измененията са толкова малки, че е трудно да се убедим в това.

Ето един от начините да се провери тази мисъл. Нека да се запитаме: какво трябваше да се измени за последните 10^9 години (времето на появяването на живот на Земята), т. е. за 1/10 от възрастта на Вселената? За това време гравитационната константа би се увеличила с 10%. Оказва се, че ако разгледаме структурата на Слънцето — баланса между неговата маса и степента на генериране на излъчваема енергия вътре в Слънцето — то при увеличаване на тежестта с 10% Слънцето би се оказало не с 10% по-ярко, а значително повече: неговата яркост би се увеличила като *шестата степен* на гравитационната константа! Може да се пресметне и разстоянието, на което Земята би се приближила до Слънцето при такова изменение на тежестта. Излиза, че Земята би станала с повече от 100° по-гореща и следователно всичката вода от моретата би се превърнала в пара. Поради това ние сега *не вярваме*, че гравитационната константа се изменя със стареенето на света. Все пак приведеният от нас аргумент не е много убедителен и въпросът не е изяснен докрай.

Както е известно, силата на привличането е пропорционална на масата, т. е. на мярата на *инерцията* на тялото, или на мярата на трудността да се задържи тялото, което се движи по окръж-

ност. Ето защо две тела, тежко и леко, движещи се едно до друго около масивно тяло по една и съща окръжност и с еднаква скорост под действието на привличането, ще остават през цялото време едно до друго, защото движението по окръжност *изисква* за по-голямото тяло по-голяма сила. С други думи, тежестта на по-голямото тяло е по-голяма *точно в нужната пропорция,* така че двете тела ще се движат, без да се отдалечават едно от друго. Ако едното тяло се намира вътре в другото, то *ще остане* там; равновесието е абсолютно. Поради това Гагарин и Титов са наблюдавали безтегловността на всички предмети вътре в космическия кораб; пуснатият от ръката молив например се е въртял около Земята по същата траектория, по която се е въртял и целият кораб; ето защо той е оставал неподвижно висящ във въздуха. Любопитно е, че тази сила е *точно* пропорционална на масата; ако това не беше така, то трябваше да се наблюдават явления, в които инерцията и теглото се различават. Отсъствието на подобни явления е било с голяма точност проверено опитно за пръв път от Етвеш в 1909 г., а покъсно от Викке. Масата и теглото на всички вещества са пропорционални с точност 1/1000 000 000 или даже с по-голяма. Не е ли това превъзходен експеримент?

8. Гравитация и относителност

Заслужава обсъждане и направеното от Айнщайн видоизменение на Нютоновия закон за гравитацията. Оказва се, че въпреки предизвиканото от него въодушевление Нютоновият закон за гравитацията е все пак неверен! Вземайки предвид изискванията на теорията на относителността, Айнщайн е видоизменил този закон. Според Нютон гравитацията действува мигновено. Това значи следното: отмествайки тялото, ние трябва в същия миг да почувствуваме изменение на силата в резултат на отместването; следователно по такъв начин могат да се изпращат сигнали с безкрайна скорост. А Айнщайн е издигнал доводи *против възможността да се изпращат сигнали със скорост, по-голяма от тази на светлината;* по такъв начин законът за гравитацията трябва да е погрешен. Ако той бъде коригиран, като се вземе под внимание закъснението, ще се получи вече нов закон, законът за гравитацията на Айнщайн. Една от особеностите на новия закон е лесноразбираема: според теорията на относителността на Айнщайн всеки обект, който има енергия, има и маса в този смисъл, че той трябва да се привлича от другите обекти. Даже светлинният лъч има „маса", тъй като той притежава енергия. И когато светлинният лъч, носейки със себе си енергия, преминава край Слънцето, Слънцето го привлича. И лъчът вече се движи не по права линия, а се изкривява. Например през време на слънчевите затъмнения звездите, окръжаващи Слънцето, изглеждат отместени от това място, където те биха се наблюдавали, ако не беше Слънцето. Това явление наистина е било наблюдавано.

И накрая нека да съпоставим гравитацията с другите теории. През последните години се изясни, че всяка маса дължи своя произход на най-малките частици и че съществуват няколко вида взаимодействия, например ядрените сили и други подобни. Нито една от тези ядрени и електрически сили засега не обяснява гравитацията. Ние все още не сме разпространили квантовомеханичните страни на природата върху гравитацията. Когато на малки разстояния започват да се проявяват квантовите ефекти, гравитацията се оказва още толкова слаба, че за нея не възниква нужда от квантова теория. От друга страна, в интерес на последователността на нашите физически теории би било важно да се разбере дали законът на Нютон с внесените от Айнщайн видоизменения трябва да бъде изменен и по-нататък, за да се съгласува с принципа на неопределеността. Това последно видоизменение още не е направено.

8

Движение

1. Описание на движението

За да се намерят законите, които управляват ставащите с течение на времето различни изменения, необходимо е отначало да се опишат тези изменения и да се намери някакъв начин за тяхното записване. Да започнем с най-простото изменение, което става с тялото — с изменението на неговото положение в пространството, т. е. с това, което наричаме *движение*. Да разгледаме движещ се предмет, на който е нанесен малък белег; този белег ще наричаме точка. Не е важно дали това ще бъде връхчето на радиатора на автомобила, или центърът на падащото кълбо. Ние ще се опитаме да опишем нейното движение.

На пръв поглед това изглежда съвсем просто, но при описването на изменението се срещат много трудности. Някои изменения се описват по-трудно, отколкото движението на точка, нанесена върху твърд предмет. Например как да се опише движението на облак, който не само се премества бавно, но освен това изменя своите очертания или се изпарява? Или как да се опишат капризите на женския ум? Впрочем, доколкото измененията на облака (макар и по принцип) могат да се опишат с помощта на движението на всички молекули, които го съставят, то напълно е възможно, че и измененията на мислите са обусловени също от някакви премествания на атомите в мозъка, макар ние още да не знаем как да ги описваме.

Поради тази причина ще започнем с движението на точки. Ние бихме могли да считаме тези точки за атоми, но по-добре би било, ако отначало не се стремим към точност, а си представим точката просто като някакъв малък обект ,малък в сравнение с тези разстояния, които той изминава. Например, ако се говори за автомобил, изминал 100 km, то каква е разликата, ако се има предвид неговият мотор или багажник. Разбира се, малка разлика има, но обикновено ние казваме просто „автомобил“ и това, че той не е абсолютна точка, няма значение. За нашите цели не е нужна абсолютна точност. В интерес на простотата нека да забравим временно и това, че нашият свят е тримерен и нека да концентрираме нашето внимание върху движението в една посока (автомобилът се движи по прав път). Ние ще се върнем към понятието за три измерения, когато разберем как се описва движението в едно измерение. Вие вероятно ще кажете, че това е тривиално. Наистина това е така. Как да се опише движението в едно измерение, да речем движението на автомобила? Да се направи това е много просто. Ще приведа един от многото възможни начини. За да определим положението на автомобила в различни моменти, ние измерваме неговото разстояние от началната точка и записваме нашите наблюдения. В таблица 8. 1 буквата s означава разстоянието на автомобила от началната точка в метри, а t — времето в минути. В първия ред са нанесени нулевото разстояние и началният (нулев) момент, от който се отчита времето.

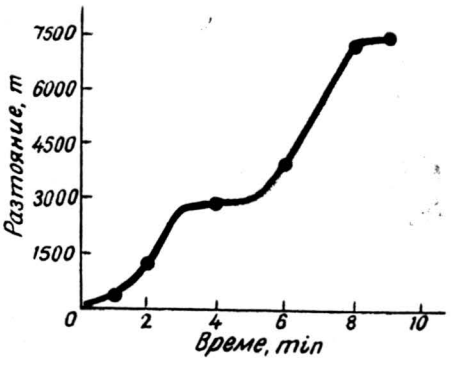
Автомобилът още не е започнал да се движи. Една минута след началото на движението той изминава вече 380 m. След две минути той продължава да се движи. Забележете, че през втората минута той изминава по-голямо разстояние, отколкото през първата — автомобилът ускорява своето движение, но между третата и четвъртата минута нещо се е случило, дори нещо повече, на петата минута той е спрял. Очевидно при светофара, защото по-нататък той пак набира скорост и в края на шестата минута изминава 4050 m, в края на седмата — 5550, а в края

1. Описание на движението
2. Скорост
3. Скоростта като производна
4. Разстоянието като интеграл
5. Ускорение

Таблица 8.1

Разписание на движението на автомобил

t min	s, m	t, min	s, m
0	0	5	3150
1	380	6	4050
2	1350	7	5550
3	2550	8	7050
4	2850	9	7500

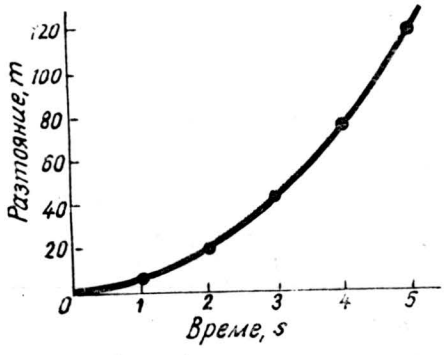


Фиг. 8.1. Графика на зависимостта на разстоянието, изминато от колата, от времето

Таблица 8.2

Разписание на движението на падащата топка

t, s	s, m
0	0
1	5
2	20
3	45
4	80
5	125
6	180



Фиг. 8.2. Графика на зависимостта на разстоянието, изминато от падащата топка, от времето

на осмата — 7050. Но в течение на деветата минута отново произшествие — автомобилът е изминал 450 m и е спрял. Шофьорът е нарушил правилата на движението и е бил спрян от полицая.

Това е един начин за описване на движението. Има и друг начин — графически. Ако по хоризонталата нанесем времето, а по вертикалата — разстоянието, ще получим крива, подобна на изобразената на фиг. 8.1. От рисунката се вижда, че с увеличение на времето разстоянието също се увеличава отначало много бавно, а след това все по-бързо и по-бързо. В течение на четири минути става забавяне, а след това разстоянието пак се увеличава в течение на няколко минути и в деветата минута колата спира. Всички тези сведения могат да се получат направо от графиката, без да се използува таблицата. Разбира се, за да се построи графиката, е необходимо да се знае къде се намира автомобилът не само във всяка минута, но и във всяка половин минута, а може би и още по-точно. Освен това ние предполагаме, че във всеки момент колата се намира някъде.

И така движението на автомобила изглежда все пак сложно. Нека да разгледаме нещо по-просто, с по-прост закон на движение: например падаща топка. В таблица 8.2 времето е дадено в секунди, а разстоянието в метри. За нулев момент избираме момента на началото на падането. 1 s след началото на падането топката прелетява 5 m, след 2 s — 20 m, след 3 s — 45 m. Ако нанесем тези числа на графиката, ние ще получим параболична крива на зависимостта на разстоянието от времето за падащото тяло (фиг. 8.2), която се описва от формулата

$$s = 5t^2. \tag{8.1}$$

Тази формула позволява да се изчисли разстоянието във всеки момент. Вие ще кажете, че за първата графика (виж фиг. 8.1) също трябва да има някаква формула. Действително това е така. Тя може да бъде записана в такъв абстрактен вид:

$$s = f(t). \tag{8.2}$$

Това означава, че s е величина, която зависи от t, или, както казват математиците, s е функция на t. Обаче ние не знаем каква е тази функция, по-точно, ние не можем да я запишем чрез някакви известни нам функции.

От тези два примера се вижда, че всяко движение може да се опише в обща и проста форма. Като че ли няма нищо трудно? Обаче трудности има. Първо, какво разбираме под *пространство* и *време*? Оказва се, че това са много дълбоки философски въпроси, които трябва да бъдат внимателно проанализирани, което не е така просто. Теорията на относителността показва, че понятията пространство и време не са така прости, както това изглежда на пръв поглед. Впрочем засега не ни е нужна такава точност при определянето на тези понятия. Вие вероятно ще кажете: „Странно, всякога са ми казвали, че в науката *всичко* трябва да се определя точно“. Това не е така. Ние не можем да определим точно всичко без изключение! Ако се опитаме да направим това, то би се получило нещо подобно на спора на двамата „философи“, в който единият казва: „Вие сами не разбирате какво говорите“; а вторият отговаря: „А какво е това „разбирате“? Какво е това „говорите“? Накрая какво е това „Вие“?“ И така нататък до безкрайност. Така че в интерес на работата трябва отначало да се условим какво ще говорим, макар и приблизително, за едни и същи неща. Сега вие знаете достатъчно много за времето, но помнете, че тук има някои тънкости, които ние ще обсъдим по-нататък.

Друга трудност (ние вече споменахме за нея) — правилно ли е да се мисли, че наблюдаваната от нас движеща се точка винаги се намира в някакво определено място (т. е. някъде е локализирана). Разбира се, когато я гледаме, тя се намира в определено място; но може ли това да се твърди за онези моменти, когато сме се обърнали. Оказва се, че при изучаването на движението

на атомите не може да се мисли така. Не е възможно да се постави белег на атома и да се следи неговото движение. С тази тънкост ние ще се срещнем в квантовата механика. Но нека отначало да разгледаме онези проблеми, които възникват до въвеждането на тези усложнения, и след това да вземем под внимание тези поправки, които се налагат от най-новите сведения за природата на нещата. И така, нека да приемем най-простата гледна точка за пространството и времето. Ние разбираме приблизително какво означават тези понятия, а този, на когато се е случвало да управлява автомобил, знае и какво е това скорост.

2. Скорост

Макар ние и да си представяме какво е това „скорост", тук се крие една много важна тънкост. Забележете, че древните гърци така и не могли докрай да разберат проблемата за скоростта. Тънкостта, за която става дума, се проявява, когато се опитваш точно да определиш какво се разбира под понятието „скорост". Този въпрос е бил извънредно труден за древните гърци и е било нужно откриването на нова област на математиката, освен геометрията и алгебрата, които са били известни и на гърците, и на арабите, и на вавилонците. Опитайте се само с помощта на алгебрата да решите следната задача. Въздушен балон се надува по такъв начин, че неговият обем се увеличава със скорост 100 cm^3/s. С каква скорост се увеличава неговият радиус, когато обемът на балона достигне 1000 cm^3? Задачите от този род били неразрешими за древните гърци. Освен това тях ги объркували многобройните „парадокси." Ето един от тях, измислен от Зенон, който добре показва доколко е била сложна в онова време проблемата за скоростта на движението. „Да предположим — казва той — че Ахилес бяга десет пъти по-бързо от костенурка. Въпреки това той никога не може да я изпревари. Наистина нека в началото на състезанието костенурката да се намира на 100 метра пред Ахилес. Когато Ахилес пробяга тези 100 метра, костенурката ще се окаже 10 метра пред него. Пробягвайки тези 10 метра, Ахилес ще види костенурката на 1 метър пред себе си. Докато той пробяга този метър, костенурката ще измине 10 сантиметра и т. н. до безкрайност. Следователно, във всеки момент костенурката ще бъде пред Ахилес и той никога не ще може да я изпревари." В какво се състои тук грешката? Крайният интервал от време може да бъде разделен на безкрайно число части също така, както и крайната дължина, ако последователно я делим на две. Но безкрайното число етапи до това място, където Ахилес ще се изравни с костенурката, съвсем не означава безкрайно количество време. Този пример показва с какви трудности са се сблъсквали при определянето на скоростта.

За да си представим още по-добре тези трудности, нека да си спомним старата шега, която вие вероятно сте чували. Вие помните, че автомобилът, за който говорихме в началото на тази лекция, беше спрян от полицай. Той се приближава и казва: „Госпожо (защото на кормилото е била жена), Вие нарушихте правилата на уличното движение. Вие карахте със скорост 90 километра в час." Жената отговаря: „Извинете, това е невъзможно. Как съм могла да правя 90 километра в час, когато аз пътувам всичко 7 минути!" Ако бяхте на мястото на полицая, какво бихте отговорили? Разбира се, ако сте истински полицай, с такива хитрувания не биха могли да ви объркат. Вие бихте казали твърдо: „Госпожо, ще се оправдавате пред съдията!" Но да предположим, че вие нямате такъв изход. Вие искате честно да докажете на нарушителката нейната вина и се опитвате да й обясните какво значи скорост 90 km/h. Как да се направи това? Вие ще кажете: „Аз имах предвид, госпожо, че ако бихте продължавали да пътувате по такъв начин, след един час бихте изминали 90 километра." „Да, но нали аз забавих и спрях колата — отговаря тя — така че сега аз никак не бих могла да измина 90 кило-

метра за един час."

Аналогична проблема изниква и в случая на падащото топче. Да предположим, че ние искаме да определим скоростта му след 3 секунди, ако то би се движило по такъв начин. Но какво значи „би се движило по такъв начин?" Да запази своето ускорение, да се движи по-бързо? Разбира се, не! Да запази същата *скорост*. Но скоростта е именно това, което ние искаме да определим! Ако топчето би продължавало да се движи „по такъв начин", то би падало така, както пада. Нужно е да се измисли нещо по-добро за определянето на скоростта. Все пак какво трябва да се запазва? Нарушителката би могла да ви отговори още и така: „Ако аз продължавах да пътувам, както пътувах, още един час, то бих се блъснала в стената в края на улицата!" Изобщо полицаят би се оказал в твърде трудно положение, опитвайки се да обясни какво е имал предвид.

Много физици мислят, че единственото определение на всяко понятие е начинът на неговото измерване. Но тогава при обяснението трябва да се възползувате от прибора, който измерва скоростта. „Гледайте — ще кажете вие в този случай — вашият скоростомер показва 90." „Моят скоростомер е счупен и от дълго време не работи" — ще отговори тя. Но достатъчно ли е това, за да се повярва, че колата не се е движила? Ние мислим, че е нужно по някакъв начин да се определи скоростта и без помощта на скоростомера. Само при тези условия може да се каже, че скоростомерът не работи, че той е счупен. Това щеше да бъде абсурдно, ако скоростта нямаше смисъл без него. Очевидно понятието „скорост" не зависи от скоростомера. Той е нужен само за нейното измерване. Нека да видим дали не може да се измисли по-добро определение на понятието „скорост." Вие ще кажете: „Разбира се, госпожо, ако пътувахте по такъв начин в течение на един час, щяхте да се блъснете в стената, но за 1 секунда щяхте да изминете 25 метра, така че Вие правехте 25 метра в секунда, и ако продължавахте да карате по такъв начин, в следващата секунда пак щяхте да изминете 25 метра, а стената стои доста по-далеч." Но правилата забраняват да се правят 90 километра в час, а не 25 метра в секунда." „Но това е едно и също нещо" — ще отговорите вие. Но ако това е едно и също нещо, то за какво са всички тези дълги разговори за 25 m/s? В действителност падащото топче не може да се движи по същия начин даже 1 секунда, тъй като то постоянно се ускорява и следователно нужно е скоростта да се определи някак си по-точно.

Но сега ние като че ли се намираме на правилен път, който ни води ето към какво. Ако колата продължаваше да се движи по същия начин през следващата хилядна част от часа, тя би изминала една хилядна част от 90 километра. С други думи, не е необходимо да се пътува цял час със същата бързина, достатъчен е някакъв *момент*. Това значи, че за някакъв момент колата изминава същото разстояние, както и движещата се с постоянна скорост 90 km/h. Нашите разсъждения за 25 m/s са може би правилни; ние отбелязваме колко е изминала колата през следващата секунда и ако се получи разстояние 25 m, това значи, че скоростта достига 90 km/h.

С други думи, скоростта може да се определи по следния начин. Определяме разстоянието, изминато за много малък интервал от време, и, разделяйки го на този интервал от време, получаваме скоростта. Обаче този интервал трябва да бъде колкото се може по-малък и колкото той е по-малък, толкова е по-добре, защото през този период могат да станат отново изменения. Смешно е например за падащо тяло да се приеме за такъв интервал 1 час. Да се приеме интервал от 1 секунда е може би удобно за автомобила, тъй като за 1 секунда неговата скорост се изменя не твърде много силно, но този интервал е голям за падащото тяло. По такъв начин, за да се пресметне скоростта по-точно, трябва да се вземат все по-малки и по-малки интервали от време. Ако разделим разстоянието на една милионна част от секундата, което е изминато в течение на това време, ще получим разстояние

за 1 секунда, т. е. точно това, което разбираме под скорост. Именно това беше нужно да се каже на нашата нарушителка.

Това определение съдържа нова идея, която била недостъпна за гърците в нейната обща форма.

Тази идея се състои в това, че *малките* разстояния се разделят на съответствуващите *малки* интервали от време и се изследва какво става с частното, ако интервалът от време се взема все по-малък и по-малък (с други думи, прави се граничен преход при неограничено намаляване на интервала от време). За пръв път тази идея била дадена от Нютон и Лайбниц (независимо един от друг) и залегнала в основата на една нова област на математиката — *диференциалното смятане*. То възникнало във връзка с описването на движението и неговото първо приложение било отговорът на въпроса: „какво значи 90 km/h?“

Нека сега да се опитаме по-точно да определим скоростта. Нека за някакъв малък интервал от време ε колата да е изминала малкото разстояние x; тогава скоростта v се определя, като

$$v = \frac{x}{\varepsilon},$$

при което точността ще бъде толкова по-голяма, колкото по-малко е ε. Математиците записват това по следния начин:

$$v = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x}{\varepsilon}, \tag{8.3}$$

т. е. скоростта е граница на отношението x/ε при ε, стремящо се към нула. За нашата кола-нарушителка е невъзможно точно да се пресметне скоростта, тъй като таблицата е непълна. Положението на колата ни е известно само през интервали от 1 мин. Приблизително, разбира се, може да се каже, че в течение на седмата минута например тя се е движила със средна скорост 90 km/h, обаче за нейната скорост в края на шестата минута нищо не може да се каже. Възможно е тя да се е ускорявала и скоростта от 40 km/h в началото на шестата минута да е достигнала до 90 km/h в края на същата ѝ минута, а може би тя се е движила другояче. Ние не знаем това със сигурност, тъй като нямаме подробни данни за нейното движение между шестата и седмата минута. Само когато таблицата бъде запълнена с безкрайно много данни, с нейна помощ би могло да се пресметне скоростта. Обаче ако ни е известна пълната математическа формула, както например в случая на падащото тяло [уравнение (8.1)], скоростта може да бъде пресметната, тъй като по формулата може да бъде намерено положението на тялото във всеки момент.

В качеството на пример нека да намерим скоростта на падаща топка 5 s след началото на падането. Един от начините за решаването на тази задача е да се погледне в таблица 8.2 какво е станало с топката през петата секунда. В течение на тази секунда топката е изминала 45 m и като че ли е падала със скорост 45 m/s. Обаче това не е вярно, тъй като нейната скорост постоянно се е изменяла. Разбира се, нейната средна скорост в течение на тази секунда е 45 m/s, но фактически топката се е ускорявала и в края на петата секунда е падала по-бързо от 45 m/s. Нашата задача се заключава в това да определим *скоростта точно*. Ще направим това по следния начин. Известно ни е къде топката се е намирала след 5 s. За 5 s тя е изминала разстояние 125 m. В момента 5,1 s общото разстояние, което е изминала топката, ще бъде според уравнението (8.1), 130,05 m. По такъв начин за допълнителната десета част от секундата тя изминава 5,05 m. А тъй като 5,05 m за 0,1 s е равносилно на 50,5 m/s, то това ще бъде нейната скорост. Обаче това все още не е съвсем точно. За нас е без значение дали това ще бъде скоростта в момента 5 s, или в момента 5,1 s, или някъде по средата. Нашата задача е да се пресметне скоростта точно след 5 s, а това ние още не сме направили. Трябва да се подобри точността и да се вземе сега с една хилядна част повече от 5 s, т. е. моментът 5,001 s. Пълното разстояние, което е изминато през това време, е равно на

$$s = 5.5{,}001^2 = 5.25{,}010001 = 125{,}050005 \text{ m}.$$

Следователно през последната хилядна част от секундата топката изминава 0,050005 m и ако разделим това число на 0,001 s, ще получим скорост 50,005 m/s. Това е вече много близко, но все още *не е точно*. Обаче сега е вече ясно какво трябва да се прави, за да се намери скоростта точно. По-удобно е тази задача да се реши в малко по-общ вид. Нека да се търси скоростта в някакъв момент t_0 (например 5 s). Разстоянието, което е изминато до момента t_0 (нека да го наречем s_0), ще бъде $5t_0^2$ (в нашия случай 125 m). За да определим разстоянието, ние задаваме въпрос: къде ще бъде тялото след време t_0+ (малка добавка), или $t_0+\varepsilon$? Новото положение на тялото ще бъде 5 $(t_0+\varepsilon)^2 = 5t_0^2+10t_0\varepsilon+5\varepsilon^2$ (Това разстояние е по-голямо от разстоянието, което топката е изминала за t_0 s, т. е. то е по-голямо от $5t_0^2$. (Нека да наречем това разстояние s_0 +(малка добавка), или s_0+x. Ако сега извадим от него разстоянието, изминато до момента t_0, ще получим x — това допълнително разстояние, което топката е изминала за допълнителното време ε, т. е. $x = 10t_0\varepsilon+5\varepsilon^2$. Така че в първо приближение скоростта ще бъде равна на

$$v = \frac{x}{\varepsilon} = 10t_0 + 5\varepsilon. \tag{8.4}$$

Сега вече ние знаем какво трябва да се направи, за да се получи скоростта точно в момента t_0: трябва интервалът ε да се взема все по-малък и по-малък, т. е. да се устреми към нула. По такъв начин от уравнението (8.4) ще получим

$$v \text{ (в момента } t_0) = 10t_0.$$

В нашата задача $t_0 = 5$ s, следователно скоростта $v = 10.5 =$ 50 m/s. Това представлява нужният отговор. По-рано, когато ε се вземаше равно на 0,1 и 0,001 s, се получаваше по-голяма стойност от 50 m/s, но сега ние виждаме, че фактически тя е точно равна на 50 m/s.

3. Скоростта като производна

Процедурата, която ние преди малко използувахме, се среща в математиката толкова често, че за величините x и ε е било прието специално означение: ε се означава с Δt, а x — с Δs. Величината Δt представлява „малка добавка към t", като при това се подразбира, че тази добавка може да се прави по-малка. Знакът Δ по никакъв начин не означава умножаване на някаква величина, точно така както $\sin\theta$ не означава s. i. n. θ. Това е просто някаква добавка към времето, като знакът Δ ни напомня за нейния особен характер. Но ако Δ не е множител, то той не може да бъде съкратен в отношението $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Това би било равносилно на съкращаването в израза $\sin\theta/\sin 2\theta$ на всички букви и получаването на 1/2. В тези нови означения скоростта е равна на границата на отношението $\Delta s/\Delta t$ при Δt, стремящо се към нула, т. е.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{8.5}$$

По същество това е формулата (8.3), но сега се вижда по-ясно че тук всичко се изменя, а освен това тя напомня какви именно величини се изменят.

Съществува още един закон, който е валиден с достатъчна точност. Той гласи: изменението на разстоянието е равно на скоростта, умножена по интервала от време, за който това изменение се осъществява, т. е. $\Delta s = v\Delta t$. Това правило е строго вярно само тогава, когато скоростта не се изменя в течение на интервала Δt, а това изобщо става, когато Δt е достатъчно малко. В такива случаи

обикновено пишат $ds=vdt$, където под dt подразбират интервал от време Δt при условие, че той е произволно малък. Ако интервалът Δt е достатъчно голям, то скоростта през това време може да се измени и изразът $\Delta s=v\Delta t$ ще бъде вече приблизително верен. Обаче ако ние пишем dt, то при това се подразбира, че интервалът от време е неограничено малък и в този смисъл изразът $ds=vdt$ е точен. В новите означения изразът (8.5) има вида

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}.$$

Величината ds/dt се нарича „производна на s по t“ (този израз напомня за това, какво се изменя), а сложният процес на намирането на производната се нарича диференциране. Ако ds и dt се появяват отделно, а не като отношение ds/dt, те се наричат диференциали. За да ви запозная по-добре с новата терминология, ще кажа още, че в предния параграф ние намерихме производната на функцията $5t^2$ или просто производната на $5t^2$. Тя се оказа равна на $10t$. Когато вие повече привикнете към новите думи, самата мисъл ще ви стане по-ясна. За тренировка нека да намерим производната на по-сложна функция. Да разгледаме израза $s=At^3+Bt+C$, който може да описва движението на точка. Буквите A, B, C също както в обикновеното квадратно уравнение означават постоянни числа. Ние трябва да намерим скоростта на движението, описвано от тази формула във всеки момент t. За тази цел нека да разгледаме момента $t+\Delta t$, като при това към s се прибавя някаква добавка Δs, и да намерим как се изразява Δs чрез Δt.

Тъй като

$$\begin{aligned}s+\Delta s&=A(t+\Delta t)^3+B(t+\Delta t)+C=\\&=At^3+Bt+C+3At^2\Delta t+B\Delta t+3At(\Delta t)^2+\\&+A(\Delta t)^3,\end{aligned}$$

а $s=At^3+Bt+C$,

то $\Delta s=3At^2\Delta t+B\Delta t+3At(\Delta t)^2+A(\Delta t)^3$.

Но на нас ни е нужна не самата величина Δs, а отношението $\Delta s/\Delta t$.

След деленето на Δt получаваме израза

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=3At^2+B+3At(\Delta t)+A(\Delta t)^3,$$

който след приближаването на Δt към нула се превръща в

$$\frac{ds}{dt}=3At^2+B.$$

В това се състои процесът на намиране на производната, или на диференцирането на функцията. В действителност той е по-лек, отколкото това може да се стори на пръв поглед. Забележете, че ако в изразите, подобни на горните, се срещат членове, пропорционални на $(\Delta t)^2$ или на $(\Delta t)^3$, или на още по-високи степени, те могат направо да бъдат зачеркнати, тъй като и без друго ще се обърнат в нула, когато накрая устремим Δt към нула. След малка тренировка вие направо ще виждате какво трябва да се оставя и какво веднага да се изхвърля. Съществуват много правила и формули за диференцирането на различни видове функции. Те могат или да се запомнят, или да се използуват специални таблици. Малък списък на такива правила е приведен в таблицата 8.3.

Таблица 8.3

Някои производни
s, u, v, w — произволни функции
a, b, c, n — произволни константи

функция	производна
$s=t^n$	$\frac{ds}{dt}=nt^{n-1}$
$s=cu$	$\frac{ds}{dt}=c\frac{du}{dt}$
$s=u+v+w+\cdots$	$\frac{ds}{dt}=\frac{du}{dt}+\frac{dv}{dt}+\frac{dw}{dt}+\cdots$
$s=c$	$\frac{ds}{dt}=0$
$s=u^a v^b w^c \ldots$	$\frac{ds}{dt}=s\left(\frac{a}{n}\frac{du}{dt}+\frac{b}{v}\frac{dv}{dt}+\frac{c}{w}\frac{dw}{dt}+\cdots\right)$

4. Разстоянието като интеграл

Сега да разгледаме обратната проблема. Нека вместо таблицата на разстоянията да ни е дадена таблица на скоростите в различни моменти, започвайки от нулата. В таблица 8.4 е представена зависимостта на скоростта на падащата топка от времето. Аналогична таблица може да бъде съставена и за колата, ако се записват показанията на скоростомера след всяка минута или полуминута. Но възможно ли е, знаейки скоростта на колата във всеки момент, да се пресметне разстоянието, което е било изминато от нея? Тази задача е обратна на задачата, която ние преди малко разгледахме. Как да се реши тя, ако скоростта на колата е непостоянна, ако колата ту се ускорява до 90 km/h, ту се забавя, след това се спира някъде при светофара и т. н.? Да се направи това не е трудно. Нужно е да се използува същата идея и да се изрази пълното разстояние чрез безкрайно малките негови части. Нека през първата секунда скоростта да бъде v_1, тогава по формулата $\Delta s=v_1\Delta t$ може да се пресметне разстоянието, изминато за тази секунда. През следващата секунда скоростта ще бъде друга, макар, може би, и близка до първоначалната, а разстоянието, изминато от колата за втората секунда, ще бъде равно на новата скорост, умножена по интервала от време (1 s). Този процес може да се продължи и по-нататък до самия край на пътя. В резултат ние ще получим много малки интервали, сумата на които ще даде целия път. По такъв начин пътят представлява сума от скорости, умножени по отделни интервали от време, или $s=\sum v\,\Delta t$, където гръцката буква $\sum$ (сигма) означава сумиране. По-точно това ще бъде сума от скорости в някои моменти, да речем t_i ,умножени по Δt:

$$s=\sum_i v(t_i)\Delta t, \tag{8.6}$$

като при това всеки следващ момент t_{i+1} се намира по правилото $t_{i+1}=t_i+\Delta t$. Но разстоянието, получено по този метод, не ще бъде точно, защото скоростта за време Δt все пак се изменя. Изходът от това положение се заключава във вземането на все по-малки и по-малки интервали Δt, т. е. в раздробяването на времето на движение на все по-голямо число по-малки интервали. В края на краищата ние ще дойдем до следния (сега вече точен) израз за изминатия път:

$$s=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_i v(t_i)\,\Delta t. \tag{8.7}$$

Математиците са приели за означаването на тази граница, както и за диференциала, специален символ. Знакът Δ се превръща в d, напомняйки за това, че интервалът от време е произволно малк, а знакът за сумиране се превръща в $\int$ (деформирано голямо S), първата буква на латинската дума „*Summa*“. Този знак се нарича интеграл. По такъв начин ние пишем

Таблица 8.4

Скорост на падащата топка

t, s	v, m/s
0	0
1	10
2	20
3	30
4	40

$$s = \int v(t)\, dt, \qquad (8.8)$$

където $v(t)$ е скоростта в момента t. Самата операция на сумиране на тези членове се нарича интегриране. Тя е противоположна на операцията диференциране в този смисъл, че производната на този интеграл е равна на $v(t)$, така че единият оператор (d/dt) „унищожава“ другия $\left(\int\right)$. Това дава възможност да се получат формули за интегралите чрез обръщане на формулите за диференциалите: интегралът от функцията, стояща в дясната колонка на табл. 8. 3, ще бъде равен на функцията, стояща в лявата колонка. Диференцирайки всички видове функции, вие сами можете да съставите таблица на интегралите.

Всяка функция, зададена в аналитична форма, т. е. изразяваща се чрез комбинация от известни функции, се диференцира много просто (цялата операция се извършва с чисто алгебрични средства), и в резултат ние получаваме някаква известна функция. Обаче не от всяка функция интегралът може да бъде записан в аналитичен вид. Разбира се, за всеки конкретен интеграл отначало винаги се стараят да намерят такава функция, която, след като бъде диференцирана, дава функцията, стояща под знака на интеграла (тя се нарича подинтегрална). Обаче това не всякога може да се направи. В такива случаи интегралът се пресмята просто чрез сумиране, т. е. пресмятат се сумите от типа (8.6) при все по-малки и по-малки интервали, докато не се получи резултат с достатъчна точност.

5. Ускорение

Следващата крачка по пътя към уравненията на движението — това е въвеждането на величина, която е свързана с *изменението* на скоростта на движението. Естествено е да се попита: а как се изменя скоростта на движението? В предшествуващите глави разглеждахме случай, когато действуващата сила води към изменение на скоростта. Съществуват леки коли, които набират за 10 s скорост 90 km/h. Знаейки това, ние можем да определим изменението на скоростта, но само средното изменение. Нека да се заемем със следния по-сложен въпрос: как да узнаем бързината на изменението на скоростта. С други думи, с колко метра в секунда се изменя скоростта за 1 s. Ние вече установихме, че скоростта на падащото тяло се изменя с времето по формулата $v = 9{,}8\, t$ (вж. табл. 8.4), а сега искаме да изясним каква е стойността на изменението за 1 s. Тази стойност на изменението на скоростта за 1 s, се нарича ускорение.

По такъв начин ускорението се определя като бързина на изменението на скоростта. От всичко казано по-рано ние сме вече достатъчно подготвени, за да можем веднага да запишем ускорението във вид на производна от скоростта, точно така както скоростта се записва във вид на производна от разстоянието. Ако сега диференцираме формулата $v = 9{,}8\, t$, ще получим ускорението на падащото тяло

$$a = \frac{dv}{dt} = 9{,}8. \qquad (8.9)$$

(При диференцирането на този израз е използуван резултатът, получен от нас по-рано. Ние видяхме, че производната от Bt е равна просто на B (на константа). Ако положим тази константа, равна на 9,8, то веднага намираме, че производната от $9{,}8\, t$ е равна на 9,8.) Това означава, че скоростта на падащото тяло постоянно се увеличава с 9,8 m/s за всяка секунда. Същият резултат може да се получи и от таблица 8.4. Както виждате, в случая на падащо тяло всичко се получава достатъчно просто, но ускорението е изобщо непостоянно. То се получи постоянно само затова, защото е постоянна силата, която действува на падащото тяло, а по закона на Нютон ускорението трябва да бъде пропорционално на силата.

Като следващ пример нека да намерим ускорението в задачата, която ние вече разгледахме при изучаването на скоростта.

$$s = At^3 + Bt + C.$$

За скоростта $v = ds/dt$ ние получихме формулата

$$v = 3At^2 + B.$$

Тъй като ускорението представлява производната на скоростта по времето, то за да се намери неговата стойност, трябва да се диференцира тази формула. Да си припомним сега едно от правилата на таблица 8.3, а именно, че производната от сума е равна на сума от производни. За да диференцираме първия от тези членове, ние няма да постъпим както по-рано, а само ще напомним, че такъв квадратичен член ние срещнахме при диференцирането на функцията $5t^2$, като при това в резултат коефициентът се удвояваше, а t^2 се превръщаше в t. Вие можете сами да се убедите, че същото ще стане и сега. По такъв начин производната от $3At^2$ ще бъде равна на $6At$. Да преминем сега към диференцирането на втория член. Според едно от правилата в таблица 8.3 производната от постоянна е нула и следователно този член няма да внесе в ускорението никаква добавка. Окончателният резултат е $a = \frac{dv}{dt} = 6At$.

Нека да изведем още две полезни формули, които се получават чрез интегриране. Ако тялото от състояние на покой се движи с постоянно ускорение g, неговата скорост v във всеки момент t ще бъде

$$v = gt,$$

а разстоянието, изминато до този момент, ще бъде

$$s = \frac{1}{2} gt^2.$$

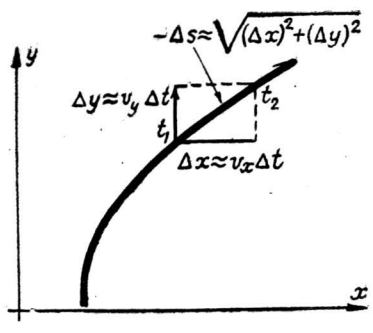
Нека да забележим още, че тъй като скоростта представлява $\frac{ds}{dt}$, а ускорението е производната на скоростта по времето, може да се напише

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}. \qquad (8.10)$$

Така че сега ние знаем как се записва втората производна.

Съществува, разбира се, и обратна връзка между ускорението и разстоянието, която следва просто от това, че $a = dv/dt$. Тъй като разстоянието представлява интеграл от скоростта, то може да бъде намерено чрез двойно интегриране на ускорението.

Цялото досегашно разглеждане беше посветено на движението в едно измерение, а сега ние накратко ще се спрем на движението в пространство с три измерения. Да разгледаме движението на частицата P в тримерното пространство. Тази глава започна с обсъждането на едномерното движение на лека кола, а именно с въпроса, на какво разстояние от началото на движението се намира колата в различни моменти. След това ние обсъждахме връзката между скоростта и изменението на разстоянието с времето и връзката между ускорението и изменението на скоростта. Нека да изследваме в тази последователност движението в тримерното пространство. По-просто е обаче да започнем с по-нагледен, двумерен случай и след това да го обобщим за случая с три измерения. Нека да нарисуваме две пресичащи се под прав ъгъл линии (координатни оси) и нека да даваме положението на частицата във всеки момент чрез разстоянието ѝ до осите. По такъв начин положението на частицата се дава с две числа (координати) x и y, всяко едно от които представлява разстояние съответно до оста y и до оста x (фиг. 8.3). Сега ние можем да опишем движението, съставяйки например таблица, в която тези две координати са зададени като функции от времето. (Обобщаването за тримерния случай изисква въвеждането на още една ос, перпендикулярна на двете първи, и измерването на още една коор-



Фиг. .3. Описване на движението на тялото в равнината и пресмятане на неговата скорост

дината z. Обаче сега разстоянията се вземат не до осите, а до координатните *равнини*.) Как да се определи скоростта на частицата? За тази цел ние отначало ще намерим компонентите на скоростта по всяко направление. Хоризонталната компонента на скоростта (или x-компонентата) ще бъде равна на производната на координатата x по времето, т. е.

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \tag{8.11}$$

а вертикалната компонента (или y-компонента) ще бъде

$$v_y = \frac{dy}{dt}. \tag{8.12}$$

В случая на три измерения е необходимо да се добави още

$$v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{8.13}$$

Как, знаейки компонентите на скоростта, да се определи пълната скорост по посоката на движението? Да разгледаме в двумерния случай две последователни положения на частицата, разделени с малък интервал от време $\Delta t = t_2 - t_1$ и с разстояние Δs. От фиг. 8.3 се вижда, че

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \tag{8.14}$$

(Знакът $\approx$ съответствува на израза „приблизително равно“.) Средната скорост в течение на интервала Δt се получава с просто деление: $\Delta s/\Delta t$. За да се намери точната скорост в момента t, е нужно, както това беше вече правено в началото на главата, Δt да клони към нула. Резултатът е

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{8.15}$$

В тримерния случай по същия начин може да се получи

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{8.16}$$

Ускоренията ние определяме по същия начин, както и скоростите: x-компонентата на ускорението a_x се определя като производна от x-компонентата на скоростта v_x (т. е. $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ е втората производна по времето) и т. н.

Нека да разгледаме още един интересен пример на смесено движение в равнина. Нека топката да се движи в хоризонтална посока с постоянна скорост и в същото време да пада вертикално надолу с постоянно ускорение g. Какво представлява това движение? Тъй като $v_x = dx/dt = u$ и следователно скоростта v_x е постоянна, то

$$x = ut, \tag{8.17}$$

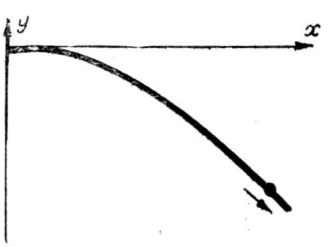
а тъй като ускорението на движението надолу е постоянно и равно на $-g$, координатата y на падащата топка се дава от формулата

$$y = -\frac{1}{2} gt^2. \tag{8.18}$$

Каква крива описва нашата топка, т. е. каква е връзката между координатите x и y? От уравнението (8.18) съгласно (8.17) може да се изключи времето (тъй като $t = x/u$), след което намираме

$$y = -\frac{g}{2u^2} x^2. \tag{8.19}$$

Тази връзка между координатите x и y може да се разглежда като уравнение на траекторията на движението на топката. Ако я изобразим графически, ще получим крива, която се нарича парабола (фиг. 8.4). Така че всяко свободно падащо тяло, хвърлено в някаква посока, се движи по парабола.



Фиг. 8.4. Параболата, която се описва от падащо тяло, хвърлено с хоризонтална начална скорост

9

Нютонови закони на динамиката

1. Импулс и сила
2. Компоненти на скоростта, ускорението и силата
3. Какво е сила?
4. Смисълът на уравненията на динамиката
5. Числено решение на уравненията
6. Движение на планетите

1. Импулс и сила

Откриването на законите на динамиката или законите на движението стана един от най-драматичните моменти в историята на науката. До Нютон движението на различните тела, например планетите, представляваше загадка за учените, но след откритието на Нютон изведнъж всичко стана ясно. Бяха пресметнати даже много слаби отклонения от законите на Кеплер, обусловени от влиянието на другите планети. Движението на махалото, трептеливото движение на тяло, окачено на пружина, и други неясни дотогава явления откриха своите загадки благодарение на законите на Нютон. Същото може да се каже и за тази глава. Преди нея вие не сте в състояние да пресметнете как се движи окачено на пружина тяло и още по малко да определите влиянието на Юпитер и Сатурн върху движението на Уран. Но след тази глава на вас ще ви бъде достъпно и едното, и другото!

Първата голяма крачка в разбирането на движението е била направена от Галилей, когато той открил своя *принцип на инерцията*: тяло, предоставено само на себе си, ако върху него не действува никаква сила, запазва своето праволинейно движение с постоянна скорост, както се е движило преди това, или остава в покой, ако преди това е било в покой. Разбира се, в природата такова нещо не става. Опитайте се да тласнете кубче, намиращо се на масата. То ще се спре. Причината е в това, че кубчето се *трие* в масата, то не е предоставено само на себе си. Нужно е много богато въображение, за да се види зад това принципът на инерцията.

Естествено нужно е още да се реши следната проблема: как се *изменя* скоростта на тялото, ако нещо му *действува*? Отговорът е бил даден от Нютон. Той формулирал три закона. *Първият* закон представлява просто повторение на принципа на инерцията на Галилей. *Вторият* закон говори за това, как се изменя скоростта на тялото, когато то е подложено на различни въздействия, т. е. когато му действуват *сили*. *Третият* закон описва в определен смисъл силата, но за него ние ще поговорим малко по-късно. Тук ще говорим за Втория закон, съгласно който под действието на сила движението на телата се изменя по следния начин: *скоростта на изменението на някаква величина с течение на времето, наречена количество на движението (или импулс), е пропорционална на силата.* По-късно ние ще запишем кратка математическа формулировка на този закон, а сега нека да разгледаме неговото съдържание.

Импулсът и скоростта са различни неща. Във физиката се употребяват много думи и всяка една от тях за разлика от обикновения разговорен език има точен смисъл. За пример може да служи думата „импулс“ и ние сме длъжни да я определим точно. Тласнете слабо с ръка някой лек предмет — той веднага ще започне да се движи. Ако със същата сила се тласне много по-тежък предмет, той ще се движи значително по-бавно. Всъщност трябва да се говори не за „лек“ или „тежък“ предмет, а за *по-малко масивен* или повече *масивен*, тъй като между *теглото* и *инерцията* на предмета има разлика, която трябва да се взема под внимание. (Колко тежи тялото — това е едно нещо, а доколко е трудно да се приведе в движение — това е съвсем друго нещо.) Обаче на повърхността на Земята теглото и инерцията *са пропорционални* и твърде често се разглеждат като числено равни.

Това често води до неразбиране на разликата между тях. На Марс например теглото на предметите ще се различава от теглото им на Земята, но инертността ще си остане същата, т. е. ще е нужно същото количество сила, за да се преодолее инерцията на тялото.

Количествената мярка за инертност е *масата.* Тя може да се измери така: завързва се предметът с връв, завъртва се с определена скорост и се измерва силата, която е необходима, за да го задържи. По този начин може да се измери масата на всеки предмет. *Импулсът* е произведението на масата на тялото и на неговата *скорост.* Сега Вторият закон на Нютон може да бъде записан в математична форма:

$$\mathbf{F}=\frac{d}{dt}\left(m\mathbf{v}\right). \tag{9.1}$$

Нека да разгледаме по-подробно някои негови страни. При написването на закон, подобен на този, обикновено се използуват много интуитивни идеи; нещо се подразбира, нещо се предполага и комбинира в приблизителен „закон". Но след това е необходимо отново връщане назад и подробно изучаване значението на всеки член. При опит да се направи това от самото начало може да се изпадне в безнадеждна безизходица. Така че ние смятаме някои положения за очевидни и неизискващи никакво доказателство. Първо, ние считаме, че масите на телата са *постоянни.* Това е въобще неправилно, но ние ще започнем с приближението на Нютон, когато масата се счита за постоянна и неизменяща се с течение на времето. На второ място, ако съединим два предмета, масата на образуваното тяло ще бъде равна на сумата от техните маси. Това се е предполагало неявно от Нютон, когато той е писал своите уравнения. В противен случай те биха били безсмислени. Нека например масата да се изменя обратно пропорционално на скоростта. Тогава импулсът *никога не би се изменял* и законът би загубил всякакво съдържание, с изключение само на това, че вие знаете как се изменя масата с изменението на скоростта. Така че отначало ние считаме масата за *неизменна.*

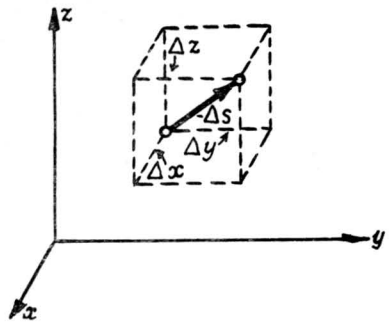
Няколко думи за силата. Като първо грубо приближение ние разглеждахме силата като някакъв тласък или тяга, която може да бъде произведена с помощта на нашите мишци, но сега, използувайки уравнението на движението, ние можем да я определим по-точно. Много е важно да се помни, че законът на Нютон включва не само изменението на големината на импулса, но и изменението на неговата посока. И така, ако масата е постоянна, уравнението (9.1) може да бъде записано във вида

$$\mathbf{F}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=m\mathbf{a}, \tag{9.2}$$

където а е ускорение, т. е. „скорост на изменението на скоростта" Вторият закон на Нютон означава не само това, че измененията, предизвикани от дадена сила, са обратно пропорционални на масата, но и това, че посоката на изменението на скоростта съвпада с посоката на действието на силата. Важно е да се разбере, че терминът „ускорение" има във физиката по-широк смисъл, отколкото в обикновения разговорен език. Той означава не само увеличение на скоростта, но и забавяне (в този случай ние говорим, че ускорението е отрицателно), и изменение на посоката на движението. В гл. 7 ние вече се запознахме с ускорението, насочено под прав ъгъл към скоростта, и видяхме, че предметът, движещ се по окръжност с радиус R и скорост v, за малък интервал от време t се отклонява от своя прав път на разстояние $1/2\ (v^2/R)\ t^2$. Така че в този случай ускорението е насочено под прав ъгъл към посоката на движението и е равно на

$$a=\frac{v^2}{R}. \tag{9.3}$$

По такъв начин силата, действуваща под прав ъгъл към ско-



Фиг. 9.1. Малко преместване на тялото

ростта, предизвиква изкривяване на пътя, като при това радиусът на кривината може да се намери, като се раздели силата на масата на тялото (при това ние получаваме ускорение) и като се използува след това формулата (9.3).

Терминът „скорост“ също има по-широк смисъл във физиката, отколкото в обикновения живот. Това не е просто няколко метра в секунда, т.е. абсолютната големина на скоростта, но и *посоката* на преместването във всеки момент. Математически ние можем да опишем и големината, и посоката на скоростта, ако задаваме изменението на координатите на тялото с течение на времето. Нека например в някакъв момент тялото да се движи така, както е показано на фиг. 9.1. Тогава за малък интервал от време Δt то ще измине някакво разстояние Δx по посока на оста x, Δy по посока на оста y и Δz по посока на оста z. Резултатът от тези изменения на координатите ще бъде преместването Δs по диагонала на паралелепипеда със страни Δx, Δy, Δz, които са свързани с компонентите на скоростта и интервала от време по следния начин:

$$\Delta x = v_x \Delta t, \quad \Delta y = v_y \Delta t, \quad \Delta z = v_z \Delta t. \tag{9.4}$$

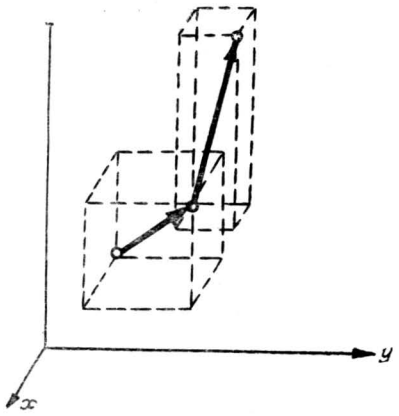
2. Компоненти на скоростта, ускорението и силата

В уравнението (9.4) ние разложихме скоростта на компоненти, които ни говорят колко бързо се премества тялото в посоките x,y и z. Скоростта ще бъде напълно определена както по отношение на нейната посока, така и по отношение на нейната абсолютна големина, ако са зададени числените стойности на нейните три компоненти:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{9.5}$$

При това абсолютната големина е равна на

$$\frac{ds}{dt} = |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{9.6}$$



Фиг. 9.2. Скоростта се изменя както по големина, така и по посока

Нека сега под действието на силата да се изменя не само големината, но и посоката на скоростта (фиг. 9.2.). Макар това да е доста сложен случай, с помощта на пресмятането на изменението на компонентите неговото разглеждане силно се опростява. Изменението на x-компонентата на скоростта за интервала Δt ще бъде $\Delta v_x = a_x \Delta t$, където a_x е това, което се нарича x-компонента на ускорението. Напълно аналогично $\Delta v_y = a_y \Delta t$ и $\Delta v_z = a_z \Delta t$. В такава формулировка Вторият закон на Нютон фактически се превръща в три закона. Наистина ние казваме, че силата има същата посока, както и ускорението, така че всяка от компонентите на силата в посоките x, y и z е равна на масата, умножена по изменението на съответната компонента на скоростта:

$$\begin{aligned} F_x &= m\frac{dv_x}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} = ma_x, \\ F_y &= m\frac{dv_y}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2} = ma_y, \\ F_z &= m\frac{dv_z}{dt} = m\frac{d^2z}{dt^2} = ma_z. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Подобно на скоростта и ускорението силата също може да бъде разложена на компоненти, като при това всяка една от тях представлява проекция на отсечката от права (числено равна на абсолютната големина на силата, и показваща посоката на нейното действие), върху осите x, y и z:

$$\begin{aligned} F_x &= F\cos(\widehat{xF}), \\ F_y &= F\cos(\widehat{yF}), \\ F_z &= F\cos(\widehat{zF}), \end{aligned} \tag{9.8}$$

където F е абсолютната големина на силата, а $(\widehat{xF})$, $(\widehat{yF})$ и $(\widehat{zF})$ са ъглите между посоките на силата и осите x, y и z.

Уравненията (9.7) представляват пълната форма на Втория закон на Нютон. Знаейки силите, които действуват на тялото, и разлагайки ги на компоненти, може с помощта на тези уравнения да се намери движението на тялото. Да разгледаме прост пример. Нека в посоките x и y да не действуват никакви сили, а да има сила само по посока на z (да речем, вертикално). Тогава съгласно уравнението (9.7) изменя се само вертикалната компонента на скоростта; що се касае до хоризонталните, те ще останат неизменни. Такова движение беше вече разгледано в гл.7 (виж фиг.7.3). По такъв начин хоризонталното движение на падащото тяло остава неизменно, докато във вертикална посока то се движи така, като че ли никакво хоризонтално движение изобщо няма. С други думи, ако компонентите на силите не са свързани помежду си, то и движенията по посоките на осите x, y и z ще бъдат независими.

3. Какво е сила?

За да ползуваме законите на Нютон, трябва да имаме някаква формулировка за силите; нали тези закони ни казват: *помислете за силите.* Ако тялото се ускорява, това значи, че нещо му действува. А как да се намери това „нещо“ ? Програмата ни за в бъдеще трябва да бъде *намирането на законите за силите.* Някои от тези закони са били намерени от самия Нютон. Например формулата за силата на привличането. Част от сведенията за силите от друг род се съдържа в Третия закон, според който силите на действието и противодействието са равни, но затова ще говорим по-подробно в следващата глава.

Нека да продължим нашия предшествуващ пример. Какви сили действуват на тялото близо до повърхността на Земята? Това е силата на тежестта, която е насочена вертикално надолу, пропорционална е на масата на тялото и за височини, много по-малки, отколкото радиуса на Земята R, почти не зависи от височината; тя е равна на $F=GmM/R^2=mg$, където $g=GM/R^2$ е тъй нареченото *ускорение на силата на тежестта.* В хоризонтална посока тялото както по-рано ще се движи с постоянна скорост, обаче движението във вертикална посока е по-интересно. По Втория закон на Нютон

$$mg=m\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{9.9}$$

След съкращаването на масата m получаваме, че ускорението по посока на x е постоянно и равно на g. Това е добре известното движение на свободно падащото тяло, което се описва от уравненията

$$\begin{aligned} v_x&=v_o+gt,\\ x&=x_o+v_ot+\frac{1}{2}gt^2. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Да разгледаме друг пример. Нека да си представим, че сме могли да създадем устройство (фиг. 9.3.), в което силата е право пропорционална на отклонението от положението на равновесие и е насочена противоположно на него — това е пружина с окачена на нея тежинка. Наистина, тъй като силата на тежестта се компенсира от началното опъване на пружината, има смисъл да се говори само за *допълнителна* сила. Ако дръпнем тежинката надолу, пружината ще се разтегне и ще я потегли нагоре; ако тласнем тежинката нагоре, пружината ще се свие и ще я тласне надолу. При това всичко е устроено по такъв начин, че колкото по-голяма е силата и колкото по-силно ние дърпаме тежинката надолу, толкова повече се разтяга пружината и толкова по-силно я дърпа нагоре, и обратно. Наблюдавайки действието на това устройство, ние виждаме доста интересно движение: нагоре — надолу, нагоре — надолу ...



Фиг. 9.3. Тежинка, окачена на пружинка

Възниква въпросът, могат ли уравненията на Нютон да го опишат правилно? Ако приложим закона на Нютон (9.7) за такъв периодичен осцилатор, ще получим следното уравнение:

$$-kx=m\frac{dv_x}{dt}, \tag{9.11}$$

т. е. тук ние имаме такова положение, когато x-компонентата на скоростта се изменя с бързина, пропорционална на x. Сега няма смисъл да се въвеждат многобройни константи; с цел за простота нека да предположим, че или мащабът за време се е изменил, или нещо е станало с другите единици за измерване, с една дума, нека те да са избрани така, че k/m да е равно на единица. И така ще се опитаме да решим уравнението

$$\frac{dv_x}{dt}=-x. \tag{9.12}$$

За да вървим по-нататък, нужно е отначало да видим какво е v_x; че това е бързината на изменението на положението, на нас, разбира се, ни е вече известно.

4. Смисълът на уравненията на динамиката

Да се опитаме сега да разберем какво значи уравнението (9.12). Нека в даден момент t тялото да се намира в точката x и да се движи със скорост v_x. Какво ще бъде неговото положение и скорост след малък интервал от време, т. е. в момента $t+\varepsilon$? Ако можем да отговорим на този въпрос, проблемата е решена, тъй като, излизайки от началните условия, т.е. положението и скоростта в някакъв начален момент, можем да кажем как те се изменят в първия момент, а знаейки положението и скоростта в първия момент, можем да ги намерим в следващия и т. н. По такъв начин крачка след крачка се строи цялата картина на движението. За по-голяма определеност ще предположим, че в момента $t=0$ положението на тежинката е $x=1$, а нейната скорост $v_x=0$. Защо въобще се движи тежинката? Затова защото на нея във всяко положение, с изключение на положението на равновесие $x=0$, действува *сила*. Ако $x>0$, тази сила е насочена нагоре. Следователно скоростта, която в началото беше нула, благодарение на уравнението на движение започва да се изменя. Но веднага щом скоростта започне да расте, тежинката започва да се движи. За всеки момент t при много малко ε може с достатъчна точност да се намери положението в момента $t+\varepsilon$ чрез скоростта и положението в момента t:

$$x\,(t+\varepsilon)=x\,(t)+\varepsilon v_x(t). \tag{9.13}$$

Разбира се, този израз е толкова по-точен, колкото е по-малко ε, но той може да бъде достатъчно точен даже когато интервалът ε не е изчезващо малък. Какво може да се каже сега за скоростта? За да се определи скоростта в момента $t+\varepsilon$, очевидно трябва да се знае как се изменя тя с времето, т. е. трябва да се знае *ускорението*. А как да го узнаем? Тук на помощ идват уравненията на динамиката. Именно те позволяват да се определи на какво е равно ускорението. В нашата задача уравнението на динамиката казва, че ускорението е равно на $-x$. Затова

$$v_x(t+\varepsilon)=v_x(t)+\varepsilon a_x(t), \tag{9.14}$$

$$=v_x(t)-\varepsilon x(t). \tag{9.15}$$

Уравнението (9.14) е кинематично; то показва, че поради наличието на ускорение скоростта се изменя. Обаче уравнението (9.15) е вече *динамично*, защото то свързва ускорението със силата. То говори, че в дадената конкретна задача за даден момент ускорението може да се замени с $-x(t)$. Следователно, ако в някакъв момент са ни известни положението x и скоростта v_x, ние знаем и ускорението, което ни дава възможност да намерим скоростта в

следващия момент, а скоростта на свой ред определя ново положение и т. н. Ето по какъв начин действува целият този динамичен механизъм! Действуващата сила изменя малко скоростта, а скоростта води към малко изменение на положението.

5. Числено решение на уравненията

Нека сега да решим нашата задача. Да допуснем, че сме взели $\varepsilon = 0{,}100$ s. (Ако след като сме направили всички изчисления, се окаже, че този интервал е недостатъчно малък, необходимо е да се повтори всичко отначало с по-малък нитервал от време, напр. 0,010 s.) На колко ще бъде равно x (0,1), ако в началния момент $x(0) = 1$? То е равно на старото положение $x(0)$ плюс скоростта в началния момент (която е равна на нула), умножена по 0,10 s.

По такъв начин x (0,1) е равно на 1,00, защото тежинката още не е започнала да се движи. Но новата скорост в момента 0,10 s ще бъде равна на старата скорост $v(0) = 0$ плюс ε, умножено по ускорението. А самото ускорение е равно на $-x(0) = -1{,}00$. Така че

$$v(0{,}1) = 0{,}00 - 0{,}10.1{,}00 = -0{,}10.$$

В момента 0,20 s

$$x\ (0{,}2) = x\ (0{,}1) + \varepsilon v(0{,}1) = 1{,}00 - 0{,}10.0{,}10 = 0{,}99$$

и

$$v\ (0{,}2) = v\ (0{,}1) + \varepsilon a\ (0{,}1) = -0{,}10 - 0{,}10.1{,}00 = -0{,}20.$$

Продължавайки тази процедура, можем да намерим положението и скоростта във всеки момент, а това именно ни е нужно. Обаче практически ние ще използуваме прост начин, който ще ни позволи да увеличим точността на пресмятанията. Ако бихме продължили започнатите пресмятания, те биха се оказали доста груби, тъй като интервалът $\varepsilon = 0{,}10$ s е доста голям. Бихме били принудени да го намалим, да речем, до 0,01 s. Но тогава, за да проследим движението в течение на някакъв разумен интервал от време, би трябвало да направим доста много изчисления. Обаче ние ще организираме процеса по такъв начин, че да можем да увеличим точността, като използуваме същия нитервал $\varepsilon = 0{,}10$ s. Това може да се достигне, като до известна степен се измени методът на пресмятането.

Забележете, че новото положение на тялото е равно на старото плюс интервала от време ε, умножен по скоростта. Но каква е тази скорост? В *какъв момент*? В началото на интервала скоростта е една, а в края тя е съвсем друга. Измененият метод се състои във вземането на скоростта в *средата* на *интервала*. Ако е известна скоростта в настоящия момент и е известно, че тя се изменя, как можем да се надяваме да получим удовлетворителен резултат, считайки, че тялото през цялото време се движи със същата скорост, както в настоящия момент? По-разумно е да се използува някаква средна скорост между началото и края на интервала. Същите разсъждения са приложими и към изменението на самата скорост: за пресмятането на нейните изменения е нужно да се използува ускорението в средната точка между двата момента от време, в които е необходимо да се намери скоростта. По такъв начин реално ние ще използуваме следните уравнения: положението в края на интервала е равно на положението в началото плюс интервала ε, умножен по скоростта в *средата* на *интервала*. Тази скорост на свой ред е равна на скоростта в средата на предшествуващия интервал плюс ускорението в началото на интервала, умножено по ε.

По такъв начин ние ще използуваме уравненията

$$x\ (t+\varepsilon) = x\ (t) + \varepsilon v\ (t+\tfrac{\varepsilon}{2}), \qquad (9.16)$$

$$v\ (t+\tfrac{\varepsilon}{2}) = v(t-\tfrac{\varepsilon}{2}) + \varepsilon a\ (t),\ a\ (t) = -x\ (t).$$

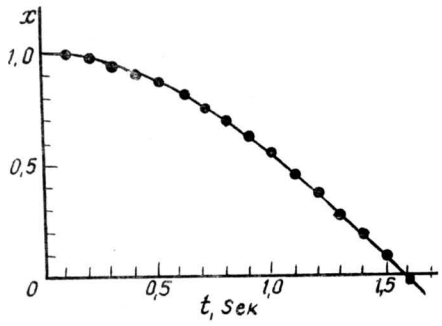
Остава още един малък въпрос: какво е $v\,(\varepsilon/2)$? Отначало ние имахме $v\,(0)$. а не $v(-\varepsilon/2)$. Но сега, за да започнем нашите пресмятания, необходимо е да използуваме допълнителното уравнение

$$v\,(\varepsilon/2)=v\,(0)+(\varepsilon/2)\,a\,(0)$$

Таблица 9,1

Решение на уравнението $(dv_x/dt) = - x$ Интервалът $\varepsilon=0.10$ s

t	x	v_x	a_x
0,0	1,000	0,000	—1,000
		—0,050	
0,1	0,995	—0,150	—0,955
0,2	0,980	—0,248	—0,980
			—0,955
0,3	0,955		
0.4	0,921	—0,343	—0,921
		—0,435	
0,5	0,877		—0,877
		—0,523	
0,6	0,825		—0,825
		—0,605	
0,7	0,764		—0,764
		—0,682	
0,8	0,696		—0,696
		—0,751	
0,9	0,621		—0.621
		—0,814	
1,0	0,540		—0,540
		—0,868	
1,1	0,453		—0,453
		—0,913	
1,2	0,362		—0,362
		—0,949	
1,3	0,267		—0,267
		—0,976	
1,4	0,169		— 0,169
		—0,993	
1,5	0,070		—0,070
		—1,000	
1,6	—0,030		+0,030



Фиг. 9.4. Графика на движението на тежинката, окачена на пружинка

Сега всичко е готово за пресмятанията. За удобство те могат да бъдат извършени във вид на таблица, в колоните на която стоят времето, положението, скоростта и ускорението, като скоростта се пише между редовете (табл. 9.1). Такава таблица е, разбира се, само удобен начин за записване на резултатите, получени от уравненията (9.16), и фактически напълно ги заменя. Ние запълваме едно след друго свободните места в нея и получаваме много интересна картина на движението: отначало тежинката се намира в покой, след това постепенно придобива отрицателна скорост (нагоре), а това води до намаляване на нейното разстояние от точката на равновесието. При това макар ускорението и да става по-малко, то все още „подгонва“ скоростта. Обаче при приближаването към положението на равновесие $(x=0)$ ускорението става все по-малко и по-малко, скоростта расте все по-бавно и по-бавно, но все още расте непосредствено до точката $x=0$, която се достига примерно след 1,5 s. Тежинката, разбира се, няма да се спре в точката $x=0$, а ще отиде по-нататък, но сега всичко ще тръгне обратно: нейното положение x ще стане отрицателно, а ускорението — положително. Скоростта ще започне да намалява. Интересно е да сравним получените от нас числа с функцията $\cos t$. Резултатът от това сравнение е представен на фиг. 9.4. Оказва се, че в границите на точността на нашите пресмятания (три знака след запетайката) съвпадението е пълно! По-късно вие ще узнаете, че функцията $\cos t$ е точно решение на нашето уравнение, така че вие сега имате нагледна представа за мощта на числения анализ: толкова проста сметка дава такъв точен резултат.

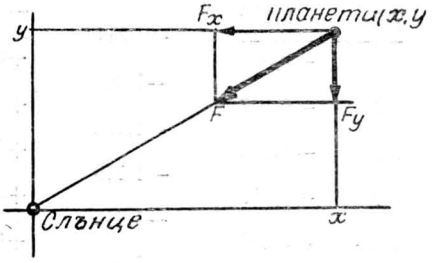
6. Движението на планетите

Приведеният анализ е много удобен за движението на осцилиращата пружинка с тежинката, но възможно ли е по същия начин да се изчислява движението на планета около Слънцето? Нека да видим дали е възможно при някои приближения да се получи елиптична орбита. Да предположим, че Слънцето е безкрайно тежко в смисъл, че неговото движение няма да се взема предвид.

Да допуснем, че в известна точка планетата е започнала своето движение и има определена скорост. Тя се движи около Слънцето по някаква крива и ние ще се опитаме да определим с помощта на Нютоновите уравнения за движение и на неговия закон за всемирното привличане каква е тази крива. Как да се направи това? В някакъв момент планетата се намира в някакво определено място, на разстояние r от Слънцето; в този случай е известно, че на нея действува сила, насочена по права линия към Слънцето, която съгласно закона за гравитацията е равна на определена постоянна, умножена по произведението на масите на планетата и Слънцето и делена на квадрата на разстоянието между тях. За да продължим разсъжденията нужно е да изясним какво ускорение поражда тази сила.

Обаче за разлика от предшествуващата задача на нас сега ще ни трябват *компонентите* на ускорението в две посоки, които ще наречем x и y. Положението на планетата в даден момент ще се определя от координатите x и y, тъй като третата координата z е винаги равна на нула.

Действително координатната равнина xy е избрана от нас по такъв начин, че z-компонентите както на силата, така и на началната скорост са равни на нула и затова няма никакви причини, които биха заставили планетата да излезе от тази равнина. При това силата ще бъде насочена по линията, която съединява планетата със Слънцето, както е показано на фиг. 9.5.



Фиг. 9.5. Силата на привличането, която действува на планетата

От тази рисунка се вижда, че хоризонталната компонента на силата се отнася към нейната пълна големина така, както координатата x се отнася към разстоянието r. Това веднага следва от подобието на триъгълниците. Освен това, ако x е положително, F_x е отрицателна, и обратно.

По такъв начин $F_x/|F| = -x/r$ или $F_x = -|F|x/r = -\frac{GMmx}{r^3}$ и съответно $F_y = -GMmy/r^3$. Сега можем да използуваме динамичните закони (9.7) и да напишем, че x- или y-компонентата на ускорението, умножена по масата на планетата, е равна съответно на x- или y-компонентата на силата:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\frac{GMmx}{r^3},$$
$$m\frac{dv_y}{dt} = -\frac{GMmy}{r^3}, \qquad (9.17)$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Това е именно тази система уравнения, която ние трябва да решим. За да опростим изчисленията, предполагаме, че или единиците за измерване на времето, или масата са избрани по съответен начин, или на нас просто ни е провървяло, с една дума, получило се е така, че $GM \equiv 1$. За нашия случай предполагаме, че в началния момент $t = 0$ планетата се е намирала в точка с координати $x = 0{,}500$ и $y = 0{,}000$, а нейната скорост в този момент е насочена паралелно на оста y и е равна на 1,6300. Как в този случай се правят пресмятанията? Отново се построява таблица с колонки за времето t, координатата x и x-компонентите на скоростта v_x и ускорението a_x. След това идват отделените с черта три колонки: за координатата y и y-компонентите на скоростта и ускорението. Обаче, за да пресметнем ускорението, ние трябва да използуваме уравнението (9.17), съгласно което неговите ком-

поненти са равни на $-x/r^3$ и $-y/r^3$, а $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Така че след получаването на x и y ние трябва някъде отстрана да направим прости изчисления — да извлечем квадратен корен от сумата на квадратите и да получим разстоянието. Удобно е също така отделно да се изчисли и $1/r^3$.

След това всичко е готово за определяне на компонентите на ускорението. Цялата тази работа може много да се облекчи, ако

Таблица 9.2

Определянето на пътя на планетата около Слънцето. Решение на системата уравнения

$$\frac{dv_x}{dt}=-\frac{x}{r^3},\quad \frac{dv_y}{dt}=-\frac{y}{r^3},\quad r=\sqrt{x^2+y^2}$$ Интервалът е $\varepsilon=0{,}100$.

При $t=0$, $v_y=1{,}63$, $v_x=0$, $x=0{,}5$, $y=0$

t	x	v_x	a_x	y	v_y	a_y	r	$1/r^3$
0,0	0,500		−4,00	0,000		0,00	0,500	8,000
		−0,200			1,630			
0,1	0,480		−3,68	0,163		−1,25	0,507	7,675
		−0,568			1,505			
0,2	0,423		−2,91	0,313		−2,15	0,526	6,873
		−0,859			1,290			
0,3	0,337	5	−1,96	0,442		−2,57	0,556	5,824
		−1,05			1,033			
0,4	0,232		−1,11	0,545		−2,62	0,592	4,81
		−1,166			0,771			
0,5	0,115		−0,453	0,622		−2,45	0,633	3,942
		−1,211			0,526			
0,6	−0,006		+0,020	0,675		−2,20	0,675	3,252
		−1,209			0,305			
0,7	−0,127		+0,344	0,706		−1,91	0,717	2,712
		−1,175			0,115			
0,8	−0,245		+0,562	0,718		−1,64	0,758	2,296
		−1,119			−0,049			
0,9	−0,357		+0,705	0,713		−1,41	0,797	1,975
		−1,048			−0,190			
1,0	−0,462		+0,796	0,694		−1,20	0,834	1,723
		−0,968			−0,310			
1,1	−0,559		+0,858	0,663		−1,02	0,867	1,535
		−0,882			−0,412			
1,2	−0,647		+0,90	0,622		−0,86	0,897	1,385
		−0,792			−0,499			
1,3	−0,726		+0,92	0,572		−0,72	0,924	1,267
		−0,700			−0,570			
1,4	−0,796		+0,93	0,515		−0,60	0,948	1,173
		−0,607			−0 630			
1,5	−0,857		+0,94	0,452		−0,50	0,969	1,099
		−0,513			−0,680			
1,6	−0,908		+0,95	0,384		−0,40	0,986	1,043
		−0,418			−0,720			
1,7	−0,950		+0,95	0,312		−0,31	1,000	1,000
		−0,323			−0,751			
1,8	−0,982		+0,95	0,237		−0,23	1,010	0,970
		−0,228			−0,773			
1,9	−1,005		+0,95	0,160		−0,15	1,018	0,948
		−0,113			−0,778			
2,0	−1,018		+0,96	0,081		−0,08	1,021	0,939
		−0,037			−0,796			
2,1	−1,022		+0,95	0,001		0,00	1,022	0,936
		+0,058			−0,796			
2,2	−1,016		+0,96	−0,079		+0,07	1,019	0,945
					−0,789			
2,3								

Оста x се пресича в момента 2,101 s, периодът на обиколката е равен на 4.20 s. В момента 2,086 s компонентата на скоростта е $v_x=0$

Орбитата пресича оста x при $x=1{,}022$, дължината на главната полуос е равна на $\frac{1{,}022+0{,}500}{2}$ $=0{,}761$, $v_y=0{,}796$.

Предсказаното време за полуобиколката е равно на $\pi(0{,}761)^{3/2}=\pi(0{,}663)=2{,}082$

се възползуваме от таблиците на квадратите, кубовете и обратните величини. Тогава ще ни остане само да умножим x по $1/r^3$, което лесно се прави с логаритмична линийка.

Да отидем по-нататък. Да вземем интервал от време $\varepsilon = 0{,}100$. В началния момент $t = 0$

$$x(0) = 0{,}500, \qquad y(0) = 0{,}000,$$
$$v_x(0) = 0{,}000, \qquad v_y(0) = +1{,}630.$$

Оттук намираме

$$r(0) = 0{,}500, \qquad \frac{1}{r^3} = 8{,}000,$$
$$a_x = -4{,}000, \qquad a_y = 0{,}000.$$

След това могат да се пресметнат компонентите v_x (0,05) и v_y (0,05):

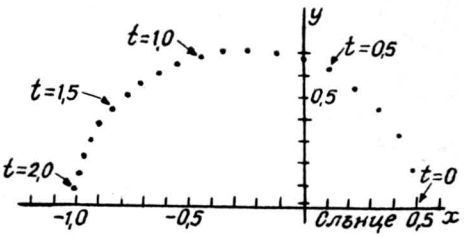
$$v_x(0{,}05) = 0{,}000 - 4{,}000 \cdot 0{,}050 = -0{,}200,$$
$$v_y(0{,}05) = 1{,}630 + 0{,}000 \cdot 0{,}100 = 1{,}630.$$

А сега да започнем нашето основно пресмятане:

$$x(0{,}1) = 0{,}500 - 0{,}200 \cdot 0{,}1 = 0{,}480,$$
$$y(0{,}1) = 0{,}00 + 1{,}63 \cdot 0{,}1 = 0{,}163,$$
$$r = \sqrt{(0{,}480)^2 + (0{,}163)^2} = 0{,}507,$$
$$\frac{1}{r^3} = 7{,}67,$$
$$a_x(0{,}1) = 0{,}480 \cdot 7{,}67 = -3{,}68,$$
$$a_y(0{,}1) = -0{,}163 \cdot 7{,}70 = -1{,}256,$$
$$v_x(0{,}15) = -0{,}200 - 3{,}68 \cdot 0{,}1 = -0{,}568,$$
$$v_y(0{,}15) = 1{,}630 - 1{,}26 \cdot 0{,}1 = 1{,}505,$$
$$x(0{,}2) = 0{,}480 - 0{,}568 \cdot 0{,}1 = 0{,}423,$$
$$y(0{,}2) = 0{,}163 + 1{,}50 \cdot 0{,}1 = 0{,}313$$

и т. н.

В резултат ще получим числата, приведени в табл. 9.2, където приблизително в 20 стъпки е проследен половината път на нашата планета около Слънцето. На фиг. 9.6 са нанесени координатите на планетата x и y, които са приведени в табл. 9.2. Точките представят последователните положения на планетата през всяка десета част на избраната от нас единица за време. Вижда се, че отначало тя се е движила бързо, а след това — все по бавно и по-бавно. Вижда се също така и формата на кривата на движението на планетата. И така, вие сега знаете как реално може да се изчислява движението на планетите!



Фиг. 9.6. Графика на движението на планетата около Слънцето

Нека сега да видим как се изчислява движението на Нептун, Юпитер, Уран и останалите планети. Могат ли да се направят подробни пресмятания с много планети, като при това се вземе под внимание и движението на Слънцето? Разбира се, може. Да намерим първо силата, която действува на всяка дадена планета, например на тази, която ние ще означим с номер i и координатите на която са x_i, y_i и z_i ($i = 1$ може да означава Слънцето, $i = 2$ — Меркурий, $i = 3$ — Венера и т. н.). Нашата задача е да се намерят координатите на всички планети. По закона за гравитацията x-компонентата на силата, действуваща на i-тата планета от страна на планетата с номер j и координати x_j, y_j, z_j, ще бъде равна на $-Gm_im_j(x_i - x_j)/r_{ij}^3$. Ако се вземат под внимание силите от страна на всички планети, ще се получи следната система от уравнения:

$$m_i \frac{dv_{ix}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \left[-\frac{Gm_im_j(x_i - x_j)}{r_{ij}^3} \right],$$
$$m_i \frac{dv_{iy}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \left[-\frac{Gm_im_j(y_i - y_j)}{r_{ij}^3} \right], \qquad (9{,}18)$$
$$m_i \frac{dv_{iz}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \left[-\frac{Gm_im_j(z_i - z_j)}{r_{ij}^3} \right],$$

където r_{ij} е разстоянието между i-тата и j-тата планета:

$$r_{ij}=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2}, \tag{9.19}$$

а $\sum$ означава сумиране по всички останали планети, т. е. по всички стойности на j с изключение, разбира се, на $j=i$. По такъв начин, за да се реши това уравнение, нужно е само да се увеличи значително броят на колонките в нашата таблица. За движението на Юпитер ще ни трябват 9 колонки, за Сатурн — също девет, и т. н. Ако ни са зададени всички начални положения и скорости, от уравнението (9.18) може да се намерят всички ускорения, като, разбира се, предварително пресметнем по формулата (9.19) всички r_{ij}. А колко време ще е нужно за всички тези изчисления? Ако ги правите сами в къщи, твърде много! Обаче сега вече има машини, които невероятно бързо правят всички аритметични пресмятания. Събиране например такава машина извършва за 1 μs, т. е. за една милионна част от секундата, а умножение — за 10 μs. Така че ако един цикъл от пресмятания се състои от 30 операции умножение, това ще заеме само 300 μs, или за 1 s могат да се направят 3000 цикъла. Ако искаме да пресмятаме с точност до една милиардна, то, за да се покрие цялото време на обиколката на планетата около Слънцето, са необходими 4.10^5 цикъла. (Оказва се, че грешката в пресмятанията е приблизително пропорционална на квадрата на ε. Ако интервалът се вземе хиляда пъти по-малък, грешката ще се намали един милион пъти. Така че, за да бъде осигурена нашата точност, нужно е да се вземе интервал 10 000 пъти по-малък). На машината това ще отнеме 130 s или около 2 min. Само 2 min за „гонене“ на Юпитер около Слънцето и при това да се вземат под внимание смущенията от другите планети с точност до една милиардна!

И така в началото на тази глава за вас бяха загадка движенията на тежинката, окачена на пружинка, обаче сега, въоръжени с такова мощно оръжие като законите на Нютон, вие можете да пресмятате не само такива прости явления като трептенето на тежинката, но и невероятно сложните движения на планетите, при това с произволна желана точност! Нужна е само машина, която знае аритметика.

10

Закон за запазване на импулса

1 Трети закон на Нютон

2. Закон за запазване на импулса

3. Все пак импулсът се запазва

4. Импулс и енергия

5. Релативистичен импулс

1. Трети закон на Нютон

Вторият закон на Нютон, който свързва ускорението на всяко тяло с действуващата върху него сила, позволява, макар и по принцип, да се реши всяка механична задача. Може например с помощта на числения метод, който вече ви е известен от предшествуващата глава, да се определи движението на няколко частици. Обаче има още достатъчно причини, за да се продължи изучаването на законите на Нютон. На първо място съществуват такива сравнително прости случаи на движение, които могат да се изучават не само с числени методи, но и с помощта на преки математични методи. Вие знаете например че ускорението на свободно падащото тяло е постоянно и равно на $9{,}8\mathrm{m/s^2}$. Излизайки от това, би могло числено да се възстанови цялата картина на движението, обаче много по-просто и удобно е с помощта на математичния анализ да се намери общо решение: $s=s_0+v_0t+4{,}9t^2$. Същото се отнася и до хармоничния осцилатор, на пресмятането на който бе посветена част от предшествуващата глава. Би могло аналитически просто да се докаже, че функцията $\cos t$ представлява точно решение на тази задача. Ето защо не са нужни аритметични упражнения, ако отговорът може да бъде намерен с помощта на по-прост и строг метод.

Една от тези задачи е движението на планетата около Слънцето. Може, разбира се, както ние направихме това в гл. 9, да намерим постепенно общата форма на орбитата, обаче и тази задача се решава точно, като при това в резултат се получава строго елиптична орбита.

Но за съжаление такива задачи, които могат да бъдат точно решени с помощта на анализа, са много малко. В същия хармоничен осцилатор например, ако силата на пружината не е пропорционална на отклонението от положението на равновесие, а се окаже по-сложна, ние не можем нищо да направим и сме принудени да се обърнем към численото пресмятане. Или например, ако около Слънцето обикаля не една планета, а две (т. е. има всичко три тела, взаимодействуващи едно с друго), ние не можем да намерим аналитичната форма на такова движение и практически задачата също се решава числено. Това е знаменитата проблема за трите тела, над която в течение на дълго време са се трудили най-добрите умове на човечеството. Интересно е, че, за да разберат ограничените възможности на математичния анализ и необходимостта от използуване на числени методи, на хората е било нужно много време. Сега с помощта на тези методи се решават огромно количество задачи, които не могат да бъдат решени аналитично. Същата знаменита проблема за трите тела, решението на която се считало за много сложно, в числения метод изглежда като проста задача и се решава по начин, описан в предшествуващата глава, т. е. с помощта на голямо число аритметични действия. Обаче съществуват ситуации, когато двата метода се оказват безсилни: простите задачи се решават аналитично, по-сложните задачи — с числов аритметичен метод, но много сложните задачи е невъзможно да бъдат решени ни така, ни иначе. Вземете например сложната задача за сблъскването на два автомобила или даже движението на молекулите на газа. В един кубически милиметър газ се съдържа безчислено количество частици и би било безумие да се опитваме да решим задача с толкова променливи (около 10^{17}, т. е. сто милиона милиарда!). Толкова сложна е и задачата за движението на звездите в кълн-

бовидния куп, където вместо две или три планети, движещи се около Слънцето, е събрано грамадно количество звезди. Тези проблеми не могат да бъдат решени с преки методи и трябва да се намерят някакви други пътища.

При това положение, когато детайлното разглеждане е невъзможно, полезно е да се знаят някои общи свойства, т. е. общи теореми или принципи, които са следствия на законите на Нютон. Един от тези принципи е законът за запазването на енергията, който ние обсъждахме в гл. 4. Вторият принцип е законът за запазване на импулса, на който е посветена настоящата глава. Другата причина за необходимостта от по-нататъшно изучаване на механиката е съществуването на някои общи свойства на движението, които се повтарят при различни обстоятелства; така че полезно е да се изучи това свойство в някакъв частен случай. Ние например ще изучаваме ударите; различните видове удари имат много общо. Или да вземем движението на някаква течност; законите на движението на разни течности имат много общо. Още един пример, който ние ще изучаваме, това са трептенията или осцилациите, по-конкретно свойствата на механичните вълни: звука, колебанията на прът и т. н.

Когато обсъждахме законите на Нютон, ние вече говорихме за това, че те представляват един вид програма, която апелира към нас да обърнем особено внимание на силите. Но за самите сили Нютон е казал само две неща. Той напълно е формулирал закона за силите на гравитацията, но почти нищо не е знаел за по-сложните сили, например за силите между атомите. Обаче той е открил едно правило, едно общо свойство на всички сили, което съставя Третия закон. По такъв начин всичко, което Нютон е знаел за природата на силите, е законът за гравитацията и общият принцип, който гласи:

Силата на действието е равна на силата на противодействието

Това значи приблизително следното. Нека да имаме две малки тела, да речем две частици, и нека първата от тях да удари втората с някаква сила. Тогава в съответствие с Третия закон на Нютон втората частица ще удари първата със същата сила, но в противоположна посока. Нещо повече, тези сили ще действуват по една и съща линия. Тази хипотеза или, ако предпочитате закон, предложен от Нютон, се изпълнява с голяма точност, макар впрочем той и да не е абсолютно точен (с неговите нарушения ние ще се запознаем по-късно). Сега обаче ние ще го смятаме за напълно точен. Разбира се, ако има трета частица, която е разположена не на същата линия, на която са първите две, то законът съвсем *не значи*, че силата, действуваща на първата частица, е равна на пълната сила, действуваща на втората. Третата частица може да удари двете първи, в резултат на което пълната сила, действуваща на първата частица, ще бъде насочена другояче и въобще няма да бъде нито равна, нито противоположна на силата, действуваща на втората частица. Обаче пълната сила, действуваща на всяка една от частиците, може да бъде разложена на две компоненти, които представляват сили, действуващи между всяка двойка частици. Тези компоненти на силата за всяка *двойка* частици трябва да бъдат равни по големина и противоположни по посока.

2. Закон за запазването на импулса

Нека да видим с какво е интересен Третият закон на Нютон. За простота да предположим, че имаме само две взаимодействуващи частици — частицата *1* и частицата *2*, масите на които могат да бъдат различни. До какво следствие води равенството и противоположната насоченост на силите между тях? Съгласно Втория закон, силата е равна на скоростта на измене-

нието на импулса с времето, така че скоростта на изменението на импулса на частицата 1 е равна на скоростта на изменението на импулса на частицата 2, т. е.

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} \tag{10.1}$$

Но ако *скоростите на изменението* през цялото време са равни по големина и противоположни по посока, то и *цялото изменение* на импулса на частицата 1 е равно и противоположно на *пълното изменение* на импулса на частицата 2. Това значи, че ако ние *съберем* тези импулси, скоростта на изменението на сумата под въздействието само на взаимните сили (наричат ги обикновено вътрешни сили) ще бъде равно на нула, т. е.

$$\frac{d(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)}{dt} = 0. \tag{10.2}$$

Нека да напомним още веднъж, че в нашата задача ние предполагаме отсъствието на всякакви други сили, освен вътрешните. Но равенството на нула на скоростта на изменението на тази сума означава, че величината $(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)$ не се изменя с течение на времето. (Тази величина се записва също така във вида $m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2$ и се нарича *пълен импулс* на двете частици.) И така ние получихме, че при наличието само на вътрешни сили пълният импулс на двете частици остава неизменен. Това твърдение представлява законът за запазване на импулса в дадения случай. От него следва, че ако ние измерваме и пресмятаме величината $m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2$, т. е. сумата на импулсите на двете частици, то за произволни сили, действуващи между тях, колкото и сложни да са те, ние трябва да получим еднакъв резултат както преди действието на силите, така и след това, т. е. пълният импулс остава постоянен.

Да разгледаме сега по-сложна картина, когато са налице три или по-голямо число взаимодействуващи частици. Очевидно е, че ако съществуват само вътрешни сили, тогава пълният импулс на всички частици остава постоянен, понеже увеличението на импулса на една частица под въздействието на друга частица се компенсира точно от намаляването на импулса на тази втора частица вследствие на противодействието на първата, т. е. вътрешните сили са така балансирани, че пълният импулс на всички частици не може да се измени. По такъв начин, ако няма сили, действуващи на системата отвън (външни сили), нищо не може да измени нейния пълен импулс и следователно той остава постоянен.

Но трябва още да се каже какво ще стане, ако съществуват някакви други сили освен силите на взаимодействието между частиците. Да предположим, че ние сме изолирали системата от взаимодействуващи частици. Ако са налице само взаимни сили, пълният импулс, както и преди, не ще се мени, колкото и сложни да са тези сили. Ако обаче съществуват сили, обусловени от частици вън от тази изолирана група, то, както ще докажем по-късно, сумата на всички тези *външни* сили е равна на скоростта на изменението на пълния импулс на всички вътрешни частици. Това е много полезна теорема.

Законът за запазването на пълния импулс на някакъв брой взаимодействуващи частици при отсъствие на външни сили може да се запише във вида

$$m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2+m_3\mathbf{v}_3+\ldots = const, \tag{10.3}$$

където m_i и $\mathbf{v}_i$ са масата и скоростта на частицата със съответствуващия номер. Обаче за всяка от тези частици Вторият закон на Нютон

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \tag{10.4}$$

се пише за всяка *компонента* на пълната сила и импулса във всяка дадена посока, така че x-компонентата на силата, дейст-

вуваща на частицата, е равна на скоростта на изменението на x-компонентата на импулса на тази частица

$$f_x = \frac{d}{dt}(mv_x). \tag{10.5}$$

Точно такива формули могат да се напишат за y- и z-компонентите. Това означава, че уравнението (10.3) фактически представлява три уравнения: по едно за всяка от компонентите.

Освен закона за запазването на импулса съществува още едно интересно следствие от Втория закон на Нютон. С неговото доказателство ние ще се заемем по-късно, а сега аз просто ще ви разкажа за него. Следствието, или по-скоро принципът, се състои в това, че законите на физиката не се изменят от това, дали ние стоим на едно място или се движим равномерно и праволинейно. Нека например на бързо летящ самолет дете да играе с топка. Наблюдателното дете веднага ще забележи, че топката подскача точно така, както и на земята. Другояче казано, за детето законите на движението в самолета (ако последният не изменя скоростта си) изглеждат еднакви както на полето на аеродрума, така и при летене. Този факт е известен под името *принцип на относителността.* В този вид, в който той се разглежда тук, ние ще го наричаме „принцип на относителността на Галилей" или „Галилеева относителност", за да не го бъркаме с по-късния анализ, направен от Айнщайн, но за това ние ще говорим по-късно.

И така от закона на Нютон ние изведохме закона за запазването на импулса, а сега нека да видим с какви специфични закони се описват ударите и разсейването на частиците. Обаче за разнообразие и за да демонстрираме типичните разсъждения, от които ние често се ползуваме във физиката в други случаи, когато например не са известни законите на Нютон и трябва да бъде приет друг метод за разглеждане, нека да обсъдим законите за разсейването и удара от съвършено друга гледна точка. Ние ще излезем от принципа на относителността на Галилей и в края на разсъжденията ще дойдем до закона за запазването на импулса.

И така да започнем с твърдението, че законите на природата не се изменят от това, че ние се движим праволинейно с някаква скорост или стоим на едно място. Обаче преди да обсъдим процесите, в които две тела се удрят и прилепват едно към друго или се разлитат, нека да разгледаме случая, когато тези две тела са свързани помежду си с пружинка или нещо подобно, а след това изведнъж се освобождават и се разлитат под действието на тази пружина или на малък взрив в разни посоки. Освен това нека да разгледаме движение само в една посока. Първо, да предположим, че тези две тела са напълно еднакви и разположени симетрично. Когато между тях се осъществи взрив, едното от тях ще полети надясно с някаква скорост v. Тогава е естествено, че другото ще полети наляво със същата скорост v, защото двете тела са еднакви и няма никакви причини да се счита, че лявата страна ще бъде предпочетена пред дясната. И така с телата трябва да стане нещо симетрично. Този пример показва колко полезни са разсъжденията от такъв род в различни задачи. Но те не всякога са така ясни, когато са замъглени от формули.

По такъв начин първият резултат от нашия експеримент е, че еднаквите тела имат еднакви скорости. Сега да предположим, че телата са направени от различен материал, да речем едното от мед, а другото от алуминий, но масите им са равни. Ние ще предполагаме, че ако направим нашия опит с две равни маси, то въпреки това, че телата не са еднакви, скоростите им ще бъдат равни. Тук могат да ми възразят: „Но Вие можете да направите и обратното. Нямаше защо да предполагате това. Вие можете да *определите* масите като равни, ако те в нашия експеримент получават еднаква скорост." Нека да приемем това предложение и да осъществим малък взрив между парче мед и много голямо парче алуминий, което е толкова тежко, че едва може да бъде

помръднато, докато медта стремително отлита. Това показва, че количеството на алуминия е голямо. Нека да намалим неговото количество и да оставим съвсем малко парче. Ако отново осъществим взрив, сега вече ще отлети алуминият, а медта почти няма да се помръдне. Значи сега алуминият е твърде малко. Очевидно е, че трябва да съществува някакво междинно количество, което може постепенно да бъде подбирано, докато скоростите на разлитането не станат равни. Сега ние можем да кажем, че тъй като скоростите на тези парчета са равни, ние ще считаме масите им също така за равни (т. е. ние фактически обръщаме по-раншното твърдение, че равните маси ще имат еднаква скорост). Най-интересното тук е това, че физическият закон се превръща просто в определение. Но все пак някакъв физичен закон тук има и, ако ние приемеме такова определение на равенството на масите, този закон може да бъде намерен по следния начин.

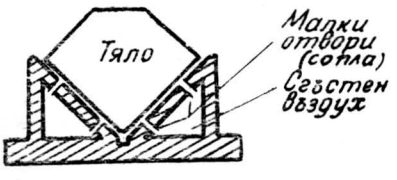
Нека от предшествуващия експеримент да ни е известно, че двете парчета вещество A и B (мед и алуминий) имат равни маси. Да вземем сега трето тяло, например парче злато, и да изравним неговата маса (по същия начин, както това беше правено по-рано) с масата на медта. Ако сега в нашия експеримент заменим медта със злато, то логически ние нямаме никакви основания да твърдим, че тези маси (на алуминия и на златото) са равни. Обаче *опитът* показва, че такова равенство има място. По такъв начин опитно ние открихме нов закон: ако две маси поотделно са равни на трета (т. е. в нашия опит те се разлитат с равни скорости), те са равни помежду си. (Този закон по никакъв начин *не следва* от подобното твърдение за величините в *математиката*; там то просто се постулира.) Виждате колко е лесно по невнимание да се направи неоснователно заключение. Твърдението, че масите са равни, когато са равни скоростите, още *не е определение*; защото при това предполагаме верността на математическите закони за равенство, което на свой ред води до предсказването на резултатите на някои експерименти.

Да вземем още един пример. Нека при някаква сила на взрива да е установено, че масата A е равна на масата B. Какво ще стане, ако се увеличи силата на взрива? Ще бъдат ли равни скоростите на разлитането в този случай? Логиката тук отново е безсилна, но опитът казва, че това е *наистина* така. Ние отново получаваме закон, който твърди: ако от равенството на скоростите на две тела се прави заключение за равенството на техните маси, това равенство не зависи от големината на скоростта. От тези примери се вижда, че това, което отначало е изглеждало просто като определение, в действителност предполага верността на някакви закони на природата.

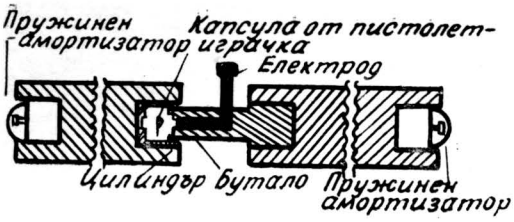
И така в по-нататъшните разсъждения ние ще считаме, че равните маси се разлитат в противоположни посоки с равни скорости, ако между тях се осъществи взрив. А какво ще стане, ако ние обърнем задачата, т. е. ако две еднакви тела, летящи едно срещу друго с равни скорости, се ударят и прилепнат едно към друго? Как ще се движат те? Тук пак на помощ идват съображенията за симетрия (т. е. че между лявата и дясната страна няма никакво различие), от които следва, че образуваното тяло трябва да стои на едно място. Ние ще предполагаме също така, че две тела с равни маси, летящи едно срещу друго, даже ако те са направени от различен материал, след удара и прилепването ще се спрат.

3. Все пак импулсът се запазва

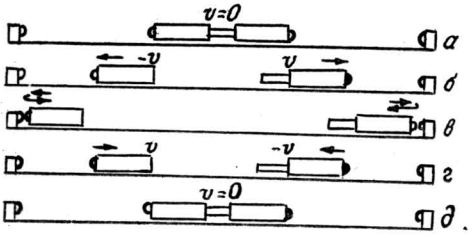
Може експериментално да се проверят нашите предположения за това, че, намиращите се в покой две тела с равни маси, разкъсани с взрив, ще полетят в разни посоки с равни скорости и, че две тела, имащи равни скорости и маси, при удар и прилепване ще се спрат. Такава проверка може да бъде направена с помощта на забележително устройство — въздушния улей (фиг. 10.1). В това устройство няма никакви триещи се детайли —



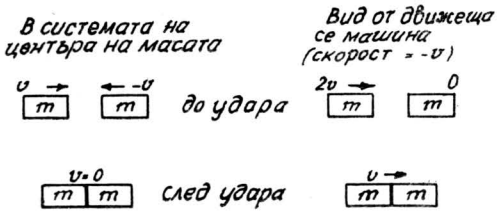
Фиг. 10.1. Въздушен улей (напречен разрез)



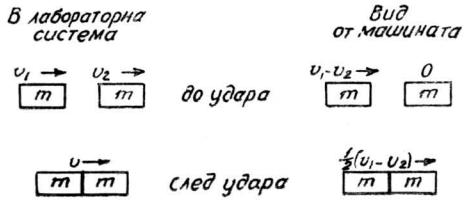
Фиг. 10.2. Надлъжен разрез на плъзгащото се кубче, закрепено за взривния цилиндър



Фиг. 10.3. Схема на експеримента с равни маси



Фиг. 10.4. Нееластичен удар на равни маси



Фиг. 10.5. Друг случай на нееластичен удар на равни маси

въпрос, който много е безпокоил Галилей. Той не е могъл да направи експеримент с плъзгащи се тела, защото те не се плъзгали свободно, но с помощта на чудесния улей ние можем сега да се избавим от триенето. Нашите тела ще летят без спънки, а тяхната скорост съгласно предвиждането на Галилей ще остава постоянна. Това се достига чрез поддържането на тялото с въздушна възглавница, а тъй като триенето с въздуха е много малко, тялото се движи практически с постоянна скорост, ако на него не действуват никакви сили. Отначало да вземем две плъзгащи се кубчета, теглото и масите на които са с голяма точност равни (практически се измерва теглото, но то, както вие знаете, е пропорционално на масата) и да поставим между тях малък взривател в затворен цилиндър (фиг. 10.2). Цялата тази система поставяме в центъра на улея и с електрическа искра възпламеняваме взривното вещество. Какво ще стане? Ако масите на кубчетата са еднакви, те, разлитайки се, едновременно ще достигнат краищата на улея. Там те ще отскочат от ограничителите и ще се ударят и прилепнат едно към друго в центъра, точно в това място, откъдето са се разлетели (фиг. 10.3). Това е интересен опит. И наистина всичко става така, както разказахме.

Сега е редът на по-сложна проблема. Да допуснем, че имаме две маси, едната от които се движи със скорост v, а другата стои на място. След това първата удря втората и те се слепват. Какво ще стане по-нататък? Образува се едно тяло с маса $2m$, което по някакъв начин ще се движи. Но с каква скорост? Ето в какво е въпросът. За да отговорим на този въпрос, нека да предположим, че ние пътуваме в улея с автомобил. Всички закони на физиката трябва да изглеждат също така, както и по-рано, когато стояхме на едно място. Ние започнахме с това, че ако произведем удар на две тела с равни маси и еднакви скорости v, след слепването те се спират.

А сега си представете, че през това време ние се намираме в автомобил, който се движи със скорост — v. Каква картина ще видим? Ясно е, че едно от телата, тъй като то през цялото време лети със скоростта на автомобила, ще ни се стори неподвижно. Второто пък, което се движи насреща със скорост v, ще ни се стори движещо се с удвоена скорост $2v$ (фиг. 10.4). Накрая образуваното след удара и слепването тяло ще ни се стори, че лети със скорост v. Оттук ние правим извод, че ако тяло, летящо със скорост $2v$, се удря в намиращо се в покой тяло със същата маса и се слепва с него, образуваното тяло ще се движи със скорост v или (което математически е същото) тяло със скорост v, удряйки се в намиращо се в покой тяло със същата маса и слепвайки се с него, образува тяло, което се движи със скорост $v/2$. Забележете, че ако се умножат масите на телата по техните скорости и се съберат, ще се получи еднакъв резултат както преди удара ($mv+0$), така и след него ($2m.v/2$). Ето как стои работата, ако тяло, имащо скорост v, се удари с тяло, намиращо се в покой.

По аналогичен начин може да се определи какво ще се случи, когато се ударят две еднакви тела, всяко едно от които се движи с *произволна* скорост.

Нека едното тяло да лети със скорост v_1, а другото — със скорост v_2 в същата посока ($v_1 > v_2$). Каква ще бъде тяхната скорост след удара? Нека да седнем отново в колата и да караме със скорост например v_2. Тогава едното от телата ще ни изглежда като стоящо на едно място, а второто — налитащо върху него със скорост $v_1 - v_2$. Тази ситуация ни е вече известна и ние знаем, че след удара скоростта на новото тяло по отношение на колата ще бъде равна на $1/2\ (v_1 - v_2)$. Що се отнася до скоростта относно земята, тя може да бъде намерена, като се прибави скоростта на автомобила:

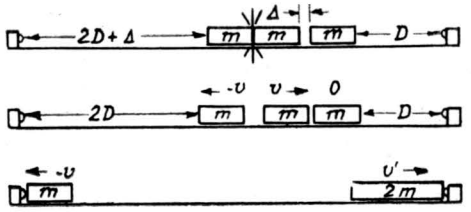
$v = 1/2\ (v_1 - v_2) + v_2$ или $1/2\ (v_1 + v_2)$. (фиг. 10.5)

Обърнете внимание, че отново

$$mv_1 + mv_2 = m.\frac{1}{2}(v_1 + v_2). \qquad (10.6)$$

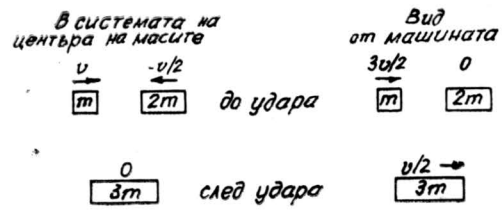
По такъв начин принципът на относителността на Галилей ни помага да разберем произволни удари на равни маси. Досега ние разглеждахме движение в едно измерение, но благодарение на него се изяснява много от това, което става в по-сложните случаи на удар: нужно е само да се пусне автомобилът не по посоката на движението на телата, а под някакъв ъгъл. Принципът си остава същият, макар детайлите да се усложняват.

За да проверим експериментално дали наистина тялото, летящо със скорост v, след удара с тяло в покой със същата маса, образува ново тяло, летящо със скорост $v/2$, нека да направим с нашия забележителен прибор следния опит. Да поставим в улея три тела с еднакви маси, две от които са съединени с цилиндър с взривно устройство, а третото се намира близо до едно от тях, макар и отделено от него. То е снабдено с леплив амортизатор, така че прилепва към тялото, което се удря в него. В първия миг след взрива ние имаме два обекта с маси m, като всеки един от тях се движи със скорост v. В следващия миг едно от телата се удря в третото и образува ново тяло с маса $2\,m$, което, както ние предполагаме, трябва да се движи със скорост $v/2$. Но как да се провери, че неговата скорост е наистина $v/2$? За тази цел отначало ние ще разположим телата по такъв начин, че разстоянията до краищата на улея да се отнасят както $2:1$, така че първото тяло, което продължава да се движи със скорост v, трябва да измине за същия интервал от време два пъти по-голямо разстояние, отколкото съединените се две други тела (като се вземе предвид, разбира се, онова малко разстояние Δ, което второто тяло е изминало до удара с третото). Ако ние сме прави, масите m и $2m$ трябва да достигнат краищата на улея едновременно: фактически така става (фиг. 10.6).



Фиг. 10.6. Експерименталната проверка на факта, че масата m, удряйки със скорост v масата m, образува тяло с маса $2\,m$ и скорост $v/2$

Следващата проблема, която ние трябва да решим, е: какво ще се случи, ако телата имат различни маси. Нека да вземем масите m и $2m$ и да осъществим между тях взрив. Какво ще последва? С каква скорост ще полети масата $2m$, ако масата m лети със скорост v? Нужно ни е фактически да повторим предишния експеримент, но с нулево разстояние между второто и третото тяло. Разбира се, ние ще получим същия резултат — скоростите на телата с маси m и $2m$ трябва да бъдат равни съответно на $-v$ и $\frac{v}{2}$. И така при разлитането на телата с маси m и $2m$ се получава същият резултат, както и при симетричното разлитане на две тела с маси m, при което следва нееластичен удар на едното от тях с трето тяло, масата на което е също равна на m. Нещо повече, отскачайки от краищата, всяко едно от тези тела ще лети с почти същата скорост, но, разбира се, в обратна посока и след нееластичния удар те се спират.



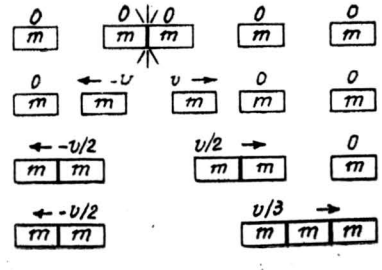
Фиг. 10.7. Нееластичен удар на тела с маси m и $2\,m$

Да преминем сега към следващия въпрос. Какво ще стане, ако тяло с маса m и скорост v се удари в намиращо се в покой тяло с маса $2m$? На този въпрос може да се отговори лесно, излизайки от принципа на Галилей. Ние пак трябва да седнем в кола, движеща се със скорост $-v/2$ (фиг. 10.7), и да наблюдаваме току-що описания процес. Скоростите, които ще видим, ще бъдат равни на

$$v_1' = v - v_{\text{кола}} = v + \frac{v}{2} = \frac{3v}{2},$$

$$v_2' = -\frac{v}{2} - v_{\text{кола}} = -\frac{v}{2} + \frac{v}{2} = 0.$$

След удара масата $3m$ ще ни изглежда движеща се със скорост $v/2$. По такъв начин ние получихме, че отношението на скоростите преди и след удара е равно на $3:1$, т. е. образуваното тяло с маса $3m$ ще се движи три пъти по-бавно. И в този случай отново е в сила общото правило: сумата от произведенията на масите по скоростта остава същата както преди, така и след удара: $mv+0$ е равно на $3m.v/3$. Вие виждате как постепенно стъпка по стъпка се установява законът за запазването на импулса.



Фиг. 10.8. Разлитане на тела с маси $2\,m$ и $3\,m$

И така, ние разгледахме удар на едно тяло с две тела. Използувайки същите разсъждения, ние можем да предскажем резултатите от удара на едно тяло с три тела, на две тела с три тела и т. н. На фиг. 10.8 е показан случаят на разлитането на масите $2m$ и $3m$ от състояние на покой.

Във всеки един от тези случаи е валидно едно и също правило: масата на първото тяло, умножена по неговата скорост, плюс масата на второто тяло, умножена по неговата скорост, са равни на произведението на пълната маса, умножена по скоростта на нейното движение. Всичко това са примери за запазването на импулса. И така, започвайки с простия случай на симетричните равни маси, ние установихме закона за запазването за по-сложните случаи. Фактически това може да бъде направено за всяко рационално отношение на масите, а тъй като всяко число може да бъде с произволно голяма точност заменено с рационално, то законът за запазването на импулса е верен за произволни маси.

4. Импулс и енергия

Във всички предшествуващи примери ние разглеждахме само случаи, когато две тела се удрят и слепват или от самото начало са били съединени, а след това се разделят с взрив. Обаче съществуват много примери на удари, в които телата не се слепват, както например при удар на две тела с равни маси и еднакви скорости, които след това се разлитат в разни посоки. За някакъв малък интервал от време те се допират и свиват. В момента на най-голямото свиване те се спират и тяхната кинетична енергия напълно преминава в енергия на еластичното свиване (те са като две свити пружини). Тази енергия се определя от кинетичната енергия, която са имали телата до удара и която е равна на нула в момента на тяхното спиране. Обаче кинетичната енергия се губи само за един миг. Свитото състояние, в което се намират нашите тела, е аналогично на взривното вещество в предшествуващите примери, което при взрива отделя енергия. В следващия миг става нещо подобно на взрива — телата приемат първоначалната си форма, отблъскват се едно от друго и се разлитат. Тази част на процеса ви е също добре известна: телата ще се разлетят в разни посоки с еднакви скорости. Обаче скоростите на отскачането въобще ще бъдат по-малки от началните скорости, при които те са се ударили, защото за взрива се използува не цялата енергия, а само някаква нейна част, но това вече зависи от свойствата на материала, от който са направенн телата. Ако това е мек материал, кинетична енергия почти не се отделя, но ако това е нещо по-еластично, телата с по-голямо желание отскачат едно от друго. Неизползуваният остатък от енергия се превръща в топлина и вибрация, телата се нагряват и вибрират; впрочем вибрационната енергия също скоро се превръща в топлина. По принцип телата могат да бъдат направени от толкова еластичен материал, че за топлина и вибриране не ще се изразходва никаква енергия, а скоростите на разлитането в този случай ще бъдат практически равни на началните. Такъв удар наричаме еластичен.

Този факт, че скоростите преди и след удара са равни, се дължи не на закона за запазването на импулса, а на закона за *запазването на енергията*, но това, че скоростите на разлитането след симетричния удар са равни помежду си, за това е виновен вече законът за запазването на импулса.

По същия начин може да бъде разгледан случаят на удар на тела с различни маси, различни начални скорости, различни еластичности и да бъдат определени крайните скорости и загубата на кинетична енергия; но сега ние няма да се занимаваме подробно с тези явления.

Еластичният удар особено често се среща между системи, които нямат никакви вътрешни механизми, никакви „зъбчати колелета, маховици или други части". В такива случаи кинетичната енергия не може да се изразходва за нищо: нали разлитащите

се тела се намират при същите условия, както и налитащите едно на друго. Затова между елементарните обекти ударът е всякога или почти всякога еластичен. Казват например, че ударът между атомите и молекулите е абсолютно еластичен. Макар това да е действително много добро приближение, то все пак тези удари не са *абсолютно* еластични; в противен случай трудно би могло да се обясни откъде газът взема енергия за излъчване на топлина и светлина. Понякога при ударите на молекулите на газа се излъчват инфрачервени лъчи, обаче това се случва крайно рядко и при това излъчената енергия е много малка, така че за много цели ударите между молекулите на газа могат да се разглеждат като абсолютно еластични.

Нека да разгледаме интересен пример на еластичен удар на две тела с *равни маси*. Ако такива тела се ударят с равни скорости, то по съображения за симетрия те трябва да се разлетят със същите скорости. Но нека да разгледаме този процес в малко по-друга ситуация, когато едно от телата се движи със скорост v, а другото се намира в покой. Какво ще стане в този случай? Такава задача не е нова за нас. Нужно е да се наблюдава симетричният удар от автомобила, който се движи редом с една от частиците. Ние ще видим как движещото се тяло ще се удари в намиращото се в покой тяло и ще се спре, а това, което по-рано е било в покой, ще полети напред със същата скорост, с каквато се е движило първото. Телата просто ще си разменят скоростите. Това може да бъде лесно потвърдено експериментално. Въобще ако две тела с равни маси се движат едно срещу друго с различни скорости, то при еластичен удар те просто си разменят скоростите.

Магнетизмът ни дава друг пример на почти абсолютно еластично взаимодействие. Поставете два магнита, които имат формата U, върху нашите плъзгащи се кубчета във въздушния улей така, че те да се отблъскват един от друг. Ако сега едното от кубчетата се доближи леко до другото, то, без да се допира, ще го отблъсне, а само ще се спре. Второто кубче ще полети напред.

Законът за запазването на импулса е много полезно нещо. Той позволява да се решат много проблеми, без да се влиза в детайлите на процеса. Нас например съвсем не ни интересуваха детайлите на движението на газа при възпламеняването на взривното вещество, но въпреки това ние можахме да предскажем колко пъти едното тяло ще се движи по-бързо от другото при тяхното разлитане. Друг интересен пример е ракетният двигател. Ракета с голяма маса M изхвърля с огромна скорост V (по отношение на самата ракета) сравнително малко количество газ m. За да запази импулса, ракетата започва да се движи с малка скорост v. Използувайки закона за запазването на импулса, можем да пресметнем, че

$$v = \frac{m}{M} V.$$

Обаче с изхвърлянето на повече и повече газ скоростта на ракетата става все по-голяма и по-голяма. Механизмът на действие на ракетния двигател е напълно аналогичен на явлението ритане на пушка; тук не е нужен въздух за отблъскване от него.

5. Релативистичен импулс

Законът за запазването на импулса претърпя някои изменения. Те обаче не засегнаха самия закон, а просто измениха понятието импулс. Оказа се, че в теорията на относителността импулсът не се запазва, ако той се разбира така както по-рано. Работата се състои в това, че масата не остава постоянна, а се изменя в *зависимост от скоростта*, поради което се изменя и импулсът. Изменението на масата става по закона

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (10.7)$$

където m_0 е масата на тялото в покой, а c е скоростта на разпространението на светлината. От тази формула се вижда, че при обикновени скорости (ако v не е много голямо) m се различава много малко от m_0 и поради това импулсът с много голяма точност се изразява със старата формула.

Компонентите на импулса за една частица могат да бъдат записани във вида

$$p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad p_y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad p_z = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (10.8)$$

където $v^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2$. Ако сумираме x-компонентите на импулсите на всички взаимодействуващи частици, то получената сума както преди удара, така и след него, ще се окаже една и съща. Това представлява законът за запазването на импулса в посока на оста x. Същото може да бъде направено и за всяка друга посока.

Ние вече видяхме в гл. 4, че законът за запазването на енергията е неверен, ако не признаем еквивалентността на енергията във всички нейни форми, т. е. електрическата енергия, механичната енергия, енергията на лъчението, топлинната енергия и т. н. За някои от тези форми, например топлината, може да се каже, че енергията е „скрита“ в тях. Възниква въпросът: не съществуват ли също така „скрити“ форми на импулса, например „топлинен импулс“? Работата е в това, че да се скрие импулсът е невъзможно; да се скрие е невъзможно по следните причини.

Мярата на топлинната енергия — на случайното движение на атомите на тялото — представлява сумираните *квадрати* на техните скорости. В резултат се получава някаква положителна величина, която няма насочен характер. Така че топлината е като че ли заключена вътре в тялото независимо от това, дали то се движи като цяло, или не. Поради това запазването на енергията в топлинна форма не е много очевидно. От друга страна, ако ние сумираме *скоростите*, които имат посока, и резултатът бъде отличен от нула, това ще означава, че тялото като цяло се движи в някаква посока, а такова макродвижение ние сме вече способни да наблюдаваме. Така че никаква случайна вътрешна загуба на импулса не съществува: тялото има определен импулс само когато се движи като цяло. Именно поради това обстоятелство е трудно импулсът да бъде скрит. Но все пак той *може* да бъде скрит например в електромагнитното поле. Това е още една от особеностите на теорията на относителността.

Нютон считал, че взаимодействието от разстояние трябва да бъде мигновено. Но това се оказва невярно. Да вземем например електричните сили. Нека електричният заряд, разположен в някоя точка, изведнаж да започне да се движи. Тогава неговото действие върху друг заряд в друга точка няма да бъде мигновено: съществува малко закъснение. При такова положение, даже ако силите на действието и противодействието са равни помежду си, импулсите няма да се компенсират. Съществува малък интервал от време, в течение на който става нещо странно: в същото време, когато първият заряд изпитва някакво въздействие от страна на силата и реагира чрез изменение на своя импулс, вторият продължава да стои безпристрастен и не изменя своя импулс. За да се предаде влиянието на втория заряд през разделящото ги разстояние, се изисква известно време: „влиянието“ се разпространява не мигновено, а с някаква крайна (макар и много голяма) скорост — 300 000 m/s. В течение на този много малък интервал от време импулсът на частиците не се запазва. Но, разбира се, след като вторият заряд изпита влиянието на първия, импулсите се компенсират и настъпва пълен ред; все пак за момент законът се нарушава. Обаче в течение на този интервал съществува импулс от друг род, различен от импулса на частиците mv. Това е импулсът на електромагнитното поле. Ако го съберем с импулса на частиците, получената сума във всеки момент ще се запазва. Обаче фактът, че електромагнитното поле може да има импулс и енер-

гия, го прави реалност, а твърдението, че между частиците действуват сили, преминава в твърдението, че една частица създава поле, което на свой ред действува на друга частица. Самото поле има много свойства, аналогични на тези на частиците; то може да носи енергия и импулс. За илюстрация да разгледаме още един пример; в електромагнитното поле могат да съществуват вълни, които ние наричаме светлина. Оказва се, че светлината също носи някакъв импулс, така че когато пада върху някой предмет, тя му предава някакво количество от своя импулс. Това е еквивалентно на действието на някаква сила. Осветеният предмет изменя своя импулс, той като че ли е подложен на действието на сила. И така, падайки върху даден предмет, светлината оказва налягане. Макар това налягане да е много малко, то все пак може да бъде измерено с достатъчно фини прибори.

Оказва се, че в квантовата механика импулсът също не е $m\mathbf{v}$, а нещо съвсем друго. Тук вече е трудно да се определи точно какво е това скорост на частицата, но импулсът все пак съществува. Разликата се състои в това, че когато частиците действуват като частици, техният импулс е както по-рано $m\mathbf{v}$, но когато те действуват като вълни, импулсът вече се измерва с броя на вълните в 1 cm: колкото повече вълни, толкова по-голям е импулсът. Обаче въпреки тази разлика законът за запазването на импулса е валиден и в квантовата механика. Неверни се оказаха уравнението на Нютон $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ и всички негови изводи на закона за запазване на импулса, но въпреки това в края на краищата в квантовата механика този закон продължава да действува!

11

Вектори

1. Симетрията във физиката
2. Пренасяния на началото
3. Въртения
4. Вектори
5. Векторна алгебра
6. Законите на Нютон във векторна форма
7. Скаларно произведение на векторите

1. Симетрията във физиката

В тази глава ние въвеждаме понятие, което сред физиците е известно под названието *симетрия на законите на физиката*. Думата „симетрия“ се употребява тук в малко необичаен смисъл и затова е нужно да се определи. Как да се определи симетрията на някакъв предмет? Когато ние казваме, че изображението е симетрично, това означава, че едната негова част е точно такава, каквато е другата. Професор Херман Вайл е дал следното определение на симетрията: предметът е симетричен, ако след като бъде подложен на някаква операция, той изглежда така, както е изглеждал в началото. Например, ако ние завъртим една ваза на 180° около вертикална ос и тя не измени външния си вид, ние казваме, че двете страни на вазата са симетрични. Ние ще разглеждаме определението на Вайл в по-широк смисъл и ще говорим за симетрията на законите на физиката.

Да предположим, че сме инсталирали някъде сложна машина с много свръзки, с маховици, мотовилки и т. н. Да предположим сега, че някъде другаде сме инсталирали същата машина, всички части на която представляват точно копие на частите на първата машина, като при това са запазени всички размери и ориентацията на нейните отделни части, всичко е същото, само че пренесено на някакво разстояние. След това пускаме в действие двете машини при еднакви условия и наблюдаваме дали те работят съвършено еднакво. Ще повтарят ли движенията на отделните части на едната машина точно съответните движения на другата? Изобщо отговорът може да бъде *отрицателен*, защото ние можем да изберем за втората машина неудобно място, например да я поставим така, че при работа някои нейни части да се удрят в стената, тогава машината въобще няма да работи.

Всяка физическа идея изисква здрав смисъл при своето осъществяване, тъй като това не са чисто математически или абстрактни идеи. Трябва да разбираме какво имаме предвид, когато говорим, че при пренасяне на някаква машина на друго място се наблюдават същите явления. Под това ние разбираме, че пренасяме всичко, каквото може да се пренесе. Ако при това явлението по някакъв начин се изменя, ние ще предположим, че нещо пречи и ще се заемем с изучаването на причините. Ако не открием нищо, ще обявим, че физическите закони нямат очакваната симетрия. Но ако все пак физическите закони са симетрични, ние ще намерим причината за смущението, във всеки случай ние се надяваме да я намерим. След като се огледаме, ние ще забележим например, че на работата на машината пречи стената. Основният въпрос се състои в следното: ако ние достатъчно добре изучим нашите машини, ако всички основни източници на сили се намират вътре в апарата и ако се премести на друго място всичко, което следва да се премести, ще се изменят ли законите? Ще работи ли машината на новото място така както по-рано?

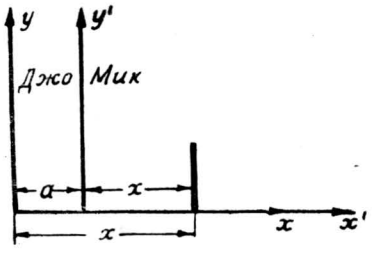
Ясно е, че ние искаме да преместим самото устройство и източниците на *основните* влияния, а съвсем не *всичко* в света — планетите, звездите и т. н., защото дори и да извършим тази грандиозна работа, бихме наблюдавали същото явление поради простата причина, че бихме се оказали на същото място. Но ние и не можем да преместим *всичко в света*. Оказва се, че ако нашето устройство преместваме повече или по-малко разумно, то ще работи еднакво. С други думи, ако ние не се блъскаме в стената, ако знаем произхода на външните сили и се постараем те да бъдат пренесени заедно с машината, тя ще работи на новото място така добре, както и по-рано.

2. Пренасяния на началото

Ние ще се ограничим с разглеждането на законите на механиката, която достатъчно добре изучихме. В предшествуващите глави ние установихме, че законите на механиката могат да се сведат към три, верни за всяка частица, уравнения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z. \tag{11.1}$$

Това означава, че съществува такъв способ за *измерване* на разстоянията x, y и z по трите взаимно перпендикулярни оси и на силите в тези посоки, при който определените от уравненията (11.1) закони са верни. Разстоянията трябва да се измерват от някакво начало, но *къде трябва да се разположи това начало?* Нютон ни е казал само, че такава точка, от която може да се започне измерването, *съществува;* може би това е центърът на Вселената и при измерване на разстоянията от него неговите закони са верни. Но ние можем веднага да покажем, че няма защо да се търси центърът на Вселената, защото е безразлично каква точка ще бъде взета за начало на координатите. С други думи, нека да предположим, че съществуват два човека — Джо, който е избрал началото на своята координатна система в някаква точка, и Мик, който е построил координатна система, успоредна на първата, но е приел за начало друга точка (фиг. 11.1), разположена на разстояние a по оста x.



Фиг. 11.1. Две успоредни координатни системи

Когато Джо определя положението на произволна точка в пространството, той намира нейните три координати: x, y и z (обикновено ние не включваме оста z, защото тя трудно може да бъде изобразена на нашия чертеж). В системата на Мик тази точка ще има друга стойност на x (за да я различаваме, ще въведем означение x') и въобще друга стойност на y, макар в нашия пример те числено да са равни. По такъв начин имаме

$$x'=x-a,\ y'=y,\ z'=z. \tag{11.2}$$

За да направим нашия анализ пълен, трябва да знаем какви сили измерва Мик. Ако силата действува в произволна посока, то под сила по посока на x ние разбираме някаква част от общата сила, която е равна на произведението от големината на силата по косинуса на ъгъла между посоката на силата и оста x. Не е трудно да се види, че Мик ще получи същите проекции на силата, каквито е получил Джо, т. е. имаме система от уравнения

$$F_{x'}=F_x,\quad F_{y'}=F_y,\quad F_{z'}=F_z. \tag{11.3}$$

Уравненията (11.2) и (11.3) определят връзките между величините, използувани от Джо и Мик.

Сега да поставим въпроса така: Ако Джо знае законите на Нютон, то ще бъдат ли те верни, когато Мик се опита да ги използува? Важен ли е изборът на началото на координатите? С други думи, да предположим, че уравненията (11.1) са верни, а (11.2) и (11.3) определят връзките между измерваните величини; вярно ли е, че

$$m\frac{d^2x'}{dt^2}=F_{x'}, \tag{11.4а}$$

$$m\frac{d^2y'}{dt^2}=F_{y'}, \tag{11.4б}$$

$$m\frac{d^2z'}{dt^2}=F_{z'}\ ? \tag{11.4в}$$

За да проверим тези уравнения, ще диференцираме два пъти израза на x' по времето. Преди всичко

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{d}{dt}(x-a)=\frac{dx}{dt}-\frac{da}{dt}.$$

Да предположим сега, че началото на координатната система, която Мик използува, е фиксирано (не се движи) по отношение

на координатната система на Джо, т. е. a е постоянно и $da/dt=0$; по такъв начин получаваме

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{dx}{dt}$$

и следователно

$$\frac{d^2x'}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Ако предположим, че измерванията от Джо и Мик маси са равни, уравнението (11.4а) приема вида

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_{x'}.$$

По такъв начин произведенията на масата по ускорението са еднакви у двамата приятели. Може да се получи и формула за $F_{x'}$. Използувайки (11.1), ние намираме

$$F_{x'}=F_x.$$

Следователно законите на механиката, от гледна точка на Мик, са същите: той записва законите на Нютон в други координати и тези закони се оказват верни. Това значи, че център на Вселената няма и законите на движението изглеждат еднакви независимо от това, от какво място се наблюдават.

Вярно е и такова твърдение: ако на някакво място се инсталира устройство с някакъв механизъм, то и на всяко друго място това устройство ще работи по същия начин. Защо? Защото всяка машина, която Мик изучава, се подчинява на същите уравнения, които описват работата на машината, контролирана от Джо. Тъй като *уравненията* са еднакви, то и *явленията* са същите. По такъв начин доказателството за това, че апаратът на новото място ще работи също така, както и на старото, се свежда към доказателството, че отнесените към новата точка на пространството уравнения се възпроизвеждат. Затова ние казваме, че *законите на физиката са симетрични по отношение на преместванията в пространството,* симетрични в този смисъл, че не се изменят при преместванията на началото на координатната система. Разбира се, всеки знае интуитивно, че това е вярно, но е интересно и полезно да се обсъди математиката на това явление.

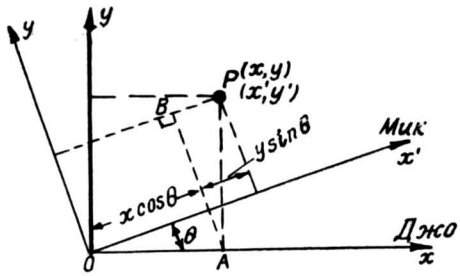
3. Въртения

След като си изяснихме въпроса за пренасянето на началото на координатната система, ние разгледахме първата задача от серията по-сложни теореми за симетрията на физическите закони. Следващата теорема твърди, че и посоките на координатните оси могат да се изберат произволно. С други думи, ако ние построим някъде някакво устройство и наблюдаваме как то работи, а след това недалеч построим аналогично устройство, но го разположим под произволен ъгъл по отношение на първото, то ще работи ли второто устройство така както първото? Въобще не, ако това е например старият стенен часовник с махало, известен още на нашите деди. Ако махалото е разположено отвесно, часовникът ще върви великолепно, но ако го завъртим така, че махалото да се опре в стената, то той вече няма да показва точно време. Значи нашата теорема не може да бъде приложена в случая на махалото, ако забравим за силата, която го заставя да се люлее. Ако ние все пак вярваме в симетрията на физическите закони по отношение на въртенията, то трябва да направим някакви напълно определени предположения за работата на часовниците, например че за тяхната работа е важен не само часовниковият механизъм, но и нещо лежащо извън неговите граници, нещо, което следва да намерим. Може също така да се предскаже, че часовникът ще върви другояче, ако той попадне на друго място по отношение към загадъчния засега източник на асиметрия (може би това е Земята). Наистина това е така. Ние знаем, че стенният часовник с махало, поставен например в изкуствен спътник, въобще няма

да върви, защото там отсъствува ефективната сила, а на Марс скоростта на хода му ще бъде съвсем друга. Часовникът с махало включва освен механизма още нещо извън себе си. Осъзнавайки този факт, ще видим, че заедно с часовника ще трябва да завъртим и Земята. Но ние, разбира се, няма защо да се безпокоим — да се направи това е много лесно. Ние просто ще почакаме една или две минути и Земята сама ще се завърти, а стенният часовник ще затрака в новото положение също така весело, както и по-рано. Докато се завъртваме в пространството, измерваните от нас ъгли също се изменят; тези изменения не причиняват особени безпокойства, тъй като в новите условия ние се чувствуваме също така, както и в старите. Тук може да се крие източник на грешки; вярно е, че в новото, завъртяно спрямо старото положение, законите остават същите, но *не е вярно* това, че във *въртящата се* координатна система са верни същите закони, както и в намиращата се в покой. Ако се направят достатъчно тънки опити, може да се установи, че Земята *се върти*, но нито един от тези опити няма да ни каже, че Земята *се е завъртяла*. С други думи, с помощта на тези опити ние не можем да установим ориентацията на Земята, но можем да кажем, че ориентацията се изменя.

Сега да обсъдим влиянието на ориентацията на координатната система върху физическите закони. Нека да видим дали няма да ни бъдат полезни отново Мик и Джо. За да избегнем ненужни усложнения, да предположим, че тези млади хора се намират в една точка на пространството (ние вече показахме, че техните координатни системи могат да бъдат премествани). Нека осите на координатната система на Мик да са завъртени по отношение на координатната система на Джо на ъгъл θ. Двете координатни системи са изобразени на фиг. 11.2, където ние се ограничихме с две измерения. Произволната точка P се снабдява с координатите (x, y) в системата на Джо и (x', y') в системата на Мик. Както и в предшествуващия случай, ще започнем с изразяването на координатите x' и y' чрез x, y и θ. За тази цел спускаме от точката P перпендикуляри до всички четири координатни оси и прекарваме AB перпендикулярно на PQ. От чертежа е ясно, че x' може да се представи като сума от две отсечки по оста x', а y' — като разлика на две отсечки по AB. Дължините на тези отсечки се изразяват чрез x, y и θ; ние добавяме едно уравнение за третата координата:

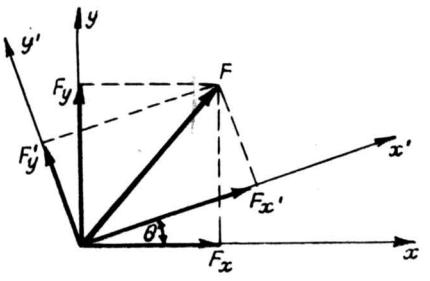
$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{11.5}$$



Фиг. 11.2. Две координатни системи с различна ориентация на осите

Сега (ние постъпвахме така и по-рано) нека да установим връзките между силите, измервани от двамата наблюдатели. Да предположим, че силата F, имаща (от гледна точка на Джо) компоненти F_x и F_y, действува на разположената в точка P на фиг. 11.2 частица с маса m. За простота нека да преместим двете координатни системи така, че техните начала да бъдат в точката P, както е показано на фиг. 11.3. Мик ще ни каже, че по негово мнение силата има компоненти $F_{x'}$ и $F_{y'}$ по неговите оси. Компонентите F_x и F_y имат компоненти по двете оси x' и y'. За да изразим $F_{x'}$ чрез F_x и F_y, нека да съберем компонентите на тези сили по x'; по същия начин можем да изразим и $F_{y'}$ чрез F_x и F_y. В резултат получаваме

$$\begin{aligned} F_{x'} &= F_x\cos\theta + F_y\sin\theta, \\ F_{y'} &= F_y\cos\theta - F_x\sin\theta, \\ F_{z'} &= F_z. \end{aligned} \tag{11.6}$$



Фиг. 11.3. Компонентите на силата в двете системи

Интересно е да се отбележи една случайност, която по-нататък ще се окаже много важна: формулите (11,5) и (11,6) за координатите на P и компонентите на F са съответно *тъждествени по форма*.

Да предположим, както и по-рано, че законите на Нютон са верни в координатната система на Джо и се изразяват с уравне-

ниятa (11.1). Отново изниква въпросът: може ли Мик да използува законите на Нютон, ще се изпълняват ли техните предписания в завъртяната координатна система? С други думи, ако предположим, че уравненията (11.5) и (11.6) дават връзката между измерваните величини, то вярно ли е, че

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x'}{dt^2} &= F_{x'}, \\ m\frac{d^2y'}{dt^2} &= F_{y'}, \\ m\frac{d^2z'}{dt^2} &= F_{z'}, \end{aligned} \tag{11.7}$$

За да проверим тези уравнения, пресмятаме левите и десните части независимо, а след това сравняваме резултатите. За да пресметнем левите части, умножаваме уравненията (11.5) по m и ги диференцираме два пъти по времето, считайки ъгъла θ за постоянен. Това дава

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x'}{dt^2} &= m\frac{d^2x}{dt^2}\cos\theta + m\frac{d^2y}{dt^2}\sin\theta, \\ m\frac{d^2y'}{dt^2} &= m\frac{d^2y}{dt^2}\cos\theta - m\frac{d^2x}{dt^2}\sin\theta, \\ m\frac{d^2z'}{dt^2} &= m\frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \tag{11.8}$$

Сега да пресметнем десните части на уравненията (11.7), като подставим (11.1) в уравненията (11.6). Получаваме

$$\begin{aligned} F_{x'} &= m\frac{d^2x}{dt^2}\cos\theta + m\frac{d^2y}{dt^2}\sin\theta, \\ F_{y'} &= m\frac{d^2y}{dt^2}\cos\theta - m\frac{d^2x}{dt^2}\sin\theta, \\ F_{z'} &= m\frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \tag{11.9}$$

Гледайте! Десните части на уравненията (11.8) и (11.9) са тъждествени; значи, ако законите на Нютон са верни в една координатна система, те могат да бъдат използувани и в друга координатна система. Тези разсъждения ни заставят да направим някои важни изводи: първо, никой не може да твърди, че избраната от него координатна система е единствена; тя може да бъде, разбира се, *по-удобна* при решаването на конкретни задачи. Например, удобно е, но не е задължително, да се вземе посоката на силата на тежестта за една от координатните оси. Второ, всеки механизъм, ако той представлява самостоятелно устройство и има всичко необходимо за създаване на сила, ще работи еднакво независимо от неговата ориентация.

4. Вектори

Доколкото ни е известно сега, не само законите на Нютон, но и всички физически закони имат две свойства, които се наричат инвариантност (или симетрия) по отношение на преместванията и завъртанията на координатните оси. Тези свойства са толкова важни, че за вземането им предвид при изучаването на физическите закони е била разработена специална математическа техника.

Решаването на поставените в предшествуващите параграфи задачи изисква доста дълги пресмятания. За да бъдат те сведени до минимум, е създаден могъщ математически апарат. Тази система, наречена *векторен анализ*, определи названието на главата, макар че фактически в нея се говори за симетрията на физическите закони. Разбира се, търсеният резултат може да бъде получен и по описания по-рано начин, но за да се облекчи и ускори нашата задача, ние прилагаме техниката на векторния анализ.

Нека да отбележим, че във физиката е важно да се знаят величини от два типа (в действителност те са повече от два, но нека да започнем с два). Величините от първия тип, например

числото на картофите в торбата, ще наричаме обикновени числа или *скалари*. Още един пример за такава величина може да служи температурата. Другите много важни във физиката величини имат посока, това е например скоростта; ние трябва да знаем не само бързината на преместването на тялото, но и пътя, по който то се движи. Импулсът и силата също имат посока, както и преместването: когато някой прави крачка, то може да се каже не само колко голяма е крачката, но и *накъде* той крачи, т. е. да се определи посоката на неговото движение.

Всички величини, които имат посока, подобно на крачката в пространството, се наричат *вектори*.

Векторът се определя от три числа. За да опишем крачка, например от началото на координатната система до точка P, определена от координатите x, y и z, трябва фактически да зададем три числа. Обаче ние ще използуваме за тази цел един единствен математически символ **r**, с който най-често ще имаме работа по-нататък[1]. Това *не е едно число*: символът **r** се задава с три числа: x, y и z. Символът **r** означава три числа, но не само *тези* три числа, защото при преминаването към друга координатна система те трябва да се заменят с числата x', y' и z'. Но ние искаме колкото е възможно повече да опростим нашата математика и ще използуваме *един и същ символ* в качеството на представител на трите числа x, y и z и на трите числа x', y', z'. По-точно, ние използуваме един и същ символ в качеството на представител на първата група числа в една координатна система и го правим представител на втората група числа, ако поискаме да сменим координатната система. Това е удобно, защото няма да ни се налага да изменяме формите на уравненията при преминаването от една координатна система в друга. Ако запишем уравненията с помощта на координатите x, y и z, а след това сменим координатната система, ще се появят координатите x', y' и z', но ние ще пишем просто **r**, приемайки, че този символ служи като представител на x, y и z, ако използуваме първата координатна система, и на x', y' и z', ако сме преминали към другата координатна система. Трите числа, които описват векторната величина в дадена координатна система, се наричат съставящи (компоненти) на вектора по посоката на осите на координатната система. С други думи, ние използуваме един символ за означаване на три букви и той съответствува на наблюдаването на *един и същ обект от три различни гледни точки*. Произнасяйки думата „един и същ обект", ние се обръщаме към нашата физическа интуиция, която ни казва, че крачката в пространството не зависи от това, с какви компоненти ние я описваме. И така, символът **r** представя един и същ обект независимо от това, как ориентираме осите на координатната система.

Сега да предположим, че съществува друга насочена величина, например силата — още една величина, която може да бъде определена чрез задаването на свързаните с нея три числа. Тези три числа при смяната на координатната система преминават в други три числа по строго определени математически правила. Тези правила трябва да бъдат същите, които определят преминаването на трите числа x, y и z в x', y', z'. С други думи, векторът е величина, определена от три числа, които при смяната на координатната система се преобразуват както компонентите на крачката в пространството. Уравнението от типа

$$\mathbf{F}=\mathbf{r}$$

е вярно във *всяка* координатна система, ако то е вярно в една от тях. То заменя три уравнения

$$F_x=x, \qquad F_y=y, \qquad F_z=z$$

или съответно

$$F_{x'}=x', \qquad F_{y'}=y', \qquad F_{z'}=z'.$$

Фактът, че физическите връзки между някакви величини могат да бъдат изразени чрез векторни уравнения, говори за това, че тези

[1] В книгите векторът се означава с получерна буква; в ръкописите пък се използува стрелка: $\vec{r}$

връзки са верни във всяка координатна система. Ето защо понятието вектор е много удобно във физиката.

Нека сега да разгледаме някои свойства на векторите. Като пример за „вектор“ могат да служат скоростта, импулсът, силата и ускорението. Често се оказва удобно векторът да се изобразява във вид на стрелка, показваща посоката на действието. Но защо силата може да бъде представена със стрелка? Просто затова, защото тя се преобразува по същите закони, както и „крачката в пространството“. Силата може да бъде представена във вид на чертеж, както изобразяване на преместване, като при това се избира такъв мащаб, че единицата за сила, например нютон, да съответствува на някаква дължина. След като веднъж осъществим такава процедура, ние ще бъдем всякога в състояние да изобразяваме силите във вид на отсечки, защото уравнението от типа

$$\mathbf{F} = k\,\mathbf{r}$$

(където k е някаква постоянна) има напълно определен смисъл. Възможността силата да бъде представяна от отсечка ще ни бъде от голяма полза, защото изобразявайки отсечката или стрелката, ние можем да не се грижим за координатните оси. При това, разбира се, всякога може бързо да се пресметне как се изменят компонентите на вектора при завъртване на осите, защото работата се свежда до просто геометрично построяване.

5. Векторна алгебра

Сега трябва да опишем законите или правилата, регулиращи възможните комбинации на различните вектори. Преди всичко ние ще изучим *сумата* на два вектора. Нека векторите **a** и **b** да са зададени в някаква координатна система чрез компонентите a_x, a_y, a_z и b_x, b_y, b_z. Да предположим, че сме съставили три числа a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z. Ще получим ли в резултат вектор? Вие можете да кажете: „Разбира се, нали това са три числа, а три числа образуват вектор.“ Не, *не всеки* три числа образуват вектор! За да зададем вектор, ние трябва да свържем зададените ни три числа с координатната система така, че при завъртването на координатните оси тези числа „да се завъртват“ едно спрямо друго и „да се смесват“ по описаните по-рано правила. По такъв начин, ние трябва да изясним в какво се превръщат числата a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z, ако е известно, че при изменението на координатната система числата a_x, a_y, a_z преминават в a'_x, a'_y, a'_z, а b_x b_y, b_z преминават в b'_x, b'_y, b'_z. Ще получим ли след завъртването на координатните оси числата $a'_x+b'_x$, $a'_y+b'_y$, $a'_z+b'_z$? Отговорът, разбира се, ще бъде положителен, защото нашето основно уравнение (11.5) определя така наречената *линейна* трансформация. Ако ние приложим това преобразование към a_x и b_x и пресметнем $a'_x+b'_x$, ще се окаже, че преобразуваното a_x+b_x е същото, както и $a'_x+b'_x$. „Събирайки“ векторите **a** и **b** по току-що описаното правило, получаваме нов вектор **c**. Ще запишем това така:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}+\mathbf{b}\,.$$

Векторът **c** има интересно свойство:

$$\mathbf{c} = \mathbf{b}+\mathbf{a};$$

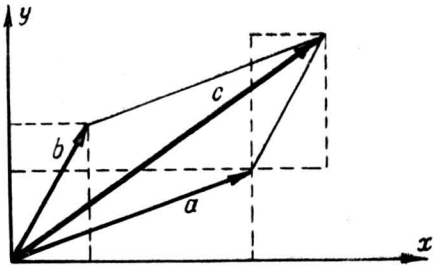
това лесно може да бъде проверено, като се напишат компонентите на вектора **c**. Освен това:

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}.$$

Векторите могат да бъдат събирани в произволен ред.

Какъв е геометричният смисъл на $\mathbf{a}+\mathbf{b}$? Как ще изглежда векторът **c**, ако изобразим **a** и **b** с помощта на стрелки? Отговор на този въпрос дава фиг. 11.4. Ние виждаме, че прибавянето на компонентите на вектора **b** към компонентите на вектора **a**,

се извършва най-просто, като разположим по съответен начин правоъгълника, образуван от компонентите на **b** към правоъгълника, образуван от компонентите на **a**. Тъй като **a** и **b** са добре притъкмени към своите правоъгълници, това е все едно да се поставят „краката“ на вектора **b** върху „главата“ на вектора **a**. Стрелката, съединяваща „краката“ на вектора **a** и „главата“ на вектора **b**, ще бъде вектор **c**. Можем да постъпим и другояче: да поставим „краката“ на **a** върху „главата“ на **b**. Спомняйки си геометричните свойства на паралелограма, можем да се убедим в това, че отново ще получим същия вектор **c**. Нека да отбележим, че поставяйки векторите един върху друг, ние ги събираме без помощта на координатните оси.

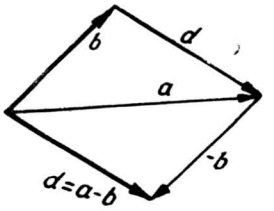


Фиг. 11.4. Събиране на вектори

Да предположим, че сме умножили вектора **a** по числото α. Какво трябва да разбираме под такова произведение? Нека да се договорим да разбираме под това вектор с компоненти αa_x, αa_y, αa_z. Докажете сами, че това е наистина вектор.

Да разгледаме сега изваждането на вектори. Изваждането може да се определи по същия начин, както и събирането, само че вместо да събираме, сега ние ще изваждаме компонентите. Изваждането може да бъде определено и като събиране с отрицателен вектор $-\mathbf{b}=(-1)\mathbf{b}$. Резултатът ще бъде същият.

Изваждането на векторите е показано на фиг. 11.5. На този чертеж е изобразено $\mathbf{d}=\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$; нека да отбележим също, че знаейки векторите **a** и **b**, разликата $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ може лесно да бъде намерена от еквивалентното съотношение $\mathbf{a}=\mathbf{b}+\mathbf{d}$. По такъв начин да се намери разликата на векторите е даже по-лесно, отколкото да се намери сумата; нужно е просто да прекарате вектор, съединяващ **b** и **a**, и вие получавате $\mathbf{a}-\mathbf{b}$!



Фиг. 11.5. Изваждане на вектори

Сега да преминем към скоростта. Защо скоростта е вектор? Ако координатите на точката са равни на x, y, z, то скоростта ѝ е равна на dx/dt, dy/dt, dz/dt. Вектор ли е това, или не? Диференцирайки израза (11.5), можем да намерим *закона за преобразуването* на dx'/dt. Вижда се, че величините dx/dt, dy/dt се преобразуват по същия закон, както x и y. По такъв начин скоростта е вектор. Изразът за скоростта може да бъде записан в много интересна форма:

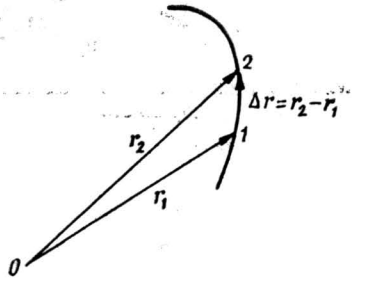
$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Нека да се постараем по-нагледно да си представим какво е скорост и защо тя е вектор. Далеч ли ще отиде частицата за малкото време Δt? *Отговор*: ще се придвижи на разстояние $\Delta\mathbf{r}$, т. е. ако частицата се намира „тук“ в първия миг, а „там“ — във втория, то векторната разлика на положенията на частицата е равна на вектора $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$, разположен по посоката на движението. Как изглежда, това е показано на фиг. 11.6. Ако разделим този вектор на интервала от време $\Delta t=t_2-t_1$, ще получим вектора на „средната скорост“.

С други думи, под вектор на скоростта ние разбираме границата на разликата на радиус-векторите, съответстващи на моментите $t+\Delta t$ и t, разделена на Δt при Δt, клонящо към нула:

$$\mathbf{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}. \qquad (11.10)$$

Скоростта е вектор дотолкова, доколкото тя е равна на разликата на два вектора. Това е вярно също така и поради обстоятелството, че компонентите на този вектор са равни на dx/dt, dy/dt, dz/dt. Замисляйки се над това, което сега беше направено, ние ще дойдем до извода, че диференцирайки какъвто и да е вектор по времето, ние отново ще получим някакъв нов вектор. По такъв начин съществуват няколко начина за получаване на нови вектори: 1) чрез умножаване на вектор по постоянно число; 2) чрез диференциране на вектор по времето; 3) чрез събиране или изваждане на два вектора.



Фиг. 11.6. Преместването на частицата за малкия интервал от време $\Delta t=t_2-t_1$

6. Законите на Нютон във векторна форма

За да запишем законите на Нютон във векторна форма, ние трябва да определим вектора на ускорението. Този вектор е равен на производната на вектора на скоростта по времето и не е трудно да се покаже, че неговите компоненти са равни на вторите кочеседн женеговите компоненти са равни на вторите производни на x, y и z по t:

$$\mathbf{a}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{dt}=\frac{\mathrm{d}}{dt}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{dt}=\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{dt^2}, \tag{11.11}$$

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2},\quad a_y=\frac{d^2y}{dt^2},\quad a_z=\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{11.12}$$

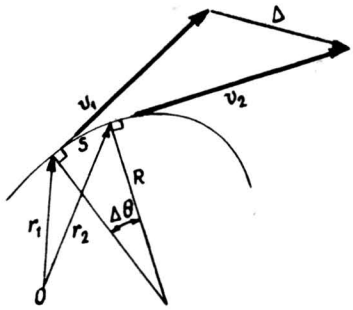
Сега законите на Нютон могат да бъдат записани по следния начин:

$$m\,\mathbf{a}=\mathbf{F} \tag{11.13}$$

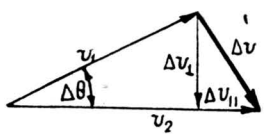
или

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{F}. \tag{11.14}$$

Сега задачата за доказателството на инвариантността на законите на Нютон по отношение на въртенията се свежда до следното: нужно е да се докаже, че **a** (ускорението) е вектор; това ние вече направихме. След това е нужно да се докаже, че **F** (силата) е вектор; това ние *предполагаме*. Следователно, ако силата е вектор, уравнението (11.13) ще изглежда еднакво във всички координатни системи, защото на нас ни е известно, че ускорението е също вектор. Записването на уравненията във вид, несъдържащ явно x, y, z, е привлекателно с това, че не е необходимо да записваме *три* уравнения всеки път, когато искаме да запишем законите на Нютон или други физически закони. Ние записваме това, което изглежда като *един* закон, макар фактически, това да са три закона (по един за всяка ос на координатната система), защото всяко векторно уравнение съдържа в себе си твърдението, че *всички компоненти са равни.*



Фиг. 11.7. Криволинейна траектория



Фиг. 11.8. Диаграма за пресмятане на ускорението

Този факт, че ускорението е скорост на изменението на вектора на скоростта, ни помага да намерим ускорението при всички обстоятелства. Да предположим например, че частица, която се движи по някаква сложна крива (фиг. 11.7), има в момента t_1 скорост $\mathbf{v}_1$, а малко по-късно, в момента t_2 — скорост $\mathbf{v}_2$. На какво е равно ускорението? *Отговор*: ускорението е равно на разликата на скоростите, делена на малкия интервал от време; значи необходимо е да се знае разликата на скоростите. Как да се намери тази разлика? За да намерим разликата на двата вектора, прекарваме вектор през краищата на векторите $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_1$, с други думи, начертаваме вектора Δ като разлика на тези два вектора. Вярно ли е това? Не! Ние можем да постъпваме така само тогава, когато *началата* на векторите са разположени в една точка! Да се изваждат вектори, приложени в разни точки, е безсмислено. Пазете се от това! За да извадим векторите, нужно е да начертаем друга схема. На фиг. 11.8 векторите $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ са пренесени паралелно и са равни на техните двойници, изобразени на фиг. 11.7. Сега можем да поговорим за ускорението. Ускорението, разбира се, е равно на $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$. Интересно е да се отбележи, че разликата на скоростите може да бъде разделена на две части: можем да си представим, че ускорението е съставено от *две части*: $\Delta\mathbf{v}_{\parallel}$ — вектор, паралелен на допирателната към пътя, и $\Delta\mathbf{v}_{\perp}$ — вектор, перпендикулярен на тази допирателна. Тези вектори са показани на фиг. 11.8. Допирателното към пътя ускорение е равно естествено, само на изменението на дължината на вектора, т. е. на изменението на големината на *скоростта* **v**:

$$a_{\parallel}=\frac{dv}{dt}. \tag{11.15}$$

Другата, напречната компонентна на ускорението, може лесно да бъде пресметната с помощта на фиг. 11.7 и 11.8. За малкия ин-

тервал от време Δt изменението на ъгъла между $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ е равно на малкия ъгъл $\Delta\theta$. Ако големината на скоростта е равна на v, то

$$\Delta v_\perp = v\Delta\theta,$$

а ускорението a е равно на

$$a_\perp = v\frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Сега ние трябва да знаем $\Delta\theta/\Delta t$. Тази величина може да бъде намерена по следния начин: ако в даден момент кривата може да бъде заменена приблизително с окръжност с радиус R и, тъй като за време Δt частицата ще измине разстоянието $s = v\Delta t$ изменението на ъгъла ще бъде равно на

$$\Delta\theta = v\frac{\Delta t}{R}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{v}{R}.$$

По такъв начин, както ние вече установихме по-рано,

$$a = \frac{v^2}{R}. \tag{11.16}$$

7. Скаларно произведение на векторите

Нека да посветим още малко време на свойствата на векторите. Не е трудно да се разбере, че *дължината* на крачката в пространството е еднаква във всички координатни системи. Следователно, ако на някаква крачка $\mathbf{r}$ съответстват компонентите x, y, z в една координатна система и компонентите x', y', z' в друга система, то разстоянието $r = |\mathbf{r}|$ е едно и също в двете системи. Отначало ние, разбира се, трябва да въведем две разстояния

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

и

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

а след това да проверим равенството на тези две величини. За да се освободим от квадратния корен, ще сравняваме квадратите на разстоянията. Ние трябва да покажем, че

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \tag{11.17}$$

Поставяйки в това уравнение определените от съотношението (11.5) стойности на x', y', z', ще видим, че това е наистина така. Значи освен вече изучените от нас векторни уравнения съществуват още някакви съотношения, които са верни във всяка координатна система.

Незабелязано получихме нов тип величини. Ние можем да построим функция на x, y и z, наречена *скаларна функция* — величина, която няма посока и е еднаква в двете координатни системи. От вектора може да се построи скалар. Добре би било да се намери общо правило за това построяване. Фактически ние вече намерихме това правило: трябва да се повдигнат в квадрат компонентите на вектора и да се съберат. Да определим сега нова величина, която да означим с $\mathbf{a}.\mathbf{a}$. Това не е вектор, а скалар; това е число, еднакво във всички координатни системи и определено като сума на квадратите на трите компоненти на вектора:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \tag{11.18}$$

Вие ще попитате: „В каква координатна система?“ Тъй като това число не зависи от координатната система, отговорът е еднакъв във всяка координатна система. Ние имаме работа с нов *вид* величина, с *инвариант* или *скалар*, получен чрез „повдигане на вектора в квадрат“. Ако сега определим, излизайки от векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, величината

$$\mathbf{a}.\mathbf{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z, \tag{11.19}$$

то можем де се убедим, че тази величина съвпада в двете координатни системи — примованата и непримованата. За да докажем това, обръщаме внимание, че то е вярно за величините **a**. **a**, **b**. **b** и **c**. **c**, където $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Сумата на квадратите $(a_x+b_x)^2+(a_y+b_y)^2+(a_z+b_z)^2$ е инвариант:

$$(a_x+b_x)^2+(a_y+b_y)^2+(a_z+b_z)^2= \tag{11.20}$$
$$=(a_{x'}+b_{x'})^2+(a_{y'}+b_{y'})^2+(a_{z'}+b_{z'})^2.$$

Разкриваме скобите от двете страни на това уравнение. Смесените произведения ще ни дадат изрази от типа (11.19), а сумите на квадратите на компонентите на **a** и **b** — изразите (11.18). Инвариантността на изразите от типа (11.18) води до инвариантност на смесените произведения от типа на (11.19).

Величината **a**. **b** се нарича *скаларно произведение* на двата вектора **a** и **b** и има много интересни и полезни свойства. Например не е трудно да се докаже, че

$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{a}.\mathbf{c}. \tag{11.21}$$

Има и много прост геометричен начин за пресмятане на **a**. **b**, при който не трябва да се определят компонентите на **a** и **b**; **a**. **b** е просто произведение на дължините на векторите **a** и **b** и косинуса на ъгъла между тях. Защо? Да предположим, че сме избрали такава координатна система, в която векторът **a** е насочен по оста x: в този случай векторът а има единствена ненулева компонента a_x, която е равна на дължината му. Уравнението (11.19) се свежда в този случай до $\mathbf{a}.\mathbf{b}=a_x b_x$, което е равно на произведението на дължината на вектора **a** и компонентата на вектора **b** по посоката на **a**, която на свой ред е равна на $b\cos\theta$, т. е.

$$\mathbf{a}.\mathbf{b}=ab\cos\theta.$$

По такъв начин в този частен случай ние доказахме, че **a**. **b** е равно на произведението на дължините на векторите **a** и **b** и косинуса на ъгъла между тях. Но *ако това е вярно в една координатна система, то е вярно и във всички системи*, защото **a**. **b** не зависи от избора на координатната система.

Какво полезно може да ни даде тази нова величина? Нужно ли е на физика скаларното произведение? Да, то му е необходимо постоянно. Например в гл. 4 ние нарекохме кинетична енергия величината $^1/_2\ mv^2$, но ако частицата се движи в пространството, то нужно е да се повдигнат в квадрат поотделно компонентите на скоростта по x, y и z, така че формулата за кинетичната енергия ще се запише във вида

$$\text{к. е.}=\frac{1}{2}\,m(\mathbf{v}.\mathbf{v})=\frac{1}{2}m\,(v_x^2+v_y^2+v_z^2). \tag{11.22}$$

Енергията няма посока. Импулсът пък има посока, той е вектор и е равен на произведението от масата и вектора на скоростта. Като друг пример за скаларно произведение може да служи работата, извършена от силата при преместването на някакъв предмет от едно място на друго. Ние още не сме дали определение на понятието работа; тя е равна на изменението на енергията на добавката към тежестта, след като силата **F** е работила по пътя **s**,

$$\text{Работата}=\mathbf{F}.\mathbf{s} \tag{11.23}$$

Понякога е целесъобразно да се говори за компонента по определена посока (например по вертикалата, защото това е посоката на силата на тежестта). За целта е удобно да се въведе *единичен вектор* по интересуващата ни посока. Под единичен вектор ние ще разбираме вектор, скаларното произведение на който със самия себе си е равно на единица. Нека това да бъде векторът **i**; тогава $\mathbf{i}.\mathbf{i}=1$. Скаларното произведение **i**. **a** е равно на $a\cos\theta$,

т.е. равно е на компонентата на вектора **a** по посоката на **i**. Това е най-добрият начин за получаване на компонентата на вектора. Постъпвайки така, ние можем да намерим всички компоненти на вектора и да получим забавна формула.

Да предположим, че ни е дадена някаква координатна система x, y и z. Въвеждаме три вектора : **i** — единичен вектор по оста x, **j** — единичен вектор по оста y и **k**— единичен вектор по оста z. Ясно е, че $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1$. На какво е равно произведението $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$? Ако ъгълът между векторите е прав, тяхното скаларно произведение е равно на нула. По такъв начин

$$\begin{aligned} &\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1, \\ &\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0, \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1, \qquad (11.24) \\ &\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0, \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0, \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1. \end{aligned}$$

Използувайки тези свойства на векторите **i**, **j**, **k**, всеки вектор може да бъде записан във вида

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}. \qquad (11.25)$$

По такъв начин лесно може да се премине от компонентите на вектора към самия вектор.

Ние изучихме далеч не всички свойства на векторите. Обаче преди да продължим разглеждането на този въпрос, нека първо да се научим да прилагаме току-що обсъдените идеи във физиката. И тогава, когато ние добре овладеем основния материал, ще бъде по-лесно да вървим по-нататък, без да правим грешки. По-късно ще видим, че е удобно да бъде определено още едно произведение на два вектора, което се нарича векторно произведение и се записва по следния начин : $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. Обаче обсъждането на този въпрос е по-добре да бъде отложено за следващата глава.

12

Характеристика на силата

1. Какво
2. Триене
3. Молекулни сили
4. Фундаментални сили. Полета
5. Псевдосили
6. Ядрени сили

1. Какво е сила?

Макар изучаването на законите на физиката да е интересно и поучително, макар те да ни помагат да разбираме природата и да овладяваме нейните сили, все пак от време на време е полезно да се спрем и поразмислим: какво всъщност представляват те? Смисълът на всяко твърдение е нещо, което отдавна, от незапомнени времена е интересувало и тревожило философите, а смисълът на физическите закони още повече трябва да ни вълнува, защото повсеместно се счита, че в тези закони се таят някои реални знания. Смисълът на истината е сложен философски въпрос; винаги е важно навреме да се попита: какво значи това?

Нека да попитаме: какъв е смисълът на физическите закони на Нютон, какъв е смисълът на формулата $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$? Какъв е смисълът на понятията сила, маса и ускорение? Ние интуитивно разбираме какво е маса; ние можем също така да определим понятието ускорение, ако ни са ясни понятията място и време. Поради това няма да обсъждаме смисъла на тези понятия, а ще съсредоточим нашето внимание върху понятието *сила*. И тук отговорът е също доста прост: ако тялото се ускорява, значи то се намира под действието на сила. Така говорят законите на Нютон и най-точното и красивото от мислимите определения на силата би се заключавало в това, че силата е масата на тялото, умножена по неговото ускорение.

Съществува например закон, че импулсът се запазва тогава, когато сумата на външните сили е равна на нула. И ето, питат ни: „А какво значи това: сумата на външните сили е равна на нула?“ И ние любезно отговаряме: „Когато пълният импулс е постоянен, тогава сумата на външните сили е равна на нула.“ Не, нещо тук не е в ред. Ние не казахме нищо ново. Откривайки основния закон, който гласи, че силата е равна на произведението от масата и ускорението, а след това като определим силата като произведение от масата и ускорението, ние нищо ново не откриваме. Можем да определим силата и по друг начин: движещо се тяло, на което не действува сила, продължава да се движи по права линия с постоянна скорост. Тогава, виждайки, че тялото не се движи по права линия с постоянна скорост, можем да твърдим, че върху него действува сила. Но такива разсъждения не могат да съставят съдържанието на физиката: защо тя трябва да гони определенията по кръг? Въпреки това, приведеното по-горе положение на Нютон е очевидно най-точното от всички определения на силата, едно от тези определения, които така много допадат на математика. И все пак то е напълно безполезно, защото само от едно определение никой никога нищо не е извеждал. Можете цял ден да седите в креслото и да определяте думите по свое желание, но съвсем друго нещо е да се разбере какво става при удар на две топки или при окачването на тежинка на пружина. Между *поведението* на тялото и избора на определението няма нищо общо.

Нека например да си позволим да твърдим, че тяло, предоставено само на себе си, стои на едно място и не се движи; тогава, забелязвайки, че нещо се движи, бихме започнали да твърдим, че то се намира под действието на „жила“ — желанието за промяна на мястото. Ние бихме получили прекрасен нов закон, всичко би било добре, освен тези случаи, когато действува „жила“. Както виждате, всичко би било аналогично на нашето определе-

ние на силата и точно така не би давало никаква информация. Истинското съдържание на законите на Нютон е такова: предполага се, че силата има *независими свойства* в допълнение към закона $\mathbf{F}=m\,\mathbf{a}$; но *характерните* независими свойства на силите не е описал напълно нито Нютон, нито някой друг; затова физическият закон $\mathbf{F}=m\,\mathbf{a}$ е непълен. Той неявно говори, че изучавайки характеристиките на величината, определена като произведение на m и $\mathbf{a}$, ще открием в тях някаква простота; този закон ни дава добра програма за анализ на природата, той ни подсказва, че свойствата на тази величина — силата, могат да се окажат прости и че е полезно тя да бъде изучавана.

Първият пример за такива сили е пълният закон за гравитацията, предложен от Нютон. Формулирайки своя закон, той е отговарял на въпроса: какво е сила? Ако не съществуваше нищо друго освен гравитация, то съчетанието на този закон и закона за силата (втория закон на движението) би се оказало завършена теория. Но освен гравитацията съществуват много други сили и ние ще използуваме законите на Нютон във всевъзможни положения. Затова налага ни се да разкажем нещо за свойствата на силите.

Например говорейки за силата, винаги неявно предполагаме, че когато няма физически тела, силата е равна на нула. Ако виждаме, че силата не е равна на нула, ние търсим нейния източник. Това предположение е съвсем различно от въведената от нас „жила".

Една от най-важните характеристики на силата е нейният материален произход; и тъкмо това свойство *не може да се счита* за определение.

Нютон е привел още едно правило за силите: силите между взаимодействуващите тела са равни и противоположни; действието е равно на противодействието. Оказва се, че и това правило не е съвсем вярно. Но и самият закон $\mathbf{F}=m\,\mathbf{a}$ не е съвсем верен; ако той беше определение, ние щяхме да твърдим, че той е *винаги* точен; но в действителност това не е така.

Вие можете да кажете: „На мен не ми харесва тази неточност, аз искам всичко да се определя точно, а пък и в много книжки е написано, че науката е точно нещо, че в нея *всичко* е определено." Но колкото и да настоявате за точно определение на силата, вие никога няма да го получите! Първо, самият Втори закон на Нютон не е точен, и второ, за да разберете физическите закони, вие трябва да сте на ясно, че всички те са в една или друга степен приближения.

Всяко просто твърдение е приблизително вярно; като пример да разгледаме някакъв предмет... впрочем, *какво* е предмет? „Философите" всякога отговарят: „Например стол".

Веднага става ясно, че те сами не разбират какво говорят. *Какво* е стол? Столът има определена маса... Определена? Доколко определена? От време на време от него излитат атоми — малко, но все пак! Върху него пада прах, от него падат прогнили частички, пък и лакът с времето се изхабява. Да се определи точно предметът стол, да се каже точно кои атоми принадлежат на него, кои на въздуха и кои на лака е невъзможно. Следователно масата на стола може да се определи само приблизително. Също така е невъзможно да се определи масата на произволен отделен предмет, защото такива предмети не съществуват, в света няма изолирани предмети; всяко нещо е смес от много други неща и ние всякога имаме работа с приближения и идеализации. Цялата същност е в идеализацията. В достатъчно добро приближение (около 1 към 10^{10}) количеството на атомите на стола за една минута не се изменя. Ако за вас тази точност е достатъчна, вие имате право да считате масата на стола за постоянна. По същия начин може идеално да се изучат и характеристиките на силата, стига само да не изискваме пълна точност. Този приблизителен възглед за природата, който се опитва да изработи физиката (стремейки се постоянно да повиши точността на приближенията), може да не ви удовлетворява, вие можете да предпочетете математическото определение, но то никога не действува в

реалния свят. Математическите определения са добри за математиката — там е възможно напълно и докрай да се следва логиката, а физическият свят е сложен. Ние вече говорихме за това, привеждайки такива примери, като океанските вълни и чашата вино. Опитвайки се да ги разделим на части, ние разсъждаваме отделно за масата на виното и отделно за масата на чашата. Но как може да се узнае къде е едното и къде е другото, щом едното е разтворимо в другото. И силата, действуваща на изолиран предмет, вече включва неточност и всяка система от разсъждения за реалния свят, поне днес, предполага разни приближения.

Тази система по нищо не прилича на математичните разсъждения. В тях всичко може да бъде определено и в резултат винаги е *неизвестно* за какво говорят.

Действително цялото великолепие на математиката се състои и в това, че *в нея ние не знаем за какво говорим*. Нейните закони, нейните доказателства, нейната логика не зависят от това, за което се отнасят — и в това се крие своя, особена красота. Когато имате друга съвкупност от обекти, подчиняващи се на същата система от аксиоми, както Евклидовата геометрия, вие можете да направите нови определения и изводи, съобразявайки се с правилната логика, — всички следствия ще се окажат правилни и съвсем не е важно за какво се отнасят. А в природата ? Когато прекарвате линия или я осъществявате с помощта на светлинен лъч и теодолит (както това се прави при геодезичното фотографиране) — следва ли природата геометрията на Евклид ? Не, вие правите приближение; кръстчето на обектива има определена дебелина, а геометрическата линия няма; дали да се прилага при фотографирането Евклидовата геометрия или не — това е въпрос на физиката, а не на математиката.

Разбира се, от експериментална (а не математична) гледна точка вие трябва да знаете дали законите на Евклид са приложими към този род геометрия, която използувате, когато измервате околността; вие предполагате, че те са приложими. И наистина те прекрасно работят; прекрасно, но не точно, защото вашите фотографски линии не са истински геометрични линии. Дали са приложими, или не са приложими абстрактните евклидови прави към експерименталните линии — на това може да отговори само опитът; на този въпрос с чисто разсъждение не може да се от говори.

Също така вие не можете да наречете $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ определение, да изведете от него всичко по чисто математичен път и да направите механиката математична теория: механиката е описание на природата. Формулирайки подходящи постулати, винаги можете да създадете математична система като тази на Евклид, но не можете да създадете математика на света; рано или късно ще трябва да отговорите на въпроса: изпълняват ли се тези аксиоми за природните обекти? И вие веднага бихте затънали сред тези заплетени, „нечисти“ реални предмети, като при това достигате все по-голяма и по-голяма точност на приближенията.

2. Триене

И така, за да разберем добре законите на Нютон, ние трябва да обсъдим свойствата на силите; целта на тази глава е да се започне това обсъждане и да се състави един вид допълнение към законите на Нютон. Ние вече се запознахме със свойствата на ускорението и с другите близки понятия, сега ни предстои да се заемем със свойствата на силите. Поради тяхната сложност в тази глава (за разлика от предшествуващите) няма да се стремим към точни формулировки. За да започнем с конкретна сила, да разгледаме съпротивлението, което въздухът оказва на летящия самолет. Какъв е законът за тази сила? (Ние *трябва* да го намерим; нали за всяка сила съществува закон!) Само че едва ли той ще бъде прост. Достатъчно е да си представим задържането на самолета от въздуха — свистенето на вятъра в крилата, вихрите, поривите, трептенето на корпуса и много други сложни яв-

ления — за да разберем, че този закон надали ще бъде прост и удобен. Толкова по-забележителен е фактът, че силата има много проста закономерност: $F \approx cv^2$ (постоянна, умножена по квадрата на скоростта).

Какво е положението на този закон сред другите? Подобен ли е той на закона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$? Не! Първо, той е емпиричен и е получен чрез груби измервания в аеродинамичната тръба. Вие ще възразите: „Какво пък, законът $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ също така би могъл да бъде емпиричен." Но нима работата е в това? Разликата не е в емпиричността, а в това, че, доколкото ние разбираме, този закон за триенето е резултат от много влияния и в основата си никак не е прост. Колкото повече го изучаваме, колкото по-точно мерим, толкова *по-сложен* (а *не по-прост*) ще ни се представи той. С други думи, колкото по-дълбоко вникваме в закона за задържането на самолета, толкова по-ясно ще разбираме неговата „фалшивост". Колкото по-дълбок е погледът, колкото по-точни са измерванията, толкова по-сложна става истината; тя няма да ни се представи като резултат на прости фундаментални процеси (впрочем ние се досещахме за това от самото начало). При много малки скорости (за самолета например те са недостъпни) законът се изменя: задържането вече зависи от скоростта почти линейно. Или например намаляването скоростта на топчето (или на мехурчето въздух, или на нещо друго) поради триенето във вискозна течност (подобно на мед) — при малки скорости то е също пропорционално на скоростта, а при големи, когато се образуват вихри (не в меда, разбира се, а във водата или въздуха), пак възниква приблизителна пропорционалност на квадрата на скоростта ($F = cv^2$); при по-нататъшно увеличаване на скоростта и това правило става невалидно. Може, разбира се, да се каже: „Тук слабо се изменя коефициентът." Но това е просто уловка.

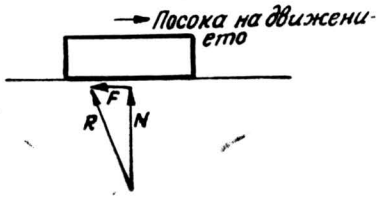
Второ, тук има и други усложнения: възможно ли е например тази сила да бъде разделена на части — на сила на триене на крилата, корпуса, опашката и т. н.? Разбира се, когато трябва да се узнаят въртящите моменти, действуващи на части на самолета, да се прави това е възможно, но тогава трябва да имаме специален закон за триенето на крилата и т. н. Натъкваме се на удивителния факт, че силата, действуваща на едното крило, зависи от другото крило, т. е. ако във въздуха оставим само едно крило, силата на триенето ще бъде далеч не такава, каквато тя би била, ако във въздуха беше целият самолет. Причината е, разбира се, в това, че биещият в носа на самолета вятър се стича по крилата и изменя силата на задържането. И макар да ни се струва чудно, че съществува такъв прост, груб емпиричен закон, който се използува при създаването на самолети, той не е от тези закони на физиката, които се наричат *основни*: с повишаване на точността той става все по-сложен и по-сложен. Изучаването на зависимостта на коефициента c от формата на носа на самолета веднага нарушава неговата простота. Не остава никаква проста зависимост. Друго нещо е законът за гравитацията: той е прост и по-нататъшното му усъвършенствуване само подчертава това.

Ние говорихме за два типа триене, възникващи в резултат на бързото движение във въздуха или бавното в меда. Но има още един вид триене — сухо или триене при хлъзгане: за него говорят тогава, когато едно твърдо тяло се хлъзга по повърхността на друго. На такова тяло е нужна сила, за да продължи движението. Наричат я сила на триенето. Въпросът за нейния произход е много неясен. Двете допиращи се повърхности не са гладки, ако се разглеждат на атомно ниво. В точката на допирането между атомите възниква сцепление; при дърпане или тласкане на тялото връзката се къса и възникват трептения (във всеки случай става нещо подобно). По-рано са мислили, че механизмът на триенето не е сложен; повърхността е покрита с грапавини и триенето е резултат на повдигането на хлъзгащите се части върху тези грапавини; но това е неправилно, защото тогава не би имало загуба на енергия, а в действителност при триенето се изразходва енер-

гия. Механизмът на загубата на енергия е друг: грапавините при триенето се изглаждат, възникват трептения и движение на атомите и по двете тела се разпространява топлина. И тук съвсем неочаквано се оказва, че това триене може да бъде описано приблизително с прост емпиричен закон. Силата, необходима за преодоляване на триенето и за движението на един предмет по повърхността на друг, зависи от силата, която е насочена по нормалата (по перпендикуляра) към повърхността на допирането. В достатъчно добро приближение може да се счита, че силата на триенето е пропорционална на нормалната сила с приблизително постоянен коефициент:

$$F = \mu N, \tag{12.1}$$

където μ е коефициентът на триенето (фиг. 12.1). Макар коефициентът μ да е приблизително постоянен, тази формула се оказва добро емпирично правило, което позволява да се пресмята каква сила е необходима в едни или други практически или инженерни обстоятелства. Само когато силата по нормалата или скоростта на движението е много голяма, законът престава да бъде валиден: отделя се извънредно много топлина. Важно е да се има предвид, че всеки един от тези емпирични закони има ограничен характер.



Фиг. 12.1. Съотношението между силата на триенето и перпендикулярната компонента на силата при хлъзгането

Приблизителната вярност на формулата $F = \mu N$ може да бъде илюстрирана с прост опит. Да поставим кубче с тегло W на равнина, наклонена под ъгъл θ. Нека да увеличаваме наклона на равнината дотогава, докогато кубчето под действието на силата на собственото си тегло започне да се хлъзга по нея. Успоредната на равнината компонента на теглото $W \sin\theta$ е равна на силата на триенето F, ако кубчето се хлъзга равномерно. Перпендикулярната към равнината компонента на теглото е $W \cos\theta$; това е силата N. Формулата се превръща в $W \sin\theta = \mu W \cos\theta$, откъдето $\mu = \sin\theta/\cos\theta = \mathrm{tg}\theta$. Съгласно този закон при определен наклон на равнината кубчето започва да се хлъзга. Ако кубчето се натовари с допълнително тегло, то всички сили във формулата ще се увеличат в същата пропорция и W от двете страни на равенството ще се съкрати. Ако величината μ не се е изменила, натовареното кубче пак ще се хлъзне при същия наклон. Определяйки от опита θ, ще се убедим, че при по-голямо тегло на кубчето хлъзгането ще започне при същия наклон. Даже при многократно увеличаване на теглото това правило се съблюдава. Ние идваме до заключението, че коефициентът на триенето не зависи от теглото.

При този опит е лесно да се забележи, че при правилен ъгъл на наклона θ кубчето не се хлъзга плавно: на едно място то се задържа, а на друго се устремява напред. Такова поведение на кубчето показва, че коефициентът на триене може само грубо да се счита за постоянен: той се изменя от място на място. Също такова неуверено поведение се наблюдава и при изменението на теглото на кубчето. Различията в триенето възникват от различната гладкост или твърдост на частите на повърхността, от замърсяванията, ръждата и други външни влияния. Таблиците, в които са дадени коефициентите на триенето на „стомана по стомана“, „мед по мед“ и т. н., са пълна измама, защото в тях са пренебрегнати тези дреболии, които всъщност определят стойността на μ. Триенето на „мед по мед“ и т. н. е фактически триене „по прилепналите към медта мръсотии“.

В опитите от описания тип триенето почти не зависи от скоростта. Мнозина вярват, че триенето, което трябва да бъде преодоляно, за да се приведе предметът в движение (статическо), е по-голямо от силата, необходима за поддържането на вече възникналото движение (триене при хлъзгане). Но за сухите метали е трудно да се забележи някаква разлика. Това мнение е породено вероятно от опитите, в които е имало следи от масло или смазка, или пък кубчетата са били закрепвани с пружинка или нещо гъвкаво.

Много е трудно да се достигне точност в количествените

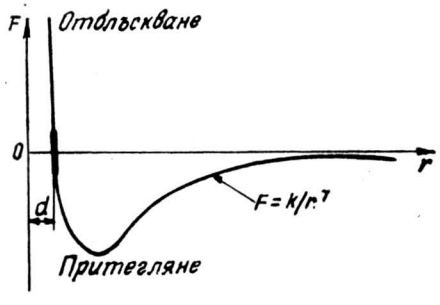
опити по триене; и досега триенето не е достатъчно добре проанализирано въпреки огромното значение на този анализ за техниката. Макар законът $F=\mu N$ за стандартни повърхности да е почти точен, причината за такъв вид закон не е ясна. За да се покаже, че μ слабо зависи от скоростта, са нужни особено тънки експерименти, защото от бързите трептения на долната повърхност видимото триене силно намалява. В опитите при големи скорости трябва да се вземат мерки против трептенията на телата, защото в противен случай видимото триене веднага намалява. Във всеки случай този закон за триенето се отнася към тези полуопитни закони, които не са напълно ясни и не стават по-ясни въпреки полаганите огромни усилия. Практически сега никой не може да оцени коефициента на триенето между две вещества.

По-рано беше вече казано, че опитите да се измери μ при хлъзгането на чисти вещества (мед по мед) водят до съмнителни резултати, защото допиращите се повърхности не са чиста мед, а смес на окиси и други замърсявания. Ако искаме да получим напълно чиста мед, ако изчистим и полираме повърхностите, дегазираме веществото във вакуум и съблюдаваме всички необходими предпазни мерки, то въпреки всичко няма да получим μ. Защото двете парчета мед ще прилепнат и тогава можете дори да изправите равнината отвесно! Коефициентът μ, който за умерено твърди повърхности е обикновено по-малък от единица, тук се увеличава до няколко единици! Причината за такова неочаквано поведение се състои в следното: когато се допират атоми от един вид, те не могат да „знаят“, че принадлежат към различни парчета мед. Ако между тях имаше други атоми (атоми на окисите, на смазката, на тънките повърхнинни слоеве от замърсявания), тогава на атомите на медта щеше да бъде „ясно“ дали се намират на едно парче, или на разни парчета. Спомнете си сега, че именно поради силите на привличането между атомите медта представлява твърдо вещество и ще ви стане ясно защо е невъзможно правилно да се определи коефициентът на триене за чистите метали.

Същото явление се наблюдава в простия домашен опит със стъклената пластинка и чашата. Поставете чашата върху пластинката, вържете я с връв и дърпайте; тя добре се хлъзга и коефициентът на триенето се чувствува; разбира се, този коефициент е малко нерегулярен, но все пак това е коефициент. Намокрете сега пластинката и дъното на чашата и дръпнете чашата; вие ще почувствувате, че те са се слепили. Вглеждайки се внимателно, можем да открием дори драскотини. Работата е в това, че водата може да отстранява мазнината и другите вещества, замърсяващи повърхността; остава чистият контакт стъкло-стъкло. Този контакт е толкова добър, че да се разкъса не е така просто: да се наруши той е по-трудно, отколкото да се откъсне парче стъкло; поради това възникват драскотините.

3. Молекулни сили

Сега да преминем към характеристиката на молекулните сили. Това са сили, действуващи между атомите; те в крайна сметка предизвикват триенето. На класическата физика не се удаде удовлетворително да обясни молекулните сили. Те бяха напълно изяснени едва след появяването на квантовата механика. Емпирично обаче силата, действуваща между два атома, може да бъде изобразена приблизително така, както е показано на фиг. 12.2, където тази сила F е представена като функция на разстоянието r между атомите. Има и други случаи: в молекулата на водата например отрицателните заряди са разположени главно в атома на кислорода, а центровете на положителните и отрицателните заряди се оказват не в една точка, поради което съседните молекули изпитват действието на сравнително големи сили. Тези сили се наричат *дипол-диполни*. Но в много системи зарядите са уравновесени далеч по-добре, например в газообразния



Фиг. 12.2. Силата, действуваща между два атома, като функция на разстоянието между тях

кислород те са почти симетрични. В този случай, макар минус- и плюс-зарядите да са разпръснати по молекулата, разпределението им е такова, че центровете на минус- и плюс-зарядите съвпадат. Молекулите, центровете на които не съвпадат, се наричат *полярни;* произведението от заряда и разстоянието между центровете се нарича *диполен момент.* В неполярните молекули центровете на зарядите съвпадат. За всички тях се оказва, че макар сумарният общ заряд да е равен на нула, силата на големи разстояния се възприема като привличане и се изменя обратно пропорционално на седмата степен на разстоянието, т. е. $F = k/r^7$, където k е постоянна, зависеща от типа на молекулите. Защо това е така, вие ще узнаете, когато изучите квантовата механика. При диполите силите на привличането са още по-осезаеми. И обратно, ако атомите или молекулите бъдат доближени (на малки разстояния), те много силно се отблъскват; поради тази именно причина ние не падаме на долния етаж!

Тези молекулни сили могат да се видят почти непосредствено и в опита с хлъзгането на чашата по стъклото, и в опита с две акуратно шлифовани и нагласени пластинки. Като примери за такива пластинки могат да служат плочките на Йохансон, които се използуват в машиностроенето като стандарти за точни измервания на дължини. Ако, след като сме притиснали една от плочките към другата, внимателно повдигнем горната плочка, то долната също ще бъде повдигната. Тя ще бъде повдигната от молекулните сили, демонстрирайки прякото привличане между атомите от двете плочки.

И все пак тези молекулни сили на привличане не са фундаментални в този смисъл, в който е фундаментална гравитацията; те възникват в резултат на извънредно сложното взаимодействие на всички електрони и ядра на една молекула с всички електрони и ядра на друга. Никаква проста формула, която би включвала всички тези сложни връзки, не може да бъде получена, тъй като това явление не е фундаментално.

Твърдите тела съществуват благодарение на това, че молекулните сили на голямо разстояние са привлекателни, а на малко — отблъскващи (вж. фиг. 12.2); техните атоми са свързани чрез взаимното привличане, но все пак се държат на известно разстояние един от друг (ако се доближат, веднага се включва отблъскването). На това разстояние d, където кривата на фиг. 12.2 пресича оста r, силата е равна на нула, т. е. настъпва равновесие; именно на такова разстояние се разполагат молекулите една от друга. Ако молекулите се доближат на разстояние, по-малко от d, тогава възниква отблъскване, което е изобразено с частта от кривата над оста r. Но дори за малко сближаване са нужни огромни сили, защото на разстояния, по-малки от d, кривата върви стръмно нагоре. А достатъчно е малко отдалечаване на молекулите и възниква слабо привличане, което расте с отдалечаването. Ако ги дръпнем рязко, те завинаги ще се разделят и връзката ще се разкъса.

Когато молекулите само *слабо* се доближават или *слабо* отдалечават от положението на равновесие d, малката част от кривата около това положение може да се счита за права линия. Поради това често се наблюдава че при малки отмествания *силата е пропорционална на отместването.* Този принцип е известен като *закон на Хук* или закон за еластичността; той гласи, че силите, които след деформацията се стремят да върнат тялото в началното му състояние, са пропорционални на тази деформация. Законът, разбира се, е валиден само тогава, когато деформациите са малки; когато те са големи, тялото или ще се разкъса, или ще се счупи в зависимост от характера на деформациите. Големината на силата, до която законът на Хук е още валиден, зависи от материала; например за тестото или лепилото тя е много малка, а за стоманата — относително голяма. Законът на Хук може лесно да бъде демонстриран с дълга стоманена спирална пружина, окачена вертикално. Окачената на долния край на пружината тежина развива слабо навивките на телта и заедно с това слабо отмества надолу

всяка навивка, като за голям брой навивки води до чувствително отместване. Ако измерим общото удължаване на пружината, например от тежина от 100 g, то ще се окаже, че всеки допълнителни 100 g ще предизвикат приблизително същото удължаване, както и първите 100 g. Това постоянство на отношението на силата към отместването се нарушава, когато пружината е претоварена; тогава законът на Хук престава да бъде валиден.

4. Фундаментални сили. Полета

Сега ще разгледаме останалите фундаментални сили. Наричаме ги фундаментални затова, защото законите за тяхното действие са фундаментално прости. Отначало да разгледаме електрическата сила.

Телата носят в себе си електрични заряди, които са съставени от електрони и протони. Ако две тела са заредени, между тях действува електрическа сила; ако големината на зарядите е равна съответно на q_1 и q_2, силата се изменя обратно пропорционално на квадрата на разстоянието между зарядите

$$F=(const)\frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

За разноименни заряди този закон прилича на закона за гравитацията, но за едноименни силата става отблъскваща и нейният знак (посока) се мени. Самите заряди q_1 и q_2 могат да бъдат и положителни, и отрицателни; практически, използувайки формулата, можем да получим правилния знак за силата, ако поставим при q техните знаци. Силата е насочена по отсечката, съединяваща зарядите. Коефициентът във формулата зависи, разбира се, от избора на единиците за сила, заряд и дължина. Обикновено зарядът се измерва в *кулони*, разстоянието — в метри, а силата — в нютони. За да се получи силата в нютони, константата (по исторически причини я пишат във вида $1/4\pi\varepsilon_0$) трябва да има числена стойност

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=8{,}99\,.\,10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}, \qquad (а)$$

т. е.

$$\varepsilon_0=8{,}854\,.\,10^{-12}\ \mathrm{C^2/Nm^2} \qquad (б)$$

И така, за зяряди в покой законът за силата има вида

$$\mathbf{F}=\frac{q_1 q_2 \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \qquad (12.2)$$

В природата най-важен от всички заряди е зарядът на отделния електрон; той е равен на $1{,}60\,.\,10^{-19}$ кулона. Тези, които работят не с големи заряди, а с електрическите сили между фундаменталните частици, предпочитат да отделят израза $(q_{ел})^2/4\pi\varepsilon_0$, в който $q_{ел}$ се определя като заряд на електрона. Този израз се среща често и за опростяване на изчисленията се означава с e^2; неговата числена стойност в системата SI се оказва равна на $(1{,}52\,.\,10^{-14})^2$. Удобството при използуването на константа в тази форма се заключава в обстоятелството, че силата в *нютони*, действуваща между два електрона, ще се запише просто като e^2/r^2 (r е дадено в *метри*) без всякакви коефициенти. Фактически електрическите сили са много по-сложни, отколкото следва от тази формула, защото формулата се отнася за тела, намиращи се в покой. Сега ще разгледаме по-общ случай.

Анализът на фундаменталните сили (не силите на триенето, а електричните сили и силите на гравитацията) е свързан с интересно и много важно понятие.

Теорията на тези сили е много по-сложна, отколкото това следва от закона за обратните квадрати. Този закон действува само тогава, когато взаимодействуващите тела се намират в

покой. Необходим е по-усъвършенстван метод за работа с извънредно сложните сили, които възникват, когато телата се движат по един сложен начин. Оказало се, че за анализа на силите от този вид е много полезно да се въведе понятието „поле". За да поясним тази мисъл, нека да вземем следния пример с електрическа сила: да предположим, че в точката P се намира заряд q_1, а в точката R — заряд q_2. Силата, която действува между зарядите, е равна на

$$\mathbf{F}=\frac{q_1 q_2 \mathbf{r}}{r^3}. \tag{12.3}$$

За да анализираме тази сила с помощта на понятието поле, ние казваме, че зарядът q_1 в точката P създава в точката R такива „условия", при които зарядът q_2, попадайки в R, изпитва действието на силата. Това е един от възможните пътища за описване на действието на силата. Може би той изглежда странно: ние казваме, че действието на силата $\mathbf{F}$ върху заряда q_2 в точката R може да се раздели на две части — на q_2 и $\mathbf{E}$, като при това величината $\mathbf{E}$ съществува в точката R независимо от това, дали там има заряд или не (при условие че всички други заряди са на своите места). Величината $\mathbf{E}$ е „условието", създадено от заряда q_1, а $\mathbf{F}$ е откликът на заряда q_2 на $\mathbf{E}$. Величината $\mathbf{E}$ се нарича *електрично поле*. $\mathbf{E}$ е вектор. Формулата за електричното поле $\mathbf{E}$, създадено в точката R от заряда q_1, намиращ се в точката P, е такава: зарядът q_1, умножен по постоянната $1/4\pi\varepsilon_0$ и разделен на r^2 (r е разстоянието от P до R); полето действува по посоката на радиус-вектора (векторът на посоката на радиус-вектора е самият радиус-вектор, разделен на своята дължина). По такъв начин изразът за $\mathbf{E}$ е следният:

$$\mathbf{E}=\frac{q_1 \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \tag{12.4}$$

След това ние пишем

$$\mathbf{F}=q_2\mathbf{E}, \tag{12.5}$$

т. е. свързваме силата, полето и заряда. В какво се състои същността на всичко това? Същността е в обстоятелството, че анализът се разделя на две части. Едната част говори, че нещо *създава* поле, а другата — че то *действува* на нещо. Позволявайки ни да разглеждаме двете части независимо, това разделяне в много случаи опростява решаването на трудните задачи. Когато зарядите са много, ние първо пресмятаме сумарното електрично поле, създадено от тези заряди в R, а след това, знаейки големината на заряда в точката R, намираме силата, която му действува.

Същото можем да направим и в случая на гравитация. Сега силата $\mathbf{F}=-Gm_1m_2\mathbf{r}/r^3$. Анализът напълно съвпада: силата на привличането на тялото в гравитационното поле е равна на произведението на масата на тялото и полето $\mathbf{C}$. Силата, която действува на m_2, е равна на масата m_2, умножена по полето $\mathbf{C}$, създадено от масата m_1; т. е. $\mathbf{F}=m_2\,\mathbf{C}$. Значи полето $\mathbf{C}$, създадено от масата m_1, е $\mathbf{C}=-Gm_1\mathrm{v}/r^3$; както и електричното поле то е насочено по радиуса.

Такова разделяне на две части не е толкова тривиално, както би могло да изглежда на пръв поглед. То щеше да бъде тривиално, ако законите за действието на силите бяха съвсем прости, но те са много сложни и се оказва, че полето е дотолкова реално, че почти не зависи от обектите, които го създават. Ако зарядът се приведе в трептение, влиянието на това трептение ще се почувствува на разстояние от заряда. Ако трептенията се прекратят, в полето ще продължават да се чувствуват следите на тези трептения, защото взаимодействието на двете частици не става мигновено. Затова е желателно по някакъв начин да се запомня какво е ставало тук по-рано. Ако силата на действието върху заряда зависи от това, къде другият заряд е бил вчера и

какъв е бил той тогава, то трябва да съществува възможност да се проследи какво е било вчера; в това се състои същността на полето. Колкото са по-сложни силите, толкова е по-реално полето и нашата техника на разделянето става все по-малко и по-малко изкуствена.

За да анализираме силите при помощта на полета, ние имаме нужда от два вида закони. Първите съдържат отклик на зарядите на действието на полето. Те ни дават уравненията на движението. Например законът за отклика на масата на действието на гравитационното поле се състои в това, че силата е равна на масата, умножена по полето на гравитацията, или ако тялото е още и заредено, то откликът на заряда на действието на електричното поле е равно на заряда, умножен по електричното поле. Втората част на анализа се състои във формулирането на законите, които определят интензитета на полето и начина на неговото възникване. Тези закони понякога се наричат *уравнения на полето*. По-нататък ние ще се запознаем с тях по-подробно, а сега ще им посветим само няколко думи.

Да започнем с най-забележителното свойство на полето, което е абсолютно точно и лесно се усвоява. Общото електрично поле, създадено от група източници, е векторната сума на полетата, създадени поотделно от първия, втория и т. н. източници. С други думи, когато полето е създадено от много заряди и ако отделното поле на първия заряд е $\mathbf{E}_1$, на втория — $\mathbf{E}_2$ и т. н., ние трябва просто да съберем тези вектори, за да получим общото поле. Този принцип се записва във вида

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_3+\cdots \tag{12.6}$$

или съгласно с определението на полето

$$\mathbf{E}=\sum_i \frac{q_i \mathbf{r}_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3} \tag{12.7}$$

Могат ли тези методи да бъдат приложени към гравитацията? Нютон е изразил силата на привличането на две маси m_1 и m_2 във вида $\mathbf{F}=-Gm_1m_2\mathbf{r}/r^3$. Но излизайки от понятието поле, можем да кажем, че m_1 създава поле C в цялото околно пространство и силата, която привлича m_2, е равна на

$$\mathbf{F}=m_2\mathbf{C}. \tag{12.8}$$

По аналогия с електричеството

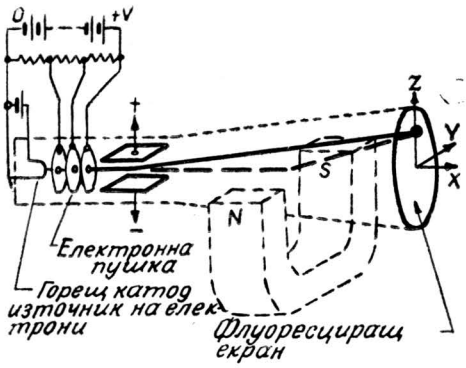
$$\mathbf{C}_i=-\frac{Gm_i\mathbf{r}_i}{r_i^3} \tag{12.9}$$

и тогава полето на тежестта на няколко маси е равно на

$$\mathbf{C}=\mathbf{C}_1+\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_3+\cdots \tag{12.10}$$

В гл. 7, където разглеждахме движението на планетите, ние по същество използувахме именно този принцип. Ние събирахме всички вектори на силите, за да намерим действуващата на планетата обща сила. Като разделим на нейната маса, ще получим (12.10).

Уравненията (12.6) и (12.10) изразяват така наречения *принцип на суперпозицията* на полетата. Този принцип гласи, че общото поле на няколко източници е сума на полетата, създадени от всеки един от тях. Доколкото сега ни е известно, в областта на електричеството този закон е със сигурност в сила даже тогава, когато зарядите се движат и законът за силите се усложнява. Понякога стават привидни нарушения, но внимателният анализ винаги доказва, че в тези случаи просто е забравен някой от движещите се заряди. За разлика от електричните заряди за силните гравитационни полета той не е съвсем точен. В гравитационната теория на Айнщайн се доказва, че уравнението на Нютон (12.10) е в сила само приблизително.



Фиг. 12.3. Електронна тръба

С електричеството е тясно свързана сила от друг род, наречена магнитна; тя също може да се анализира чрез понятието поле. Някои от качествените връзки между тези сили могат да се наблюдават в опита с електронната тръба (фиг. 12.3). На единия край на тръбата е разположен източник, изпущащ поток от електрони, а вътре се намира устройство, което ускорява електроните до голяма скорост и изпраща част от тях върху светещия екран на другия край на тръбата. Светлото петно в центъра на екрана, в мястото, където се удрят електроните, позволява да се проследи техният път. Движейки се към екрана, снопът от електрони преминава през тясното пространство между успоредните металически пластинки. На пластинките е подадено напрежение, което позволява всяка една от тях да се зарежда отрицателно. Напрежението създава между пластинките електрично поле.

В първата част на опита отрицателното напрежение се подава на долната пластинка, т. е. върху нея се създава излишък от електрони. Едноименните заряди се отблъскват и поради това светлото петно на екрана излита внезапно нагоре. (Може да се каже и другояче: електроните „усещат“ полето и отговарят с отклонение нагоре.) След това да превключим напрежението и заредим отрицателно горната пластинка. Светлото петно на екрана ще се спусне надолу. Това показва, че електроните от снопа се отблъскват от електроните от горната пластинка. (Другояче казано, електроните „отговориха“ на изменението на посоката на полето.)

Във втората част на опита напрежение на пластинките вече не се подава, а вместо това се проверява влиянието на магнитното поле върху електронния сноп. За тази цел е необходим подковообразен магнит, достатъчно широк, за да „оседлае“ практически цялата тръба. Да предположим, че поставяме магнита от долната страна на тръбата, обхващаме я с него и насочваме полюсите нагоре (във вид на буквата U). Ние забелязваме, че петното на екрана се премества например нагоре, когато магнитът се приближава отдолу. Излиза, че магнитът отблъсква снопа. Но работата не е толкова проста: ако обърнем магнита, без да разместваме неговите страни и го приближим към тръбата отгоре, петното отново ще се премести *нагоре,* т. е. вместо отблъскване е настъпило привличане. Сега да върнем магнита в първоначалното положение, когато той обхващаше тръбата надолу. Да, петното, както и по-рано, се отклонява нагоре; но да завъртим магнита на 180° около вертикалната му ос, за да има той вида на буквата U, но вече с разменени полюси. Гледайте, петното скача надолу и остава там, даже ако ние обърнем сега U нагоре с краката.

За да си обясним това своеобразно поведение, трябва да измислим някаква друга комбинация на силите. Всичко това се обяснява по следния начин. Между полюсите на магнита се простира *магнитно поле.* То е насочено винаги от единия полюс (който може да се снабди с някакъв отличителен знак) към другия. Завъртването на магнита около оста, минаваща през полюсите, не изменя посоката на полето, но разменя на местата на полюсите я изменя. Например, ако електроните летят хоризонтално по оста x и магнитното поле е също хоризонтално, но насочено по оста y, тогава магнитната сила, действуваща на *движещия се електрон,* е насочена по оста z (нагоре или надолу, това вече зависи от посоката на полето — по оста y или обратно на нея).

Засега ние няма да дадем пълния закон за силите на взаимодействието на зарядите, движещи се един спрямо друг в произволни посоки, защото той е извънредно сложен, но затова пък ще приведем формули за случая, *когато полетата са известни.* Действието на силата върху зареден предмет зависи от неговото движение; когато предметът е неподвижен, силата, която му действува, се счита пропорционална на заряда с коефициент, който се нарича *електрично поле.* Когато тялото се движи, силата се изменя и поправката, новото „късче“ сила, се оказва линейно *зависеща от скоростта* и е насочена *напречно* на скоростта $\mathbf{v}$ и напречно на друга векторна величина — *магнитната индук-*

ция **B**. Когато компонентите на електричното поле **E** и магнитната индукция **B** са съответно (E_x, E_y, E_z) и (B_x, B_y, B_z), а компонентите на скоростта **v** са (v_x, v_y, v_z), тогава компонентите на резултантните на електрическата и магнитната сили, действуващи на движещия се заряд q, са следните:

$$\begin{aligned} F_x &= q(E_x + v_y B_z - v_z B_y), \\ F_y &= q(E_y + v_z B_x - v_x B_z), \\ F_z &= q(E_z + v_x B_y - v_y B_x). \end{aligned} \tag{12.11}$$

Ако магнитното поле има само компонента B_y, а скоростта — само v_x, магнитната сила ще има компонента само по оста z, напречно на B и y.

5. Псевдосили

Следващият тип сили, които ни предстои да разгледаме, са псевдосилите.

В гл. 11 ние обсъдихме взаимоотношението на Джо и Мик, които имаха различни координатни системи. Нека положението на частицата по измерванията на Мик да е x, а Джо да дава за нея x'; тогава връзката между тях е такава:

$$x = x' + s, \quad y = y', \quad z = z',$$

където s показва на какво разстояние се е преместила системата на Джо по отношение на системата на Мик. Нека в системата на Мик да са в сила законите за движението. Как те изглеждат за Джо? Отначало ние намираме, че

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{ds}{dt}.$$

По-рано считахме s за постоянно и се убедихме, че законите за движението при това не се изменят, тъй като $ds/dt = 0$; в края на краищата в двете системи всички закони на физиката са еднакви. Но нека $s = ut$, където u е постоянна скорост на движението по права линия. Тогава s не е постоянно и ds/dt не е нула, а е равно на u, т. е. константа. Но ускорението d^2x/dt^2 е равно на ускорението dx'^2/dt^2, защото $du/dt = 0$. С това се доказва законът, който бе използуван в гл. 10, а именно: когато се движим по права линия с постоянна скорост, всички закони на физиката изглеждат така, както когато стоим. Това е преобразованието на Галилей. А сега да разгледаме по-интересен случай, когато зависимостта на s от времето е още по-сложна, например $s = at^2/2$. Тогава $ds/dt = at$, а $d^2s/dt^2 = a$, т. е. ускорението е постоянно; може да се разгледа също така случай, когато ускорението само се оказва функция на времето. Това значи, че макар законът за силата от гледна точка на Джо да изглежда като

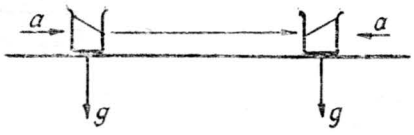
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x,$$

този закон, по мнението на Мик, е друг:

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = F_{x'} - ma.$$

С други думи, тъй като координатната система на Мик се ускорява по отношение на системата на Джо, появява се допълнителен член ma. За да работи със законите на Нютон, Мик е длъжен да коригира силите, да включи в тях този член. С други думи, появява се привидна, мистична, нова сила от неизвестен произход; тя възниква, разбира се, поради това, че координатната система на Мик е неправилна. Това е пример за псевдосила; други примери за псевдосили срещаме, когато координатната система се *върти*.

Като пример за псевдосила може да служи добре известната



Фиг. 12.4. Илюстрация на псевдосилите

„центробежна сила“. Наблюдателят във въртящата се координатна система (във въртящия се сандък) ще открие тайнствени сили, непородени нито от един от известните източници на сили; те отхвърлят предметите към стената на сандъка. Те се обясняват просто с това, че наблюдателят няма Нютонова координатна система — най-проста от всички координатни системи.

Псевдосилите могат да се наблюдават в един любопитен опит, който се състои в това, че ние тласкаме с ускорение кана с вода по масата. Силата на тежестта действува на водата надолу, но поради хоризонталното ускорение има още и псевдосила в хоризонтална посока, в посока, обратна на тази на ускорението. Сумата от силата на тежестта и псевдосилата образува ъгъл с вертикалата, през време на ускорението повърхността на водата е перпендикулярна към тази сума на силата, т. е. тя е наклонена под ъгъл към масата, и водата е приповдигната към задната стена на каната. Когато престанем да тласкаме каната, когато тя се забавя вследствие на триенето, псевдосилата си изменя посоката и водата се качва към предната стена на каната (фиг. 12.4).

Като много важно свойство на псевдосилите следва да се счита това, че те са винаги пропорционални на масите; същото е вярно и за тежестта. Затова съществува възможност, *тежестта да е също псевдосила.* Не се ли предизвиква гравитацията от отсъствието на правилна координатна система? Ние винаги можем да получим сила, пропорционална на масата, достатъчно е само да си представим, че тялото се ускорява. Например човек, поставен в сандък, който стои на земята, намира, че нещо го притиска към пода със сила, пропорционална на неговата маса. Ако земята не съществуваше въобще, а сандъкът все още беше неподвижен, то човекът би плувал в пространството. От друга страна, ако земята пак не съществуваше, а някой *дърпаше* сандъка *нагоре* с ускорение g, човекът в сандъка, анализирайки физиката на това явление, би открил псевдосила, която го притиска към пода също така, както това прави тежестта.

Айнщайн предложил знаменитата хипотеза, че ускорението предизвиква имитация на гравитацията, че силите на ускорението (псевдосилите) *не могат да бъдат различени* от силите на гравитацията; не може да се каже каква част от дадена сила е тежест и каква — псевдосила.

Като че ли нищо не ни пречи да считаме тежестта за псевдосила, да говорим, че ние сме притиснати надолу поради това, че сме ускорени нагоре; но какво ще бъде положението с жителите на Нова Зеландия, от другата страна на Земята — те накъде ще бъдат ускорени? Айнщайн е разбрал, че гравитацията може да се счита за псевдосила едновременно само в една точка; неговите разсъждения доведоха до предположението, че *геометрията на света е по-сложна* от обикновената геометрия на Евклид. Нашето обсъждане на въпроса е чисто качествено и засяга само общата идея.

За да поясним в общи линии как гравитацията може да бъде резултат от действието на псевдосилите, ще приведем чисто геометричен пример, който няма нищо общо с истинското положение на нещата. Да предположим, че ние с вас живеем в двумерен свят и нищо не знаем за третото измерение. Ние бихме считали, че живеем на равнина, но нека да предположим, че живеем на повърхнината на кълбо; нека сега да тласнем някакъв предмет по нашата повърхнина, без по-нататък да му действуваме с никаква сила. Как би се движил той? Би ни се струвало, че той се движи по права линия, но доколкото трето измерение няма и предметът трябва да остава на повърхнината на кълбото, той ще се движи по най-късото разстояние на сферата, т. е. по окръжността на големия кръг. Да хвърлим втори предмет, но в друга посока; той ще се насочи също по дъгата на големия кръг. Ние мислим, че се намираме на равнина и поради това се надяваме, че разстоянието между двата предмета ще расте линейно с времето. Но акуратните наблюдения изведнъж ще открият, че на достатъчно голямо разстояние предметите отново ще започ-

нат да се доближават, като че ли се привличат. Предметите обаче не се привличат един към друг; цялата работа е в геометрията, именно с нея става нещо „чудно“. Макар тази картина и да не се отнася до геометрията на Евклид (не ни показва какво в нея е „чудно“), тя показва, че, чувствително деформирайки геометрията, цялата гравитация може да се припише на псевдосила. В това именно се състои общата идея на гравитационната теория на Айнщайн.

6. Ядрени сили

Ние ще приключим тази глава с кратък обзор на единствените засега известни сили, които се различават от досега изредените — *ядрените сили*. Тези сили действуват в ядрото на атома и макар много да са ги изучавали, още никой нито веднъж не е могъл да пресметне силата, действуваща между две ядра; и фактически законът за ядрените сили сега е неизвестен. Тези сили действуват на извънредно малки разстояния — разстояния от размера на ядрото, т. е. около 10^{-13} cm. Тъй като частиците са толкова малки, а разстоянията така къси, ние не можем да очакваме нищо от законите на Нютон — тук действуват само законите на квантовата механика. При анализиране на ядрата ние повече не говорим за сили; ние заменяме понятието сила с понятието енергия на взаимодействието на две частици (по-късно ще говорим за това по-подробно). Всички формули, които могат да бъдат написани за ядрените сили, представляват доста груби приближения, в които не са включени много подробности на взаимодействието. Те изглеждат приблизително така: вътре в ядрото силите намаляват не обратно пропорционално на квадрата на разстоянието, а след някакво разстояние r_0 (около 10^{-13} cm) замират експоненциално като $F=(1/r^2)\exp(-r\,r_0)$. С други думи, веднага щом частиците се отдалечат, силите изчезват, макар че на разстояние 10^{-13} cm те са много големи. Очевидно законите за ядрените сили са извънредно сложни; те не са ни ясни и цялата задача за анализа на фундаменталния механизъм, който ги поражда, не е решена. Опитите да се реши тази задача доведоха до откриването на много необикновени частици, например π-мезоните, но произходът на силите все пак остава тъмен.

13

Работа и потенциална енергия (I)

1. Работа на падащо тяло
2. Работа, извършвана от силата на тежестта
3. Събиране на енергиите
4. Гравитационно поле на големите тела

1. Работа на падащо тяло

В гл. 4 разгледахме въпроса за запазването на енергията. При това ние не използувахме законите на Нютон. Сега е интересно да видим как възниква запазването на енергията като следствие на действието на тези закони. За по-голяма яснота ние ще започнем с най-простите примери и постепенно ще ги усложняваме.

Най-простият пример за запазване на енергията е падащото надолу тяло, т. е. тяло, което се движи само във вертикално направление. Ако тялото изменя своята височина само под влияние на силата на тежестта, поради движението то има кинетична енергия T (или к. е.). Освен това има потенциална енергия mgh (съкратено U, или п. е.). Тяхната сума е постоянна:

$$\underset{\text{к. е.}}{\frac{1}{2}mv^2} + \underset{\text{п. е.}}{mgh} = const,$$

или

$$T+U=const. \tag{13.1}$$

Ние искаме да покажем, че това твърдение е правилно. Какво значи да се докаже неговата правилност? Вторият закон на Нютон говори как се движи тялото, как се изменя неговата скорост с времето (а именно, че при падането тя расте пропорционално на времето, а височината на падането се изменя като квадрата на времето). Затова ако височината се измерва от нулевата точка (където тялото е било неподвижно), то няма да има нищо странно в това, че тя ще се окаже равна на квадрата на скоростта, умножен по някакви постоянни. Но все пак нека да разгледаме този въпрос по-внимателно.

Да се опитаме да пресметнем *направо* от Втория закон на Нютон как трябва да се изменя кинетичната енергия; ние ще диференцираме кинетичната енергия по времето и след това ще приложим закона на Нютон. Диференцирайки $^1/_2mv^2$ по времето, получаваме

$$\frac{dT}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{1}{2}\,m2v\frac{dv}{dt}=mv\,\frac{dv}{dt}, \tag{13.2}$$

защото m се счита за постоянна. Но по Втория закон на Нютон $m(dv/dt)=F$, така че

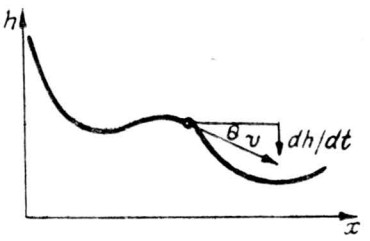
$$\frac{dT}{dt}=Fv. \tag{13.3}$$

В общия случай се получава **F. v**, но за нашия едномерен случай е по-добре да се остави просто произведението на силата и скоростта.

Силата в нашия прост пример е постоянна, равна на $-mg$ и насочена надолу (знакът минус показва именно това), а скоростта е степента на изменението на положението по вертикалата (височината h) с времето. Затова степента на изменението на кинетичната енергия е равна на $-mg\,(dh/dt)$. Погледнете: какво е това чудо! Пред нас отново е някаква скорост на изменение — скоростта на изменението на величината mgh с времето! Излиза, че с течение на времето измененията на кинетичната енергия и на величината mgh остават равни и противоположни, така че тяхната сума остава неизменна. Ние искаме да докажем именно това.

Току-що показахме, използувайки Втория закон на Нютон, че

за постоянните сили енергията се запазва само ако се добави потенциалната енергия mgh към кинетичната $^1/_2 mv^2$. Да продължим изследването на този въпрос; да видим дали можем да го обобщим, дали можем да го разберем по-добре. Действува ли този закон само за свободно падащи тела, или е по-общ? От това, което ние знаем за запазването на енергията, може да се очаква, че той ще бъде верен за тялото, което се движи от една точка до друга по крива линия без триене и само под действието на силата на тежестта (фиг. 13.1). Когато тялото, което започва да се движи от височина H, достигне височината h, тогава пак трябва да бъде вярна същата формула, макар че скоростта вече не е насочена по вертикалата. Ние трябва да разберем *защо* тя все още е правилна. Да извършим същия анализ; да намерим скоростта на изменението на кинетичната енергия с времето. Пак ще се получи $mv(dv/dt)$ — скоростта на изменението на големината на импулса, т. е. *силата по посока на движението* — допирателната сила F_t. И така



Фиг. 13.1. Тяло, което се движи под действие на силата на тежестта по крива линия без триене

$$\frac{dT}{dt}=mv\,\frac{dv}{dt}=F_t v.$$

Скоростта представлява изменението на разстоянието по кривата линия, ds/dt, а допирателната сила F_t сега се оказва по-малка от mg в отношение, равно на отношението на разстоянието ds по пътя към вертикалното разстояние dh. С други думи,

$$F_t = -mg\sin\theta = -mg\frac{dh}{ds},$$

така че

$$F_t\frac{ds}{dt}=-mg\frac{dh}{ds}\frac{ds}{dt}=-mg\frac{dh}{dt}$$

(ds се съкращава). И отново, както и по-рано, ние получихме величината—$mg(dh/dt)$, която представлява скоростта на изменението на mgh.

За да си изясним точно как въобще се спазва запазването на енергията в механиката, нека да разгледаме някои полезни понятия.

Първо, нека да разгледаме скоростта на изменението на кинетичната енергия в общия тримерен случай. Кинетичната енергия, когато движението има три измерения, е равна на

$$T=\frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right).$$

Диференцирайки я по времето, получаваме три, внушаващи страх члена:

$$\frac{dT}{dt}=m\left(v_x\frac{dv_x}{dt}+v_y\frac{dv_y}{dt}+v_z\frac{dv_z}{dt}\right). \qquad (13.4)$$

Но нали $m(dv_x/dt)$ е силата F_x, действуваща на тялото по посоката на x. Значи в дясната част на формулата (13.4) стои $F_xv_x+F_yv_y+F_zv_z$. Обръщайки се за помощ към векторния анализ, ние си спомняме, че това е $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$. И така,

$$\frac{dT}{dt}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}. \qquad (13.5)$$

Това може да се получи и по-бързо: ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са два вектора, зависещи от времето, то производната на $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ е равна на

$$\frac{d(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{dt}=\mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{dt}+\frac{d\mathbf{a}}{dt}\cdot\mathbf{b}. \qquad (13.6)$$

Да положим $\mathbf{a}=\mathbf{b}=\mathbf{v}$:

$$\frac{d(^1/_2 mv^2)}{dt}=\frac{d(^1/_2 m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})}{dt}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt}. \qquad (13.7)$$

Тъй като понятието кинетична енергия и въобще енергия е много важно, то на различните величини в тези уравнения са дадени различни имена: $^1/_2 mv^2$ се нарича, както е известно, *кинетична енергия*; **F**. **v** се нарича *мощност*: силата, действуваща на тялото, умножена („скаларно“) по скоростта на тялото, — това е мощността, която силата предава на тялото. Получава се великолепна теорема: *скоростта на изменението на кинетичната енергия на тялото е равна на мощността, която се изразходва от действуващите на тялото сили.*

Но за изучаването на запазването на енергията анализът трябва да бъде продължен. Нека да намерим изменението на кинетичната енергия за малкия интервал от време dt. Умножавайки двете части на уравнението (13.7) по dt, ще намерим, че изменението на кинетичната енергия е равно на силата, скаларно умножена по диференциала на изминатото разстояние

$$dT = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \tag{13.8}$$

А интегрирайки, ще получим

$$\triangle T = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \tag{13.9}$$

Какво значи това? Това значи, че както и да се движи тялото и по каквато и да е крива линия под действието на силата, изменението на кинетичната енергия при преминаването от една точка на кривата в друга винаги ще е равно на интеграла от компонентата на силата по посока на кривата, умножена на диференциала на преместването $d\mathbf{s}$ (интегрирането е от първата точка до втората). И този интеграл има име: наричат го *работа, извършена от силата над тялото.* Веднага виждаме, че *мощността е работата, извършена за една секунда.* Забелязваме още, че работа извършва само компонентата на силата по *посоката на движението.* В нашия пръв прост пример участвуваха само вертикални сили с една единствена компонента F_z, равна на $-mg$. При тези обстоятелства е съвсем без значение как се движи тялото, направо надолу или по парабола, все едно от $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ (което може да се запише като $F_x d_x + F_y d_y + F_z d_z$) остава само $F_z d_z = -mgdz$, защото останалите компоненти на силата са нули. Значи в този случай

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{z_1}^{z_2} -mgdz = -mg\,(z_2 - z_1), \tag{13.10}$$

така че в потенциалната енергия влиза само *височината*, от която тялото пада.

Няколко думи за единиците. Тъй като силата се измерва в нютони, а за получаване на работа тя се умножава по разстояние, работата се измерва в единици *нютон, метър.* Обаче повечето от хората не обичат този термин и употребяват термина джаул (J). Това е само друга дума, а единицата е същата. И така, работата се измерва в джаули. Мощността пък — в джаули за секунда; тази единица наричат ват (W). Ако умножим ват по време, ще получим извършената работа. Работата, която местната енергосистема извършва в нашите квартири (в технически смисъл), се измерва във ватове, умножени по време. Например, киловат-час — това е 1000 W x 3600 s, т. е. $3{,}6 \cdot 10^6$ J.

Ще приведем още няколко примера за работа и запазване на енергията. Да разгледаме тяло, което в началото има кинетична енергия и се движи бързо, хлъзгайки се по пода с триене. То се спира. В началото кинетичната енергия *не е равна* на нула, а на края тя е *равна на нула*; съществува работа, извършена от силите, защото щом като има триене, съществува и компонента на силата в посока, противоположна на посоката на движението, и енергията постепенно се губи. Сега да разгледаме масата на края на махалото, което се люлее във вертикална рав-

нина в полето на силата на тежестта без триене. Тук се наблюдава нещо друго, защото, когато масата се движи надолу, силата е насочена също надолу, а когато масата се издига нагоре, силата е насочена в обратна посока, така че $\mathbf{F}.d\mathbf{s}$ има различни знаци при спускането и издигането. В съответните точки на спускането и издигането стойностите на $\mathbf{F}.d\mathbf{s}$ са равни по големина, но противоположни по знак, така че резултантният интеграл е чиста нула. Затова кинетичната енергия в края на спускането е точно такава, каквато тя е била в началото на издигането; именно това е принципът за запазването на енергията. (Обърнете внимание, че при наличието на сили на триене на пръв поглед като че ли нямаме запазване на енергията. Значи трябва да се търси друга *форма* на енергията. И наистина, оказва се, че когато две тела се трият, възниква топлина; ние сега си даваме вид, че не знаем за това.)

2. Работата, извършвана от силата на тежестта

Сега ще се заемем с по-трудна задача, когато силите вече не са постоянни и не са насочени надолу както по-рано. Ще разгледаме например движението на планета около Слънцето или на спътник около Земята.

Отначало ще разгледаме движението на тяло, което пада от точката *1 направо* върху Слънцето или върху Земята (фиг. 13.2). Ще се запазва ли при тези обстоятелства енергията? Единствената разлика между този пример и това, което беше по-рано, е, че сега силата не е постоянна, тя се *мени* в процеса на падането. Ние знаем, че силата е равна на произведението GM/r^2 и масата m на падащото тяло. Разбира се, кинетичната енергия при падането расте и сега, както растеше и тогава, когато нас не ни вълнуваше изменението на силата с височината. Въпросът се заключава само в това, дали може да се намери друга формула за потенциалната енергия, различаваща се от mgh, дали може да се намери друга функция на разстоянието от Земята, за която запазването на енергията да не се нарушава.



Фиг. 13.2. Падането на малката маса m върху голямата маса M под действието на силата на тежестта

Разглеждането на този едномерен случай не е трудно, защото ние знаем, че изменението на кинетичната енергия е равно на интеграла от началото до края на движението от силата $-GMm/r^2$ по преместването dr

$$T_2 - T_1 = -\int_1^2 GMm\frac{dr}{r^2}. \qquad (13.11)$$

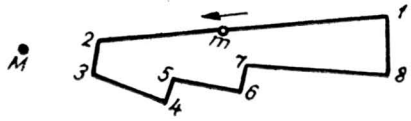
Във формулата няма никакъв косинус, защото силата и преместването са насочени еднакво. Да се интегрира dr/r^2 е лесно; получава се $(-1/r)$, така че

$$T_2 - T_1 = +GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). \qquad (13.12)$$

Пред нас е друга формула за потенциалната енергия. Уравнението (13.12) ни говори, че величината $^1/_2\, mv^2 - GMm/r$, пресметната в точката *1*, в точката *2* или в произволна друга точка, остава постоянна.

Ние сега имаме формула за потенциалната енергия в полето на гравитацията за вертикално движение. Тук изниква интересен въпрос: може ли да се осъществи *вечно движение* в гравитационното поле? Полето се мени, в различни места то има различен интензитет и различна посока. Не може ли да се вземе безкрайна лента без триене и да се приведе в действие например така: нека отначало тя да повдигне тялото от една точка в друга, след това да го придвижи по дъга на окръжност в трета точка, да го спусне на някакво ниво, да го премести по наклон

и да го изведе на нов път и т. н., така че след връщането в началната точка да се окаже, че гравитационното поле е извършило някаква работа и кинетичната енергия на тялото се е увеличила? Не може ли да се начертае тази траектория така, че, минавайки по нея, тялото да получи по-голяма скорост, отколкото то е имало в началото? Така ще се получи вечно движение. Но тъй като то е невъзможно, ние трябва да докажем, че такава траектория е немислима. Ние трябва да докажем следното: тъй като няма триене, тялото трябва да се върне нито с по-малка, нито с по-голяма скорост, а с такава, която му позволява да продължава своето движение по този затворен път. Или с други думи, цялата работа, *извършена при движението по затворен път, трябва да бъде нула* за силите на тежестта, защото ако тя не е нула, би могло да се получи енергия за сметка на такова движение на тялото. (Ако работата се окаже по-малка от нула, така че скоростта в края на обиколката би се намалила, то за да се получи енергия, достатъчно би било движението да се извърши в обратна посока; нали силите зависят не от посоката на движението, а само от положението. Ако в една посока работата се получи с плюс, в обратна посока тя ще бъде с минус; всяка ненулева работа означава създаване на вечен двигател.)



Фиг. 13.3. Затворен път на обиколката на полето на гравитацията

Наистина ли работата е равна на нула? Ще се опитаме да покажем, че това е така. Отначало ние ще поясним в общи линии защо това е така, а след това ще преминем към математическия език. Да предположим, че сме взели траекторията, показана на фиг. 13.3; масата пада от *1* към *2*, завива към *3*, издига се обратно към 4, след това през *5, 6, 7, 8* се движи обратно към *1*. Всички линии вървят или по радиуса, или по окръжността с център *M*. Каква работа се извършва при движение по този път? Между *1* и *2* тя е равна на произведението от GMm и разликата на $1/r$ в тези точки:

$$W_{12}=\int_1^2 \mathbf{F}\,.\,d\mathbf{s}=\int_1^2(-GMm)\frac{dr}{r^2}=-GMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right).$$

От 2 до 3 силата е насочена точно перпендикулярно на движението и $W_{23}=0$. От 3 до 4

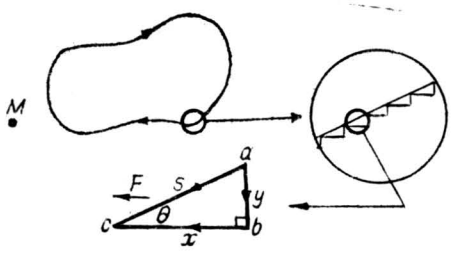
$$W_{34}=\int_3^4 \mathbf{F}\,.\,d\mathbf{s}=-GMm\left(\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_3}\right).$$

По същия начин се получават $W_{45}=0$, $W_{56}=-GMm(1/r_6-1/r_5)$, $W_{67}=0$, $W_{78}=-GMm(1/r_8-1/r_7)$ и $W_{81}=0$.
Цялата работа

$$W=GMm\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_5}-\frac{1}{r_6}+\frac{1}{r_7}-\frac{1}{r_8}\right).$$

Но тъй като $r_2=r_3$, $r_4=r_5$, $r_6=r_7$, $r_8=r_1$, то $W=0$.

Обаче извънредно голямата простота на тази крива поражда подозрение. А какво ще даде истинската траектория? Нека да опитаме истинската. Очевидно тя може да бъде достатъчно добре представена във вид на редица от зъбци (фиг. 13.4) и затова ... и т. н., което и трябваше да се докаже. Но необходимо е да се провери дали наистина работата при обиколката на малкия триъгълник е също равна на нула. Нека да увеличим един от триъгълниците (виж. фиг. 13.4). Равни ли са работите по пътя от *a* до *b* и от *b* до *c* на работата, извършена, когато се върви направо от *a* до *c*? Нека силата да действува в някаква посока. Разполагаме триъгълника така, че неговият катет *bc* да има същата посока. Предполагаме също, че самият триъгълник е толкова малък, че навсякъде по него силата е постоянна. Каква е работата по отсечката *ac*? Тя е равна на



Фиг. 13.4. „Плавният" път на обиколката.

Показана е увеличена част от този път и близката до него траектория, която се състои от радиални и кръгови части, а също така един от зъбците на тази траектория

$$W_{ac}=\int_a^c \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds}=Fs\cos\theta$$

(тъй като силата е постоянна). Сега да определим работата по двата катета. По вертикалния катет ab силата е перпендикулярна на ds, така че работата е равна на нула. По хоризонталния катет bc

$$W_{bc}=\int_b^c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=Fx.$$

Ние се убеждаваме, че работата по двата катета на малкия триъгълник е равна на тази по хипотенузата, защото $s\cos\theta$ е равно на x. По-рано ние показахме, че работата при движението по зъбците (както на фиг. 13 3) е равна на нула, а сега виждаме, че извършената работа е еднаква независимо от това, дали се движим по зъбците, или нашият път ги отсича (само ако зъбците са малки; но нищо не ни пречи да ги направим такива); ето защо *работата при обиколката по произволен затворен път в гравитационното поле е равна на нула.*

Това е твърде забележителен резултат. Благодарение на него ни стават известни такива подробности за движението на планетите, за които ние по-рано не се досещахме. Намира се, че когато планетата се върти около Слънцето сама, без спътници и при отсъствието на каквито и да са други сили, квадратът на нейната скорост минус някаква константа, разделена на разстоянието до Слънцето, не се мени при движението по орбитата. Например, колкото е по-близо планетата до Слънцето, толкова по-бързо тя се движи. Но колко по-бързо? Ето колко: ако вместо движението около Слънцето вие я тласнете към Слънцето със същата скорост и почакате, докато тя падне на нужното разстояние, то получената скорост ще бъде точно такава, каквато планетата има на тази орбита, защото се получава просто друг пример на сложен път на обикаляне. Ако планетата се върне по същия път обратно, нейната кинетична енергия ще се окаже същата. Затова независимо от това, дали тя се движи по истинска не пертурбирана орбита, или по сложен път (но без триене), кинетичната енергия в момента на връщането на планетата на орбитата се оказва точно такава, каквато трябва да бъде.

Значи, когато правим числен анализ на движението на планетата по орбитата (както правехме по-рано), ние можем да проверим на всяка крачка дали не сме допуснали значителни грешки при пресмятането на тази постоянна величина — енергията; тя не трябва да се мени. За орбитата, приведена в табл. 9.2 (стр. 170), енергията се изменя* приблизително с 1,5 % от началото на движението до края. Защо? Или поради това, че в числения метод ние използувахме крайни нараствания, или поради дребни аритметични грешки.

Нека да разгледаме енергията в друга задача: задачата за окачената на пружина маса. Когато масата се отклонява от положението на равновесие, силата, която възстановява нейното положение, е пропорционална на преместването. Може ли при тези условия да се изведе законът за запазването на енергията? Да; защото работата, която се извършва от тази сила, е равна на

$$W=\int_0^x \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x}=\int^x(-kx)\,dx=-\frac{1}{2}kx^2. \qquad (13.13)$$

Значи за окачената на пружина маса сумата от кинетичната енергия на нейните трептения и $1/2\ kx^2$ е постоянна. Нека да видим как става това. Дръпваме масата надолу; тя е неподвижна и нейната скорост е равна на нула, но x не е равно на нула, не-

* Енергията в единиците на табл. 9.2 е $1/2(v_x^2+v_y^2)-1/r$.

говата големина сега е максимална, така че налице е някакъв запас от енергия (потенциална). Сега пущаме масата: ще започне някакъв процес (от подробностите ние не се интересуваме), но във всеки момент сумата на кинетичната енергия и потенциалната енергия ще бъде постоянна. Например когато масата преминава през точката на първоначалното равновесие, x е равно на нула, но тогава стойността на v^2 е най-голяма и колкото по-голяма е величината x^2, толкова по-малка е v^2 и т. н. Значи през време на трептенията се съблюдава равновесие между величините x^2 и v^2. Ние получихме ново правило: потенциалната енергия на пружината е равна на $1/2\ kx^2$, ако силата е равна на $-kx$.

3. Събиране на енергиите

Сега нека да преминем към по-общ случай и да разгледаме какво ще стане, ако телата са много. Да предположим, че имаме няколко тела; нека да ги номерираме: $i=1, 2, 3, \ldots$ и нека всички те да се привличат едно към друго. Какво ще стане тогава? Може да се докаже, че ако се съберат кинетичните енергии на всички тела и се добави сумата (по всички двойки частици) на техните взаимни потенциални енергии на привличането $-GMm/r_{ij}$, цялата сума ще бъде постоянна:

$$\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{\text{двойки } ij} \left(-\frac{G m_i m_j}{r_{ij}}\right) = const. \tag{13.14}$$

Как да се докаже това? Ние ще диференцираме двете страни по времето и ще докажем, че ще се получи нула. При диференцирането на $^1/_2\ m_i v^2$ ние ще получим производните на скоростта — сили [както в (13.5)], а след това ще заменим тези сили с техните изрази, които са ни известни от закона за гравитацията, и в края на краищата ще се убедим, че ще остане точно производната по времето от

$$\sum_{\text{двойки } ij} \left(-\frac{G m_i m_j}{r_{ij}}\right).$$

Започваме доказателството. Производната от кинетичната енергия по времето е

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}\right)$$

$$= \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i \left(\sum_j -\frac{G m_i m_j \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\right) \cdot \mathbf{v}_i \,. \tag{13.15}$$

Производната по времето от потенциалната енергия е

$$\frac{d}{dt} \sum_{\text{двойки } ij} \left(-\frac{G m_i m_j}{r_{ij}}\right) = \sum_{\text{двойки } ij} \left(+\frac{G m_i m_j}{r_{ij}^2}\right)\left(\frac{dr_{ij}}{dt}\right),$$

но $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$,

така че

$$\frac{dr_{ij}}{dt} = \frac{1}{2 r_{ij}} \left[2(x_i - x_j)\left(\frac{dx_i}{dt} - \frac{dx_j}{dt}\right) + 2(y_i - y_j)\left(\frac{dy_i}{dt} - \frac{dy_j}{dt}\right) + \right.$$

$$\left. + 2(z_i - z_j)\left(\frac{dz_i}{dt} - \frac{dz_j}{dt}\right)\right] = \mathbf{r}_{ij} \cdot \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j}{r_{ij}} =$$

$$= \mathbf{r}_{ij} \cdot \frac{\mathbf{v}_i}{r_{ij}} + \mathbf{r}_{ji} \cdot \frac{\mathbf{v}_i}{r_{ji}},$$

защото $\mathbf{r}_{ij} = -\mathbf{r}_{ji}$, макар $r_{ij} = r_{ji}$. И така

$$\frac{d}{dt}\sum_{\text{двойки } ij}\left(-\frac{Gm_im_j}{r_{ij}}\right)=\sum_{\text{двойки } ij}\left[\frac{Gm_i m_j \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\cdot \mathbf{v}_i + \frac{Gm_i m_j \mathbf{r}_{ji}}{r_{ji}^3}\cdot \mathbf{v}_j\right]. \quad (13.16)$$

Сега да видим какво представляват $\sum_i\{\sum_j\}$ и $\sum_{\text{двойки } ij}$. В (13·15) $\sum_i\{\sum_j\}$ означава, че i приема поред всички стойности $i=1, 2, 3\ldots$ и за всяко i индексът j приема всички стойности освен i. Ако например $i=3$, то j приема стойностите 1, 2, 4, ...

От друга страна, в (13.16) $\sum_{\text{двойки } ij}$ означава, че всяка двойна i и j се среща само веднъж. Например частиците 1 и 3 дават само един член в сумата. За да отбележим това, можем да се договорим, че i приема стойности 1, 2, 3, ..., а j за всяко i — само стойности *по-големи* от i. Ако например $i=3$, то j е равно на 4, 5, 6, ... Но нека да си спомним, че всяка двойка i и j дава два члена в сумата, единият с $\mathbf{v}_i$, а другият с $\mathbf{v}_j$, и че тези два члена изглеждат така, както членът в уравнението (13.14) [само че в последното в сумата влизат *всички* стойности на i и j (освен $i=j$)]. В уравненията (13.16) и (13.15) съответните членове ще съвпаднат по големина. Обаче знаците им ще бъдат противоположни и следователно производната по времето от сумата на потенциалната и кинетичната енергии действително ще бъде равна на нула И така ние виждаме, че и в системата от много тела *кинетичната енергия се състои от сумата на енергиите на отделните тела* и че потенциалната енергия също се състои от взаимните потенциални енергии на двойките частици. Защо тя е съставена от енергиите на двойките частици? Това можем да си изясним по следния начин: да предположим, че искаме да намерим цялата работа, която трябва да се извърши, за да се отдалечат телата на определено разстояние едно от друго. Това може да се направи не едновременно, а постепенно, доставяйки ги едно след друго от безкрайност, където не им действуват никакви сили. Отначало ние ще доставим тялото 1, за което няма да бъде нужна никаква работа, защото, докато няма други тела няма никакви сили. Доставянето на тялото 2 ще изисква работа $W_{12}=-Gm_1m_2/r_{12}$. Сега е най-същественият момент: ние пренасяме тялото 3 в точката *3*. Във всеки момент силата, действуваща на 3, се състои от две части: от силата, действуваща от страна на 1 и силата от страна на *2*. Следователно и *цялата извършена работа е равна на сумата от работите на всяка сила*, защото ако $\mathbf{F}_3$ се разлага на сума от сили

$$\mathbf{F}_3=\mathbf{F}_{13}+\mathbf{F}_{23},$$

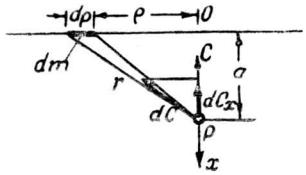
то работата е равна на

$$\int \mathbf{F}_3\,.\,d\mathbf{s}=\int \mathbf{F}_{13}\,.\,d\mathbf{s}+\int \mathbf{F}_{23}\,.\,d\mathbf{s}=W_{13}+W_{23}.$$

И така цялата работа е равна на сумата от работите, извършени при преодоляването на силите 1 и 2, както ако те бяха действували независимо. Продължавайки тези разсъждения, ние ще видим, че пълната работа, която трябва да се извърши, за да се събере дадената конфигурация от тела, е точно равна на стойността (13.14) за потенциалната енергия. Именно поради това, че силата на тежестта се подчинява на принципа на суперпозицията на силите, потенциалната енергия може да бъде представена във вид на сума по всички двойки частици.

4. Гравитационно поле на големи тела

Сега да пресметнем полетата, които се срещат в много физически задачи, когато става дума за *разпределение на масите*. Досега ние не разглеждахме разпределение на масите, а се занимавахме само с отделни частици. Но интересно е да се пресмет-



Фиг. 13.5. Силата на привличането на материалната точка от материална равнина

нат и полета, образувани от повече от една частица. Нека отначало да намерим силата на привличането от страна на плосък пласт вещество с безкрайни размери. Силата на привличането на единична маса в дадена точка P (фиг. 13.5) е, разбира се, насочена към равнината. Разстоянието от точката до равнината е a, а масата на единица площ от тази равнина е μ. Нека μ да бъде постоянно: слоят е хомогенен. Какво поле $d\mathbf{C}$ се създава от масата dm, която е отдалечена от O на не по-малко от ρ и не по-далеч от $\rho+d\rho$ (O е точка на равнината, която е най-близка до P)? *Отговор:* $d\mathbf{C}=G(dm\,\mathbf{r}/r^3)$. Но това поле е насочено по r, а ние разбираме, че от трите компоненти на $\mathbf{C}$ след събирането на всички $d\mathbf{C}$ трябва да остане само x-компонентата. Тя е равна на

$$dC_x=G\frac{dm\,r_x}{r^3}=G\frac{dm\,a}{r^3}.$$

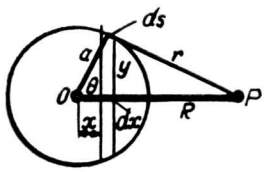
Всички маси dm, които се намират на едно и също разстояние r от P, ще дадат една и съща стойност dC_x, така че за dm може веднага да се приеме масата на целия пръстен между ρ и $\rho+d\rho$, т. е. $dm=\mu\,2\pi\rho\,d\rho$ ($2\pi\rho\,d\rho$ е повърхнината на пръстена с радиус ρ и ширина $d\rho$ при $d\rho\ll\rho$). И така

$$dC_x=G\mu\,2\pi\rho\frac{d\rho\,a}{r^3}.$$

Но $\rho\,d\rho=r\,dr$ поради това, че $r^2=\rho^2+a^2$. Затова

$$C=2\pi G\mu\,a\int_a^\infty\frac{dr}{r^2}=2\pi G\mu\,a\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\infty}\right)=2\pi G\mu. \qquad (13.17$$

Излиза, че силата не зависи от разстоянието a! Защо? Не сбъркахме ли? Изглежда, че колкото е по-далеч от равнината, толкова по-слаба би трябвало да бъде силата. Но не! Ако точката се намира съвсем близо до равнината, по-голямата част от веществото ще я привлича под неподходящи ъгли, а ако е далеч, за по-голямата част от веществото привличането е насочено по-пряко към равнината. На произволно разстояние най-„влиятелната“ част на равнината лежи в някакъв конус. С отдалечаването силата отслабва обратно пропорционално на квадрата на разстоянието, но в същия конус под същия ъгъл се оказва *повече вещество,* а увеличаването на количеството на веществото е също пропорционално на квадрата на разстоянието! Този анализ може да бъде направен по-строго, ако забележим, че диференциалът на приноса на който и да е даден конус не зависи от разстоянието вследствие на противоположните изменения на интензитета на полето на дадена маса и количеството на самата тази маса (с увеличаването на разстоянието). В действителност силата не е постоянна, защото на другата страна на равнината тя си мени знака.



Фиг. 13.6. Тънък сферичен масов (или зарядов) слой

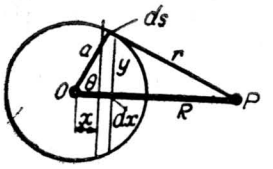
Ние впрочем решихме и задачата по електричество: ние доказахме, че електрическото поле на заредената пластинка, всяка единица площ от която носи заряд σ, е равно на $\sigma/2\varepsilon_0$ и е насочено *от пластинката,* ако тя е заредена положително, и *към нея,* ако тя е заредена отрицателно. За да докажем това, трябва само да си припомним, че в закона за гравитацията G играе същата роля както $1/4\pi\varepsilon_0$ при електричеството.

А сега нека да имаме две пластинки, една с положителен заряд $+\sigma$, а друга с отрицателен $-\sigma$ (на единица площ), и нека разстоянието между тях да е равно на D. Какво е полето на тези пластинки? От външната страна на пластинките то е равно на нула. Защо? Защото едната от тях отблъсква, а другата привлича и за двете силата *не зависи от разстоянието;* значи силите навсякъде се унищожават! А полето *между пластинките* е два пъти по-голямо, отколкото полето на едната пластинка, насочено е от положителната пластинка към отрицателната и е равно на $E=\sigma/\varepsilon_0$.

Сега преминаваме към още по-интересен и важен въпрос; впрочем, ние вече отдавна отговорихме на този въпрос, след

като предположихме, че силата на земното привличане в дадена точка на земната повърхност или над нея е такава, каквато би била, ако цялата маса на Земята беше съсредоточена в нейния център. Верността на това предположение не е очевидна: нали когато се намираме до самата Земя, някаква част от нейната маса е много близо до нас, а другата е далеч и т. н. Когато събираме действието на всички такива маси, изглежда като чудо, че в края на краищата силата се свежда до това, като че ли цялата Земя се е свила в една точка, в своя център!

Сега ще покажем, че това чудо е обикновено; за да демонстрираме това, разделяме Земята на тънки сферични слоеве. Нека цялата маса на сферата да е равна на m. Да пресметнем *потенциалната енергия* на частица с маса m' на разстояние R от центъра на сферата (фиг. 13.6). Ще видим, че потенциалната енергия е именно такава, каквато би била, ако масата m на сферата беше съсредоточена в нейния център. (По-лесно е да се борави с потенциалната енергия, отколкото с интензитета на полето: не е нужно да се мисли за ъглите, а просто се събират потенциалните енергии на всички части на сферата.) Нарязваме сферата на тънки пластинки; нека x да е разстоянието от пластинката до центъра на сферата; тогава цялата маса на пластинката с дебелина dx се намира на едно и също разстояние r от точката P, а потенциалната енергия на привличането на тази пластинка е равна на $-Gm'dm/r$. Колко маса се съдържа в пластинката dx? Ето колко:



Фиг. 13.6. Тънък сферичен слой от маси (или заряди)

$$dm=2\pi y\mu\, ds=\frac{2\pi y\mu\, dx}{\sin\theta}=\frac{2\pi y\mu\, dx a}{y}=2\pi a\mu\, dx,$$

където $\mu=m/4\pi a^2$ е повърхнинната плътност на масата. (Въобще повърхнината на всяка пластинка е пропорционална на нейната височина.) Поради това потенциалната енергия на привличането на масата dm е

$$dW=-\frac{Gm'dm}{r}=-\frac{Gm'2\pi a\mu\, dx}{r}.$$

Но ние виждаме, че

$$r^2=y^2+(R-x)^2=y^2+x^2+R^2-2Rx=a^2+R^2-2Rx.$$

Значи

$$2r\,dr=-2R\,dx$$

или

$$\frac{dx}{r}=\frac{dr}{R}.$$

Затова

$$dW=-\frac{Gm'2\pi a\mu\, dr}{R}$$

и се получава

$$W=-\frac{Gm'2\pi a\mu}{R}\int_{R-a}^{R+a}dr=-\frac{Gm'2\pi a\mu}{R}\,2a=$$

$$=-\frac{Gm'(4\pi a^2\mu)}{R}=-\frac{Gm'm}{R}. \qquad (13.18)$$

Следователно за тънкия слой потенциалната енергия на масата m', външна по отношение на слоя, е такава, каквато би била, ако масата на слоя би се съсредоточила в неговия център. Земята може да се представи като редица от такива слоеве и привличането на всеки един от тях зависи само от неговата маса; събирайки всички слоеве, ще получим *цялата маса* на планетата; значи и цялата Земя действува така, като че ли цялата ѝ маса се намира в центъра ѝ!

Нека да видим какво ще стане, ако точката P се окаже в слоя. Извършвайки същите пресмятания, включително и интегрирането, ние ще получим разликата на две стойности на r, но вече в друга форма: $(a+R)-(a-R)=2R$ (двойното разстояние от P до центъра). С други думи, сега W става равно на $W=-Gmm'/a$, което *не зависи от* R, т. е. точката P *навсякъде* в сферата има една и съща потенциална енергия. Следователно на нея не й действува никаква сила и не е нужна никаква работа, за да бъде преместена вътре. Когато потенциалната енергия на тялото навсякъде, във всяка точка вътре в сферата, е еднаква, тогава на тялото не действува никаква сила. Вътре в сферата тялото не изпитва действието на сили, силите действуват само извън сферата.

14

Работа и потенциална енергия (II)

1. Работа
2. Движение при наложени връзки
3. Консервативни сили
4. Неконсервативни сили
5. Потенциали и полета

1. Работа

В предшествуващата глава ние въведохме много нови понятия и идеи, които играят важна роля във физиката. Тези идеи са толкова важни, че е оправдано да се посвети цяла глава за внимателно запознаване с тях. Тук няма да повтаряме „доказателствата" и красивите методи, които позволяват да се получават просто важни резултати, а вместо това ще съсредоточим нашето внимание върху обсъждането на самите идеи.

Изучавайки какъвто и да е въпрос от технически характер, за разбирането на който е нужна математика, ние всякога се сблъскваме с необходимостта да разберем и запомним маса факти и идеи, обединени от определени връзки. Съществуването на тези връзки може да се „докаже" или „покаже". Лесно е да се сбърка самото доказателство със съотношението, което то установява. Разбира се, много по-лесно е да се научи и запомни не доказателството, а самото съотношение. Тогава вече във всички случаи ние можем да кажем: „Лесно е да се покаже, че..." това и това е вярно и фактически да го покажем. Доказателствата са почти винаги направени с оглед на това, първо, лесно да могат да бъдат възпроизведени с тебешир на дъската или с перодръжка на хартия и, второ, да изглеждат по-гладки. И в резултат доказателството изглежда извънредно просто, макар че авторът вероятно в течение на много часове е търсил разни начини за пресмятания, докато е намерил най-изящния — този, който води до резултата за най-кратко време! Гледайки извода на формулата, трябва да се помни не този извод, а по-скоро самият факт, че и това *може да се докаже*. Разбира се, ако доказателството изисква особени математически пресмятания или „трикове", преди това неизвестни, то трябва да се обърне внимание... впрочем не на самите трикове, а на тяхната идея.

Нито едно от доказателствата, приведени в този курс, авторът не е запомнил от времето, когато сам е изучавал физика. Напротив, той само си спомня, че нещо е вярно и, опитвайки се да поясни как се доказва това, сам измисля доказателство в този момент, когато то е необходимо. И всеки, който действително е изучил предмета, трябва да бъде в състояние да постъпи по същия начин, без да запомня доказателствата. Ето защо в тази глава ние няма да привеждаме изводите на различните положения, направени по-рано, а ще правим само равносметка.

Първата идея, която трябва да усвоим, е, че *работата се извършва от сила*. Физическият термин „работа" няма нищо общо с нейния обикновен житейски смисъл...

Физическата работа се изразява във вида $\int \mathbf{F}.d\,\mathbf{s}$ или „контурен интеграл $\mathbf{F}$ по $d\mathbf{s}$ скаларно"; последното означава, че ако силата е насочена например на една страна, а тялото, на което силата действува, се премества на друга страна, то *работа извършва само компонентата на силата по посока на преместването*. Ако например силата беше постоянна, а преместването — $\Delta\mathbf{s}$ е станало на крайна отсечка, работата, извършена от постоянната сила по този път, щеше да бъде равна на произведението от компонентата на силата по посоката на $\Delta\mathbf{s}$ и Δs. Правилото гласи: „работата е сила по път", като се подразбира само компонентата на силата по посока на преместването, умножена по Δs, или, което е същото, компонентата на преместването по

посока на силата, умножена по **F**.

Очвидно е, че насочената под прав ъгъл към преместването сила няма да извърши никаква работа.

Ако по-нататък векторът на преместването Δ **s** бъде разложен на компоненти, т. е. ако истинското преместване е Δ **s** и ние считаме, че то се състои от компонентите Δx по посока на x, Δy по посока на y и Δz по посока на z, тогава цялата извършена работа за преместването на тялото от едно място на друго може да се счита съставена от три части, които могат да се пресметнат отделно, а именно: отделно работата на преместването по x, по y и по z. Работата за преместването по x изисква знанието само на съответната компонента на силата F_x и т. н., така че работата е равна на $F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$. Когато силата не е постоянна, а движението е сложно, криволинейно, тогава пътят трябва да се раздели на малки Δ **s**, да се съберат работите за пренасяне на тялото по всяко Δ **s** и да се премине към граница при Δ **s**, клонящо към нула В това е смисълът на понятието „контурен интеграл". Всичко, което току-що казахме, се съдържа във формулата $W = \int \mathbf{F} . d\mathbf{s}$. Но едно е да се нарече тази формула прекрасна и съвсем друго е да се разбере нейният смисъл и нейните следствия.

Смисълът на думата „работа" във физиката дотолкова се различава от това, което тази дума означава при обикновени обстоятелства, че трябва акуратно да се анализира това различие. Например, по точния смисъл на физическото определение на понятието работа, ако вие държите в ръцете си някакъв предмет, вие не извършвате никаква работа. Вие се изпотявате, вашите ръце треперят, дишате тежко, като че ли тичешком сте изкачвали стълба, но работа вие не извършвате. Когато се изкачвате по стълбата, се счита, че вие *извършвате* работа; съгласно физиката, когато слизате по стълбата, светът извършва работа над вас, а когато държите предмет, стоейки неподвижно, никаква работа не се извършва. Физическото определение на понятието работа се различава от физиологическото по причини, които ние сега накратко ще изложим.

Когато държите предмет, вие, разбира се, извършвате „физиологическа" работа. Защо се изпотявате? Защо за такова занимание вие трябва добре да се храните? Защо всички механизми във вас работят с пълна сила, когато вие сте сложили гръб под предмета? За този предмет могат да не се изразходват никакви усилия, достатъчно е само да се постави той на масата и масата спокойно и мирно, без да се нуждае от никаква енергия, ще държи този предмет на същата височина! Физиологията дава приблизително следното обяснение. Човекът и другите животни имат два рода мускули. Едни, наречени *напречновлакнести* или *скелетни,* се контролират от нашата воля; такива са например мускулите на ръцете. Другите мускули се наричат *гладки* (например мускулите на вътрешностите или, при мекотелите, големия съединителен мускул, който затваря черупките). Гладките мускули работят много бавно, но са способни да се „вцепенят"; това значи, че ако например на мекотелото е нужно да задържи своите черупки в определено положение, то ще ги задържи каквато и сила да ги притиска. Мекотелото е способно без умора в течение на часове да държи черупките под натоварване, подобно на масата, на която е поставен предмет; мускулът „застива" в определено положение, без да извършва никаква работа, без да изисква от мекотелото никакви усилия. На нас пък са ни нужни непрекъснати усилия, за да задържим предмета. Това се обяснява с устройството на напречновлакнестите мускули. Когато нервният импулс достигне мускулното влакно, то се свива и след това пак се отпуща; когато ние държим предмета, в мускула непрекъснато и обилно текат нервни импулси, една част от влакната се свиват, докато другите си почиват. Това даже може да

се види: когато ръката се умори да държи предмета, тя започва да трепери. Това става, защото потокът от импулси е нерегулярен и уморените мускули не успяват своевременно да реагират. Защо мускулите са построени по такава несъвършена схема? Не е известно защо, но природата не е съумяла да създаде *бързодействуващи* гладки мускули. А колко по-удобно би било да се повдигат предметите именно с гладки мускули: те са способни да застиват на място, те могат да се вцепеняват и за това не би било нужно да се извършва никаква работа и не е нужна никаква енергия. Обаче тези мускули имат един недостатък: те работят много бавно.

Нека да се върнем към физиката и да зададем още един въпрос: *защо* трябва да пресмятаме извършената работа? *Отговор*: защото това е интересно и полезно. Защото работата, която извършва над частицата равнодействуващата на всички приложени към нея сили, е точно равна на изменението на кинетичната енергия на тази частица. Ако тласнем тялото, то ще започне да се движи и

$$\Delta (v^2) = \frac{2}{m} \mathbf{F} . \Delta \mathbf{s}.$$

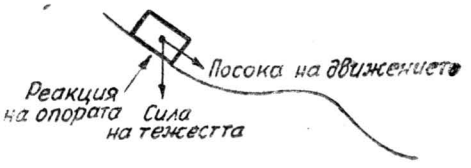
2. Движение при наложени връзки

Силите и работата имат още едно интересно свойство. Нека да имаме някакъв наклон, някакъв криволинеен улей, по който частицата трябва да се движи без триене. Или да имаме махало — тежинка, окачена на конец; конецът на махалото принуждава тежинката да се движи по окръжност около точката на окачването. Намотавайки конеца на колче, при люлеенето може да се мени точката на окачването, така че траекторията на тежестта ще се състои от две окръжности с различни радиуси. Всичко това са примери за така наречените *неподвижни връзки без триене.*

При движението с неподвижни връзки без триене тези връзки не извършват никаква работа, защото реакциите на връзките се прилагат към тялото под прав ъгъл към самите връзки; такова е положението и с реакцията на улея и с опъването на конеца.

Силите, възникващи при движението на частицата надолу по наклона под действието на силата на тежестта, са извънредно сложни: тук имаме и реакция на връзката, и сила на тежестта, и т. н. И все пак, ако при пресмятането на движението вземем под внимание *само силата на тежестта* и запазването на енергията, ние получаваме правилен резултат. Това изглежда доста странно, защото не е съвсем правилно; би трябвало да използуваме *равнодействуващата* сила. Въпреки това работата, извършена само от силата на тежестта, се оказва равна на изменението на кинетичната енергия, защото работата на силите на връзките е равна на нула (фиг. 14. 1).

Важното свойство на силите, за което ние говорихме, се състои в това, че ако силата може да бъде разложена на две или няколко „части", работата, извършена от самата сила при движението по някаква крива, е равна на сумата от работите, извършени от всяка „част" на силата. Ако ние изразим силата като векторна сума на няколко сили (силата на тежестта, реакцията на връзките и т. н. или x-компонентите на всички сили плюс y-компонентите и т. н., или по някакъв друг начин), то работата на цялата сила е равна на сумата от работите на тези части, на които ние сме я разложили.

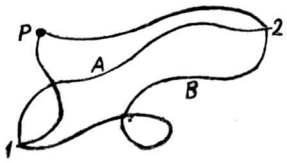


Фиг. 14.1. Силите, които действуват на тялото, хлъзгащо се без триене

3. Консервативни сили

В природата съществуват сили, например силата на тежестта, които имат едно забележително свойство — „консервативност“ (никакви политически идеи, нищо двусмислено в това понятие няма). Когато ние пресмятаме каква работа извършва силата, преместваики тялото от една точка в друга, въобще работата се оказва зависеща от траекторията; но в някои особени случаи тази зависимост пропада. Ако работата не зависи от траекторията, ние казваме, че силата е консервативна. С други думи, ако интегралът от произведението на силата и нарастването на преместването между точките *1* и *2* (фиг. 14. 2) един път се пресметне по кривата *A*, а друг път по кривата *B* и в двата случая се получи еднакво количество джаули, и ако това е изпълнено за *всяка крива*, която съединява тези две точки и освен това е вярно *за д е произволни точки*, то казват, че силата е консервативна. При такива обстоятелства интегралът на работата между точките 1 и 2 може лесно да се пресметне. В други случаи това не е така просто: трябва да се зададе още формата на кривата; когато обаче работата не зависи от кривата, то очевидно остава само зависимостта от *положенията* на точките *1* и *2*.

За да докажем това, нека да разгледаме фиг. 14. 2. Да фиксираме произволна точка *P*. Криволинейният интеграл на работата на участъка (1,2) може да се пресметне, като се разбие на две части: работата на участъка (*1*, *P*) и работата на участъка (*P*, *2*), защото сега ние имаме навсякъде консервативни сили и стойността на работата ще бъде една и съща независимо от избрания път. Работата за преместването от точката *P* в произволна друга точка на пространството е функция от положението на крайната точка. Тя зависи и от *P*, но в целия по-нататъшен анализ ние ще закрепим точката *P*, така че работата за преместването на тялото от точката *P* в точката *2* ще бъде някаква функция от положението на точката *2*. Тя зависи от това къде се намира точката 2; ако тялото бъде преместено в друга точка, отговорът ще бъде друг.



Фиг. 14.2. Възможните пътища, съединяващи две точки в полето на силите

Нека да означим тази функция на положението с — $U(x, y, z,)$; за да отбележим, че става дума именно за точката *2* с координати x_2, y_2, z_2, ние ще пишем просто $U(2)$, съкращавайки означението $U(x_2, y_2, z_2)$. Работата за преместването от точка *1* в точка *P* може да се напише, като обърнем посоката на интегрирането (като сменим знаците на всички $d\mathbf{s}$). С други думи, работата на участъка (*1*, *P*) е равна на работата на участъка (*P*, *1*) със знак минус:

$$\int_1^P \mathbf{F}\,.\,d\mathbf{s} = \int_P^1 \mathbf{F}\,.\,(-d\mathbf{s}) = -\int_P^1 \mathbf{F}\,.\,d\mathbf{s}\,.$$

Значи работата на участъка $(P, 1)$ е $-U(1)$, а на участъка $(P, 2)$ — $-U(2)$. Поради това интегралът от *1* до *2* е равен на $-U(2)$ плюс $[-U(1)$ обратно], т. е. $+U(1)-U(2)$:

$$U(1) = -\int_P^1 \mathbf{F}\,.\,d\mathbf{s}, \quad U(2) = -\int_P^2 \mathbf{F}\,.\,d\mathbf{s},$$

$$\int_1^2 \mathbf{F}\,.\,d\mathbf{s} = U(1) - U(2)\,. \tag{14.1}$$

Величината $U(1) - U(2)$ се нарича изменение на потенциалната енергия, а U може да се нарече потенциална енергия. Когато предметът се намира в положението 2, ние ще казваме, че той има потенциална енергия $U(2)$, а в положението *1* — потенциална енергия $U(1)$. Когато той се намира в положението *P*, неговата потенциална енергия е равна на нула. Ако вместо *P* вземем

произволна друга точка Q, ще се окаже (доказателството се предоставя на вас), че *потенциалната енергия на всички точки ще се измени само с постоянна добавка.* Тъй като запазването на енергията зависи само от нейните *изменения*, тази постоянна добавка няма никакво значение. Поради това точката P е произволна.

И така ние имаме две твърдения: 1) работата, извършвана от силата, е равна на изменението на кинетичната енергия на системата и 2) математически, за консервативните сили, извършената работа е равна на минус изменението на функцията U, наречена потенциална енергия. Като следствие на тези две твърдения възниква още едно: *ако действуват само консервативни сили, сумата на потенциалната U и кинетичната T енергии остава постоянна*:

$$T+U=const. \tag{14.2}$$

Нека да разгледаме формулата за потенциалната енергия за редица случаи. Ако гравитационното поле е хомогенно, ако ние не се издигаме до височини, сравними с радиуса на Земята, силата е постоянна и насочена вертикално, а работата е равна просто на произведението на силата и на разстоянието по вертикалата. Следователно

$$U(z)=mgz, \tag{14.3}$$

и за точка P с нулева потенциална енергия може да се приеме произволна точка в равнината $z=0$. Но може също така да се каже, че потенциалната енергия е равна на $mg(z-6)$ (ако ние имаме такова желание!). Всички резултати в нашия анализ ще останат същите, с изключение на това че потенциалната енергия в равнината $z=0$ ще бъде равна на $-mg6$. Няма никаква разлика, защото трябва да се взема предвид само *разликата* на потенциалните енергии.

Енергията, необходима за свиване на пружината на разстояние x от точката на равновесието, е равна на

$$U(x)=\frac{1}{2}kx^2 \tag{14.4}$$

и нулевата потенциална енергия се пада на точката $x=0$, т. е. на равновесното състояние на пружината. Също и тук ние можем да прибавим произволна константа.

Потенциалната енергия на привличането на материалните точки с маси M и m на разстояние r една от друга е равна на

$$U(r)=-\frac{GMm}{r}. \tag{14.5}$$

Константата тук е определена така, че в безкрайност потенциалът изчезва. Разбира се, същата формула може да се приложи и към електрическите заряди, защото законът е един и същ:

$$U(r)=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{14.6}$$

Нека сега да използуваме една от тези формули, за да видим дали сме разбрали техния смисъл.

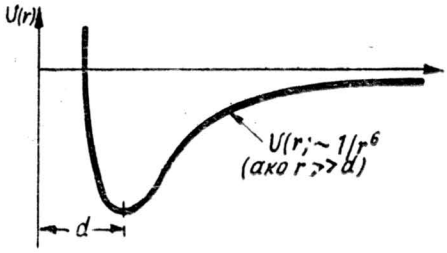
Въпрос: С каква скорост трябва да тръгне ракетата от Земята, за да я напусне?

Отговор: Сумата на кинетичната и потенциалната енергии трябва да бъде постоянна; напускането на Земята значи отдалечаване от нея на милиони километри; ако на ракетата едва ѝ стигат сили да напусне Земята, трябва да се предположи, че там, далеч, нейната скорост ще бъде равна на нула и че в безкрайност тя едва-едва ще се движи. Нека a да е радиусът на Земята, а M — нейната маса. Кинетичната плюс потенциалната енергия първоначално е била равна на $^1/_2\,mv^2-GmM/a$. В края на движението тези две енергии трябва да се изравнят. Ние считаме, че кинетичната енергия в края на движението е равна на нула, защото тялото едва се движи (почти с нулева скорост), а потен-

циалната енергия е равна на величината GmM, делена на безкрайност, т. е. също е равна на нула. Значи от едната страна стои разликата на две нули; поради това квадратът на скоростта трябва да бъде равен на $2GM/a$. Но GM/a^2 е именно това, което наричат ускорение на силата на тежестта g. И така

$$v^2 = 2ga.$$

С каква скорост трябва да се движи изкуственият спътник, за да не падне на Земята? Ние вече решавахме тази задача и получихме $v^2 = GM/a$. Значи, за да се напусне Земята, е нужна скорост, $\sqrt{2}$ пъти по-голяма, отколкото скоростта на въртенето на спътника около Земята. С други думи, за да се напусне Земята, е нужна *два пъти по-голяма енергия* (енергията е пропорционална на квадрата на скоростта), отколкото енергията, необходима за завъртването около нея. Затова исторически отначало бяха извършени полети на изкуствени спътници около Земята, за което бяха нужни скорости около 7,8 km/s. И едва след това космически кораби бяха изпратени в световното пространство; за това беше нужна вече два пъти по-голяма енергия, т. е. скорост около 11,2 km/s.



Фиг. 14.3. Потенциалната енергия на взаимодействието на два атома като функция на разстоянието между тях

Сега да продължим разглеждането на характеристиките на потенциалната енергия. Нека да разгледаме взаимодействието на две молекули или на два атома, например взаимодействието на два атома на кислорода. Когато се намират далеч един от друг, те се привличат със сила, обратно пропорционална на седмата степен на разстоянието, а при тясно сближаване те силно се отблъскват. Интегрирайки минус седмата степен на разстоянието, за да получим работа, ние виждаме, че потенциалната енергия U (функция на разстоянието между атомите на кислорода) се изменя като минус шеста степен на разстоянието (при големи разстояния).

Кривата на потенциалната енергия $U(r)$ (фиг. 14.3) при големи r изглежда като r^{-6}, а при достатъчно малки r достига минимум. Минимумът на потенциалната енергия в точката $r = d$ означава, че ако ние се отдалечим от нея на малко разстояние, на много малко разстояние, извършената работа, която е равна на изменението на потенциалната енергия на това разстояние, е почти равна на нула, защото на дъното на кривата енергията почти не се изменя. Това значи, че в тази точка силата е равна на нула и това е точката на равновесието. Условието за равновесие може да се изрази и другояче: за отделечаването на точката на равновесие в произволна посока трябва да се изразходва работа. Когато двата кислородни атома са разположени така, че от силата на тяхното взаимодействие не може повече да се изстиска никаква енергия, те се намират в най-ниското енергетично състояние и разстоянието между тях е равно на d. Така изглежда молекулата на кислорода, когато не е нагрята. При нагряването атомите трептят и се отдалечават един от друг; те могат да бъдат и съвсем разделени, но за това е нужно определено количество работа или енергия, което е равно на разликата на потенциалните енергии в точките $r = d$ и $r = \infty$. При опит да се доближат атомите, енергията бързо расте вследствие на тяхното взаимно отблъскване.

Защо говорим за потенциална енергия? Защото понятието *сила* не е много подходящо за квантовата механика, там по-естествено е понятието *енергия*. Когато разглеждаме по-сложни взаимодействия (на ядреното вещество, на молекулите и т. н.), то макар понятията сила и скорост да се „разсейват“ и да изчезват, оказва се, че понятието енергия все пак остава. Ето защо в книгите по квантова механика ние намираме кривите на потенциалната енергия, но много рядко ще видим графика на силата на взаимодействието на две молекули, защото тези, които изучават тези явления, са привикнали повече да мислят за енергията, отколкото за силата.

Ще прибавим още, че когато на тялото действуват едновре-

менно няколко консервативни сили, потенциалната енергия на тялото е сумата от потенциалните енергии от всяка сила. Това е същото, което ние твърдяхме и по-рано, защото когато силата се представя като векторна сума от сили, извършваната от нея работа е равна на сумата от работите, извършвани от отделните сили; ето защо тя може да бъде представена като изменения на потенциалните енергии от всяка сила поотделно. Това значи, че общата потенциална енергия е равна на сумата от всички части.

Ние можем да обобщим това за случая на система от много тела, като например Юпитер, Сатурн, Уран и т. н. или атомите на кислорода, азота, въглерода и т. н., които си взаимодействуват по двойки, като силите на взаимодействието на всяка двойка са консервативни. При тези условия кинетичната енергия на цялата система е просто сума от кинетичните енергии на всички отделни атоми или планети, или частици, а потенциалната енергия на системата е сума от потенциалните енергии на взаимодействието на отделните двойки, пресметнати, при предположение че други частици няма. (В действителност за молекулните сили това не е вярно и формулата е по-сложна; за Нютоновата гравитация това е напълно точно, а за молекулните сили е валидно само като приближение. Може, разбира се, да се говори за потенциална енергия на молекулните сили, но понякога тя се оказва по-сложна функция от положенията на атомите, отколкото простата сума от взаимодействията по двойки.) Ето защо потенциалната енергия в случая на гравитация е сума по всички двойки i и j на $-Gm_im_j/r_{ij}$ [както беше показано в уравнението (13.14)]. Уравнението (13.14) изразява математически следното: общата потенциална енергия плюс общата кинетична енергия не се изменят с течение на времето. Нека отделните планети да се въртят около осите си и около Слънцето, все едно, ако пресметнем общата потенциална и общата кинетична енергия, ще се окаже, че тяхната сума е винаги постоянна.

4. Неконсервативни сили

Ние посветихме доста време на обсъждането свойствата на консервативните сили. Какво ще кажем сега за неконсервативните сили? Ние искаме да се запознаем с този въпрос по-подробно, отколкото това обикновено се прави, и да покажем, че неконсервативни сили няма! Оказва се, че всички основни сили в природата по всяка вероятност са консервативни. Не мислете, че това е следствие от законите на Нютон. В действителност, доколкото сам Нютон си е представял това, силите могат да бъдат неконсервативни, като например триенето, което изглежда да е неконсервативно. Употребявайки думата „изглежда“, ние се придържаме към съвременното гледище по този въпрос, според което всички основни сили, всички сили на взаимодействие между частиците на фундаментално ниво са консервативни сили.

Когато анализираме например система като голямото кълбовидно звездно натрупване (ние показахме снимка на такова натрупване) с хиляди взаимодействуващи звезди, ние намираме, че формулата за общата потенциална енергия се състои просто от сума от членове, всеки от които представлява взаимодействието на някаква двойка звезди; също така и кинетичната енергия е сума от кинетичните енергии на всички отделни звезди. Но кълбовидното натрупване се движи като цяло и в пространството и ако ние се намирахме толкова далеч от него, че да не можем да различаваме отделни подробности, ние бихме го взели за единен предмет. Ако при това на него действуваха някакви сили, то част от тях би могла да го движи като цяло и ние щяхме да видим как центърът на това тяло се движи. От друга страна, други сили биха могли, ако можем така да се изразим, да се „изразходват“ за увеличаване на потенциалната или кинетичната енергия на „частиците“ вътре в „тялото“. Да предположим например, че действието на тези сили

би довело до разширяване на целия куп и до увеличаване на скоростите на „частиците“. Общата енергия на „тялото“ фактически би се запазила. Но гледайки отдалеч с нашите слаби очи, които не различават безпорядъчните вътрешни движения, ние ще видим само кинетичната енергия на цялото тяло и нас ще ни се струва, че енергията не се запазва, макар причината да е в това, че ние не различаваме подробностите. Оказва се, че това е винаги така: общата енергия на Вселената, кинетичната плюс потенциалната, ако се наблюдава добре, е винаги постоянна.

Изучавайки най-тънките свойства на веществото на атомно ниво, *не винаги е лесно* да се раздели общата енергия на две части, потенциална и кинетична, и не винаги такова разделяне е необходимо. Във всеки случай то е възможно *почти* винаги, така че нека да казваме, то е възможно *винаги* и че сумата на потенциалната и кинетичната енергия на света е постоянна. И така общата потенциална плюс кинетичната енергия вътре в целия свят е постоянна и ако „светът“ е изолирано парче вещество, неговата енергия е постоянна при условие, че няма външни сили. Но ние видяхме, че част от кинетичната и потенциалната енергия на предмета може да бъде вътрешна (например вътрешните молекулни движения), вътрешна в смисъл, че не я забелязваме. Ние знаем, че в чашата с вода всичко трепти, всички части се движат непрекъснато, така че вътре се съдържа определена кинетична енергия, на която ние обикновено не обръщаме никакво внимание. Ние не забелязваме движението на атомите, раждащо топлина, и затова не го наричаме кинетична енергия, но основата на топлината е все пак кинетична енергия. Също така и вътрешната потенциална енергия може например да има форма на химическа енергия; при горенето на бензин се отделя енергия, защото потенциалните енергии на атомите при новото им положение се оказват по-малки, отколкото при предшествуващото им положение. Строго погледнато, топлината не може да се счита за чисто кинетична енергия, в нея влиза и част от потенциалната енергия; същото се отнася и за химическата енергия, така че по-добре е те да се обединят и да се казва, че общата кинетична и потенциална енергия в тялото е частично топлина, частично химическа енергия и т. н. Във всеки случай всички тези различни форми на вътрешната енергия се разглеждат понякога като „загубена“ енергия в смисъл, както беше казано по-горе; когато изучим термодинамиката, всичко това ще ни стане по-ясно.

В качеството на друг пример да вземем триенето. Не е вярно, че кинетичната енергия в резултат на триенето изчезва; това не е вярно, макар хлъзгащото се тяло наистина да се спира и макар да изглежда, че кинетичната енергия е изчезнала. Но тя не изчезва, защото атомите в тялото започват да се движат с по-голям запас от кинетична енергия; макар ние да не можем да видим това, можем да се досетим за него по повишаването на температурата. Разбира се, ако не се обръща внимание на топлинната енергия, теоремата за запазването на енергията ще изглежда неправилна.

Още в един случай може да изглежда, че енергията не се запазва: когато ние изучаваме само една част от системата. Напълно естествено е, че ако дадено нещо взаимодейства с друго външно нещо и ние пренебрегваме това взаимодействие, теоремата за запазването на енергия няма да изглежда вярна.

В класическата физика в потенциалната енергия се включваха само гравитацията и електричеството, но сега ние имаме и атомна енергия и много други неща. В класическата теория например светлината е особена форма на енергията, но възможно е, ако искаме това, да си представим светлината като кинетична енергия на фотоните и тогава нашата формула (14.2) пак ще се окаже вярна.

5. Потенциали и полета

Нека сега да разгледаме някои идеи, свързани с потенциалната енергия и с понятието „поле“. Нека две големи тела A и B

привличат към себе си трето малко тяло с резултантна сила **F**. Ние вече говорихме в гл. 12, че силата на привличането на частицата може да бъде представена като произведение на нейната маса m и вектора **C**, който зависи само от положението на частицата:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{C}.$$

Гравитацията може да се анализира, като се счита, че във всяко място на пространството съществува вектор **C**, който „действува" на масата, намираща се на това място, но който присъствува там независимо от това, дали ние сме поставили маса, или не. Векторът **C** има три компоненти и всяка една от тях е функция от (x, y, z) — функция на положението в пространството. Това нещо ние наричаме *поле* и казваме, че телата A и B *създават* поле, т. е. „правят" вектора **C**. Когато тялото е поставено в полето, силата на действието върху него е равна на неговата маса, умножена по големината на вектора на полето в точката, в която тялото се намира.

С потенциалната енергия може да се направи същото. Тъй като потенциалната енергия, интегралът от (Сила). ($d\mathbf{s}$), може да бъде записана като маса m, умножена по интеграл от (Поле). ($d\mathbf{s}$) — това е просто изменение на мащаба — то потенциалната енергия $U(x, y, z)$ на тялото, разположено в точката (x, y, z), може да се запише като произведение на m и на някаква друга функция. Нека да наречем тази функция *потенциал* Ψ. Интегралът $\int \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s}$ е равен на $-\Psi$, аналогично както $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -U$; те се различават само мащабно:

$$U = -\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -m \int \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = m\Psi. \qquad (14.7)$$

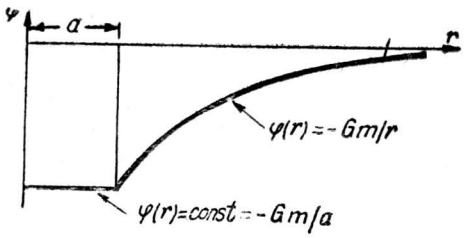
Знаейки тази функция $\Psi(x, y, z)$ във всяка точка на пространството, ние можем веднага да пресметнем потенциалната енергия на тялото в произволна точка, а именно $U(x, y, z) = m\Psi(x, y, z)$. Сега, като виждате, това стана съвсем проста работа. Но в действителност не е така, защото понякога е много по-приятно да описваме полето, като задаваме разпределението на потенциала в цялото пространство, отколкото като задаваме **C**. Вместо трите сложни компоненти на векторната функция по-просто е да се зададе скаларната функция Ψ. Освен това, когато полето се създава от много маси, величината Ψ се пресмята по-лесно, отколкото трите компоненти на **C**: потенциалите са скалари, те могат да се събират лесно, без да се грижим за посоките на силите. А полето **C**, както сега ще видим, лесно може да се възстанови, щом като знаем Ψ.

Нека да имаме материални точки с маси m_1, m_2, ... в точките 1, 2, ... и нека да искаме да знаем потенциала Ψ в някоя произволна точка P. Тогава той се оказва сума от потенциалите на отделните маси в точката P:

$$\Psi(P) = \sum_i \left(-\frac{Gm_i}{r_{iP}}\right), \quad i = 1, 2, \ldots \qquad (14.8)$$

Тази формула, представяща потенциала във вид на сума от потенциалите на отделните маси, ние използувахме в предшествуващата глава, за да пресметнем потенциала на сферичния слой (там ние събрахме потенциалите на всички пластове, на които беше нарязан слоят). Резултатът от пресмятането е показан на фиг. 14.4. Потенциалът е отрицателен, равен на нула в безкрайност, намалява както $1/r$, докато r не стане равно на a, а след това вътре в слоя става постоянен. Вън от слоя потенциалът е равен на $-Gm/r$ (m е масата на слоя), което напълно съвпада с потенциала на точката с маса m, поставена в центъра на сферичния слой. Но такова съвпадение съществува само за точки извън слоя, докато за вътрешните точки потенциалът се оказва равен на $-Gm/a$ и повече не се изменя! *А когато потенциалът е постоянен, полето е равно на нула:* ако потенциалната енергия не се изменя, силата отсъствува, защото когато движим тя-

лото от една вътрешна точка в друга, работата, която се извършва от силата, е равна точно на нула. Защо? Защото работата за преместването на тялото от една точка в друга е равна на минус изменението на потенциалната енергия (или съответният интеграл от полето е равен на изменението на потенциала). Но потенциалната енергия в двете точки е *еднаква*, следователно нейното изменение е равно на нула и затова не се извършва никаква работа при произволни движения вътре в сферичния слой. А това е възможно само тогава, когато вътре в слоя няма никакви сили.



Фиг. 14.4. Потенциал на гравитиращ сферичен слой с радиус a

В тези разсъждения се крие ключът за пресмятането на силата или интензитета на полето, когато потенциалната енергия е известна. Нека е зададена потенциалната енергия на тялото в точката (x, y, z) и нека искаме да узнаем каква сила му действува в тази точка. За това е необходимо да се знае потенциалът не само в тази точка, но и в съседните. Защо? Нека да се опитаме да пресметнем x-компонентата на силата (ако ние успеем да направим това, по същия начин ще пресметнем и y- и z-компонентите, като с това ще определим цялата сила). Ако преместим тялото на малкото разстояние Δx, работата, извършена от силата над тялото, ще се равнява на x-компонентата на силата, умножена по Δx (ако Δx е достатъчно малко), и трябвя да е равна на изменението на потенциалната енергия при преминаването от една точка в друга:

$$\Delta W = -\Delta U = F_x \Delta x. \tag{14.9}$$

Ние просто приложихме формулата $\int \mathbf{F}.d\mathbf{s} = -\Delta U$ за *много малки* разстояния. Сега, като разделим на Δx, ще намерим, че силата е равна на

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{14.10}$$

Разбира се, това не е съвсем точно. В действителност в (14.10) трябва да направим граничен преход, като оставим Δx да клони към нула, защото (14.10) е изпълнено *точно* само за безкрайно малки Δx. Тогава в дясната част на (14.10) ще стои производната на U по x и ние трябва да напишем — dU/dx. Но U зависи и от x, и от y, и от z, и за този случай математиците са измислили друго означение, което ни напомня, че трябва да бъдем много внимателни, когато диференцираме такава функция. Този символ напомня, че *само* x се счита за *изменящо се*, а y и z — не. Вместо d те просто пишат „обърнато 6“ или ∂. (Според мен, когато се изучава диференциалното смятане, по-добре е да се работи с ∂, а не с d: винаги ти се иска да съкратиш d, а за ∂ дори не ти идва такава мисъл!) И така, те пишат $\partial U/\partial x$, а понякога, желаейки да бъдат строги и *много* бдителни, пишат скобки с малки y и z долу $(\partial U/\partial x)_{yz}$, което значи: „Диференцирай U по x, като считаш y и z постоянни“. Но ние въобще няма да отбелязваме кое остава постоянно, тъй като това може винаги да се разбере от контекста. Затова пък *винаги* ще пишем ∂ вместо d като предупреждение за това, че тази производна се взема при постоянни стойности на всички други променливи. Наричат я *частна производна*, т. е. производна, за пресмятането на която варират една част от променливите, x.

И така, намираме, че силата по посока на x е равна на частната производна на U, по x, взета със знак минус:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{14.11}$$

Също така и силата по посока на y се получива чрез диференциране на U по y при постоянни x и z; аналогично третата компонента на силата е производната на U по z при постоянни x и y:

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{14.12}$$

В това се състои начинът за получаване на силата от потенциалната енергия. *Полето* се получава от *потенциала* по същия начин:

$$C_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad C_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad C_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{14.13}$$

Нека да отбележим, че съществува и друго означение (впрочем засега то няма да ни бъде нужно). Тъй като **C** е вектор с компоненти x, y, z, символите $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, които дават x-, y- и z компонентите на полето, с нещо напомнят за вектор. Математиците са измислили знаменития символ ∇, или *grad*, наречен „градиент"; това не е величина, а оператор, той прави от скалара вектор. Той има три компоненти: x-компонентата на този *grad* е $\partial/\partial x$, y-компонентата — $\partial/\partial y$, а z-компонентата — $\partial/\partial z$, и ние можем да се позабавляваме, като препишем нашите формули във вида

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \quad \mathbf{C} = -\nabla \Psi. \tag{14.14}$$

Наличието на ∇ в (14.14) означава, че нашите уравнения са векторни; но всъщност уравнението (14.14) е напълно еквивалентно на уравненията (14.11) и (14.12); това е просто друг начин на записване. Тъй като не искаме да пишем всеки път три уравнения, ние пишем само едно ∇U.

Нека дадем още един пример за полета и потенциали, който е свързан с електричеството. В този случай силата, която действува на неподвижно тяло, е равна на заряда, умножен по полето: $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ (В x-компонентата на силата влизат и членове, които зависят от магнитното поле. Но от уравнението (12.10) е лесно да се види, че силата, която действува на частицата от страна на магнитните полета, е винаги насочена напречно на полето и напречно на нейната скорост. Поради това свойство магнитното поле *не извършва никаква работа* над движещия се заряд, защото силата е перпендикулярна на преместването. Това значи, че при пресмятане на кинетичната енергия в електрично и магнитно полета приносът на магнитното поле може да бъде пренебрегнат, тъй като то не изменя кинетичната енергия). Да предположим, че имаме само електрично поле. Тогава ние можем да пресметнем енергията или извършената работа по същия начин, както и при гравитационното поле: да пресметнем величината φ, която е равна на минус интеграла от $\mathbf{E}.d\mathbf{s}$ от произволна фиксирана точка P до точката, в която се пресмята потенциалът; тогава потенциалната енергия в електричното поле е равна на произведението на заряда и на тази величина φ:

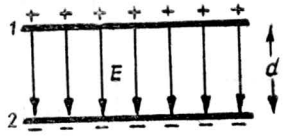
$$\varphi(r) = -\mathbf{E}.d\mathbf{s},$$

$$U = q\varphi.$$

Като пример да разгледаме две успоредни метални плочи с повърхнинен заряд $\pm\sigma$ (на единица площ) на всяка една от тях. Това устройство се нарича плосък кондензатор. Ние вече се убедихме по-рано, че извън плочите силата е равна на нула, а между тях съществува постоянно електрично поле. То е насочено от плюса към минуса и е равно на σ/ε_0 (фиг. 14.5). Ние искаме да знаем каква работа трябва да се извърши, за да се пренесе заряд от едната плоча до другата. Работата е равна на интеграла от (Сила).($d\mathbf{s}$). Той може да бъде записан като произведение от заряда и стойността на потенциала на плочата *1* минус същата величина на плочата *2*:

$$W = \int_1^2 \mathbf{F}.d\mathbf{s} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Този интеграл се пресмята лесно, тъй като силата е постоянна, и ако означим дебелината на кондензатора с d, то интегралът ще бъде равен на



Фиг. 14.5. Полето между успоредни плочи

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q\sigma}{\varepsilon_0} \int_1^2 dx = \frac{q\sigma d}{\varepsilon_0}.$$

Потенциалната разлика $\Delta\varphi = \sigma d/\varepsilon_0$ се нарича напрежение, а φ се измерва във волти. Когато казваме, че две плочи са заредени до определено напрежение, това значи, че разликата на електричните потенциали на двете плочи е равна на определено число волти. При кондензатора, състоящ се от две успоредни плочи с повърхнинен заряд $\pm\sigma$, напрежението (или разликата на потенциалите между тези две плочи) е равно на $\sigma d/\varepsilon_0$.

15

Специална теория на относителността

1. Принцип на относителността

1. Принцип на относителността
2. Лоренцови трансформации
3. Опит на Майкелсон-Морли
4. Преобразуване на времето
5. Лоренцово скъсяване
6. Едновременност
7. Четиривектори
8. Релативистична динамика
9. Връзка между маса и енергия

Повече от двеста години се считало, че уравненията на движението, формирани от Нютон, правилно описват природата. После в тях била открита грешка. Открита и веднага поправена. И забелязал грешката, и я поправил в 1905 год. един и същ човек — Айнщайн.

Вторият закон на Нютон, изразен с уравнението

$$\mathbf{F}=\frac{d(m\mathbf{v})}{dt},$$

безмълвно предполагал, че m е постоянна величина. Но сега ние знаем, че това не е вярно и че масата на тялото расте със скоростта. Във формулата, поправена от Айнщайн, m се появила в такъв вид:

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{15.1}$$

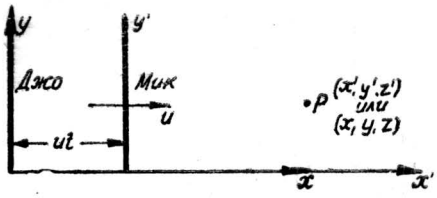
Тук „масата в покой“ m_0 е масата на неподвижното тяло, а c — скоростта на светлината, която е около 3.10^5 km/s.

За онези, на които теорията е необходима само за решаване на задачи, тази формула ще бъде напълно достатъчна. Нищо повече от теорията на относителността не ще им потрябва; те просто ще въведат в законите на Нютон поправка за изменяемостта на масата. От самата формула е очевидно, че нарастването на масата в обикновени условия е незначително.

Даже ако v е скоростта на един спътник (около 8 km s), то и при тези условия $v/c=3\ 10^5$; заместването на тази величина във формулата показва, че поправката на масата ще представлява не повече от една двумилиардна част от самата маса, което очевидно е невъзможно да се забележи. Всъщност правилността на формулата е потвърдена от наблюдения върху движението на разнообразни частици, скоростта на които практически силно се приближава към скоростта на светлината. В обикновени условия нарастването на масата е незабележимо; толкова по-забележително е, че то беше първо открито теоретично, а едва после наблюдавано опитно. Макар че за достатъчно големи скорости нарастването може да бъде колкото искаме голямо, то беше открито не по такъв път. Този закон в момента на своето откритие означаваше само едва забележимо изменение в някои цифри. Толкова по-интересно е да се разбере как съчетанието на физическото мислене и физическия експеримент му дале живот. Принос в това дело внесоха не малко хора, но крайният резултат на тяхната дейност беше откритието на Айнщайн.

Айнщайн всъщност има две теории на относителността. Тази глава е посветена само на *специалната теория на относителността*, водеща своето начало от 1905 г. В 1915 год. Айнщайн публикува още една теория, наречена *обща теория на относителността*. Тя обобщава специалната теория за случая на притегляне; тук ние няма да я обсъждаме.

Принципът на относителността за първи път е изказан от Нютон в едно от следствията от Законите на Движението:„ Относителните движения на телата едно спрямо друго, когато са затворени в някакво пространство, са еднакви и когато това пространство се намира в покой, и когато се движи равномерно



Фиг. 15.1. Две координатни системи, намиращи се в равномерно относително движение по оста x

и праволинейно без въртене." Това означава например, че при свободен полет на междупланетен кораб с постоянна скорост всички опити, правени на този кораб, всички явления, наблюдавани в него, ще бъдат такива, като че ли той се намира в покой (разбира се, при условие че няма да се излиза извън кораба). В това е смисълът на принципа на относителността. Тази мисъл е извънредно проста; въпросът е само в това, вярно ли е, че при всички опити, правени вътре в движеща се система, законите на физиката ще изглеждат също такива, каквито биха били, ако системата стоеше на едно място. Нека най-напред да видим така ли изглеждат законите на Нютон в движеща се система. Затова на нас отново ще ни потрябва помощта на нашите младежи — Мик и Джо.

Нека Мик се отправи по оста x с постоянна скорост u и измерва своето положение в някоя точка, показана на фиг. 15. 1. Той означава „x-разстоянието" на точката в своята координатна система с x'. Джо стои на място и измерва положнието на същата точка, като означава нейната x-координата в своята система с x. Връзката между координатите в двете системи е ясна от рисунката. За време t началото на системата на Мик се е изместило с ut и ако двете системи в началото са съвпадали, то

$$x = x - ut \qquad y' = y$$
$$z' = z \qquad t' = t. \tag{15.2}$$

Ако тези трансформации на координатите заместим в Нютоновите закони, те се превръщат в също такива закони, но в шрихована система; това означава, че Нютоновите закони имат еднакъв вид в движещата се и в неподвижната системи; ето защо чрез никакви опити по механика не може да се каже движи ли се системата, или не.

Принципът на относителността е прилаган в механиката твърде отдавна. Мнозина, по-специално Хюйгенс, са се ползвали от него за извеждане законите за удар на билярдни топки почти така, както ние в глава 10 доказвахме запазването на импулса.

През миналото столетие в резултат на изследвания на явленията на електричеството, магнетизма и светлината интересът към принципа на относителността пораснал. Максвел в своите уравнения на електромагнитното поле направил равносметка на многото щателни изследвания на тези явления. Неговите уравнения свързват в единна система електричеството, магнетизма, светлината. Обаче уравненията на Максвел очевидно *не се подчиняват* на принципа на относителността: ако ги преобразуваме с трансформацията (15.2), то техният вид *не остава по-раншният*. Следователно в движещия се междупланетен кораб оптическите и електрични явления не са такива, както в неподвижния; тях можем да ги използуваме за определяне на скоростта му, по-специално, за да определим и абсолютната скорост на кораба, като направим подходящи електрични или оптични измервания. Едно от следствията на Максвеловите уравнения се заключава в това, че ако едно смущение на полето породи светлина, то тези електромагнитни вълни се разпространяват еднакво във всички посоки и с една и съща скорост $c = 300\,000$ km s. Друго следствие от уравненията: ако източникът на смущението се движи, излъчваната светлина и в този случай лети в пространството със скорост c. Така е и със звука: скоростта на звуковите вълни също не зависи от движението на източника.

Тази независимост от движението на източника на светлина поставя интересен въпрос. Да допуснем, че пътуваме в лека кола със скорост u, а светлината от задните фарове се разпространява със скорост c. Като диференцираме първия ред в (15.2), получаваме:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - u.$$

Това означава, че в съгласие с Галилеевите преобразования видимата скорост на светлината по измервания, проведени в леката

кола, ще бъде не c, а $c-u$. Например скоростта на леката кола е 100 000 km/s, а скоростта на светлината е 300 000 km/s, тогава светлината от фаровете ще се отдалечи със скорост 200 000 km/s. Във всеки случай измервайки скоростта на светлината, излъчвана от фаровете (само ако са верни Галилеевите трансформации за светлината), може да се намери скоростта на леката кола. Върху тази идея се основавали много опити за определяне скоростта на Земята, но нито един от тях не излязъл сполучлив: *никаква скорост* не е била намерена. Ние скоро ще се запознаем много подробно с един от тези опити. Вие ще разберете какво се е случило в този опит и в какво се е състояла работата. Нещо нередно ставало в това време с уравненията на физиката. Но какво именно?

2. Лоренцови трансформации.

Когато станало ясно, че с уравненията на физиката не всичко е в ред, първото подозрение паднало върху уравненията на електродинамиката на Максвел. Те току-що били написани, от раждането им били изминали двадесет години; изглеждало почти естествено, че те са неверни. Заели се да ги преписват, видоизменят и нагаждат, така че принципът на относителността да се окаже изпълнен в Галилеева форма (15.2). При това в уравненията на електродинамиката се появили нови членове; те предсказвали нови електрически явления, но експериментът не открил никакви такива явления и се наложило да се откажат от опитите за изменение на Максвеловите уравнения. Постепенно на всички ставало ясно, че Максвеловите закони на електродинамиката са абсолютно правилни, а затруднението е в нещо друго.

Междувременно Лоренц забелязал едно забележително любопитно явление: когато в уравненията на Максвел той направил заместването:

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \tag{15.3а}$$

$$y' = y, \tag{15.3б}$$

$$z' = z, \tag{15.3в}$$

$$t' = \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \tag{15.3г}$$

формата на уравненията след заместването не се променила! Уравненията (15.3) сега се наричат *Лоренцови трансформации*. Айнщайн, следвайки мисълта, изказана най-напред от Поанкаре', предположил че *всички физически закони не трябва да се променят от Лоренцовите трансформации*. С други думи, трябва да се променят не законите на електродинамиката, а законите на механиката. Но как да се изменят законите на Нютон така, че при Лоренцовите трансформации те да не се променят? Когато такава цел е поставена, остава само да се препишат Нютоновите уравнения по такъв начин, че да се изпълнят поставените условия. Както се оказало, единственото, което трябва да се изиска от тях, това е масата m в Нютоновите уравнения да придобие вида (15.1). Трябва само да се внесе това изменение и настъпва пълна хармония между уравненията на Нютон и Масквел. Ако вие сега, желаейки да съгласувате измерванията, проведени от Мик и Джо, като използвате Лоренцовите трансформации, по никакъв начин не ще узнаете кой от тях се движи, тъй като формата на всички уравнения в двете координатни системи ще бъде една и съща!

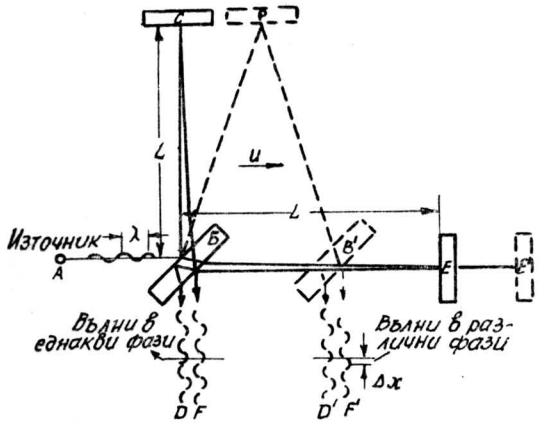
Интересно е да се разбере, какво означава тази замяна на старите трансформации на координатите и времето с новите. Старите (Галилееви) изглеждат очевидни, новите (Лоренцови) изглеждат необичайни. Как от логическа и от експериментална гледна точка може да бъде така, че са верни не старите трансфор-

мации, а новите? За да се разбере това, не е достатъчно, да се изучат законите на механиката, трябва (както това е направил и Айнщайн) да се анализират нашите представи за *пространството и времето*, иначе няма да се разберат тези трансформации. В продължение на известно време ние ще изучаваме тези представи и следствията от тях. Засега заслужава да се отбележи, че такъв анализ се оказва напълно оправдан — неговите резултати се съгласуват с данните от експеримента.

3. Опит на Майкелсон — Морли

Вече говорихме, че на времето са били направени опити да се определи абсолютната скорост на движението на Земята през въображаемия „етер", който, както мислели тогава, се просмуква в цялото пространство. Най-известния от тези опити направили през 1887 год. Майкелсон и Морли. Но едва след осемнадесет. години Айнщайн обяснил отрицателните резултати от техния опит.

За опита на Майкелсон—Морли се използвал прибор, схемата на който е показана на фигура 15.2. Главните части на прибора са: източник на светлина A, посребрена полупрозрачна стъклена пластинка B, две огледала C и E. Всичко това се закрепва неподвижно на тежка плоча. Огледалата C и E са разположени на еднакво разстояние L от пластинката B. Пластинката B разделя падащия сноп светлина на два перпендикулярни един на друг снопа; те се насочват към огледалата и се отразяват обратно към пластинката B. Преминавайки отново през пластинката B, двата снопа се наслагват (D и F). Ако времето за преминаване на светлината от B до E и обратно е равно на времето за преминаване от B до C и обратно, възникващите снопове D и F ще се окажат във фаза и ще се усилят взаимно; ако пък тези времена, макар и с малко, се отличават, в сноповете ще възникне фазова разлика и, като следствие — интерференция. Ако приборът се намира в покой в етера, времената са точно равни, а ако той се движи надясно със скорост u, ще се появи разлика във времената. Нека да разгледаме защо.



Фиг. 15.2. Схема на опита на Майкелсон-Морли.

Отначало ще пресметнем времето за преминаване на светлината от B до E и обратно. Нека времето „нататък" е равно на t_1, а времето за „обратно" е равно на t_2. Но докато светлината се движи от B до огледалото, самият прибор ще отмине на разстояние ut_1, така че светлината ще трябва да премине път $L+ut_1$ със скорост c. Затова този път може да бъде изразен и чрез ct_1; следователно

$$ct_1 = L + ut_1 \qquad \text{или} \qquad t_1 = \frac{L}{c-u}$$

(този резултат става очевиден, ако се вземе предвид, че скоростта на светлината по отношение на прибора е $c-u$; тогава времето е равно на дължината L, делена на $c-u$). Точно така може да се пресметне и t_2. За това време пластинката B ще се приближи на разстояние ut_2 така, че светлината ще премине при обратния път разстояние само $L-ut_2$. Тогава

$$ct_2 = L - ut_2 \quad , \quad \text{или} \qquad t_2 = \frac{L}{c+u}.$$

Общото време ще е равно на:

$$t_1 + t_2 = \frac{2Lc}{c^2-u^2};$$

по-удобно ще е да запишем това във вида:

$$t_1 + t_2 = \frac{2L/c}{1-u^2/c^2}. \tag{15.4}$$

А сега да пресметнем колко време t_3 светлината ще се движи от пластинката B до огледалото C. Както и преди, за време t_3 огледалото C ще се придвижи надясно на разстояние ut_3 (до положение C'), а светлината ще премине по хипотенузата BC' разстояние ct_3. От правоъгълния триъгълник следва:

$$(ct_3)^2 = L^2 + (ut_3)^2$$

или

$$L^2 = c^2t_3^2 - u^2t_3^2 = (c^2 - u^2)\,t_3^2,$$

откъдето

$$t_3 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - u^2}}.$$

При обратната разходка от точката C' светлината ще трябва да премине същото разстояние; това се вижда от симетрията на рисунката. Значи и времето на връщането е същото (t_3), а общото време е равно на $2t_3$. Ще го запишем във вида:

$$2t_3 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Сега можем да сравним двете времена. Числителите в (15.4) и (15.5) са еднакви — това е времето за разпространение на светлината в неподвижен прибор. В знаменателите членът u^2/c^2 е малък само ако u е много по-малко от c. Тези знаменатели показват промените на времената поради движението на прибора. Забележете, че тези изменения са *нееднакви* — времето за преминаване на светлината до C и обратно е малко по-малко от времето за преминаване до E и обратно. Те не съвпадат, даже ако разстоянията от огледалата до B са еднакви. Остава само точно да се измери тази разлика.

Тук възниква една техническа тънкост: какво ще стане, ако дължините L не са точно равни помежду си? Нали точно равенство, все едно, никога не може да се достигне. В този случай трябва просто да се завърти прибора на 90°, като се разположи BC по движението, а BE — *напречно*. Различието в дължините тогава престава да играе роля и остава само да се наблюдава *преместването* на интерференчните ивици при завъртането на прибора.

През време на опита Майкелсон и Морли разположили прибора така, че отсечката BE се оказала паралелна на движението на Земята по орбитата (в определения час на деня и нощта). Орбиталната скорост е около 30 km/s и „увличането на етера" в определените часове на деня или нощта и в определеното време от годината трябва да достигне тази величина. Приборът бил достатъчно чув твителен, за да отбележи това явление. Но никакво различие във времената не било измерено. Оказало се невъзможно да бъде измерена скоростта на движението на Земята през етера. Резултатът от опита бил нулев.

Резултатът от опита на Майкелсон—Морли бил много загадъчен и смущаващ. Първата плодотворна идея как да се излезе от задънената улица издигнал Лоренц. Той допуснал, че всички материални тела при движението си се скъсяват, но само в направление на движението. По такъв начин, ако дължината на неподвижното тяло е L_0, то дължината на тялото, движещо се със скорост u (ще я наречем $L_{\|}$, където индексът $\|$ показва, че движението се осъществява по дължината на тялото) се дава от формулата:

$$L_{\|} = L_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \qquad (15.6)$$

Ако тази формула се приложи за интерферометъра на Майкелсон—Морли, разстоянието от B до C ще остане предишното, а разстоянието от B до E ще се съкрати до $L\sqrt{1 - u^2/c^2}$. По такъв начин уравнението (15.5) не ще се измени, но L в уравнението (15.4) ще се измени в съответствие с (15.6). В резултат ще получим:

$$t_1 + t_2 = \frac{(2L/c)\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - u^2/c^2} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \qquad (15.7)$$

Като сравняваме това с (15.5), ние виждаме, че сега $t_1+t_2=2t_3$. И така, ако приборът действително се скъсява така, както предположихме, става ясно защо опитът на Майкелсон—Морли не е дал никакъв ефект.

Макар че хипотезата за съкращаването успешно обяснявала отрицателния резултат от опита, тя сама се оказала беззащитна пред обвинението, че единствената ѝ цел е да се избави от трудности в обяснението на опита. Тя била извънредно изкуствена. Обаче аналогични трудности възниквали и в другите опити по откриване на етерния вятър. В края на краищата започнало да изглежда, че природата е встъпила в „заговор" срещу човека, че тя е прибягнала до конспирация и непрестанно въвежда някакви нови явления, за да сведе до нула всяко явление, с помощта на което човек се опитва да измери u.

И най-сетне било признато (върху това обърнал внимание Поанкаре), че *пълната конспирация представлява закон на природата!* Поанкаре предположил, че в природата *има закон*, заключаващ се в това, че не може да се установи етерният вятър по никакъв начин, т. е. абсолютната скорост е невъзможно да бъде определена.

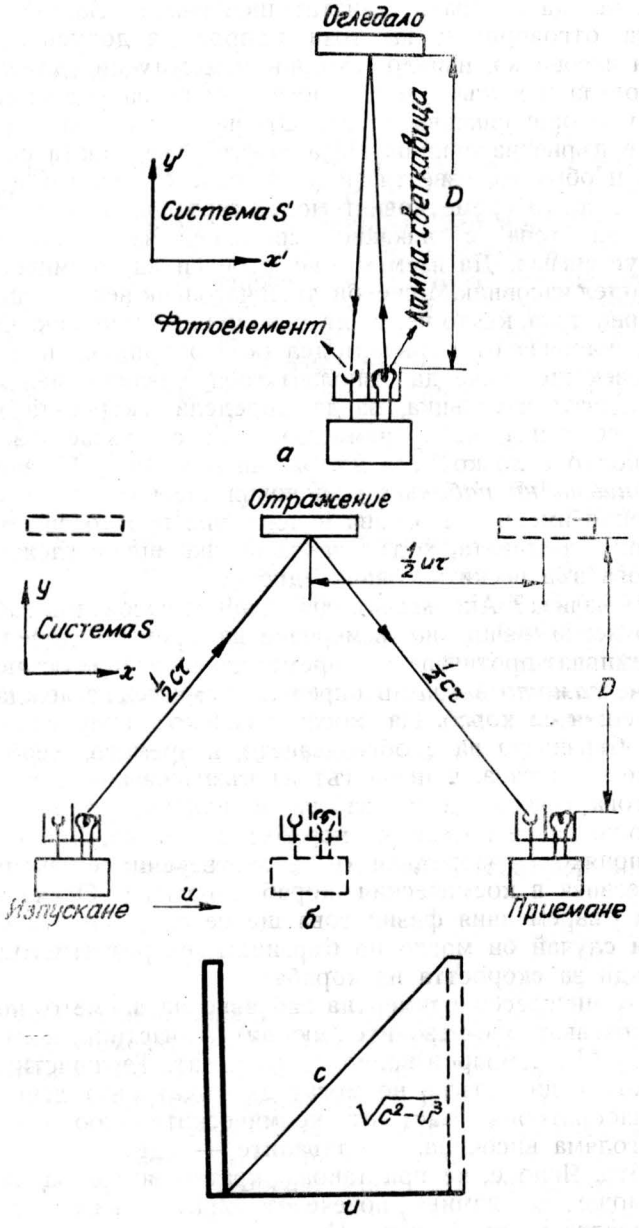
4. Трансформация на времето

При проверката, съгласува ли се идеята за скъсяване на разстоянията с фактите, открити в други опити, се оказва, че действително всичко се съгласува само ако считаме, че времето също се трансформира и при това така, както е изразено в четирите уравнения (15.3). По тази причина времето t_3, което светлината изразходва за пътешествие от B до C и обратно, се оказва не еднакво, ако го изчислява човек, правещ този опит в движещия се междупланетен кораб, или неподвижен наблюдател, който отстрани следи този кораб. За първия времето t_3 е равно на $2L/c$, а за втория то е равно на $2L/c\sqrt{1-u^2/c^2}$ [уравнение (15.5)]. С други думи, ако вие наблюдавате отстрани как космонавтът запалва цигара, ще ви изглежда, че той прави това по-бавно, отколкото обикновено, макар сам той да счита, че всичко става в нормално темпо. Значи не само дължините трябва да се скъсяват, но и приборите за измерване на времето („часовниците") трябва да забавят своя ход. Другояче казано, когато часовниците на космическия кораб отчитат, по мнение на космонавта, 1 s, то, по мнение на външния наблюдател, ще премине $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ s.

Забавянето на хода на часовниците в движещата се система е твърде своеобразно явление и заслужава да го поясним. За да се разбере то, нека проследим какво става с часовниковия механизъм, когато часовникът се движи. Тъй като това е твърде сложно, то най-добре е часовникът да бъде избран по-прост. Нека това бъде прът (с еднометрова дължина) с огледала на двата края. Ако пуснем светлинен сигнал между огледалата, той безкрайно ще пробягва оттук—там, а часовникът ще тик-така всеки път, когато светлината достигне долния край. Конструкцията е достатъчно глупава, но по принцип такъв часовник е възможен. И ето ние ще приготвим два такива часовника с пръти с еднаква дължина и ще синхронизираме техния ход, като ги пуснем едновременно; ясно е, че те винаги ще вървят еднакво: нали дължината на прътите е една и съща, а скоростта на светлината c — също. Да дадем единия часовник на космонавта; нека той го вземе със себе си на междупланетния кораб и да го постави напречно на посоката на движението, тогава дължината на пръта няма да се измени. Да, но откъде знаем, че напречната дължина не се променя? Наблюдателят може да се уговори с космонавта, че на височина y в онзи момент, когато прътовете се изравнят, всеки ще направи знак върху пръта на другия. От симетрията следва, че бележките ще се нанесат на същите координати y и y', в противен случай единият знак ще се окаже по-

ниско или по-високо от другия и, като ги сравним, ще можем да кажем кой от тях се е движил всъщност.

И така, какво става с движещия се часовник? Близайки на борда на кораба, космонавтът се е убедил, че това е напълно приличен стандартен часовник и нищо особено в неговото поведение в кораба той не е забелязал. Ако той беше забелязал нещо, веднага би разбрал, че се движи; ако макар нещичко се променя в резултат на движението, то ясно е, че той се движи. Принципът на относителността твърди, че в равномерно движеща се система това е невъзможно; следователно с часовника не са станали никакви изменения. От друга страна, когато външният наблюдател погледне на прелитащия покрай него часовник той ще види, че светлината, пробягвайки от огледало до огледало, всъщност се движи със



Фиг. 15.3. Опит със „светлинен часовник".
а — „светлинният часовник" е в покой в системата S'; b — същият часовник се движи през системата S; с—диагоналът, по който се движи светлинният сноп в движещия се „светлинен часовник"

зигзаги, защото пътят през цялото време се премества настрани. Ние вече анализирахме такова зигзагообразно движение във връзка с опита на Майкелсон—Морли. Когато за дадено време пътят се отмести на разстояние, пропорционално на u (фиг. 15.3), разстоянието, преминато за същото време от светлината, ще бъде

пропорционално на c и затова разстоянието по вертикалата е пропорционално на $\sqrt{c^2-u^2}$.

Значи, на светлината ще ѝ е необходимо *повече време*, за да премине движещия се прът от край до край — повече, отколкото когато прътът е неподвижен. Затова видимият интервал от време между тик-таканията на движещия се часовник ще се удължи в същата пропорция, в която хипотенузата на триъгълника е по-дълга от катета (поради това именно във формулата се появява коренът). От рисунката също се вижда, че колкото u е по-голямо, толкова е по-силно видимото забавяне на хода на часовника. Не само този часовник ще започне да изостава, но (само ако теорията на относителността е вярна!) всеки часовник, основаващ се на какъв да е принцип, също трябва да изостава, при това в същото отношение. За това може да се гарантира, без да се прави по-нататъшен анализ. Защо?

За да отговорим и на този въпрос, да допуснем, че имаме още два часовника, изцяло сходни помежду си, да кажем, със зъбни колела и камъни, или основаващи се на радиоактивно разпадане, или още някакви други. Отново съгласуваме техния ход с нашите първи часовници. Нека докато светлината се разхожда до края и обратно, известявайки за своето пристигане с тик-такане, за същото време новият модел завърши своя цикъл и също извести за това с някакво светване, звън или какъвто и да е друг сигнал. Да вземем със себе си на космическия кораб новия модел часовник. Може би този часовник вече не ще изостане, а ще върви така, както неговият неподвижен двойник. О, не! Ако той се отклонява от първия модел (който също се намира на кораба), човек ще може да използва това различие между показанията на двата часовника, за да определи скоростта на кораба. А нали се счита, че е немислимо да се узнае тази скорост. Вижте колко е ловко! *На нас не ни е нужно да знаем нищо за механизма на работата* на новия часовник, не е нужно да знаем какво именно се забавя в него, ние просто знаем, че каквато и да е причината, ходът на часовника ще изглежда забавен и при това във всеки часовник еднакво.

Какво излиза? Ако *всички* движещи се часовници забавят своя ход, ако всеки начин на измерване на времето довежда до забавен темп на протичане на времето, на нас ни остава само да кажем, че *самото време*, в определен смисъл, изглежда забавено на движещия се кораб. На кораба всичко: и пулсът на космонавта, и бързината на съобразяването, и времето, необходимо за запалване на цигара, и периодът на възмъжаване и остаряване — всичко това трябва да се забави в еднаква степен, тъй като иначе може да се познае, че корабът се движи. Биолозите и медиците понякога говорят, че те не са уверени, че раковият тумор ще се развива в космическия кораб по-дълго. Обаче от гледна точка на съвременния физик това ще се случи почти сигурно; в противен случай би могло по бързината на развитието на тумора да се съди за скоростта на кораба!

Много интересен пример на забавяне на времето при движение ни показват мю-мезоните (мюони) — частици, които средно след $2{,}2.10^{-6}$ s самопроизволно се разпадат. Те пристигат на Земята с космичните лъчи, но могат да бъдат създадени и изкуствено в лаборатория. Част от космическите мюони се разпада още на голяма височина, а останалите — едва като се спрат във веществото. Явно е, че при такова кратко време на живот мюонът не може да измине повече от 600 m, даже ако се движи със скоростта на светлината. Но макар че мюоните възникват на горните граници на атмосферата, приблизително на височина 10 km и по-нагоре, все пак ги откриваме в земните лаборатории сред космическите лъчи. Как е възможно това? Отговорът се съдържа в това, че разните мюони летят с различни скорости, понякога твърде близки до скоростта на светлината. От тяхна собствена гледна точка те живеят всичко около 2 μs, а пък от наша — техният жизнен път е несравнено по-дълъг, достатъчно дълъг, за да достигнат повърхността на Земята. Техният живот се уве-

личава $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ пъти. Средното време на живот на мюоните с различни скорости било точно измерено, при което получената стойност се съгласува добре с формулата.

Ние не знаем защо мезонът се разпада и какъв е неговият вътрешен механизъм, но затова пък знаем, че поведението му удовлетворява принципа на относителността. С това е и полезен този принцип — той позволява да се правят предсказвания даже за неща, за които по друг път узнаваме малко. Например ние все пак можем да предскажем, че, ако скоростта на мезона представлява 9/10 от скоростта на светлината, видимата продължителност на отредения му жизнен срок ще бъде равна на $2{,}2 \cdot 10^{-6}/\sqrt{1-9^2/10^2}$ s, макар че нямаме каквато и да е представа за причините на разпадането на мезона. И това предсказание се сбъдва. Наистина не е лошо, нали?

5. Лоренцово скъсяване

Сега ние ще се върнем към Лоренцовите трансформации (15.3) и ще се опитаме по-добре да разберем връзката между координатните системи (x, y, z, t) и (x', y', z', t'). Ще ги наричаме системи S и S' или съответно системи на Джо и на Мик. Ние вече отбелязахме, че първото уравнение се основава на предположението на Лоренц, че по направление x всички тела се свиват. Как може да се докаже, че действително има такова скъсяване? Ние вече разбираме, че в опита на Майкелсон—Морли по принципа на относителността *напречното* рамо BC не може да се скъси; в същото време нулевият резултат от опита изисква *времената* да са равни. За да се получи такъв резултат, се налага да се допусне, че надлъжното рамо BE изглежда свито в отношение $\sqrt{1-u^2/c^2}$. Какво означава това скъсяване на езика на Джо и на Мик? Да допуснем, че Мик, движейки се със системата S' в направление x', измерва с метрова линийка координатата x' в някоя точка. Той налага линията x' пъти и мисли, че разстоянието е равно на x' m. От гледна точка на Джо (в системата S) линийката в ръцете на Мик е скъсена, а „всъщност" отмереното от него разстояние е равно на $x'\sqrt{1-u^2/c^2}$ m. Затова ако системата S' се отдалечава от системата S на разстояние ut, то наблюдателят в системата S трябва да каже, че тази точка (в неговите координати) е отдалечена от началото на $x = x'\sqrt{1-u^2/c^2} + ut$ или

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Това е първото уравнение от Лоренцовите трансформации.

6. Едновременност

По подобен начин поради различието в мащабите на времето се появява и знаменателят в уравнението (15.3 г) в Лоренцовите трансформации. Най-интересното в това уравнение е новият и неочакван член в числителя, членът ux/c^2. Какъв е неговият смисъл? Като вникнем внимателно в положението на нещата, можем да разберем, че събитията, ставащи, по мнението на Мик (наблюдателя в системата S'), в различни места едновременно, от гледна точка на Джо (в системата S) съвсем *не са* едновременни. Когато едно събитие се случи в точката x_1 в момента t_0, а друго — в точката x_2 в същия момент t_0, то съответните моменти t_1' и t_2' се различават с

$$t_2' - t_1' = \frac{u(x_1-x_2)/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Това явление може да се нарече „нарушаване едновременността на отдалечените събития". За да го поясним, ще разгледаме следния опит.

Нека човек, движещ се в космическия кораб (системата S'), постави в двата края на кораба часовници. Той иска да знае еднакво ли вървят те. Как да синхронизира хода на часовниците? Това може да се направи по различни начини. Ето един от способите, той почти не изисква пресмятания. Да се разположим точно някъде по средата между часовниците. От тази точка ще изпратим в две посоки светлинни сигнали. Те ще се движат в двете направления с еднаква скорост и ще достигнат двата часовника в едно и също време. Ето това едновременно пристигане на сигналите може да се използва за съгласуване на хода. Да допуснем, че човекът в S' по такъв начин съгласува хода на часовниците. Да видим ще се съгласи ли наблюдателят в системата S, че тези часовници вървят еднакво. Космонавтът в системата S' има право да вярва, че техният ход е еднакъв; нали той не знае, че се движи. Но наблюдателят в системата S веднага ще разсъди, че тъй като корабът се движи, часовникът на носа на кораба ще се отдалечи от светлинния сигнал и светлината ще трябва да премине повече от половината от дължината на кораба, преди да достигне часовника; часовникът на кърмата, обратно, се движи към светлинния сигнал — значи неговият път се скъсява. Затова сигналът, първо, ще дойде до часовника на кърмата, макар че на космонавта в системата S' му се струва, че сигналите са достигнали до двата часовника едновременно. И така, излиза, че когато космонавтът счита, че събитията в две места на кораба са станали едновременно (при една и съща стойност t' в неговата координатна система), то в другата координатна система на *еднаквите* t' отговарят *различни* стойности t!

7. Четиривектори

Какво още може да се открие в Лоренцовите трансформации? Любопитно е, че в тях преобразованието на x и t по форма прилича на преобразованието на x и y, изучено от нас в глава 11, когато говорехме за въртене на координатите. Тогава получихме:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta,$$
$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta, \qquad (15.8)$$

т. е. новото x' смесва старите x и y, и y' също ги смесва. По подобен начин в Лоренцовите трансформации новото x' е смес на старите x и t, а новото t' — смес от t и x. Значи Лоренцовите трансформации приличат на въртенето, но „въртене“ в *пространството и времето*. Това е твърде странно понятие. Аналогията с въртенето може да се провери, като се изчисли величината:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2. \qquad (15.9)$$

В това уравнение трите първи члена във всяка страна представляват в тримерната геометрия квадрата на разстоянието между точката и началото на координатите (сфера). Той не се променя (остава инвариантен) при въртенето на координатните оси. По аналогичен начин уравнението (15.9) свидетелствува за това, че съществува определена комбинация от координатите и времето, която остава инвариантна при Лоренцовите трансформации. Значи съществува пълна аналогия с въртенето; тази аналогия е от такъв характер, че векторите, т. е. величините, съставени от „компоненти“, които се преобразуват по същия начин, както и координатите и времето, се оказват полезни и в теорията на относителността.

И така ние ще разширим понятието вектор. Досега за нас той можеше да има само пространствени компоненти. Сега ще включим в това понятие и временната компонента, т. е. очакваме, че съществуват вектори с четири компоненти: три от тях приличат на компонентите на обикновения вектор, а към тях е прибавена четвърта — аналог на времето.

В следващите глави ще анализираме това понятие. Ние ще видим, че ако идеите на този параграф се приложат към импулса, трансформацията ще даде три пространствени компоненти, подобни на обикновените компоненти на импулса, и четвъртата компонента — временна част (която не е нищо друго освен *енергия*).

8. Релативистична динамика

Сега ние сме готови да изследваме от по-обща гледна точка как Лоренцовите трансформации изменят законите на механиката. (Досега ние само обяснявахме как се изменят дължините и времената, но не обяснихме как се получава изменената формула за m, уравнение (15.1). Това ще бъде направено в следващата глава). Изучаването на следствията от формулата на Айнщайн за масата m в Нютоновата механика ние ще започнем от закона за силата. Силата, това е бързината на изменение на импулса, т. е.

$$\mathbf{F}=\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}.$$

Импулсът, както и по-рано, е равен на mv, но сега

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}=\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (15.10)$$

Това са законите на Нютон, както са записани от Айнщайн. При това видоизменение, ако действието и противодействието както и и по-рано са равни (макар и не във всеки момент, но в крайна сметка след осредняване по времето), импулсът трябва да се запазва, както и преди, но запазващата се величина е вече не старото $m\mathbf{v}$ при постоянно m, а изразът (15.10) с променлива маса. С такова изменение във формулата на импулса запазването на импулса ще съществува, както и преди.

Да разгледаме сега как импулсът зависи от скоростта. В Нютоновата механика той е пропорционален на скоростта. В релативистичната механика в голям интервал от скорости (много по-малки от c), те също са приблизително пропорционални [виж (15.10)], защото коренът малко се различава от единица. Но когато v е почти равно на c, коренът е почти равен на нула, и затова импулсът безкрайно расте.

Какво става, когато на тялото дълго време действува постоянна сила? В механиката на Нютон скоростта на тялото непрекъснато ще расте и може даже да превиши скоростта на светлината. В релативната механика това е невъзможно. В теорията на относителността безкрайно расте не скоростта на тялото, а неговият импулс, и това нарастване се отразява не върху скоростта, а върху масата на тялото. С времето ускорението, т. е. изменението в скоростта, практически изчезва, но импулсът продължава да расте. Тъй като силата довежда до много малки изменения в скоростта на тялото, естествено считаме, че тялото има грамадна инерция. Но точно същото твърди и релативистката формула (15.10) за масата на тялото; тя показва, че инерцията е много голяма, когато v е почти равно на c. Да разгледаме пример. За да се отклонят бързи електрони в синхротрона на Калифорнийския технологически институт, е необходимо магнитно поле 2000 пъти по-силно, отколкото следва от Нютоновите закони. С други думи, масата на електрона в синхротрона е 2000 пъти по-голяма от неговата нормална маса, като достига масата на протона! Ако m е 2000 пъти по-голяма от m_0, то $1-v^2/c^2$ е равно на 1/4 000 000, или v се различава от c с 1/8 000 000, т. е. скоростта на електроните плътно се приближава до скоростта на светлината. Ако електроните и светлината едновременно се насочат в съседната лаборатория (намираща се, да кажем, на 200 m), кой ще пристигне пръв? Ясно е, че светлината: тя винаги се

движи по-бързо.[1] Но колко по-бързо? Трудно е да се каже колко по-рано във времето, но затова може да се каже на какво разстояние ще изостанат електроните: на 1/30 mm, т. е. на 1/3 от дебелината на този лист хартия. Масата на електроните в тези състезания е чудовищна, а скоростта им не е по-голяма от скоростта на светлината.

Нека сега разгледаме някои други следствия от релативисткото нарастване на масата. Да разгледаме движението на молекулите на газа в балон. Ако газът се нагрее, скоростта на молекулите ще нарасне, а заедно с нея и масата им. Газът ще стане по-тежък. Но с колко?

Разлагайки $m_0(\sqrt{1-v^2/c^2}) = m_0(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ в ред по формулата на Нютоновия бином, може да се намери приблизително нарастването на масата при малки скорости. Получава се:

$$m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots+\right).$$

От формулата е ясно, че при малки v редът е бързо сходящ и първите два-три члена тук са напълно достатъчни. Значи може да се напише:

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right), \tag{15.11}$$

където вторият член изразява нарастването на масата за сметка на повишаване на скоростта. Когато температурата расте, v^2 расте в същата степен, значи увеличението на масата е пропорционално на повишението на температурата. Но $1/2\ m_0v^2$ е кинетична енергия в старомодния, Нютонов, смисъл на тази дума. Значи, може да се каже, че нарастването на масата на газа е равно на нарастването на кинетичната енергия, делено на c^2, т. е.

$$\Delta m = \Delta(\text{кин. ен.})/c^2.$$

9. Еквивалентност на масата и енергията

Това наблюдение довело Айнщайн до предположението, че масата на тялото може да се изрази по-просто, отколкото във формула (15.1), ако се каже, че масата е равна на пълното количество енергия, съдържащо се в тялото, делено на c^2. Ако (15.11) се умножи на c^2, се получава:

$$mc^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \cdots \tag{15.12}$$

Тук лявата част дава пълната енергия на тялото, а в последния член отдясно ние познаваме обикновената кинетична енергия. Айнщайн осмислил първия член отдясно (много голямото постоянно число m_0c^2) като част от пълната енергия на тялото, а именно като негова вътрешна енергия, или „енергия на покоя".

До какви следствия ще достигнем, ако заедно с Айнщайн предположим, че *енергията на тялото винаги е равна на* mc^2? Тогава ние ще можем да изведем формула (15.1) за зависимостта на масата от скоростта, онази същата, която досега ние приемахме на вяра. Нека тялото най-напред е в покой, притежавайки енергия m_0c^2. След това ние прилагаме към тялото сила, която го отмества от мястото му и му доставя кинетична енергия; започне ли енергията да расте, започва да расте и масата (всичко това се съдържа в първоначалното предположение). Докато силата действува, енергията и масата продължават да растат. Ние вече видяхме (виж глава 13), че бързината на нарастването на енергията с времето е равна на произведението от силата и скоростта:

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F}.\ \mathbf{v}. \tag{15.13}$$

[1] Наистина *видимата* светлина ще загуби надбягването поради пречупването във въздуха, а γ-излъчването несъмнено ще го спечели.

Освен това $\mathbf{F}=d(m\mathbf{v})/dt$ [вж. гл.9, уравнение (9.1)]. Като свържем всичко това с определението на E и като го заместим в (15.13), ще получим:

$$\frac{d(mc^2)}{dt}=\mathbf{v}.\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}. \tag{15.14}$$

Ние искаме да решим това уравнение относно m. За тази цел първо ще използуваме математически трик, като умножим двете части на 2 m. Уравнението ще се превърне в:

$$c^2(2m)\frac{dm}{dt}=2m\mathbf{v}\,\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}. \tag{15.15}$$

Сега трябва да се избавим от производните, т. е. да интегрираме двете части на равенството. Във величината $(2m)dm/dt$ може да се види производната от m^2 по времето, а в $(2m\mathbf{v}).d(m\mathbf{v})/dt$ — производната по времето от (mv^2). Следователно (15.15) съвпада със

$$c^2\frac{d(m^2)}{dt}=\frac{d(m^2v^2)}{dt}. \tag{15.16}$$

Когато производните на две величини са равни, самите величини могат да се отличават с не повече от една константа C. Това ни позволява да напишем:

$$m^2c^2=m^2v^2+C. \tag{15.17}$$

Да определим сега константата C явно. Тъй като уравнението (15.17) трябва да се изпълнява при всякакви скорости, може да се вземе $v=0$ и да се означи в този случай масата с m_0. Заместването на тези числа в (15.17) ни дава:

$$m_0^2c^2=0+C.$$

Тази стойност на C може да се замести в уравнение (15.17). То добива вида:

$$m^2c^2=m^2v^2+m_0^2c^2. \tag{15.18}$$

Да разделим на c^2 и да пренесем членовете с m в лявата страна:

$$m^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=m_0^2,$$

откъдето:

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{15.19}$$

Това е формулата (15.1), т. е. тъкмо това, което е необходимо, за да има в уравнението (15.12) съответствие между масата и енергията.

В обикновени условия изменението на енергията довежда до много малки изменения на масата: почти никога не ни се отдава от дадено количество вещество да извлечем много енергия; но в атомната бомба с енергия на взрива, еквивалентна на 20 000 тона тринитротолуол, всичката пепел, която пада след взрива, е с 1 g по-лека от първоначалното количество на разпадащия се материал. И това е защото се е отделила енергия, която е имала маса 1 g, в съответствие с формулата $\Delta E=\Delta(mc^2)$.

Изводът за еквивалентността на масата и енергията се потвърди прекрасно в опитите по анихилация на материята — превръщането на веществото в енергия. Електронът и позитронът могат да взаимодействуват в покой, като всеки има маса в покой m_0. При приближаването си те изчезват, а вместо тях се излъчват два γ-лъча, всеки отново с енергия m_0c^2. Този опит направо ни говори за големината на енергията, свързана със съществуването на маса в покой на частицата.

16.
Релативистична енергия и релативистичен импулс

§ 1. Относителност и „философи“

§ 2. Парадокс на близнаците

§ 3. Трансформация на скоростите

§ 4. Релативистична маса

§ 5. Релативистична енергия

§ 1. Относителност и „философи“

В тази глава ние ще продължим обсъждането на принципа на относителността на Айнщайн-Поанкаре, на неговото влияние върху нашите физически възгледи и върху целия характер на човешкото мислене.

Поанкаре формулира принципа на относителността по следния начин: „Съгласно с принципа на относителността законите за физическите явления по необходимост трябва да бъдат еднакви за неподвижния наблюдател и за наблюдателя, който прелетява с равномерно движение относно първия, така че ние нямаме и не можем да имаме никакви способи, за да различим пренася ли ни такова движение, или не ни пренася.“

Когато човечеството внезапно достигнало до тази мисъл, всред философите настъпила суматоха. Особено всред „философите на чашка чай“, които казват: „О, това е много просто: теорията на Айнщайн твърди, че всичко е относително!“ Поразително множество от такива „философи“ — и не само разсъждаващи на чашка чай (впрочем, не желаейки да ги обиждам, аз ще говоря само за „философи на чашка чай“) — твърдят: „От откритията на Айнщайн следва, че всичко е относително; това е оказало дълбоко влияние върху нашата мисъл.“ И после добавят още: „Във физиката беше доказано, че явленията зависят от отправните системи.“ Може да се чуят немалко подобни неща, но е трудно да се разбере техният смисъл. Очевидно, отправните системи, за които става дума, това са онези координатни системи, от които ние се ползвахме при анализа на теорията на относителността. И така, този факт, че „всичко зависи от отправната система“, оказва могъщо влияние върху съвременната мисъл. Остава само да се удивляваме, защо? Нали преди всичко самата идея: „всичко зависи от гледната точка“ — е толкова проста, че несъмнено нямаше нужда да се обременяваме с анализа на трудностите на физическата теория на относителността, за да я открием. Всеки, който върви по тротоара, знае, че всичко, което той вижда, зависи от неговата отправна система. В началото той вижда лицата на минувачите, а едва после техните тилове. И почти във всички философски заключения, за които казват, че произтичат от теорията на относителността, няма нищо по-дълбоко, отколкото в твърдения от типа: „Пешеходецът изглежда различно отпред и отзад.“ Известният разказ за няколко слепи, които спорели на какво прилича слонът, също твърде напомня теорията на относителността от гледна точка на такива философи.

Но в теорията на относителността има и нещо по-дълбоко, отколкото простото твърдение: „Човек отпред изглежда по-иначе, отколкото отзад.“ Принципът на относителността е къде-къде по-дълбок от това, нали *с негова помощ ние можем да правим определени предсказания.* Но би било повече от странно, ако само това наблюдение би ни позволило да предсказваме поведението на природата.

Има и друга школа „философи“. Те се чувствуват твърде неуютно от теорията на относителността, която заявява, че не може да се определи собствената абсолютна скорост, без да се гледа на нещо извън кораба. Те възкликват: „Напълно понятно е, че никой не може да измери своята скорост, без да гледа навън. От само себе си е очевидно, че е *безсмислено* да се говори за нечия скорост, ако не се гледа встрани. Глупци са били ония физици, които са мислили иначе. Щом ги е озарила тази

мисъл, те се зарадвали; но ако ние, философите, си представехме какви проблеми стояха пред физиците, ние отдавна бихме ги разрешили с чисто мозъчно усилие и веднага бихме разбрали, че е невъзможно да се определи колко бързо се движи някой, без да се гледа навън. И ние бихме направили грамаден принос в тази тяхна физика". Тези философи винаги тъпчат около нас, мотаят се по краищата на науката, непрекъснато стремейки се да ни съобщят нещо. Но никога всъщност те не са разбирали цялата тънкост и дълбочина на нашите проблеми.

Нашата неспособност да засечем абсолютното движение е резултат от опити, а не равносметка на плоско философствуване. Това е лесно да се поясни. Да започнем с това, че още Нютон считал, че е действително невъзможно да узнаеш своята скорост, ако се движиш праволинейно и равномерно. Нали пръв провъзгласи принципа на относителността именно Нютон (ние цитирахме неговите думи в предната глава). Защо тогава в онези Нютонови времена философите не вдигаха такъв шум за това, че „всичко е относително" и тъй нататък и тем подобни? Защото, докато Максвел не разви своята електродинамика, съществуваха физически закони, позволяващи да се твърди, че е възможно да се измери собствената скорост, даже и без да погледнеш навън; но скоро след Максвел *експериментално* беше установено, че това е невъзможно.

А сега кажете *наистина* ли от философска гледна точка е абсолютно невъзможно да знаеш своята скорост, без да се оглеждаш встрани? Едно от следствията на теорията на относителността беше развитието на философия, която твърди: „Може да се определи само това, което се подава на измерване! Тъй като е ясно, че не може да се измери скоростта, без да се знае спрямо какво тя се измерва, естествено е, че понятието абсолютна скорост е *лишено от смисъл*. Физиците са длъжни да разберат, че може да се говори само за това, което се подава на измерване." Но точно *в това е целият въпрос:* да се каже можем ли *да определим* абсолютната скорост — това е все едно да се реши може ли или не може някой да открие чрез експеримент дали той се движи, или не. С други думи, не може *априори* да се твърди, че нещо е измеримо, а нещо не е, това решава не разсъждението, а експериментът. Малко философи ще се намерят, които хладнокръвно да обявят за очевидно, че ако скоростта на светлината вътре в автомобила е равна на 300 000 km/s, а скоростта на самия автомобил достига 100 000 km/s, то светлината преминава покрай наблюдателя на пътя също със скорост 300 000 km/s. За тях това е потресаващ факт; даже онези от тях, за които относителността се разбира от само себе си, откриват, когато им изнесете конкретния факт, че това съвсем не е толкова очевидно.

И най-сетне има даже „философи, които твърдят, че въобще не сме в състояние да открием никакво движение, ако не гледаме навън. А това вече е просто невярно. Действително не може да се забележи *равномерно* движение по *права* линия, но ако цялата стая се *върти*, ние определено бихме знаели за това, защото всичко в нея би се разлетяло към стените — биха се наблюдавали „центробежни" ефекти от всякакъв род. Този факт, че Земята се върти около своята ос, може да се открие без да се гледат звездите, да кажем, с помощта на тъй нареченото махало на Фуко. Следователно не е вярно, че „всичко е относително"; не може да се открие само *равномерното движение,* без да се поглежда навън. Равномерното *въртене* около фиксирана ос *може* да се открие. А когато вие кажете това на философа, той много ще се огорчи — че по-рано не го е разбирал: на него, виждате ли, му е изглеждало, че просто е невъзможно да се установи въртенето около оста, без да се наблюдава външният свят. Наистина, ако той е достатъчно съобразителен, след известно време може да се върне и да заяви: „Разбрах! Всъщност никакво абсолютно въртене не съществува. Виждате ли, ще каже той, всъщност ние се въртим спрямо звездите. И вследствие на ня-

какво неизяснено влияние, оказвано на тялото от звездите, възниква центробежната сила."

Но ако се съди по всичко, което знаем, това е вярно; понастоящем ние нямаме начин да разберем би ли съществувала центробежната сила, ако нямаше звездите и мъглявините. Не е в нашите сили да направим такъв експеримент — да отстраним всички мъглявини, а след това да измерим нашето въртене; значи тук ние нищо не можем да знаем. Ние трябва да допуснем, че философът може да се окаже прав. Тогава той разцъфтява от удоволствие и изрича: „И въобще съвършено необходимо е всичко в света в крайна сметка да се подчинява на този принцип: *абсолютното* въртене е нещо безсмислено, може да се говори само за въртене *относно* мъглявините." И на това място ние ще му отговорим: „А тогава кажи, приятелю мой, от само себе си или не от само себе си се разбира, че равномерното движение по права линия *относно мъглявините* не трябва никак да се чувствува вътре в автомобила?" И сега, когато движението вече не е абсолютно, когато то става движение *относно* мъглявините, въпросът се оказва тъмен и на него може да се отговори само с помощта на експеримент.

Но *в какво* в такъв случай са се изразили философските влияния на теорията на относителността? Какви *нови идеи и предложения* внуши на физиците принципът на относителността? Ако се ограничим само с този род влияния, можем да ги опишем по следния начин. Първото откритие по същество се състои в това, че даже онези идеи, които вече твърде дълго се задържат и са много точно проверени, могат да се окажат погрешни. Какво голямо сътресение беше това, да се открие, че законите на Нютон са неверни и всичко това след като през всичките години те изглеждали точни! Сега, разбира се, е ясно, че не опитите са били неправилни, а просто всички те са извършвани в твърде ограничен интервал от скорости — толкова тесен, че релативистичните ефекти е било невъзможно да се забележат. И все пак сега ние се вглеждаме в нашите закони на физиката значително по-смирено — нали всеки от тях може да се окаже погрешен!

Второ, ако възникнат някакви „странни" идеи от рода на тази, че когато вървиш, времето се движи по-бавно и т. н., тогава е неуместен въпросът: *харесва* ли ви това? Единствено уместен тук е друг въпрос: съгласуват ли се тези идеи с това, което показва опитът? Иначе казано, „странните идеи" трябва да бъдат в съгласие само с *експеримента*. Единственото основание, по което ние трябва да обсъждаме поведението на часовниците и т. н., се състои в следното: ние трябва да докажем, че, макар и определението на удължението на времето да е твърде странно, то *напълно се съгласува* с нашия начин за измерване на времето.

И най-сетне, теорията на относителността ни подсказа още нещичко; може би това е чисто технически съвет, но той се оказа извънредно полезен при изучаване на другите физически закони. Съветът се състои в това, че трябва да се обръща *внимание на симетрията на законите* или, по-определено, да се търсят начини, с помощта на които законите могат да се преобразуват, като се запазва при това тяхната форма. Когато обсъждахме теорията на векторите, ние отбелязахме, че основните закони на движението не се променят, когато по особен начин променяме пространствените и временни променливи (ползваме се от Лоренцовите трансформации). Идеята да се изучават операции, при които основните закони не се променят, се оказа действително много полезна.

2. Парадокс на близнаците

За да продължим нашето изучаване на Лоренцовите трансформации и релативистичните ефекти, ще разгледаме известния „парадокс" — парадоксът на близнаците, да кажем, Петер и Паул, родени в едно и също време. Като пораснал, Паул излита с

космически кораб с много голяма скорост. Петер остава на Земята. Той вижда, че Паул се носи с огромна скорост и му изглежда, че часовникът на Паул забавя своя ход, сърцето на Паул бие по-рядко, мислите му текат по-лениво. От гледна точка на Петер всичко замира. А самият Паул, разбира се, нищо такова не забелязва. Но когато след дълги странствувания се връща на Земята, той ще се окаже по-млад от Петер! Вярно ли е това? Да, това е едно от онези следствия на теорията на относителността, които ясно се демонстрират. Мю-мезоните живеят по-дълго, ако се движат; така и Паул ще преживее по-дълго, ако се движи. Това явление наричат „парадокс" само онези, които считат, че принципът на относителността утвърждава относителност на *всяко движение*. Те възкликват: „Хе-хе-хе. А не можем ли да кажем, че от гледна точка на Паул се е движел *Петер*, и че именно Петер би трябвало по-бавно да старее? От симетрията тогава следва единствено възможният извод: при срещата възрастта на двамата братя трябва да се окаже еднаква."

Но нали, за да се срещнат и да сравнят годините си, Паул трябва или да се спре в края на пътешествието и да сравни часовниците, или, още по-просто, да се върне. А да се върне може само този, който се е движил. И той знае за това, че се е движил, защото му се е наложило да завие, а при завоя на кораба са станали много необикновени неща: заработили са ракетите, предметите са се търкулили към едната стена и т. н. А Петер нищо такова не е изпитал.

Затова може да се изкаже такова правило: онзи, *който е почувствувал ускорение*, който е видял как вещите се подхлъзват към стената и т. н. — той и ще се окаже по-млад. Разликата между братята има „абсолютен" смисъл и всичко това е напълно правилно. Когато ние обсъждахме дългия живот на движещия се мю-мезон, като пример използвахме праволинейното му движение през атмосферата. Но може да се създадат мю-мезони и в лабораторията и да се заставят с помощта на магнит да се движат по кръг. И даже при такова ускорено движение те ще преживеят по-дълго, при това с толкова, с колкото и при праволинейното движение с тази скорост. Би било възможно да се опитаме да разрешим парадокса по опитен път: да сравним мю-мезонът в покой със завъртяния по кръг. Несъмнено, ще се окаже, че движещия се по кръг мю-мезон ще просъществува по-дълго. Такъв опит още никой не е поставил, но той не е и нужен, защото и така всичко прекрасно се съгласува. Разбира се, онези, които настояват, че всеки отделен факт трябва да бъде непосредствено проверен, не ще бъдат удовлетворени от това. А ние все пак уверено се заемаме да предскажем резултата от опита, в който Паул се върти по затворения кръг.

3. Трансформация на скоростите

Главното различие на принципа на относителността на Айнщайн от принципа на относителността на Нютон е в това, че законите за трансформациите, свързващи координатите и времената в системите, движещи се една спрямо друга, са различни. Правилният закон за трансформациите (от Лоренц) е такъв:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (16.1)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Тези уравнения отговарят на сравнително простия случай, когато

наблюдателите се движат един спрямо друг по общата ос x. Разбира се, възможни са и други направления на движението, но най-общата трансформация на Лоренц изглежда доста сложна: в нея са смесени всичките четири числа. Ние и занапред ще се ползваме от тази проста формула, тъй като тя съдържа в себе си всичките съществени черти на относителността.

Да разгледаме сега по-нататъшните следствия от тази трансформация. Преди всичко интересно е да се решат тези уравнения спрямо x, y, z, t. Това е система от четири линейни уравнения с четири неизвестни и можем да я решим — да изразим x, y, z, t чрез x', y', z', t'. Този резултат е интересен затова, че ни показва как системата в покой изглежда от гледна точка на „движещата се“ координатна система. Ясно е, че поради относителността на движението и постоянството на скоростта онзи, който се „движи“, може, ако пожелае, да счита себе си за неподвижен, а другия — за движещ се. А доколкото той се движи в обратната посока, ще се получи същата трансформация, но с противоположен знак на скоростта. Това е точно същото, което дава и непосредственото решаване на системата, така че всичко съвпада. Виж, ако не се съвпадаше, би имало от какво да се разтревожим!

$$x=\frac{x'+ut'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{16.2}$$

$$y=y'$$

$$z=z'$$

$$t=\frac{t'+ux'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Сега да се заемем с интересния въпрос за събиране на скоростите в теорията на относителността. Ще напомним, че първоначалната загадка се е състояла в това, че светлината преминава 300 000 km/s във всички системи, даже ако те се движат една спрямо друга. Това е частен случай от по-общата задача. Да приведем пример. Нека предметът вътре в космическия кораб се движи напред със скорост 200 000 km/s; скоростта на самия кораб е също 200 000 km/s. С каква скорост ще се премества предметът от гледна точка на външния наблюдател? Иска ти се да кажеш: 400 000 km/s, но тази цифра е вече повече от подозрителна: получава се скорост по-голяма, отколкото скоростта на светлината, а е невъзможно да си представим нещо, което се движи по-бързо от светлината.

Общата постановка на задачата е такава. Нека скоростта на тялото вътре в кораба да бъде равна на v (от гледна точка на наблюдателя на кораба), а самият кораб има скорост u спрямо Земята. Ние искаме да знаем с каква скорост v_x това тяло се движи от гледна точка на земния наблюдател. Впрочем, това също не е най-общият случай, защото движението се осъществява в направление x. Може да има формули за трансформация на скоростите в направление y или в което и да е друго; ако те са необходими, винаги можем да ги изведем. Вътре в кораба скоростта на тялото е равна на v_x'. Това означава, че преместването x' е равно на скоростта, умножена с времето:

$$x'=v_{x'}t'. \tag{16.3}$$

Остава само да се пресметне какви са за тялото стойностите на x и t от гледна точка на външния наблюдател, ако x' и t' са свързани със съотношението (16.3). Заместваме (16.3) в (16.2) и получаваме:

$$x=\frac{v_{x'}t'+ut'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{16.4}$$

Но тук x е изразено чрез t'. Скоростта от гледна точка на външния наблюдател — това е *„неговото“ разстояние*, делено на *„неговото“ време, а не на времето на другия наблюдател*!

Значи, трябва и *времето* да се пресметне от неговата позиция:

$$t=\frac{t'+u\,(v_{x'}.t')/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \qquad (16.5)$$

А сега да разделим x на t. Квадратните корени ще се съкратят и ще остане

$$v_x=\frac{x}{t}=\frac{u+v_{x'}}{1+uv_{x'}/c^2}. \qquad (16.6)$$

Това е търсеният закон: сумарната скорост не е равна на сумата от скоростите (това не може да бъде вярно и би довело до всякакви несъобразности), а е „поправена със знаменателя $1+uv/c^2$“.

Какво се получава в този случай? Нека вашата скорост вътре в кораба е равна на половината от скоростта на светлината, а скоростта на кораба също е равна на половината от скоростта на светлината. Значи и u е равно на $1/2$ c, и v е равно на $1/2$ c, но в знаменателя uv е равно на $1/4$, така че

$$v=\frac{{}^1/_2c+{}^1/_2\,c}{1+1/4}=\frac{4c}{5}.$$

По теорията на относителността излиза, че $1/2$ и $1/2$ дават не 1, а $4/5$. Неголемите скорости, разбира се, могат да се събират както обикновено, защото, докато скоростите са малки в сравнение със скоростта на светлината, за знаменателя $(1+uv/c^2)$ може да се забрави, но при големи скорости нещата са доста различни и много интересни.

Да вземем граничния случай. Да допуснем, че човекът на борда на кораба наблюдава как се разпространява светлината. Тогава $v=c$. Какво ще открие земният наблюдател? Отговорът ще бъде такъв:

$$v=\frac{u+c}{1+uc/c^2}=c\,\frac{u+c}{u+c}=c.$$

Следователно, ако нещо се движи със скоростта на светлината вътре в кораба, от гледна точка на страничния наблюдател скоростта няма да се измени, тя както по-рано ще бъде равна на скоростта на светлината. Това е много хубаво, тъй като фактически Айнщайновата теория на относителността беше призвана да опише на първо място именно този факт!

Разбира се, случва се движението на тялото да не съвпада по направление с равномерното движение на кораба. Например тялото се движи „нагоре“ със скорост v_y спрямо кораба, а корабът се движи „хоризонтално“. Като извършим същите манипулации (само че x трябва да се замени с y), получаваме:

$$y=y'=v_{y'}.t',$$

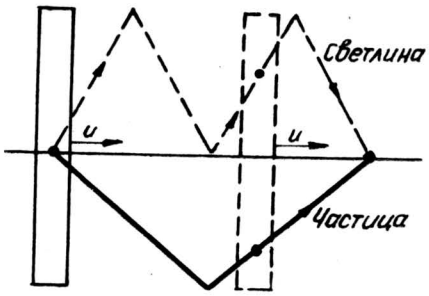
така че при $v_{x'}=0$

$$v_y=\frac{y}{t}=v_{y'}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}. \qquad (16.7)$$

И така, страничната скорост на тялото вече не е $v_{y'}$,

а $v_{y'}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$.

Този резултат ние получихме, ползвайки се от формулата за трансформацията. Но той следва и направо от принципа на относителността по следната причина (винаги е полезно да се добереш до първоначалната причина). Ние вече разсъждавахме по-рано (виж фиг. 15.3) затова как могат да работят движещите се часовници; светлината изглежда че се разпространява напреко със скорост c в неподвижната система, докато в същото време в движещата се система тя се движи вертикално със същата скорост. Ние намерихме, че *вертикалната компонента* на скоростта в неподвиж-



Фиг. 16.1. Траектории на светлинния лъч и на частица вътре в движещия се часовник

ната система е по-малка от скоростта на светлината с множителя $\sqrt{1-u^2/c^2}$ [виж уравнение (15.3)]. Нека сега материалната частица се движи в същия „часовник“ назад-напред със скорост, равна на $1/n$ от скоростта на светлината (фиг. 16.1). Докато частицата се придвижи нататък и обратно, светлината ще премине този път точно n пъти (n е цяло число). Значи, всяко тик-такане на „часовника с частицата“ съвпада с n-тото тик-такане на „светлинния часовник“. *Този факт трябва да остава верен и тогава, когато тялото се движи,* защото физическото явление на съвпадението остава съвпадение във всяка система. Тъй като скоростта c_y е по-малка от скоростта на светлината, то скоростта v_y на частицата трябва да бъде по-малка от съответната скорост в същото съотношение (с квадратния корен)! Ето защо във всяка вертикална скорост се появява коренът.

4. Релативистична маса

В предишната глава ние се запознахме с факта, че масата на тялото расте с увеличение на неговата скорост. Но никакави доказателства за това, подобни на онези разсъждения с часовниците, чрез които ние обосновахме забавянето на времето, не сме привели. Сега обаче можем да докажем, че (като следствие от принципа на относителността и други разумни съображения) масата трябва да се изменя именно по такъв начин. (Ние трябва да говорим за „други съображения“ по тази причина, че не може да се докаже нищо, не може да се надяваме на осмислени изводи, без да се опираме на някакви закони, за които се предполага, че са верни.) За да не изучаваме законите за трансформация на силите, ще се обърнем към *ударите* на частиците, където не ни е необходим законът за действие на силата, а ще е достатъчно само предположението за запазването на енергията и импулса. Освен това, ние ще предположим, че импулсът на движещата се частица е вектор, винаги насочен по нейното движение. Но ние няма да считаме импулса *пропорционален* на скоростта, както това е правил Нютон. За нас той ще бъде просто някаква *функция* на скоростта. Ние ще означаваме вектора на импулса като вектор на скоростта, умножен с някакъв коефициент

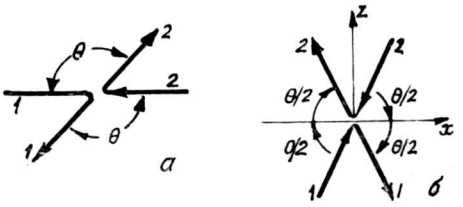
$$\mathbf{p} = m_v \mathbf{v}. \tag{16.8}$$

Индексът v в коефициента ще ни напомня, че той е функция на скоростта v. Ще наричаме този коефициент „маса“. Ясно е, че при неголеми скорости това е точно онази маса, която ние сме привикнали да измерваме. Сега, изхождайки от принципа, че законите на физиката във всички координатни системи са еднакви, ще се опитаме да покажем, че формулата за m_v трябва да има вида $m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

Нека имаме две частици (например два протона), които са съвършено еднакви помежду си и се движат една срещу друга с еднакви скорости. Техният общ импулс е равен на нула. Какво ще се случи с тях? След удара посоките на тяхното движение трябва все едно да си останат противоположни, защото ако това не е така, то техният сумарен вектор на импулса ще бъде отличен от нула, т. е. няма да се запази. Скоростите на частиците също трябва да бъдат еднакви, защото те са точно еднакви обекти; нещо повече, те просто трябва да останат предишните, иначе енергията ще се измени при удара. Значи схемата на такъв еластичен обратим удар ще изглежда както на фигура 16.2, а; всички стрелки са еднакви, всички скорости са равни. Да предположим, че такива удари винаги можем да подготвим, че при тях са допустими всякакви ъгли θ и че началните скорости на частиците могат да бъдат всякакви. По-нататък ще напомним, че един и същи удар изглежда различно в зависимост от това, как са завъртени осите. За удобство ние ще завъртим осите така, че хоризонталната ще дели наполовина ъгъла между направленията на

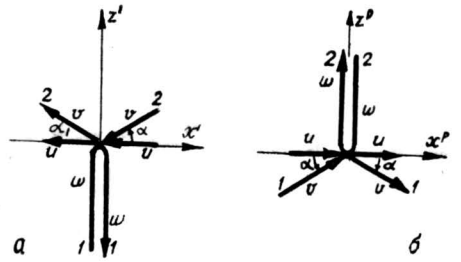
частиците до и след удара (фиг. 16. 2, б). Това е същият удар, както и на фиг. 16.2, а, но със завъртени оси.

Сега ще направим един истински трик: да погледнем на този удар от позицията на наблюдател, движещ се на лека кола със скорост, съвпадаща с хоризонталната компонента на скоростта на една от частиците. Как ще изглежда това? На наблюдателя ще изглежда, че частицата 1 се издига право нагоре (хоризонталната ѝ компонента е изчезнала), а след удара ще пада право надолу по същата причина (фиг. 16.3, а). Затова пък частицата 2 ще се движи съвсем иначе, тя ще прелети с колосална скорост и под малък ъгъл (но този ъгъл и до, и след удара ще бъде *един и същ*). Да означим хоризонталната компонента на скоростта на частицата 2 с u, а вертикалната скорост на частицата 1 — с w.



Фиг. 16.2. Еластичен удар между еднакви обекти, движещи се с равни скорости в противни посоки, при различен избор на координатната система

На какво е равна вертикалната скорост $u\mathrm{tg}\alpha$ на частицата 2? Ако се знае това, може да се получи правилен израз за импулса, ползвайки се от запазването на импулса във вертикално направление. Очевидно е, че запазването на хоризонталната компонента на импулса е обезпечено: при двете частици до и след удара тази компонента е еднаква, а при частицата 1 тя въобще е равна на нула. Така че следва да изискваме да се запази само вертикалната скорост $u\mathrm{tg}\alpha$. Но вертикалната скорост *може* да се получи, просто като погледнем на този удар от друга гледна точка! Погледнете на удара, изобразен на фиг. 16.3,а, от леката кола, която се движи сега наляво със скорост u. Вие ще видите същия удар, но обърнат „нагоре с краката“ (фиг. 16. 3, б). Сега вече частицата *2* ще падне и ще отскочи със скорост w, а хоризонтална скорост u ще придобие частицата *1*. Разбира се, вие вече се досещате на какво е равна хоризонталната скорост $u\,\mathrm{tg}\alpha$; тя е равна на $w\sqrt{1-u^2/c^2}$ (вж. уравнение 16. 7). Освен това на нас ни е известно, че изменението на вертикалния импулс на вертикално движеща се частица е равно:



Фиг. 16.3. Още две картини за същия удар (от движещи се автомобили)

$$\Delta p = 2m_w w$$

(тук пишем двойката, защото движението нагоре е преминало в движение надолу). Частицата, движеща се косо, има скорост равна на v, нейните компоненти са равни на u и $w\sqrt{1-u^2/c^2}$, а масата ѝ е m_v. Изменението на *вертикалния* импулс на тази частица е $\Delta p' = 2m_v w\sqrt{1-u^2/c^2}$, тъй като в съответствие с нашето предположение (16.8) всяка компонента на импулса е равна на произведението от едноименната компонента на скоростта и масата, отговаряща на тази скорост. Но сумарният импулс е равен на нула. Значи и вертикалните импулси трябва взаимно да се унищожат; отношението на масата, движеща се със скорост w, към масата, движеща се със скорост v, трябва да бъде равно на:

$$\frac{m_w}{m_v} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}. \qquad (16.9)$$

Да преминем към граничния случай, когато w клони към нула. Ясно е, че при много малки w величините v и u практически ще съвпаднат, $m_w \to m_0$, а $m_v \to m_u$. Окончателният резултат е такъв:

$$m_u = \frac{m_o}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \qquad (16.10)$$

Направете сега следното интересно упражнение: проверете ще се изпълнява ли условието (16.9) при произволни w, когато масата се подчинява на формулата (16.10). При това скоростта v в уравнението (16.9) може да се намери от правоъгълния триъгълник

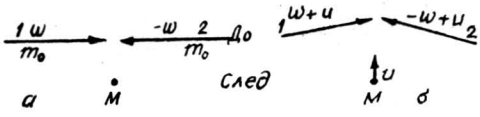
$$v^2 = u^2 + w^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right).$$

Вие ще видите, че (16.9) се изпълнява тъждествено, макар че по-горе ни потрябва само границата на това равенство при $w \to 0$.

Сега да преминем към по-нататъшните следствия, считайки

вече, че съгласно (16.10) масата зависи от скоростта. Да разгледаме така наречения *нееластичен удар*. За простота ще предположим, че от две еднакви тела, с равни скорости w, се образува при удара ново тяло, което повече не се разпада (фиг. 16.4, а). Масите на телата до удара, както знаем, са равни на $m_0/\sqrt{1-w^2/c^2}$. Като предположим запазването на импулса и като приемем принципа на относителността, можем да демонстрираме интересно свойство на масата на новообразуваното тяло. Да си представим безкрайно малка скорост, напречна към скоростите w (би било възможно да работим и с крайна скорост u, но с безкрайно малка стойност на u е по-лесно да се оправим във всичко), и да разгледаме този удар, движейки се в асансьор със скорост — u. Пред нас ще се окаже картината, изобразена на фиг. 16.4, а. Съставното тяло притежава неизвестна маса M. Тялото 1, както и тялото 2, има компонента на скоростта u, насочена нагоре, и хоризонтална компонента, практически равна на w. След удара остава масата M, движеща се нагоре със скорост u, много по-малка и от скоростта на светлината, и от скоростта w. Импулсът трябва да остане предишният; затова да разгледаме какъв е бил той до удара и какъв е станал след това. До удара той е бил равен на $p \approx 2m_w u$, а след това е станал $p' = M_u u$. Но M_u поради малката стойност на u всъщност съвпада с M_0. Поради запазването на импулса

$$M_0 = 2m_w. \tag{16.11}$$



Фиг. 16.4. Две картини на нееластичен удар между тела с еднаква маса

И така, *масата на тялото, образувана при удара на двете еднакви тела, е равна на тяхната удвоена маса.* Вие наистина можете да кажете: „Но, разбира се, това е просто запазване на масата.“ Но не бързайте да възкликвате: „Но, разбира се!“, защото *самите маси на телата са били по-големи, отколкото когато телата са неподвижни.* Те внасят в сумарната маса M не масата на покоя, а *повече.* Не е ли наистина поразително! Оказва се, че запазването на импулса при удар на две тела изисква образуваната от тях маса да е по-голяма от масите им в покой, макар след удара тези тела сами да са в състояние на покой!

5. Релативистична енергия

Малко по-горе ние показахме, че зависимостта на масата от скоростта и Нютоновите закони довеждат до това, че измененията в кинетичната енергия на тялото, появяващи се в резултат на работа на приложените към него сили, се оказват винаги равни на

$$\Delta T = (m_u - m_0)c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - m_0 c^2. \tag{16.12}$$

После ние се предвижихме по-нататък и открихме, че пълната енергия на тялото е равна на неговата пълна маса, умножена с c^2. Да продължим тези разсъждения.

Да предположим, че можем да „видим“ нашите две тела с равни маси (телата, които се сблъскаха) даже тогава, когато те се окажат вътре в тялото M. Да кажем протон и неутрон се сблъскват, но все още продължават да се движат вътре в M. Масата на тялото M, както открихме, е равна не на $2m_0$, а на $2m_w$. С тази маса $2m_w$ снабдиха тялото неговите съставни части, чиято маса в покой беше равна на $2m_0$; значи *излишъкът* от масата на съставното тяло е равен на внесената кинетична енергия. Това означава без съмнение, че енергията има инерция. Порано ние говорехме за нагряването на газа и показахме, че тъй като газовите молекули се движат, а движещите се тела стават по-масивни, при нагряване на газа и усилване на движението на молекулите газът става по-тежък. Но всъщност такова разсъждение е съвършено общо; нашето обсъждане на свойствата на нееластичния удар също показва, че добавъчна маса се

появява винаги, даже тогава, когато тя не е кинетична енергия. С други думи, ако две частици се сближават и при това се образува потенциална или друга форма на енергия, ако частиците на съставното тяло се забавят от потенциалната бариера, извършвайки работа срещу вътрешните сили, и т. н. — във всички тези случаи масата на тялото, както и по-рано е равна на пълната енергия, внесена в него. И така вие виждате, че изведеното по-горе запазване на масата е равнозначно на запазване на енергията, затова в теорията на относителността не трябва да се говори за нееластични удари, както това е в Нютоновата механика. Според механиката на Нютон нищо страшно не би станало, ако две тела, като се сблъскат, образуват тяло с маса $2m_0$, което не се отличава от това, което би се получило, ако бавно ги поставим едно до друго. Разбира се, от закона за запазване на енергията ние знаем, че вътре в тялото има допълнителна кинетична енергия, но по закона на Нютон това никак не влияе върху масата. А сега става ясно, че това е невъзможно: щом до удара двете тела са имали кинетична енергия, съставното тяло ще се окаже по-тежко, следователно това ще бъде вече друго тяло. Ако внимателно се поставят двете тела едно до друго, възниква тяло с маса $2m_0$; когато пък ги ударите със сила, ще се появи тяло с по-голяма маса. Ако масата се различава, то ние можем да забележим това. И така запазването на импулса в теорията на относителността по необходимост се придружава със запазване на енергията.

Оттук произтичат интересни следствия. Нека има тяло с измерена маса M и да предположим, че нещо го е сполетяло, и то се е разпаднало на две равни части, притежаващи скорости w и маси m_w. Да предположим сега, че тези части, движейки се през вещество, постепенно се забавят и спират. Сега тяхната маса е m_0. Колко енергия те са отдали на веществото? По теоремата, доказана по-рано, всеки къс отдава енергия $(m_w - m_0)c^2$. Тя ще премине в различни форми, например в топлина, в потенциална енергия и т. н. Тъй като $2m_w = M$, освободилата се енергия е $E = (M - 2m_0)c^2$. Това уравнение беше използувано за оценка на количеството енергия, която би могла да се отдели при ядреното разпадане в атомната бомба (макар частите на бомбата да не са точно равни, но приблизително са равни). Масата на урановия атом беше известна (бяха я измерили по-рано), беше известна и масата на атомите, на които той се разпадаше — йод, ксенон и т. н. (имат се предвид не масите на движещите се атоми, а масите в покой). С други думи и M, и m_0 бяха известни. Като се извади едната стойност на масата от другата, може да се пресметне колко енергия ще се освободи, ако M се разпадне „на половинки". По тази причина във всички вестници нарекоха Айнщайн „баща" на атомната бомба. В действителност под това се разбираше само, че той би могъл от по-рано да пресметне отделилата се енергия, ако бяха му казали какъв процес ще се осъществи. Енергията, която трябва да се освободи, когато атомът на урана се разпадне, пресметнаха едва половин година преди първото непосредствено изпитание. И едва когато енергията действително се отдели, я измериха непосредствено (ако не беше формулата на Айнщайн, биха я измерили по друг начин), а от момента, когато я измериха, формулата вече не беше нужна. Това съвсем не е принизяване на заслугите на Айнщайн, а е по-скоро критика на вестникарските изказвания и популярните описания на развитието на физиката и техниката. Проблемата как да се достигне до това, процесът на отделянето на енергията да става ефективно и бързо, няма нищо общо с формулата.

Формулата има значение и в химията. Да кажем, че бихме претеглили молекулата на въглеродния двуокис и бихме я сравнили с масата на въглерода и кислорода, бихме могли да определим колко енергия се освобождава, когато въглеродът и кислородът образуват въглена киселина. Лошо е само това, че тази разлика в масите е толкова малка, че технически е много трудно да се направи опитът.

Сега да се обърнем към въпроса: необходимо ли е отсега да се прибавя към кинетичната енергия $m_0 c^2$ и да се говори нататък, че пълната енергия на обекта е равна на mc^2? Първо, ако за нас бяха видими съставните части с маса в покой m_0 вътре в обекта М, бихме могли да говорим, че част от масата на М е механичната маса в покой на съставните части, друга част — тяхната кинетична енергия, трета — потенциалната енергия. Макар в природата действително да са открити различни частици, с които стават точно такива реакции (реакции на сливане в една), обаче по никакъв начин не е *възможно* да се видят *вътре* в М някакви *съставни части*. Например разпадането на К-мезона на два пиона става по закона (16.11), но е безсмислено да се счита, че той се състои от 2π, защото той се разпада понякога и на 3π!

Поради това възниква *нова идея*: няма нужда да се знае как телата са устроени отвътре; не може и не е нужно да се знае каква част от енергията вътре в частицата може да се счита за енергия на покоя на онези части, на които тя се разпада. Неудобно е, а понякога и невъзможно да се разбива *пълната енергия* mc^2 на тялото на енергия на покоя на вътрешните части, на тяхната кинетична и потенциална енергия; вместо това, ние просто ще говорим за *пълната енергия* на частицата. Ние „отместваме отправното начало“ на енергията, добавяйки към всичко константата $m_0 c^2$, и казваме, че пълната енергия на частицата е равна на нейната маса на движение, умножена на c^2, а когато тялото се спре, енергията му е масата му в покой, умножена с c^2.

И най-сетне лесно е да се намери, че скоростта v, импулсът P и пълната енергия E са свързани просто помежду си. Колкото и да е странно, формулата $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ се употребява много рядко на практика. Вместо това, незаменими се оказват две и съотношения, които лесно се доказват:

$$E^2 - P^2 c^2 = M_0^2 c^4 \tag{16.13}$$

$$Pc = \frac{Ev}{c}. \tag{16.14}$$

17

Пространство — време

1. Геометрия на пространство-времето

1. Геометрия на пространство-времето
2. Пространство-временни интервали
3. Минало, настояще, бъдеще
4. Още за четиривекторите
5. Алгебра на четиривекторите

Теорията на относителността показва, че връзката между местоположението на събитието и момента, в който то става, при измервания в две различни отправни системи съвсем не е такава, каквато може да се очаква въз основа на нашите интуитивни представи. Много важно е ясно да си представим връзката между пространството и времето, възникваща от Лоренцовите трансформации. Затова ние по-дълбоко ще разгледаме този въпрос в тази глава.

Координатите и времето (x, y, z, t), измерени от наблюдател „в покой", се трансформират в координати и време (x', y', z', t'), измерени вътре в „движещия се" със скорост u космически кораб:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{17.1}$$

Нека да сравним тези уравнения с уравнението (11.5), което също свързва измерванията в две системи, само че едната от тях сега *се върти* спрямо другата:

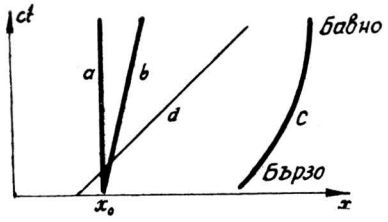
$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{17.2}$$

В този частен случай осите x' и x на Мик и Джо са завъртени на ъгъл θ. Но и в този и в другия случай ние забелязваме, че „щрихованите" величини представляват „смесени" помежду си „нещриховани": новото x' е смес на x и y, а новото y' — друга смес от x и y.

Да направим следната аналогия: когато гледаме предмет, ние различаваме неговата „видима ширина" и „видима дебелина". Но тези две понятия — „ширина" и „дебелина" — съвсем не са *основни* свойства на предмета. Идете настрани, погледнете предмета под друг ъгъл — видимата ширина и видимата дебелина ще станат други. Може да се напишат формули, позволяващи да се узнаят новата ширина и новата дебелина по известните стари и по ъгъла на завъртането. Уравненията (17.2) са именно тези формули. Може да се каже, че дадената дебелина е своего рода „смес" на всички ширини и всички дебелини. Ако ние не бихме могли да се отместим от мястото, ако винаги гледахме дадения предмет от едно и също положение, всички тези разсъждения биха ни се стрували неуместни; нали ние и така винаги бихме виждали пред себе си „истинската" ширина и „истинската" дебелина и бихме знаели, че това са съвършено различни качества на предмета: едното е свързано с ъгъла, под който се вижда даденият предмет, другото изисква фокусиране на очите и даже интуиция. Те биха ни изглеждали абсолютно различни, не би имало защо да ги смесваме. Само затова защото сме в *състояние* да обикаляме около предмета, ние разбираме, че ширината и дебелината са различни аспекти на едно и също нещо.

Не може ли да се погледне на Лоренцовата трансформация по такъв начин? Нали и тука пред нас е смес — смес от местоположението и момента от времето. От стойностите на координатата и времето се получава нова координата. С други думи, в измерванията на пространството, направени от един човек, има от гледна точка на друг малък примес от време. Нашата аналогия позволява да изкажем следната мисъл: „Реалността“ на предмета, който гледаме, включва нещо повече (говорейки грубо и образно), отколкото неговата „ширина“ и неговата „дебелина“, защото двете *зависят* от това, *как* ние гледаме предмета. Оказвайки се на ново място, нашият мозък незабавно пресмята отново и ширината, и дебелината. Но когато ние се движим с голяма скорост, нашият мозък не ще успее незабавно да пресметне координатите и времето: ние нямаме опит при движение със скорости, близки до светлинната, ние не усещаме времето и пространството като явления с една и съща природа. Все едно да са ни приковали на дадено място, да са ни заставили да разглеждаме ширината на някакъв предмет и при това да не са ни разрешили даже да завъртаме глава. Сега ние разбираме, че ако имахме такава възможност, бихме могли да видим малко и от времето на другия човек, като да „надникнем“ зад него.

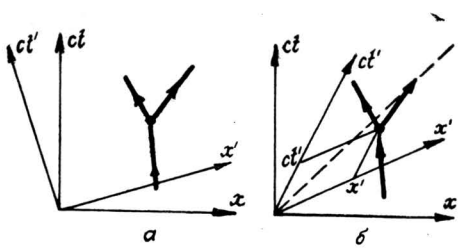
И така ние трябва да се опитаме да си представим предметите в един свят от нов тип, в който времето е смесено с пространството в същия смисъл, в който предметите на нашия обикновен пространствен свят могат да бъдат разглеждани от различни посоки. Ние трябва да считаме, че предметите, заемащи някакво място и съществуващи през някакъв период от време, заемат някакво „късче“ от света от нов тип и че ние гледаме на това „късче“ от различни гледни точки, когато се движим с различни скорости. Този нов свят, тази геометрическа реалност, в която има „късчета“, заемащи известно пространство и съществуващи известно време, се нарича *пространство-време*. Дадената точка (x, y, z, t) в пространство-времето носи названието *събитие*. Представете си например, че оста x сме разположили хоризонтално, осите y и z — в две други направления, взаимно перпендикулярни и перпендикулярни към страницата (!), а оста t сме насочили вертикално. Как ще се изобрази движещата се частица на тази диаграма? Когато частицата е неподвижна, тя има някаква координата x: времето тече, а x остава все същата, и същата, и същата. Значи, нейният „път“ е правата, успоредна на оста (a на фиг. 17.1). От друга страна, ако тя се отдалечава равномерно, с течение на времето расте и x (b на фиг. 17.1). Така частицата която първо се е движила, а после е започнала да забавя своя ход, ще се изобрази с нещо подобно на кривата c на фиг. 17.1. С други думи, всяка устойчива неразпадаща се частица ще се изобрази с линия в пространство-времето. А разпадащата се частица ще се изобрази с вилка, защото тя се превръща в две частици, излизащи от една точка.



Фиг. 17.1. Пътища на три частици в пространство-времето.
a — частицата се намира в покой в точката $x=x_0$;
b — частицата е започнала да се движи от точката $x=x_0$ с постоянна скорост;
c — частицата е започнала да се движи, но се е забавила;
d — разпространение на светлината.

А как стои работата със светлината? Скоростта на светлината е винаги една и съща, следователно светлината може да се изобрази с прави линии с еднакъв наклон (d фиг. 17.1).

И така съгласно изказаната от нас идея, ако стане някакво събитие, например частицата внезапно се разпадне в някоя пространствено-временна точка (x, t) на две, които следват някакви нови линии, то, ако това за нещо ни е необходимо, със завъртване на осите могат да се получат стойностите на x и t в новата система (фиг. 17.2, а). Но това не е така: нали уравнението (17.1) *не съвпада* с трансформацията (17.2), в тях различно са поставени знаците, в едното се срещат $\sin\theta$ и $\cos\theta$, а в другото — някакви алгебрични величини. (Изобщо понякога алгебричните величини могат да се изразят чрез синус и косинус, но в дадения случай това е невъзможно.) И все пак тези изрази си приличат много. Както ще видим, не може да се представи пространство-времето във вида на реалната обикновена геометрия и всичко това е поради разликата в знаците. Всъщност, макар че не сме подчертавали досега това, оказва се, че движещият се наблюдател трябва



Фиг. 17.2

да се ползва от оси, равно наклонени към линията на светлинния лъч, и да проектира точката върху тези оси с помощта на отсечки, които са успоредни на осите. Това е показано на фиг. 17.2, б. Ние няма да се занимаваме с тази геометрия, тя не помага особено; по-лесно е да се работи направо с уравненията.

2. Пространствено-времеви интервали

Макар че геометрията на пространство-времето не е обикновена (не е Евклидова), все пак тази геометрия е много подобна на Евклидовата, но в някои отношения е твърде своеобразна. Ако тази представа за геометрията е правилна, трябва да съществуват такива функции на координатите и времето, които не зависят от координатната система. Например при обикновените въртения, ако се вземат две точки, едната за простота в началото на двете координатни системи, а другата в кое да е друго място, в двете координатни системи разстоянието между точките ще бъде еднакво. Това е първото свойство на точките, което не зависи от конкретния начин на измерването: квадратът на разстоянието, или $x^2+y^2+z^2$, не се променя при завъртанията. А как е в пространство-времето? Не е трудно да се покаже, че и тук има нещо, независещо от начина на измерването, а именно комбинацията $c^2t^2-x^2-y^2-z^2$, еднаква до и след трансформацията:

$$c^2t'^2-x'^2-y'^2-z'^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2. \tag{17.3}$$

Затова тази величина подобно на разстоянието е „реална“ в същия смисъл, който беше придаден на тази дума по-горе; наричат я *интервал* между две пространствено-времеви точки едната от които в този случай съвпада с началото на координатната система. (Говорейки по-точно, това не е интервал, а квадрат на интервала, точно така, както и $x^2+y^2+z^2$ е квадратът на разстоянието.) Това название подчертава различието в геометриите; обърнете внимание, че във формулата влиза c, а някои знаци са обърнати.

Нека да се избавим от c, то не ни е нужно, ако искаме да имаме удобно пространство, в което x и t може да се заменят. Представете си към каква бъркотия ще доведе измерването на ширината по ъгъла, под който се вижда предметът, а на дебелината — по свиването на мускулите при фиксирането на окото върху предмета, и ако изразът за дебелината е в метри, а за ширината в *радиани*. В такъв случай при трансформации на уравненията от типа (17.2) ще се получи страшна неразбория и в никакъв случай не ще ни се отдаде да разгледаме цялата простота и яснота на предмета по тази проста техническа причина, че едно и също ще измерваме с две различни единици. С помощта на уравненията (17.1) и 17.3) природата ни говори, че времето е еквивалентно на пространството; времето става пространство; *те трябва да бъдат измервани с еднакви единици.* Какво разстояние измерва секундата? От уравнението (17.3) е лесно да се разбере: секундата е $3\cdot10^8$ m, *разстоянието, което светлината преминава за 1* s. С други думи, ако разстоянията и времето измервахме в еднакви единици (секунди), единицата за дължина би била $3\cdot10^8$ m и уравненията биха се опростили. Друг начин да се изравнят единиците е да се измерва времето в метри. На какво е равен един метър време? Метър време — това е времето, за което светлината преминава разстояние от 1 m, т. е. $(1/3).10^{-8}$ s, или 3,3 милиардни части от секундата! С други думи, необходимо ни е да се запишат всички уравнения в система единици, в която $c=1$. Когато времето и пространството се измерват с еднакви единици, уравненията естествено ще се опростят:

$$x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2}}, \tag{17.4}$$

$$y'=y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = \frac{t - ux}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \qquad (17.5)$$

Може би се съмнявате в законността на всичко това или ви „плаши“, че като положите $c=1$, вие не ще можете да се върнете към правилните уравнения? Напротив, без c те много по-лесно се запомнят, а c е лесно да се постави на нужните места, ако се вгледаме в размерностите. Да кажем, в $\sqrt{1-u^2}$ ще видим, че от безразмерното число 1 се налага да се извади размерно (квадрата на скоростта u^2); естествено, този квадрат трябва да се раздели на c^2, за да се направи умалителят безразмерен. По такъв начин може да се постави c там, където е необходимо.

Много интересно е различието между пространство-времето и обикновеното пространство, различието между интервала и разстоянието. Погледнете формула (17.5). Ако две събития са станали в някаква координатна система в едно и също време, но в различни точки на пространството, то, като се постави началото на координатната система в точката, изобразяваща едно от събитията, ние ще получим, че $t=0$, а например $x \neq 0$. Значи квадратът на интервала ще се получи отрицателен, а самият интервал — имагинерен (квадратен корен от отрицателно число). Интервалите в тази теория са и реални, и имагинерни, защото техните квадрати могат да бъдат и положителни, и отрицателни за разлика от разстоянието, квадратът на което винаги е само положителен. Когато интервалът е имагинерен, казват, че *интервалът* между двете събития (точки) е *пространствено подобен* (а не имагинерен), защото такъв интервал би се получавал винаги, ако целият свят застинеше в едно и също време. От друга страна, ако два предмета в дадена координатна система попаднат в едно и също място в различни моменти от времето, тогава $t \neq 0$, а $x=y=z=0$ и квадратът на интервала е положителен: това се нарича *временно подобен интервал*. По-нататък, ако се прекарат на диаграмата на пространство-времето две прави под ъгъл 45° (при четири измерения те ще се превърнат в „конус“, наречен светлинен), точките от тези прави ще бъдат отделени от началото на координатната система с нулев интервал. Накъдето да се разпространява светлината от началото на координатната система, винаги $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$, т. е. интервалът между събитието на пристигане на светлината във всяка точка и началото винаги е равен на нула [както лесно се вижда от (17.5)]. Между другото, сега ние доказахме още, че скоростта на светлината във всички координатни системи е еднаква: нали ако интервалът в двете системи е еднакъв, то бидейки равен на нула в едната от тях, той е равен на нула и в другата, и квадратът на скоростта на светлината — отношението на $x'^2+y'^2+z'^2$ към t'^2 — отново е равен на c^2.

Да се каже, че скоростта на разпространение на светлината е инвариант, това е все едно да се каже, че интервалът е равен на нула.



Фиг. 17.3. Област от пространство-времето, която окръжава началото на координатната система.

3. Минало, настояще, бъдеще

Пространствено-временната област, обкръжаваща дадената точка от пространство-времето, може да се раздели на три области, както е показано на фиг. 17.3. В една от тях интервалите са пространствено подобни, а останалите две — временно подобни. Тези три области, на които се разпада обкръжаващото точката пространство-време, във физическо отношение са свързани много интересно със самата точка.

От областта *2* физическият обект или сигнал, движейки се със скорост, по-малка от скоростта на светлината, може да дойде в точката *O*. Затова събитията в тази област могат да въздей-

стват върху събитието в точка O, могат да му влияят от миналото ($t<0$). Действително, предметът в точка P, която лежи върху отрицателната част на оста, се оказва точно в „миналото“ по отношение на точка O; P е същата пространствено-временна точка O, но в по-ранен момент от времето. Това, което се е случило някога с нея, сега се отразява върху точката O. (За съжаление именно такъв е нашият живот.) Друг предмет от т. Q попада в O, като се движи с определена скорост, по-малка от c; значи, ако този предмет се движеше в космически кораб, т. Q също би могла да се окаже момент от миналото на същата точка O от пространство-времето. Това значи, че в някаква друга координатна система оста на времето би могла да преминава през O и Q. По такъв начин всички точки от областта *2* се оказват спрямо O в „миналото“; всичко, което става в тази област, *може* да се отрази на O. Поради това областта *2* може да се нарече *въздействуващото минало*; това е геометричното място на всички събития, които по някакъв начин могат да повлияят на събитието в точка O.

Затова пък *3* е онази област, *на която* на свой ред могат да повлияят събитията от O; в телата, разположени вътре в областта *3*, могат да „попаднат куршумите“, скоростта на които е по-малка от скоростта на светлината. Това е онзи свят, чието бъдеще е в нашите ръце (ако ние сами се намираме в точка O); областта *3* може да се нарече *бъдещето, върху което може да се въздейства*. Останалото пространство-време (областта *1*) е интересно с това, че на събитията в него не може да се влияе от *точка O* и, обратно, нищо, което става в тази област, никак не може да повлияе на положението в точка O, защото нищо не може да изпревари светлината. Разбира се, ако нещо стане в точка R, това може да проличи по-късно; ако например Слънцето „в този момент“ се пръсне, то ние ще узнаем за това едва след 8 минути и преди изтичането на това време взривът по никакъв начин не може да се отрази върху нас.

А онова, което става „точно сега“, „в този момент“, е всъщност нещо тайнствено; то не се поддава на определяне, не се поддава и на въздействие, обаче малко по-късно то може да въздействува върху нас (или ние върху него, ако известно време преди това сме се погрижили за тази работа). Когато ние гледаме звездата Алфа от Центавър, ние я виждаме такава, каквато тя е била преди 4 години; на нас може да ни се поиска да узнаем на какво прилича тя „сега“. „Сега“ — това значи в този същия момент в нашата специална координатна система. Алфа от Центавър ние можем да видим само с помощта на светлинните лъчи, явили се при нас от нашето минало, минало с четиригодишна давност, но какво става на нея „сега“, ние не знаем. Това което става на нея „сега“, може да въздействува върху нас едва след четири години. „Алфа от Центавър сега“ — това е идея, или понятие, съществуващо в нашия мозък; никакво физическо определение за това понятие в този момент няма, защото трябва да се почака, преди това „сега“ да може да се види; за Алфа от Центавър не се поддава веднага на определение даже правилното понятие сега. Нали „сега“ зависи от координатната система. Ако например Алфа от Центавър се движеше, наблюдателят върху нея не би се съгласил с нашето разбиране на неговото „сега“, защото неговите координатни оси биха били завъртени на някакъв ъгъл, а неговото „сега“ би било съвсем *друго* време. Ние вече говорихме, че едновременността не се определя еднозначно.

Понякога се срещат предсказвачи на съдбата, врачки, хора, твърдящи, че могат да узнават бъдещето; немалко чудеса се разказват и за хора, които внезапно виждат пред себе си бъдещето си, върху което може да се въздейства. От това възникват множество парадокси: нали ако ние знаем, че нещо ще се случи, то сигурно ще можем да го избегнем, ако поискаме. А всъщност нито един ясновидец не е способен да узнае даже настоящето. Никой не ще ни каже какво става в този момент достатъчно далеч от нас, защото това е ненаблюдаемо.

Накрая аз ще задам един въпрос, отговора на който ще предоставя на вас самите. Ако внезапно би се появила възможност да се знае какво става в областта *I* на пространство-времето, би ли възникнал от това парадокс, или не?

4. Още за четиривекторите

Да се върнем отново към аналогията между Лоренцовите трансформации и въртенето на пространствените оси. Ние вече се убедихме, че е полезно да се съберат в едно различните от координатите величини, които се трансформират така, както и координатите; тези съединени величини наричат *вектори*, или насочени отсечки. При обикновените въртения много величини се трансформират точно така както x, y, (например трите компоненти v_x, v_y, v_z на скоростта); при прехода от една координатна система в друга нито една от компонентите не остава предишната, всички те придобиват нови стойности. Но „самата" скорост във всеки случай е по-реална, отколкото всяка от нейните компоненти, и ние я представяме с насочена отсечка.

Сега ние ще запитаме: съществуват ли величини, които се трансформират при прехода от неподвижна система към движеща се така, както и x, y, z, t? Нашият опит по работата с векторите ни подсказва, че три от тези величини, подобни на x, y, z, биха могли да представляват трите компоненти на обикновен пространствен вектор, а четвъртата би могла да се окаже подобна на обикновен скалар относно пространствените въртения: тя не би се променяла, докато не преминем към движещата се координатна система. Възможно ли е обаче да се свърже с един от известните „тривектори" някакъв четвърти обект (който може да се нарече „временна компонента") по такъв начин, че цялата четворка „да се върти" също така, както се променят пространството и времето в пространство-време? Сега ние ще покажем, че действително съществува поне една такава четворка (а всъщност тя съвсем не е само една): *трите компоненти на импулса и енергията в качеството на временна компонента се трансформират заедно* и образуват тъй наречения „четиривектор". Когато доказваме това, ние ще се избавим от c по същия начин, който употребихме при уравнението (17.4). Например енергията и масата се различават само с множителя c^2 и при съответния избор на измерителните единици енергията съвпада с масата. Вместо да пишем $E=mc^2$, ние полагаме $E=m$. Ако ни потрябва, в окончателните уравнения отново може да се постави c в необходимите степени.

И така уравненията за енергията и импулса имат вида:

$$E=m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} \qquad (17.6)$$

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}=\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Значи при такъв избор на единиците се получава

$$E^2-p^2=m_0^2 \qquad (17.7)$$

Да кажем, ако енергията е изразена в електронволти (eV), на какво е равна маса от 1 eV? Тя е равна на маса с енергия в покой 1 eV, т. е. $m_0c^2=1$ eV. Електронът например има маса в покой, равна на $0{,}511\,.\,10^6$ eV.

Как ще изглеждат импулсът и енергията в новата координатна система? За да се узнае това, трябва да се трансформират уравненията (17.6). Тази трансформация се получава лесно, като се знае как се трансформира скоростта. Нека някакво тяло да има скорост v, а ние го наблюдаваме от космически кораб, който сам има скорост u, и означаваме съответните величини с щрихи. За простота първо ще разгледаме случая, когато скоростта v е насо-

чена по скоростта u. (По-общия случай ние ще разгледаме по-късно.) На какво е равна скоростта на тялото v' по измерванията от космическия кораб? Тази скорост е равна на „разликата“ между v и u. По закона, получен преди:

$$v' = \frac{v-u}{1-uv}. \tag{17.8}$$

Сега да пресметнем каква ще се окаже енергията E' по измерванията на космонавта. Той, разбира се, ще се възползва от същата маса в покой, но затова пък скоростта ще стане v'. Той ще повдигне v' на квадрат, ще извади от единица, ще извлече квадратен корен и ще намери реципрочната величина:

$$v'^2 = \frac{v^2-2uv+u^2}{1-2uv+u^2v^2}$$

$$1-v'^2 = \frac{1-2uv+u^2v^2-v^2+2uv-u^2}{1-2uv+u^2v^2} =$$

$$= \frac{1-v^2-u^2+u^2v^2}{1-2uv+u^2v^2} = \frac{(1-v^2)(1-u^2)}{(1-uv)^2},$$

затова

$$\frac{1}{\sqrt{1-v'^2}} = \frac{1-uv}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}}. \tag{17.9}$$

Енергията E' е просто равна на масата, умножена по този израз. Но ние искаме да изразим енергията чрез нещрихованите енергия и импулс. Забелязваме, че

$$E' = \frac{m_0 - m_0uv}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}} = \frac{(m_0/\sqrt{1-v^2}) - (m_0v/\sqrt{1-v^2})u}{\sqrt{1-u^2}},$$

или

$$E' = \frac{E-up_x}{\sqrt{1-u^2}} \tag{17.10}$$

Ние разпознаваме в този израз познатата ни трансформация:

$$t' = \frac{t-ux}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Сега трябва да намерим новия импулс p_x'. Той е равен на енергията E', умножена с v', и също така просто се изразява с E и p

$$p_x' = E'v' = \frac{m_0(1-uv)}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{v-u}{1-uv} = \frac{m_0v-m_0u}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-{}^2u}}.$$

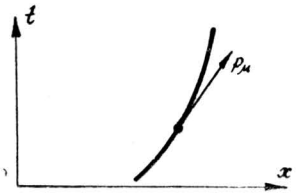
Поради това

$$p_x' = \frac{p_x-uE}{\sqrt{1-u^2}} \tag{17.11}$$

и ние отново разпознаваме в тази формула познатото ни:

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2}}.$$

И така преобразуването на старите енергия и импулс в нови енергия и импулс точно съвпадна с трансформацията на t и x в t' и x и t в x': ако в уравненията (17.4) пишем E всеки път, когато видим t, а вместо x всеки път поставяме p_x, то уравненията (17.4) ще се превърнат в уравненията (17.10) и (17.11). Ако всичко е вярно, това правило предполага допълнителни равенства $p_y' = p_y$ и $p_z' = p_z$. За да ги докажем, трябва да видим как се променя движението нагоре или надолу. Но такова движение вече разгледахме в предишната глава. Ние анализирахме сложен удар и забелязахме, че напречният импулс действително не се променя при преход към движещата се координатна система. Следователно ние вече се убедихме, че $p_y' = p_y$ и $p_z' = p_z$. И така пълната трансформация е



Фиг. 17.4. Четиривектор на импулса на частица.

$$p'_x = \frac{p_x - uE}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$p'_y = p_y, \qquad (1712)$$

$$p'_z = p_z,$$

$$E' = \frac{E - up_x}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Следователно с тези преобразувания ние открихме четири величини, които се трансформират подобно на x, y, z, t. Ще ги наречем *четиривектор на импулса*. Тъй като импулсът е четиривектор, можем да го представим върху диаграмата в пространство-времето на движещата се частица във вид на „стрелка", допирателна към пътя (фиг. 17.4). Временната компонента на тази стрелка дава енергията, а пространствените — тривектора на импулса; самата стрелка е по-„реална", отколкото само импулсът или само енергията: нали и импулсът, и енергията зависят от нашата гледна точка.

5. Алгебра на четиривекторите

Четиривекторите се означават по-иначе, отколкото тривекторите. Например тривекторът на импулса се означава с **p**. Когато искат да дадат по-детайлно записване, говорят за три компоненти p_x, p_y, p_z; може да се пише и по-кратко p_i при уговорка, че i приема три значения x, y и z. За четиривекторите ние ще използваме подобно означение: ще пишем p_μ, а μ нека заменя *четирите* посоки t, x, y, z.

Разбира се, може да се използват всякакви означения. Не се усмихвайте, че толкова много говорим за означенията; учете се да ги изобретявате; те са всесилни. Нали и самата математика в значителна степен се състои в изобретяване на най-добри означения. Идеята за четиривектора е такова усъвършенстване на означенията с цел трансформациите да се запомнят по-лесно.

И така A_μ е общият четиривектор, p_μ е четириимпулсът, p_t — енергията, p_x — импулсът по посока на x, p_y — по посока на y, p_z — по посока на z. Когато се събират четиривекторите, събират се съответните им компоненти.

Ако четиривекторите са свързани с някакво уравнение, това означава, че уравнението се изпълнява за всяка компонента. Например, ако законът за запазване на тривектора на импулса се спазва в ударите на частиците, т. е. сумата от импулсите на съвкупността от взаимодействуващи или сблъскващи се частици е постоянна, това значи, че сумата на всички компоненти на импулсите е постоянна и в направление x, и в направление y, и в направление z. Сам по себе си такъв закон в теорията на относителността е невъзможен: *той е непълен*; това е все едно да се говори само за две компоненти на тривектора. Непълен е, защото при завъртване на осите различните компоненти се смесват, следователно в закона за запазването трябва да влязат всичките три компоненти. По такъв начин в теорията на относителността трябва да се допълни законът за запазване на импулса, като се включи в него запазване на временната компонента. *Абсолютно необходимо* е запазването на първите три компоненти да се съпровожда със запазване на четвъртата, иначе няма да се получи релативистична инвариантност. Четвъртото уравнение представя точно запазването на енергията; то трябва да съпровожда запазването на импулса, за да бъдат четиривекторните съотношения верни в геометрията на пространство-времето. И така законът за запазването на енергията и импулса в четиримерни означения е такъв:

$$\sum_{\text{Сблъскващи се частици}} p_\mu = \sum_{\text{Разлитащи се частици}} p_\mu, \qquad (17.13)$$

или в малко изменени означения

$$\sum p_{i\mu} = \sum p_{j\mu}, \tag{17.14}$$

където $i=1, 2, \ldots$ се отнася до сблъскващите се частици, $j=1, 2, \ldots$ до частиците, възникващи при ударите, а $\mu=x, y, z$ или t. Вие ще запитате „А какво става по координатните оси?“ Това не е важно. Законът е верен за всички компоненти при *всякакви* оси.

Във векторния анализ ние срещнахме едно понятие — скаларно произведение на два вектора. Какво му съответствува в пространство-времето? При обикновените въртения непроменена остава величината $x^2+y^2+z^2$. В четиримерния свят такова свойство при трансформациите притежава величината $t^2-x^2-y^2-z^2$ [уравнение (17.3)]. Как може да се запише това? Възможно е например да се използва знак, подобен на $A_\mu \blacklozenge B_\mu$, но обикновено се пише:

$$\sum_{\mu}{}' A_\mu A_\mu = A_t{}^2 - A_x{}^2 - A_y{}^2 - A_z{}^2. \tag{17.15}$$

Щрихът при $\sum$ напомня, че първият, „временният“, член е положителен, а останалите три са отрицателни. Тази величина е една и съща във всяка координатна система и можем да я наречем квадрат на дължината на четиривектора. На какво е равен например квадратът от дължината на четиривектора на импулса за отделната частица? *Отговор:* $p_t^2-p_x^2-p_y^2-p_z^2$ или по друг начин: E^2-p^2, защото p_t е E. Какво представлява E^2-p^2? По условие трябва да се получи нещо, което е еднакво във всяка координатна система, по-специално и в тази координатна система, която се движи заедно с частицата, така че частицата в тази система е в покой. Но ако частицата е неподвижна, значи тя няма импулс. Следователно остава й само енергията, съвпадаща в този случай с нейната маса. И така $E^2-p^2=m_0^2$, т. е. квадратът на дължината на четиривектора на импулса е равен на m_0^2.

Ползвайки се от израза за квадрат на вектор, лесно е да се изнамери скаларното произведение на два четиривектора: ако единият от тях е a_μ, а другият — $в_\mu$, то скаларното произведение ще се определи така:

$$\sum{}' a_\mu в_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z. \tag{17.16}$$

Този израз не се променя при трансформация на координатната система.

Следва още да се спомене за частиците с нулева маса в покой, например за фотона — частицата на светлината. Фотонът прилича на частица по това, че пренася енергия и импулс. Енергията на фотона е равна на произведението от определена константа, наречена константа на Планк, и честотата на светлината: $E=h\nu$. Такъв фотон носи със себе си и импулс, който (както при всяка частица) е равен на константата h, делена на дължината на светлинната вълна: $p=h/\lambda$. Но при фотона връзката между честотата и дължината на вълната е напълно определена: $\nu=c/\lambda$. (Броят на вълните за една секунда, умножен по тяхната дължина, дава разстоянието, изминато от светлината за една s., т. е. c.) Ние непосредствено получаваме, че енергията на фотона е равна на неговия импулс, умножен по c, и по-нататък, полагайки $c=1$, че *енергията е равна на импулса.* Но това означава, че масата в покой е равна на нула. Нека да вникнем в това твърде любопитно обстоятелство. Ако фотонът е частица с нулева маса в покой, какво става с него, когато се спре? *Но той не се спира никога!* Той винаги се движи със скорост c. Обикновената формула за енергията е $m_0/\sqrt{1-v^2}$. Може ли да се твърди, че при $m_0=1$ и $v=1$ енергията на фотона е равна на нула? Не, не може; всъщност фотонът може да притежава (и притежава) енергия, макар и да няма маса в покой, за сметка на това, че винаги се движи със скоростта на светлината!

Ние знаем също, че импулсът на всяка частица е равен на произведението от пълната енергия и скоростта: $p=vE$ при $c=1$ или в обичайните единици $p=\frac{vE}{c^2}$. За всяка частица, движеща се със скоростта на светлината $p=E$, ако $c=1$. Формулите за енергията на фотона в движещата се система се дават както по-рано чрез уравнението (17.12), но вместо импулсът там трябва да се постави енергията, умножена по c (по 1). Изменението на енергията при трансформациите означава изменение на честотата на светлината. Това явление се нарича ефект на Доплер; формулите за него лесно се получават от уравнението (17.12), като се положи $E=p$ и $E=h\nu$.

Както е казал Минковски: „Пространството само за себе си и времето само за себе си ще потънат в реката на забвението, а ще остане да живее само техният своеобразен съюз.“

18.

Двумерни въртения

1. Център на масите

1. Център на масите

2. Въртене на твърдо тяло

3. Момент на количеството на движение

4. Закон за запазване момента на количеството на движение

В предишните глави ние изучавахме механиката на точки или малки частици, без никак да ни интересува вътрешната им структура. В следващите няколко глави ние ще изучим прилагането на Нютоновите закони към по-сложни неща. Но нали колкото е по-сложен обектът, толкова той е по-интересен, и вие сами ще видите, че явленията, свързани с такива по-сложни обекти са наистина поразителни. Разбира се, всички тези явления не съдържат нищо повече от комбинации от Нютоновите закони, обаче понякога е просто трудно да се повярва, че всичко това е произлязло от $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$!

Какви са тези по-сложни обекти, с които ще имаме работа по-нататък? Това може да бъде течението на водата, въртенето на галактиките и т. н. Но отначало нека се занимаем с най-простия от сложните обекти — *твърдото тяло*. С този термин ние ще наричаме монолитен обект, който едновременно с изменение на положението може също и да се върти като цяло. Впрочем, такъв прост обект може да се движи и достатъчно сложно, затова нека отначало да разгледаме най-простия случай на движение, когато тялото се върти около *неподвижна ос*, при което всяка точка на това тяло се движи в равнина, перпендикулярна на тази ос. Такова въртене на тялото около неподвижна ос се нарича *плоско*, или *двумерно*. По-късно, когато обобщим нашия резултат за случая на три измерения, вие ще видите, че въртенето е значително по-хитра работа, отколкото механиката на частицата и без достатъчно опит в двете измерения е много трудно да се разберат тримерните въртения.

До първата интересна теорема за движението на сложно тяло може да се дойде по следния начин: опитайте се да хвърлите някакъв предмет, състоящ се от множество свързани помежду си кубчета и пръчки. Вие знаете, разбира се, че той ще полети по парабола; това ние открихме още когато изучихме движението на точката. Обаче сега нашият обект *не е* точка. Той се завърта, олюлява се и все пак лети по парабола; вие можете да се убедите в това. *Коя точка* от тялото описва парабола? Е, разбира се, не ъгълът на кубчето, защото той се завърта, не краят на пръчката, не нейната среда и не центърът на кубчето. Но все пак *нещо* се движи по парабола, съществува някакъв ефективен „център“, който се движи по парабола. По такъв начин първата теорема за сложните обекти твърди, че *съществува* някаква „средна“ точка, напълно определена математически, която се движи по парабола. Тази точка не се намира непременно в самото тяло, тя може да лежи и някъде извън него.

Това е така наречената теорема за центъра на масите и тя се доказва по следния начин.

Всеки обект може да се разглежда като множество малки частички, атоми, свързани с различни сили. Нека i означава номера на една такава частица (те са страшно много, затова i може да бъде равно, например на 10^{23}). Силата действуваща на i-тата частица, е равна на масата, умножена с ускорението на тази частица:

$$\mathbf{F}_i=m_i\left(\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}\right). \tag{18.1}$$

В следващите глави нашите движещи се обекти и всичките им части ще се движат със скорости, много по-малки от ско-

ростта на светлината, и затова за всички величини ние ще разглеждаме само нерелативисткото приближение. Масата при тези условия ще бъде постоянна, така че:

$$\mathbf{F}_i = \frac{d^2(m_i \mathbf{r}_i)}{dt^2} \,. \tag{18.2}$$

Ако сега се съберат всички сили, действуващи на частиците, т. е. ако се съберат всички $\mathbf{F}_i$ с всички стойности на индекса, в резултат трябва да получим пълната сила $\mathbf{F}$. Като съберем десните части на уравнението (18.2) за всички частици и си спомним, че производната от сума е равна на сума от производни, получаваме:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F} = \frac{d^2 \sum_i m^i \mathbf{r}_i}{dt^2} \,. \tag{18.3}$$

Затова пълната сила ще е равна на втората производна от сумата на произведенията от масата на частиците и тяхното положение.

Но пълната сила, действуваща на всички частици, е същата, каквато е и външната сила. Защо? Защото, каквито и сили да действуват между частиците, нека това да бъде притегляне или отблъскване, или атомни сили, все едно, когато ги събираме заедно и прилагаме третия закон на Нютон, съгласно който силите на действието и противодействието между всеки две частици са равни една на друга, тези взаимни сили ще се унищожат една друга и в резултат ще останат само силите, действуващи от страна на атомите, намиращи се вън от тялото. Така че, ако уравнението (18.3) представлява сума от някакво число частици, образуващи нашия обект, то *външната* сила, която действува върху него, е просто равна на сумата от всички сили, действуващи върху *всички* частици, образуващи този обект. Добре би било уравнението (18.3) да се запише в такъв вид: пълната маса на тялото, умножена по някакво ускорение. Това е възможно да се направи. Нека M бъде масата на всички частици, т. е. пълната маса на тялото. Ако сега се определи векторът $\mathbf{R}$ като

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M} \,, \tag{18.4}$$

то, тъй като M е постоянно, уравнението (18.3) ще премине в:

$$\mathbf{F} = \frac{d^2(M\mathbf{R})}{dt^2} = M\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \,. \tag{18.5}$$

По такъв начин външната сила е равна на пълната маса, умножена по ускорението на някаква точка $\mathbf{R}$; тази точка се нарича център на масите на тялото. Тя е разположена някъде в „средата“ на тялото — някакво средно $\mathbf{r}$, в което различните $\mathbf{r}_i$ се отчитат в зависимост от тяхната важност, т. е. в зависимост от това, какъв дял внасят те в пълната маса.

Ние подробно ще обсъдим тази важна теорема малко по-късно, а сега ще се спрем на два примера. Нека на тялото не действуват никакви външни сили, например то да плува някъде в празно пространство. То може да направи всичко, което пожелае: да завие, да се поклаща, да се огъва, но при това неговият *център на масите*, тази изкуствено отличена от нас математическа точка, *трябва да се движи с постоянна скорост*. По-специално, ако в началото този център е в покой, то той през цялото време все така ще бъде в покой. Затова, ако вземем някакъв космически кораб с всичките му пътници, пресметнем неговия център на масите и открием, че той стои на място, можем да бъдем уверени, че центърът на масите така ще си остане на място, ако върху кораба не действуват някакви външни сили. Самият кораб може, разбира се, да се премества малко, но това е, защото пътниците вътре в кораба ходят назад и напред. Ако всички пътници едновременно преминат в носовата част, корабът малко

ще се отмести назад, така че средното положение на всички маси да остане точно на същото това място.

Означава ли това, че в резултат на неподвижността на центъра на масите ракетата не може да се движи напред? Разбира се, не, но, за да се придвижи напред интересуващата ни част на ракетата, ние трябва да изхвърлим нещо назад. С други думи, ако в началото ракетата е неподвижна, а след това е изхвърлила от дюзите някакво количество газ, този газ ще полети назад, а самата ракета ще полети при това напред, обаче центърът на масите ще остане точно на същото място, където е бил и порано. Така че в ракетата интересуващата ни част ще се придвижи напред за сметка на друга, която ще излети назад.

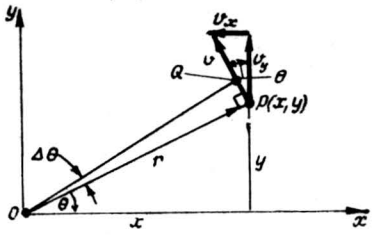
Втората забележка се отнася до движението на центъра на масите. Ние можем да го разглеждаме отделно от всички „вътрешни" движения на тялото и следователно можем да не го отчитаме при изучаване на въртенето. Всъщност затова ние започнахме да изучаваме въртенето от центъра на масите.

2. Въртене на твърдо тяло

Да поговорим сега за въртенето. Както е известно, обикновените предмети не се въртят просто така: те трептят, вибрират, огъват се. Затова, за да се опростят разсъжденията, ще разгледаме движението на несъществуващ идеален обект, който ние нарекохме *твърдо тяло*. В такъв обект връзките между атомите са толкова силни, че онези неголеми сили, които са необходими, за да го приведат в движение, не могат да деформират тялото. Формата му през цялото време остава една и съща. Ако искаме да изучаваме движението на такова тяло и се условим да не вземаме под внимание движението на неговия център на масите, то на него не му остава нищо друго *освен да се върти*. Ето това въртене трябва да опишем. По какъв начин? Да предположим, че в тялото съществува някаква въображаема неподвижна линия (тя може да преминава през центъра на масите, а може и да не преминава); около тази линия като около ос ще се върти нашето тяло. Но все пак как да се определи какво е това въртене? Да се направи това е много просто. Да отбележим някаква точка на тялото, където искаме, само не върху оста, и знаейки къде е преминала тя след някакъв интервал от време, ние можем да кажем точно в какво положение се намира тялото. Единственото, което трябва да се знае за описване на положението на точката, това е *ъгълът*. По такъв начин изучаването на въртенето се заключава в изучаване изменението на ъгъла с времето.

За да се опише въртенето, ще измерим ъгъла, на който се завърта тялото. Разбира се, става дума не за ъгъла между две точки *вътре* в самото тяло или на тялото, а за *ъгловото изменение на положението* на тялото като цяло от един момент на времето до друг.

Отначало нека изучим кинематиката на въртенето. Изменението на ъгъла с времето много прилича на изменението на положението при едномерно движение; при равнинното въртене ние можем да говорим за ъглово положение и ъглова скорост. Между тези две движения — равнинното въртене и едномерното преместване — съществува много интересна връзка: почти всяка величина в единия случай има своя аналог в другия. Преди всичко ъгълът θ, показващ с колко се е *завъртяло* тялото, съответствува на преминатото от точката разстояние s. Ъгловата скорост $w = d\theta/dt$, която показва с каква бързина се изменя ъгълът, съответствува на обикновената скорост $v = ds/dt$, описваща бързината на изменение на положението. Ако ъгълът се измерва в радиани, ъгловата скорост w е равна на някакво число радиани в секунда. Колкото по-голяма е ъгловата скорост, толкова по-бързо се върти обектът и толкова по-бързо се променя ъгълът. Ако диференцираме ъгловата скорост по времето, ще получим величината $\alpha = dw/dt = d^2\theta/dt^2$, която ще наричаме ъглово ускорение. То може



Фиг. 18.1. Кинематика на двумерно въртене.

да служи като аналог на обикновеното ускорение.

Сега трябва да свържем динамиката на въртенето с динамиката на частиците, от които е направено тялото, т. е. да си изясним как се движи всяка дадена частица, ако ъгловата скорост представлява толкова радиана в секунда. За да направим това, да вземем някаква частица, разположена на разстояние r от оста, и както обикновено ще говорим, че в дадения момент от времето тя се намира в определено положение $P(x, y,)$ (фиг. 18.1). След интервал от време Δt тялото изцяло ще се завърти на ъгъл $\Delta\theta$, а заедно с него ще се завърти и нашата частица. Макар разстоянието от нея до оста на въртенето O да остава същото, тя вече се премества в друга точка Q. Първото, което бихме искали да знаем, това е с колко се изменят разстоянията x и y. Ако означим с r дължината OP, дължината PQ ще бъде равна на $r\Delta\theta$ (просто по определението за ъгъл). Тогава изменението на разстоянието x ще бъде равно на проекцията на $r\Delta\theta$ върху оста x:

$$\Delta x = -PQ\sin\theta = -r\Delta\theta\frac{y}{r} = -y\Delta\theta. \tag{18.6}$$

Аналогично:

$$\Delta y = x\Delta\theta. \tag{18.7}$$

Ако тялото се върти с ъглова скорост ω, като се разделят двете части на равенствата (18.6) и (18.7) с Δt, ще намерим компонентите на скоростта на частицата:

$$v_x = -\omega x \quad \text{и} \quad v_y = \omega y. \tag{18.8}$$

Ако ни е необходима абсолютната стойност на скоростта, то просто пишем:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\omega^2x^2 + \omega^2y^2} = \omega\sqrt{x^2+y^2} = \omega r. \tag{18.9}$$

Не е чудно, че абсолютната стойност на скоростта се получи равна на ωr; това е очевидно; нали пълното изминато разстояние е $r\Delta\theta$, а поради това разстоянието, преминато за една секунда, ще бъде $r\Delta\theta/\Delta t$, или $r\omega$.

Да преминем сега към разглеждане на *динамиката* на въртенето. Тук трябва да се въведе ново понятие — *сила*. Нека да видим, не може ли да се изобрети нещо, играещо същата роля, каквато и силата при линейното движение. Това нещо ние ще наричаме *момент на сила* или просто *момент*. Обикновено под сила разбираме нещо, което заставя неподвижното тяло да се движи, а онова, което заставя тялото да се върти, е „въртяща" или „усукваща" сила; ние ще я наречем *момент*. По такъв начин качествено моментът на силата е въртенето. Но какво е моментът на силата количествено? Количествена теория за момента може да се получи, като се изучава *работата*, изразходвана при завъртането на тялото. Този подход е много добър и за определяне на силата: ако ние знаем каква работа се изисква, за да се извърши даденото преместване, знаем и силата. За да се продължи съответствието между ъгловите и линейните величини, трябва да се приравни работата, която се извършва при завъртане тялото на някакъв ъгъл, с произведението от момента по този ъгъл. С други думи, при такова определяне на момента теоремата за работата има абсолютен аналог: работата е силата по преместването или моментът по ъгъла. Това изведнаж ни показва какво представлява моментът количествено. Да разгледаме например твърдо тяло, въртящо се около ос, на което действуват различни сили. Да концентрираме всецяло нашето внимание върху една сила, приложена към някаква точка (x, y). Каква работа трябва да изразходваме, завъртайки тялото на някакъв малък ъгъл $\Delta\theta$? Не е трудно да се разбере, че тя е равна на:

$$\Delta w = F_x\Delta x + F_y\Delta y. \tag{18.10}$$

Сега трябва само да се заместят изразите (18.6) и (18.7) за Δx и Δy и получаваме:

$$\Delta w = (xF_y - yF_x)\Delta\theta. \tag{18.11}$$

т. е. работата, която сме извършили, е равна на ъгъла, на който е било завъртяно тялото, умножен по някаква странна комбинация от силите и разстоянията. Тази „странна комбинация“ е моментът. По такъв начин, определяйки изменението на работата като момент, умножен с ъгъла на завъртането, получаваме формула, изразяваща момента чрез силите. (Това е понятно. Тъй като моментът не представлява напълно ново понятие, независещо от Нютоновата механика, той трябва по определен начин да се изразява чрез силата.)

Сега нека на тялото да действуват няколко сили. Тогава работата, извършвана от тези сили, е равна на сумата от работите на всяка сила, така че Δw ще има вид на сума от множество членове: по един за всяка от силите, обаче *всеки от тях е пропорционален на* $\Delta\theta$. Тази величина $\Delta\theta$ може да се изнесе пред скоби и да се получи, че работата е равна на сумата от моментите на всички действуващи сили, умножена по $\Delta\theta$. Тази сума може да се нарече пълен момент на силите и да се означи с τ. Както виждате, моментите се събират по обикновените закони на алгебрата, обаче както ще узнаете после, това става поради обстоятелството, че се ограничаваме само с равнинни въртения. Тази ситуация напомня едномерно движение, в което силите просто се събират алгебрично, но само защото в този случай всички те действуват по една и съща права. В тримерното пространство всичко е по-сложно. По такъв начин за двумерното въртене

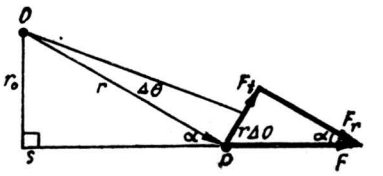
$$\tau_i = x_i F_{yi} - y_i F_{xi} \tag{18.12}$$

и

$$\tau = \sum_i \tau_i. \tag{18.13}$$

Трябва само да се помни, че това е в сила само за въртене около една ос. Ако се взимат различни оси, всички x_i и y_i ще се изменят, съответно ще се променят (обикновено) и стойностите на моментите.

Да се спрем сега за минута и да отбележим, че предишният начин за извеждане на момента дава много важен резултат за тяло, намиращо се в равновесие: ако са балансирани всички сили, действуващи върху обекта, и преместващите, и въртящите, необходимо е не само *пълната сила* да бъде равна на нула, но и *пълният момент,* тъй като при малко *преместване на обекта, намиращ се в равновесие, не се извършва никаква работа.* Следователно от това, че $\Delta W = \tau\Delta\theta = 0$, може да се заключи, че сумата на всички моменти трябва да бъде равна на нула. По такъв начин за равновесие трябва да бъдат изпълнени две условия: а) сумата от всички сили да е равна на нула и б) сумата от всички моменти също да е равна на нула. Опитайте се да докажете сами, че в двумерния случай е достатъчно да бъде равна на нула сумата от моментите на силите относно *една* каква и да е ос.



Фиг. 18.2. Въртящ момент, създаван от сила.

Да се върнем сега към случая на една сила, действуваща върху тялото, и да се опитаме геометрично да изясним какво означава странният израз $xF_y - yF_x$. На фиг. 18.2 вие виждате силата **F**, приложена в точка *P*. Когато тялото се завърта на малък ъгъл $\Delta\theta$, естествено е, че извършената при това работа е равна на съставящата по посока на преместването, умножена по големината на преместването. С други думи, работи само тангенциалната съставяща на силата, която се умножава по разстоянието $r\Delta\theta$. Затова моментът е равен на тангенциалната съставяща на силата (перпендикулярна към радиуса), умножена по радиуса. Това добре се съгласува с нашите обикновени представи за момента, защото напълно радиална сила не може да завърти тялото. Завъртащото действие на силата очевидно произлиза само от онази нейна част, която не дърпа тялото от центъра. Тя се и нарича тангенциална съставяща. Ясно е освен това, че дадената сила завъртва тялото толкова по-силно, колкото по-далече от центъра е приложена. Действително, в случай че натискаме право върху оста на тялото, никак няма да успеем да го завъртим! По такъв начин и този факт, че моментът на силата е пропорциона-

лен както на радиалното разстояние, така и на тангенциалната съставяща на силата, има своя смисъл.

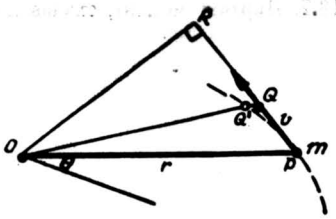
Съществува още и трети, твърде интересен израз за момента на силата. Както вие току-що разбрахте, моментът на силата е равен на сила, умножена по радиуса и по синуса на ъгъл α (вж. фиг. 18.2). Ако сега продължите линията на действие на силата и прекарате права, перпендикулярна на нея, то не е трудно да видите, че дължината OS (тя често се нарича *рамо на силата*) е толкова пъти по-къса от радиуса на силата, колкото тангенциалната съставяща на силата е по-малка от пълната ѝ стойност. Затова може да се запише, че моментът е равен на произведението от големината на силата по дължината на нейното рамо.

Ние не знаем точно откъде е произлязъл терминът „момент на сила“ — очевидно от латинското movimentum, което означава способност на силата да придвижва обекта (използвайки някакъв лост), способност толкова забележима, колкото по-дълго е рамото на силата. Между другото в математиката думата „момент“ означава осредняване с тегловна функция, която е равна на разстоянието до оста.

3. Момент на количеството на движение

Макар че досега ние разгледахме само специалния случай на твърдо тяло, свойствата на момента и неговият математически израз са интересни даже тогава, когато тялото не е твърдо. Може да се докаже много интересна теорема: подобно на това, че външната сила е равна на скоростта на изменението на величината p, която се нарича пълен импулс на системата от частици, така и моментът на силата е равен на скоростта на изменение на някаква величина L, наричана *момент на количеството на движение*, или *ъглов момент* на групата от частици.

За да докажем това, ще разгледаме система от частици, върху която действуват сили, и ще видим какво ще стане със системата в резултат от действието на въртящите моменти, създадени от тези сили. За начало нека вземеме само *една* частица. Такава частица с маса m и ос O е изобразена на фиг. 18.3. Не е задължително тя да се върти по окръжност около оста O, а може да се движи и по елипса подобно на планета около Слънцето или по някаква друга крива. Главното е това, че тя се движи, че на нея действува сила, която я ускорява в съответствие с обикновените закони: x-компонентата на силата е равна на масата, умножена по x-компонентата на ускорението, и т. н. Но да видим сега как действува *моментът на силата*. Той, както знаете, е равен на $xF_y - yF_x$, а x- и y-компонентите на силата на свой ред са равни на масата, умножена съответно по x- и y-компонентата на ускорението, така че



Фиг. 18.3. Движение на частица относно оста на въртевето O.

$$\tau = xF_y - yF_x = xm\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - ym\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right). \tag{18.14}$$

Макар изведнаж да не се вижда, че този израз е производна от някаква проста величина, но всъщност той е равен на производната от $xm(dy/dt) - ym(dx/dt)$. Действително

$$\frac{d}{dt}\left(xm\frac{dy}{dt} - ym\frac{dx}{dt}\right) = xm\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt}m\frac{dy}{dt} -$$

$$-ym\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt}m\frac{dx}{dt} = xm\frac{d^2y}{dt^2} - ym\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{18.15}$$

По такъв начин се оказва, че моментът на силата е равен на скоростта на изменение с времето на някаква величина! Нека обърнем внимание на тази величина и преди всичко да ѝ дадем име. Тя ще се нарича момент на количеството на движение или ъглов момент и ще се означава с буквата L

$$L = xm\frac{dy}{dt} - ym\frac{dx}{dt} = xp_y - yp_x. \tag{18.16}$$

Макар във всички наши разглеждания да не вземахме под внимание теорията на относителността, вторият израз за L е верен, когато се държи сметка и за нея. И така ние намерихме, че обикновеният импулс също има аналог при въртенето — ъгловият момент, който е свързан с компонентите на импулса точно така, както и моментът на силата е свързан с компонентите на силите! Така че ако искаме да пресметнем момента на количеството на движение спрямо някаква ос, трябва да вземем само тангенциалната съставяща на импулса и да я умножим по радиуса. С други думи, ъгловият момент показва колко бързо се движи частицата около някакъв център, нали в него се държи сметка само за тангенциалната част на импулса. Нещо повече, колкото по-далеч от центъра е разположена линията, по която е насочен импулса, толкова по-голям ще бъде ъгловият момент. Тъй като геометрията в този случай е същата, както и в случая с момента на силата, независимо дали величината се нарича p или F, съществува рамо на импулса (разбира се, то не съвпада с рамото на силата, действуваща на частицата), което е равно на разстоянието от линията на импулса до оста. По такъв начин ъгловият момент е равен просто на стойността на импулса, умножена по неговото рамо. Точно така, както и при момента на силата, за ъгловия момент можем да напишем следните три формули:

$$\begin{aligned} L &= xp_y - yp_x = \\ &= rp_{\text{танг.}} = \\ &= p\,. \text{ Рамото на импулса.} \end{aligned} \qquad (18.17)$$

Моментът на количеството на движение, както и моментът на силата, зависи от положението на оста, спрямо която се пресмята.

Преди да преминем към разглеждане на повече от една частица да приложим получените по-горе резултати за движението на планета около Слънцето. В каква посока действува силата? Разбира се, в посока към Слънцето. А какъв ще бъде при това моментът на силата? Разбира се, всичко зависи от това, в какво място ще изберем оста, обаче резултатът ще се получи съвсем прост, ако за точка на въртене изберем самото Слънце, защото моментът на силата е равен на силата, умножена по нейното рамо, или на компонентата на силата, перпендикулярна към радиуса r, умножена по r. Но в този случай няма никаква тангенциална съставяща на силата и затова моментът на силата спрямо ос, преминаваща през Слънцето, е равен на нула. Следователно моментът на количеството на движение трябва да остава постоянен. Нека видим какво означава това. Произведението от тангенциалната компонента на скоростта по масата и радиуса, бидейки момент на количеството на движение, трябва да остава постоянно, защото скоростта на неговото изменение е моментът на силата, който в нашия случай е равен на нула. Това означава, че произведението от тангенциалната компонента на скоростта по радиуса остава постоянно, тъй като масата, разбира се, не се променя. Но такава величина, характеризираща движението на планетата, беше вече пресметната от нас по-рано. Да предположим, че сме взели малък интервал от време Δt. Какво разстояние ще премине планетата при своето движение от точка P до точка Q (фиг. 18.3)? Колко голяма е *площта* на онази област, която „измита“ правата, съединяваща планетата със Слънцето? Пренебрегвайки площта $QQ'P$, която е много малка в сравнение с OPQ, намираме, че площта на тази област е равна на половината от основата PQ, умножена по височината OR. С други думи, „изметената“ площ е равна на половината от произведението на скоростта по нейното рамо. Така че скоростта на изменение на тази площ е пропорционална на момента на количеството на движение, който остава постоянен. И така ние получихме, че законът на Кеплер за равните площи през равни интервали от време се явява просто словесно описание на закона за запазване на количеството на движение, когато липсват моментите на външните сили.

4. Закон за запазване момента на количеството на движение.

Да разгледаме сега какво се получава в случай на голямо количество частици, т. е. когато тялото се състои от множество частички с множество сили, действуващи между тях и отвън. Разбира се, ние вече знаем, че моментът на силата, действуващ на всяка i-та частица (т. е. произведението на силата, действуваща на i-тата частица, и нейното рамо), е равен на скоростта на изменението на момента на количеството на движение на тази частица, а моментът на количеството на движение на i-тата частица на свой ред е равен на произведението от импулса на частицата и неговото рамо. Да допуснем сега, че сме събрали моментите на силите τ_i на всички частици и сме нарекли това пълен момент на силите τ. Тази величина трябва да бъде равна на скоростта на изменение на сумата от моментите на количеството на движение на всички частици L_i. Тази сума може да се приеме за определение на нова величина, която ще наречем пълен момент на количеството на движение L. Точно така, както импулсът на тялото е равен на сумата от импулсите на съставящите го частици, моментът на количеството на движение на тялото също е равен на сумата от моментите на съставящите го частици. По такъв начин скоростта на изменение на пълния момент на количеството на движение L е равна на пълния момент на силите:

$$\tau=\sum_i \tau_i=\sum_i \frac{dL_i}{dt}=\frac{dL}{dt}. \qquad (18.18)$$

Поради липсата на навик може да изглежда, че пълният момент на силите е ужасно сложно нещо. Нали трябва да се отчитат всички вътрешни и външни сили. Обаче, ако си спомним, че по закона на Нютон силите на действието и противодействието не само са равни, но и (което е особено важно!) *действуват по една и съща права в противни посоки* (не е важно говорил ли е за това самият Нютон или не, но явно той го е подразбирал), двата *момента* на вътрешните сили между две взаимодействуващи частици трябва да бъдат равни един на друг и насочени противоположно, тъй като за всяка ос рамената им ще бъдат еднакви. Поради това всички вътрешни моменти на сили взаимно ще се унищожат и се получава забележителна теорема: *скоростта на изменение на момента на количеството на движение спрямо всяка ос е равна на моментите на външните сили спрямо същата ос!*

$$\tau=\sum \tau_i=\tau_{\text{вън}}=\frac{dL}{dt}. \qquad (18.19)$$

И така ние получихме в ръцете си мощна теорема за движението на голям колектив от частици, която ни позволява да изучаваме общите свойства на движението, без да знаем детайлите на неговия вътрешен механизъм. Тази теорема е вярна за всеки набор от частици, независимо от това образуват ли те твърдо тяло, или не.

Особено важен частен случай на тази теорема е *законът за запазване на момента на количеството на движение,* който гласи: ако на системата частици не действуват никакви външни моменти на сили, то нейният момент на количество движение остава постоянен.

Да разгледаме един много важен частен случай на набор от частици, когато те образуват твърдо тяло, т. е. обект, който винаги има определена форма и геометричен размер и може само да се върти около някоя ос. Всяка част от такъв обект във всеки момент от времето е разположена по един и същ начин спрямо другите му части. Да се опитаме сега да намерим пълния момент на количеството на движение на твърдото тяло. Ако масата на i-тата частица е равна на m_i, а положението ѝ е (x_i, y_i), задачата се свежда до определяне момента на количеството на дви-

жение на тази частица, тъй като пълният момент на количеството на движение е равен на сумата от моментите на количеството на движение на всички такива частици, които образуват тялото. За движещата се по окръжност точка моментът на количеството на движение е равен, разбира се, на произведението от нейната маса по скоростта и по разстоянието до оста на въртението, а скоростта на свой ред е равна на ъгловата скорост, умножена по разстоянието до оста:

$$L_i = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega. \tag{18.20}$$

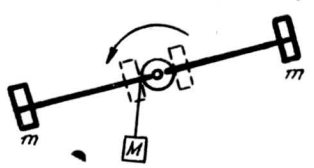
Сумирайки L_i за всички частици, получаваме:

$$L = I\omega, \tag{18.21}$$

където

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{18.22}$$

Този израз много прилича по формулата за импулса, който е равен на произведението от масата и скоростта. Скоростта при това се заменя с ъгловата скорост, а масата, както виждате, се заменя с една нова величина, *наречена инерчен момент I*. Ето какво изпълнява ролята на маса при въртенето! Уравненията (18.21) и (18.22) ни показват, че инерцията на въртенето на тялото зависи не само от масата на съставящите го частички, но и от това *колко далече са разположени те от оста*. Така че, ако имаме две тела с еднакви маси, но в едното от тях масата е разположена по-далече от оста, неговата инерция при въртенето ще бъде по-голяма. Това лесно се демонстрира с устройството, изобразено на фиг. 18.4. Масата M в това устройство не може да пада много бързо, защото тя трябва да върти тежък лост. Да разположим отначало масата m около оста на въртенето, при което товарът M по някакъв начин ще се ускорява. Обаче след като изменим инерчния момент, като разположим масата m значително по-далече от оста, ние ще видим, че товарът M ще се ускорява значително по-бавно, отколкото преди. Това става вследствие нарастването на инертността на въртенето, която представлява физическият смисъл на инерчния момент — сумата от произведенията на всички маси и квадратите на техните разстояния от оста на въртенето.



Фиг. 18.4. Зависимост на „инерцията на въртенето“ от рамото на масите.

Между масата и инерчния момент има съществена разлика, която се проявява по драматичен начин. Работата е в това, че масата на обекта обикновено не се променя, докато инерчният момент може *леко* да бъде променен. Представете си, че сте стъпили на маса, която може да се върти без триене, и държите в протегнатите си ръце гири, а сами бавно се въртите. Може лесно да се промени инерчният момент, като се сгънат ръцете; при това вашата маса ще остане същата. Когато направите всичко това, законът за запазване на количеството на движение ще твори чудеса, ще стане нещо удивително. Ако моментите на външните сили са равни на нула, моментът на количеството на движение е равен на инерчния момент I_1, умножен с ъгловата скорост ω_1, т. е. вашият момент на количеството на движение е равен на $I_1\omega_1$. Като сгънете след това ръцете си, вие с това ще намалите инерчния момент до стойност I_2. Но тъй като поради закона за запазване момента на количеството на движение произведението $I\omega$ трябва да остане същото, то $I_1\omega_1$ трябва да бъде равно на $I_2\omega_2$. Така че, ако сте *намалили* инерчния момент, вашата ъглова скорост в резултат от това трябва да *нарасне*.

19

Център на масите; инерчен момент

1. Свойства на центъра на масите
2. Положение на центъра на масите
3. Пресмятане на инерчния момент
4. Кинетична енергия на въртенето

1. Свойства на центъра на масите

В предишната глава ние установихме факта за съществуването на една забележителна точка, наричана *център на масите*. Тя е забележителна с това, че ако на частиците, образуващи тялото (не е важно дали това ще е твърдо или течно тяло, звездно натрупване или нещо друго), действува голямо множество от сили (разбира се, имат се предвид само външните сили, понеже всички вътрешни сили се компенсират), резултантната сила ще доведе до такова ускорение на тази точка, сякаш в нея е съсредоточена цялата маса на тялото M. Нека сега обсъдим свойството на центъра на масите малко по-подробно.

Положението на центъра на масите (съкратено ц. м.) се определя от уравнението:

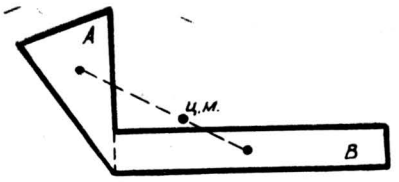
$$\mathbf{R}_{\text{ц. м.}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} \tag{19.1}$$

Това, разбира се, е векторно уравнение, т. е. фактически три уравнения — по едно за всяко от трите направления. Ние ще разглеждаме само x-направлението; ако разберете какво става в x-направлението, ще разберете и в двете други направления. Какво означава равенството $X_{\text{м.}} = \Sigma m_i x_i / \Sigma m_i$? Да предположим за момент, че тялото е разделено на малки късчета с еднаква маса m, при което пълната маса ще бъде равна на броя на тези късчета N, умножен по масата на едно късче, да кажем 1 g, или някаква друга единица. Тогава нашето уравнение означава просто, че трябва да се вземат координатите x на всички късчета, да се съберат и резултатът да се раздели с броя на късчетата, т. е. $X_{\text{ц. м.}} = m\Sigma x_i / mN = \Sigma x_i / N$. С други думи, ако масите на късчетата са равни, $X_{\text{ц. м.}}$ ще бъде просто средното аритметично от x-координатите на всички късчета. Но да предположим, че едно от късчетата е два пъти по-тежко, отколкото всяко от останалите. Тогава в нашата формула неговата координата ще влиза с коефициента 2, т. е. в сумите трябва да я отчитаме два пъти. Не е трудно да се разбере защо става така. Нали можем да си представим тежкия къс като състоящ се от два леки, такива, каквито са и всички останали, така че, когато изчисляваме средното, неговата x-координата трябва да се отчита два пъти: нали късчетата в това място са две. По такъв начин $X_{\text{ц. м.}}$ е равно просто на средното аритметично от x-координатите на всички маси, при което всяка координата се взима определено число пъти, пропорционално на масата, така сякаш тя е разделена на малки късчета единична маса. Изхождайки от това, лесно се доказва, че $X_{\text{ц. м.}}$ трябва да се намира някъде между най-близката и най-далечната частица. Въобще центърът на масите трябва да лежи някъде вътре в многостена, прекаран през крайните точки на тялото. Обаче съвсем не е задължително центърът на масите да се намира в самото тяло; нали може да има тела, подобни на окръжността, напр. един обръч, центърът на масите на който се намира в геометричния център, а не в самия обръч.

Разбира се, ако обектът е симетричен, например правоъгълник, притежаващ равнина на симетрия, неговият център на масите трябва да лежи някъде върху тази равнина. Впрочем правоъгълникът има още една равнина на симетрия и това еднозначно определя

положението на неговия център на масите. За просто симетричен обект центърът на масите трябва да лежи някъде върху оста на симетрия: нали отрицателните x в този случай са точно толкова, колкото и положителните.

Съществува още един много любопитен начин за намиране центъра на масите. Представете си тяло, състоящо се от два къса A и B (фиг. 19.1). Центърът на масите в този случай може да се намери по следния начин. Отначало намираме поотделно центровете на масите на съставните части A и B и техните пълни маси M_A и M_B. След това намираме центъра на масите на две точкови тела, едното от които има маса M_A и е разположено в центъра на масите на частта A, а другото — маса M_B и е разположено в центъра на масите на частта B Получената точка ще бъде центърът на масите на цялото тяло. С други думи, ако са ни известни центровете на масите на всички части на сложното тяло, за да се намери неговият център на масата, не е нужно да повтаряме всичко отначало, а е достатъчно просто да се намери центърът на масите на система от точкови тела с маси, равни на масите на всяка от частите и разположени в техните центрове на масите. Да видим защо това е така.



Фиг. 19.1. Центърът на масите на сложно тяло лежи по линията, съединяваща центъра на масите на двете съставящи го части.

Нека да определим центъра на масите на сложно тяло, едни от частиците на което принадлежат на частта A, а други — на частта B. При това ние можем да разбием пълната сума $\Sigma m_i x_i$ на сума по частта A, т. е. $\sum\limits_A m_i x_i$, и на сума по частта B, т. е. $\sum\limits_B m_i x_i$. Ако ние търсехме центъра на масите само на частта А, би ни потрябвала само първата от тези суми, която, както знаете, е равна на $M_A X_A$, т. е. на пълната маса на частта A по x-координатата на нейния център на масите: това е просто следствие на теоремата за центъра на масите, приложена към частта A. Същото това може да се каже и за частта B. Сумата $\Sigma_B m_i x_i$ трябва да бъде равна на $M_B X_B$. Като се съберат тези два резултата, ние, разбира се, трябва да получим MX, т. е.

$$MX_{\text{ц. м.}} = \sum_A m_i x_i + \sum_B m_i x_i = M_A X_A + M_B X_B. \qquad (19.2)$$

Пълната маса M очевидно е равна на $M_A + M_B$, така че изразът (19.2) не представлява нищо друго, освен определяне центъра на масата на две точки, едната от които има маса M и координата X_A, а другата — маса M_B и координата X_B.

Теоремата за движението на центъра на масите е интересна не само сама за себе си, тя играе важна роля в развитието на нашето разбиране на физиката. Ако предположим, че Нютоновите закони са верни само за малки части, съставящи голямото тяло, тази теорема показва, че те са верни също и за голямото тяло. Ние можем да не знаем неговия строеж в детайли и да са ни известни само общата маса и пълната сила, действуваща върху него. С други думи, законите на Нютон имат тази особеност, че ако са верни в малък мащаб, те са верни и в голям. Няма никаква необходимост да се разглежда футболната топка като ужасно сложно нещо, състоящо се от несметно множество взаимодействуващи частици, а е достатъчно да се изучи само движението на нейния център на масите под действие на външна сила $\mathbf{F}$, за да се получи $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, където $\mathbf{a}$ е ускорението на центъра на масите, а m — пълната маса на тялото. И така законът $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ възпроизвежда сам себе си в голям мащаб. (Навярно трябва да има някаква хубава гръцка дума, с която биха могли да се наричат подобни възпроизвеждащи себе си в по-голям мащаб закони.)

Не е трудно, разбира се, да се досетим, че първият открит от човека закон трябва да е бил именно такъв закон, възпроизвеждащ самия себе си в голям мащаб. Защо? Просто за това, защото истинският размер на фундаменталните „винтчета и колелца“ на Вселената е атомният размер, който е толкова по-малък от размерите на окръжаващите ни неща, че никъде в нашите всекидневни наблюдения не виждаме нищо с такива мащаби.

И така първата открита от човека закономерност не е могла да има отношение към размерите от атомен мащаб. Ако законите за малките частици не възпроизвеждаха себе си в голям мащаб, да се открият те не би било така лесно. А какво може да се каже за обратната проблема? Трябва ли законите на микросвета да бъдат същите, каквито са и за големите тела? Разбира се, не е необходимо законите на атомно ниво да бъдат същите както при големи мащаби.

Нека обаче предположим, че истинското движение на атомите се описва от някакво странно уравнение, което не *възпроизвежда* себе си при прехода към големите мащаби. Вместо това то притежава свойството, че при такъв преход то може *приблизително да бъде заменено* с някакъв израз, който при все по-голямо и по-голямо увеличение на мащаба възпроизвежда сам себе си. Това напълно може да се случи и в действителност така и става. Нютоновите закони представляват като че ли „краят на опашката" на атомните закони, продължени до много големи размери. Истинските закони на движението за частици с много малки размери са твърде специфични, но ако вземем голям брой частици и комбинираме законите на тяхното движение, то приблизително, и *само приблизително*, ще получим законите на Нютон. След това Нютоновите закони ни позволяват да се движим към все по-големи размери, като си остават при това същите закони. Всъщност при преход към все по-големи и по-големи размери те все по-точно и по-точно описват природата. Така че фактът за самовъзпроизводимостта на Нютоновите закони съвсем не е фундаментално свойство на природата, а важна историческа особеност.

Основавайки се на своите първи наблюдения, ние по никакъв начин не бихме успели да открием фундаменталните атомни закони, понеже тези наблюдения са били твърде груби. Действително фундаменталните атомни закони, които ние наричаме квантова механика, така силно се отличават от Нютоновите закони, че не е просто да се разберат, защото всички наши преки опити се извършват с тела с големи размери, а много дребните атоми имат поведение, съвършено различно от всичко, което виждаме при големи мащаби. Ние не можем да кажем: „Електроните в атомите напомнят планетите, въртящи се около Слънцето", или нещо от този род. Те не приличат *на нищо*, което ни е известно, тъй като ние не виждаме *нищо подобно на тях*. Ако ние приложим квантовата механика към все по-големи и по-големи обекти, законите за поведението на такъв колектив от атоми не възпроизвеждат поведението на един атом, а дават *нов закон* — закон на Нютон, който вече възпроизвежда сам себе си, започвайки от обекти с тегло от една милионна от микрограма, съдържащи все пак милиарди и милиарди атоми, чак до тела с големината на Земята и даже още по-големи.

Да се върнем обаче към центъра на масите. Често го наричат *център на тежестта*, тъй като в много случаи за силите на притеглянето може да се направят точно такива разсъждения, каквито и за масите. Ако размерите са достатъчно малки, силата на теглото може да се счита не само пропорционална на масата, но и насочена навсякъде успоредно на някоя фиксирана линия.

Да вземем тяло, в което теглото действува на всяка от съставящите го части, а m_i е масата на една от тези части. Действуващата върху нея сила на теглото ще бъде равна на произведението от m_i и g. Възниква въпросът: в каква точка трябва да се приложи една единствена сила, за да се балансира притеглянето на цялото тяло, така че то (ако това е твърдо тяло) да не се върти? *Отговор*: силата трябва да преминава през центъра на масите. Това се доказва по следния начин. За да не се върти тялото, сумата от моментите на всички сили трябва да бъде равна на нула, тъй като, ако няма момент на сила, няма и изменение на момента на количеството на движение, а поради това няма и въртене. По такъв начин ние трябва да пресметнем сумата на всички моменти, действуващи на всички частици, и да видим какъв пълен момент ще се получи спрямо коя

да е дадена ос: той трябва да бъде равен на нула, ако оста преминава през центъра на масите. Като насочим оста x хоризонтално, а оста y вертикално, ние ще намерим, че моментите на силите са равни на силите, насочени надолу, умножени по рамото x (т. е. силата по рамото спрямо тази ос, за която измерваме момента на силата). Пълният момент ще бъде равен на сумата:

$$\tau = \Sigma m_i g x_i = g \Sigma m_i x_i. \tag{19.3}$$

За да се анулира пълният момент, сумата $\Sigma m_i x_i$ трябва да бъде равна на нула. Но тази сума е равна на MX — пълната маса, умножена по разстоянието от оста x до центъра на масите. И така това разстояние трябва да бъде равно на нула.

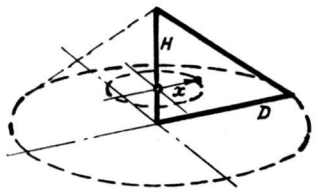
Разбира се, ние направихме проверка само за x-направлението, обаче ако действително сме взели центъра на масите, тялото трябва да бъде уравновесено във всяко положение, защото като го завъртим на 90°, вместо оста x ще получим оста y. С други думи, ако тялото се закрепи в центъра на масите, успоредното гравитационно поле не дава никакъв момент на сили. Ако пък обектът е толкова голям, че става съществена неуспоредността на силите на привличането, то точката, в която трябва да бъде приложена уравновесяващата сила, не се описва просто: тя малко се отклонява от центъра на масите. Ето защо трябва да се помни, че центърът на масите и центърът на тежестта са различни неща. Фактът, че тяло, закрепено точно в центъра на масите, е уравновесено във всяко положение, има още едно интересно следствие: Ако вместо гравитационните сили вземем инерчни псевдо-сили, възникващи вследствие на ускорението, за да се намери точката, за която като се заловим, ще уравновесим всички моменти на тези сили, може да се използува същата математическа процедура. Да предположим, че сме затворили тяло вътре в един сандък, който се ускорява заедно с цялото си съдържание. Тогава от гледна точка на наблюдателя, седящ в сандъка, на тялото вследствие на инерцията ще действува някаква ефективна сила. С други думи, за да се застави тялото да се движи заедно със сандъка, трябва да се тласка и ускорява. Тази сила „се уравновесява от силата на инерцията", която е равна на масата на тялото, умножена по ускорението на сандъка. На наблюдателя в сандъка ще му се струва, че тялото се намира в хомогенно гравитационно поле, стойността на което е равна на ускорението на сандъка a. По такъв начин инерчните сили, възникващи вследствие ускорението на тялото, нямат момент спрямо центъра на масите.

Този факт има много интересно следствие. В инерциална система, движеща се без ускорение, моментът на силите е равен винаги на скоростта на изменението на момента на количеството на движение. Обаче равенството на момента на силата и скоростта на изменение на момента на количеството на движение *остава вярно* даже за ускоряващо се тяло, ако се вземе ос, преминаваща през центъра на масите. По такъв начин теоремата за равенството на момента на силите и скоростта на изменението на момента на количеството на движение е вярна в два случая: 1) оста е фиксирана — в инерциална система; 2) оста преминава през центъра на масите — даже когато тялото се ускорява.

2. Положение на центъра на масите

Математическата техника за пресмятане центъра на масите се отнася до области от курсовете по математика; там подобни задачи служат като хубави примери по интегрално смятане. Но даже и когато умеете да интегрирате, полезно е да знаете някои трикове за пресмятане положението на центъра на масите. Един от тези трикове е основан върху използването на така наречената теорема на Пап, по която се работи по следния начин. Ако вземем някаква затворена фигура в равнината и образуваме твърдо тяло, въртейки тази фигура в пространството така, че всяка точка да

се движи перпендикулярно на равнината на фигурата, обемът на образувалото се при това движение тяло е равен на произведението от площта на фигурата и разстоянието, изминато от нейния център на масите! Разбира се, тази теорема е вярна и в онзи случай, когато плоска фигура се движи по права линия, перпендикулярна към нейната площ, обаче ако ние я движим по окръжност или по някаква друга крива, се получава значително по-интересно тяло. При движение по криволинеен път вътрешната част на фигурата се придвижва по-малко, отколкото външната, и тези ефекти се компенсират. Така че, ако искаме да определим центъра на масите на плоска фигура с хомогенна плътност, трябва да се помни, че обемът, образуван от въртенето спрямо оста, е равен на разстоянието, което преминава центърът на масите, умножено по площта на фигурата.



Фиг. 19.2. Правоъгълен триъгълник и прав кръгов конус, ебразуван от въртенето на този триъгълник

Например ако ви трябва да намерите центъра на масите на правоъгълен триъгълник с основа D и височина H (фиг. 19.2), това се прави по следния начин. Представете си ос, преминаваща по H, и завъртете триъгълника на 360° около тази ос. Получаваме един конус. Разстоянието, което изминава x-координатата на центъра на масите, е равно на $2\pi x$, а площта на областта, която се е движела, т. е. площта на триъгълника, е равна на $\frac{1}{2}HD$. Произведението от разстоянието, изминато от центъра на масите, по площта на триъгълника е равно на обема на конуса, т. е. $\frac{1}{3}\pi D^2H$. По такъв начин $(2\pi x)\left(\frac{1}{2}HD\right)=\frac{1}{3}\pi D^2H$ или $x=D/3$. Съвършено аналогично чрез въртене около втория катет или просто от съображения за симетрия намираме, че $y=H/3$. Въобще центърът на масите на всеки хомогенен триъгълник се намира в пресечната точка на трите му медиани (линиите, съединяващи връх на триъгълника със средата на срещулежащата страна), която отстои от основата на разстояние, равно на $\frac{1}{3}$ от дължината на всяка медиана.

Как да се види това? Разсечете триъгълника с линии, успоредни на основата, на множество ивички. Забележете сега, че медианата дели всяка ивичка наполовина, следователно центърът на масите трябва да лежи на медианата.

Да вземем сега по-сложна фигура. Да предположим, че трябва да се намери положението на центъра на масите на хомогенен полукръг, т. е. кръг, разрязан наполовина. Къде ще се намира центърът на масите в този случай? За пълния кръг центърът на масите се намира в геометричния център, но за полукръг е по-трудно да се намери неговото положение. Нека r е радиусът на кръга, а x — разстоянието от центъра на масите до праволинейната граница на полукръга. Като го въртим около този край като около ос, ние получаваме сфера. При това центърът на масите преминава разстояние $2\pi x$, а площта на полукръга е равна на $\frac{1}{2}\pi r^2$ (половината от площта на кръга). Тъй като обемът на сферата е равен, разбира се, на $4\pi r^3/3$, оттук намираме:

$$\left(2\pi x\right)\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right)=\frac{4\pi r^3}{3},$$

или

$$x=\frac{4r}{3\pi}.$$

Съществува и друга теорема на Пап, която фактически е частен случай на формулираната по-горе теорема и затова също е вярна. Да предположим, че вместо твърд полукръг сме взели полуокръжност, например със от проводник във вид на полуокръжност с хомогенна плътност, и искаме да намерим неговия център на масите. В този случай няма маси във вътрешността, а само по жицата. Оказва се, че *площта*, която „измита“ плоската крива при нейното движение, аналогично на описаното по-горе, е равна на разстоянието, изминато от центъра на масите, умножено по *дължината* на тази крива. (Кривата можем да разглеждаме като много тясна ивичка и да приложим към нея предишната теорема.)

3. Пресмятане на инерчния момент

Ще разгледаме сега проблемата за определяне на *инерчния момент* на различни тела. Общата формула за намиране на инерчния момент на обект относно оста z има вида:

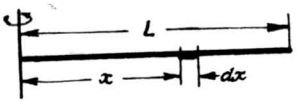
$$I = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2),$$

или

$$I = \int (x^2+y^2)\, dm = \int (x^2+y^2)\rho dv. \qquad (19.4)$$

С други думи, трябва да се съберат всички маси, като се умножи всяка от тях с квадрата на нейното разстояние до оста $(x_i^2 + y_i^2)$. Забележете, че това е вярно даже за тримерно тяло независимо от това, че разстоянието има такъв „двумерен вид". Впрочем в повечето случаи ние ще се ограничим с двумерни тела.

Като прост пример ще разгледаме прът, въртящ се относно ос, която преминава през края му и е перпендикулярна на пръта (фиг. 19.3). Трябва да сумираме сега всички маси, умножени с квадратите на разстоянието x (в този случай всички y са нули). Под „сума" аз разбирам интеграл от x^2, умножен с „елементи" от масата. Ако разделим пръта на късчета с дължина dx, съответният елемент от масата ще бъде пропорционален на dx, а ако dx представляваше дължината на целия прът, неговата маса би била равна на M. Поради това



Фиг. 19.3. Прав прът с дължина L, въртящ се около ос, преминаваща през един от краищата му

$$dm = \frac{M dx}{L}$$

и

$$I = \int_0^L x^2 \frac{M dx}{L} = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{ML^2}{3}. \qquad (19.5)$$

Размерността на инерчния момент винаги е равна на масата, умножена с квадрата на дължината, така че единствената съществена величина, която пресметнахме, това е множителят 1/3.

А на какво ще бъде равен инерчният момент I, ако оста на въртенето преминава през средата на пръта? За да го намерим, ние отново трябва да пресметнем интеграла, но вече в граници от $-{}^1/_2 L$ до $+{}^1/_2 L$. Да отбележим обаче една особеност на този случай. Такъв прът с преминаваща през центъра ос можем да си го представим като два пръта с ос, преминаваща през края, при което масата на всеки от тях е равна на $M/2$, а дължината е равна на $L/2$. Инерчните моменти на два такива пръта са равни помежду си и се пресмятат по формула (19.5). Поради това инерчният момент на целия прът е равен на:

$$I = \frac{2(M/2)(L/2)^2}{3} = \frac{ML^2}{12}. \qquad (19.6)$$

Затова пръчът се върти значително по-лесно около средата, отколкото около края.

Може, разбира се, да се продължи пресмятането на инерчните моменти за други интересуващи ни тела. Но доколкото такива пресмятания изискват голям опит при пресмятане на интегралите (което е много важно), те не представляват за нас голям интерес. Впрочем тук има една много интересна и полезна теорема. Нека е дадено някакво тяло и искаме да узнаем неговия инерчен момент относно някаква ос. Това значи, че искаме да намерим инертността му при въртенето около тази ос. Ако ние движим тялото посредством прът, подпиращ неговия център на масите така, че то да не се преобръща при въртене около оста (в този случай върху тялото не действуват никакви моменти на инерчните сили, поради това тялото няма да се преобръща, когато започнем да го движим), за да го завъртим, ще ни потрябва точно такава сила, каквато би ни трябвала, ако цялата

маса е съсредоточена в центъра на масите и инерчният момент е равен просто на $I_1 = MR^2_{\text{ц.м.}}$, където $R_{\text{ц.м.}}$ е разстоянието от центъра на масите до оста на въртенето. Обаче тази формула, разбира се, не е вярна. Тя не дава правилния инерчен момент на тялото. Нали в действителност при завой тялото се върти. Завъртта се не само центърът на масите (което би дало величината I_1), самото тяло също трябва да се върти около центъра на масите. По такъв начин към инерчния момент I_1 трябва да се добави $I^{\text{ц}}$— инерчният момент относно центъра на масите. Правилният отговор се състои в това, че инерчният момент относно всяка ос е равен на:

$$I = I_{\text{ц}} + MR^2_{\text{ц.м.}}. \tag{19.7}$$

Тази теорема се нарича *теорема за успоредно пренасяне на оста.* Тя се доказва много лесно. Инерчният момент спрямо всяка ос е равен на сумата от масите, умножена със сумата от квадратите на x и y, т. е. $I = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$. Сега ще съсредоточим нашето внимание върху x, обаче всичко точно може да се повтори и за y. Нека координатата x е разстоянието от дадената определена точка до началото на координатите; да видим обаче как ще се измени всичко, ако измерваме разстоянието x' от центъра на масите вместо x от началото на координатите. За да изясним това, трябва да напишем:

$$x_i = x_i' + X_{\text{ц.м.}}.$$

Като повдигнем този израз на квадрат, намираме:

$$x_i^2 = x_i'^2 + 2X_{\text{ц.м.}}\, x_i' + X^2_{\text{ц.м.}}$$

Какво ще се получи, ако умножим това равенство с m_i и сумираме по всички i? Изнасяйки постоянните величини пред знака за сума, намираме:

$$I_x = \sum m_i x_i'^2 + 2X_{\text{ц.м.}} \sum m_i x_i' + X^2_{\text{ц.м.}} \sum m_i.$$

Третата сума се пресмята лесно; това е просто $MX^2_{\text{ц.м.}}$. Вторият член се състои от два множителя, един от които е $\sum m_i x_i'$; той е равен на x' — координатата на центъра на масите. Но това трябва да бъде равно на нула, нали x' *се отчита* от центъра на масите, а в тази координатна система средното положение на всички частички, преценено по техните маси, е равно на нула. Първият член очевидно представлява частта x от $I_{\text{ц}}$. По такъв начин ние идваме до формула (19.7), точно както предположихме.

Нека да проверим формула (19.7) с един пример. Просто ще проверим ще бъде ли приложима тя за пръта. Вече намерихме, че инерчният момент на пръта спрямо края му трябва да бъде равен на $ML^2/3$. А центърът на масите на пръта се намира, разбира се, на разстояние $L/2$. По такъв начин трябва да получим, че $ML^2/3 = ML^2/12 + M(L/2)^2$. Тъй като една четвърт + една дванайсета = една трета, ние не сме направили никаква груба грешка.

Впрочем, за да се намери инерчният момент (19.5), съвсем не е задължително да се пресмята интегралът. Може просто да се предположи, че той е равен на величината ML^2, умножена по някакъв неизвестен коефициент γ. След това може да се използват разсъжденията за двете половинки и за инерчния момент (19.6) да се получи коефициентът $^1/_4\gamma$. Използвайки сега теоремата за успоредното пренасяне на оста, ще докажем, че $\gamma = {}^1/_4\gamma + {}^1/_4$, откъдето $\gamma = {}^1/_3$. Винаги може да се намери някакъв околен път!

При прилагане на теоремата за успоредните оси е важно да се помни, че оста за $I_{\text{ц}}$ *трябва да бъде успоредна* на оста, спрямо която искаме да пресметнем инерчния момент.

Струва си все пак да се спомене още за едно свойство, което често бива много полезно при намиране на инерчния момент на някои типове тела. То се състои в следното: ако имаме *плоска фигура* и три координатни оси с начало на координатната система, разположено в тази равнина, и ос z, насочена перпендикулярно към нея, инерчният момент на тази фигура спрямо оста z е равен на сумата от инерчните моменти спрямо осите x и y. Това се доказва много просто. Да отбележим, че

$$I_x=\sum{}' m_i(y_i^2+z_i^2)=\sum m_i y_i^2$$

(тъй като всички $z_i=0$). Аналогично

$$I_y=\sum m_i(x_i^2+z_i^2)=\sum m_i x_i^2,$$

но

$$I_z=\sum m_i(x_i^2+y_i^2)=\sum m_i x_i^2+\sum m_i y_i^2=I_x+I_y.$$

Инерчният момент на хомогенна правоъгълна пластинка, например с маса M — ширина w и дължина L спрямо ос, перпендикулярна към нея и преминаваща през центъра ѝ, е равен просто на

$$I=M(w^2+L^2)/12,$$

тъй като инерчният момент спрямо ос, лежаща в равнината на пластинката и успоредна на дължината ѝ, е равен на $Mw^2/12$, т. е. точно такъв, какъвто и за прът с дължина w, а инерчният момент спрямо другата ос в същата равнина е равен на $ML^2/12$, такъв, какъвто и за прът с дължина L.

И така да изброим свойствата на инерчния момент относно дадена ос, която ние ще наречем ос z:

1. Инерчният момент е равен на:

$$I_z=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)=\int(x^2+y^2)dm.$$

2. Ако предметът се състои от няколко части, при което инерчният момент на всяка от тях е известен, пълният инерчен момент е равен на сумата от инерчните моменти на тези части.

3. Инерчният момент относно всяка дадена ос е равен на инерчния момент относно успоредната ос, преминаваща през центъра на масите, плюс произведението от пълната маса и квадрата на разстоянието от дадената ос до центъра на масите.

4. Инерчният момент на плоска фигура относно ос, перпендикулярна към нейната плоскост, е равен на сумата от инерчните моменти относно кои да са две други взаимно перпендикулярни оси, лежащи в равнината на фигурата и пресичащи се с перпендикулярната към нея ос.

Таблица 19.1 **Прости примери за инерчни моменти**

Предмет	Ос z	I_z
Тънък прът с дължина L	Преминава през центъра, перпендикулярно на пръта	$ML^2/12$
Тънък цилиндричен пръстен с радиуси r_1 и r_2	Преминава през центъра на пръстена, перпендикулярно на равнината на пръстена.	$M(r_1^2+r_2^2)/2$
Сфера с радиус r	Преминава през центъра	$2Mr^2/5$

В таблица 19.1 са дадени инерчните моменти на някои елементарни фигури, имащи хомогенна плътност на масата, а в таблица 19.2 — инерчните моменти на някои фигури, които могат да бъдат получени от таблица 19.1 с използване на изброените по-горе свойства.

Таблица 19.2 Инерчни моменти, получени от таблица 19.1

Предмет	Ос z	I_z
Правоъгълник със страни a и b	Преминава през центъра, успоредно на b	$Ma^2/12$
Правоъгълник със страни a и b	Преминава през центъра, перпендикулярно на равнината	$M(a^2+b^2)/12$
Тънък концентричен пръстен с радиуси r_1 и r_2	Всеки диаметър	$M(r_1^2+r_2^2)/4$
Правоъгълен паралелепипед със страни a, b и c	Преминава през центъра, успоредно на c	$M(a^2+b^2)/12$
Прав кръгов цилиндър с радиус r и дължина L	Преминава през центъра, успоредно на L	$Mr^2/2$
Прав кръгов цилиндър с радиус r и дължина L	Преминава през центъра, перпендикулярно на L	$M(r^2/4+L^2/12)$

4. Кинетична енергия на въртенето

Да продължим изучаването на динамиката на въртенето. При обсъждането на аналогията между линейното и ъгловото движение в гл. 18 ние използвахме теоремата за работата, но нищо не говорихме за кинетичната енергия. Каква ще бъде кинетичната енергия на твърдо тяло, въртящо се около някаква ос със скорост ω? Използувайки нашата аналогия, може незабавно да се отгатне правилният отговор. Инерчният момент съответствува на масата, ъгловата скорост съответствува на обикновената скорост, така че кинетичната енергия трябва да бъде равна на $^1/_2 I\omega^2$. Така е и в действителност и сега ние ще покажем това. Да предположим, че тялото се върти около някаква ос, така че всяка точка се движи със скоротт ωr_i, където r_i е разстоянието от дадената точка до оста. Ако масата на тази точка е равна на m_i, пълната кинетична енергия на цялото тяло е равна просто на сумата от кинетичните енергии на всички частици:

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum m_i(r_i\omega)^2,$$

а тъй като ω е постоянна, една и съща за всички точки,

$$T=\frac{1}{2}\omega^2\sum m_i r_i^2=\frac{1}{2}I\omega^2. \qquad (19.8)$$

В края на глава 18 ние отбелязахме, че съществуват много интересни явления, свързани с въртенето на тяло, което не е абсолютно твърдо, способно да променя своя инерчен момент. Именно в примера с въртящата се маса ние имахме инерчен момент I_1 и ъглова скорост ω_1 при протегнати ръце. Като прибрахме ръцете, ние изменихме инерчния момент до I_2 и ъгловата скорост — до ω_2. Тъй като нямаме никакви моменти на сили спрямо оста на въртенето на масата, моментът на количеството на движение трябва да остава постоянен. Това означава, че $I_1\omega_1=I_2\omega_2$. А какво може да се каже за енергията? Това е много интересен въпрос. Като сгънем ръце, ние започваме да се въртим по-бързо, но инерчният момент при това се намалява и може да изглежда, че кинетичната енергия трябва да остава същата. Това обаче не е вярно, защото в действителност *се запазва* $I\omega$, а не $I\omega^2$. Да сравним сега кинетичната енергия в началото и в края. В началото кинетичната енергия е равна на $\frac{1}{2}I_1\omega_1^2=\frac{1}{2}L\omega_1$, където $L=I_1\omega_1=I_2\omega_2$ е моментът на количеството движение. По същия начин кинетичната енергия в края е равна на $T=\frac{1}{2}L\omega_2$, а тъй като $\omega_2>\omega_1$, кинетичната енергия в края се оказва по-голяма, откол-

кото в началото. И така отначало, когато ръцете ни бяха протегнати, ние се въртяхме с някаква кинетична енергия, след това, като сгънахме ръцете си, ние започнахме да се въртим по-бързо и нашата кинетична енергия нарастна. Какво става със закона за запазване на енергията? Нали трябва някой да извърши работа, за да се увеличи енергията? Това сме направили самите ние! Но кога, в кой момент? Когато държим гирите хоризонтално, ние не извършваме никаква работа. Изправяйки ръцете настрани и сгъвайки ги, ние също не можем да извършим никаква работа. Това обаче е вярно само докато няма никакво въртене. При *въртенето* върху гирите действува центробежна сила. Те се стремят да се изскубнат от нашите ръце, така че като ги сгъваме през време на въртенето, ние преодоляваме противодействието на центробежната сила. Работата, която се изразходва за това, представлява именно разликата в кинетичните енергии на въртенето. Ето от къде се взима тази добавка.

Съществува още едно много интересно явление, което ние ще разгледаме само описателно, за да имаме някаква представа за него. Макар че изучаването на това явление изисква малко по-голям опит, струва си да се спомене за него, защото е много любопитно и даза много интересни ефекти.

Да вземем отново експеримента с въртящата се масичка. Да разгледаме отделно тялото и ръцете от гледна точка на човека, въртящ се с масата. Като сгънем ръцете с гирите, ние започваме да се въртим по-бързо, но забележете, че централната част на тялото при това *не е променила своя инерчен момент;* въпреки това то започва да се върти по-бързо, отколкото преди. Ако прекараме около тялото окръжност и разгледаме предметите само вътре в тази окръжност, техният момент на количество на движение се променя; те се завъртат по-бързо. Следователно, когато свиваме ръцете си, на тялото действува момент на сила. Обаче центробежната сила не може да даде никакъв момент, тъй като е насочена по радиуса. Това показва, че сред силите, възникващи във въртящата се система, центробежната сила не е сама: *има още и* друга сила. Тази друга сила носи названието *кориолисова сила* или *сила на Кориолис.* Тя притежава твърде странно свойство: оказва се, че ако ние движим някакъв предмет във въртящата се система, тя го тика настрани. Както и центробежната сила, тази сила е фиктивна. Но ако ние живеем във въртящата се система и искаме да движим нещо по радиуса, поради това трябва да го теглим малко настрани. Именно тази „странична" сила създава момент, който завъртява по-силно нашето гяло.

Да преминем сега към формули и да покажем как кориолисовата сила работи практически. Нека Мик стои върху платформа, която му изглежда неподвижна. От гледна точка на Джо, който стои на земята и знае истинските закони на механиката, платформата се върти. Да предположим, че сме прекарали радиална права по платформата и нека Мик движи право по тази линия някаква маса. Аз искам да покажа, че за да бъде всичко така, както го описахме, е необходима странична сила. Това може да се види, като се обърне внимание на момента на количеството на движение на въртящата се маса. Тя се върти през цялото време с една и съща ъглова скорост ω, поради това нейният момент на количество на движение е равен на

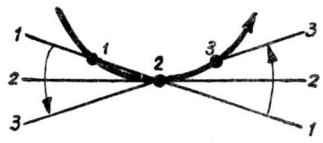
$$L = mv_{\text{танг}}v = m\omega r \cdot r = m\omega r^2.$$

Ако масата е разположена по-близо до центъра, той е сравнително малък, но ако я придвижваме към новото положение и ако увеличаваме r, масата m придобива по-голям момент на количество на движение, т е. през време на движението по радиуса върху нея *трябва да действува някакъв момент на сила.* (За да се движите по радиуса върху платформата, трябва да се наклоните и да се оттласквате встрани. Опитайте някога да направите това сами.) Тъй като моментът на силата е равен на скоростта на изменение на L по време на движението на масата m по радиуса, то

$$\tau = F_K r = \frac{dL}{dt} = \frac{d(m\omega r^2)}{dt} = 2m\omega r \frac{dr}{dt},$$

където с F_K е означена кориолисовата сила, ω остава постоянна. В действителност ние искахме да узнаем каква странична сила трябва да прилага Мик, за да движи масата m със скорост $v_r = dr/dt$. Както виждате, тя е равна на $F_K = \tau / r = 2m\omega v_r$.

Сега, като имаме формулата за кориолисовата сила, нека да разгледаме малко по-подробно цялата картина. Как може да се разбере причината за възникването на тази сила от елементарни съображения? Забележете, че кориолисовата сила не зависи от разстоянието до оста и затова действува даже в центъра! Оказва се, че най-лесно е да се разбере именно силата, действуваща на оста на въртенето. За това трябва да се разгледа всичко, което става, от инерциалната система на Джо, който стои на земята. На фиг. 19.4 са показани три последователни положения на масата m, която при $t=0$ преминава през оста. Поради въртенето на платформата масата, както виждаме, се движи не по права линия, а по някакъв криволинеен път, допирателен към диаметъра в точка $r=0$. Но за да се движи тя по криволинеен път, трябва да действува ускоряваща сила. Ето това е и кориолисовата сила.



Фиг. 19.4. Три последователни положения на движеща се по радиуса точка от въртящата се масичка.

Обаче с кориолисовата сила се срещаме не само в подобни ситуации. Може да се покаже, че ако предметът се движи с постоянна скорост по края на диска, на него също му действува кориолисова сила. Защо? Мик вижда предмета движещ се със скорост v_M, а Джо го вижда движещ се по окръжност със скорост $v_Д = v_M + \omega r$, тъй като предметът допълнително е пренасян от платформата. Както вече знаем, действуващата в този случай сила ще бъде всъщност изцяло центробежна сила при скорост $v_Д$, равна на $mv_Д^2/r$. Но от гледна точка на Мик тя трябва да се състои от три части. Всичко това може да се запише в следния вид:

$$F_r = -\frac{mv_Д^2}{r} = -\frac{mv_M^2}{r} - 2mv_M\omega - m\omega^2 r.$$

И така F_r е силата която измерва Мик. Да се опитаме да разберем откъде какво се взима. Може ли Мик да признае първия член? „Разбира се — би казал той, — даже ако аз не се въртя, такава центробежна сила трябва да възникне, ако започна да бягам по кръга със скорост v_M.“. И така това е просто центробежната сила, появяването на която Мик очаква и която няма нищо общо с въртенето на платформата. Освен това Мик усеща, че трябва да има още една центробежна сила, действуваща даже на неподвижните предмети на неговата платформа. Това дава третия член. Обаче в в допълнение към тях, съществува още един член — вторият, който отново е равен на $2m\omega v_M$. По-рано при радиална скорост кориолисовата сила F_K беше тангенциална. Сега пък при тангенциална скорост тя е радиална. По същество единият израз се различава от другия само по знака си. Силата винаги има едно и също направление спрямо скоростта независимо от това, накъде е насочена скоростта. Тя действува под прав ъгъл към скоростта и е равна по големина на $2m\omega v$.

20

Въртене в пространството

1. Моменти на сили в тримерното пространство

1. **Моменти на сили в тримерното пространство.**
2. **Уравнения на въртенето във векторен вид**
3. **Жироскоп**
4. **Момент на количеството на движение на твърдо тяло.**

В тази глава ние ще разгледаме едно от най-забележителните и забавни следствия от законите на механиката — поведението на въртящото се колело. Затова трябва преди всичко да разширим математическото описание на въртенето, понятието за момента на количеството на движение, за момент на сила и т. н., за тримерно пространство. Ние обаче няма да *използуваме* тези уравнения в цялата им общност и да изучаваме всичките им следствия, тъй като това ще заеме много години, а нас ни очакват други раздели, към които скоро трябва да преминем. В уводния курс може да се разгледат само основните закони и техните приложения към твърде ограничен брой особено интересни случаи.

Преди всичко искам да отбележа, че за въртенето в тримерното пространство на твърдото тяло или на някакъв друг обект остава вярно всичко, което получихме за две измерения. С други думи, $xF_y - yF_x$ остава момент на сила „в равнината xy“, или момент на сила относно оста z“. Остава вярно също, че този момент на сила е равен на скоростта на изменение на величината $xp_y - yp_x$; ако си спомните извода на уравнението (18.15) от Нютоновите закони, ще видите, че фактически ние не използвахме обстоятелството, че движението е равнинно, а просто диференцирахме величината $xp_y - yp_x$ и получихме $xF_y - yF_x$, така че тази теорема остава вярна. Величината $xp_y - yp_x$ ние нарекохме момент на количеството на движение в равнината xy или момент на количеството на движение спрямо оста z. Освен равнината xy може да се използват и другите двойки оси и да се получат други уравнения. Да вземем например равнината yz. От симетрията вече е ясно, че ако просто заместим y вместо x, а z вместо y, за момента на силата ще получим израза $yF_z - zF_y$ и $yp_z - zp_y$ ще бъде ъгловият момент в тази равнина. Разбира се, може да се вземе още и равнината zx и да се получи за нея:

$$zF_x - xF_z = \frac{d}{dt}(zp_x - xp_z).$$

Съвършено ясно е защо за движението на една частица ние получаваме три уравнения за трите равнини. Нещо повече, ако ние събирахме величини като $xp_y - yp_x$ за много частици и наричахме това пълен ъглов момент, сега ние ще имаме три сорта подобни изрази за трите равнини: xy, yz и zx, а като направим същото с моментите на силите, ние можем да говорим също и за пълните моменти на силите в тези равнини. По такъв начин се появяват закони за това, че външният момент на силите в някоя равнина е равен на скоростта на изменение на момента на количество на движение в същата равнина. Това е просто обобщение на написаното от нас за две измерения.

Обаче сега може да се каже: „Но нали има и други равнини. Нима не може в края на краищата да се вземе равнина под някакъв ъгъл и да се пресмятат действуващите в нея моменти на сили. За всеки такъв случай трябва да се пишат други системи от уравнения, така че в резултат ще се получат твърде много уравнения!“ Тук трябва да се отбележи много интересно обстоятелство. Оказва се, че ако в комбинацията $x'F_{y'} - y'F_{x'}$ за „наведената“ равнина изразим величините x', $F_{y'}$ и т. н. чрез техните компоненти, резултатът може да се запише във вид на някаква *комбинация* от трите момента в равнините xy, yz и zx.

В това няма нищо ново. С други думи, ако са ни известни трите момента на сили в равнините xy, yz и zx, моментът на силите във всяка друга равнина, както и съответно ъгловият момент, може да бъде записан като тяхна комбинация: да кажем 6 % от единия, 92 % от другия и т. н. Това свойство сега ще анализираме.

Нека Джо за своите координатни оси x, y, z е определил всички моменти на сили и всички ъглови моменти във всички равнини. Обаче Мик е насочил своите оси x', y', z' по друг начин. За да облекчим малко задачата, ще предположим, че са завъртени само осите x и y. Мик е избрал други оси x' и y', а оста z е останала същата. Това означава, че равнините yz и zx при него са нови, а поради това моментите на силите и ъгловите моменти също ще се окажат нови. Например неговият момент на сили в равнината $x'y'$ ще се окаже равен на $x'F_{y'} - y'F_{x'}$ и т. н. Следващата задача е да се намери връзка между новите и старите моменти на сили. Тя може да се реши изцяло, като се установи връзката между единия набор оси и другия. „Та това напомня онези неща, които ние правехме с векторите", ще кажете вие. Действително аз възнамерявам да правя точно същото. „А този момент на сили не е ли вектор?", ще запитате вие. *Действително* той е вектор, обаче това не може да се каже просто така без никакъв математически анализ. Така че следващият етап трябва да бъде анализът. Обаче ние няма да обсъждаме всяка крачка, а само ще покажем как всичко това действува. Моментите на сили, изчислени от Джо, са равни на

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= xF_y - yF_x, \\ \tau_{yz} &= yF_z - zF_y \\ \tau_{zx} &= zF_x - xF_z. \end{aligned} \tag{20.1}$$

● ● ●

На това място ние ще направим отклонение и ще забележим, че в подобни случаи, ако координатните оси са избрани неправилно, за някои величини се получава неверен знак. Защо да не се пише $\tau_{yz} = zF_y - yF_z$? Този въпрос е свързан с обстоятелството, че координатната система може да бъде или „лява", или „дясна". Обаче като се избере (произволно) знакът, да кажем, на τ_{xy}, винаги може да се определи правилният израз за останалите две величини чрез замяна по коя да е от двете схеми:



●●●

Сега Мик изчислява моментите на силите в своята система:

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= x'F_{y'} - y'F_{x'}, \\ \tau_{y'z'} &= y'F_{z'} - z'F_{y'}, \\ \tau_{z'x'} &= z'F_{x'} - x'F_{z'}. \end{aligned} \tag{20.2}$$

Нека едната координатна система е завъртяна на ъгъл θ спрямо другата, така че оста z остава същата. (Ъгълът θ няма нищо общо с въртенето на обекта или с нещо, ставащо вътре в координатната система. Това просто е връзка между осите, използувани от единия човек, и осите, използувани от другия. Ние предполагаме, че той остава постоянен.) При това координатите в двете системи са свързани така:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{20.3}$$

Точно по същия начин, тъй като силата представлява вектор, тя се преобразува в новата координатна система, както и x, y и z. Просто

по определение обектът се нарича вектор тогава и само тогава, когато различните му компоненти се трансформират както x, y и z.

$$F_{x'}=F_x\ \cos\theta+F_y\ \sin\theta$$
$$F_{y'}=F_y\ \cos\theta-F_x\ \sin\theta \qquad (20.4)$$
$$F_{z'}=F_z\,.$$

Сега може да се определи как се трансформира моментът на силата. За тази цел в уравнение (20.2) трябва да се заместят вместо x', y' и z' изразите (20.3), а вместо $F_{x'}$, $F_{y'}$ и $F_{z'}$ — изразите (20.4). В резултат за $\tau_{x'y'}$ се получава дълъг ред от членове, но се оказва (и на пръв поглед това е удивително), че всичко се свежда просто до израза xF_y-yF_x, който, както е известно, представлява моментът на силата в равнината xy:

$$\tau_{x'y'}=(x\cos\theta+y\sin\theta)\ (F_y\cos\theta-F_x\sin\theta)-(y\cos\theta-x\sin\theta)(F_x\cos\theta+$$
$$+F_y\sin\theta)=xF_y(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-yF_x(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+xF_x(-\sin\theta\cos\theta+$$
$$+\sin\theta\cos\theta)+yF_y(\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta)=xF_y-yF_x=\tau_{xy}. \qquad (20.5)$$

Резултатът е съвършено ясен: нали ние само завъртяхме осите, лежащи *в равнината* xy, тогава моментът относно оста z в тази равнина не се различава от предишния: нали равнината остана същата. По-интересен е изразът за $\tau_{y'z'}$. Тук вече имаме работа с нова равнина. Ако сега повторим същото с равнината $y'z'$, ще получим:

$$\tau_{y'z'}=(y\cos\theta-x\sin\theta)\,F_z-z(F_y\cos\theta-F_x\sin\theta)=(yF_z-zF_y)\cos\theta+$$
$$+(zF_x-xF_z)\sin\theta=\tau_{yz}\cos\theta+\tau_{zx}\sin\theta. \qquad (20.6)$$

И най-сетне за равнината $z'x'$

$$\tau_{z'x'}=z(F_x\cos\theta+F_y\sin\theta)-(x\cos\theta+y\sin\theta)\,F_z=(zF_x-xF_z)\cos\theta-$$
$$-(yF_z-zF_y)\sin\theta=\tau_{zx}\cos\theta-\tau_{yz}\sin\theta. \qquad (20.7)$$

Ние искахме да намерим правило за определяне на момента на силите в новата система чрез момента на силите в старата и го намерихме. Как може да се запомни това правило? Ако се вгледаме внимателно в уравненията (20.5) — (20.7), не е трудно да видим, че между тях и уравненията за x, y и z съществува тясна връзка. Ако по някакъв начин бихме могли да наречем τ_{xy} z-компонента на нещо, да кажем z — компонента на вектора τ, всичко би било в ред: уравнението (20.5) ние бихме възприели като трансформация на вектора τ, тъй като z компонентата му, както и трябва да бъде, остава непроменена. Аналогично, ако се свърже равнината yz с x-компонентата на новоизпечения вектор, а равнината zx с y-компонентата, законът за трансформацията би изглеждал така:

$$\tau_{z'}=\tau_z$$
$$\tau_{x'}=\tau_x\cos\theta+\tau_y\sin\theta \qquad (20.8)$$
$$\tau_{y'}=\tau_y\cos\theta-\tau_x\sin\theta,$$

което точно съответствува на закона за трансформация на векторите.

Следователно ние доказахме, че комбинацията xF_y-yF_x може да се отъждестви с това, което обикновено се нарича z-компонента на някакъв изкуствено въведен вектор. Макар че моментът на силите представлява своего рода „усукване“ в равнината и, изглежда, а priori няма векторен характер, математически той има поведение все пак като вектор. Този вектор е насочен под прав ъгъл към равнината на въртенето, а неговата дължина е пропорционална на силата на въртенето. Трите компоненти на такава величина ще се трансформират при въртене като истинска вектор.

И така ние представяме момента на силата във вид на вектор. Съгласно с правилото, с всяка равнина, в която той действува, ние свързваме права, перпендикулярна на тази равнина. Обаче перпендикулярността към равнината остава неопределен знакът на вектора. За да се определи той, необходимо е още едно допълнително правило, което би утвърдило, че ако моментът на силите действува по определен начин в равнината xy, то съответният му вектор е насочен „нагоре“ по оста z. Това означава, че предварително някой трябва да ни каже къде е „дясно“ и къде е „ляво“. Да предположим, че координатната система xyz е дясна; тогава правилото ще бъде такова: ако си представим въртенето като завинтване на болт с дясна резба, посоката на вектора, свързан с това въртене, се определя от постъпателното движение на болта.

А защо моментът може да се отъждествi с вектор? Това е щастлива случайност: с всяка равнина може да се свърже само една ос и следователно с момента може да се свърже само един вектор. Това свойство е особеност на тримерното пространство. В двумерното пространство например моментът е най-обикновен скалар, който не се нуждае от посока. В тримерното пространство той е вектор. Ако ние имахме четири измерения, би възникнало голямо затруднение, тъй като (ако например, като четвърто измерение вземем времето) допълнително към трите равнини xy, yz и zx ще се появят също равнините tx, ty и tz. Ще се получат следователно всичко *шест* равнини, а да се представят шест величини във вид на един четиримерен вектор е невъзможно.

Обаче предстои ни още дълго да останем в тримерното пространство, поради това си струва да се отбележи, че в предишните математически разглеждания е съвършено несъществено това, че x е координата, а F е сила; съществен е само законът за трансформация на векторите. Затова няма да има никаква разлика, ако вместо координатата x заместим x-компонентата на кой да е друг вектор. С други думи, ако искаме да пресметнем величината $a_x b_y - a_y b_x$, където $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са вектори, и да я наречем z-компонента на някоя нова величина c_z, тази величина ще бъде вектор $\mathbf{c}$. Добре би било за тази връзка на трите компоненти на новия вектор $\mathbf{c}$ с векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ да се измисли някакво математическо означение. За такава връзка използват означението: $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. По такъв начин към обикновеното скаларно произведение във векторния анализ ние получаваме допълнително произведение от нов тип, така нареченото *векторно произведение*. И така записът $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ означава същото, което и:

$$\begin{aligned} c_x &= a_y b_z - a_z b_y \\ c_y &= a_z b_x - a_x b_z \\ c_z &= a_x b_y - a_y b_x. \end{aligned} \tag{20.9}$$

Ако се измени редът на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т. е. вместо $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ се вземе $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$, знакът на вектора $\mathbf{c}$ при това ще се измени, тъй като c_z е равно на $b_x a_y - b_y a_x$. Векторното произведение поради това не прилича на обикновеното умножение, за което $a.b = b.a$. За векторното произведение $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. Оттук веднага следва, че ако $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, векторното произведение е равно на нула, т. е. $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=0$.

Векторното произведение много хубаво предава свойството на въртенето, поради това е важно да се разбира геометричната връзка на векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Връзката между компонентите се определя от уравненията (20.9), от които можем да получим следните геометрични съотношения. Първо, векторът $\mathbf{c}$ е перпендикулярен както на вектора $\mathbf{a}$, така и на вектора $\mathbf{b}$. (Опитайте се да пресметнете $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ и вие ще видите, че в резултат ще се получи нула.) Второ, големината на вектора $\mathbf{c}$ се оказва равна на произведението от абсолютните стойности на векторите $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$, умножено по синуса на ъгъла между тях. А накъде е насочен векторът $\mathbf{c}$? Предста-

вете си, че ние дозавъртаме вектора **a** към вектора **b** по посока на ъгъла по-малък от 180°; ако в тази посока се върти болт с дясна резба, той трябва да се движи по посока на вектора **c**. Това че ние взимаме *дясно*винтов болт, а не *ляво*винтов е проста договореност, която постоянно ни напомня, че в отличие от истинските, „честни" вектори **a** и **b**, векторът от нов тип $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ по своя характер малко се отличава от тях, тъй като се строи изкуствено, по особена рецепта. Обикновените вектори **a** и **b** освен това имат специално наименование: ние ги наричаме *полярни вектори*.

Примери за такива вектори могат да бъдат координатата **r**, силата **F**, импулсът **p**, скоростта **v**, електричното поле **E** и т. н. Всички те са обикновени полярни вектори. Векторите пък, съдържащи едно векторно произведение на обикновени вектори, се наричат *аксиални вектори* или *псевдовектори*. Като примери за псевдовектори несъмнено могат да служат моментът на силата $\boldsymbol{\tau}$ и моментът на импулса **L**. Освен това оказва се, че ъгловата скорост $\boldsymbol{\omega}$, както и магнитното поле **B**, също са псевдовектори.

За да се разширят нашите сведения за математическите свойства на векторите, трябва да се знаят всички правила за тяхното умножение както векторно, така и скаларно. Засега са ни необходими само съвсем малко от тях, обаче за пълнота ние ще напишем всички правила с участие на векторното произведение. Впоследствие ние ще се ползваме от тях. Тези правила са такива:

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\ \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}; && \text{д)}\quad \mathbf{a}\times\mathbf{a}=0;\\
&\text{б)}\quad (\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b}); && \text{е)}\quad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0\\
&\text{в)}\quad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c};\\
&\text{г)}\quad \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}); && (20.10)
\end{aligned}$$

2. Уравнения на въртенето във векторен вид

Възниква въпросът: може ли с помощта на векторното произведение да се запише някое уравнение на физиката? Да, разбира се, с негова помощ се записват твърде много уравнения. Веднага се вижда например, че моментът на силата е равен на векторното произведение от радиус-вектора и силата:

$$\vec{\tau}=\mathbf{v}\times\mathbf{F}. \qquad (20.11)$$

Това просто е кратко записване на три уравнения: $\tau_x=yF_z-zF_y$ и т. н. С помощта на същия символ може да се представи моментът на количеството на движение на една частица като векторно произведение от вектора на разстоянието от началото на координатната система (радиус-вектора) и вектора на импулса:

$$\mathbf{L}=\mathbf{v}\times\mathbf{p}. \qquad (20.12)$$

Векторната форма на динамичния закон на въртенето в тримерното пространство напомня Нютоновото уравнение $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$; именно векторът на момента на силата е равен на скоростта на изменение с времето на вектора на момента на количеството движение:

$$\vec{\tau}=\frac{d\mathbf{L}}{dt}. \qquad (20.13)$$

Ако съберем (20.13) за много частици, ще получим, че външният момент на силите, действуващ на системата, е равен на скоростта на изменение на пълния момент на количеството на движение:

$$\vec{\tau}_{\text{вън}}=\frac{d\mathbf{L}_{\text{пълн}}}{dt}. \qquad (20.14)$$

Ето още една теорема: ако пълният момент на външните сили е равен на нула, векторът на пълния момент на количеството на движение на системата остава постоянен. Тази теорема се нарича *закон за запазване на момента на количеството на движе-*

ние. Ако върху дадена система не действуват никакви моменти на сили, то нейният момент на количество движение не се променя.

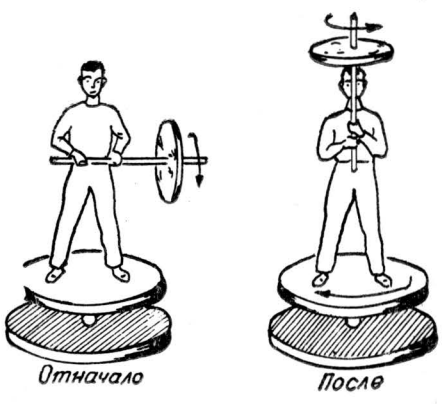
А какво може да се каже за ъгловата скорост? Вектор ли е тя? Ние вече разглеждахме въртенето на твърдо тяло около някаква фиксирана ос, а сега нека за момент предположим, че то се върти едновременно около *две* оси. Тялото може да се намира например в кутийка и да се върти там около някаква ос, а самата кутийка на свой ред да се върти около някаква друга ос. Резултатът на такова сложно движение ще бъде въртене на тялото около някаква нова ос. Най-удивителното тук е това, че тази нова ос може да бъде намерена по следния начин. Ако въртенето в равнината xy представим като вектор, насочен по оста z, дължината на който е равна на скоростта на въртенето, а чрез друг вектор, насочен по оста y, изобразим скоростта на въртенето в равнината, като ги съберем по правилото на успоредника, ще получим резултат, големината на който ще показва скоростта на въртенето на тялото, а посоката се определя от равнината на въртенето. По-просто казано, ъгловата скорост всъщност е вектор, чиито проекции върху координатите представляват скоростите на въртене в трите равнини.[1]

Като прост пример за използване на вектора на ъгловата скорост ще пресметнем мощта, изразходвана от момента на силите, действуващ на твърдо тяло. Тъй като мощта представлява скоростта на изменение на работата с времето, в тримерното пространство тя се оказва равна на $P=\tau.\vec{\omega}$.

Всички формули, които ние написахме за равнинното въртене, могат да бъдат обобщени за три измерения. Ако се вземе например твърдо тяло, въртящо се около някаква ос с ъглова скорост $\vec{\omega}$, може да се попита: „На какво е равна скоростта на точката с радиус-вектор $\mathbf{r}$?“ Като упражнение опитайте се да докажете, че скоростта на частиците на твърдото тяло се дава от израза $\mathbf{v}=\vec{\omega}\times\mathbf{r}$, където $\vec{\omega}$ е ъгловата скорост, а $\vec{\tau}$—положението на частицата. Друг пример за векторно произведение е формулата за кориолисовата сила, която може да се запише така: $\mathbf{F}_к=2m\mathbf{v}\times\vec{\omega}$. С други думи, ако в координатна система, въртяща се със скорост $\vec{\omega}$, частицата се движи със скорост $\mathbf{v}$ и ние искаме да опишем всичко това чрез величините на тази въртяща се система, необходимо е да се добави още псевдосилата $\mathbf{F}_К$.

3. Жироскоп

Да се върнем сега отново към закона за запазване на момента на количеството на движение. Него можем да демонстрираме с помощта на бързо въртящо се колело или жироскоп (фиг. 20.1). Ако се застане на въртящия се стол и се държи въртящото се колело в хоризонтално положение, то неговият момент на количество на движение ще бъде насочен хоризонтално. Моментът на количеството на движение спрямо *вертикална* ос не може да се промени поради фиксираното положение на оста на стола (триенето пренебрегваме). Ако сега се завърти оста с колелото вертикално, колелото придобива момент на количество на движение относно вертикалната ос. Обаче *системата* като цяло (колелото, ние самите и стола) *не може да има* вертикална компонента, поради това ние заедно със стола трябва да се завъртите в направление, обратно на въртенето на колелото, за да го компенсираме.

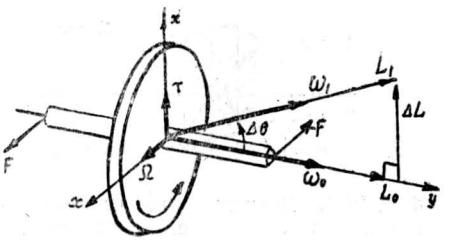


Фиг. 20.1. Бързо въртящ се жироскоп.
а — оста е насочена хоризонтално, моментът на количеството движение около вертикална ос е равен на нула;
б — оста е насочена вертикално, моментът на количеството движение относно вертикалната ос трябва да остане равен на нула; човекът и столът се въртят по посока, противоположна на въртенето на колелото

Преди всичко нека по-подробно анализираме явлението, което току-що описахме. Най-изненадващото, в което следва да се ори-

[1] Че това е действително така, се доказва, като се разгледа преместването на частиците на твърдо тяло за безкрайно малък интервал от време Δt. Това не е очевидно и аз предоставям на онзи, който се интересува, да го докаже

ентираме, това е откъде се взимат силите, завъртащи ни заедно със стола, когато завъртим оста на жироскопа вертикално. На фиг. 20.2 е показано колело, бързо въртящо се около оста y, т. е. неговата ъглова скорост е насочена по тази ос. В същата посока е насочен и моментът на количеството на движение. Да предположим, че искаме да въртим колелото относно оста x с малка ъглова скорост Ω; каква сила се изисква за това? След малък интервал от време Δt оста ще заеме ново положение, като се отклони от хоризонталното положение на ъгъл $\Delta\theta$. Тъй като основната част от момента на количеството на движение произтича от въртенето на колелото (бавното въртене около оста x дава много малък принос), ние виждаме, че векторът на момента на количеството на движение се променя. Какво е изменението на този вектор? Той остава същият по *големина,* обаче *посоката* му се променя с ъгъл $\Delta\theta$. Големината на вектора ΔL поради това е $\Delta L = L_0 \Delta\theta$; в резултат възниква момент на сила, равен на скоростта на изменение на момента на количеството на движение $\tau = \Delta L/\Delta t = L_0(\Delta\theta/\Delta t) = L_0\Omega$. Отчитайки посоката на различните величини, ние виждаме, че:



Фиг. 20.2. Жироскоп

$$\vec{\tau} = \Omega \times \mathbf{L}_0. \tag{20.15}$$

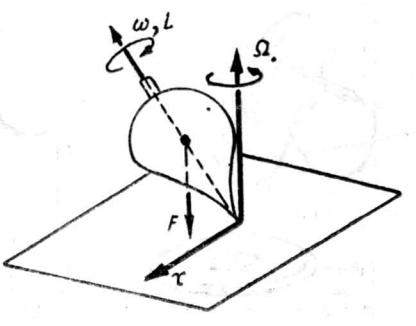
По такъв начин, ако Ω и $\mathbf{L}_0$ са насочени хоризонтално, както е показано на фигурата, $\vec{\tau}$ е насочен *вертикално.* За да се уравновеси този момент, към краищата на оста в хоризонтално направление трябва да бъдат приложени сили $\mathbf{F}$ и $-\mathbf{F}$. Откъде се взимат тези сили, кой ги прилага? Това сме самите ние, със собствените си ръце, когато се стараем да превъртим оста на колелото във вертикално положение. Но третият закон на Нютон изисква да ни действуват равни и противно насочени сили (и равен, но противно насочен *момент*). Те ни и заставят да се въртим около вертикалната ос в противна посока.

Този резултат може да се обобщи за бързо въртящ се пумпал. В обикновения въртящ се пумпал теглото, действуващо в неговия център на масите (ц. м.), създава момент спрямо точката на допиране на пумпала с пода (фиг. 20.3). Този момент действува в хоризонтална посока и заставя пумпала да прецесира, т. е. неговата ос ще описва кръгов конус около вертикалната ос. Ако Ω е ъгловата скорост на прецесията (насочена вертикално), то ние отново намираме:

$$\vec{\tau} = \frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta t} = \Omega \times \mathbf{L}_0.$$

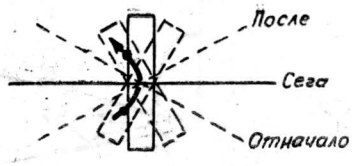
По такъв начин, ако към бързо въртящ се пумпал се приложи момент на сили, възниква прецесия по посока на този момент, т. е. под прав ъгъл към силите, създаващи момента.

И така сега ние можем да твърдим, че сме разбрали прецесията на жироскопа и математически действително сме я разбрали. Обаче цялата тази математика може да ни се стори в известен смисъл „магьосничество". Между впрочем със задълбочаването във все по-сложната физика множество прости неща е по-леко да се изведат математически, отколкото действително да се разбере техният фундаментален или прост смисъл. Колкото повече вие преминавате към все повече и повече съвременни работи по физика, ще откривате едно странно обстоятелство математиката дава резултати, които *никой* не е в състояние да разбере непосредствено. Като пример може да се вземе уравнението на Дирак, което се получава много просто и красиво, но неговите следствия се разбират трудничко. В нашия частен случай прецесията на пумпала изглежда чудо, някакво тайно действие с прави ъгли, скръжности, въртящи се сили и десновинтови болтове. Но нека все пак се опитаме да разберем нейната физическа същност.



Фиг. 20.3. Бързо въртящ се пумпал
Забележете, че посоката на вектора на момента на силата съвпада с посоката на прецесията

Как може да се обясни този момент на сили с помощта на реално действуващи сили и ускорения? Забележете, че когато колелото прецесира, частиците на колелото в действителност не



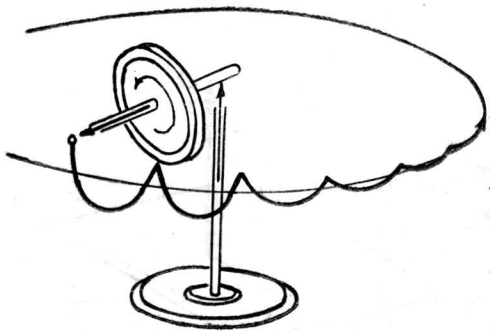
Фиг. 20.4. Движение на частица от въртящото се колело, показано на фиг. 20.2.
При завъртване на оста тези частици се движат по крива линия

се движат вече в една равнина (фиг. 20.4). Ние показахме по-рано (вж. фиг. 19.4), че частицата, която пресича оста на прецесията, се движи по *криволинеен път.* Но затова се изисква някаква странична сила, която възниква благодарение на упражняваното от нас налягане върху оста на колелото. Това налягане по спиците се предава на частиците на обръча. „Почакайте — ще кажете вие, — а какво става с частиците на другата страна на колелото, които се движат в обратна посока?" Не е трудно да се досетим, че действуващите върху тях сили трябва да бъдат *насочени в противоположната страна,* поради това пълната сила трябва да бъде равна на нула. По-такъв начин силите се уравновесяват, но една от тях е приложена на едната страна на колелото, а другата — на другата. Тези сили би могло да се приложат непосредствено към колелото, обаче поради това че колелото е твърдо, можем да ги приложим към оста, а чрез спиците те се предават на колелото.

Досега ние доказвахме, че, ако колелото прецесира, то може да компенсира моментите на силите, предизвикани от силата на притеглянето или от някаква друга причина. Обаче ние показахме само, че прецесията е едно от възможните решения на уравнението. С други думи, само при това условие, че действува момент и *колелото е пуснато правилно,* ние ще получим чиста прецесия. Но ние не доказахме (и това въобще е невярно), че чистата прецесия е *най-общото движение* на въртящото се тяло под действие на момент на силите. Общото движение включва освен това някакви колебания и отклонения от главната прецесия. Тези колебания се наричат *нутация.*

Някои обичат да говорят, че когато на жироскопа действува момент, той се завърта и прецесира, че моментът на силите довежда до прецесия. Изглежда много странно, че след като се пусне, жироскопът не пада под действие на теглото, а се движи настрани! Как може да се случи така, че насочената надолу сила на теглото, която ние добре познаваме и чувствуваме, го заставя да се движи встрани? Нито една от формулите в света, подобна на (20.15), не ще ни каже това, защото формулата (20.15) представлява особен случай, верен само тогава, когато прецесията на жироскопа вече се е установила. Ако се говори за детайлите, в действителност става следното. Когато държим жироскопа за оста така че той никак да не може да прецесира (но запазва своето въртене), върху него не действуват никакви моменти на сили, даже моментът на теглото, понеже със своите пръсти ние го компенсираме. Но щом като освободим оста, в същия момент върху нея започва да действува моментът на теглото. Поради доверчивост всеки ще реши, че краят на оста трябва да пада при това, и той действително започва да пада. Това може да се види веднага, ако жироскопът се върти не много бързо.

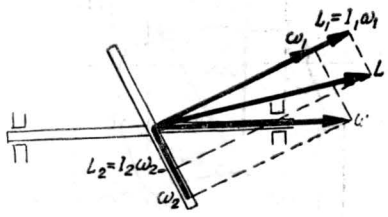
И така както се и очаква, краят на оста на жироскопа действително започва да пада. Но тъй като пада, той се върти и следователно с това сам създава момент на сили. Това предава на оста на жироскопа движение около вертикална ос, такова каквото и при постоянна прецесия. Обаче скоро скоростта започва да превишава скоростта при постоянна прецесия, поради това оста започва да се издига нагоре до предишното ниво. В резултат краят на оста описва циклоида (крива, която описва камък, заседнал в автомобилно колело). Обикновено това е много бързо, незабележимо за очите движение, при това то много скоро затихва поради триенето в лагерите, а преживява само „чистата" прецесия (фиг. 20.5). Обаче колкото по-бавно се върти колелото, толкова по-забележима е нутацията.



Фиг. 20.5. Истинско движение на края на оста на жироскопа под действие на теглото веднага след освобождаването му

След като движението се установи, оста на жироскопа се оказва малко по-ниско, отколкото е била в началото. Защо? (Това е по-сложна подробност и ние споменаваме за нея само заради това, защото не искаме да остане у читателя впечатление, че жироскопът — това е абсолютно чудо. Той действително е удивителна работа, но все пак не е чудо.) Ако ние държим оста абсолютно хоризонтално, а след това внезапно я пуснем,

с помощта на уравнението на прецесията ние можем да установим, че оста започва да прецесира, т. е. да се движи по кръг в хоризонтална равнина. Но това е невъзможно! Макар че не обръщахме внимание върху това по-рано, колелото притежава *някакъв* инерчен момент относно прецесиращата ос, и ако даже бавно се върти около тази ос, то има някакъв малък момент на количество на движение. Откъде произлиза това? Нали ако опората е идеална (т. е. ако няма никакво триене), никакъв момент на сили относно вертикалната ос не може да възникне. Тогава по какъв начин възниква все пак прецесията, ако няма никакви моменти? *Отговор:* движението по циклоида на края на оста се стреми към средно стационарно движение, което е еквивалентно на движението на центъра на търкалящо се колело, т. е. той се установява малко по-ниско от хоризонталата. По тази причина собственият ъглов момент на жироскопа има неголяма вертикална компонента, която точно компенсира момента на количеството движение на прецесията. Както виждате, оста трябва малко да се спусне. Тя трябва не много да се поддаде на теглото, за да има възможност да се върти около вертикална ос. Така действува жироскопът.



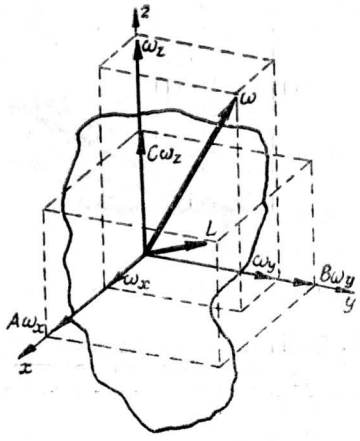
Фиг. 20.6. Моментът на количеството движение на въртящото се тяло не е непременно успореден на ъгловата скорост.

4. Момент на количеството на движение на твърдо тяло

Преди да се разделим с въпроса за въртенето в тримерно пространство, ще обсъдим, макар и качествено, някои неочевидни явления, възникващи при тримерни въртения.

Главното от тях е: моментът на количеството движение на твърдо тяло не е насочен *непременно* в същата посока, в която е насочена ъгловата скорост. Да разгледаме колело, прикрепено наклонено към ос, обаче оста както и преди преминава през неговия център на тежестта (фиг. 20.6). Ако колелото се върти около оста, на всички е известно, че поради наклонената стойка то ще разклаща лагерите Ние знаем, че при въртене на колелото трябва да действува центробежна сила, която се старае да отдръпне неговата маса по-далече от оста. Тя се стреми да изправи равнината на колелото така, че то да стане перпендикулярно на оста. За да се уравновеси този стремеж, в лагерите трябва да възникне момент на сили. Но ако в лагерите възниква момент на сили, трябва да има някаква скорост на изменение на момента на количеството на движение. Как може да се промени моментът на количеството на движение, ако колелото се върти около оста? Да предположим, че сме разложили ъгловата скорост ω на компонентите ω_1 и ω_2 — перпендикулярна и успоредна на равнината на колелото. На какво ще бъде равен тогава моментът на количеството на движение? Тъй като инерчните моменти относно тези две оси са различни, отношението на компонентите на момента на количеството на движение, които (при такъв специален избор на осите) са равни на произведението от инерчните моменти и съответните компоненти на ъгловите скорости, се различава от отношението на компонентите на ъгловата скорост. Поради това векторът на момента на количеството движение не е насочен по оста. Като завъртаме вала, ние трябва да завъртаме и вектора на момента на количеството на движение, което довежда до възникване на момент на сили, действуващ на оста.

Инерчният момент има още едно много важно и интересно свойство (аз няма да го доказвам тук, тъй като това е твърде сложно), което лесно се описва и използва. Нашето предишно разглеждане беше основано именно на това свойство. То се състои в следното: всяко твърдо тяло даже с неправилна форма, като например картофът, има такива три взаимно перпендикулярни, преминаващи през центъра на масите, оси, че инерчният момент относно една от тях има най-голяма възможна стойност, отколкото относно всички оси, преминаващи през центъра на ма-



Фиг. 20.7. Ъгловата скорост и моментът на количеството на движение на твърдо тяло ($A > B > C$)

сите, а инерчният момент относно втората ос има най-малка стойност. Инерчният момент относно третата има някаква междинна стойност между първите две или равна на една от тях. Тези оси, наричани *главни оси* на тялото, притежават важното свойство, че ако тялото се върти около една от тях, неговият момент на количество движение има същата посока, каквато и ъгловата скорост. Ако тялото има оси на симетрия, направлението на главните оси съвпада с осите на симетрия.

Ако за оси x, y и z се изберат главните оси на тялото и съответните инерчни моменти се нарекат съответно A, B и C, не е трудно да се пресметне моментът на количеството на движение и кинетичната енергия на въртене на тялото при всяка ъглова скорост $\vec{\omega}$ (фиг. 20.7). Разлагайки $\vec{\omega}$ на компоненти ω_x, ω_y и ω_z по осите x, y и z и използвайки насочените по тези оси единични вектори, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, може да се запише моментът на количеството на движение по следния начин:

$$\mathbf{L} = A\,\omega_x\mathbf{i} + B\,\omega_y\mathbf{j} + C\,\omega_z\mathbf{k}, \tag{20.16}$$

при което кинетичната енергия ще бъде

$$\text{к. е.} = \frac{1}{2}(A\,\omega_x^2 + B\,\omega_y^2 + C\,\omega_z^2) = \frac{1}{2}\mathbf{L}\vec{\omega}. \tag{20.17}$$

22

Хармоничен осцилатор

1. Линейни диференциални уравнения
2. Хармоничен осцилатор
3. Хармонично движение и движение по окръжност
4. Начални условия
5. Трептения под действие на външна сила

1. Линейни диференциални уравнения

Обикновено физиката като наука се дели на няколко раздела: механика, електричество, оптика и т. н. и ние „преминаваме“ тези раздели един след друг. Сега например ние „преминаваме“ основното от механиката. Но там е работата, че стават странни неща: преминавайки към нови раздели на физиката и даже към други науки, ние се сблъскваме с уравнения, които почти не се различават от изучените вече от нас по-рано. По такъв начин много явления имат аналогия в съвсем други области на науката. Най-прост пример: разпространението на звуковите вълни по много неща прилича на разпространението на светлинните вълни. Ако ние изучим достатъчно подробно акустиката, ще открием след това, че сме „преминали“ твърде голяма част от оптиката. По такъв начин изучаването на явленията в една област от физиката може да се окаже полезно при изучаване на другите й раздели. Добре е от самото начало да се предвиди такова възможно „разширяване рамките на раздела“, иначе може да възникне недоумение защо губим толкова време и сили за изучаване на малка задача от механиката.

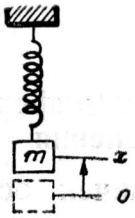
Хармоничният осцилатор, към изучаването на който ние сега преминаваме, ще срещаме почти навсякъде; макар че ще започнем с чисто механични примери — товар върху пружинка, малки отклонения на махалото или някакви други механични устройства, всъщност ще изучаваме някакво *диференциално уравнение*. Това уравнение непрекъснато се среща във физиката и в другите науки и фактически описва толкова много явления, че наистина си струва да се изучи по-добре. Такова уравнение описват трептенията на товара върху пружинката, трептенията на заряди, протичащи назад и напред по електрична верига, трептенията на камертона, пораждащи звукови вълни, аналогичните трептения на електроните в атома, пораждащи светлинни вълни. Прибавете към това уравненията, описващи действията на регулаторите, например поддържащите дадена температура на термостата, сложните взаимодействия в химическите реакции и (вече съвършенно неочаквано) уравнения, отнасящи се до ръста на колониите от бактерии в зависимост от поставената храна и отровите, които бактериите произвеждат, или до размножаването на лисиците, които се хранят с диви зайци, които на свой ред ядат трева и т. н. Всички тези явления се описват от уравнения, много подобни едно на друго, и това е причината, поради която изучаваме толкова подробно хармоничния осцилатор. Тези уравнения се наричат *линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти*. Това са уравнения, които се състоят от сума от няколко члена, всеки от които представлява производна на зависимата величина по независимата, като производната е умножена с постоянен коефициент. По такъв начин

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \qquad 21.1$$

се нарича линейно диференциално уравнение от n-ти ред с постоянни коефициенти (всички a_n са постоянни).

2. Хармоничен осцилатор

Изглежда, че най-простата механична система, движението на която се описва с линейно диференциално уравнение с постоянни коефициенти, е някаква маса, окачена на пружинка. След като към пружинката окачат малък товар, тя се разтяга малко, за да уравновеси силата на тежестта. Да проследим сега вертикалните отклонения на масата от равновесното положение (фиг. 21.1) Отклоненията нагоре от разновесното положение ще означим с x и ще предположим, че имаме работа с абсолютно еластична пружина. В този случай силите, противодействуващи на разтягането, са правопропорционални на разтягането. Това означава, че силата е равна на $-kx$ (знакът минус ни напомня, че силата противодействува на преместванията). По такъв начин ускорението, умножено по масата, трябва да бъде равно на $-kx$



Фиг. 21.1. Товарче, окачено на пружинка;
прост пример за хармоничен осцилатор

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{21.2}$$

За простота ще предположим, че е станало така (или ние сме променили системата единици по нужния начин), че $k/m=1$. Предстои ни да решим уравнението:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x. \tag{21.3}$$

След това ние ще се върнем към уравнението (21.2), в което k и m се съдържат явно.

Ние вече се сблъскахме с уравнението (21.3), когато едва започнахме да изучаваме механиката. Ние го решихме числено (виж уравнение 9.12), за да намерим движението. С числено интегриране намерихме кривата (виж фиг. 9.4), която показва, че ако частицата в началния момент е изведена от равновесие, но е в покой, тя се връща към равновесното положение. Ние не следихме частицата, след като тя е достигнала равновесното положение, но ясно е, че тя няма да се спре там, а ще *трепти (осцилира)*. При численото интегриране ние намерихме времето за връщане в точката на равновесието: $t = 1{,}570$. Продължителността на целия цикъл е четири пъти по-голяма: $t_0 = 6{,}28$ s. Всичко това ние намерихме с числено интегриране, защото по-добре не умеехме да решаваме. Но математиците са дали на наше разположение една функция, която, ако се диференцира два пъти, преминава в същата функция, умножена с -1. (Може, разбира се, да се заемем и с пряко пресмятане на такива функции, но това е много по-трудно, отколкото просто да се узнае отговорът.)

Тази функция е: $x=cost$. Като я диференцираме, намираме $dx/dt, = -sint$, а $d^2x/d^2 = -cost = -x$. В началния момент $t=0$, $x=1$ а началната скорост е равна на нула; това са точно онези предположения, които направихме при численото интегриране. Сега, знаейки, че $x=cost$, да намерим *точната* стойност на времето, при която $x = 0$. *Отговор*: $t = \frac{\pi}{2}$, или 1,57108. Ние сгрешихме по-рано в последния знак, защото численото интегриране беше приблизително, но грешката е много малка!

За да се придвижим по-нататък, да се върнем към системата единици, в която времето се измерва в истински секунди. Какво ще бъде решението в този случай? Може би ние ще намерим константите k и m, като умножим със съответния множител *cost*? Да се опитаме. Нека $x=A\,cost$, тогава $dx/dt = -A\,sint$ и $d^2x/dt^2 = -A\cos t = -x$. За наше огорчение ние нямахме успех в решаването на уравнението (21.2), а отново се върнахме към (21.3). Затова пък открихме много важно свойство на линейните диференциални уравнения: *ако се умножи решението на уравнението с константа, ние отново ще получим решение.* Математическите причини за това са ясни. Ако x е решение на уравнението, след умножаване на двете части на уравнението с A производните също ще се умножат с A и поради това Ax също тъй добре ще удовлетворява уравнението, както и x. Да видим какво ще ка-

же по този повод физиката. Ако товарът разтегне пружинката два пъти повече от по-рано, то два пъти ще нарасне силата, два пъти ще нарасне ускорението, два пъти по-голяма от предишната ще бъде придобитата скорост и за същото време товарът ще премине два пъти по-голямо разстояние. Но това два пъти по-голямо разстояние е именно онова разстояние, което *трябва* да премине товарът до равновесното положение. По такъв начин, за да се достигне равновесието, се изисква *също толкова време* и то не зависи от началното преместване. С други думи, ако движението се описва с линейно уравнение, независимо от „силата" то ще се извършва по един и същ начин във времето.

Грешката ни донесе полза — ние узнахме, че, като се умножи решението с константа, ще получим решение на предишното уравнение. След няколко проби и грешки може да се дойде до мисълта, че вместо манипулации с x трябва да се измени скалата на *времето*. Иначе казано, уравнението (21.2) трябва да има решение от вида:

$$x = \cos \omega_0 t. \tag{21.4}$$

(Важно е да се отбележи, че тук ω_0 съвсем не е ъгловата скорост на въртящото се тяло, но няма да ни достигнат всички букви, ако всяка величина означаваме с различна буква.) Ние снабдихме знакът ω с индекс нула, защото ни предстои да срещнем още много различни омеги: да запомним, че ω_0 съответствува на естественото движение на осцилатора. Опитът да се използва (21.4) като решение е по-успешен, защото $dx/dt = -\omega_0 \sin \omega_0 t$ и $d^2x/dt^2 = -\omega_0^2 \cos \omega_0 t = -\omega_0^2 x$. Най-сетне ние решихме това уравнение, което искахме да решим. Това уравнение съвпада с (21.2) ако $\omega_0^2 = k/m$.

Сега трябва да се разбере физическият смисъл на ω_0. Ние знаем, че косинусът „се повтаря", след като ъгълът се измени с 2π. Поради това $x = \cos \omega_0 t$ ще бъде периодично движение; пълният цикъл на това движение ще съответствува на изменение на „ъгъла" с 2π. Величината $\omega_0 t$ често се нарича *фаза* на движението. За да се измени $\omega_0 t$ с 2π, трябва да се измени t с t_0 (*периодът* на пълното трептене); разбира се, t_0 се намира от уравнението $\omega_0 t_0 = 2\pi$. Това значи, че $\omega_0 t_0$ трябва да се изчисли за един цикъл, и всичко ще се повтаря, ако се увеличава t с t_0; в този случай ние ще увеличим фазата с 2π. По такъв начин

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{21.5}$$

Значи, колкото е по-тежък товарът, толкова по-бавно пружинката ще трепти нагоре и надолу. Инерцията в този случай ще бъде по-голяма и, ако силата не се променя, ще ѝ потрябва повече време за ускоряване и спиране на товара. Ако пък се вземе по-твърда пружина, то движението трябва да става по-бързо; и всъщност периодът намалява с увеличаване твърдостта на пружината.

Да отбележим сега, че периодът на трептенията на масата върху пружинката не зависи от това *как* започват трептенията. За пружинката като че ли е безразлично колко ще я разтегляме. Уравнението на движението (21.2) определя *периодът* на трептенията, но нищо не казва за амплитудата на трептенията. Амплитудата на трептенията, разбира се, може да се определи и сега ще се заемем с това, но за тази цел трябва да се дадат *началните условия*.

Работата е в това, че ние не сме намерили още най-общото решение на уравнението (21.2). Има няколко вида решения. Решението $x = a \cos \omega_0 t$ съответствува на случая, когато в началния момент пружинката е опъната, а скоростта ѝ е равна на нула. Може пружинката да се застави да се движи по друг начин, например да се улучи моментът, когато уравновесената пружина е в покой ($x = 0$), и рязко да се удари по товара; това ще означава, че в момента $t = 0$ на пружинката е придадена някаква скорост. На това движение ще съответствува друго решение на (21,2) —

косинусът трябва да се замени със синус. Да хвърлим в косинуса още един камък: ако $x=\cos\omega_0 t$ е решение, то като влезем в стаята, където се люлее пружинката, в онзи момент (да го наречем „$t=0$“), когато товарът преминава през равновесното положение ($x=0$), ние ще бъдем принудени да заменим това решение с друго. Следователно $x=\cos\omega_0 t$ не може да бъде общо решение; общото решение трябва да допуска, така да се каже, преместване на началния момент, от който измерваме времето. Такова свойство притежава например решението $x=a\cos\omega_0(t-t_1)$, където t_1 е някаква константа. По-нататък може да се разложи

$$\cos(\omega_0 t+\Delta)=\cos\omega_0 t\,\cos\Delta-\sin\omega_0 t\sin\Delta$$

и да се запише

$$x=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t,$$

където $A=a\cos\Delta$ и $B=-a\sin\Delta$. Всяка от тези форми може да се използува за записване на общото решение на (21.2): всяко от съществуващите в света решения на диференциалното уравнение $d^2x/dt^2=-\omega_0^2 x$ може да се запише във вида:

$$x=a\cos\omega_0(t-t_1), \tag{21.6а}$$

или

$$x=a\cos(\omega_0 t+\Delta), \tag{21.6б}$$

или

$$x=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t. \tag{21.6в}$$

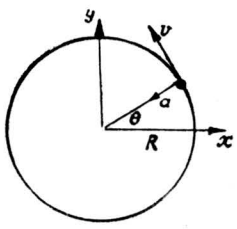
Някои от срещащите се в (21.6) величини имат названия: ω_0 се нарича *ъглова честота*; това е броят на радианите, на които се променя фазата за 1 s. Тя се определя от диференциалното уравнение. Другите величини не се определят от уравнението, а зависят от началните условия. Константата a служи за мярка на максималното отклонение на товара и се нарича *амплитуда* на трептенето. Константата Δ понякога се нарича *фаза* на трептението, но тук са възможни недоразумения, защото други наричат фаза $\omega_0 t+\Delta$ и казват, че фазата зависи от времето. Може да се каже, че Δ е *отместването на фазата* в сравнение с друга, приемана за нула. Няма да спорим за думите. На различните Δ съответствуват движения с различни фази. Ето това е вярно, а да се нарича ли Δ фаза, или не, е вече друг въпрос.

3. Хармонично движение и движение по окръжност

Косинусът в решението на уравнението (21.2) ни навежда на мисълта, че хармоничното движение има някакво отношение към движението по окръжност. Това сравнение, разбира се, е изкуствено, защото в праволинейното движение няма откъде да се вземе окръжност: товарът се движи строго нагоре и надолу. Можем да се оправдаем с това, че ние решихме уравнението на хармоничното движение, когато изучавахме механиката на движението по окръжност. Ако частицата се движи по окръжност с постоянна скорост v, радиус-векторът от центъра на окръжността към частицата се завърта на ъгъл, големината на който е пропорционална на времето. Да означим този ъгъл с $\theta=vt/R$ (фиг. 21.2). Тогава $d\theta/dt=\omega_0=v/R$. Известно е, че ускорението е $a=v^2/R=\omega_0^2 R$ и е насочено към центъра. Координатите на движещата се точка в дадения момент са равни на:

$$x=R\cos\theta, \qquad y=R\sin\theta.$$

Какво може да се каже за ускорението? На какво е равна x-компонентата на ускорението d^2x/dt^2? Тази величина може да се намери чисто геометрично: тя е равна на големината на ускорението, умножена по косинуса на ъгъла на проекцията; пред по-

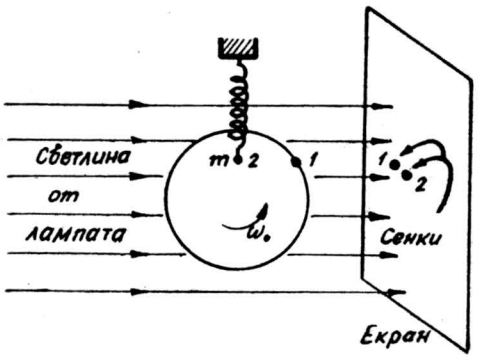


Фиг. 21.2. Частица, движеща се по кръг с постоянна скорост.

лучения израз трябва да се постави знак минус, защото ускорението е насочено към центъра:

$$a_x = -a\cos\theta = -\omega_0^2 R\cos\theta = -\omega_0^2 x, \qquad (21.7)$$

С други думи, когато частицата се движи по окръжност, хоризонталната съставяща на движението има ускорение, пропорционално на хоризонталното отместване от центъра. Разбира се, ние знаем решенията за случая на движение по окръжност: $x = R\cos\omega_0 t$. Уравнението (21.7) не съдържа радиуса на окръжността; то е еднакво при движение с една и съща ω_0 по окръжност с всякакъв радиус. По такъв начин има няколко причини, поради които следва да се очаква, че отклонението на товара върху пружинката ще се окаже пропорционално на $\cos\omega_0 t$ и движението ще изглежда така, както ако бяхме следили за x-координатата на частица, движеща се по окръжност с ъглова скорост ω_0. Това може да се провери, като се направи опит, за да се покаже, че движението на товара на пружинката нагоре-надолу точно съответствува на движението на точка по окръжност. На фиг. 21.3 светлината от волтова дъга проектира на екрана сенките на движещите се една до друга забодени във въртящия се диск игли и вертикално трептящия товар. Ако в определения момент и от необходимото място се застави товарът да трепти, а след това внимателно се подбере скоростта на диска така, че честотите на техните движения съвпаднат, сенките на екрана точно ще следват една след друга. По този начин може да се сравни още веднаж намереното числено решение с функцията косинус, и да се види, че те съвпадат много добре.



Фиг. 21.3. Демонстрация на еквивалентността на простото хармонично движение и равномерното движение по окръжност.

Тук трябва да се подчертае, че тъй като математиката на равномерното движение по окръжност е много сходна с математиката на трептеливото движение нагоре-надолу, анализът на трептеливите движения много ще се опрости, ако се представи това движение като проекция на движението по окръжност. С други думи, въпреки че разстоянието по y не означава нищо в задачата за осцилатора, ние можем да допълним уравнението (21.2) с уравнение за y и да разглеждаме двете уравнения съвместно. Като направим това, ние ще сведем едномерните трептения до движение *по окръжност*, което ще ни избави от решаване на диференциалното уравнение. Може да се направи още един трик — да се въведат комплексни числа, но за това в следващата глава.

4. Начални условия

Нека да изясним какъв смисъл имат A и B или a и Δ. Разбира се, те показват как е започнало движението. Ако движението започне с малко отклонение, ние ще получим един тип трептения; ако леко се разтегне пружинката, а после се удари по товара — друг. Константите A и B или a и Δ, или кои да са други две константи се определят от обстоятелствата, при които е започнало движението, или както обикновено казват, *от началните условия*, а не от някакви други характеристики на положението. Трябва да се научим да определяме константите, изхождайки от началните условия. Макар че за това може да се използува всяко от съотношенията (21.6), най-добре е да имаме работа с (21.6в). Нека в началния момент $t = 0$ товарът е отместен от равновесното положение на разстояние x_0 и има скорост v_0. Това е най-общата ситуация, която може да се измисли. (Не може да се зададе началното *ускорение*, защото то зависи от свойствата на пружината; ние можем да се разпореждаме само с величината x_0.) Да пресметнем сега A и B. Ще започнем с уравнението за x.

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t.$$

Тъй като ще ни е необходима и скоростта, ще диференцираме x и ще получим

$$v = -\omega_0 A \sin \omega_0 t + \omega_0 B \cos \omega_0 t .$$

Тези изрази са верни за всички t, но ние имаме допълнителни сведения за величините x и v при $t=0$. По такъв начин, ако положим $t=0$, ние трябва да получим отляво x_0 и v_0, тъй като това е същото, в което се превръщат x и v при $t=0$. Освен това ние знаем, че косинус от нула е равен на единица, а синус от нула е равен на нула. Следователно

$$x_0 = A.1 + B.0 = A$$

и

$$v_0 = -\omega_0 A.0 + \omega_0 B.1 + \omega_0 B.$$

По такъв начин в този частен случай

$$A = x_0 \qquad B = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

Като знаем A и B, можем, ако пожелаем, да намерим a и Δ.

И така задачата за движението на осцилатора е решена, но има едно интересно нещо, което трябва да се провери. Трябва да се изясни запазва ли се енергията. Ако няма сили на триене, енергията трябва да се запазва. Сега е удобно да използваме формулите

$$x = a \cos (\omega_0 t + \Delta)$$

и

$$v = -\omega_0 a \sin (\omega_0 t + \Delta).$$

Нека намерим кинетичната енергия T и потенциалната енергия U. Потенциалната енергия в произволен момент от времето е равна на $^1/_2\ kx^2$, където x е преместването, а κ — константата на еластичността на пружинката. Замествайки вместо x написания по-горе израз, намираме

$$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} ka^2 \cos^2 (\omega_0 t + \Delta).$$

Разбира се, потенциалната енергия зависи от времето; тя винаги е положителна, това също е понятно: нали потенциалната енергия е енергията на пружината, а тя се променя заедно с x. Кинетичната енергия е равна на $\frac{1}{2} mv^2$; използувайки израза за v, получаваме:

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 a^2 \sin^2 (\omega_0 t + \Delta).$$

Кинетичната енергия е равна на нула при максимално x, тъй като в тоя случай товарът спира; когато товарът преминава през равновесното положение ($x=0$), кинетичната енергия достига максимум, защото именно тогава товарът се движи най-бързо. Изменението на кинетичната енергия по такъв начин е противоположно на изменението на потенциалната енергия. Пълната енергия трябва да бъде постоянна. И действително, ако си спомним, че $k = m\,\omega_0^2$, виждаме, че

$$T + U = \frac{1}{2} m\,\omega_0^2 a^2 [\cos^2 (\omega_0 t + \Delta) + \sin^2 (\omega_0 t + \Delta)] = \frac{1}{2} m\,\omega_0^2 a^2.$$

Енергията зависи от квадрата на амплитудата: ако се увеличи амплитудата на трептенията два пъти, енергията нараства четири пъти. *Средната* потенциална енергия е равна на половината от максималната и следователно на половината от пълната; средната кинетична енергия също е равна на половината от пълната енергия.

5. Трептения под действие на външна сила

Остава ни да разгледаме *трептенията на хармоничен осцилатор* под действието на външна сила. Движението в този случай се описва с уравнението:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F(t). \qquad (21.8)$$

Нека да помислим какво ще бъде поведението на товара при тези обстоятелства. Външната движеща сила може да зависи от времето по произволен начин. Ще започнем с най-простата зависимост. Да предположим, че силата осцилира:

$$F(t)=F_0 \cos \omega t. \tag{21.9}$$

Обърнете внимание, че ω не е непременно ω_0: ще считаме, че може да се променя ω, заставяйки силата да действува с различна честота. И така, трябва да се реши уравнението (21.8) в случая на специално подбраната сила (21.9). Какво ще бъде решението (21.8)? Едно от частичните решения (с общото решение ние още ще се занимаваме) ще изглежда така:

$$x=C \cos \omega t, \tag{21.10}$$

в което константата C трябва да се определи. С други думи, опитвайки се да намерим решението в такъв вид, ние предполагаме, че ако се тегли товарът назад и напред, той в края на краищата ще почне да се люлее назад и напред в такт с действуващата сила. Да проверим може ли да стане това. Като заместим (21.10) в (21.9), получаваме:

$$-m\omega^2 C \cos \omega t = -m\omega_0^2 C \cos \omega t + F_0 \cos \omega t. \tag{21.11}$$

Ние вече заменихме k с $m\omega_0^2$, защото е по-удобно в края да се сравнят две честоти. Уравнението (21.11) може да се раздели на съдържащия се във всеки член косинус и ще се убедим, че при правилен избор на стойността на C изразът (21.10) ще бъде решението. Тази величина C трябва да бъде такава:

$$C=F_0/m(\omega_0^2-\omega^2). \tag{21.12}$$

По такъв начин товарът m трепти с честотата на действуващата върху него сила, но амплитудата на трептението зависи от съотношението между честотата на силата и честотата на свободното движение на осцилатора. Ако ω е много малка в сравнение с ω_0, товарът ще се движи след силата. Ако прекомерно бързо се променя посоката на тласъците, товарът започва да се движи в противоположна посока спрямо силата. Това следва от равенство (21.12), което показва, че стойността на C е отрицателна, ако ω е по-голяма от *собствената* честота на хармоничния осцилатор ω_0. (Ние ще наричаме ω_0 собствена честота на хармоничния осцилатор, а ω — приложена честота.) При много висока честота, знаменателят става много голям и товарът практически не се движи.

Намереното от нас решение е вярно само за случая, когато вече се е установило равновесие между осцилатора и действуващата сила; това става след като затихнат другите движения. Тези движения се наричат *преходен* отзвук на силата $F(t)$, а движението, описвано от (21.10) и (21.12) — *равновесен* отзвук.

Като се вгледаме във формулата (21.12), ще забележим любопитно нещо; ако честотата ω е почти равна на ω_0, то C клони към безкрайност. По такъв начин ако се настрои силата „в съгласие“ със собствената честота, отклоненията на товара ще достигнат гигантски размери. За това знае всеки, на когото някога се е налагало да люлее дете в люлка. Това е много трудно да се направи, ако се затворят очи и безразборно се тласка люлката. Но ако се намери правилният ритъм, е лесно да се разлюлее люлката, обаче щом отново изгубим ритъма, тласъците ще започнат да спират люлката и от такава работа ще имаме малка полза.

Ако честотата ω бъде точно равна на ω_0, то амплитудата трябва да стане *безкрайна*, което, разбира се, е невъзможно. Причината, нещо да не е в ред с уравнението, е, че решавахме не съвсем вярно уравнение. Съставяйки уравнението (21.8), ние забравихме за силите на триене и за много други сили, които се срещат в реалния свят, така че амплитудата никога няма да достигне безкрайност по някаква причина, може би пружината ще се скъса значително по-рано!

22

Алгебра

1. Събиране и умножение
2. Обратни операции
3. Абстракция и обобщение
4. Приблизително пресмятане на ирационални числа
5. Комплексни числа
6. Имагинерни експонати

1. Събиране и умножение

Изучавайки осцилатора, ще ни се наложи да се възползуваме от една от най-забележителните, може би най-поразителната от формулите, които може да се намерят в математиката. Физикът обикновено отделя по тази формула, да кажем две минути, даже без да ѝ обърне внимание. Но нали науката носи не само практическа полза, а служи като източник на удоволствие, затова нека не бързаме да преминем покрай тази скъпоценност, а да поставим елмаза в неговото собствено обкръжение, в голямата картина на онзи клон от математиката, което обикновено наричат елементарна алгебра.

Вие можете да попитате „За какво е необходима математиката в книга по физика? Ето няколко уважителни причини: преди всичко математиката е много важен работен инструмент, но с това може да се оправдае загубата само на две минути при извода на тази формула. Обаче при изучаване на теоретичната физика ние откриваме, че всички физически закони може да се запишат във вид на математически формули, именно това придава на законите простота и красота. По такъв начин дълбокото разбиране на математическите релации в края на краищата е необходимо за разбиране на природата. Но главната причина е красотата на темата: нали макар че хората са разрязали природата на много късчета и продължават да я кълцат, изучавайки твърде много предмети в различните факултети, такова разделяне е изкуствено и ние винаги ще получаваме наслада, събирайки заедно отделните късчета.

Още една причина, поради която следва да се заемем по-дълбоко с алгебрата: макар много от вас вече да са се запознали с алгебрата в средното училище, това е било само първо запознанство и много формули са били още непривични. Всичко това е било трудна работа, както е с физиката сега. Твърде често за всеки е голямо удоволствие да погледне назад и да види каква територия е завладял и какво представлява изученото в по-общ план. Може би някой ден някой в Математическия факултет ще прочете лекция по механика, за да покаже по същия начин какво се стараеме да изучаваме в курса по физика?

Това, с което ще се заемем от гледна точка на математиката, не ще бъде истинска алгебра. Математикът се интересува главно от това как да се изложи едно или друго математическо твърдение, какви предположения са задължителни при извода на теоремата и какви не са. За нас е по-важен резултатът от доказателството. Например питагоровата теорема е интересна за нас с това, че в нея се съобщава, че сумата от квадратите на катетите на правоъгълния триъгълник е равна на квадрата на хипотенузата; това е много интересен факт и ние ще го използуваме, без да обсъждаме въпроса, как да го докажем и какви аксиоми са необходими за това. В същия този дух ние ще изложим елементарната алгебра по възможност чисто качествено. Ние говорим за елементарна алгебра, защото съществува клон от математиката, наречена висша алгебра, където някои правила, като $ав = ва$ са изоставени и това също се нарича алгебра, но до такива неща ние няма да се докосваме.

Ще започнем изучаването на алгебрата от средата. Да предположим, че вече ни е известно, че съществуват цели числа, че има нула и какво значи да се увеличи числото с единица. Не казвайте, моля ви: „Ето ти среда“, защото за математика това

е среда, нали той знае теория на множествата и може да *изведе* всички тези свойства на целите числа. Но ние няма да се впускаме в областта на философията на математиката и на математическата логика, а ще се ограничим с предположението, че са ни известни целите числа и че можем да броим.

Ако вземем цялото число a и прибавим към него b пъти по единица, ние ще получим числото $a+b$; така се определя *събирането* на целите числа.

Като определим събирането, ще направим следното: ще започнем от нула и ще прибавим към нея b пъти числото a; по такъв начин ние ще определим *умножението* на целите числа и ще наричаме резултата *произведение* от a и b.

Сега може да се извършват ред *последователни умножения*: Ако се умножи b пъти единицата по числото a, ние ще повдигнем a на степен b и ще запишем резултата във вида a^b.

Като се изхожда от тези определения, лесно се доказват такива съотношения.

$$
\begin{array}{lll}
\text{а)} & a+b=b+a; & \text{ж)} \quad a^b a^c = a^{b+c}; \\
\text{б)} & a+(b+c)=(a+b)+c; & \text{з)} \quad (a^b)^c = a^{(bc)}; \\
\text{в)} & ab=ba; & \text{и)} \quad a+0=a; \\
\text{г)} & a(b+c)=ab+ac; & \text{к)} \quad a.1=a; \\
\text{д)} & (ab)c=a(bc); & \text{л)} \quad a^1=a. \\
\text{е)} & (ab)^c=a^c b^c &
\end{array}
\qquad (22.1)
$$

Тези резултати са добре известни. Ние не искаме дълго да се спираме върху тях, а просто ги отбелязваме. Разбира се, 1 и 0 притежават особени свойства, например $a+0=a$, $a.1=a$ и a на първа степен е равно на a.

Съставяйки табличката от формулите (22.1), ние се ползувахме от такива свойства като непрекъснатост, съотношение на наредбата; да им се даде определение е много трудно, затова за тази цел е създадена цяла наука. Освен това ние написахме, разбира се, твърде много „правила“; някои от тези правила може да се изведат от другите, но на това няма да се спираме.

2. Обратни действия

Освен правите действия събиране, умножение и степенуване съществуват *обратни* действия. Можем да ги определим така. Да предположим, че са ни дадени a и c; как да се намери b — удовлетворяващо уравненията $a+b=c$, $ab=c$, $b^a=c$? Ако $a+b=c$, b се определя с помощта на *изваждане*: $b=c-a$. Толкова проста е и операцията *деление*: ако $ab=c$, $b=c/a$; това е решение на уравнението $ab=c$ „отзад напред“. Ако вие срещнете степен: $b^a=c$, трябва да запомните, че b се нарича корен от a-та степен от c. Например на въпроса: „Кое число, като се повдигне на куб, дава осем?“ Трябва да се отговори така: „Корен кубичен от осем, т. е. 2.“ Обърнете внимание, че когато работата идва до степен, се появяват *две* обратни действия. Действително щом a^b и b^a са различни числа, може да се зададе и такъв въпрос: „На каква степен трябва да се повдигне 2, за да се получи 8?“ В този случай се налага да се намери *логаритъм*. Ако $a^b=c$, то $b=\log_a c$. Не трябва да се плашим от твърде обемистото записване на числото b в този случай; то се намира толкова просто, както и резултатите от другите обратни действия. Макар че логаритъмът „се преминава“ значително по-късно от коренуването, това е също просто нещо: чисто и просто това са разни видове решения на алгебричните уравнения. Да напишем един до други правите и обратни действия:

а) събиране	а) изваждане	
$a+b=c$;	$b=c-a$;	
б) умножение	б) деление	
$a.b=c$;	$b=\frac{c}{a}$;	
в) степенуване	в) коренуване	(22.2)
$b^a=c$;	$b=\sqrt[a]{c}$;	
г) степенуване	г) логаритмуване	
$a^b=c$;	$b=\log_a c$.	

Каква е идеята? Изписаните релации са верни за цели числа, защото те се извеждат от определенията на събиране, умножение и степенуване. Да помислим *не може ли да се разшири класата от обектите, които, както преди, ще се означават с буквите a, b и c и за които, както преди, ще бъдат верни всички формулирани от нас правила,* макар събирането вече да не може да се схваща като последователно увеличаване на числата с единица, а повдигането в степен — като последователно умножаване на цели числа.

3. Абстракция и обобщение

Ако някой, след като усвои нашите определения, пристъпи към решаване на алгебрично уравнение, той бързо ще срещне неразрешими задачи. Решете например уравнението $b=3-5$. Ще ви се наложи в съответствие с определението на изваждането да намерите число, което дава 3, ако към него се прибави 5. Ако направите преглед на всички цели положителни числа (а нали в правилата се говори само за такива числа), вие ще кажете, че задачата е нерешима. Обаче може да се направи това, което после ще стане система, велика идея: абстракция и обобщение. Досега алгебрата се състои за нас от правила и цели числа. Да забравим за първоначалните определения на събирането и умножението, но да запазим правилата (22.1) и (22.2) и да предположим, че те са верни изобщо не само за цели положителни числа (за тях тези правила бяха изведени), а за по-широк клас от числа. По-рано ние записвахме целите положителни числа във вид на символи, за да изведем правилата; сега правилата ще определят символи, а символите ще бъдат представители на някакви по-общи числа. Манипулирайки с правилата, може да покажем, че $3-5=0-2$. Нека определим новите числа: $0-1$, $0-2$, $0-3$, $0-4$ и т. н. и да ги наречем *цели отрицателни числа.* След това ние можем да решим *всички* задачи от изваждане. Сега да си спомним и за другите правила, например $a(b+c)=ab+ac$; това ще ни даде правилото за умножаване на отрицателните числа. Като прегледаме всички правила, ние ще видим, че те са верни както за положителните, така и за отрицателните числа.

Ние значително разширихме областта на действие на нашите правила, но достигнахме до това с цената на промяна на смисъла на символите.

Вече не може например да се каже, че да се умножи с 5 по -2 значи да се събере 5 минус два пъти. Тази фраза е безсмислена. Въпреки това, ползвайки правилата, вие винаги ще получите верен резултат.

Степенуването ни носи нови грижи. Някой непременно ще поиска да узнае какво значи символът $a^{(3-5)}$. Ние знаем, че $3-5$ е решението на уравнението $(3-5)+5=3$. Следователно ние знаем, че $a^{(3-5)}a^5=a^3$. Сега може да се раздели на a^5, тогава $a^{(3-5)}=a^3/a^5$. Още едно усилие и ето окончателния разултат: $a^{(3-5)}=1/a^2$. По такъв начин ние установихме, че степенуването на числа в отрицателна степен се свежда до деление на единица с числото, повдигнато в положителна степен. Всичко би било добре, ако $1/a^2$ не беше безсмислен символ. Нали a е цяло положително или

отрицателно число, значи a^2 е по-голямо от единица, а ние не умеем да делим единицата на числа, по-големи от единица!

Напред! Големият ни план е да продължим процеса на обобщението. Натъкнали се на неразрешима задача, трябва да разширим царството на числата. Този път ни е трудно да делим: не може да се намери цяло число, нито положително, нито отрицателно, което би се появило като резултат от деленето на 3 с 5. Ще наречем това и други подобни на него числа рационални дроби и ще предположим, че дробите се подчиняват на същите правила, както и целите числа. Тогава ние ще можем да оперираме с дробите също тъй добре, както и с целите числа.

Още един пример за степен: какво е това $a^{3/5}$? Ние знаем само, че $(3/5)5=3$, тъй като определението на числото $3/5$ е такова, и още, че $(a^{3/5})^5=a^{(3/5)5}$, тъй като това е едно от правилата. Като си спомним определението за корен, ние получаваме $a^{(3.5)}=\sqrt{a^3}$. По такъв начин можем да определим какво означаваме, поставяйки дроби в различните символи. Самите правила ни помагат да определим дефиницията и всичко това не е произволно. Забележително е, че тези правила се справят с дробите толкова добре, както и с целите числа (положителни и отрицателни)!

Да идем по-нататък по пътя на обобщението. Съществуват ли още уравнения, които ние не сме се научили да решаваме? Разбира се. Например не ни е по силите уравнението $b=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$. Невъзможно е да се намери рационална дроб, квадратът на която да е равен на 2. В наше време да се изясни това е достатъчно просто. Ние знаем десетичната система и не се плашим от безкрайна десетична дроб, която може да се използува като приближение на корен от две. Исторически идеята за такова приближение представлява голяма трудност за древните гърци. За да се формулира точно същността на такова приближение, трябва да се схванат такива високи материи, като непрекъснатост и съотношение на подреденост, а това е много трудна крачка в процеса на обобщението. Това е направил Дедекинд много точно и много формално. Обаче ако не се грижим за математическата строгост, лесно е да се разбере, че числа от вида $\sqrt{2}$ [illegible] се представят чрез цяла редица приблизителни дроби, от десетични дроби (защото ако се спрем на някаква десетична дроб, ще се получи рационално число), които все по-близко и по-близко се приближават до желания резултат. Тези знания са ни напълно достатъчни; те позволяват свободно да боравим с ирационалните числа и да пресмятаме числа от типа на $\sqrt{2}$ с необходимата точност, като извършим известно количество работа.

4. Приблизително пресмятане на ирационални числа

Сега въпросът е такъв: как да се повдигне число на ирационална степен? Например искаме да узнаем какво е това $10^{\sqrt{2}}$. Отговорът по принцип е много прост. Да вземем вместо $\sqrt{2}$ неговото приближение във вид на крайна десетична дроб — това е рационално число. Да повдигаме в рационална степен ние умеем; работата се свежда до повдигане в цяла степен и извличане на корен. Ние ще получим *приближената стойност* на числото $10^{\sqrt{2}}$. Може да се вземе по-дълга десетична дроб (това отново е рационално число). Тогава ще се наложи да извлечем корен с по-голяма степен; нали знаменателят на рационалната дроб ще се увеличи, но затова пък ще получим по-точно приближение. Разбира се, ако се вземе приблизителното значение на $\sqrt{2}$ във вид на много дълга дроб, степенуването ще бъде много трудна работа. Как да се справим с тази задача?

Пресмятането на квадратни корени, кубични корени и други корени от невисока степен е напълно достъпен за нас аритмети-

чен процес; изчислявайки, последователно пишем един след друг знаците на десетичната дроб. Но за да се повдигне в ирационална степен или да се пресметне логаритъм (да се реши обратната задача), е необходим такъв труд, че не е просто вече да се приложи предната процедура. На помощ идват таблиците. Наричат ги логаритмични таблици или таблици на степените в зависимост от това за какво са предназначени. Те икономисват време: за да повдигнем число в ирационална степен, ние не изчисляваме, а само прелистваме страници.

Макар пресмятането на събраните в таблиците стойности да е чисто техническа процедура, все пак това е твърде интересна работа и има голяма историческа стойност. Затова да видим как се прави то. Ние ще изчислим не само $x=10^{\sqrt{2}}$, но ще решим и друга задача: $10^x=2$, или $x=log_{10}2$. При решаването на тази задача ние няма да открием нови числа; това са просто изчислителни задачи. Решенията ще бъдат ирационални числа, безкрайни десетични дроби, а те не са нов вид числа.

Да помислим как да решим нашите уравнения. Общата идея е много проста. Ако се изчисли 10^1 и $10^{4/10}$, и $10^{1/100}$, и $10^{4/1000}$, и т. н., а след това умножим резултатите, ще получим $10^{1,414\cdots}$, или $10^{\sqrt{2}}$. Постъпвайки така, ние ще решим всяка задача от такъв род. Обаче вместо $10^{4/10}$ и т. н. ние ще изчисляваме $10^{1/2}$, $10^{1/4}$ и т. н. Преди да започнем изчисленията, ще обясним още защо се обръщаме към числото 10 по-често, отколкото към другите числа. Ние знаем, че значението на логаритмичните таблици излиза далеч зад рамките на математичната задача за изчисляване на корени, защото изобщо при всяка основа

$$log_b|ac|=log_b a+log_b c. \tag{22.3}$$

Това е добре известно на всеки, който се е ползувал от логаритмична таблица, за да умножава числа. При каква основа b трябва да се взимат логаритмите? Това е безразлично; нали в основата на такива изчисления е поставен само принцип, общо свойство на логаритмичната функция. Като пресметнем един път логаритмите при някаква произволна основа, можем да преминем към логаритми при друга основа с помощта на умножението. Ако се умножи уравнението (22.3) с 61, то ще остане вярно, поради това, ако се умножат всички числа в логаритмичната таблица при основа b с 61, може да се ползваме и от такава таблица. Да предположим, че са ни известни логаритмите на всички числа при основа b. С други думи, можем да решим уравнението $b^a=c$ за всяко c; затова съществува таблицата. Задачата се състои в това как да се намери логаритъмът на същото число при друга основа, например x. Необходимо ни е да решим уравнението $x^{a'}=c$. Лесно е да се направи това, защото x винаги може да се представи така: $x=b^t$. Да се намери t, като знаем x и b, е просто: $t=\log_b x$. Да заместим сега $x=b^t$ в уравнението $x^a=c$; то ще премине в следното уравнение: $(b^t)^{a'}=b^{ta'}=c$. С други думи, произведението ta' е логаритъм на c при основа b. Значи $a'=a/t$. По такъв начин логаритмите при основа x са равни на произведенията от логаритмите при основа b и постоянното число $1/t$. Следователно всички логаритмични таблици са еквивалентни с точност до умножение с числото $1/log_b x$. Това ни позволява да подберем при съставяне на таблиците всяка основа, но ние сме решили, че най-удобно е да се вземе като основа числото 10. (Може да възникне въпросът: не съществува ли все пак някаква естествена основа, при която всичко ще изглежда някак си по-просто? Ние ще се опитаме да отговорим на тоя въпрос по-късно. Засега всички логаритми ще се изчисляват при основа 10.)

Сега да видим как се съставят логаритмични таблици. Работата се започва с последователни извличания на квадратен корен от 10. Резултатът може да се види в табл. 22.1. Степенните показатели са записани в нейния първи стълб, а числата 10^s — в третия. Ясно е, че 10^1 е равно на 10. Лесно е да се повдигне 10 на степен 1/2 — това е квадратен корен от 10, а как се извлича

Таблица 22.1

Последователно извличане на квадратен корен от 10

Степенен показател s	$1024s$	10^s	$(10^s-1)/s$
1	1024	10,00000	9,00
1/2	512	3.16228	4,32
1/4	256	1,77828	3,113
1/8	128	1,33352	2,668
1/16	64	1,15478	2,476
1/32	32	1,074607	2,3874
1/64	16	1,036633	2,3445
1/128	8	1,018152	$2,3234^{211}$
1/256	4	1,0090350	$2,3130^{104}$
1/512	2	1,0045073	$2,3077^{53}$
1/1024	1	1,0022511	$2,3051^{26}$ $\downarrow^{26}$
$\Delta/1024$	Δ	$1+0022486\Delta$	$\leftarrow 2,3025$
$(\Delta\to 0)$		$\left(=1+2,3025\,\frac{\Delta}{1024}\right)$	

квадратен корен от всяко число, знае всеки.[1] И така ние намерихме първия квадратен корен; той е равен на 3,16228. Какво дава това? Нещичко дава. Ние вече можем да кажем на какво е равно $10^{0,5}$ и знаем най-малко *един* логаритъм. Логаритъмът на числото 3,16228 е много близък до 0,50000. Обаче трябва да се положат още малко усилия: ясно е, че се нуждаем от повече информация. Да извлечем още един квадратен корен и ще намерим $10^{1/4}$, което е равно на 1,77828. Сега ние знаем още един логаритъм: 1,250 е логаритъмът на числото 17,78; освен това ние можем да кажем на какво е равно $10^{0,75}$: нали това е $10^{(0,5+0,25)}$, т. е. произведението от второто и третото число от третия стълб на таблица 22.1. Ако се направи първият стълб на таблицата достатъчно дълъг, таблицата ще съдържа почти всички числа; умножавайки числата от третия стълб, ние получаваме 10 почти във всяка степен. Такава е основната идея на таблицата. В нашата таблица се съдържат десет последователни корена от 10; основният труд по съставяне на таблицата е вложен в изчисляването на тези корени.

Защо не продължаваме да повишаваме точността на таблиците по-нататък? Защото ние вече нещо забелязахме. Повдигайки 10 на много малка степен, ние получаваме единица с малка добавка. Това, разбира се, става, защото, ако се повдигне например $10^{1/1000}$ на степен 1000, ние отново ще получим 10; ясно е, че $10^{1/1000}$ не може да бъде голямо число: то е много близко до единица. Нещо повече, малките добавки към единицата като че ли всеки път са разделени на две; погледнете таблицата по-внимателно: 1815 преминава в 903, после в 450,225 и т. н. По такъв начин, ако се изчисли още един единайсети квадратен корен, той с голяма точност ще бъде равен на 1,00112 и този резултат ние *отгатнахме* още преди изчислението. Може ли да се каже каква ще бъде добавката към единицата, ако се повдигне 10 в степен $\Delta/1024$, когато Δ клони към нула? Може. Добавката ще бъде приблизително равна на $0,0022511\,\Delta$. Разбира се, не точно $0,0022511\Delta$; за да се изчисли тази добавка, по-точно се прибягва до следния трик: изважда се от 10^s единица и се дели разликата на степенния показател s. Отклоненията на полученото по такъв начин частно от неговата точна стойност са еднакви за всяка степен s. Вижда се, че тези отношения (виж четвъртия стълб

[1] Най-добре е квадратният корен да се извлича не по този начин, на който обикновено учат в училище, а малко по-иначе. За да се извлече квадратен корен от числото N, да изберем достатъчно близко към отговора число a, да изчислим N/a и средното $a'=\frac{1}{2}[a+(N/a)]$;, това средно ще бъде новото число a, новото приближение на корена от N. Този процес много бързо довежда до целта: броят на значещите цифри се удвоява след всяка крачка.

на таблица 22.1) са приблизително равни. Отначало те все пак силно се различават едно от друго, но после все повече се приближават едно към друго, бавно клонейки към някакво число. Що за число е това? Да проследим как се променят числата от четвъртия стълб, ако се спускаме надолу по стълба. Отначало разликата на две съседни числа е равна на 0,0211, после е 0,0104, после 0,0053 и най-сетне 0,0026. Разликата всеки път намалява наполовина. Като направим още една крачка, ние ще я доведем до 0,0013, после до 0,0007, 0,0003, 0,0002 и най-сетне приблизително до 0,0001; трябва последователно да се дели 26 на 2. По такъв начин ние ще се спуснем още с 26 единици и ще намерим за граница 2,3025. (По късно ние ще видим, че по-правилно би било да се вземе 2,3026, но нека вземем това, което получихме). Ползувайки се от тази таблица, може да се повдигне 10 на всякаква степен, ако нейният показател по какъвто и да е начин се изразява чрез $1/1024$.

Сега е лесно да се състави таблица на логаритмите, защото всичко необходимо за това ние вече сме приготвили. Процедурата е показана в таблица 22.2, а необходимите числа се взимат от втория и третия стълб на таблица 22.1.

Таблица 22.2

Изчисляване на $\log_{10}2$

$2 : 1{,}77828 = 1{,}124682$

$1{,}124682 : 1{,}074607 = 1{,}046598$ и т. н.

$2 = (1{,}77828)\ (1{,}074607)\ (1{,}036633)\ (1{,}090350)\ (1{,}000573)$

$$= 10\left[\frac{1}{1024}\ (256+32+16+4+0{,}254)\right] = 10\left[\frac{308{,}254}{1024}\right]$$

$$= 10^{0{,}30103} \qquad \left(\frac{0{,}00573 \cdot 1024}{2{,}3025} = \frac{573}{2249} = 0{,}254\right)$$

Следователно $\log_{10}2 = 0{,}30103$

Да предположим, че искаме да знаем логаритъм от 2. Това значи, че ние искаме да знаем на каква степен трябва да се повдигне 10, за да се получи 2. Може би 10 трябва да се повдигне на степен $1/2$? Не, получава се много голямо число. Като гледаме таблица 22.1, можем да кажем, че необходимото ни число лежи между $1/4$ и $1/2$. Търсенето ще започнем от $1/4$; да разделим 2 на 1,788 ..., ще се получи 1,124 ...; при делението ние отнехме от логаритъма на две 0,250000 и сега нас ни интересува логаритъмът на 1,124 .... Като го намерим, ние ще го прибавим към резултата $1/4 = 256/1024$. Да намерим в таблица 22.1 числото, което при движението по третия стълб отгоре надолу стои непосредствено след 1,124 .... Това е 1,074607. Отношението на 1,124 ... към 1,074607 е равно на 1,046598. В края на краищата ние ще представим 2 във вид на произведение на числа от таблица 22.1:

$2 = (1{,}77828) . (1{,}074607) . (1{,}036633) . (1{,}0090350) . (1{,}000573)$.

За последния множител 1,000573) в нашата таблица не се намери място; за да се намери неговият логаритъм, трябва да се представи това число във вида $10^{\Delta/1024} \approx 1 + 2{,}3025\,\Delta/1024$. Лесно намираме, че $\Delta = 0{,}254$. По такъв начин нашето произведение може да се представи като десетка, повдигната на степен $1/1024 . (256 + 32 + 16 + 4 + 0{,}254)$. Събираме и делим; така получаваме нужния логаритъм: $\log_{10}{}^2 = 0{,}030103$; този резултат е верен до петия десетичен знак!

Ние пресмятаме логаритмите точно така както това е правил мистър Бриг от Халифакс през 1620 год. Като завършил работата, той казал: „Аз пресметнах последователно 54 квадратни корена от 10." Всъщност той е изчислил само 27-те първи корена, а после направил фокуса с Δ. Да се изчисли 27 пъти квадратен корен от 10, изобщо казано, е малко по-сложно, отколкото 10 пъти, както правехме това ние. Обаче мистър Бриг е направил нещо значително по-голямо: той пресмятал корените с то-

чност до шестнайсетия десетичен знак, а когато публикувал своите таблици, оставил в тях само 14 десетични знака, за да закръгли грешките. Да се състави логаритмична таблица с точност до четиринайсетия десетичен знак по такъв начин е много трудна работа. Затова цели триста години след това съставителите на логаритмични таблици се занимавали с това да намаляват таблиците на мистър Бриг, изхвърляйки от тях всеки път различно число десетични знаци. Едва в последно време с помощта на електронните сметачни машини се оказа възможно да се съставят логаритмични таблици независимо от мистър Бриг. При това се използва по-ефективен метод на пресмятане, основан на разлагането на логаритъма в ред.

Съставяйки таблиците, ние се натъкнахме на интересен факт: ако показателят на степента ε е много малък, много лесно е да се изчисли 10^{ε}; това е просто $1+2{,}3025\,\varepsilon$. Това значи, че $10^{n/2{,}3025} = 1+n$ за много малки n. Освен това ние казахме от самото начало, че пресмятаме логаритмите при основа 10 само затова, защото на ръцете си имаме 10 пръста и по десетки удобно броим. Логаритмите при всяка друга основа се получават от логаритмите при основа 10 с просто умножение. Сега настана време да се изясни не съществува ли математически отличена основа на логаритмите, отличена по причини, които нямат нищо общо с числото на пръстите на ръката. В тази естествена *скала* формулите с логаритмите трябва да изглеждат по-просто. Да съставим новата логаритмична таблица, като умножим всички логаритми при основа 10 по 2,3025 .... Това съответствува на преход към нова основа — *естествена*, или основа e. Да отбележим, че $\log_e(1+n) \approx n$ или $e^n \approx 1+n$, когато $n \to 0$.

Лесно е да се намери самото число e; то е равно на $10^{1/2{,}3025}$, или $10^{0{,}434294\ldots}$. Това е 10 на ирационална степен. За изчисляване на e може да се използува таблицата на корените от 10. Да представим 0,434294 ... отначало във вида 444,73/1024, а числителя на тази дроб във вид на сума: $444{,}73 = 256+128+32+16+2+0{,}73$. Числото e поради това е равно на произведението от числата:

$$(1{,}77828).(1{,}33352).(1{,}074607).(1{,}036633).(1{,}018152)\times$$
$$\times(1{,}009035).(1{,}001643) = 2{,}7184.$$

(Числото 0,73 го няма в нашата таблица, но съответният му резултат може да се представи във вида $1+2{,}3025\,\Delta$ и да се изчисли на какво е равно Δ.) Като се умножат всичките седем множителя, ние ще получим 2,7184 (Всъщност трябва да бъде 2,7183, но и този резултат е добър.) Използвайки такива таблици, може да се повдига число на ирационална степен и да се пресмятат логаритми от ирационални числа. Ето така трябва да се отнасяме към ирационалностите.

5. Комплексни числа

Макар че ние добре поработихме, все пак има още уравнения, които не са ни по силите! Например на какво е равен квадратен корен от -1? Да предположим, че това е x, тогава $x^2 = -1$. Няма нито рационално, нито ирационално число, квадратът на което да е равен на -1. Налага се отново да се попълва запасът от числа. Да предположим, че уравнението $x^2 = -1$ все пак има решение и да означим това решение с буквата i; числото i има засега по дефиниция само едно свойство: повдигнато на квадрат, дава -1. Засега това е всичко, което може да се каже за него. Обаче уравнението $x^2 - 1$ има два корена. С буквата i ние сме означили един от корените, но някой може да каже: „А аз предпочитам да имам работа с корена $-i$; моята буква i просто е минусът на вашата i.“ Няма какво да му се възрази, защото числото i се определя от съотношението $i^2 = -1$; това съотношение остава вярно, ако се промени знакът на i. Значи всяко уравнение, съдържащо някакво количество i, остава вярно,

ако се сменят знаците на всички i. Такава операция се нарича *комплексно спрягане*. По-нататък нищо не ни пречи да получаваме новите числа ето така: събира се i няколко пъти, умножава се i на някакво наше старо число, прибавя се резултатът от умножението към старото число и т. н. Всичко това може да се направи, без да се нарушават по-рано установените правила. По такъв начин ние достигаме до числа, които може да се запишат във вида $p+qi$, където p и q са числа, с които ние имахме работа по-рано, наричат ги *реални числа*. Числото i наричат *имагинерна единица*, а произведението от реално число и имагинерната единица — *чисто имагинерно число*. Най-общото число a има вида $a=p+iq$ и го наричат *комплексно число*. Не е сложно да се борави с комплексни числа; например трябва да изчислим произведението $(r+is)(p+iq)$. Като си спомним за правилата, ние ще получим

$$\begin{aligned}(r+is)(p+iq) &= rp+r(iq)+(is)p+(is)(iq)= \\ &= rp+i(rq)+i(sp)+(ii)(sq)= \\ &= (rp-sq)+i(rq+sp),\end{aligned} \tag{22.4}$$

защото $ii=i^2=-1$. Следователно всички числа, които удовлетворяват сега правилата (22.1), имат такава математическа форма.

Обогатени с опита, получен в предните раздели, вие ще кажете: „Рано е да се говори за обща форма. Трябва още да се определи повдигане в имагинерна степен и всичко останало, а когато свършим всичко, може да се измислят много алгебрични уравнения, пък макар и $x^6+3x^2=-2$, за решението на които ще са необходими нови числа. Тогава ще обобщим всичко отново. В това е и работата, че освен реалните числа достатъчно е да се изобрети само едно число — квадратен корен от -1, след което може да се реши всяко алгебрично уравнение! — Това удивително нещо трябва да доказват вече математиците. Доказателството е много красиво, много интересно, но далече не очевидно И действително, изглежда по-естествено от всичко да се очаква, че заедно с придвижването в дебрите на алгебричните уравнения ще се налага да се изобретява отново, отново и отново. Но най-чудесното е, че повече нищо не трябва да се работи с тези числа, и повече нищо няма да изобретяваме. Ние ще се научим да повдигаме комплексните числа на комплексна степен и да изразяваме решението на всяко алгебрично уравнение във вид на крайна комбинация от вече известните ни символи. Това не ще доведе до нови числа. Например квадратен корен от i, или i^i са също такива комплексни числа. Сега ще разгледаме това по-подробно.

Ние вече знаем как трябва да се събират и умножават комплексните числа; сумата от две комплексни числа $(p+iq)+(r+is)$ е числото $(p+r)+i(q+s)$. Но *повдигането на комплексните числа на комплексна степен* е вече по-трудна задача. Обаче тя се оказва не по-трудна от задачата за повдигане реалните числа на комплексна степен. Да разгледаме как се повдига в комплексна степен числото 10 — не в ирационална, а в комплексна степен; необходимо ни е да знаем числото $10^{(r+is)}$. Разбира се, през цялото време трябва да използуваме нашите правила (22.1) и (22.2). Затова

$$10^{(r+is)}=10^r\,10^{is}. \tag{22.5}$$

Ние знаем как да изчислим 10^r, да умножаваме числа също можем, не умеем само да пресметнем 10^{is}. Ще предположим, че това е комплексното число $x+iy$. Задача: дадено е s, да се намери x и y. Ако

$$10^{is}=x+iy,$$

трябва да бъде вярно и комплексно спрегнатото уравнение

$$10^{-is}=x-iy.$$

(Някои неща може да се получат и без пресмятания, трябва про-

сто да се използуват правилата.) Умножавайки тези равенства, може да се получи още един интересен резултат

$$10^{is}\ 10^{-is}=10^0=1=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2. \qquad (22.6)$$

Ако ние по някакъв начин намерим x, много леко ще бъде да се определи y.

Обаче *как* все пак да се повдигне 10 на имагинерна степен? Къде да се търси помощ? Правилата вече не ще ни помогнат, но ето какво ни утешава: ако успеем да повдигнем 10 на каквато и да е имагинерна степен, то нищо няма да ни струва да повдигнем 10 на всяка степен. Ако е известно 10^{is} за една стойност на s, то изчисляването в случая на два пъти по-голямо s се свежда до повдигане на квадрат и т. н. Но как пък да се повдигне 10 даже и на една единствена имагинерна степен? За тази цел ще направим допълнително предположение; него, разбира се, не можем да поставим в един ред с правилата (22.1) и (22.2), но то ще доведе до разумни резултати и ще ни позволи да прекрачим далече напред. Да предположим, че „законът" $10^{\varepsilon}=1+2{,}3025\,\varepsilon$ (когато ε е много малко) е верен не само за реални, *но и за комплексни* ε. Ако това е така, $10^{is}=1+2{,}3025is$ при $s\to 0$. Предполагайки, че s е много малко (да кажем че е равно на 1/1024), ние получаваме добро приближение на числото 10^{is}.

Сега може да се състави таблица, която ще позволи да се изчислят всички имагинерни степени на 10, т. е. да се намерят числата x и y. Трябва да се постъпи така. Да започнем с показателя 1/1024, който ние считаме равен приблизително на $1+2{,}3025\,i/1024$. Тогава

$$10^{i/1024}=1{,}00000+0{,}0022486\,i. \qquad (22.7)$$

Умножавайки това число много пъти само на себе си, ние ще стигнем до по-високи степени. Ние просто на просто преобръщаме процедурата за съставяне на логаритмични таблици и, като пресмятаме квадрата, 4-тата степен, 8-та степен и т. н. на числото (22.7), съставяме таблица 22.3. Интересно е, че отначало всички числа x бяха положителни, а след това изведнаж се появи отрицателно число. Това означава, че съществува число s, за което реалната част на 10^{is} е равна на *нула*. Стойността на y в този случай е равна на i, т. е. $10^{is}=i$, или $is=\log_{10} i$. Като пример (виж табл. 22.3) ще изчислим с нейна помощ $\log_{10} i$. Процедурата на търсенето на $\log_{10} i$ съвсем точно повтаря това, което правихме, пресмятайки $\log_{10} 2$.

Произведението на какви числа от таблица 22.3 е равно на чисто имагинерно число? След няколко проби и грешки ние ще намерим, че най-добре от всичко е да се умножи „512" по „128". Тяхното произведение е равно на $0{,}13056+0{,}99144\,i$. Като се вгледаме в правилото за умножаване на комплексни числа, можем да разберем, че надежда за успех има при умножаване на това число с число, имагинерната част на което е равна приблизително на реалната част на нашето число. Имагинерната част на „64" е равна на 0,14349, което е достатъчно близко до 0,13056. Произведението на тези числа е равно на $-0{,}01350+0{,}99993\,i$. Ние прескочихме през нулата, поради това резултатът трябва да се *раздели* на $0{,}99996+0{,}00900\,i$. Как да се направи това? Ще изменим знака на i и ще умножим на $0{,}99996-0{,}00900\,i$ (нали $x^2+y^2=1$). В края на краищата ще открием, че ако се повдигне 10 на степен i (1/1024) $(512+128+64-4-2+0{,}20)$ или $698{,}20\,i/1024$, ще се получи имагинерна единица. По такъв начин $\log_{10} i=0{,}068226\,i$.

Таблица 22.3

Последователно изчисляване на квадрати

$10^{i/1024}=1+0{,}0022486i$

Степен is	$1024s$	10^{is}
$i/1024$	1	$1{,}00000+0{,}00225*i$
$i/512$	2	$1{,}00000+0{,}00450i$
$i/256$	4	$0{,}99996+0{,}00900i$
$i/128$	8	$0{,}99984+0{,}01800i$
$i/64$	16	$0{,}99936+0{,}03599i$
$i/32$	32	$0{,}99742+0{,}07193i$
$i/16$	64	$0{,}98967+0{,}14349i$
$i/8$	128	$0{,}95885+0{,}28402i$
$i/4$	256	$0{,}83872+0{,}54467i$
$i/2$	512	$0{,}40679+0{,}91365i$
$i/1$	1024	$-0{,}66928+0{,}74332i$

* Трябва да бъде 0,00224861

Таблица 22.4

Последователни произведения на числата $10^{i/s}$

p=степента .8i	$10^{ip/8}$	p=степента .8i	$10^{ip/8}$
0	1,00000+0,00000i	10	−0,96596+0,25880i
1	0,95882+0,28402i	11	−0,99969−0,02620i
2	0,83867+0,54465i	12	−0,95104−0,30905i
3	0,64944+0,76042i	14	−0,62928−0,77717i
4	0,40672+0,91356i	16	−0,10447−0,99453i
5	0,13050+0,99146i	18	+0,45454−0,89098i
6	−0,15647+0,98770i	20	+0,86648−0,49967i
7	−0,43055+0,90260i	22	+0,99884+0,05287i
8	−0,66917+0,74315i	24	+0,80890+0,58836i
9	−0,85268+0,52249i		

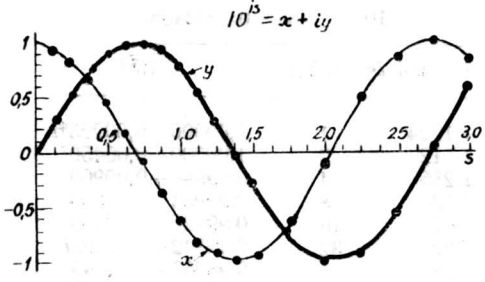
6. Имагинерни експоненти

За да се разбере по-добре какво е това число на имагинерна степен, ще изчислим *последователните степени* на десет. Ние няма всеки път да удвояваме степента, за да не повтаряме таблица 22.3, и ще видим какво ще се случи с реалната част, след като тя стане отрицателна. Резултатът може да се види в таблица 22.4.

В тази таблица са събрани последователни произведения на числото $10^{i/8}$. Вижда се, че x намалява, преминава през нулата, достига почти -1 (в интервала между $p=10$ и $p=11$ стойността му е равна точно на -1) и се връща назад. Точно по същия начин величината y се изменя назад-напред.

Точките върху фиг. 22 1 съответстват на числа, приведени в таблица 22.4, а съединяващите ги линии спомагат да се следи изменението на x и y. Вижда се, че числата x и y осцилират; 10^{is} *повтаря себе си.* Лесно е да се обясни защо става това. Нали i на четвърта степен това е i^2 *на квадрат.* Това число е равно на единица; следователно ако $10^{0,68i}$ е равно на i, то, повдигайки това число на четвърта степен, т. е. като изчисляваме $10^{2,72i}$, ние ще получим $+1$. Ако трябва да се получи например 10^{300i}, трябва да се умножи $10^{2,72i}$ по $10^{0,28i}$. С други думи, функцията 10^{is} се повтаря, има период. Ние вече знаем как изглеждат такива криви! Те са подобни на графиката на синуса или косинуса и ние ще ги наречем засега алгебричен синус и алгебричен косинус. Сега ще преминем от основа 10 към естествена основа. Това само ще измени мащаба на хоризонталната ос; ние ще означим 2,3025 s с t и ще напишем $10^{is}=e^{it}$, където t е реално число. Известно е, че $e^{it}=x+iy$ и ние ще запишем това число във вида:

$$e^{it}=\cos t+i\sin t. \tag{22.8}$$



Фиг. 22.1. Реална и имагинерна част на функцията 10^{is}.

Какви са свойствата на алгебричния косинус $\cos t$ и алгебричния синус $\sin t$? Преди всичко $x^2+y^2=1$; това ние вече доказахме и то е вярно за всяка основа, била тя 10 или e. Следователно $\cos^2 t+\sin^2 t=1$. Ние знаем, че $e^{it}=1+it$ за малки t; значи, ако t е близко до нулата число, то $\cos t$ е близък до единица, а $\sin t$ е близък до t. Продължавайки по-нататък, ние ще дойдем до извода, че *всички свойства на тези забележителни функции,* получаващи се в резултат от повдигането на имагинерна степен, *точно съвпадат със свойствата на тригонометричния синус и тригонометричния косинус.*

А същият ли е периодът? Нека да го намерим. На каква степен трябва да се повдигне e, за да се получи i? С други думи, на какво е равен логаритъм на i при основа e? Ние вече изчислихме логаритъм на i при основа 10; той е равен на 0,68226i; за да се премине към основа e, ще умножим това число по 2,3025 и ще получим 1,5709. Това число може да се нарече „ал-

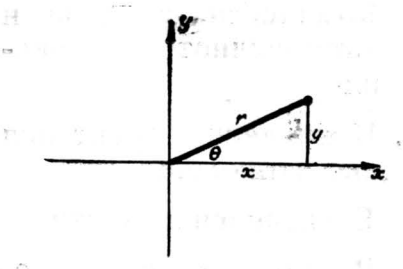
гебрично $\pi/2$". Но погледнете, то се отличава от истинското $\pi/2$ само с последния десетичен знак и това е просто следствие от нашите приближения при пресмятанията! По такъв начин чисто алгебрично възникнаха две нови функции — синус и косинус; те принадлежат на алгебрата и само на алгебрата. Ние тръгнахме по техните следи и открихме, че това са същите онези функции, които така естествено възникват в геометрията. Ние намерихме мост между алгебрата и геометрията.

Правейки равносметка на нашите търсения, ние ще напишем една от най-забележителните формули на математиката

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{22.9}$$

Ето го нашият бисер.

Връзката между алгебрата и геометрията може да се използува за изразяване на комплексни числа върху равнината; точката върху равнината се определя от координатите x и y (фиг. 22.2). Ще представим всяко комплексно число във вида $x+iy$. Ако разстоянието на точката от началото на координатната система означим с r, а ъгълът на радиус-вектора на точката с оста x — с θ, то изразът $x+iy$ може да се представи във вида $re^{i\theta}$. Това следва от геометричните отношения между x, y, r и θ. По такъв начин ние обединихме алгебрата и геометрията.



Фиг. 22.2. Комплексното число като точка в равнината.

Започвайки тази глава, ние познавахме само целите числа и умеехме да смятаме с тях. За това пък имахме идея за могъществото на абстракцията и обобщението. Използувайки алгебричните „закони" или свойствата на числата, сведени в уравненията (22.1), и определенията на обратните операции (22.2),ние успяхме да създадем не само нови числа, но и такива полезни неща, като логаритмичните таблици, степените и тригонометричните функции (те възникнаха при повдигане на реални числа на имагинерни степени), и всичко това успяхме да направим, извличайки много пъти квадратен корен от десет!

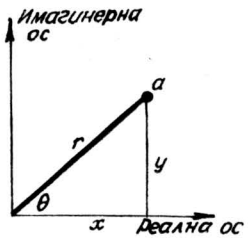
23

Резонанс

1. Комплексните числа и хармоничното движение
2. Принудени трептения със затихване
3. Електричен резонанс
4. Резонансът в природата

1. Комплексните числа и хармоничното движение

В тази глава ние отново ще говорим за хармоничния осцилатор, особено за осцилатор, на който действува външна сила. За анализа на тези задачи трябва да се развие нова техника. В предишната глава ние въведохме понятието комплексно число, което се състои от реална и имагинерна част и което може да се изобрази на графика. Реалната част на числото ще се изобрази на абсцисата, а имагинерната — на ординатата. Комплексното число a може да се запише във вида $a=a_r+ia_i$; при такова записване с индекса r се отбелязва реалната част на a, а с индекса i — имагинерната. Като се погледне фигура 23.1, лесно е да се съобрази, че комплексното число $a=x+iy$ може да се запише и така: $x+iy=rexp(i\theta)$, където $r^2=x^2+y^2=(x+iy)(x-iy)=aa^*$ (a^* е комплексно спрегнатото на a число; то се получава от a с изменение на знака на i). И така комплексното число може да се представи по два начина: явно да се отделят неговата реална и имагинерна част или да се даде модулът му r и фазовият ъгъл θ. Ако са дадени r и θ, x и y са равни на $r\cos\theta$ и $r\sin\theta$, и, обратно, изхождайки от числото $x+iy$, може да се намери $r=\sqrt{x^2+y^2}$ и ъгълът θ; $\operatorname{tg}\theta$ е равен на y/x (т. е. на отношението от имагинерната и реалната част).



Фиг. 23.1. Комплексно число, представено с точка в „комплексната равнина".

За да се приложат комплексните числа при решаване на физични задачи, ще направим такъв трик. Когато изучавахме осцилатора, имахме работа с външна сила, пропорционална на $\cos\omega t$. Такава сила $F_0\cos\omega t$ може да се разглежда като реална част на комплексното число $F=F_0exp(i\omega t)$, защото $exp(i\omega t)=\cos\omega t+i\sin\omega t$. Такъв преход е удобен: нали е по-леко да имаш работа с експонента, отколкото с косинус. И така трикът се състои в това, че всички отнасящи се до осцилатора функции се разглеждат като реални части на някакви компексни функции. Намереното от нас комплексно число F, разбира се, не е истинска сила, тъй като физиката не познава комплексни сили: всички сили имат само реална част, а имагинерната част просто няма откъде да се вземе. Въпреки това ние ще казваме „силата" ($F_0exp i\omega t$), макар че трябва да се помни, че става дума само за *реалната ѝ част.*

Да разгледаме още един пример. Как да се представи сила, която е косинусоидална вълна, фазата на която е отместена с Δ? Разбира се, като реална част на $F_0\ exp(i\omega t-\Delta)$; експонентата в този случай може да се запише във вида $e^{i(\omega t-\Delta)}=e^{i\omega t}e^{-i\Delta}$. Алгебрата на експонентите е значително по-лека от алгебрата на синусите и косинусите; ето защо е удобно да се използуват комплексните числа. Често ние ще пишем така:

$$F=F_0e^{-i\Delta}e^{i\omega t}=\hat{F}e^{i\omega t}. \qquad (23.1)$$

Шапчицата над буквата ще показва, че имаме работа с комплексно число, т. е.

$$\hat{F}=F_0e^{-i\Delta}.$$

Обаче време е да се започне с решаване на уравнения, като се използуват комплексните числа, тогава ние ще видим как можем да решим чрез тях задача при някакъв реален случай. Като пример ще се опитаме да решим уравнението

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{kx}{m}=\frac{F}{m}=\frac{F_0}{m}\cos\omega t, \qquad (23.2)$$

където F е действащата на осцилатора сила, а x е неговото преместване. Макар че това е абсурдно, ще предположим, че x и F са комплексни числа. Тогава x се състои от реална част и умножена по i имагинерна част; същото се отнася и за F. Уравнението (23.2) в този случай означава

$$\frac{d^2(x_r+ix_i)}{dt^2}+\frac{k(x_r+ix_i)}{m}=\frac{F_r+iF_i}{m},$$

или

$$\frac{d^2x_r}{dt^2}+\frac{kx_r}{m}+i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}+\frac{kx_i}{m}\right)=\frac{F_r}{m}+\frac{iF_i}{m}.$$

Комплексните числа са равни, когато са равни техните реални и имагинерни части; следователно *реалната част на x удовлетворява уравнение, в дясната страна на което стои реалната част на силата.* Трябва да подчертаем от самото начало, че такова разделение на реалните и имагинерни части не винаги е възможно, а само в случая на *линейни* уравнения, т. е. уравнения, съдържащи x само в нулева и първа степен. Например ако уравнението съдържаше член λx^2, то, като се направи субституцията x_r+ix_i, ще получим $\lambda(x_r+ix_i)^2$, и отделянето на реалната и имагинерната част би ни довело до $\lambda(x_r^2-x_i^2)$ и $2i\lambda x_r x_i$. И така ние виждаме, че реалната част на уравнението съдържа в този случай члена $-\lambda x_i^2$. Получихме съвсем не това уравнение, което смятахме да решаваме.

Да се опитаме да приложим нашия метод към вече решената задача за принудените трептения на осцилатора, т. е. за осцилатор, на който действува външна сила. Както и по-рано, ние искаме да решим уравнението (23.2), но нека почнем с уравнението

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{kx}{m}=\hat{F}e^{i\omega t}, \tag{23.3}$$

където $\hat{F}e^{i\omega t}$ е комплексно число. Разбира се, x също е комплексно число, но ще запомним правилото: за да се намерят интересуващите ни величини, трябва да се вземе реалната част на x. Ще намерим решението на (23.3), описващо принудените трептения. За другите решения ще поговорим после. Това решение има същата честота, както и външната (приложена) сила. Трептението освен това се характеризира с амплитуда и фаза; поради това, ако се представи преместването с числото x, то модулът ще ни покаже размаха на трептенията, а фазата на комплексното число — за задръжката на трептението във времето по същия начин, както за силата. Да се възползуваме сега от забележителното свойство на експонентата: $(d/dt)[\hat{x}\,exp\,(i\omega t)]=i\omega\hat{x}\,exp\,(i\omega t)$. Когато диференцираме експоненциалната функция, ние свеждаме експонентата до един прост множител. Диференцирайки още един път, ние отново приписваме същия такъв множител, затова е много просто да се напише уравнение за $\dot{x}$: всяко диференциране по времето трябва да се замени с умножение по $i\omega$. (Диференцирането става сега толкова просто, колкото и умножението! Идеята да се използват експоненциалните функции в линейните диференциални уравнения е почти толкова грандиозна, колкото изобретяването на логаритмите, които замениха умножението със събирането. Тук диференцирането се заменя с умножение.) По такъв начин ние получаваме уравнението

$$(i\omega)^2\hat{x}+\frac{k\hat{x}}{m}=\frac{\hat{F}}{m}. \tag{23.4}$$

(Ние пропуснахме общия множител $e^{i\omega t}$). Погледнете колко просто е всичко! Диференциалното уравнение незабавно се свежда до чисто алгебрично; веднага може да се напише неговото решение

$$\hat{x}=\frac{\hat{F}/m}{(k/m)-\omega^2}.$$

тъй като $(i\omega)^2=-\omega^2$. Решението може малко да се опрости, като се положи $k/m=\omega_0^2$, тогава

$$\hat{x}=\frac{\hat{F}}{m(\omega_0^2-\omega^2)}. \tag{23.5}$$

Това, разбира се, е същото онова решение, което беше получено от нас по-рано. Тъй като $m(\omega_0^2-\omega^2)$ е реално число, то фазовите ъгли на $\hat{F}$ и $\hat{x}$ съвпадат (или се отличават със 180°, ако $\omega^2>\omega_0^2$). За това също стана дума. Модулът на $\hat{x}$, който определя размаха на трептенията, е свързан с модула на $\hat{F}$ с множителя $1/m(\omega_0^2-\omega^2)$; този множител става много голям, ако ω е приблизително равно на ω_0. По такъв начин може да се достигне много силен отклик, ако се приложи на осцилографа нужната честота ω (ако с необходимата честота тласкаме окачено на връвчица махало, то се повдига много високо).

2. Принудени трептения със затихване

И така ние можем да решим задачата за трептеливото движение, ползувайки се от много изящна математическа техника. Обаче изяществото не струва много, когато задачата и така се решава просто; математиката трябва да се използува тогава, когато се решават по-сложни задачи. Да преминем поради това към една такава задача, която освен това е по-близка до действителността, отколкото предишната. От уравнението (23.5) следва, че, ако ω е точно равна на ω_0, амплитудата на трептението става безкрайна. Това, разбира се, не може да бъде, защото много неща, например триенето, ограничават амплитудата, а тях ние не отчитахме. Да допълним сега (23.2) така, че да отчетем трието.

Да се направи това обикновено е доста трудно, защото силите на триенето са много сложни. Обаче в много случаи може да се счита, че силата на триенето е пропорционална на скоростта на движението на обекта, именно такова триене възпрепятствува бавното движение на тялото в масло или в друга вискозна течност. Когато предметът стои намясто, върху него не действуват никакви сили, но колкото по-бързо се движи той и колкото по-бързо маслото трябва да обтича този предмет, толкова по-голямо е съпротивлението. По такъв начин ние ще предположим, че в (23.2) освен вече написаните членове съществува още един — силата на съпротивлението, пропорционална на скоростта: $E_f=-c(dx/dt)$. Удобно е да се запише c като произведение от m и друга постоянна γ; това ще опрости малко уравнението. Ние вече правихме такъв фокус, когато заменихме k с $m\omega_0^2$, за да се опростят изчисленията. И така нашето уравнение има вида

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F \tag{23.2}$$

или, ако се положи $c=m\gamma$ и $k=m\omega_0^2$ и се разделят двете части на m,

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F}{m}. \tag{23.6a}$$

Това е най-удобната форма на уравнението. Ако γ е много малко, малко е и триенето и обратно, големите стойности на γ съответствуват на грамадно триене. Как да се реши това ново линейно уравнение? Да предположим, че външната сила е равна на $F_0\cos(\omega t+\Delta)$; възможно е да се замести този израз в (23.6а) и да се опитаме да решим полученото уравнение, но ние ще приложим нашия нов метод. Ще представим F като реална част на $\hat{F}\,exp(i\omega t)$, а x като реална част на $\hat{x}\,exp(i\omega t)$ и ще заместим тези комплексни числа в (23.6а). Всъщност няма какво и

да се замества; като се вгледате внимателно в (23.6а), вие веднага ще кажете, че то ще се превърне в

$$e^{i\omega t}\ [(i\omega)^2\hat{x}+\gamma(i\omega)\hat{x}+\omega_0^2\hat{x}]=\frac{\hat{F}}{m}e^{i\omega t} \tag{23.7}$$

(Ако ние се бяхме опитали да решим (23.6а) по стария праволинеен начин, бихме оценили достойнствата на магическия „комплексен" метод.) Като се разделят двете части на уравнението с $exp(i\omega t)$, ще намерим отклика на осцилатора $\hat{x}$ на силата $\hat{F}$:

$$\hat{x}=\frac{\hat{F}}{m(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)}. \tag{23.8}$$

И така, откликът $\hat{x}$ е равен на силата $\hat{F}$, умножена по някакъв множител. Този множител няма нито наименование, нито някаква собствена буква и ние ще го означаваме с буквата R:

$$R=\frac{1}{m(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)};$$

тогава

$$\hat{x}=\hat{F}R. \tag{23.9}$$

Този множител може да се запише или като $p+iq$, или като $\rho\,exp(i\theta)$. Ще го запишем във вида $\rho\,exp(i\theta)$ и ше видим до какво ще доведе това. Външната сила представлява реалната част на числото $F_0\,exp(i\Delta)\,exp(i\omega t)$, тя е равна на $F_0\cos(\omega t+\Delta)$. Уравнението (23.9) ни показва, че откликът $\hat{x}$ е равен на $\hat{F}R$. Ние се условихме да пишем R във вида $R=\rho\,exp(i\theta)$, следователно

$$\hat{x}=R\hat{F}=\rho\,e^{i\theta}F_0e^{i\Delta}=\rho\,F_0e^{i(\theta+\Delta)}.$$

Да си спомним (за това вече говорихме), че физическото значение на x, което се дава от реалната част на комплексното число x, е равно на реалната част на $\rho F_0 exp[i(\theta+\Delta)]\,exp(i\omega t)$. Но ρ и F_0 са реални, а реалната част на $exp[i(\theta+\Delta+\omega t)]$ е просто $\cos(\omega t+\Delta+\theta)$. По такъв начин

$$x=\rho F_0\cos(\omega t+\Delta+\theta). \tag{23.10}$$

Това означава, че амплитудата на отклика е равна на амплитудата на силата F, умножена с коефициента на усилването ρ; ние намерихме „размаха" на трептенията. Но това още не е всичко: вижда се, че x трепти не в такт със силата; фазата на силата е равна на Δ, а при x тя е отместена с допълнителна величина θ. Следователно ρ и θ представляват големината и фазовото отместване на отклика.

Да намерим сега стойността на ρ. Квадратът на модула на всяко комплексно число е равен на произведението на това число с комплексно спрегнатото, т. е.

$$\rho^2=\frac{1}{m^2(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)(\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega)}=$$

$$=\frac{1}{m^2\left[(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2\right]}. \tag{23.11}$$

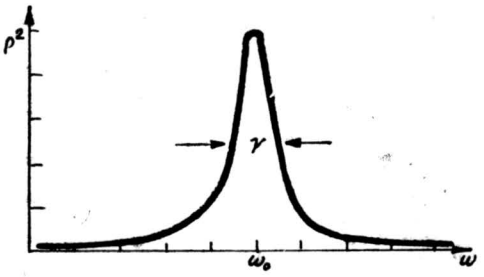
Може да се намери и фазовият ъгъл θ:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\rho e^{i\theta}}=\frac{1}{\rho}e^{-i\theta}=m(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega);$$

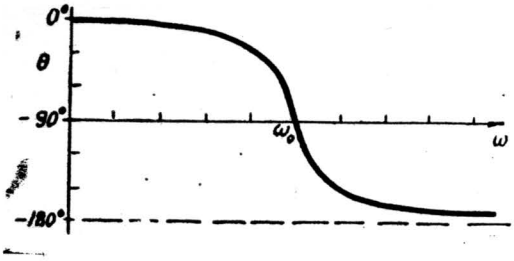
значи

$$tg\,\theta=-\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)}. \tag{23.12}$$

Знакът минус възниква от това, че $tg(-\theta)=-tg\theta$. Ъгълът θ е отрицателен при всички стойности на ω, т. е. отместването x изостава по фаза от силата F.



Фиг. 23.2. Графика на зависимостта на ρ^2 от ω



Фиг. 23.3. Графика на зависимостта на θ от ω

На фиг. 23.2 е показано как се променя ρ^2 при промяна на честотата. (ρ^2 за физика е по-интересно, отколкото ρ, защото ρ^2 е пропорционално на квадрата на амплитудата, а следователно и на онази *енергия*, която придава външната сила на осцилатора). Очевидно е, че ако γ е малко, то основният член в (23.11) е $1/(\omega_0^2-\omega^2)^2$ и откликът се стреми към безкрайност, ако ω клони към ω_0. Но тази „безкрайност" не е истинска безкрайност, защото даже ако $\omega=\omega_0$, все още остава събираемото $1/\gamma^2\omega^2$. Зависимостта на фазовото отместване от честотата е изобразена на фиг. 23.3.

Понякога се налага да имаме работа с формула, малко различаваща се от (23.8); тя също се нарича „резонансна" и независимо от известни различия от (23.8) описва същите явления. Работата е в това, че ако стойността на γ е много малка, най-интересната област на резонансната крива лежи около честотата $\omega=\omega_0$, а тук при малки γ формулата (23.8) с голяма степен на точност може да се замени с приблизителна формула. Тъй като $\omega_0^2-\omega^2=(\omega_0-\omega)(\omega_0+\omega)$, за ω, много близки до ω_0, разликата в квадратите е почти равна на $2\omega_0(\omega_0-\omega)$, а $\gamma\omega$ може да се замени с $\gamma\omega_0$. Значи $\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega\approx 2\omega_0(\omega_0-\omega+i\gamma/2)$ и

$$\hat{x}\approx\frac{\hat{F}}{2m\omega_0(\omega_0-\omega+i\gamma/2)}, \quad \text{ако } \gamma\ll\omega_0 \text{ и } \omega\approx\omega_0. \tag{23.13}$$

Лесно се намира и ρ^2:

$$\rho^2\approx\frac{1}{4m^2\omega_0^2\left[(\omega_0-\omega)^2+\gamma^2/4\right]}.$$

А сега сами решете такава задача: с увеличаване на честотата стойността на ρ^2 отначало расте, достига при ω_0 максимум, а после отново намалява. На какво разстояние от ω_0 са разположени честотите, на които съответствуват стойности на ρ^2, два пъти по-малки от максималната? Покажете, че при много малко γ тези точки отстоят една от друга на разстояние $\Delta\omega=\gamma$. Това значи, че резонансът става по-остър, според това как влиянието на триенето става по-слабо и по-слабо.

Като друга мярка за ширината на резонанса може да служи „доброкачествеността" $Q=\omega_0/\gamma$ (колкото е по-тесен резонансът, толкова по-голямо е Q), ако $Q=1000$, по скалата на честотите ширината на резонансната крива е равна само на 0,001. На резонансната крива от фиг. 23.2 съответствува $Q=5$.

Явлението резонанс е важно, защото се проявява много често; на описанието на някои видове от тези прояви ние ще посветим останалата част на тази глава.

3. Електрически резонанс

Най-простите и най-широки технически приложения резонансът намери в електричеството. Има достатъчно много устройства, от които се съставят електрически вериги. Често ги наричат *пасивни елементи на веригата* и те са три типа, макар че във всеки елемент от единия тип винаги се съдържа мъничко от елементите от другия тип. Преди да опишем подробно тези елементи ще забележим, че нашата представа за механическия осцилатор като за маса, окачена към края на пружината, е само едно приближение. В „масата" е съсредоточена съвсем не цялата маса на системата: пружината също притежава някаква маса, пружината също е инерционна. Точно по същия начин „пружината" не се състои единствено от пружина, а масата също е малко еластична, а не абсолютно твърда, както това може да изглежда. Подскачайки нагоре и надолу, тя леко се огъва под тласъците на пружината. Същото нещо е вярно и за електричеството. Да се разположат всички предмети по „елементите на веригата" с чисти идеални характеристики може само приблизително. Тъй като ние нямаме време да обсъждаме границите на тези приближения, ние просто ще предположим, че те са допустими.

И така за трите елемента на веригата. Първият се нарича *капацитет* (фиг. 23.4); като пример за капацитет могат да служат две метални пластинки, разделени с тънък слой диелектрик. Ако пластинките се заредят, между тях възниква потенциална разлика. Същата потенциална разлика ще съществува между точките A и B, защото при всякаква допълнителна потенциална разлика по съединителните проводници зарядите ще потекат по проводниците. По такъв начин на дадената потенциална разлика V между пластинките съответствуват определени заряди $+q$ и $-q$ върху всяка пластинка. Между пластинките съществува някакво електрично поле; ние даже изведохме съответната формула за него (вж. гл. 13 и 14):



Фиг. 23.4. Три пасивни елемента на веригата

$$V=\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}=\frac{qd}{\varepsilon_0 A}, \tag{23.14}$$

където d е разстоянието между плочите, а A — площта на плочите. Да отбележим, че потенциалната разлика зависи от заряда линейно. Ако се построи капацитет не от успоредни пластинки, а се придаде на отделните електроди каквато и да е друга форма, потенциалната разлика ще бъде както и преди пропорционална на заряда, но коефициентът на пропорционалност не може да се пресметне толкова лесно. Обаче трябва да се знае само едно: потенциалната разлика между краищата на капацитета е *пропорционална на товара* $V=q/C$; коефициентът на пропорционалност е равен на $1/C$ (C е *капацитетът* на обекта).

Вторият елемент на веригата се нарича *съпротивление*; този елемент оказва съпротивление на протичащия през него електричен ток. Оказва се, че всички метални проводници, а също много други материали се съпротивляват на тока по един начин; ако към краищата на парче от такъв материал се приложи потенциална разлика, електрическият ток в парчето $I=dq/dt$ ще бъде пропорционален на приложената потенциална разлика

$$V=RI=R\frac{dq}{dt}. \tag{23.15}$$

Коефициентът на пропорционалност се нарича *съпротивление* R. Връзката между тока и потенциалната разлика вероятно вече ви е известна. Това е законът на Ом.

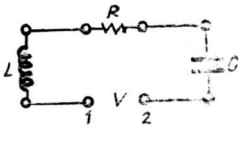
Ако си представим, че товарът, съсредоточен в капацитета, е нещо аналогично на преместването на механичната система x, то електричният ток dq/dt е аналогичен на скоростта, съпротивлението R е аналогично на коефициента на съпротивлението γ, а $1/C$ е аналогично на еластичната константа на пружината k. Най-интересното във всичко това е, че съществува елемент на веригата, аналогичен на *масата*! Това е спирала, пораждаща вътре в себе си магнитно поле, когато по нея протича ток. *Изменението* на магнитното поле поражда в краищата на спиралата потенциална разлика, пропорционална на dI/dt. Това свойство на спиралата се използва в трансформаторите. Магнитното поле е пропорционално на тока, а индуцираната потенциална разлика (така се нарича тя) е пропорционална на скоростта на изменение на тока:

$$V=L\frac{dI}{dt}=L\frac{d^2q}{dt^2}. \tag{23.16}$$

Коефициентът L е коефициент на *самоиндукция*; той представлява електрически аналог на масата.

Да предположим, че съставяме верига от три последователно свързани елемента (фиг. 23.5); приложената между точките 1 и 2 потенциална разлика ще застави зарядите да се движат по веригата, тогава на краищата на всеки елемент от веригата също ще възникне потенциална разлика: на индуктивността $V_L=L(d^2q/dt^2)$, на съпротивлението $V_R=R(dq/dt)$, а на капацитета $V_C=q/C$. Сумата от тези напрежения е равно на приложеното напрежение V:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=V(t). \tag{23.17}$$



Фиг. 23.5. Електричен трептящ кръг състоящ се от съпротивление индуктивност и капацитет.

Ние виждаме, че това уравнение точно съвпада с механическото уравнение (23.6); ще го решаваме точно по същия начин. Да предположим, че $V(t)$ осцилира; за тази цел трябва да се съедини веригата с генератор на чисти синусни трептения. Тогава $V(t)$ може да се представи като комплексно число $\hat{V}$, помнейки, че за определяне на истинското напрежение $V(t)$ това число трябва още да се умножи по $exp(i\omega t)$ и да се вземе реалната част. Аналогично може да се подходи и към товара q, поради това ще напишем уравнение, изцяло повтарящо (23.8): втората производна на $\hat{q}$ е $(i\omega)^2\hat{q}$, а първата — $(i\omega)\,q$. Уравнението (23.17) преминава в

$$\left[L(i\omega)^2+R(i\omega)+\frac{1}{C}\right]\hat{q}=\hat{V}, \text{ или } \hat{q}=\frac{V}{L(i\omega)^2+R(i\omega)+\frac{1}{C}};$$

последното равенство ще запишем във вида:

$$\hat{q}=\frac{\hat{V}}{L\left(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega\right)}, \tag{23.18}$$

където $\omega_0^2=1/LC$, а $\gamma=R/L$. Ние получихме същия знаменател, както и в механичната задача, с всичките му резонансни свойства! В табл. 23. 1 е приведен списък на аналогиите между електричните и механични величини.

Таблица 23.1

Механични и електрични величини

Общи характеристики	Величини	
	механични	електрични
Независима променлива	Време (t)	Време (t)
Зависима променлива	Положение (x)	Товар (q)
Инерция	Маса (m)	Индуктивност (L)
Съпротивление	Коефициент на триенето ($c=\gamma m$)	Съпротивление ($R=\gamma L$)
Твърдост	Твърдост (k)	(Капацитет)$^{-1}$ (1/C)
Резонансна честота	$\omega_0^2=k/m$	$\omega_0^2=1/LC$
Период	$t_0=2\pi\sqrt{m/k}$	$t_0=2\pi\sqrt{LC}$
Доброкачественост	$Q=\omega_0/\gamma$	$Q=\omega_0 L/R$

Още една чисто техническа забележка. В книгите по електричество използват други означения. (Много често в книги на една и съща тема, написани от хора с различни специалности, се използват различни означения. (Най-напред за означаване на $\sqrt{-1}$ използват буквата j, а не i (с i трябва да се означава токът). Понататък, инженерите предпочитат връзката между $\hat{V}$ и $\hat{I}$, а не между $\hat{V}$ и $\hat{q}$, защото са свикнали повече така. Тъй като $\hat{I}=d\hat{q}/dt=i\omega\hat{q}$, вместо $\hat{q}$ може да се постави $\hat{I}/i\omega$ и тогава

$$\hat{V}=\left(i\omega L+R+\frac{1}{i\omega C}\right)\hat{I}=\hat{Z}\hat{I}. \tag{23.19}$$

Може малко да се промени изходното диференциално уравнение (23.17), за да изглежда то по-привично. В книгите често се среща такава връзка:

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}\int_0^t Idt=V(t). \tag{23.20}$$

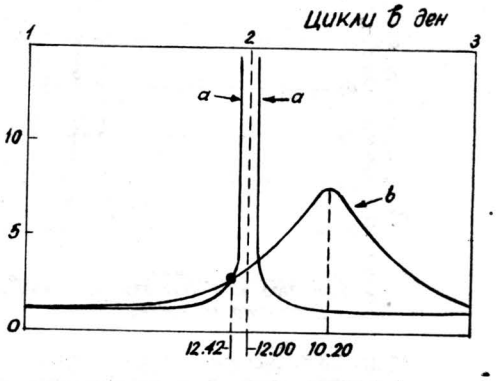
Във всеки случай ние намираме, че връзката (23.19) между напрежението $\hat{V}$ и токът $\hat{I}$ е същата, каквато (23.18) и се отличава само с това, че последното се разделя на $i\omega$. Комплексното

число $R+i\omega L+1/i\omega C$ инженерите-електрици често наричат с особено име: комплексен импеданс $\hat{Z}$. Въвеждането на новата буква позволява просто да се запише връзката между тока и съпротивлението във вида $\hat{V}=\hat{Z}\hat{I}$. Такова пристрастие на инженерите се обяснява с това, че на младини те са изучавали само вериги за постоянен ток и са знаели само съпротивленията и закона на Ом: $V=RI$. Сега те са по-образовани и имат вече вериги с променлив ток, но искат уравненията да бъдат същите. И ето те пишат $\hat{V}=\hat{Z}\hat{I}$ и единствената разлика е в това, че сега съпротивлението е заменено с по-сложно нещо: с комплексно число. Те настояват върху това, че не могат да използват приетото в цял свят означение на имагинерната единица и пишат j; наистина удивително е, че те не изискват, вместо буквата Z да се пише буквата R! (Много вълнения им доставят разговорите за плътността на тока; нея те също означават с буквата j. Трудностите на науката в значителна степен са свързани с трудностите в означенията, единиците и други измислици, изобретени от човека, а не от природата.)

4. Резонансът в природата

Макар че ние детайлно разгледахме въпроса за резонанса в електрическите вериги, може да се привежда пример след пример от коя да е наука и да се търсят в тях резонансни примери. В природата много често нещо „трепти“ и също толкова често настъпва резонанс. Затова вече говорихме в една от предните глави; сега ще приведем някои примери. Идете в библиотеката, вземете от лавицата няколко книги, прелистете ги; вие ще откриете криви, подобни на кривите от фиг. 23.2, и уравнения, подобни на уравненията, написани в тази глава. Много ли такива книги ще се намерят? За убедителност ще вземем всичко 5—6 книги и те ще ви обезпечат пълен набор от примери за резонанс.

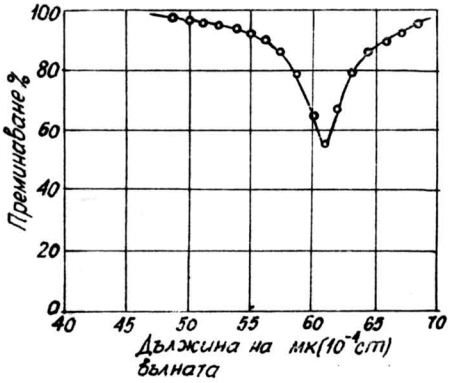
Първите два се отнасят до механиката. Най-първият е грандиозен — става дума за колебанията на атмосферата. Ако атмосферата, която по нашите представи е сферична и обгръща нашата земя равномерно от всички страни, под влияние на Луната се издърпа на една страна, то тя би приела форма на разтеглена диня. Ако предоставим атмосферата с форма на диня сама на себе си, ще възникнат колебания. Така се получава осцилатор. Тези колебания се управляват от Луната, която се върти около Земята. За да се разбере как става това, да си представим, че Луната стои неподвижно на някакво разстояние от Земята, а Земята се върти около своята ос. Поради това проекцията на силата, да кажем върху оста x, има периодична компонента. Откликът на атмосферата на приливно-отливните тласъци на Луната ще бъде обикновеният отклик на осцилатора на периодична сила. Кривата b на фиг. 23.6 представя очаквания отклик на атмосферата (кривата a е изобразена на заимстваната от нас рисунка от книгата на Мунк и Мак-Доналд по друг повод и не се отнася до нас). Може да изглежда странно, че са успели да начертаят тази крива: нали Земята се върти с постоянна скорост и затова може да се получи само една точка върху кривата — точката, приблизително съответстваща на период 12—12,7 часа (приливи има два пъти в денонощието) плюс още малко, защото трябва да се отчете движението на Луната. Но, измервайки големината на атмосферните приливи и времето на тяхното изоставане — фазата, може да се намерят двете характеристики на отклика ρ и θ. По тях може да се изчисли ω_0 и γ, а след това да се начертае вече цялата крива! Ето пример на чиста наука. От две числа получават две числа, по тези две числа начертават много красива крива, която, разбира се, преминава през същата точка, по която е построена кривата! Тази крива, разбира се, е безполезна, *докато не може да се измери още нещо,* а в геофизиката това твърде често е много трудно. В нашия случай колебанията на



Фиг. 23.6. Отклик на атмосферата за външно възбуждане

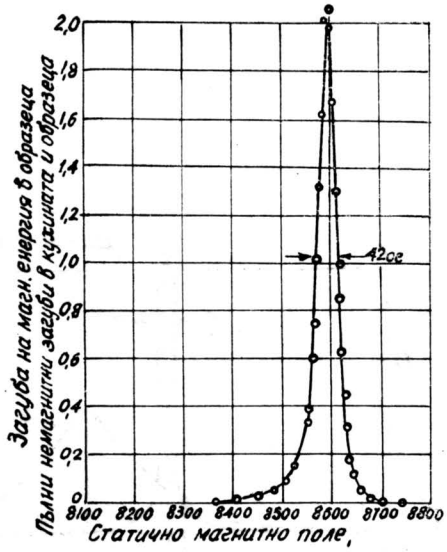
атмосферата със собствена честота ω_0 могат да бъдат онова, което трябва още да се измери; необходимо е някакво смущение, което би заставило атмосферата да трепти с честота ω_0. Такъв случай се представил един път. През 1883 год. станало изригване на вулкана Кракатау, в резултат на което в атмосферата излетял половин остров. Взривът бил толкова страшен, че успели да измерят периода на трептенията на атмосферата. Той се оказал равен на 10 1/2 часа. Собствената честота ω_0, получена от кривата на фиг. 23.6, била равна на 10 часа и 20 минути; по такъв начин било получено в крайна сметка макар едно потвърждение на правилността на нашите представи за атмосферните приливи.

Във втория пример става дума за съвсем малки трептения. Ние ще разгледаме кристал от натриев хлорид, който се състои от разположени един до друг йони на натрия и хлора (ние говорихме за това по-рано). Тези йони носят електричен заряд: първия — положителен, втория — отрицателен. Да видим какви интересни трептения могат да възникнат в кристала. Ако отместим всички положителни товари надясно, а отрицателните — наляво, и ги оставим сами на себе си, те ще започнат да трептят назад и напред: решетката от натриеви йони срещу решетката от хлорни йони. Но как може да се размърдат тези товари? Много просто: ако се внесе кристала в електрично поле, то ще отмести положителните товари на една страна, а отрицателните — на друга! Това значи, че като имаме външно електрично поле, можем, изглежда, да предизвикаме трептения на кристала. Но за тази цел честотата на електричното поле трябва да бъде толкова голяма, че тя да съответствува на *инфрачервеното излъчване!* По такъв начин ще се опитаме да построим резонансна крива, като измерваме поглъщането на инфрачервена светлина от натриев хлорид. Такава крива е представена на фиг. 23.7. По абсцисата е нанесена не честотата, а дължината на вълната, но това е техническа подробност; между честотата и дължината на вълната съществува строго определено съотношение, така че ние все пак имаме работа със скала от честоти и една от тези честоти е резонансната честота.



Фиг. 23.7. Преминаване на инфрачервеното излъчване през тънка (0,017 μ) пластинка от готварска сол.

А какво може да се каже за ширината на резонансната крива? От какво се определя тази ширина? Много често кривата изглежда много по-широка, отколкото се предписва по теоретичната стойност на γ (тази ширина се нарича естествена ширина). Има две причини за разширяване на резонансната крива. Ние наблюдаваме трептения на много осцилатори изведнаж, а техните честоти могат малко да се различават. До това довеждат например напреженията в различните части на кристала. Поради това ние виждаме изведнаж много резонансни криви, преминаващи една до друга. Те се сливат в една крива с по-голяма ширина. Втората причина е много проста — не винаги може точно да се измери честотата. Колкото и малко да отворим прореза на спектрометъра, той винаги ще зарегистрира не една честота, а цял спектър от честоти $\Delta\omega$. Затова може да се окаже, че разделителната способност на спектрометъра е недостатъчна за определяне точната форма на кривата. Тъй или иначе, но като се гледа на фиг. 23.7, е трудно да кажеш каква е там ширината — естествената или онази, която съответствува на нехомогенности в кристала или на разделителната способност на спектрометъра



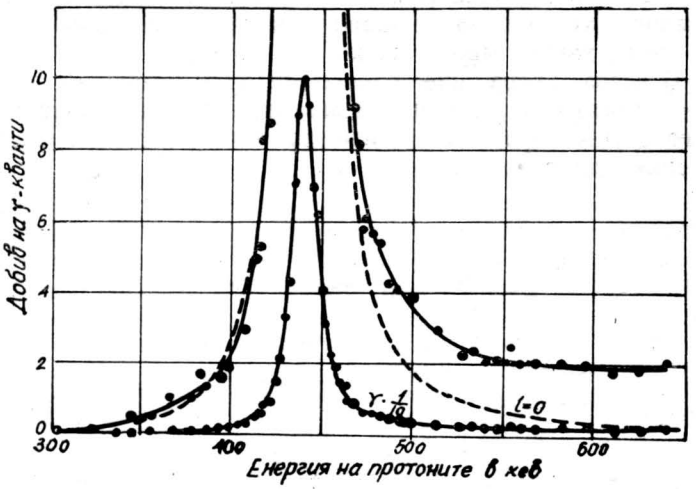
Фиг. 23.8. Зависимост на загубите на магнитна енергия в парамагнитно органично съединение от интензитета на приложеното поле.

Още един пример — този път по-хитър. Да видим как се люлее магнит. Ако поставим магнит в постоянно магнитно поле, то северният полюс ще пожелае да се обърне на една страна, а южният — на друга, и ако магнитът може да се върти около ос, той ще трепти около равновесното положение, както прави това стрелката на компаса. Обаче магнитите, за които ще стане дума, това са *атомите*. Те притежават момент на количество на движение и въртенето поражда не просто движение по посока на полето, а *прецесия*. Да погледаме отстрани някаква компонента на „люлеенията", а след това да смутим трептенията или да опитаме да ги управляваме, за да измерим след това поглъщането.

На фиг. 23.8 е представена кривата на поглъщането — ти-

пична резонансна крива. Само че тя е получена с малко по-различна техника, отколкото предидущата. Честотата на хоризонталното поле, управляващо трептенията, през цялото време остава постоянна, макар че, както изглежда, експериментаторът, за да получи кривата, трябва да променя честотата. Може да се постъпи и така, но технически по-леко е да оставим ω неизменна, а да променяме интензитета на магнитното поле, което съответствува на изменение на ω_0 в нашата формула. По такъв начин ние имаме работа с резонансна крива за ω_0. Въпреки това ние получаваме резонанс с определени ω_0 и γ.

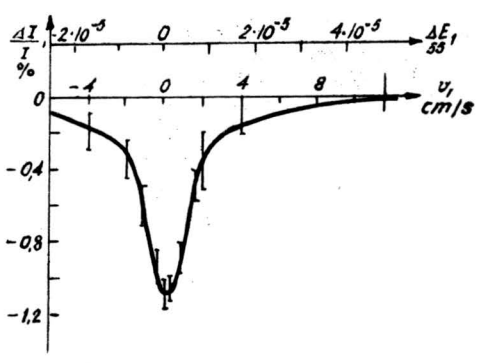
Да идем по-нататък. Следващият наш пример е свързан с атомното ядро. Движението на протоните и неутроните в ядрото в известен смисъл е трептеливо движение. Можем да се убедим в това с помощта на такъв експеримент: нека обстрелваме ядрата на литий с протони. Ние ще открием, че в ядрата при това ще стават някакви реакции, в резултат на които възниква γ-излъчване. Кривата, изобразяваща количеството на излъченото лъчение, има много остър, типично резонансен максимум. Това е представено



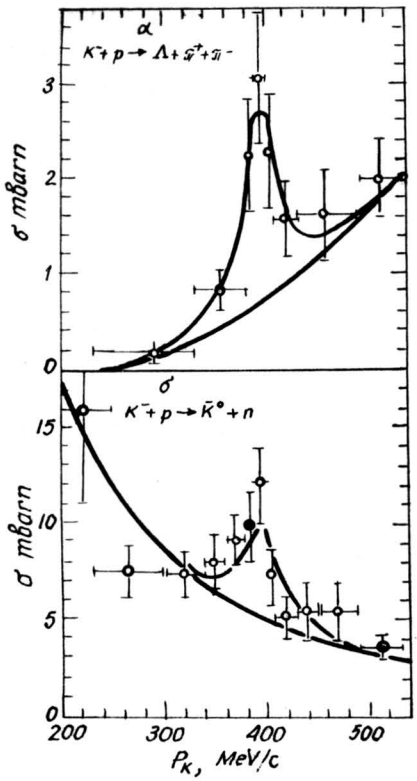
Фиг. 23.9. Зависимост на интензитета на γ-излъчването на лития от енергията на бомбардиращите протони.
Пунктираната крива е теоретичната крива, пресметната за протони с момент на количество движение $l=0$.

на фиг. 23.9. Обаче вгледайте се в рисунката по-внимателно: върху хоризонталната скала е нанесена не честота, както обикновено, а *енергия!* Работата е в това, че величината, която в класическата физика сме привикнали да считаме, че е енергия, в квантовата механика се оказва по определен начин свързана с честотата на някаква вълна. Ако в нашата обикновена крупномащабна физика при анализа на някакво явление се налага да работим с честота, то в квантовомеханичните явления, свързани с атомното вещество, аналогичните криви ще зависят от енергията. Кривата на фиг. 23.9 илюстрира тази връзка. Размишлявайки над тази крива, можем да дойдем до мисълта, че честотата и енергията имат дълбока взаимна връзка; така е и всъщност.

Ето още една резонансна крива, получена в резултат на опити с атомни ядра; тя е много тясна, по-тясна от всички предишни. На фиг. 23.10 величината ω_0 съответствува на енергия 10 000 eV, а ширината γ е равна приблизително на 10^{-5} eV; иначе казано, $Q = 10^{10}$! Като построил такава крива, експериментаторът измерил Q на най-качествения от сега известните осцилатори. Това направил Р. Мьосбауер, получил за своите работи Нобелова премия. По хоризонталната скàла е нанесена скоростта, защото за получаване на незначително различаващи се честоти е използуван ефектът на Доплер, който се получава в резултат на относителното движение на източник и поглъщател. Цифрите дават известна представа за тънкостта на експеримента — наложило се е да се измерват скорости от няколко сантиметра в секунда! Ако продължим хоризонталната скàла наляво, нулевата честота ще намерим на разстояние 10^{10} cm! Както изглежда, страниците за тази цел няма да ни стигнат!



Фиг. 23.10. Крива на поглъщането на γ-излъчването, получена от Р. Мьозбауер.



Фиг. 23.11. Зависимост на ефективните сечения на реакцията от стойността на момента на количеството на движение.

a — $K^- + p \to \Lambda + \pi^+ + \pi^-$

b — $K^- + p \to K^0 + n$

Долната крива описва нерезонансния фон; горната крива показва, че върху този фон е наложено резонансно сечение

Най-сетне да вземем кой да е брой на списанието „Physical Revieiv", да кажем от 1 януари 1962 год. Ще се намери ли в него резонансна крива? Резонансни криви непременно има във всеки брой на това списание и на фиг. 23.11 е изобразена една от тези криви. Това е много интересна крива. Тя съответствува на резонанс в реакции със странни частици (K^--мезони и протони). Резонансът бил открит при измерване количеството на частици от различни сортове, получаващи се в резултат на реакцията. На разните продукти от реакцията съответстват различни криви, но във всяка от тях при една и съща енергия има максимуми с приблизително еднакви очертания. Това значи, че при определена енергия на K^--мезона съществува резонанс. Както изглежда, това означава, че има някакво състояние, или условие, което отговаря на този резонанс, който се получава при стълкновение на K^--мезон и протон. Това е нова частица или резонанс. Сега ние още не можем да кажем какво представляват тези излитания в кривите — „частица" или просто резонанс. Много *тесен* резонанс съответствува на много точно *отмерено количество енергия;* това се случва тогава, когато имаме работа с частица. Когато резонансната крива се разширява, става много трудно да се каже с какво имаме работа — с частица, която живее много малко, или просто с резонанс в реакцията. В глава втора ние отнесохме тези резонанси към частиците, но когато се пишеше тази глава, за този резонанс още не беше известно, поради това нашата таблица от елементарни частици може да се допълни!

24

Преходни решения

1. Енергия на осцилатора
2. Затихващи трептения
3. Преходни трептения в електрическите вериги

1. Енергия на осцилатора

Макар че главата е наречена „Преходни решения", все още става дума предимно за осцилатор, на който действува външна сила. Още нищо не сме говорили за *енергията* на трептенията. Да се занимаем с нея.

На какво е равна кинетичната енергия на осцилатора? Тя е пропорционална на квадрата на скоростта. Тук ние засегнахме важен въпрос. Да предположим, че изучаваме свойствата на някаква величина A; това може да бъде скорост или нещо друго. Ние се обърнахме за помощ към комплексните числа: $A = \hat{A}\exp(i\omega t)$, но във физиката е правоверна и почитана само *реалната част* на комплексното число. Затова, ако за нещо ви потрябва да получите *квадрата* на A, не повдигайте на квадрат комплексното число, за да отделите после реалната му част.

Реалната част на квадрата на комплексното число не е равна на квадрата на реалната част, тя съдържа още и *имагинерната част* на първоначалното число. По такъв начин, ако ние поискаме да намерим енергията и да разгледаме нейните превръщания, ще ни се наложи за известно време да забравим за комплексните числа.

И така, действителна физическа величина A — това е реалната част на $A_0\exp[i(\omega t+\Delta)]$, т. е. $A = A_0\cos(\omega t+\Delta)$, а комплексното число $\hat{A}$ — това е $A_0\exp(i\Delta)$. Квадратът на тази физическа величина е равен на $A_0^2\cos^2(\omega t+\Delta)$. Той се мени от нула до максимум, както това се предписва от квадрата на косинуса. Максималната стойност на квадрата на косинуса е равна на 1, минималната стойност е 0, а средната му стойност е 1/2.

Често нас съвсем не ни интересува енергията във всеки даден момент от трептенията; в много случаи е достатъчно да се знае само средната стойност на A^2 (средната стойност на квадрата на A в интервал от време много по-голям от периода на трептенията). При тези условия може да се осредни квадратът на косинуса и да се докаже теоремата: ако A е комплексно число, средната стойност на A^2 е равна на $1/2A^2$. Тук A^2 е квадратът на модула на комплексното число $\hat{A}$. (Квадрата на модула на $\hat{A}$ записват различно: $|\hat{A}|^2$ или $\hat{A}\hat{A}^*$ — във вид на произведение на числото $\hat{A}$ с комплексно спрегнатото му.) Тази теорема ще ни послужи още много пъти.

И така става дума за енергия на осцилатор, на който действува външна сила. Движението на такъв осцилатор се описва с уравнението

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+m\gamma\frac{dx}{dt}+m\omega_0^2x=F(t). \tag{24.1}$$

Ние, разбира се, предполагаме, че $F(t)$ е пропорционална на $\cos\omega t$. Да изясним сега дали на тази сила ѝ се налага много да работи. Работата, извършена от силата за 1 s, т. е. мощността, е равна на произведението от силата и скоростта. [Ние знаем, че работата, извършена за време dt, е равна на Fdx, а мощността е равна на $F(dx/dt)$.] Това значи, че

$$P=F\frac{dx}{dt}=m\left[\frac{dx}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\omega_0^2\,x\,\frac{dx}{dt}\right]+\gamma m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \tag{24.2}$$

Както лесно се проверява с обикновено диференциране, първите два члена могат да се препишат във вида

$$(d/dt)\left[\frac{1}{2}\, m\,(dx/dt)^2+\frac{1}{2}\, m\omega_0^2 x^2\right].$$

Изразът в квадратните скоби е производна на сума от два члена по времето. Това е разбираемо; нали първият член от сумата е кинетичната енергия на движението, а вторият — потенциалната енергия на пружината. Ще наречем тази величина *запасена енергия,* т. е. енергия, натрупана при трептенията. Нека осредним мощността за много цикли, когато силата е включена вече отдавна и осцилаторът достатъчно се е натрептял. Ако пробегът продължава дълго, запасената енергия не се променя; производната по времето дава ефект средно равен на нула. С други думи, ако се осредни изразходваната за голям интервал мощност, *цялата енергия ще се погълне заради съпротивлението, описвано от члена* $\gamma m\,(dx/dt)^2$. Определена част от енергията осцилаторът, разбира се, ще остави в запас, но ако се осредни по много цикли, количеството ѝ няма да се мени с времето. По такъв начин средната мощност $<P>$ е равна на

$$<P>=<\gamma m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2>. \tag{24.3}$$

Като прилагаме метода на комплексните числа и нашата теорема за това, че $<A^2>=1/2\ A_0^2$, лесно намираме тази средна мощност. Тъй като $x=\hat{x}\exp(i\omega t)$, то $dx/dt=i\omega\hat{x}\exp(i\omega t)$. Следователно средната мощност е равна на

$$<P>=\frac{1}{2}\,\gamma m\omega^2 x_0^2. \tag{24.4}$$

Ако преминем към електрическите вериги, то dx/dt трябва да се замени с тока I (I е dq/dt, където q съответствува на x), а $m\gamma$ — на съпротивлението R. Това значи, че скоростта на загубата на енергия (мощността на силата) в електрическа верига е равна на произведението от съпротивлението и средния квадрат от силата на тока.

$$<P>=R<I^2>=R\,\frac{1}{2}\, I_0^2. \tag{24.5}$$

Енергията естествено преминава в топлина, отделена в съпротивлението; това са така наречените топлинни загуби или джаулова топлина.

Интересно е да се разгледа също много ли енергия може да *натрупа* осцилатора. Не смесвайте този въпрос с въпроса за средната мощност, тъй като макар отделяната от силата мощност отначало действително да се натрупва от осцилатора, после за него остава само това, което не е погълнато от триенето. Във всеки момент осцилаторът притежава напълно определена енергия, поради това може да се изчисли средната запасена енергия $<E>$. Ние вече изчислихме средната стойност на $(dx/dt)^2$, така че

$$<E>=\frac{1}{2}\, m<\left(\frac{dx}{dt}\right)^2>+\frac{1}{2}\, m\omega_0^2<x^2>$$

$$=\frac{1}{2}\, m\,(\omega^2+\omega_0^2)\,\frac{1}{2}\, x_0^2. \tag{24.6}$$

Ако осцилаторът е достатъчно доброкачествен и честотата ω е близка до ω_0, то $|\hat{x}|$ е голяма величина, запасената енергия е много голяма и може да се натрупа твърде много енергия за сметка на неголяма сила. Силата извършва голяма работа, заставяйки осцилатора да се разлюлява, но след това, като се установи равновесие, цялата сила отива за борба с триенето. Осцилаторът разполага с голяма енергия, ако триенето е много малко, и загубите на енергия са малки даже при много голяма амплитуда на

трептенията. Доброкачествеността на осцилатора може да се измерва със стойността на запасената енергия в сравнение с работата, извършена от силата за един период на трептенията.

Каква е тази величина — натрупана енергия с сравнение с работата на силата за един цикъл? Обозначават я с буквата Q. Величината Q представлява умноженото по 2π отношение на средната запасена енергия към работата на силата за един цикъл (може да се разглежда работата не за цикъл, а за радиан, тогава в определението на Q ще изчезне 2π);

$$Q=2\pi\frac{1/2m\left(\omega^2+\omega_0^2\right)<x^2>}{\gamma m\omega^2<x^2>\frac{2\pi}{\omega}}=\frac{\omega^2+\omega_0^2}{2\gamma\omega}. \tag{24.7}$$

Докато Q не е много голяма величина, тя е лоша характеристика на системата, ако пък Q е достатъчно голяма величина, може да се каже, че това е мярка за доброкачествеността на осцилатора. Мнозина са се опитвали да дадат най-простото и полезно определение за Q; разните определения не се отличават много едно от друго, но ако Q е твърде голяма, всички те се съгласуват едно с друго. По най-общото определение по формула (24.7) Q зависи от ω. Ако имаме работа с добър осцилатор близо до резонансната честота, то (24.7) може да се опрости, като се положи $\omega=\omega_0$, тогава $Q=\omega_0/\gamma$; такова определение на Q беше дадено в предидущата глава.

Какво представлява Q за електрична верига? За да намерим тази величина, трябва да заменим m с L, mj с R и $m\omega_0^2$ с $1/C$ (вж табл. 23.1). Тогава Q в точката на резонанса е равна на $L\omega/R$, където ω е резонансната честота. Във верига с голяма Q запасената от веригата енергия е голяма в сравнение с работата за един цикъл, произвеждана от поддържащата трептенията във веригата машина.

2. Затихващи трептения

Да се върнем към основната тема — преходните решения. *Преходни решения* се наричат решенията на диференциалното уравнение, които съответстват на ситуации, когато външна сила не действува, но системата все пак не се намира в покой. (Разбира се, най-добре е да се решава задачата, когато силата не действува, а системата е в покой, стои си — и нека си стои!) Съответстващите на преходните решения трептения може да се предизвикат така: заставяме силата да поработи, а после я изключваме. Какво ще се случи тогава с осцилатора? Отначало да помислим какво ще е приблизително поведението на система с много голяма Q. Ако силата е действувала дълго, запасената енергия е била постоянна и работата се е изразходвала само за това, за да я поддържа. Да предположим сега, че сме изключили силата, докато триенето, което по-рано е поглъщало енергията на доставчика, повече няма с какво да се храни — благодетелят го *няма*. И триенето започва да изяжда, така да се каже, запасената от осцилатора енергия. Нека доброкачествеността на системата е $Q/2\pi=1000$. Това означава, че работата, извършвана за един цикъл, е равна на $1/1000$ от запасената енергия. Изглежда, разумно е да се предположи, че при трептения, неподдържани от външна сила, през всеки цикъл ще се губи една хилядна част от енергията, която е имало в началото на цикъла. Ще считаме, че при големи Q изменението на енергията се описва с отгатнатото от нас приблизително уравнение (ние пак ще се върнем към това уравнение и ще го направим съвсем вярно!)

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{\omega E}{Q}. \tag{24.8}$$

Това уравнение е приблизително, защото е вярно само за големи Q. За всеки радиан системата губи $1/Q$ част от запасената енер-

гия E. Това значи, че за интервал от време dt енергията ще се намали $\omega\, dt/Q$ пъти (честотата се появява при превеждането на радианите в истински секунди). А каква е тази честота? Да предположим, че системата е устроена много твърдо, поради което даже при действие на сила тя трепти едва забележимо само със своята собствена честота. Поради това ще считаме, че ω е резонансната честота ω_0. По такъв начин от уравнението (24.8) следва, че запасената енергия се променя по следния начин:

$$E = E_0 e^{-\omega_0 t/Q} = E_0 e^{-\gamma t} \tag{24.9}$$

Сега ни е известна стойността на *енергията* във всеки момент. Каква ще бъде приблизителната формула, определяща амплитудата на трептенията като функция от времето? Може би същата? Не! Потенциалната енергия на пружината се изменя с *квадрата на преместването,* кинетичната енергия — с *квадрата на скоростта;* така че пълната енергия е пропорционална на квадрата на преместването. По такъв начин преместването (амплитудата на трептенията) ще се намалява с половинка скорост. С други думи, ние очакваме, че решението в случая на затихващо преходно движение ще изглежда като трептение с честота близка до резонансната честота ω_0; амплитудата на това трептение ще се намалява както $\exp(-\gamma t/2)$

$$x = A_0 e^{-\gamma t/2} \cos \omega_0 t. \tag{24.10}$$

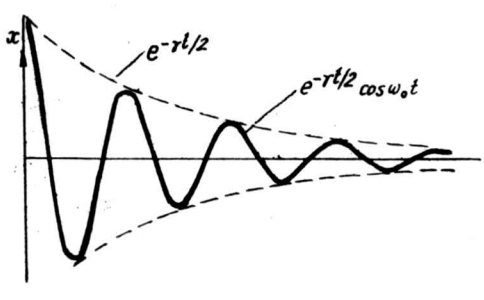
Тази формула и фигура 24.1 дават представа за това какво следва да се очаква, а сега да пристъпим към *точен* анализ на движението, т. е. към решаване на диференциалното уравнение на движението.

Как да се решава уравнение (24.1), ако се премахне от него външната сила? Като физици ние се интересуваме не толкова от *метода,* колкото от самото *решение.* Но тъй като ние сме хора вече опитни, ще се опитаме да представим решението във вид на експоненциална крива, $x = A \exp(i\alpha t)$. (Защо постъпихме така? Затова, защото експонентата най-леко се диференцира!) Като заместим този израз в (24.1), помнейки, че всяко диференциране на x по времето се свежда до умножение по $i\alpha$ [ще напомним, че $F(t) = 0$]. Да се направи това, е много леко и тогава нашето уравнение приема вида

$$(-\alpha^2 + i\gamma\alpha + \omega_0^2) A e^{i\alpha t} = 0. \tag{24.11}$$

Лявата част на равенството трябва да бъде равна на нула през цялото време, но това е възможно само в два случая: *а)* $A = 0$, обаче това даже не е и решение: нали тогава всичко е в покой, или *б)*

$$-\alpha^2 + i\alpha\gamma + \omega_0^2 = 0. \tag{24.12}$$



Фиг. 24.1. Затихващи трептения.

Ако ние успеем да решим това уравнение и да намерим α, ще намерим и решение, амплитудата A на което не е непременно равна на нула!

$$\alpha = \frac{i\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}. \tag{24.13}$$

За да не мислим за това как да извлечем квадратен корен, ще предположим, че γ е по-малко от ω_0, и поради това $\omega_0^2 - \gamma^2/4$ е положителна величина. Безпокои ни друго: защо получихме *две* решения! На тях съответствуват

$$\alpha_1 = \frac{i\gamma}{2} + \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \frac{i\gamma}{2} + \omega_\gamma \tag{24.14}$$

и

$$\alpha_2 = \frac{i\gamma}{2} - \sqrt{\omega_0^2 - \frac{i\gamma}{4}} = \frac{i\gamma}{2} - \omega_\gamma. \tag{24.15}$$

Да се заемем засега с първото решение, като предположим, че ние нищо не знаем за това, че квадратният корен има две стой-

ности. В този случай преместването x е равно на $x_1 = A\exp(i\alpha_1 t)$, където A е произволна константа. За да съкратим записването, ще въведем специално означение за влизащия в α_1 квадратен корен: $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} = \omega_\gamma$.

Така $i\alpha_1 = -\gamma/2 + i\omega_\gamma$ и $x = A\exp[-(\gamma/2 - i\omega_\gamma)t]$ или, ако се възползваме от забележителното свойство на експонентата,

$$x_1 = Ae^{-\gamma t/2} e^{i\omega_\gamma t}. \tag{24.16}$$

И така системата осцилира с честота ω_γ, която не е точно равна на ω_0, но практически е много близка до нея, ако системата е достатъчно доброкачествена. Освен това амплитудата на трептенията експоненциално затихва! Ако вземем реалната част на (24.16), ще получим

$$x_1 = Ae^{-\gamma t/2}\cos\omega_\gamma t. \tag{24.17}$$

Това решение много напомня отгатнатото от нас решение (24.10), макар че честотата е малко по-друга, ω_γ. Но това е само малка поправка, значи първоначалната идея беше правилна. И все пак не всичко е благополучно! А неблагополучно е това, че *съществува второ решение.*

На това решение съответствува α_2 и то се отличава от първото само по знака на ω_γ:

$$x_2 = Be^{-\gamma t/2} e^{-i\omega_\gamma t}. \tag{24.18}$$

Какво означава всичко това? Ние скоро ще докажем, че ако x_1 и x_2 са възможни решения на (24.1) при $F(t) = 0$, $x_1 + x_2$ е също решение на това уравнение! По такъв начин общото решение има следния вид

$$x = e^{-\gamma t/2}(Ae^{i\omega_\gamma t} + Be^{-i\omega_\gamma}). \tag{24.19}$$

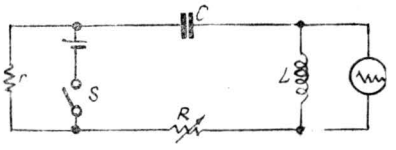
Сега може да се попита: „Собствено, защо ни е да се безпокоим с още едно решение, ако ни задоволяваше напълно и първото? За какво са тези допълнителни решения, ако ние все едно трябва да вземем само реалната част? „Ние знаем, че трябва да вземем реалната част, но откъде *математиката* знае, че искаме да вземем реалната част? Когато имахме външна сила $F(t)$, ние я допълнихме с *изкуствена* сила и тя по някакъв начин управляваше *имагинерната* част на уравнението. Но когато положихме $F(t) = 0$, съглашението за това, че каквото и да е x трябва да вземем само реалната му част, стана наша лична работа и математическото уравнение нищо не знаеше за това. В света на физиката *има* само реални решения, но решението, на което ние толкова се радвахме, е *комплексно.* На уравнението не е известно, че ние правим съвършено неочаквана крачка и отделяме само реалната част и то ни предлага още, така да се каже, комплексно спрегнато решение, така че, като съберем двете решения, да получим *истинско реално решение;* ето защо ние взехме още и α_2. За да бъде x реално, $B\exp(-i\omega_\gamma t)$ трябва да бъде комплексно спрегнато на $A\exp(i\omega_\gamma t)$ число, тогава имагинерната част ще изчезне. По такъв начин B трябва да бъде комплексно спрегнато на A, поради това нашето уравнение има вида

$$x = e^{-\gamma t/2}(Ae^{\omega_\gamma t} + A^* e^{-i\omega_\gamma t}). \tag{24.20}$$

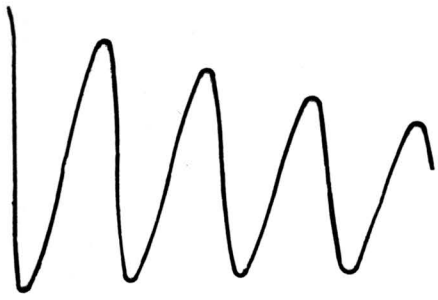
Това значи, че нашите трептения са трептения с *фазова разлика* и, както се полага, със затихване.

3. Преходни трептения в електрически вериги

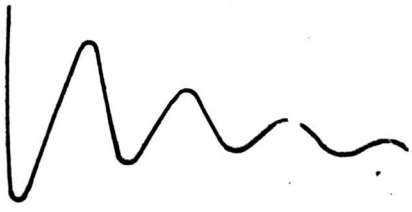
Да видим как ще изглеждат преходните трептения. За тази цел ще съставим веригата, показана на фиг. 24.2. В тази верига потенциалната разлика между краищата на индуктивността L постъпва в осцилоскоп. Неочакваното включване на прекъсвача S



Фиг. 24.2. Електрическа верига за демонстриране на преходните трептения



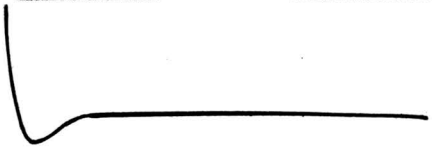
Фиг. 24.3. Затихващи трептения



Фиг. 24.4. Трептенията затихват по-бързо



Фиг. 24.5. Трептенията са почти изчезнали



Фиг. 24.6. Трептения няма

включва допълнително напрежение и предизвиква в осцилаторната верига преходни трептения. Тези трептения са аналогични на трептенията на механичен осцилатор, предизвикани от неочакван удар. Самата верига представлява електричен аналог на механичен осцилатор със затихване и ние можем да наблюдаваме трептения с помощта на осцилоскопа. Той ще ни покаже криви, с анализа на които ние ще се заемем. (Хоризонталното движение в осцилоскопа се осъществява с постоянна скорост, докато вертикалното движение се управлява от напрежението върху индуктивността. Спирането на процесите във веригата е само техническа подробност. Ние искаме да повтаряме експеримента много, много пъти, тъй като яркостта на картината не е достатъчно добра при преминаване на лъча по екрана само един път. Затова ние правим експеримента отново и отново чрез затваряне на прекъсвача 60 пъти в секунда. Всеки път, когато затваряме прекъсвача, ние пускаме също хоризонталната развивка на осцилоскопа и лъчът описва кривите една върху друга.) На фиг. 24.3—24.6 са представени кривите на затихващите трептения, получени на екрана на осцилоскопа. На фиг. 24.3 са показани затихващите трептения във верига с голяма Q, т. е. с малка стойност на γ. В такава верига трептенията затихват не много бързо; ние виждаме доста дълга синусоида с бавно намаляващ размах.

Сега нека да видим какво ще стане, ако намаляваме Q, така че трептенията да затихват по-бързо. За да намалим Q, ще увеличим съпротивлението на веригата R. При завъртане ръчката на съпротивлението трептенията действително затихват по-скоро (фиг. 24.4). Ако още увеличим съпротивлението, трептенията ще затихнат още по-бързо (фиг. 24.5). Но ако съпротивлението се увеличи над известна граница, въобще няма да видим трептения. А може би просто ни изневеряват очите? Да увеличим още съпротивлението и тогава ще получим кривата, представена на фиг. 24.6; по нея може само с труд да се каже, че във веригата са станали трептения, макар и едно. Можем ли математически да обясним това явление?

Съпротивлението на механичния осцилатор, разбира се, е пропорционално на γ. В нашия случай γ — това е R/L. Сега ако увеличим γ, в толкова приятните ни уравнения (24.14) и (24.15) ще настъпи безпорядък; когато $\gamma/2$ става по-голямо от ω_0, решенията трябва да се записват по друг начин:

$$\frac{i\gamma}{2}+i\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2} \qquad \text{и} \qquad \frac{i\gamma}{2}-i\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}\,.$$

Това отново са две решения, които ни довеждат до решенията $\exp(i\alpha_1 t)$ и $\exp(i\alpha_2 t)$. Като заместим сега α_1, ще получим

$$x=Ae^{-\left(\gamma/2+\sqrt{\gamma^2/4-\omega_0^2}\right)t}.$$

Никакви трептения. Чисто експоненциално намаляване. Същото дава и второто решение

$$x=Be^{-\left(\gamma/2-\sqrt{\gamma^2/4-\omega_0^2}\right)t}.$$

Ще отбележим, че квадратният корен не може да превиши $\gamma/2$; даже ако $\omega_0=0$, двата члена са равни. Ако пък ω_0^2 се различава от $\gamma^2/4$, квадратният корен е по-малък от $\gamma/2$ и изразът в кръглите скоби е винаги положителен. Това е много хубаво! Защо? Защото ако този израз беше отрицателен, то e би трябвало да се повдига на *положителна* степен и ние бихме получили растящо с времето решение. Но при увеличаване на съпротивлението във веригата трептенията не могат да растат, а това значи, че ние избягнахме едно противоречие. И така ние получихме две решения; и двете решения експоненциално затихват, но едното от тях се стреми „да умре“ значително по-скоро. Общото решение, разбира се, представлява комбинация от двете решения, а стойностите на коефициентите A и B зависят от това

как започват трептенията, какви са началните условия. В нашата верига се случи така, че A е отрицателно число, а B е положително, поради това на екрана на осцилографа видяхме разлика от две експоненти.

Нека обсъдим как да намерим коефициентите A и B (или A и A^*), ако са известни началните условия. Да предположим, че в момента $t=0$ са ни известни преместването $x=x_0$ и скоростта $dx/dt=v_0$. Ако във уравненията

$$x=e^{-\gamma t/2}\left(Ae^{i\omega_\gamma t}+A^*e^{-i\omega_\gamma t}\right)$$

$$\frac{dx}{dt}=e^{-\gamma t/2}\left[\left(-\frac{\gamma}{2}+i\omega_\gamma\right)Ae^{i\omega_\gamma t}+\left(-\frac{\gamma}{2}-i\omega_\gamma\right)A^*e^{-i\omega_\gamma t}\right]$$

заместим стойностите $t=0$, $x=x_0$, $dx/dt=v_0$ и се възползваме от това, че $e^0=e^{i0}=1$, ще получим

$$x_0=A+A^*=2A_R,$$

$$v_0=-\frac{\gamma}{2}(A+A^*)+i\omega_\gamma(A-A^*)=-\frac{\gamma x_0}{2}+i\omega_\gamma(2iA_1),$$

където $A=A_R+iA_I$, $A^*=A_R-iA_I$. Това значи, че

$$A_R=\frac{x_0}{2} \qquad \text{и} \qquad A=\frac{v_0+\frac{\gamma x_0}{2}}{2\omega_\gamma}. \tag{24.21}$$

По такъв начин, знаейки началните условия, ние напълно определихме A и A^*, а значи и кривата на преходното решение. Може да се запише решението и по друг начин. Да си спомним, че

$$e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta \qquad \text{и} \qquad e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta,$$

тогава

$$x=e^{-\gamma t/2}\left[x_0\cos\omega_\gamma t+\frac{v_0+\frac{\gamma x_0}{2}}{\omega_\gamma}\sin\omega_\gamma t\right], \tag{24.22}$$

където $\omega_\gamma=+\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}$. Ние получихме формулата на затихващите трептения. Такава формула няма да ни потрябва, обаче ще отбележим нейните особености, които се отнасят и до по-общи случаи.

Преди всичко поведението на системата, върху която не действува външна сила, се описва от сумата (суперпозицията) от временни експоненти [ние ги записахме във вида $\exp(i\alpha t)$]. Такова решение добре предава истинското положение на нещата. В общия случай α е комплексно число и неговата имагинерна част съответствува на затихване на трептенията. Най-сетне тясната математическа връзка на синусните и експоненциалните функции, за която се говори в глава 22, физически често се проявява в прехода от трептения към чисто експоненциално затихване при критически стойности на някои параметри на системата (в нашия случай това беше съпротивлението γ).

25

Линейни системи и обзор

1. Линейни диференциални уравнения
2. Суперпозиция на решенията
3. Трептения в линейните системи
4. Аналогиите във физиката
5. Последователни и успоредни съпротивления

1. Линейни диференциални уравнения

В тази глава ние отново ще се върнем към някои аспекти на нашите трептящи системи, само че ще се постараем сега да видим нещо по-общо, стоящо зад гърба на всяка частна система. Изучаването на всяка трептяща система се свежда до решаване на диференциалното уравнение

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma m\frac{dx}{dt}+m\omega_0^2x=F(t). \tag{25.1}$$

Тази комбинация от „операции“ над променливата x притежава интересно свойство: ако вместо x поставим $(x+y)$, ще се получи сума от еднакви операции над x и y, а умножението на x с число a се свежда до умножение с това число на първоначалната комбинация. Това се доказва леко. За да не се преуморяваме, като пишем всички букви, влизащи в (25.1), нека въведем „бързописни“ означения. Ще означим цялата лява страна на уравнението (25.1) със символа $\underline{L}(x)$. Като видите такъв символ, вие трябва мислено да си представите лявата част на уравнението (25.1). Поради това, съгласно тази система на записване, символът $\underline{L}(x+y)$ ще означава следното:

$$\underline{L}(x+y)=m\frac{d^2(x+y)}{dt^2}+\gamma m\frac{d(x+y)}{dt}+m\omega_0^2(x+y). \tag{25.2}$$

(Да подчертаем буквата $\underline{L}$, за да не сбъркаме този символ с някоя обикновена функция.) Понякога ще употребяваме термина *операторно записване*, но е съвсем безразлично с какви думи ще го наречем, чисто и просто това е „бързопис“.

Нашето първо твърдение, че

$$\underline{L}(x+y)=\underline{L}(x)+\underline{L}(y), \tag{25.3}$$

следва от връзките $a(x+y)=ax+ay$, $d(x+y)/dt=dx/dt+dy/dt$ и т. н.

Лесно се доказва, че за постоянно a

$$\underline{L}(ax)=a\underline{L}(x). \tag{25.4}$$

(Зависимостите (25.3) и (25.4) са тясно свързани една с друга, защото ако заместим $x+x$ в (25.3), ще получим (25.4) за конкретна стойност на $a=2$ и т. н.)

Решавайки по-сложни задачи, можем да получим $\underline{L}$, в което се съдържат повече членове и по-високи производни. Обикновено първата работа е да се интересуват, изпълнени ли са зависимостите (25.3) и (25.4) или не. Ако те са изпълнени, задачата наричат *линейна*. В тази глава ние ще изучим някои свойства на системи, следващи само от този факт, че системата е линейна. Това ще ни помогне да разберем общността на някои свойства на изучените по-рано частни системи.

Нека изучим някои свойства на линейните диференциални уравнения, при което е полезно да се помни за добре известното ни частно уравнение (25.1) Първото интересно свойство: да предположим, че решаваме диференциалното уравнение за преходни движения: свободни трептения без действие на външни сили. Предстои ни да решаваме уравнението

$$\underline{L}(x)=0, \tag{25.5}$$

Да предположим, че ние сме се изхитрили някак да преодолеем това уравнение и сме намерили частно решение x_1. Това значи, че ни е известна такава функция x_1, за която $\underline{L}(x_1)=0$. След това може да се забележи, че ax_1 е също решение на нашето уравнение; може да се умножи частното решение на уравнението с произволна константа и да се получи ново решение. С други думи, ако някое решение позволява на частицата да се придвижи на определено разстояние, тя може да извърши и по-дълъг рейс. *Доказателство*: $\underline{L}(ax_1)=a\underline{L}(x_1)=a.0=0$.

Да предположим сега, че ни се е удало все пак да намерим не *едно* частно решение x_1, но и второ x_2 (да напомним, че когато при търсенето на преходното решение положихме $x=\exp(i\alpha t)$, намерихме две стойности на α, т. е. две решения: x_1 и x_2). Ще покажем сега, че комбинацията x_1+x_2 е също решение. С други думи, ако се положи $x=x_1+x_2$, то x е също решение на уравнението. Защо? Защото ако $\underline{L}(x_1)=0$ и $\underline{L}(x_2)=0$, то $\underline{L}(x_1+x_2)=\underline{L}(x_1)+\underline{L}(x_2)=0+0=0$. По такъв начин ние имаме право да събираме отделните решения, описващи движенията на линейна система.

Като продължаваме в същия дух, ние можем да съберем шест първи и две втори решения; нали ако x_1 е решение, то αx_1 е също решение. С други думи, всяка сума от две решения например $\alpha x_1+\beta x_2$ удовлетворява уравнението. Ако ние имаме щастието да намерим три решения, ще видим, че всяка комбинация от трите решения отново удовлетворява уравнението, и т. н. Потокът от такива решения може да се ограничи с *независимите решения**; в случая за осцилатора ние получихме само *две* такива решения. Броят на независимите решения в общия случай зависи от това, което се нарича число на *степените на свобода*. Ние няма да обсъждаме подробно сега този въпрос, но в случай на диференциално уравнение от втори ред има само две независими решения. Ако намерим тези две решения, то може да се построи общо решение на уравнението.

Да видим какво ще стане, когато на системата действува външна сила. Ще предположим, че сме се сблъскали с уравнението

$$\underline{L}(x)=F(t) \tag{25.6}$$

и сме намерили негово частно решение. Ще го наречем решение на Джо $x_Д$, т. е. $\underline{L}(x_Д)=F(t)$. Бихме искали да намерим още едно решение на това уравнение. Да добавим към решението на Джо някакво друго решение на свободното уравнение (25.5), например x_1. Тогава, като си спомним за (25.3), ще получим

$$\underline{L}(x_Д+x_1)=\underline{L}(x_Д)+\underline{L}(x_1)=F(t)+0=F(t). \tag{25.7}$$

Следователно като добавим към решението на уравнението (25.6) кое да е „свободно“ решение, ще получим ново решение. Свободното решение наричат още *преходно* решение.

Ако неочаквано включим външна сила, движението на осцилатора няма да се описва изведнъж от равновесното (синусно) решение: отначало към него ще се смесват преходни решения, които, ако почакаме по-дълго, в края на краищата ще „измрат“. Равновесното решение ще „оживее“, защото само то съответствува на външната сила. Във края на краищата това ще бъде единственото решение, но началните движения на системата ще зависят от това, какви обстоятелства съпътствуват включването на силата.

---

* Решения, които не може да се изразят линейно едно чрез друго, се наричат независими решения.

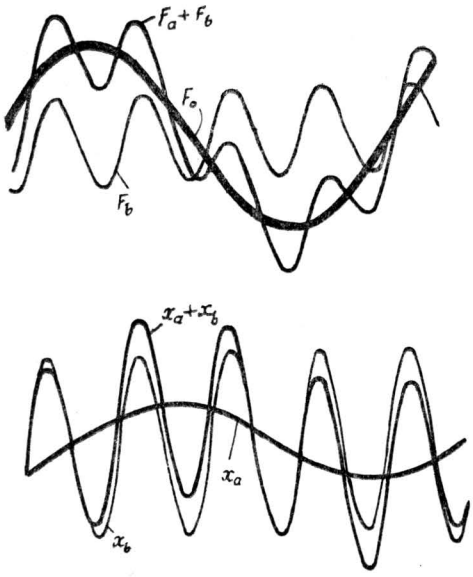
2. Суперпозиция на решенията

Да преминем сега към друга интересна проблема. Ще предположим, че ни е дадена някаква външна сила F_a (например периодична сила с честота $\omega=\omega_a$, но нашите изводи ще бъдат верни за всяка зависимост на силата от времето) и че сме намерили движение, което съответствува на тази сила (преходните движения може да се отчитат или да не се отчитат, това не е важно). Да предположим, че сме решили още една задача — намерили сме движението в случай на действие на сила F_b. След това да предположим, че някой се е втурнал в стаята и казал: „На контролното дават задача със сила F_a+F_b. Какво да правим? „Разбира се, ние ще решим тази задача — и изведнъж ще открием едно забележително свойство: сумата от решенията x_a и x_b, получавани в случай, когато взимаме силата поотделно, ще бъде решение на новата задача. За тази цел трябва само да си спомним за (25.3):

$$L(x_a+x_b)=L(x_a)+L(x_b)=F_a(t)+F_b(t). \tag{25.8}$$

Това е пример за онова, което наричат принцип на суперпозицията на линейните системи и което е много важно нещо. Работата е следната: ако можем да представим сложна сила във вид на сума от няколко по-прости сили и успеем да решим уравнението за всяка сила поотделно, то можем да решим и първоначалното уравнение, защото за това трябва просто да се съединят късчетата *решения* по същия начин, както обединихме отделните сили, за да получим *пълната сила* (фиг. 25.1).

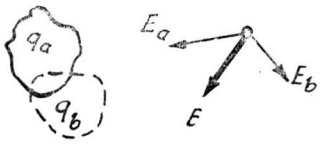
Още един пример от принципа на суперпозицията. В глава 12 говорихме за един от най-важните факти, произтичащи от законите на електричеството. Ако ни е дадено разпределението на товарите q_a, може да се намери електрично поле $\mathbf{E}_a$, породено от тези товари в точката P. Друго разпределение на товарите q_b поражда в същата точка поле $\mathbf{E}_b$. Тези две разпределения, като действуват заедно, ще създадат в точката P поле $\mathbf{E}$, което представлява *сума* от полетата $\mathbf{E}_a$ и $\mathbf{E}_b$. С други думи, полето, което съответствува на съвкупност от много заряди, представлява векторна сума на полетата, съответствуващи на отделните заряди. Аналогията с предишния пример изведнаж се набива в очи: нали ако знаем резултата от действието на отделните сили, откликът от силата, явяваща се сума на тези сили, ще бъде сума от отделните отклици.



Фиг. 25.1. Пример от принципа на суперпозицията за линейни системи.

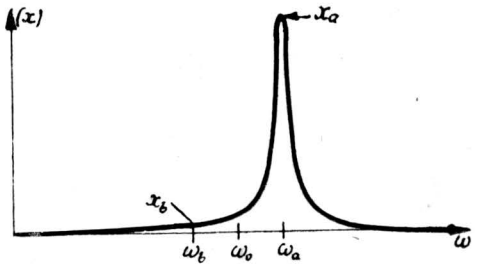
Причината за верността на принципа на суперпозицията в електричеството се състои в това, че основните закони на електричеството, определящи електричното поле (уравненията на Максвел), са *линейни* диференциални уравнения, притежаващи свойството (25.3). На силите в тези уравнения съответствуват *заряди*, пораждащи електричното поле, а уравненията, които определят електричното поле по зададени товари, са линейни уравнения.

За да измислим още един пример за принцип на суперпозицията, запитайте се как ви се отдава да настроите своя радиоприемник на определена радиостанция, макар че едновременно работят твърде много станции. Сигналите на радиостанциите представляват трептящи електрични полета с много висока честота, действуващи на антената на радиоприемника. Амплитудата на тези трептения наистина се променя, модулира ги гласът на говорителя, но скоростта на тези изменения е много малка и затова може засега да се забрави. Когато чувате: „Станцията работи на честота 780 килохерца“, това означава, че честотата на излъчваното от антената на радиостанцията електромагнитно поле е равна на 780 000 трептения в секунда и това поле с точно такава честота разлюлява електроните в антената на вашия приемник. Но нали в същото време наблизо работи и друга радиостанция на друга честота, да кажем на честота 550 kHz. Тази станция също разлюлява електроните на вашата антена. Но как се отделят сигналите, постъпващи в приемника с честота 780 kHz, от сигналите, които имат честота 550 kHz? Та нали вие не слушате гласовете на двамата диктори едновременно.



Фиг. 25.2. Принципът на суперпозицията в електростатиката.

Първата част от електрическата верига на радиоприемника е линейна верига. По принципа на суперпозицията нейният отклик на електрично поле F_a+F_b е равен на x_a+x_b. По всичко изглежда, че никога не ще ги разделим. Но да си спомним, че в *резонансната* верига кривата на отклика x на единична сила F зависи от честотата приблизително по начина, който е изобразен на фиг. 25.3. Във верига с голяма стойност на Q откликът има много остър максимум. Да предположим, че двете станции имат приблизително еднаква мощност, поради което двете *сили* имат приблизително еднаква амплитуда. *Откликът* е равен на сумата на откликите x_a и x_b, но на фиг. 25.3 x_a е грамаден, а x_b е много малък. По такъв начин макар двата сигнала да са еднакви по сила, в приемника те преминават през остро резонансна верига, настроена на честота ω_a (честотата на предаването на една от станциите), и откликът на тази честота (станция) е значително по-голям от отклика на всички останали. Поради това, независимо че на антената действуват два сигнала, пълният отклик почти изцяло е съставен от честота ω_a и ние можем да изберем онази станция, която пожелаем.



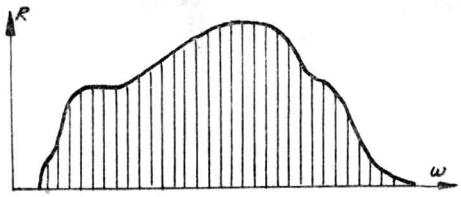
Фиг. 25.3. Резонасна крива с остър максимум.

Няколко думи за механизма на настройката. Как настройваме радиоприемника? Ние изменяхме честотата ω_0, като променяхме L или C на веригата, защото честотата на веригата зависи от комбинацията на L и C. Голямата част от радиоприемниците са направени така, че в тях се променя стойността на C. Като въртим ръчката на настройката на приемника, ние изменяме собствената честота на веригата. Нека на някакво положение на ръчката съответствува честота ω_c; ако няма радиостанции, работещи на тази честота, приемникът мълчи. Вие продължавате да променяте капацитета C на веригата, докато не построите крива на отклик с резонанс при честота ω_b, тогава вие ще чуете друга станция. Ето така се настройва радиоприемникът; цялата работа е в принципа на суперпозицията, в съчетание с резонансния отклик.*

За да завършим обсъждането, нека да помислим как да постъпим при анализ на линейни задачи с дадена сила, когато силата много *сложно зависи от времето.* Може да се постъпи различно, но има два особено удобни общи метода за решаване на такива задачи. Първият метод: да предположим, че ние можем да решаваме задачата в някои частни случаи, например в случаи на синусови сили с различни честоти. Да се решават линейни уравнения в тези случаи е детска игра. Нека да сме срещнали този „детски“ случай. Сега възниква въпросът: не може ли да се представи всяка сила във вид на сума от две или повече „детски“ сили? Ние вече показахме доста хитро на фиг. 25.1 зависимост на силата от времето; ако тука прибавим още няколко синусоиди, резултантната крива ще изглежда още по-сложна. По такъв начин простичките „детски“ сили могат да създадат много сложна сила. Вярно е и обратното: практически всяка крива може да се представи във вид на *безкрайна сума* от синусни вълни с различна дължина на вълната (или честота), за всяка от които ние знаем отговора. По такъв начин ние знаем как да представим дадена сила F във вид на синусни вълни, поради това решението x може да се представи във вид на сума за F от синусни вълни, всяка от които се умножава по ефективното отношение на x към F. Такъв метод на решение наричат *метод на трансформация на Фурие* или *анализ (разлагане)* на Фурие. Ние няма сега да правим такова разлагане: засега е достатъчна само идеята.

Много интересен е другият способ за решаване на сложни задачи. Да предположим, че някой след големи умствени усилия

* В най-новите суперхетеродинни приемници работата, разбира се, е по-сложна. Усилвателите на приемника са настроени на определена междинна честота; осцилаторът с променлива настройваща се честота е свързан с входния сигнал с *нелинейна* връзка, пораждайки нова честота (равна на разликата от честотите на сигнала и осцилатора) — междинна честота, която се усилва. За това ще говорим в гл. 50.



Фиг. 25.4 Сложната сила може да се представи като една поредица от кратки импулси.

е решил дадената ни задача в случай на една частна сила — *импулсна*. Силата внезапно и бързо действува върху системата, след това се изключва и *отново всичко е спокойно*. Сега ни е достатъчно да решим такава задача само в случай на единична сила, после чрез умножаване с подходящо число ще успеем да получим всякакви сили. Ние знаем, че осцилаторът откликва на импулсна сила със затихващи трептения. А какво ще стане в случай на друга сила, например силата, изобразена на фиг. 25.4?

Такава сила може да се представи във вид на последователни удари с чукче. Отначало навсякъде е тихо, след това някой взима в ръка чукче и внезапно се раздават равномерни удари — удар, удар, удар, удар ... и отново всичко е тихо. С други думи, непрекъснато действуващата сила може да се представи като ред последователни импулси, следващи бързо един след друг. Ние знаем последствията от един импулс, а последствието от серия импулси ще бъде ред от затихващи трептения; нарисувайте кривата на трептенията за първия импулс, след това, като се отдръпнете малко, такива криви за втория импулс, за третия и т. н. След това съберете всички криви. По такъв начин математически може да се представи пълното решение в случай на произволна сила, ако може да се реши задачата за импулс. Отговорът за произволна сила може да се получи чрез интегриране. Това е *методът* на *Гриновите функции*. Гриновата функция представлява отклик на системата за отделен импулс, а методът на Гриновите функции е метод за анализ на действието на силите чрез сумиране откликите на импулсите.

Физическите принципи, които лежат в основата на двата метода, са много прости; те просто се натрапват, ако се разбере смисълът на линейното уравнение, но *математическите* методи съдържат доста сложни интегрирания и т. н.; ние сме слабо подготвени, за да атакуваме направо тези методи. Вие ще се върнете към това, когато имате повече практика в математиката. Но самата *идея* на методите действително е много проста.

Най-сетне ще кажем още защо линейните системи са така важни. Отговорът е прост: защото ние умеем да решаваме линейни уравнения! Поради това през по-голямата част от времето ние ще решаваме линейни задачи. Втората (и главната) причина се заключава в това, че *основните закони във физиката често са линейни*. Например уравненията на Максвел за законите на електромагнетизма са линейни уравнения. Великите закони на квантовата механика, доколкото са ни известни, също се свеждат до линейни уравнения. Ето защо ние толкова много време отделяме на линейните уравнения: ако сме разбрали линейните уравнения, ние сме готови по принцип да разберем твърде много работи.

Да споменем още други ситуации, когато възникват линейни уравнения. Когато отклоненията са малки, много функции може *приблизително* да се заменят с линейни. Например точното уравнение на движението на махалото е

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta. \tag{25.9}$$

Това уравнение се решава с елиптични функции, но най-лесно се решава числено, както направихме това в глава 9 при изучаване на Нютоновите закони на движението. Голяма част от нелинейните уравнения може да се реши само *числено*. За малки ъгли $\sin\theta$ практически е равен на θ и тогава може да се премине към линейни уравнения. От този пример може да се съобразим, че има много обстоятелства, при които малките ефекти са линейни (тук това са отклоненията на махалото на малки ъгли). Друг пример: ако на пружина се люлее неголям товар, силата е пропорционална на деформацията на пружината. Ако силно се дръпне пружината, тя може и да се скъса, значи в този случай силата зависи от разстоянието по съвсем друг начин! Линейните

уравнения са много важни. Те са *толкова* важни, че физиците и инженерите, както изглежда, половината от своето време изразходват за решаване на линейни уравнения.

3. Трептения в линейни системи

Нека си спомним за какво говорихме в последните няколко глави. Физиката на трептеливите движения може лесно да бъде затъмнена от математиката. Всъщност тук физиката е много проста и, ако за минута забравим математиката, ще видим, че разбираме почти всичко, което става в трептящата система. Първо, ако имаме работа само с пружинка и товарче, лесно може да се разбере защо системата трепти — това е следствие от инерцията. Ние издърпахме масата надолу, а силата я тегли назад; настъпва момент, когато силата е равна на нула, но товарът не може да се спре мигновено: той има импулс, който го заставя да се движи. Сега пружинката дърпа товара на другата страна, товарът започва да се движи назад и напред. И така ако нямаше триене, несъмнено би се получило трептеливо движение, както и става в действителност. Но достатъчно е незначително триене, за да става размахът на следващите трептения по-малък, отколкото преди.

Какво ще се случи след това, след много цикли? Това зависи от характера и големината на триенето. Да преположим, че сме измислили такова устройство, при което при изменение на амплитудата силата на триенето се оказва пропорционална на другите сили — на инерцията и опъването. С други думи, при малки трептения триенето е по-слабо, отколкото при трептения с голяма амплитуда. Обикновено силата на триенето не притежава такова свойство, така че специален вид триене трябва да бъде открит за тази именно цел — да се създадат сили на триене, пропорционални на скоростта; тогава за големи трептения тези сили ще бъдат по-големи, а за малки — по-малки. Ако имаме именно такъв вид триене, в края на всеки цикъл системата ще се намира в същите условия, както и в началото на цикъла, само всичко ще бъде по-малко. Всички сили ще бъдат по-малки в същите пропорции: силата на пружинката малко ще отслабне, инерциалните ефекти ще бъдат по-малки. Нали сега и ускорението на товарчето ще бъде по-малко и силата на триенето ще отслабне (за това ние се погрижихме, когато създавахме нашето устройство). Ако ние имахме работа с такива сили на триене, бихме видели, че всяко трептение точно повтаря първото, само амплитудата му е станала по-малка. Ако след първия цикъл амплитудата е, да кажем 90 % от първоначалната, след втория цикъл тя ще бъде 90 % от 90 % и т. н., т. е. *размахът на трептенията след всеки цикъл ще се намалява еднакво число пъти.* Кривата, която има такъв характер, е експоненциална функция. Тя се изменя еднакво число пъти през всички интервали с еднаква дължина. С други думи, ако отношението на амплитудите на един цикъл към амплитудите на предишния е равно на a, същото отношение за втория цикъл е равно на a^2, след това на a^3 и т. н. По такъв начин амплитудата на трептенията след n цикли е равна на

$$A = A_0 a^n . \tag{25.10}$$

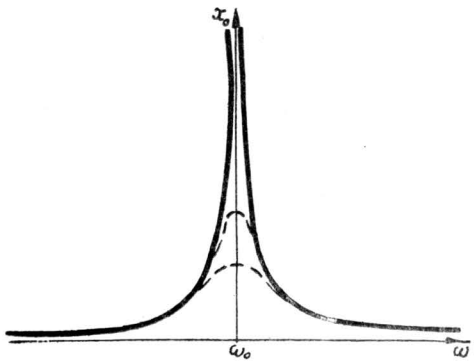
Но, разбира се, $n \sim t$, поради което общото решение ще бъде произведение от някаква периодична функция $\sin\omega t$ или $\cos\omega t$ по амплитудата, която се мени примерно както b^t. Ако b е положително и по-малко от единица, можем да го запишем във вида e^{-c}. Ето защо решението на задачата за трептенията при отчитане на триенето ще изглежда примерно както $\exp(-ct)\cos\omega t$. Това е много просто.

Какво ще се случи, ако триенето не бъде такова изкуствено; например обикновеното триене в масата, когато силата на триенето е постоянна по големина, не зависи от размаха на трепте-

нията и променя своята посока на всеки полупериод? Тогава уравненията на движението ще станат нелинейни; трудно е да се решават, поради което ще се наложи да се прибегне до описаното в глава 2 числено решение или да се разглежда поотделно всеки полупериод. Най-мощен, разбира се, е численият метод; с негова помощ може да се реши всяко уравнение. Математическият анализ се използува само за решаване на прости задачи.

Трябва да се каже, че математическият анализ въобще не е толкова могъщо средство за изследване; с негова помощ може да се решават само най-простите възможни уравнения. Щом като уравненията се усложнят малко, вече не можем да ги решаваме аналитично. А численият метод, с който се запознахме в началото на курса, позволява да се реши всяко уравнение, представляващо физически интерес.

Да идем по-нататък. Какво може да се каже за резонансната крива? Как да се обясни резонансът? Да си представим отначало, че триене няма и ние имаме работа с нещо, което може да трепти само по себе си. Ако се подбутва махалото всеки път, когато то минава покрай нас, много скоро махалото ще започне да се люлее като лудо. А какво ще се случи, ако закрием очи и, без да следим за махалото, започнем да го тласкаме с произволна честота, с каквато пожелаем? Понякога нашите тласъци, не попадайки в ритъм, ще забавят махалото. Но щом ни се усмихне щастието да намерим верния темп, всеки тласък ще застига махалото в нужния момент и то ще се повдига все по-високо, по-високо и по-високо. По такъв начин, ако няма триене, за зависимостта на амплитудата от честотата на външната сила ще получим крива, която изглежда като непрекъснатата линия на фигура 25.5. Качествено ние разбрахме резонансната крива; за да се намерят точните ѝ очертания, изглежда, ще се наложи да се прибегне до помощта на математиката. Кривата клони към безкрайност, ако $\omega \to \omega_0$, където ω_0 е собствената честота на осцилатора.



Фиг. 25.5. Резонансни криви, изразяващи различните видове триене.

Предположете, че съществува слабо триене. Тогава при незначителни отклонения на осцилатора влиянието на триенето се отразява слабо и резонансната крива далеч от максимума не се изменя. Обаче около резонанса кривата вече не отива до безкрайност, а просто се издига по-високо, отколкото в останалите места. Когато амплитудата на трептенията достигне максимум, работата, извършена от нас в момента на тласъка, напълно се компенсира от загубата на енергия при триенето за един период. По такъв начин върхът на кривата е закръглен и тя вече не отива в безкрайност. Колкото по-голямо е триенето, толкова по-изравнен е върхът на кривата. Някой може да каже: „Аз мислех, че ширините на резонансните криви зависят от триенето.“ Така може да се мисли, защото рисуват резонансните криви, като приемат за мащабна единица върха на кривата. Обаче, ако се нарисуват всички криви в един мащаб (това ще проясни работата повече, отколкото изучаването на математичните изрази), ще се окаже, че триенето отрязва върха на кривата! Ако триенето е малко, ние можем да се изкачим високо по резонансната крива; когато триенето изглади кривата, на същия интервал от честоти ще се издигнем на по-малка височина и това ще създаде впечатление за ширина. По такъв начин, колкото по-висок е върхът на кривата, толкова по-близко до максимума са точките, където височината на кривата е равна на половината от максимума.

Най-сетне да помислим какво ще се случи при много голямо триене. Ясно е, че ако триенето е много голямо, системата въобще няма да осцилира. Енергията на пружинката едва-едва ще стига за борба със силите на триенето и товарчето бавно ще пълзи към равновесното положение.

4. Аналогиите във физиката

Продължавайки обзора, ще отбележим, че масите и пружинките не са единствените линейни системи; има и други. В частност съществуват електрични системи (наричат ги линейни вериги), напълно аналогични на механичните системи. Ние не се стараехме да изясним докрай *защо* всяка част от електрическата верига работи така, а не иначе; още ни е трудно да разберем това. Може просто да се повярва, че едно или друго поведение на всеки елемент от веригата може да се потвърди експериментално.

Да вземем за пример най-просто устройство. Да приложим към късче проводник (съпротивление) потенциална разлика V. Това означава, че ако от единия край на проводника до другия край протича товар q, то при това се извършва работа qV. Колкото по-голяма е потенциалната разлика, толкова по-голяма работа се извършва при „падане" на товара от високопотенциалния край на проводника до нископотенциалния. Товарите, като преминават от единият край на проводника към другия, отделят енергия. Но на товарите не е толкова лесно да плуват по проводника: атомите на проводника оказват съпротивление на потока и това съпротивление се подчинява на закон, верен почти за всички *обикновени* материали: токът I, т. е. толкова и толкова товари в секунда, падащи надолу, е пропорционален на приложената към проводника потенциална разлика. С други думи, броят на товарите, преминаващи през проводника за една секунда, е пропорционално на силата, която ги тласка:

$$V = IR = R\frac{dq}{dt}. \tag{25.11}$$

Коефициентът R наричат *съпротивление*, а самото уравнение — *закон на Ом*. Единицата за съпротивление е Ом; той е равен на отношението на един волт (1 V) към един ампер (1 A). В механичните устройства много трудно се намират сили на триене, пропорционални на скоростта, а в електричните вериги това е обикновено нещо и законът на Ом е верен за болшинството метали с много голяма точност.

Интересува ни много ли работа се извършва за една секунда при преминаване на товарите по проводника (тази величина може да се нарече загуба на мощ или отделяна от товарите енергия)? За да се прекара товар q през потенциална разлика V, трябва да се извърши работа qV; по такъв начин работата за една секунда е равна на $V(dq/dt)$ или VI. Този израз може да се запише по друг начин: $IRI = I^2R$. Тази величина наричат *топлинна загуба*; вследствие на закона за запазване на енергията съпротивлението на проводника произвежда за 1s такова количество топлина. Тази топлина загрява проводника на електрическата лампа.

Механическите устройства имат, разбира се, и други интересни свойства, например такива като масата (инерция). Оказва се, че в електрическите вериги също съществуват аналози на инерцията. Може да се построи прибор, наречен *индуктор*, а свойството, което той притежава, носи названието *индуктивност*. Ток, попаднал в такъв прибор, не *иска да се спре*. За да се измени токът, към прибора трябва да се приложи потенциална разлика. Ако по прибора тече постоянен ток, пад на потенциала няма. Веригите с постоянен ток нищо „не знаят" за индуктивността; ефектите на индуктивността се откриват само при *изменения* на тока. Уравнението, описващо тези ефекти, е следното:

$$V = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}. \tag{25.12}$$

Индуктивността се измерва в единици, наречени хенри (Н). Приложената към прибор с индуктивност 1Н, потенциална разлика от 1V променя тока с 1 A/s. Уравнение (25.12), ако искате, е електричният аналог на закона на Нютон: V съответствува на F, L съответствува на m, а I — на скоростта!

Всички следващи уравнения, описващи двете системи, се из-

веждат еднакво, защото ние просто можем да заменим буквите в уравненията за едната система и да получим уравнения за другата система; всеки извод, направен при изучаване на едната система, ще бъде верен и за другата система.

Какво електрично устройство съответствува на пружинката, в която силата е пропорционална на опъването? Ако се започне от $F=kx$ и се замени F с V, а x с q, ще получим $V=\alpha q$. Ние вече знаем, че такова устройство съществува; нещо повече, това е единственият от трите елемента на веригата, работата на който ние разбираме. Ние вече се запознахме с двойка успоредни пластинки и открихме, че ако натоварим пластинките с равни, но противоположни по знак заряди, полето между пластинките ще е пропорционално на големината на заряда. Работата, извършена при пренасяне на единичен заряд през пролуката между двете пластинки, е право пропорционална на заряда на пластинките. Тази работа служи за определяне на потенциалната разлика и е равна на линейния интеграл на електичното поле от едната пластинка до другата. По исторически причини коефицентът на пропорционалност наричат не C, а $1/C$, т. е.

$$V=\frac{q}{C}. \tag{25.13}$$

Единицата за капацитет се нарича *Фарад* (F); заряд от 1 кулон, поставен на всяка плоча на кондензатора с капацитет от 1 F, създава потенциална разлика от 1 V.

Ето всичките необходими аналогии. Сега може, като заменим m с L, q с x и т. н., да напишем уравнение за осцилираща верига

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma m\frac{dx}{dt}+kx=F \tag{25.14}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=V. \tag{25.15}$$

Всичко, което знаем за уравнение (25.14), може да се приложи и за уравнение (25.15). Пренася се всяко *следствие*; аналозите са толкова много, че с тяхна помощ може да се направят забележителни неща.

Да предположим, че сме се натъкнали на много сложна механична система: има не една маса на пружинка, а много маси на много пружинки и всичко е разбъркано. Какво да правим? Да решаваме уравнения? Може и така. Но да се опитаме да съставим *електрическа* верига, която ще се описва от същите уравнения, както и механичното устройство! Ако ние смятаме да анализираме движението на масата върху пружинката, защо да не съставим верига, в която индуктивността е пропорционална на масата, съпротивлението — пропорционално на $m\gamma$, $1/C$ е пропорционално на k? Тогава електрическата верига, разбира се, ще бъде точен аналог на механичното устройство в този смисъл, че всеки отклик на q от V (V съответствува на действуващата сила) точно съответствува на отклика на x от силата! Като разбъркаме във веригата голямо множество от съпротивления, индуктивности и капацитети, можем да получим верига, *имитираща* най-сложна механична система. Какво е хубавото в това? Всяка задача, механична или електрична, е толкова трудна (или лека), колкото и другата: нали те са съвършено еквивалентни. Предимството не е в това, че е по-лесно да се решават математическите уравнения, след като открием, че имаме работа с електрична верига (въпреки че това е метод, използуван от електромеханизацията), но цялата работа е в това, че винаги е по-леко да се свърже електрична верига и да се изменят нейните параметри.

Да предположим, че сме построили автомобил и искаме да узнаем силно ли ще се тресе той по трапчините на пътя. Да свържем електрична верига, в която индуктивностите ще ни говорят за инерцията на колелата, представа за еластичността на колелата ще дадат капацитетите, съпротивленията ще заменят амортисьорите и т. н. В края на краищата ние ще заменим с елемен-

тите на веригата всички части на автомобила. Сега работата е за трапчините. Добре, да подадем на схемата *напрежение* от генератора. Той може да изобрази всякаква трапчина: като измерваме товара на съответния кондензатор, ще получим представа за разлюляването на колелата. Като измерим товара (това е лесно да се направи), ние ще решим, че автомобилът се тресе много силно. Трябва нещо да се направи. Или да се отслабят амортисьорите, или да се усилят. Нима ще се наложи да се преправя автомобилът, отново да се проверява как се тресе, а после отново да се преправя? Не ! Просто трябва да се завърти ръчката на съпротивлението: съпротивление номер 10 — това е амортисьор номер 3; така може да се усили амортизацията. Тресе се още по-силно — не е страшно, ще отслабим амортисьорите. Все едно тресе се. Ще изменим еластичността на пружината (ръчка номер 17). Така цялото нагласяване ние ще направим с помощта на *електричеството* чрез многократно завъртане на ръчки.

Това се нарича *аналогова сметачна машина.* Така се наричат устройствата, които имитират интересуващите ни задачи, описани със същите уравнения, но със съвсем друга природа. Тези устройства лесно се построяват, леко е с тях да се направят измеренията, да се нагласят и... да се разглобят!

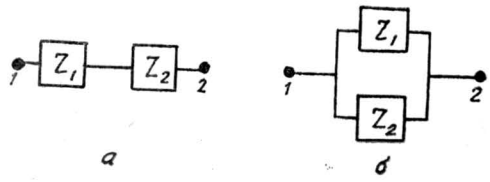
5. Последователни и успоредни съпротивления

Ще обсъдим най-сетне още един важен въпрос, макар че той не попада съвсем в темата. Какво да се прави с електричната верига, ако в нея има много елементи? Например когато индуктивността, съпротивлението и капацитетът са свързани, както е показано на фиг. 24.2, всички товари преминават през всеки от трите елемента така, че свързващият елементите ток във всички точки на веригата е еднакъв. Тъй като токът навсякъде е еднакъв, падът на напрежението в съпротивлението е равен на IR, а индуктивността — на $L(dI/dt)$ и т. н. Пълният пад на напрежението се получава чрез сумиране на отделните падове и ние достигаме до уравнение (25.15). Използувайки комплексните числа, ние решихме това уравнение в случай на стационерен отклик на синусова сила. Ние намерихме, че $\hat{V}=\hat{Z}\hat{I}$ ($\hat{Z}$ се нарича *импеданс* на веригата). Като знаем импеданса, лесно намираме тока във веригата $\hat{I}$, ако към веригата е приложено синусово напрежение $\hat{V}$.

Да предположим, че трябва да свържем по-сложна верига от два къса, импедансите на които са равни на $\hat{Z}_1$ и $\hat{Z}_2$; да ги съединим последователно (фиг. 25.6, а) и да приложим напрежение. Какво ще се случи? Задачата е малко по-сложна от предишната, но не е трудно да се ориентираме в нея: ако през $\hat{Z}_1$ протича ток $\hat{I}$, то падът на напрежението при $\hat{Z}_1$ е равен на $\hat{V}_1=\hat{I}\hat{Z}_1$, а падът на напрежението при $\hat{Z}_2$ ще бъде $\hat{V}_2=\hat{I}\hat{Z}_2$. *През двата елемента на веригата протича еднакъв ток.* Пълният пад на напрежението по такава верига е равен на $\hat{V}=\hat{V}_1+\hat{V}_2=(\hat{Z}_1+\hat{Z}_2)\hat{I}$. По такъв начин падът на напрежението в такава верига може да се запише във вида $\hat{V}=\hat{I}\hat{Z}_s$, а $\hat{Z}_s$ е импедансът на системата, съставена от два последователно свързани елемента, и е равен на сумата от импедансите на отделните елементи

$$\hat{Z}_s=\hat{Z}_1+\hat{Z}_2 \qquad (25.16).$$

Но това не е единственият начин за решаване на въпроса. Може да се съединят отделните елементи *успоредно* (фиг. 26.6, б). При такова свързване, ако смятаме, че съединителните проводници са идеални проводници, към двата елемента е приложено еднакво външно напрежение, а силата на тока във всеки елемент не зависи от другия елемент. Токът през $\hat{Z}_1$ е равен на $\hat{I}_1=\hat{V}/\hat{Z}_1$, токът в $\hat{Z}_2$ е равен на $\hat{I}_2=\hat{V}/\hat{Z}_2$. Напрежението в двата случая е



Фиг. 25.6 Два импеданса, свързани последователно (а) и успоредно (б).

еднакво. Пълният ток през краищата на веригата е равен на сумата от токовете в отделните части на веригата: $\hat{I}=\hat{V}(\hat{Z}_1+\hat{V})\hat{Z}_2$. Това може да се запише и така:

$$\hat{V}=\frac{\hat{I}}{(\hat{I}/\hat{Z}_1)+(\hat{I}/\hat{Z}_2)}=\hat{I}/\hat{Z}_p.$$

По такъв начин

$$\frac{1}{\hat{Z}_p}=\frac{1}{\hat{Z}_1}+\frac{1}{\hat{Z}_2} \tag{25.17}$$

Много сложни вериги понякога стават по-понятни, като ги разчленим на късове и изясним на какво са равни импедансите на отделните части, а след това крачка по крачка следим за съединяването на частите, помнейки за току-що изведените правила. Ако ние сме образували верига от голям брой произволно съединени елементи и създадем в тази верига потенциална разлика с помощта на неголеми генератори, импедансът на които може да се пренебрегне (когато товарът преминава през генератора, потенциалът нараства с V), при анализа на веригата може да се използуват такива правила:

1) сумата от токовете, протичащи през всяко съединение, е равна на нула; нали протеклият към всяко съединение ток трябва непременно да изтече от него;

2) ако товарът, движейки се по затворен контур, се е върнал в онова място, откъдето е започнал пътешествието, пълната работа трябва да бъде равна на нула.

Тези правила се наричат *закони на Кирхов* за електрични вериги. Систематичното прилагане на тези правила често облекчава анализа на работата на сложни вериги. Ние ще се върнем към тях, когато ще говорим за законите на електричеството.

26

Оптика, принцип на най-малкото време

1. Светлина

1. Светлина
2. Отражение и пре чупване
3. Принцип на най-малкото време на Ферма
4. Приложение на принципа на Ферма
5. По-точна формулировка на принципа на Ферма
6. Квантов механизъм

Тази е първата от няколкото глави, посветени на електромагнитното лъчение. Светлината, с помощта на която ние виждаме, е само малка част от широкия спектър явления с една и съща природа, различните части на които се характеризират с различни стойности на една определена физична величина. Тази физична величина се нарича „дължина на вълната". Според това какви стойности взема тя в пределите на спектъра на видимата светлина, цветът на светлинните лъчи се мени от червен до виолетов. Най-добре е системното изучаване на спектъра от дългите към късите вълни да се започне с така наречените *радиовълни*. В техниката те се получават в много широк диапазон, даже подълги от тия, които се използуват в обикновеното радиоразпръскване. В радиоразпръскването се използуват вълни с дължина около 500 метра; след тях идват тъй наречените къси вълни, по-нататък следва радиолокационният диапазон, милиметровият и т. н. В действителност между отделните диапазони няма никаква граница, създадена от природата. Числата, които съответствуват на различните диапазони, а също така и самите им названия са твърде условни.

По-нататък, като преминем през дългия милиметров диапазон, ще стигнем до *инфрачервените* лъчи, а оттам — до *спектъра на видимата светлина*. Зад нея следва ултравиолетовата област, а още по-нататък започва областта на *рентгеновите* лъчи. Обаче границата между тях ние не можем да определим точно, тя е някъде около 10^{-8} m или 10^{-2} μm. Това е областта на *меките* рентгенови лъчи, след тях идват обикновеното рентгеново лъчение, *твърдото* рентгеново лъчение, гама-лъчите и тъй към все по-малки стойности на величината, която нарекохме дължина на вълната.

В границите на обширния диапазон от дължини на вълните има най-малко три области, където са възможни твърде интересни приближения. Съществува например област, в която дължината на вълната е малка в сравнение с размерите на приборите, с чиято помощ се изучават такива вълни; нещо повече, ако говорим с езика на квантовата механика, енергията на фотоните е под прага на чувствителността на приборите. Първото грубо приближение в тази област дава методът, наречен *геометрична оптика*. От друга страна, когато дължината на вълната става от порядъка на размерите на прибора (за радиовълните такива условия се създават по-лесно, отколкото за видимата светлина), а енергията на фотоните е все така малка, се прилага друго, много по-полезно приближение, в което са взети под внимание вълновите свойства на светлината, но отново се пренебрегват ефектите на квантовата механика. Това приближение е направено въз основа на *класическата теория на електромагнитното лъчение;* то ще бъде обсъдено в една от следващите глави. За още по-късите дължини на вълните, когато енергията на фотоните е голяма в сравнение с чувствителността на приборите и можем да се абстрахираме от вълновия характер на лъчението, отново възниква проста картина. Такава *фотонна* картина ще разгледаме само в общи черти. Пълната теория, която описва всичко въз основа на единен модел, вие ще узнаете много по-късно.

В тази глава ние ще се ограничим в областта, за която е ефективна геометричната оптика, и за която, както ще видим по-нататък, дължината на вълната и фотонният характер на светли-

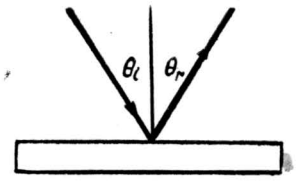
ната не играят роля. Ние даже няма да поставяме въпроса *какво представлява светлината*, а само ще опишем *нейното поведение* при дължини и времена, много по-големи от някои характерни величини. От казаното е ясно, че ще стане дума за много грубо приближение, така че после ще ни се наложи да се „отучим" от изложените тук методи. Обаче ние ще се отучим лесно, тъй като почти веднага ще преминем към по-точния анализ.

Геометричната оптика, макар че се явява като приближение, представлява огромен интерес от техническа и историческа гледна точка. Ние нарочно ще се спрем по-подробно на историята на въпроса, за да дадем представа за развитието на физическата теория или на физическите идеи изобщо.

Да започнем с това, че светлината е позната на всеки и е известна от незапомнени времена. Възниква първата проблема: какъв е механизмът на *виждането* на светлината? Имало е много теории, но в края на краищата те са сведени към една: съществува нещо, което попада в окото при отразяване от предметите. Тази идея съществува отдавна и е толкова обикновена, че сега е даже трудно да си представим други идеи, предложени, разбира се, от доста умни хора, например, че нещо излиза от окото и чувствува обкръжаващите го предмети. Имало е и други важни наблюдения: светлината се разпространява от една точка към друга *по права линия*, ако нищо не й пречи и светлинните лъчи не си взаимодействуват. С други думи, светлината се разпространява във всевъзможни посоки, но лъчът, който е перпендикулярен на направлението на погледа ни, не влияе на лъчите, идващи към нас от някой предмет. Някога това е било най-силният аргумент срещу корпускулярната теория на светлината и е бил използуван от Хюйгенс. Но ако си представим светлината като снопче летящи стрели, как биха могли тогава другите стрели лесно да го пронизват? Ценността на такива схоластични доказателства всъщност е твърде съмнителна. Винаги може да се каже, че светлината се състои именно от такива стрели, които свободно проникват една през друга.

2. Отражение и пречупване

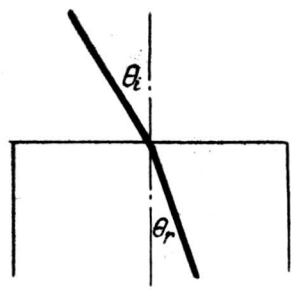
Казаното дотук дава представа за основната идея на геометричната оптика. Да преминем сега към нейното количествено описание. Разгледахме вече случая, когато светлината се разпространява между две точки по права линия. Сега да видим какво става, когато светлината среща на своя път някакъв обект (фиг. 26.1). Най-простият обект е огледалото и ние знаем закона за този случай: като попадне върху огледалото, светлината не минава през него, а се отразява и отново се движи по права линия, като направлението на правата се мени, ако меним наклона на огледалото. Още от древността хората се интересували от въпроса каква е връзката между тези два ъгъла. Тази връзка е много проста и е намерена много отдавна. След отражението падащият лъч се движи по такъв път, че ъглите между всеки лъч и огледалото са равни. По редица съображения е удобно ъглите да се отчитат от нормалата към повърхността на огледалото. Тогава така наречените закон за отражението гласи:



Фиг. 26.1. Ъгълът на падането е равен на ъгъла на отражението

$$\theta_i = \theta_r. \tag{26.1}$$

При преминаване на светлината от една среда в друга, например от въздуха във водата, за разлика от простия закон за отражението възниква по-сложен закон: тук светлината също не се движи по права линия. Траекторията на лъча във водата образува известен ъгъл с траекторията във въздуха. Когато лъчът пада почти вертикално, ъгълът на отклонението θ_i е малък; обаче, ако лъчът пада под голям ъгъл, отклонението става значително (фиг. 26.2). Възниква въпросът каква е връзката между тези два ъгъла. В древността тази проблема дълго е мъчила хората, но отговорът тогава не бил намерен. Все пак именно по този въпрос



Фиг. 26.2. При преминаване от една среда в друга светлината се пречупва

могат да се намерят експериментални данни, така редки в древногръцката физика.

Клавдий Птоломей е съставил таблица на ъглите на пречупване на светлината във водата за цяла редица ъгли на падане от въздуха. В таблица 26.1 са дадени ъглите във въздуха в градуси и съответните ъгли за водата. (Прието е да се счита, че древните гърци никога не са правили опити. Но без да се знае законът, такава таблица може да се състави само въз основа на опита. Трябва да отбележим обаче, че данните в таблицата твърде добре се разполагат върху парабола, затова те не биха могли да бъдат резултат на независими измерения; това е само редица от числа, интерполирани по няколко измерени точки.)

Това е било важна крачка в оформяването на физическия закон: отначало наблюдаваме ефекта, после правим измервания и подреждаме резултатите в таблица, след което се опитваме да намерим закона, по който едните величини се съпоставят с другите. Приведената таблица е била съставена още през 140 г. преди нашата ера и чак до 1621 г. никой не е могъл да намери такъв закон, който да свърже тези два ъгъла. Законът е бил установен от холандския математик Вилеброрд Снелиус и се чете така: нека θ_i да е ъгълът във въздуха, а θ_r — ъгълът във водата. Тогава синусът от θ_i е равен на синуса от θ_r, умножен по някаква константа:

$$\sin\theta_i = n\sin\theta_r. \qquad (26.2)$$

За водата числото n е равно приблизително на 1,33. Равенството (26.2) се нарича *закон на Снелиус*. Той позволява да се *предсказва* отклонението на светлината при преминаване от въздуха във водата. В таблицата 26.2 са дадени ъглите във водата и въздуха, получени от закона на Снелиус. Обърнете внимание на удивителното съвпадение с таблицата на Птоломей.

Таблица 26.1

Пречупване на светлината по Птоломей

Ъгъл във въздуха градуси	Ъгъл във водата градуси
10	8
20	15,5
30	20,5
40	28
50	35
60	40,5
70	45
80	50

Таблица 26.2

Пречупване на светлината по закона на Снелиус

Ъгъл във въздуха градуси	Ъгъл във водата градуси
10	7,5
20	15
30	22
40	29
50	35
60	40
70	48
80	49,5

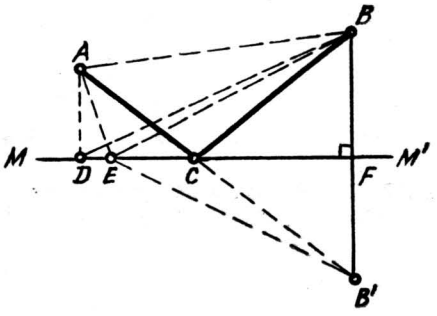
3. Принцип на най-малкото време на Ферма

С развитието на науката ние искаме да получим нещо повече от простата формула. Отначало ние наблюдаваме явленията, после с помощта на измерванията получаваме числа и накрая намираме закона, който свързва тези числа. Но истинското *величие на науката* се състои в това, че ние *можем да намерим такъв начин за разсъждение,* при който законът става *очевиден.*

Общият принцип, който нагледно обяснява закона за поведението на светлината, е бил предложен от Ферма приблизително около 1650 г. и е получил названието *принцип на най-малкото време на Ферма.* Идеята му е следната: от всевъзможните пътища, съединяващи две точки, светлината избира този път, който изисква *най-малко* време за неговото изминаване.

Ще покажем отначало, че това е вярно за случая с огледалото, че този прост принцип обяснява и праволинейността на разпространението на светлината, и закона за отражението от огледалото. Ние явно напредваме.

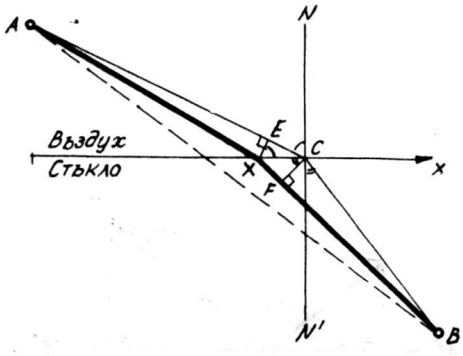
Да се опитаме да решим следната задача. На фиг. 26.3 са изобразени две точки A и B и плоско огледало MM. По кой път може за най-кратко време да се стигне от точката A до точката B? *Отговор:* по правата, прекарана от A към B. Но ако добавим допълнителното условие, че светлината трябва да *попадне* върху огледалото, да се отрази от него и отново да се върне в точка B също за най-кратко време, тогава не е толкова лесно да се отговори. Единият път е колкото може по-скоро да се достигне до огледалото, а оттам — в точката B, т. е. по пътя ADB. Пътят DB, разбира се, е дълъг. Ако се преместим малко надясно — в точка E, тогава първият отрязък от пътя малко ще се увеличи, но за сметка на това силно ще се намали вторият, а времето за изминаване ще стане по-малко. Как да намерим точката C, за която времето за преминаване е най-малко? За тази цел ще се възползуваме от един хитър геометричен начин.



Фиг. 26.3. Илюстрация на принципа на най-малкото време

От другата страна на огледалото MM, на същото разстояние от него (колкото до точка B), построяваме изкуствена точка B. След това прекарваме линията EB'. Тъй като ъгълът BFM е прав и $BF=FB'$, то EB е равно на EB'. Следователно сумата от дължините на двете отсечки $AE+EB'$, която е пропорционална на времето за тяхното изминаване (ако скоростта на светлината е постоянна), е равна на сумата $AE+EB'$. Сега трябва да установим кога сумата на дължините ще бъде най-малка. *Отговор:* когато точката C лежи на правата, съединяваща A и B'. С други думи, трябва да се върви към мнимата точка B' (мнимият образ на точката B) и тогава ще намерим точката C. По-нататък, ако ACB' е права линия, ъгълът BCF е равен на ъгъла $B'CF$ и следователно е равен на ъгъла ACM. По такъв начин твърдението за равенството на ъглите на падането и на отражението е равносилно на твърдението, че при отразяването от огледалото към точката B светлината избира път, който изисква най-малко време. Още Херон Александрийски изказал твърдението, че при отражение светлината се движи от една точка към друга по *най-късия път;* така че идеята на принципа, както виждате, не е нова. Именно това вдъхновило Ферма и той се опитал да приложи този принцип към явлението пречупване. Но очевидно, когато светлината се пречупва, не се движи по *най-късия път* и затова Ферма предложил друг принцип — светлината избира този път, за преминаването на който е нужно *най-малко време.*

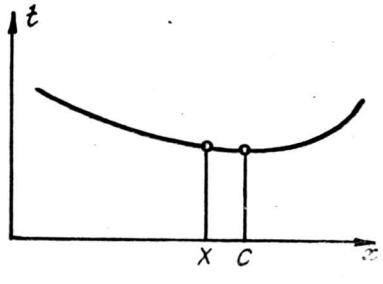
Преди да преминем към въпроса за пречупване на светлината, ще направим още една забележка върху отражението от огледало. Ако поставим източника на светлина в точка B и насочим лъч към огледалото, светлината, отразявайки се, стига до точка A така, като че ли източникът се намира в B, а огледало *въобще няма.* Нашето око вижда само тая светлина, която действително влиза в него; и макар че източникът е разположен в точката B, огледалото насочва светлината в окото така, *като че ли* източникът се намира в B'. Именно така интерпретира това явление системата очи-мозък. Затова илюзията, че източникът или предметът се намира зад огледалото, се дължи само на факта, че светлината попада в окото физически точно така, както ако предметът действително е *зад* огледалото (ако не вземаме под внимание праха върху огледалото и това, че на нас ни е известно, че огледалото реално съществува, и другите сведения, с които нашият мозък разполага).



Фиг. 26.4. Илюстрация на принципа на Ферма в случая на пречупване

Ще покажем, че от принципа на най-малкото време следва законът на Снелиус за пречупването. Разбира се, ние трябва да предположим нещо за скоростта на светлината във водата. Ще считаме, че скоростта на светлината във водата е по-малка от скоростта на светлината във въздуха и отношението на втората скорост към първата ще означим с n.

Както по рано нашата задача се състои в това, на фиг. 26.4 да достигнем *за най-малко време* от точката A до точката B. За да се убедим, че правият път тук не е най-краткият, нека да си представим следната ситуация: хубавичко момиче пада от лодка във водата в точка B и вика, моли за помощ. Линията X — това е брегът. Вие сте на сушата в точка A, виждате какво става, можете да плувате и да бягате. Но вие се движите по-бързо при бягане, отколкото при плуване. Какво трябва да направите? Да бягате направо към брега? (Разбира се.) Но като поразмислите малко, ще разберете, че е по-изгодно да пробягате малко повече по брега, за да съкратите пътя си във водата, защото във водата вие се движите по-бавно. (Разсъждавайки по този начин, най-добре би било предварително *да пресметнете* точно пътя.) Във всеки случай нека се опитаме да покажем, че окончателното решение на задачата е пътят ACB, който изисква най-малко време от всичките възможни пътища. Ако този път е най-краткият, всеки друг ще се окаже по-дълъг. Затова, ако нанесем върху графика зависимостта на времето от положението на точката X, ще се получи крива, подобна на изобразената на фиг. 26.5, където точката C съответствува на най-малкото време. Това означава, че точките X близо до



Фиг. 26.5. Най-малкото време се получава за точка C.
За съседните точки се получава почти същото време

C времето за преминаване в първото приближение е практически еднакво, тъй като в точката C наклонът на кривата е равен на нула. Следователно нашият начин за намиране искания път се свежда към изискването при неголямо изменение на положението на точката времето за преминаване да не се изменя. (Разбира се, ще възникнат безбройно малки изменения на времето от втори ред и те трябва да са положителни при преместване в двете страни от точката C). Да вземем близката точка X, да пресметнем времето за изминаване на пътя AXB и да го сравним с предишния път ACB. Да се направи това е много просто. Разбира се, трябва и разликата от времената да клони към нула за малки разстояния XC. Да разгледаме отначало пътя по суша. Ако спуснем перпендикуляра EX, лесно ще видим, че пътят е станал по-къс с EC. Може да се каже, че това разстояние сме го спестили. От друга страна, като спуснем перпендикуляра CF, ще видим, че трябва да преплуваме във водата допълнително разстояние XF. Тук ние сме загубили. От гледна точка на икономия на време ние печелим от отрязъка EC, но губим от отрязъка XF. Тези два интервала от време трябва да са равни, тъй като в първо приближение пълното време за преминаване не се мени. Като предположим, че скоростта във водата е равна на скоростта във въздуха, умножена по $1/n$, ще получим

$$EC = nXF. \tag{26.3}$$

Оттук се вижда, че ако сме избрали правилно точката C ($XC.\sin EXC = nXC.\ \sin XCF$), или като съкратим на дължината на общата хипотенуза XC и отбележим, че $EXC = ECN = \theta_i$, $XCF = BCN' = \theta_r$, ще получим

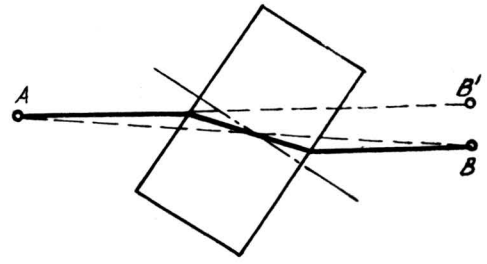
$$\sin\theta_i = n\ \sin\theta_r. \tag{264}$$

От (26.4) се вижда, че при отношение на скоростите, равно на n, светлината се движи от една точка към друга по такъв път, че отношението на синусите на θ_i и θ_r да е равно на отношението на скоростите в двете среди.

4. Приложения на принципа на Ферма

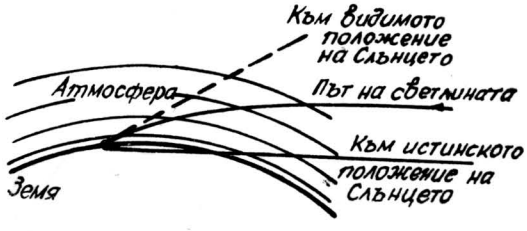
Да разгледаме сега някои интересни следствия от принципа на най-малкото време. Първото от тях е принципът на обратимостта. Ние вече намерихме пътя от A до B, за който е нужно най-малко време; да тръгнем сега в обратна посока (като считаме, че скоростта на светлината не зависи от посоката). На най-малкото време отговаря същата траектория и следователно, ако светлината се разпространява по някакъв път в една посока, тя ще се движи по същия път и в обратна посока.

Друг интересен пример. На пътя на светлината под някакъв ъгъл е поставена четиристенна призма от стъкло с успоредни стени. Светлината се движи от A към B и като среща на пътя си призмата (фиг. 26.6), се отклонява, при което дължината на пътя в призмата се скъсява за сметка на изменението на наклона на траекторията, а пътят във въздуха малко се удължава. Участъците от траекторията вън от призмата се оказват успоредни, защото ъглите на влизане и излизане от призмата са еднакви.



Фиг. 26.6. Светлинният лъч, излизащ от прозрачната пластинка, е успореден на падащия лъч

Третото интересно явление се състои в това, че когато гледаме залязващото слънце, то всъщност се намира вече по-ниско от линията на хоризонта. На нас *ни се струва*, че слънцето е още над хоризонта, а фактически то вече е залязло (фиг. 26.7). Работата тук е в следното. Земната атмосфера горе е разредена, а в долните слоеве е по-плътна. Светлината се разпространява във въздуха по-бавно, отколкото във вакуум и затова слънчевите лъчи ще достигнат до някоя точка зад хоризонта по-бързо, ако се движат не по права линия, а по траектория с по-стръмен наклон в плътните слоеве на атмосферата, съкращавайки по този начин своя път в тези слоеве.

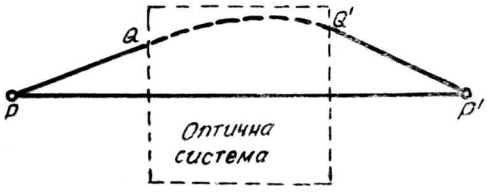


Фиг. 26.7. На хоризонта Слънцето изглежда с 1/2 от градуса по-горе, отколкото в действителност

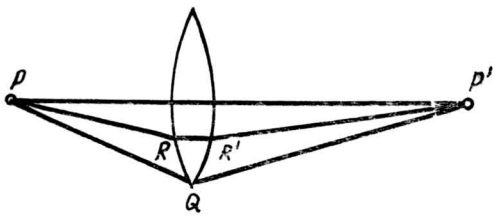
Друг пример от същия род е миражът, който често наблюда-



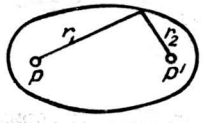
Фиг. 26.8. Мираж



Фиг. 26.9. Оптичен „черен сандък"



Фиг. 26.10. Фокусираща оптична система



Фиг. 26.11. Елиптично огледало

ват пътешествениците по нажежените от слънцето пътища. Те виждат на пътя „вода", а когато стигнат дотам, наоколо всичко се оказва сухо както в пустинята. Същността на явлението е в следното: Това, което ние виждаме в този случай, е „отразената" от пътя светлина. На фиг. 26.8 е показано как падащият върху пътя светлинен лъч попада в очите ни. Защо? Над самия път въздухът е силно нажежен, а в горните слоеве е по-хладен. Горещият въздух, разширявайки се, става по-рядък, затова и скоростта на светлината в него е по-голяма, отколкото в студения въздух. С други думи, светлината минава по-бързо през топлите слоеве, отколкото през студените. Затова светлината се движи не по права, а по траекторията с най-малко време, завивайки към топлите слоеве, за да съкрати времето; по тези причини светлината се движи по крива линия.

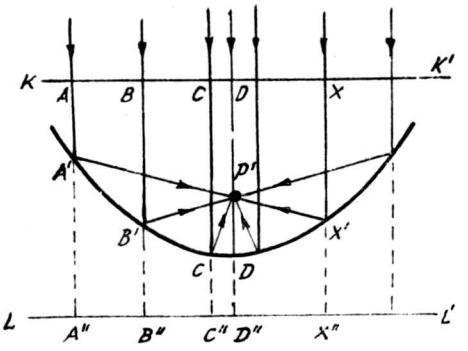
Още един пример. Да си представим такава ситуация, когато всичката светлина, излъчвана от точка P, се събира обратно в друга точка P' (фиг. 26.9). Разбира се, това означава, че светлината може да попадне от P в P' по права линия. Това е правилно. Но как да направим така, че светлината, движеща се от P към Q, също да попадне в P'? Ние искаме да съберем всичката светлина отново в една точка, която се нарича *фокус*. Как да се направи това? Тъй като светлината винаги избира пътя с най-малко време, съвсем сигурно е, че тя няма да тръгне по други, предложени от нас, пътища. Единственият начин да направим цяла редица близколежащи траектории, приемливи за светлината, е да се построят така, че за всичките времето за преминаване да е точно еднакво. В противен случай светлината ще тръгне по траекторията, изискваща минимално време. Затова задачата за построяване на фокусираща система се свежда просто към създаване на устройство, в което светлината изисква по всички пътища еднакво време.

Да се създаде такова устройство е просто. Да вземем парче стъкло, в което светлината се движи по-бавно, отколкото във въздуха (фиг. 26.10). Да проследим пътя на светлинния лъч, преминаващ във въздуха по линията PQP. Този път е по-дълъг, отколкото пътя направо от P към P' и несъмнено отнема повече време. Но ако вземем парче стъкло с нужната дебелина (по-късно ще изчислим какво именно), пътят в него ще компенсира допълнителното време, необходимо на лъча при отклонението по траекторията PQP! При тези условия можем да направим така, че времето, което е необходимо на светлината за пътя по правата, да съвпада с времето, необходимо за пътя по PQP'. Точно така, ако вземем частично отклонен лъч $PRR'P'$ (по-къс от PQP'), ще се наложи да компенсираме вече не толкова много време както за праволинейната траектория, но все пак някаква част от време ще трябва да компенсираме. Като резултат ще получим форма на парчето стъкло като изобразената на фиг. 26.10. При такава форма всичката светлина от точката P ще попадне в P'. Всичко това на нас ни е отдавна известно и такова устройство се нарича събирателна леща. В следващата глава ще пресметнем каква трябва да бъде формата на лещата, за да се получи идеална фокусировка.

Накрая последен пример. Да предположим, че ни е нужно така да разположим огледалото, че светлината от точка P винаги да достига точка P' (фиг. 26.11). По всички пътища светлината трябва да се отрази от огледалото и времето за всички пътища трябва да бъде еднакво. В дадения случай светлината се движи само във въздуха, така че времето за преминаване е пропорционално на дължината на пътя. Затова изискването да са равни времената се свежда към изискването да са равни пълните дължини на пътищата. Следователно сумата на разстоянията r_1 и r_2 трябва да остава постоянна. *Елипсата* притежава тъкмо такова свойство — сумата от разстоянията на коя да е точка върху нейната крива по две фиксирани точки е постоянна; затова светлината, отразена от огледало с такава форма, непременно ще попадне от единия фокус в другия.

Този принцип на фокусировка служи за наблюдаване на свет-

лината от звездите. При построяването на 200-дюймовия телескоп в обсерваторията Паломар била използувана следната идея. Въобразете си звезда, отдалечена от нас на милиарди километри; ние искаме да съберем всичката излъчвана от нея светлина във фокус. Разбира се, ние не можем да начертаем пътя на лъчите до звездата, обаче все пак трябва да проверим доколко времената за различните траектории са равни. Ние естествено знаем, че ако много различни лъчи са достигнали плоскостта KK, перпендикулярна на направлението на лъчите, времената за всички тези лъчи ще бъдат равни (фиг. 26.12). После лъчите трябва да се отразят от огледалото и за разни промеждутъци от време да попаднат във фокуса P. Това означава, че ние трябва да намерим такава крива, за която сумата $XX'+X'P'$ да бъде постоянна независимо от избора на точката X. Това най-лесно може да стане, като продължим отсечката XX' до равнината LL'. Да направим сега така, че да са изпълнени съотношенията $A'A''=A'P'$, $B'B''=B'P'$, $C'C''=C'P''$ и т. н.; така получаваме нужната крива, защото сумата от дължините $A'A+A'P'=AA'+A'A''$ ще бъде постоянна за всички точки върху кривата. Значи нашата крива е геометрично място на точки, които са равно отдалечени от една права и някоя дадена точка. Такава крива се нарича *парабола;* огледалото на телескопа било направено именно във формата на парабола.



Фиг. 26.12. Параболично огледало

Приведените примери илюстрират в общи черти принципа на устройството на оптичните системи. Точните криви могат да се пресметнат, като се използува правилото за равенство на времената за всички пътища, водещи във фокуса, и като съблюдаваме щото времето за преминаване на всички съседни пътища да е по-голямо.

В следващата глава ние пак ще се върнем към фокусиращите оптични системи, а сега да обсъдим по-нататъшното развитие на теорията. Когато се предлага нов физичен принцип, такъв като принципа на най-малкото време, нашата първа естествена реакция биха могли да бъдат думите: „Всичко това е много хубаво, възхитително, но въпросът се заключава в това, помага ли то въобще за по-доброто разбиране на физиката?“ На този въпрос може да се отговори: „Да. Вижте колко нови факти ние сега разбрахме!“ А някой ще възрази: „Е, че огледалата на мене и така ми са ясни. На мене ми трябва такава крива, че всяка допирателна към нея равнина да образува равни ъгли с двата светлинни лъча. Аз мога да направя изчисление и за лещата, защото всеки падащ върху нея лъч се отклонява на ъгъл, който се дава от закона на Снелиус.“ Тук съдържанието на принципа на най-малкото време очебийно съвпада със закона за равенството на ъглите при отражение и пропорционалността на синусите на ъглите при пречупване. Но може би тогава това е философски въпрос или пък въпросът е само в това, кой път е по-красив! Може да се приведат аргументи в полза на двете гледни точки.

Обаче критерият за важността на всеки принцип се състои в това, предсказва ли той нещо ново.

Лесно е да се покаже, че принципът на Ферма предсказва редица нови факти. Преди всичко да предположим, че имаме три среди — стъкло, вода и въздух. Ние наблюдаваме явлението пречупване и измерваме показателя n при преминаване от една среда в друга. Да означим с $n_{1,2}$ показателя на пречупване за прехода от въздуха (1) във водата (2), а с $n_{1,3}$ — за прехода от въздуха (1) в стъклото (3). Като измерим пречупването в системата вода-стъкло, ще намерим още един показател на пречупване и ще го наречем $n_{2,3}$. Нямаме никакви предварителни основания да смятаме, че $n_{1,2}$, $n_{1,3}$ и $n_{2,3}$ са свързани помежду си. Ако изхождаме обаче от принципа на най-малкото време, такава връзка можем да установим. Показателят $n_{1,2}$ е отношение на две величини — на скоростта на светлината във въздуха към скоростта на светлината във водата; показателят $n_{1,3}$ е отношение на скоростта във въздуха към скоростта в стъклото, а $n_{2,3}$ отношение на скоростта във водата към скоростта в стъклото. Затова, като съкратим скоростта на светлината във въздуха, ще получим

$$n_{2,3}=\frac{v_2}{v_3}=\frac{v_1/v_3}{v_1/v_2}=\frac{n_{1,3}}{n_{1,2}}\,. \qquad (26.5)$$

С други думи, ние предсказваме, че показателят на пречупване за прехода от едно вещество в друго може да се получи от показателите на пречупване на всяко вещество спрямо някоя среда например въздух или вакуум. Така, като измерим скоростта на светлината във всички среди, ние образуваме едно число за всяка среда — показателят на пречупване за прехода от вакуума в средата — и го означаваме с n_i например n_i за въздуха е отношение на скоростта във въздуха към скоростта във вакуума и т. н.), след което лесно може да се напише нужната формула. Показателят на пречупване за две какви да са вещества i и j е равен на

$$n_{ij}=\frac{v_i}{v_j}=\frac{n_j}{n_i}\,. \qquad (26.6)$$

Използувайки само закона на Снелиус, ние не можем да предскажем подобно съотношение[1]. Но такава връзка съществува. Съотношението (26.5) е известно отдавна и е послужило като силен аргумент в полза на принципа на най-малкото време.

Друго предсказване на принципа на най-малкото време е това, че скоростта на светлината във водата *при измерване* трябва да се окаже по-малка от скоростта във въздуха. Това предсказване вече е от съвсем друг род. То е много по-дълбоко, защото носи теоретичен характер и съвсем не е свързано с наблюденията, от които Ферма е извел принципа на най-малкото време (досега ние имахме работа само *с ъгли*). Както се оказало, скоростта на светлината във водата *действително* е по-малка от скоростта ѝ във въздуха и точно с толкова, че да се получи правилен показател на пречупване.

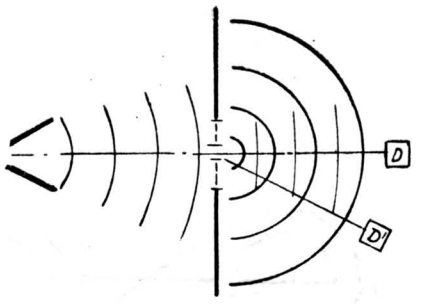
5. По-точна формулировка на принципа на Ферма

Дотук фактически ние използувахме неправилна формулировка на принципа на най-малкото време. Сега ще го формулираме точно. Ние *неправилно* го наричахме принцип на най-малкото време и за удобство прилагахме неправилната му трактовка. В този параграф ще изясним точното съдържание на този принцип. Нека ни е дадено едно огледало. То е показано на фиг. 26.3. Откъде *знае* светлината, че трябва да се движи към огледалото? Очевидно, че *най-малко* време изисква пътят AB. Но някой може да каже: „Понякога тъкмо този път изисква най-много време.“ Но това е неправилно! Пътят по кривата сигурно ще отнеме повече време. Точната формулировка на принципа е следната: лъчът, който преминава по траекторията, има това свойство, че всяко малко изменение на пътя (да кажем с 1%), на който се намира точката на падането на лъча върху огледалото или на формата на кривата, или някакво друго изменение, *не води* до изменения от първи порядък на времето за преминаване; стават изменения на времето само от втори порядък. С други думи, според този принцип светлината избира един от множеството близколежащи пътища, които изискват почти *еднакво* време за преминаване.

С принципа на най-малкото време е свързана още една трудност, която никак не могат да усвоят много от тези, които не обичат теории от такъв род. Теорията на Снелиус помага лесно „да разберем“ поведението на светлината. Светлината се разпространява, среща пред себе си повърхност и се отклонява, защото на повърхността с нея нещо става. Лесно е да разбереш идеята за причинността, която се проявява в това, че светлината се движи от една точка към друга, а след това към следващата. Но принципът на най-малкото време е философски принцип,

[1] Такова можем да получим, ако допълнително предположим, че при добавяне на слой от една среда към повърхността на друга ъгълът на пречупване на изхода от последната среда не се изменя.

който съвсем иначе обяснява причината на явленията в природата. Вместо причинната обусловеност, когато от едно наше действие произтича друго и т. н., този принцип твърди следното: в дадената ситуация светлината избира пътя с най-малко или екстремално време. Но как се удава на светлината да избира своя път? „Подушва“ ли тя съседните пътища и ги сравнява после един с друг? В известен смисъл така и става. Тази способност на светлината не може да се разбере в рамките на геометричната оптика, тъй като е свързана с понятието дължина на вълната. Дължината на вълната е, грубо казано, оня участък пред пътя, който светлината може да „почувствува“ и да сравни със съседните пътища. Да се демонстрира опитно този факт е трудно, тъй като дължината на светлинните вълни е много малка. Но радиовълните с дължина на вълната например 3 cm „виждат“ много по-далече. Да предположим, че имаме източник на радиовълни, детектор и екран с процеп, както е показано на фиг. 26.13; при тези условия лъчите ще преминават от S към D, тъй като тази траектория е праволинейна; даже да стесним процепа, лъчите, все едно, ще преминат. Но ако отместим детектора в точка D', при широк процеп вълните няма да дойдат от S в D', защото те ще сравнят близколежащите пътища и ще кажат: „Не, приятелю, всички тези пътища изискват време.“ От друга страна, ако оставим много тесен процеп и по този начин попречим на вълните да избират пътя, ще се окаже, че много пътища са годни (изискват еднакво време) и вълните ще тръгнат по тях. Ако процепът е тесен, в точка D' ще попадне много повече лъчение, отколкото през широкия процеп.

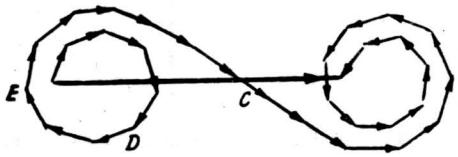


Фиг. 26.13. Преминаване на радиовълните през тесен процеп

Също такъв опит е възможен и със светлината, но да се направи в голям мащаб е трудно. Този ефект обаче може да се наблюдава в следните прости условия. Вземете малък и ярък източник на светлина, например уличен фенер някъде в края на улицата или отражението на слънцето от колелото на автомобила. Поставете пред очите си два пръста така, че да се образува тесен процеп и постепенно сближавайте пръстите, докато процепът не изчезне. Вие ще видите, че светлината, която отначало изглеждаше като малка точица, постепенно ще се размива и даже ще се разтегне в дълга линия. Така става, защото между пръстите е оставен съвсем тесен процеп и светлината не се разпространява както обикновено по права линия, а се разклонява под някакъв ъгъл и попада в окото от различни посоки. Ако вие бъдете достатъчно внимателни, ще забележите още странични максимуми и оцветяване по краищата. Освен това самият образ ще бъде оцветен. Всичко това ще бъде обяснено, когато му дойде времето, а сега този опит (него може лесно да направите) просто демонстрира, че светлината не винаги се разпространява по права.

6. Квантов механизъм

Като заключение ще дадем много груба картина на онова, което става в действителност, как протича целият процес на разпространение на светлината от квантовомеханична гледна точка, която сега се счита за най-правилна (разбира се, нашето описание ще носи само качествен характер). Изследвайки светлината по пътя от A към B (вж. фиг. 26.3), можем да открием, че тя съвсем не представлява вълни. Оказва се, че светлинните лъчи се състоят от фотони, които можем да зарегистрираме реално с помощта на фотонен брояч; те го карат да щрака. Яркостта на светлината е пропорционална на средния брой фотони, които прелитат за 1 s, а нас ни интересува *вероятността* за попадане на фотона от A в B при отражение от огледалото. *Правилото* за пресмятане на тази вероятност е твърде необикновено. Нека изберем някой път и да намерим времето за този път; после да съставим комплексно число или да нарисуваме малък комплексен вектор $\rho e^{i\theta}$, *където ъгълът* θ *е пропорционален на времето.* Броят на завъртанията на вектора в секунда — това е честотата на свет-



Фиг. 26.14. Сумиране на амплитудите на вероятностите за всевъзможни съседни траектории

лината. Да вземем сега друг път, който има друго време; тогава съответствуващият му вектор ще се завърти на ъгъл, различен от първия (напомняме, че ъгълът винаги е пропорционален на времето). Същото правим за *всички* възможни пътища и събираме векторите за всеки от тях; тогава квадратът на дължината на резултатния вектор ще определи вероятността на преминаването на фотона от началната точка в крайната.

Сега ще покажем, че оттук следва принципът на най-малкото време за огледалото. Вземаме всички възможни пътища *ADB*, *AEB*, *ACB* и т. н., които са изобразени на фиг. 26.3. Нека *ADB* има малък дял (в резултатния вектор — б. пр.), а съседният път *AEB* отнема вече друго време и затова неговият ъгъл θ е друг. Нека точка *C* да съответствува на пътя с най-малко време — тогава при неголямо изменение на пътя времето не се мени. Поточно отначало времето се е изменяло забележимо, но с приближаване към точката *C* се мени все по-малко и по-малко (фиг. 26.14). По този начин векторите, които ние събираме, преминават покрай *C* почти под един и същ ъгъл, а след това времената започват да растат, векторите се завъртат и т. н. Като резултат се получава един възел от вектори. Пълната вероятност е разстоянието от единия край до другия, повдигнато на квадрат. *Почти цялата сумарна вероятност се дава от областта, където векторите вървят в една посока* (с една и съща фаза). Дяловете от пътищата с *различни* времена взаимно се съкращават, защото векторите са насочени в различни посоки. Ето защо, ако затворим края на огледалото, то ще отразява почти точно така, както и по-рано, тъй като в приведената по-горе процедура това съответствува на отхвърлянето на векторите от спиралните краища на диаграмата, а за светлината това почти нищо не ще измени. Такова е съответствието между съвременната теория на фотоните с нейното понятие за вероятност на преминаването, зависещо от сумирането на вектори и принципа на най-малкото време.

27

Геометрична оптика

1. Увод

В тази глава ще разгледаме някои приложения на по-рано изложени,те принципи към устройството на най-простите оптични системи използувайки приближението на *геометричната оптика.* При конструирането на много оптични прибори това приближение се оказва особено полезно. Геометричната оптика е много проста и същевременно много сложна. С това искам да кажа, че даже повърхностното изучаване на геометричната оптика в училището позволява с помощта на твърде прости правила да се съставят груби схеми на приборите; ако пък искаме да вземем под внимание и изкривяванията в лещите и други тънкости, задачата става твърде сложна даже за студенти от висшия курс. Ако на някого наистина му се наложи да прави точен проект на леща, като се съобразява с аберацията, по-добре е да се обърне към специалните ръководства или да проследи просто пътя на лъчите през разните повърхнини (как се прави това, е казано в книгите) и да определи по закона за пречупването посоката на излизащите от лещата лъчи и си изясни доколко е добър образът, който те дават. Считало се е, че това е много дълга процедура, но сега, когато ние сме въоръжени с изчислителни машини, този начин е достатъчно добър. Като се формулира задачата математически, лесно е да се пресметнат пътищата на всички лъчи. С една дума, тази работа е проста и не изисква нови принципи. Освен това законите и на елементарната, и на специалната оптика фактически са неприложими в други области, затова нямаше да ни бъде необходимо да изучаваме твърде подробно предмета, ако не беше едно важно изключение.

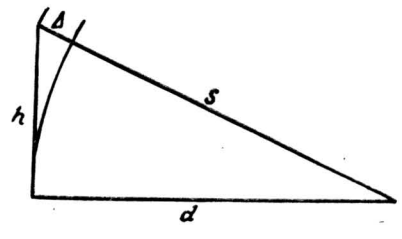
Оказало се, че най-съвременната и абстрактна теория на геометричната оптика, разработена от Хамилтон, има много важни приложения в механиката, при това значението ѝ в механиката е даже по-голямо, отколкото в оптиката. Затова нека с нея да се занимава курсът по аналитична механика. А засега, разбирайки, че геометричната оптика е интересна сама по себе си, ние ще преминем към изучаването на елементарните свойства на оптичните системи на основата на принципите, изложени в предната глава.

По-нататък ще ни потрябва една геометрична формула: нека е даден триъгълник, чиято височина h е малка, а основата d—голяма; тогава хипотенузата s (фиг. 27.1) е по-голяма от основата (на нас ни е нужно да знаем това, за да изчислим разликата във времената по два различни пътя на светлината). Колко е по-голяма хипотенузата от основата? Можем да намерим разликата $\Delta = s - d$ по няколко начина. Например $s^2 - d^2 = h^2$ или $(s-d)(s+d) = h^2$. Но $s - d = \Delta$, $s + d \sim 2s$. По такъв начин

$$\Delta \sim \frac{h^2}{2s}. \qquad (27.1)$$

Това е всичко, което ни е нужно да знаем от геометрията за изучаване на образите, получавани с помощта на криви повърхнини

1. Въведение
2. Фокусно разстояние на сферична повърхност
3. Фокусно разстояние на леща
4. Увеличение
5. Сложни лещи
6. Аберация
7. Разделителна способност



Фиг. 27.1. Триъгълник, чиято височина h е по-малка от основата d, а хипотенузата s е по-голяма от основата

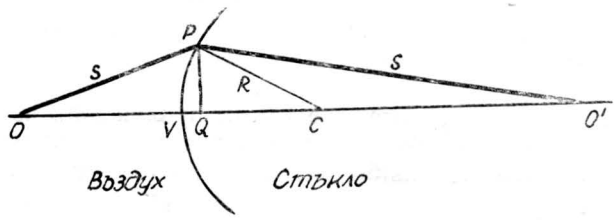
2. Фокусно разстояние на сферична повърхнина

Да разгледаме отначало най-прост пример на пречупваща повърхнина, която разделя две среди с различни показатели на пречупване (фиг. 27.2). Нека читателят да разгледа самостоятелно случая с произволни показатели; за нас е важно да разкажем за

идеята, а задачата е достатъчно проста и може да се реши във всеки частен случай.

И тъй нека отляво скоростта на светлината да е равна на 1, а отдясно на $1/n$, където n е показателят на пречупване. Светлината в стъклото се движи n пъти по-бавно.

Сега нека си представим някоя точка O на разстояние s от лицевата повърхност на стъклото, и друга точка O', на разстояние



Фиг. 27.2. Фокусировка на пречупваща повърхност

s' вътре в стъклото, и да се опитаме да изберем кривата повърхност така, че всеки лъч, излязъл от O и попаднал на повърхнината в P, да минава през точка O'. За целта е нужно да придадем такава форма на повърхнината, че сумата от времето за преминаване на светлината по пътя от O към P (т. е. разстоянието OP, разделено на скоростта на светлината, равна на единица) плюс $nO'P$, т. е. времето за пътя от P до O' да е постоянна величина и да не зависи от положението на точката P. Това условие ни дава уравнението за определяне на повърхнината. Като резултат се получава твърде сложна повърхнина от четвърта степен. (Читателят може да я намери за собствено удоволствие с помощта на аналитичната геометрия). По-лесно е да се разгледа частният случай $s \to \infty$, когато се получава крива от втора степен и повърхнината може по-лесно да се определи. Интересно е да се сравни тази картина с кривата на фокусиращото огледало (когато светлината идва от безкрайност), която, както вие си спомняте, се оказа парабола.

И тъй не е лесно да се направи нужната повърхнина; за да се фокусира светлината от една точка в друга, е нужна доста сложна повърхнина. Практически даже не се създават такива сложни повърхнини, а се използуват компромисни решения. Ние няма да събираме *всички* лъчи във фокуса, а ще съберем само лъчите, които са достатъчно близки до оста OO'. Щом като идеалната повърхнина е тъй сложна, да вземем вместо нея сферична повърхнина, която има нужната кривина около самата ос и нека далечните лъчи да се отклоняват от оста, ако така им се иска. Сферата се изготвя много по-лесно от другите повърхнини, затова да вземем сфера и да разгледаме поведението на лъчите, падащи върху сферичната повърхнина. Ще изискаме точна фокусировка само за онези лъчи, които минават близо до оста. Понякога такива лъчи ги наричат *параксиални*, а нашата задача е да се намери фокусировката на параксиалните лъчи. По-късно ще обсъдим грешката, която е свързана с отклонението на лъчите от оста.

И така, смятайки, че P е близко до оста, да спуснем перпендикуляр PQ с дължина h. Ако нашата повърхнина беше равнина, преминаваща през P, времето, загубено за преминаване от O до P, би превишавало времето за пътя от O до Q, а времето за пътя от P до O' би превишавало времето от Q до O'. Повърхността на стъклото трябва да бъде крива, защото само в този случай излишекът от време се компенсира от задържането при преминаване от V до Q. Излишекът от време за пътя OP е $\frac{h^2}{2s}$, а излишекът от време за отрязъка $O'P$ е $\frac{nh^2}{2s'}$. Това излишно време, което трябва да се компенсира от времето за пътя VQ, се събира по пътя в средата, а не във вакуума. С други думи, времето за пътя VQ е n пъти по-голямо от съответното време

във вакуума и затова излишното време за този отрязък е $(n-1)\,VQ$. А каква е дължината на VQ? Ако C е център на сфера с радиус R, то с помощта на вече известната ни формула намираме, че VQ е $\frac{h^2}{2P}$. В резултат получаваме закона, който свързва дължините s и s' и определя радиуса на кривината R на търсената повърхнина

$$\frac{h^2}{2s}+\frac{nh^2}{2s'}=(n-1)\frac{h^2}{2R}, \tag{27.2}$$

или

$$\frac{1}{s}+\frac{n}{s'}=\frac{n-1}{R} \tag{27.3}$$

Ако ние искаме да фокусираме светлината от точка O в точка O', тази формула позволява да се намери исканият радиус на кривината на повърхнината.

Интересно е, че същата леща със същия радиус на кривина R ще фокусира и на други разстояния, т. е. тя е фокусираща за всяка двойка разстояния, за които сумата от реципрочната стойност на едното разстояние и реципрочната стойност на другото, умножена по n, е постоянно число. По такъв начин дадената леща (само за параксиалните лъчи) се явява фокусираща не само за точките O и O', но и за безкрайно число двойки от точки, ако тия двойки удовлетворяват съотношението $\frac{1}{s}+\frac{n}{s'}=$ константа, характеризираща дадената леща.

Интерес представлява частният случай, когато $s\to\infty$. От формулата се вижда, че при увеличаване на едното разстояние другото намалява. С други думи, когато точката O се отдалечава, точката O' се приближава и обратно. Когато точката O отива към безкрайност, точката O' се движи в стъклото до някое разстояние, което се нарича *фокусно разстояние* f'. Ако върху лещата пада успореден сноп лъчи, той ще се събере в лещата на разстояние f'. Въпросът може да се постави и иначе. (Да припомним правилото за обратимостта: ако светлината преминава от O към O', тя, разбира се, може да се движи и в обратна посока, от O' към O.) Може да възникне въпросът къде ще се съберат лъчите във фокус, ако източникът се намира вътре в стъклото. В частност, ако източникът в стъклото се намира в безкрайност (същата задача както по-рано), къде ще бъде фокусът вън от лещата? Това разстояние се означава с f. Разбира се, може да се каже и другояче. Ако източникът е разположен на разстояние f, лъчите, като преминат през повърхността на лещата, ще излязат паралелни. Лесно е да се определят f и f':

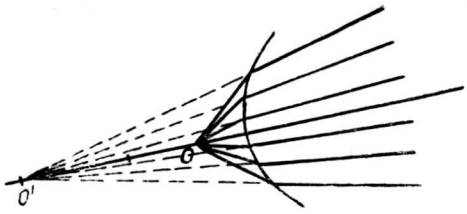
$$\frac{n}{f'}=\frac{n-1}{R},\ \text{или}\ f'=\frac{Rn}{n-1} \tag{27.4}$$

$$\frac{1}{f}=\frac{n-1}{R},\ \text{или}\ f=\frac{R}{n-1} \tag{27.5}$$

Ще отбележим един интересен факт: ако разделим всяко фокусно разстояние на съответния показател на пречупване, ще получим един и същ резултат. Всъщност това е обща теорема. Тя е вярна за всяка сложна система от лещи, затова си струва да се запомни. Ние не сме доказали тази теорема в общ вид, а само отбелязахме приложимостта ѝ за една повърхнина, оказва се обаче, че въобще двете фокусни разстояния на някои системи са свързани по подобен начин. Понякога изразът (27.3) се записва в следния вид:

$$\frac{1}{s}+\frac{n}{s'}=\frac{1}{f}. \tag{27.6}$$

Тази форма е по-удобна от (27.3), тъй като е по-просто да се измери f, отколкото кривината и показателят на пречупване на лещата. Ако на нас не ни е нужно сами да конструираме леща или да изучаваме подробно целия процес, а е достатъчно да вземем лещата от рафта, то ще ни интересува само величината f, а не n или R.



Фиг. 27.3. Мним образ

Любопитна ситуация възниква, когато s става по-малко от f. Какво става тогава? При $s<f$ обратната величина $\frac{1}{s}$ е по-голяма от $\frac{1}{f}$ и затова s' е отрицателна. От формулата следва, че светлината се фокусира само при отрицателни стойности на s' — разбирайте го както си искате. Но това означава нещо твърде интересно и определено. Тази формула остава полезна и при отрицателни стойности. Какво означава тя, е ясно от фиг. 27.3. Излизащите от точката O лъчи се пречупват от повърхността, но не се събират във фокуса, тъй като точката O е разположена много близко до повърхността и лъчите стават „повече от паралелни". Обаче те са разходящи, като че ли са излезли от някоя точка O, вън от лещата. Тази точка е привидният или, както още го наричат, *мним* (виртуален) образ. Образът O на фиг. 27.2 се нарича *действителен* образ. Действителни образи възникват, когато светлината действително преминава през дадена точка. Но ако ни се струва, че светлината излиза от някоя фиктивна точка, която не съвпада с истинския източник, именно тя е мнимият образ. Следователно за отрицателните s' точката O' се намира от другата страна на пречупващата повърхнина, така че всичко си е в ред.

Да разгледаме сега интересния случай, когато $R=\infty$; при тези условия $(1/s)+n/s')=0$. С други думи, $s'=-ns$, което означава, че ако от плътната среда се гледа някоя точка в разредената среда, тя ще изглежда n пъти по-далече. Ние можем да прочетем нашето уравнение и обратно: ако гледаме обект, който се намира в плътната среда зад плоска разделяща повърхнина, той ще ни се струва по-близко разположен, отколкото е в действителност (фиг. 27. 4.) Когато гледаме отгоре дъното на плувния басейн, той ни се струва по-плитък 3/4 пъти, отколкото е в действителност; тази цифра е обратната величина на показателя на прачупване на водата.

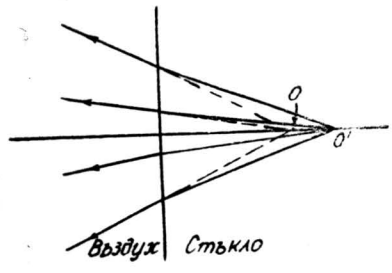
Сега вече бихме могли да преминем към сферичните огледала. Но ако се вникне в смисъла на казаното дотук, този въпрос може да се разбере напълно самостоятелно. Затова нека читателят сам да изведе формулите за сферичното огледало. За целта е полезно да се вземат под внимание следните условия:

1. Разстоянието до обекта s е положително, ако точката O е разположена отляво на повърхнината.
2. Разстоянието до образа s' е положително, ако точката O е разположена отдясно на повърхнината.
3. Радиусът на кривина на повърхнината е положителен, ако центърът се намира от дясната ѝ страна.

Например на фиг. 27,2 s, s' и R са положителни; на фиг. 27 3 s и R са положителни, а s' е отрицателна. За вдлъбнатата повърхнина нашата формула (27.3) остава в сила, ако смятаме R за отрицателна величина.

Като се използуват приведените условия, може да се изведе съответната формула и за огледалото; в (27.3) полагаме $n=-1$ (така, като че ли средата зад огледалото има показател на пречупване $n=-1$) и тогава получаваме правилен резултат.

Ние изведохме формулата (27.3) по прост и елегантен начин, като изхождахме от принципа на най-малкото време; същата формула, разбира се, може да се получи и с помощта на закона на Снелиус, ако вземем предвид, че ъглите са малки и заменим синусите със самите ъгли.

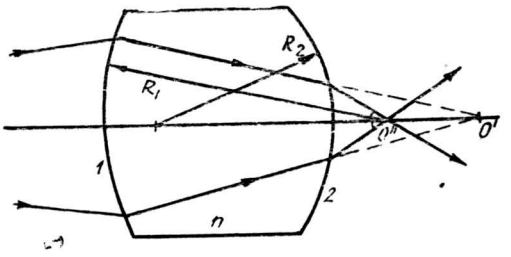


Фиг. 27.4. Плоската разделяща повърхнина изобразява точката O' в O

3. Фокусно разстояние на леща

Сега ще разгледаме един друг случай, който има голямо практическо значение. Повечето лещи, които ние използуваме, имат не една, а две разделящи повърхнини. До какво довежда това? Нека ни е дадена стъклена леща, ограничена от две повърхнини с еднаква кривина (фиг. 27.5). Да разгледаме задачата за фо-

кусировка на светлинен сноп от точка O в точка O'. Как да направим това? Използуваме формулата (27.3) най-напред за първата повърхнина, като забравяме за втората. Това ще ни позволи да установим, че изпусканата в точка O светлина ще изглежда сходяща или разходяща (в зависимост от знака на фокусното разстояние) от някоя друга точка, да речем O'. Да решим сега втората част на задачата. Имаме втора повърхнина, разделяща стъклото и въздуха, а лъчите се движат към нея, събирайки се в точката O'. Къде обаче ще се съберат те в действителност? Ще се възползуваме отново от същата формула. Намираме, че те ще се съберат в точката O''. По същия начин може да се премине, ако е нужно през 75 повърхнини, прилагайки последователно една и съща формула и преминавайки от една повърхнина към друга.



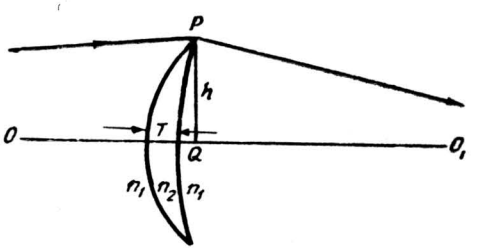
Фиг. 27.5. Построяване на образа, който дава двустранната леща

Има още по-сложни формули, които биха могли да ни помогнат в ония редки случаи в живота, когато по някаква причина ни се налага да проследим пътя на светлината през пет повърхности. Ако обаче това е чак толкова нужно, то по-добре последователно да разгледаме петте повърхнини, отколкото да запомняме куп формули, още повече, че може въобще да не ни се наложи да се занимаваме с повърхнините.

За всеки случай принципът на пресмятането е такъв: при преминаване през една повърхност ние намираме ново положение, нова фокусна точка и я разглеждаме като източник за следващата повърхност и т. н. Често в системите се срещат няколко вида стъкло с различни показатели n_1, n_2, ... ,; затова за конкретното решаване на задачата трябва да обобщим формулата (27.3) за случая, когато имаме два различни показателя n_1 и n_2. Лесно се показва, че обобщеното уравнение (27.3) има следния вид:

$$\frac{n_1}{s}+\frac{n_2}{s'}=\frac{n_2-n_1}{R}. \tag{27.7}$$

Особено е прост случаят, когато повърхнините са близко една до друга и грешките поради крайната дебелина могат да се пренебрегнат. Да разгледаме лещата, която е изобразена на фиг. 27.6, и да зададем следния въпрос: какво условие трябва да удовлетворява лещата, за да фокусира снопа от O в O'? Нека светлината да преминава точно през края на лещата в точката P. Тогава (пренебрегвайки временно дебелината T на лещата с показател n_2) излишъкът от време за пътя OPO' ще бъде равен на $\left(\frac{n_1h^2}{2s}+\frac{n_1h^2}{2s'}\right)$. За да изравним времената за пътя OPO' и за праволинейния път, лещата трябва да има в средата такава дебелина T, която да задържа светлината нужното време. Затова дебелината на лещата трябва да удовлетворява отношението



Фиг. 27.6. Тънка леща с два положителни радиуса на кривина

$$n_1\frac{h^2}{2s}+n_1\frac{h^2}{2s'}=\frac{n_2-n_1}{T}. \tag{27.8}$$

Можем да изразим T още чрез радиусите на двете повърхнини R_1 и R_2. Като вземем предвид условието 3 (приведено на стр. 300), намираме за случая $R_1<R_2$ (изпъкнала леща)

$$T=\frac{h^2}{2R_1}-\frac{h^2}{2R_2}. \tag{27.9}$$

Оттук получаваме окончателно

$$\frac{n_1}{s}+\frac{n_2}{s'}=(n_2-n_1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right). \tag{27.10}$$

Ще отбележим, че както по-горе, когато едната точка се намира в безкрайност, другата ще бъде разположена на разстояние, което ние наричаме фокусно разстояние f. Величината f се определя от равенството

$$\frac{1}{f}=(n-1).\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right), \tag{27.11}$$

където $n=n_2/n_1$.

В противоположния случай, когато s клони към безкрайност, s' се оказва на фокусно разстояние f'. За нашата леща двете фокусни разстояния съвпадат. (Тук ние имаме още един частен случай на общото правило, според което отношението на фокусните растояния е равно на отношението на показателите на пречупване на тези две среди, където лъчите се фокусират. За нашата оптична система двата показателя съвпадат и затова фокусните разстояния са равни.)

Да забравим временно формулата за фокусното разстояние. Ако вие сте купили леща с неизвестни радиуси на кривина и някакъв показател на пречупване, фокусното разстояние може лесно да се измери, като съберете във фокуса лъчите, идващи от далечен източник. Като знаем f, по-удобно е да запишем нашата формула направо в термините на фокусното разстояние:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}. \tag{27.12}$$

Нека да видим сега как работи тази формула и какво се получава от нея в различните случаи. Първо, ако едното от разстоянията е безкрайно, другото е равно на f. Това условие означава, че успореден сноп светлина се фокусира на разстояние f и може да се използува на практика за *определяне* на f. Интересно е също, че двете точки се движат в една посока. Ако едната отива надясно, и втората се движи в същата посока. И накрая, ако s и s' са равни, тогава всяко от тях е равно на $2f$.

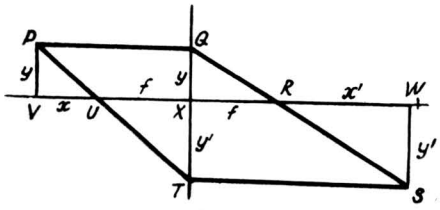
4. Увеличение

Дотука разглеждахме процеса на фокусировка само за точки, лежащи на оста. Сега да построим образ на обекти, които са малко отместени встрани от оста; това ще ни помогне да разберем явлението *увеличение*. Ако с помощта на леща фокусираме светлината от малка нишка върху екран, ще видим образа на същата нишка, само че малко по-голяма или по-малка по размери от истинската. Оттука можем да заключим, че светлината от *всяка точка* на нишката попада във фокуса. За да разберем това по-добре, нека разгледаме лещата, която е изобразена схематично на фиг. 27.7. На нас ни е известно следното:

1. Всеки лъч, който е успореден на оста, се фокусира от другата страна на лещата в точка, наречена фокус и разположена на разстояние f от лещата.

2. Всеки лъч, който преминава през фокуса от едната страна на лещата, излиза от другата й страна успореден на оста.

С помощта на тези факти ще докажем формулата (27.12) по геометричен път. Нека обектът да се намира на разстояние x от фокуса и височината му да е y. Ние знаем, че лъчът PQ се отклонява и ще мине през фокуса R от другата страна на лещата. Ако светлината от P се фокусира от лещата, достатъчно е да определим пътя на още един лъч и тогава фокусът ще бъде в точката на пресичането им. Трябва само умело да се избира посоката на *втория* лъч. Да си спомним, че успоредният на оста лъч минава през фокуса и обратно: лъчът, който минава през фокуса, излиза успоредно на оста. Затова да прекараме лъча PT през U. (Вярно е, че фокусираните лъчи са много по-тънки от начертаните, но такива е трудно да се изобразят, затова оставяме нашата стара схема.) Тъй като U е фокус, прекарваме TS успоредно на XW. Пресечката s е търсената точка. Оттук получаваме нужната височина и правилното разстояние. Означаваме височината с y', а разстоянието до фокуса с x'. Сега можем да изведем формулата за лещата. От подобните триъгълници PVU и TXU намираме



Фиг. 27.7. Геометрично построение на образ от тънка леща

$$\frac{y'}{f}=\frac{y}{x}. \tag{27.13}$$

От триъгълниците SWR и QXR получаваме

$$\frac{y'}{x'}=\frac{y}{f}. \tag{27.14}$$

Като решим тези две равенства относно y'/y намираме

$$\frac{y'}{y}=\frac{x'}{f}=\frac{f}{x}. \tag{27.15}$$

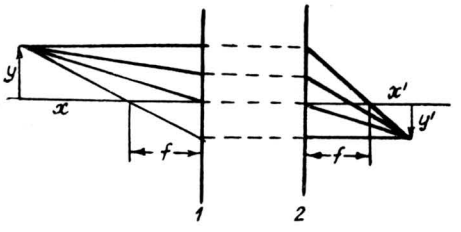
Равенството (27.15) е знаменитата формула за лещата; в нея се съдържа всичко, което ни е нужно да знаем за лещите; увеличението y'/y е изразено чрез разстоянието x' и фокусното разстояние f. Оттук възниква следното съотношение, свързващо x, x' и f

$$xx'=f^2. \tag{27.16}$$

То е много по-изящно от (27.12). Препоръчваме на читателя да докаже, че при $s=x+f$ и $s'=x'+f$ равенствата (27.12) и (27.16) съвпадат.

5. Сложни лещи

Ще изложим накратко без извеждане основните свойства на система от лещи. Как се изследва система от няколко лещи? Много просто. Започваме от някой обект и определяме образа, който дава първата леща, използувайки формулите (27.16), (27.12) или коя да е еквивалентна формула, или най-после, като изобразим всичко това графически. Така получаваме първия образ. После разглеждаме този образ като източник за следващата леща и намираме новия образ, който тя дава. Повтаряме същата процедура последователно за цялата система от лещи. Това е всичко. Принципно тук няма нищо ново и затова няма да се впускаме в подробности. Много интересен резултат се получава обаче, когато светлината влиза в системата от лещи и излиза от нея в една и съща среда, например въздух. Всяко оптично устройство — било то телескоп, или микроскоп с произволно количество лещи и огледала — притежава следното интересно свойство. Има две равнини, наречени главни равнини на системата (те са разположени често близо до външните повърхнини на първата и последната леща, която притежава следните свойства: 1. Влизащият от едната страна успореден светлинен сноп се събира от другата страна във фокус, който отстои от втората главна равнина на фокусно разстояние f (като че ли вместо система от лещи има тънка леща, която съвпада с втората главна равнина). 2. Влизащият от другата страна успореден светлинен сноп се събира във фокус на разстояние f от първата главна равнина, като че ли там се намира пак тънка леща (фиг. 27.8).



Фиг. 27.8. Главни равнин и на оптична система

От само себе си се разбира, че ако определим както по-рано разстояния x, x' и y, y', то формулата (27.16) за тънката леща ще бъде приложима и в този общ случай, само че фокусните разстояния трябва да се отчитат от главните равнини, а не от центъра на лещата. За тънката леща главните равнини съвпадат. Получава се така, като че ли сме взели тънка леща, разрязали сме я на две части и сме ги раздалечили, но в резултат на това нищо не се е изменило. Всеки влизащ лъч незабавно изскача от другата страна от втората равнина. Главните равнини и фокусните разстояния се намират или чрез пресмятане, или по опитен път; с това се изчерпва описанието на свойствата на оптичната система. Доста е интересно, че за голяма и сложна оптична система се получава такъв прост резултат.

6. Аберация

Докато още не сте започнали да се възхищавате от такова великолепно нещо като лещата, трябва да разкажа и за нейните сериозни недостатъци, които не можахме да забележим по-рано, тъй като се ограничихме само с параксиалните лъчи. Реалната леща има крайна дебелина и въобще притежава свойството аберация. Например лъчът, който е насочен по оста, непременно ще мине през фокуса. Близките до оста лъчи все още ще преминат през фокуса, но по-далечните ще започнат да се отклоняват от него; близките — по-малко, а крайният лъч — на голямо разстояние. В резултат се получава не точков образ, а размито петно. Този ефект се нарича сферична аберация, защото той възниква поради използуването на сферични повърхнини вместо повърхнини с правилна форма. За всяко дадено разстояние от обекта до лещата ефектът от аберацията може да се отстрани, като се измени формата на лещата или като се вземат няколко лещи така, че аберациите на отделните лещи взаимно да се унищожават.

Лещите страдат още от един недостатък: светлината с различни цветове има различни скорости, т. е. различни са показателите на пречупване в стъклото и затова фокусното разстояние за различните цветове е различно. Образът на бялото петно се получава оцветен, тъй като, когато във фокуса е червената светлина, синята се оказва извън него и обратно. Това явление се нарича хроматична аберация.

Има и други изкривявания. Ако обектът не се намира на оста, не може да се получи ясен фокус. Това най-лесно може да се провери, като наклоним нагласената на фокус леща така, че в нея да попадат лъчи под голям ъгъл към оста. Тогава образът силно се размива и може да не остане нито едно рязко фокусирано място. И така лещите страдат от редица изкривявания. Обикновено оптикът-конструктор се старае да ги отстранява, като съединява по няколко лещи, за да се компенсират изкривяванията на отделните лещи.

До каква степен може да се отстрани аберацията? Може ли да се създаде идеална оптична система? Нека допуснем, че сме съумели да построим оптична система, която фокусира светлината точно в една точка. Можем ли тогава да намерим изискванията (от гледна точка на принципа на Ферма), които нашата система трябва да удовлетворява? Системата винаги има отверстие с крайни размери, през което влиза светлината. За съвършената система времето за преминаване на всеки произволно отдалечен от оптичната ос лъч е еднакво. Но абсолютно съвършенство няма, затова да поставим въпроса: каква е разумната граница на съвпадане на всичките времена? Отговорът зависи от това, доколко съвършен образ искаме да получим. Нека предположим, че искаме той да бъде толкова съвършен, колкото това въобще е възможно. От пръв поглед изглежда, че и времената за преминаване на всички лъчи трябва да се изравняват с максимална точност. В действителност това не е така; съществува някаква граница, зад която всякакво уточняване е безсмислено, тъй като престава да е в сила приближението на геометричната оптика.

Да си спомним, че принципът на най-малкото време за разлика от закона за запазване на енергията и импулса не е точен принцип, а само някое *приближение.* Затова е интересно да се установи какви грешки са допустими в границите на точността на това приближение. *Отговор:* няма смисъл да изискваме равенство на времената за преминаване на лъчите (да речем в най-лошия случай на лъча по оста и най-отдалечения от нея) с точност, която превишава периода на трептенето на светлината. Светлината е трептелив процес с определена честота, която е свързана с дължината на вълната и ако ние сме достигнали точността, при която времената за преминаване на лъчите се отличават с величина, по-малка или равна на периода на трептенията, то по-нататъшното им изравняване е безполезно.

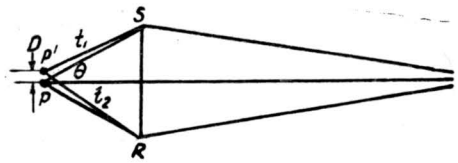
7. Разделителна способност

Още един интересен въпрос, който е много важен от техническа гледна точка: каква е *разделителната способност* на оптичните прибори? Когато създаваме микроскоп, ние искаме да видим целия обект, който се намира в полето на нашето зрение. Това например означава, че като гледаме бактерия, която отстрани има две петънца, ние искаме да различим двете петънца на увеличения образ. Може да се помисли, че за тази цел е нужно да се получи само голямо увеличение — нали винаги можем да добавим още лещи и да постигнем още по-голямо увеличение, а ако конструкторът е ловък, може да отстрани сферичната и хроматична аберации; като че ли няма причини да не увеличим желания образ до каквито и да са размери. Но границата на възможностите на микроскопа не е свързана с невъзможността да постигнем увеличение повече от 2000 пъти. Може да се построи система от лещи, увеличаваща 10 000 пъти, и все пак да не видим двете петънца, разположени толкова близко. Няма да ги видим поради ограничените възможности на геометричната оптика и неточността на принципа на най-малкото време.

Като сравняваме времето за преминаване на различните лъчи, можем по красив начин да изведем правилото, което определя разстоянието между две точки, при което образите на тези точки още могат да се различават. Нека се абстрахираме засега от аберациите и нека всичките лъчи от някоя точка P (фиг. 27.9) да достигат до образа T за едно и също време (това е невъзможно, тъй като системата е несъвършена, но това не се отнася към дадения въпрос). Да вземем още една близко разположена точка P' и да видим различават ли се техните образи. С други думи, можем ли ние да различим един от друг двата образа? Разбира се, според геометричната оптика трябва да има два образа, но това, което ние ще видим, може да се окаже твърде размито и ние да не разберем, че точките са две. Изискването втората точка да дава образ, различен от първия, се свежда към следното условие: времената за преминаване на двата крайни лъча $P'ST$ и $P'RT$ от точката P' до образа T на първата точка трябва да бъдат различни. Защо? Защото при еднакви времена светлината от P' би се фокусирала в T, т. е. образите биха съвпаднали. И тъй времената трябва да са различни. Но доколко те трябва да се отличават, за да кажем, че фокусите са различни и че двете точки на образите са различни? Разделителната способност на всяко оптично устройство се определя от следното правило: образите на два точкови източника могат да се различат, ако времената за преминаване на крайните лъчи от единия източник до образа на втория се отличават от времената за преминаване до собствения си образ с повече от един период. Затова е необходимо разликата на времената за преминаване на горния и долния крайни лъчи до *чуждия* образ да е по-голяма от някоя величина, която е приблизително равна на периода на трептенето на светлинната вълна:

$$t_2 - t_1 > \frac{1}{\nu}, \tag{27.17}$$

където ν е честотата на светлината (броя на трептенията за секунда или скоростта на светлината, разделена на дължината на вълната). Да означим разстоянието между точките с D, а половината от ъгъла, под който се вижда лещата от точката P, е θ; тогава (27.17) е равносилно на твърдението, че D е по-голямо от $(\lambda/n)\cdot\sin\theta$, където n е показател на пречупването в точката P, а λ — дължина на вълната. Оттук размерите на най-малкия обект, който ние можем да видим, се оказват от порядъка на дължината на вълната. За телескопа също има такава формула. Тя определя минималната разлика на ъглите (ъглово разстояние) между две звезди, при която те могат да бъдат различени една от друга[1].



Фиг. 27.9. Разделителна способност на оптичната система

[1] Граничният ъгъл е в еличина от порядъка на λ/D, където D е диаметър на лещата. Можете ли да покажете как се получава това?

28

Електромагнитно лъчение

1. Електромагнетизъм
2. Излъчване
3. Диполен излъчвател
4. Интерференция

1. Електромагнетизъм

Решаващи и най-поразителни периоди в развитието на физиката са периодите на великите обобщения, когато явленията, които са изглеждали изолирани, неочаквано се оказват само различни аспекти на един и същ процес. Историята на физиката е история на такива обобщения и в основата на успеха на физическите науки преди всичко лежи нашата способност към *синтез.*

Изглежда, че за най-знаменателен момент в развитието на физиката на XIX век трябва да се счита онзи ден през 1860 г., когато Дж. К. Максвел е съпоставил законите на електричеството и магнетизма със законите за поведението на светлината. В резултат на това са били частично обяснени свойствата на светлината — на тази стара и фина субстанция, толкова загадъчна и важна, че някога при написването на главата за сътворението на света сметнали за необходимо да ѝ отредят специален акт на творение. Като завършил своето изследване, Максвел би могъл да каже: „Да бъде електричество и магнетизъм и ще стане светлина!"

Този кулминационен момент се подготвял дълго от постепенното разкриване на законите на електричеството и магнетизма, за които ние ще говорим подробно по-нататък. Накратко историята се свежда към следното. С постепенното откриване на все по-нови свойства на електричеството и магнетизма, на електричните сили на притегляне и отблъскване, а също така и на магнитните сили е било забелязано, че макар тези сили да имат доста сложен характер, всички те намаляват обратно пропорционално на квадрата на разстоянието. Известно е например, че именно по този начин се изменят кулоновите сили между неподвижните заряди. Оттук следва, че на достатъчно големи разстояния системите от заряди малко си влияят една на друга. Като свързал помежду им откритите дотогава закони, Максвел забелязъл, че те са несъвместими и за да направи цялата система съвместима, той е добавил към уравненията още един член. Появяването на този член е довело до забележително предсказване: част от електричното и магнитното поле намалява по-бавно, отколкото обратно на квадрата на разстоянието, а именно обратно пропорционално на самото разстояние. Оттука Максвел е получил, че електричните токове влияят на произволно далечни системи от заряди и е предсказал всичките основни явления, които сега ни са добре известни — предаването на радиовълните, радиолокацията и т. н.

Наистина изглежда като чудо, че с помощта на някакви електрични въздействия човек, който говори някъде в Европа, може да бъде чут на хиляди мили в Лос Анжелос. Защо е възможно това? Защото полетата намаляват обратно пропорционално не на квадрата, а на първата степен на разстоянието. Освен това е било показано, че светлината представлява също електрични и магнитни полета, които се разпространяват на големи разстояния и се генерират от невероятно бързи трептения на електроните в атомите. Всички тези явления ние ще наричаме *излъчване* или по-точно *електромагнитно излъчване,* защото има и други типове излъчвания. Но почти винаги излъчване означава електромагнитно излъчване.

И тук се проявява единството на явленията във Вселената. Движението на атомите на някоя далечна звезда даже на огромни разстояния възбужда електроните на нашето око и ние научаваме

за звездите. Ако не съществуваше законът за взаимодействието на полетата, ние нямаше да знаем буквално нищо за външния свят. А електричните бури в галактиката, макар и отдалечени от нас на пет милиарда светлинни години (най-далечната от откритите досега), са способни да възбуждат токове в гигантската „чаша" на радиотелескопа. Ето защо ние виждаме и звездите, и галактиките.

Именно за тези забележителни явления ще се говори в настоящата глава. В самото начало на нашия курс от лекции ние обрисувахме общата картина на света, но сега ние сме по-подготвени, за да я разберем по-дълбоко. Затова нека се върнем отново към общата картина на явленията и да поговорим за нея по-подробно. Ние ще започнем с описание на положението, което физиката е заемала в края на XIX-то столетие. Всичко, което тогава е било известно за основните закономерности, може да се формулира така.

Първо, била е известна силата на гравитацията (ние неведнъж я записвахме). Силата, действуваща на тяло с маса m от страна на тяло с маса M, се дава с израза

$$\mathbf{F}=G\frac{mM}{r^2}\,\mathbf{e}_r, \tag{28.1}$$

където $\mathbf{e}_r$ е единичен вектор, насочен от m към M, а r — разстоянието между телата.

Второ, към края на XIX век е бил известен следният закон на електричеството и магнетизма: силата, действуваща на заряда q, се характеризира с две полета $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ и със скоростта на заряда $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}). \tag{28.2}$$

Към това трябва да се добавят формулите за $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. За съвокупност от заредени частици полетата $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ се представят като сума от приносите на всяка частица поотделно. По такъв начин, като определим $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ за един заряд и като съберем приносите на всички заряди във Вселената, ще получим пълната величина на $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. В това се заключава принципът на суперпозицията.

Как да получим сега формулата за електричното и магнитното поле на един заряд? Това се оказва много сложно; ще се наложи да загубим много труд и да използуваме тънки доказателства. Но работата не е в това. Всъщност ние написахме законите, за да подчертаем красотата на природата, за да покажем, че всички основни закони могат да се съберат на една страница (с означенията читателят вече е запознат). Точната и напълно строга формула за полето, което създава един заряд, доколкото ние знаем, има много сложен вид (ние се абстрахираме от ефектите на квантовата механика). Затова ние няма да я извеждаме подробно, а ще я запишем направо, както тя изглежда. В действителност би било *по-правилно* законите на електричеството и магнетизма да се запишат с помощта на *уравненията на полето*, за които ще се говори по-късно. Но там се използуват съвсем други означения и понятия, затова нека сега да напишем изразите за полето в известната ни вече форма, макар че тя не е много удобна за пресмятания.

Електричното поле $\mathbf{E}$ се дава с израза

$$\mathbf{E}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2}+\frac{r'}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{e}_{r'}\right]. \tag{28.3}$$

Какво означават отделните членове в този израз? Да вземем първия от тях: $\mathbf{E}=-q\mathbf{e}_{r'}/4\pi\varepsilon_0 r'^2$. Това е известният ни закон на Кулон; тук q е зарядът, който създава полето, $\mathbf{e}_{r'}$ — единичен вектор, насочен от точка P, където се измерва полето $\mathbf{E}$, r — разстоянието от P до q. Но законът на Кулон не е точен. Откритията, направени през XX век, показаха, че никое въздействие не може да се разпространява по-бързо от някоя фундаментална скорост c, която сега се нарича скорост на светлината. Поради това е невъзможно да се определи положението на заряда в *да-*

дения момент. Освен това в дадения момент на полето може да влияе само поведението на заряда в *миналото.* А колко *отдавна* в миналото? Задръжката във време или тъй нареченото *време на закъснение* е времето, необходимо за изминаване на разстоянието от заряда до точката P на измерваното поле със скоростта на светлината c. Времето на закъснението е r'/c. Така че първият член в (28.3) представлява от само себе си не обикновеният, а закъсняващият закон на Кулон.

За да отчетем закъснението, ние поставихме щрих на r, разбирайки под r' онова разстояние, на което е *бил отдалечен* зарядът q от т. P в началния момент на своето въздействие. Да си представим за момент, че зарядът носи със себе си светлинни сигнали, които се движат към точката P със скорост c. Тогава, гледайки към заряда q, ние бихме го видели не там, където той сега се намира, а там, където той е *бил* малко преди това. В нашата формула влиза *привидната* посока $\mathbf{e}_{r'}$, тъй наречената *закъсняваща* посока и *закъсняващото* разстояние r'. Да се разбере това е лесно, но то още не е всичко. Работата се оказва много по-сложна.

В израза (28.3) има редица други членове. С втория член природата тъй да се каже дава закъснението в първо грубо приближение. Това е поправката към закъсняващия кулонов член; тя представлява произведение от скоростта на изменението на кулоновото поле и времето на закъснение. Но и това не е всичко. Има още трети член — втората производна по t от единичния вектор, насочен към заряда. С това формулата се изчерпва; ние взехме под внимание цялото влияние върху електричното поле от произволно движещ се заряд.

Магнитното поле се изразява по следния начин:

$$\mathbf{B}=-\mathbf{e}_{r'}\times\frac{\mathbf{E}}{c}. \qquad (28.4)$$

Всичкото дотук ние написахме, за да покажем красотата на природата и в известен смисъл могъществото на математиката. Откровено казано, ние даже не се опитваме да разберем защо толкова значителни по своето съдържание формули заемат такова малко място, нали в тях се съдържа и принципът на действието на генераторите на тока, и особеностите в поведението на светлината — с една дума, всичките явления на електричеството и магнетизма. Разбира се, за пълнотата на картината трябва да добавим още нещо за свойствата на използваните материали (за свойствата на веществото), които засега не са взети предвид в (28.3).

Завършвайки краткото описание на представите за света през XIX век, трябва да споменем още за едно фундаментално обобщение, за което има голяма заслуга и Максвел, а именно за единството на механичните и топлинни явления. Ние ще говорим за това в най-близко бъдеще.

В XX век бе открито, че всички закони на Нютоновата динамика са неправилни и за да ги уточнят, бе използувана квантовата механика. (Законите на Нютон са верни само за тела с достатъчно големи размери.) Съвсем наскоро законите на квантовата механика в съвкупност със законите на електромагнетизма послужиха като основа за откриването на законите на *квантовата електродинамика.* Освен това бяха открити редица нови явления, които последваха след откритието на радиоактивността от Бекерел през 1898 г. (той я „измъкнал" под носа на XX век). Явлението радиоактивност послужи за начало на развитието на науката за ядрата, на новите частици и за взаимодействия от съвсем друг род — не гравитационни и не електрически. Всички тия въпроси чакат още своето разрешение.

За твърде строгите и образовани читатели (да кажем за професорите, които може да прочетат тези редове) специално ще добавим: нашето твърдение, че изразът (28.3) съдържа всичко, което е известно от електродинамиката, не е съвсем точно. Има един въпрос, който е останал неразрешен към края на XIX столетие. Ако се опитаме да изчислим полето, създадено от всички

заряди, *включвайки и тоя заряд, на който от своя страна действува полето,* ще възникнат трудности при опита да се определи например разстоянието от заряда до самия него и заместването на тази величина в знаменателя с нула. И досега не е ясно какво да се прави с тая част от полето, която се създава от заряда и действува обратно пак на него. Ние ще оставим този въпрос — загадката не е разкрита напълно и ние ще избягваме занапред да говорим за нея

2. Излъчване

Да преминем сега от общата картина на света към явлението излъчване. Преди всичко трябва да вземем оня член от израза (28.3) който намалява обратно пропорционално на първата (а не на втората) степен на разстоянието. Оказва се, че този член има толкова прост вид, че ако го вземем в качеството на закон за поведението на електричното поле, което създава движещ се на големи разстояния заряд, електродинамиката и оптиката ще може да се излагат на елементарно ниво. Ние ще приемем временно този закон без доказателство, а по-късно ще го изучим по-подробно.

Първият член в дясната част на (28.3) е явно обратно пропорционален на втората степен на разстоянието; може лесно да се покаже, че и вторият член, който дава поправката на закъснението за първия, се изменя по същия начин. Целият ефект, който ни интересува, се съдържа в третия член. Той не е толкова сложен и ни казва следното: погледнете към заряда и забележете посоката на единичния вектор (чийто край се плъзга по повърхността на единичната сфера). С движението на заряда единичният вектор се върти и *неговото ускорение е именно онова, което ни интересува.* Това е всичко. И тъй

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{d^2\mathbf{e}_{r'}}{dt^2}. \qquad (28.5)$$

Формулата (28.5) изразява закона на излъчването, тъй като единственият член, който тя съдържа, намалява обратно пропорционално на разстоянието и следователно доминира на големи разстояния от заряда. (Частта, която се изменя обратно пропорционално на квадрата на разстоянието, става толкова малка, че не представлява интерес.)

Нека отидем малко по-напред и да изясним смисъла на формулата (28.5). Нека зарядът да се движи произволно и ние да го наблюдаваме от известно разстояние. Да си представим за момент, че зарядът „свети" (макар че именно явлението светлина ние трябва да обясним); и тъй нека зарядът да е светеща бяла точка. Ние виждаме движението на тази точка. Но ние не можем да определим *точно* как се движи тя в *дадения* момент поради споменатото вече закъснение. Има смисъл да се говори само за това, как тя се е движила в *по-предния момент.* Единичният вектор $\mathbf{e}_{r'}$ е насочен към привидното положение на заряда. Естествено краят на вектора $\mathbf{e}_{r'}$ описва някаква крива, така че ускорението има две компоненти. Едната от тях е напречна компонента, възникваща поради движението на края на вектора нагоре-надолу, а другата е радиална или надлъжна, възникваща от въртенето на края на вектора по сферата. Лесно се показва, че втората компонента е много по-малка от първата и се изменя обратно пропорционално на квадрата на r при много големи r. Наистина ако отместваме източника все по-далече от точката на наблюдението, колебанията на вектора $\mathbf{e}_{r'}$ ще стават все по-слаби (обратно пропорционално на разстоянието), а надлъжната компонента на ускорението ще намалява още по-бързо. Ето защо за практически цели е достатъчно да се проектира движението на заряда върху равнина, отстояща на единично разстояние. В резултат стигаме до следното правило: нека да наблюдаваме движещ се заряд и всичко, което виждаме, да закъснява по време, т. е. ние сме в положението на художник, който рисува

пейзаж на платно, отстоящо от него на разстояние единица дължина. Разбира се, художникът не взема предвид факта, че скоростта на светлината е крайна и изобразява света такъв, какъвто го вижда. Да видим какво ще нарисува той на тази картина. Ние ще видим точка (изображението на заряда), движеща се по картината. Ускорението на тази точка е пропорционално на електричното поле. Ето всичко, което ни е нужно.

Така формулата (28.5) дава пълно и точно описание на процеса излъчване; в нея даже се съдържат всички релативистични ефекти. Обаче често се среща по-простата ситуация, когато зарядите се движат с малка скорост на къси разстояния. Тъй като зарядите се движат бавно, разстоянията, които те изминават от момента на излъчването, са малки, така че времето на закъснението практически е постоянно. В този случай формулата (28.5) се опростява. Наистина нека зарядът извършва малки премествания и се намира примерно на едно и също разстояние от точката на наблюдението. Времето на закъснението е r/c. Тогава нашето правило (определящо полето на излъчването) ще се изразява така: ако зареденото тяло се премества на малки разстояния и страничното преместване е $x(t)$, единичният вектор $\mathbf{e}_r'$ се завърта на ъгъл x/r и тъй като r е практически постоянно, компонентата на $\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{e}_r'$ по посока на x е равна на ускорението на самата величина x в по-предния момент. В резултат получаваме

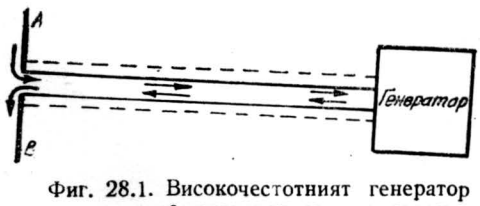
$$E_x(t) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} a_x(t - r/c). \tag{28.6}$$

Тук влиза само компонентата a_x, перпендикулярна на лъча на зрението. Да се опитаме да разберем защо това е така. Наистина когато зарядът се движи право към нас или от нас, единичният вектор по посока на заряда не се изменя и ускорението е равно на нула. Затова за нас е съществено само страничното движение, т. е. само оная част от ускорението, която се проектира върху екрана.

3. Диполен излъчвател

В качеството на основен закон на електромагнитното излъчване ще приемем формулата (28.6), т. е. ще смятаме, че електричното поле, което се създава от нерелативистично движещ се заряд на достатъчно големи разстояния r има вид (28.6). Електричното поле е обратно пропорционално на r и право пропорционално на ускорението на заряда, проектирано върху „равнината на зрението“, при това ускорението се взема не в дадения, а в по-ранен момент от време (времето на закъснението е r/c). Цялата останала част от тази глава ще бъде посветена на приложението на закона (28.6) към различните явления на разпространение на светлината и на радиовълните — отражение, пречупване, интерференция, дифракция и разсейване. Законът (28.5) има фундаментално значение и съдържа цялата информация, която ни е необходима. Останалата част от (28.3) е декорация и е нужна само за да се разбере защо и как възниква законът (28.6).

По-нататък ние пак ще се върнем към формулата (28.3), а засега ще я приемем като нещо дадено и ще отбележим, че нейната вярност не се основава само на теоретични изводи. Може да се измислят редица опити, в които да се проявява действието на закона (28.3). Затова е необходимо да има ускоряващ се заряд. Строго казано, зарядът трябва да е единичен, но ако вземем голямо количество заряди, движещи се еднакво, полето ще се представи като сума от приносите на отделните заряди. Като пример ще разгледаме два проводника A и B (фиг. 28.1), съединени с генератор. Същността на въпроса е в това, че генераторът създава разлика в потенциалите или поле, което в един момент от времето изтласква електрони от участъка A и ги въвлича в участъка B, а след нищожно малък интервал от време действието на полето става обратно и електроните от B преска-



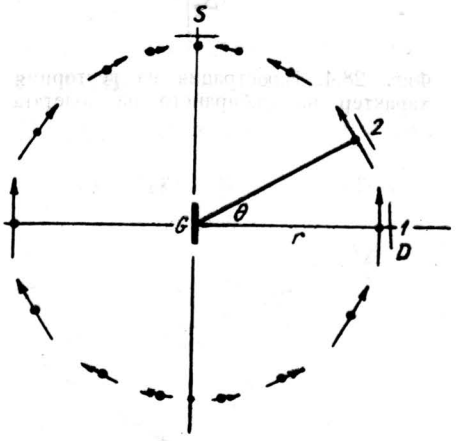
Фиг. 28.1. Високочестотният генератор „разлюлява“ електроните в проводниците нагоре и надол

чат обратно в *A*. Така в тези два проводника зарядите едновременно се ускоряват ту нагоре, ту надолу. За това устройство са нужни само две жици и един генератор. А окончателният резултат е такъв, че зарядите се ускоряват нагоре и надолу така, като че ли *A* и *B* съставят един проводник. Проводник, чиято дължина е много малка спрямо разстоянието, което изминава светлината за един период на трептението, се нарича *електричен диполен осцилатор*.

По такъв начин ние имаме уред за създаване на електрично поле; сега ни е нужен уред за детектиране на електричното поле, но за целта можем да вземем пак същото устройство — две жици *A* и *B*. Ако към такова устройство приложим електрично поле, ще възникне сила, която ще движи електроните по двете жици или нагоре, или надолу. Това движение се фиксира с помощта на изправител, монтиран между проводниците *A* и *B*, а информацията се предава по тънък проводник в усилвател, където сигналът се усилва и възпроизвежда със звукова честота чрез модулация на радиочестотите. Когато детекторът приема електричното поле, от високоговорителя се чува силен звук; ако няма поле, няма и звук.

В помещението, където ние детектираме вълните, обикновено се намират и други обекти, в които електричното поле също раздвижва електроните; те трептят нагоре-надолу и от своя страна въздействуват на детектора. Затова, за да е успешен експериментът, разстоянието между източника на вълни и детектора не трябва да бъде голямо, за да снижи влиянието на отразените от стените и от нас самите вълни. Така че опитът може да даде резултати, несъвпадащи точно с (28.6), но достатъчни за груба проверка на нашия закон.

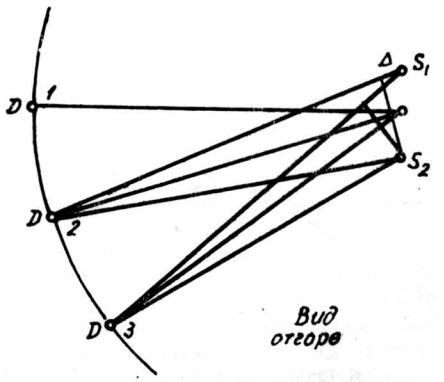
Да включим сега генератора и да се вслушаме в звуковия сигнал. Когато детекторът *D* се намира в положение, паралелно на генератора *G* в точката *1* (фиг. 28. 2), ние ще чуем силен сигнал (това означава голяма стойност на полето). Същата стойност на полето ние ще намерим и за всеки азимутален ъгъл θ, получен чрез въртене около оста *G*, тъй като в нашия опит нито една азимутална посока не е обособена. От друга страна, когато детекторът се намира в точката *3*, оказва се, че полето е нула. Така и трябва да бъде. Според нашата формула полето е пропорционално на ускорението на заряда, *проектирано върху равнината, перпендикулярна на лъча на зрението*. Когато детекторът се намира над генератора в точката *3*, зарядите се движат към детектора и обратно и следователно поле не трябва да възниква. И тъй опитът потвърждава изказаното от нас първо правило, че зарядите, движещи се по посока на *D* и обратно, не оказват никакво влияние. Второ, от формулата следва, че полето е перпендикулярно на *r* и лежи в равнината, построена върху векторите *G* и *r*; ето защо, ако поставим *D* в положение *1* и го завъртим на 90°, няма да чуем никакъв сигнал. Това тъкмо означава, че електричното поле е насочено по вертикалата. Ако *D* е отместен на известен промеждутъчен ъгъл, най-силен сигнал се получава при ориентация на детектора както на чертежа. Работата е там, че полето не е успоредно на генератора, макар той да е разположен вертикално; ефектът се определя от *компонентата на ускорението, която е перпендикулярна на лъча на зрението*. В положение *2* сигналът се оказва по-слаб, отколкото в положение *1* именно поради ефекта от проектирането.



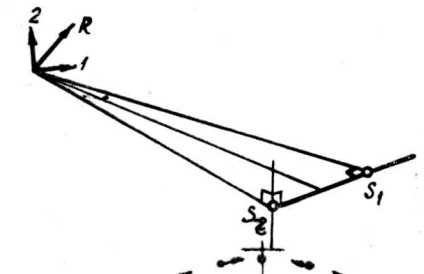
Фиг. 28.2. Измерване на електричното поле в точките на окръжност, чийто център съвпада с положението на линейния осцилатор

4. Интерференция

Нека вземем сега два източника, разположени на разстояние няколко сантиметра един от друг (фиг. 28.3). Ако двата източника са съединени с един и същ генератор и зарядите в тях се движат еднакво нагоре-надолу, съгласно принципа на суперпозицията действията на двата източника се събират; електричното поле е равно на сумата от двете слагаеми и се оказва два пъти по-голямо, отколкото в предишния случай.



Фиг. 28.3. Интерференция на полета на два източника



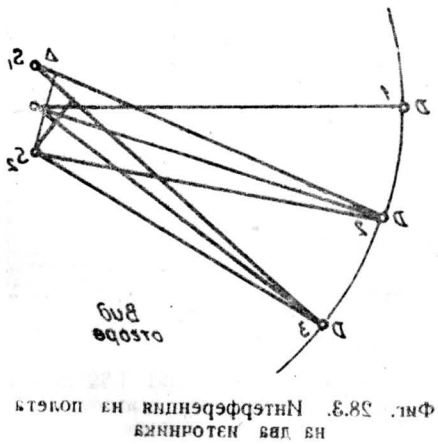
Фиг. 28.4. Илюстрация на векторния характер на събирането на полетата

Тук се появява интересна възможност. Нека зарядите в S_1 и S_2 се ускоряват нагоре и надолу, но в S_2 движението им да закъснява и да е отместено по фаза на 180°. Тогава в един и същ момент от време полето, създадено от S_1, ще има посока, противоположна на посоката на полето, създавано от S_2; следователно в точката 1 няма да възникне никакъв ефект. Относителната фаза на трептенията лесно се създава с помощта на тръбичка, която предава сигнала до S_2. При изменение на дължината на тръбата се изменя и времето за преминаване на сигнала до S_2 и по този начин се мени разликата във фазите на трептенията. Като подберем нужната дължина на тръбичката, ние можем да получим положение, когато сигналът изчезва, въпреки че зарядите в източниците S_1 и S_2 се движат. Излъчването на всеки източник поотделно може лесно да се установи, като изключим единия от тях; тогава веднага се вижда действието на втория. Така, ако всичко се направи внимателно, в съвкупност двата източника може да дадат нулев ефект.

Интересно е да се убедим сега, че събирането на двете полета е фактически векторно събиране. Ние току-що разгледахме случая, когато зарядите се движат нагоре-надолу; да се обърнем сега към примера с две паралелни движения. Преди всичко да установим еднакви фази за S_1 и S_2, т. е. нека зарядите да се движат еднакво. После да завъртим S_2 на ъгъл 90°, както е показано на фиг. 28.4. В точка 1 ще стане събиране на двете полета, едното от хоризонталния източник, а другото — от вертикалния. Пълното електрично поле ще се представи като векторна сума на двата сигнала, които са с една и съща фаза; двата сигнала едновременно преминават и през максимума, и през нулата. Резултатното поле трябва да бъде равно на сигнала R, завъртян на 45°. Максимален звук ще се получи, ако завъртим детектора D на 45°, а не във вертикално направление. При завъртане на прав ъгъл към указаното направление звуковият сигнал трябва да е нула, както лесно може да се провери. И наистина именно това се наблюдава.

А какво да се прави със закъснението? Как да покажем, че сигналът наистина закъснява? Разбира се, като прибегнем към много сложни устройства, можем да измерим времето за идване на сигнала, но има друг много прост начин. Да се обърнем отново към фиг. 28.3 и да предположим, че S_1 и S_2 са с една и съща фаза. Двата източника трептят еднакво и създават в точка *1* равни полета. Но да преминем към точка *2*, която се намира по-близо до S_2, отколкото до S_1. Тъй като закъснението се определя от величината r/c, при различни закъснения сигналите ще пристигат с различни фази. Следователно трябва да съществува такава точка, за която разстоянията от D до S_1 и S_2 да се различават с такава величина Δ, че сигналите да се погасят.

В този случай Δ трябва да бъде равна на разстоянието, което светлината изминава за половин период на трептенето на генератора. Да се преместим още по-нататък и да намерим точката, където разликата от разстоянията съответствува на цял период на трептенето, т. е. сигналът от първата антена достига точката *3* със закъснение спрямо сигнала от втората антена и това закъснение е равно точно на един цял период. Тогава двете електрични полета отново са с една и съща фаза и сигналът в точката *3* пак става силен.



Фиг. 28.3. Интерференция на полета на два източника

С това ще завършим описанието на опитната проверка на най-важните следствия от формулата (28.6). Разбира се, ние не засегнахме въпроса за електричните полета, които намаляват по закона $1/r$ и не взехме под внимание факта, че при разпространяването на сигнала електричното поле се съпътствува от магнитно поле. Затова трябва доста сложна техника на пресмятане, но едва ли това ще добави нещо към нашето разбиране на въпроса. Във всеки случай ние установихме свойствата, които ще са най-важни за следващите приложения, а към другите свойства на електромагнитните вълни ние пак ще се върнем.

29

Интерференция

1. Електромагнитни вълни

В тази глава ние ще обсъждаме същите въпроси, както и в предшествуващата, но с по-големи математични подробности. Качествено ние вече показахме, че полето на лъчението от два източника има максимуми и минимуми и сега нашата задача е да дадем математично, а не просто качествено описание на полето.

Ние достатъчно добре обсъдихме физическия смисъл на формулата (28.6), сега да разгледаме някои нейни математични черти. Преди всичко полето на заряда, който се движи нагоре-надолу с малка амплитуда в дадена посока θ спрямо оста на движението, е перпендикулярно на лъча на зрението и лежи в равнината на ускорението и лъча на зрението (фиг. 29.1). Като означим разстоянието с r, големината на електричното поле в момент t ще бъде

$$E(t)=-\frac{qa(t-r/c).\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}, \qquad (29.1)$$

където $a\,(t-r/c)$ е ускорението в момента от време $(t-r/c)$ или *закъсняващото* ускорение.

Интересно е да се нарисува картината на разпределението на полето в различните случаи. Най-характерен множител в (29.1) е $a\,(t-r/c)$; за да го разберем, нека вземем най-простия случай, когато $\theta=90^0$ и да изобразим полето графично. По-рано бяхме заети с въпроса какво е поведението на полето в дадена фиксирана точка в пространството с течение на времето. Сега ще видим как изглежда полето в различните точки на пространството в един и същ момент. Иначе казано, нужна ни е „моментна снимка“ на полето, от която ще се види какво е то в различните места. Разбира се, картината на разпределението на полето зависи от ускорението на заряда. Да зададем характера на движението му: нека в началото да е в покой и след това внезапно да започне да се ускорява по определен начин (както е показано на фиг. 29.2) и накрая да спре. Малко по-късно да измерим полето в различните точки на пространството. Можем да твърдим, че полето ще има вида, показан на фиг. 29.3. Наистина във всяка точка полето се определя от ускорението на заряда в предшествуващия момент, при това под думата „предшествуващ“ се разбира r/c секунди по-рано. Колкото по-далече е точката, толкова в по-ранен момент се определя ускорението за нея. Затова кривата на фиг. 29.3 в известен смисъл е обърната във времето графика на ускорението: времето се отличава от разстоянието с множителя c, който се избира често равен на единица. Този факт може лесно да се забележи и от математичния запис $a\,(t-r/c)$. Ясно е, че прибавянето на интервала от време Δt и изваждането на пътя $\Delta r=-c\Delta t$ дава една и съща величина $a\,(t-r/c)$.

С други думи, като увеличим времето с Δt, можем да възстановим значението на $a\,(t-r/c)$, като към r *добавим* $\Delta r=c\Delta t$, т. е. *полето се разпространява като вълна, отдалечаваща се от източника.* Ето защо понякога казват, че светлината се движи като вълна. Може също да се каже, че полето закъснява във времето или, че се разпространява в ширина с течение на времето.

Особен интерес представлява случаят, когато зарядът q извършва периодични трептения. В разгледания в глава 28 опит отклонението x на зарядите в момент t беше равно на константа x_0, която е амплитудата на трептенето, умножено по $\cos\omega t$. В този случай ускорението е

$$a=-\omega^2 x_0\cos\omega t=a_0\cos\omega t, \qquad (29.2)$$

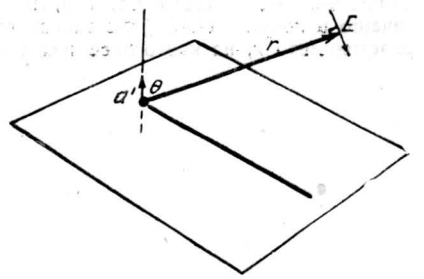
1. Електромагнитни вълни

2. Енергия на лъчението

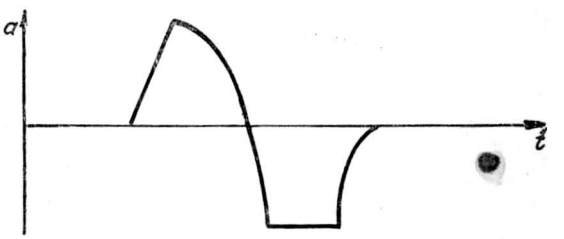
3. Синусоидни вълни

4. Два диполни излъчвателя

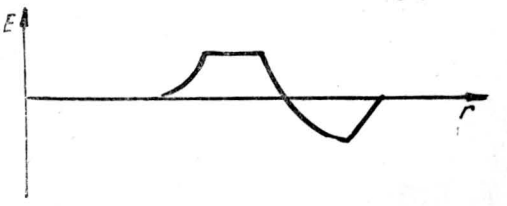
5. Математично описание на интерференцията



Фиг. 29.1. Интензитет на полето $\vec{E}$, създаван от положителен заряд със закъсняващо ускорение **a**



Фиг. 29.2. Ускорение на даден заряд като функция на времето



Фиг. 29.3. Електричното поле като функция на положението на точката на наблюдението след известен интервал от време

Пренебрегваме множителя 1/r

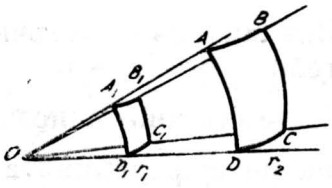
където $a_0 = -\omega^2 x_0$ е амплитуда на ускорението. Като заместим a с неговото равно в (29.1), намираме

$$E = -q \sin\theta \frac{a_0 \cos\omega (t - r/c)}{4\pi\varepsilon_0 r c^2}. \qquad (29.3)$$

Нека засега да се абстрахираме от ъгъла θ и константите и да видим каква е зависимостта на E от времето или от координатите.

2. Енергия на лъчението

Както вече казахме, във всеки момент от времето и във всяка точка на пространството интензитетът на полето се мени обратно пропорционално на разстоянието r. Трябва да отбележим, че *енергията*, пренасяна от вълната, и всички други енергетични характеристики на полето са пропорционални на *квадрата* на полето. Нека например заряд или осцилатор да се намира в електрично поле и под негово влияние да започне да се движи. За линейния осцилатор отклонението, ускорението и скоростта, които възникват под действието на полето, са право пропорционални на големината на полето. Затова кинетичната енергия на заряда е пропорционална на *квадрата* на полето. Ние ще приемем, че енергията, която полето може да предаде на някоя система, е пропорционална на квадрата на полето. Оттук следва, че енергията, получавана в дадено място от източника на полето, намалява с отдалечаването от източника, по-точно, тя намалява *обратно пропорционално на квадрата на разстоянието*. Интерпретацията на този факт е много проста: да съберем енергията на вълната, която попада в конус с връх в източника отначало на разстояние r_1 (фиг. 29.4), а после на разстояние r_2; тогава количеството енергия, падащо върху единица площ, е обратно пропорционално на квадрата на r, а повърхнината на напречното сечение на конуса расте *право* пропорционално на квадрата на разстоянието r от повърхността до върха на конуса. По такъв начин енергията, протичаща в конуса, е една и съща за всички разстояния r от върха на конуса. В частност, ако обкръжим източника от всички страни с поглъщащи осцилатори, пълното количество енергия, поглъщано от тях, ще бъде постоянно независимо от разстоянието до източника. Законът за спадането на полето E както $1/r$ е еквивалентен на твърдението, че има поток от енергия, който никъде не се губи; при това енергията се разпространява във все по-големи области на пространството. По такъв начин, като трепти, зарядът безвъзвратно губи енергия, която се пренася все по-надалече и по-надалече. Зарядът не може да си върне излъчената енергия от тези разстояния, където е приложимо нашето разглеждане; за достатъчно големи разстояния цялата излъчена енергия отива навън. Разбира се, енергията не изчезва безследно и може да се погълне от други системи. Загубите на енергия от излъчване ние ще изучаваме в гл. 32.



Фиг. 29.4. Количеството енергия, протичащо в конуса $OABC$, не зависи от разстоянието r, на което то се измерва

Да разгледаме сега по-подробно вълната от вида (29.3) като функция на времето в дадено място и като функция на разстоянието в даден момент от време. Както и по-рано, ще се абстрахираме от постоянните множители и от множителя $1/r$.

3. Синусоидни вълни

Нека да фиксираме отначало r и да разгледаме полето като функция на времето. Получава се функция, която осцилира с ъглова честота ω. Ъгловата честота ω може да се определи като *скорост на изменение на фазата с времето* (радиани за секунда). Тази величина ни е вече позната. *Периодът* е времето за едно трептение, за един пълен цикъл; той е равен на $2\pi/\omega$, тъй като произведението на ω по периода е пълният период на косинуса.

Ше въведем нова величина, която много често се използува във физиката. Тя възниква при друга ситуация, когато t е фиксирано и вълната се разглежда като функция на разстоянието r. Лесно е да се види, че вълната (29.3) също осцилира като функция от r. Ако не вземем под внимание множителя $1/r$, виждаме че E също осцилира, когато се мени положението. Тогава по аналогия с ω ще въведем тъй нареченото *вълново число*, което ще означим с k. То се определя като *скорост на изменението на фазата с разстоянието* (радиани за метър). При такова изменение времето остава постоянно.

Ролята на период тук играе друга величина, нея бихме могли да наречем период в пространството, обаче обикновено я наричат дължина на вълната и я означават с буквата λ. Дължината на вълната е разстоянието, на което трептението на полето извършва един пълен цикъл. Лесно се вижда, че дължината на вълната е равна на $2\pi/k$, защото k, умножена по дължината на вълната, е равно на пълния период на косинуса. И тъй съотношението $k\lambda = 2\pi$ е напълно аналогично на $\omega t_0 = 2\pi$.

В нашия конкретен случай между честотата и дължината на вълната има определена връзка, обаче дадените по-горе определения на k и ω имат напълно общ характер и са приложими също в такива физически условия, когато между тях няма никаква връзка. За разглежданата от нас вълна може лесно да се намери скоростта на изменението на фазата с разстоянието. Наистина да запишем израза за фазата $\varphi = \omega(t - r/c)$ и да вземем частната производна по r

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = k = \frac{\omega}{c}. \tag{29.4}$$

Това съотношение може да се запише по различни начини

$$\lambda = ct_0, \tag{29.5}$$

$$\omega = ck, \tag{29.6}$$

$$\lambda\nu = c, \tag{29.7}$$

$$\omega\lambda = 2\pi c. \tag{29.8}$$

Защо дължината на вълната се оказва равна на периода, умножен по c? Много просто. Работата е там, че за време, равно на един период, вълните, движейки се със скорост c, ще изминат разстояние ct_0, а от друга страна, това разстояние трябва да бъде равно на дължината на вълната.

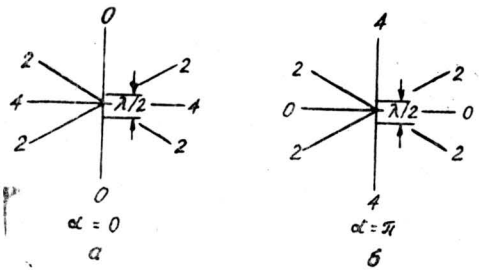
В други физични явления, когато имаме работа със светлината, може да няма такава проста връзка между k и ω. Нека вълната се движи по оста x, тогава разпространението на синусоидната вълна с честота ω и вълново чнсло k се описва с общата формула от вида $\sin(\omega t - kx)$.

Въведеното понятие дължина на вълната позволява да се уточнят границите на приложимостта на формулата (29.1). Напомняме, че полето е сбор от няколко части: едната от тях намалява с разстоянието като $1/r$, другата — като $1/r^2$, а останалите — още по-бързо. Струва си да изясним кога частта, която намалява по закона $1/r$, е най-съществена, а останалите се пренебрегват. Естествено е да отговорим: „Когато се отдалечим достатъчно много от източника, защото членът $1/r^2$ ще бъде малък спрямо члена $1/r$." Но какво значи „достатъчно далече"? В общи линии отговорът е такъв: всички останали членове са от порядъка на величината λ/r спрямо първия член $1/r$. Така че, когато ние сме на разстояние няколко дължини на вълната от източника, формулата (29.1) описва полето в добро приближение. Областта, отдалечена от източника на разстояние, по-голямо от няколко дължини на вълната, понякога се нарича „вълнова зона".

4. Два диполни излъчвателя

Да разгледаме сега резултантното поле, което възниква при едновременното действие на два осцилатора. В предната глава бяха разгледани няколко от най-простите случаи. Отначало ще дадем качествена картина на явленията, а после ще опишем същите ефекти количествено. Да вземем най-простия случай, когато осцилаторите и детекторът са разположени в една хоризонтална равнина, а трептенията на осцилаторите стават във вертикално направление.

На фиг. 29.5,а е показан видът на двата осцилатора отгоре; в дадения случай разстоянието между тях по направление север—юг е равно на половин дължина на вълната и те трептят във еднаква фаза, т. е. разликата във фазите им е равна на нула. Нас ни интересува интензивността на излъчването в различните посоки. Под интензивност ние разбираме количеството енергия, преминаваща покрай нас за 1 s.; тя е пропорционална на квадрата на интензитета на полето, усреднен по времето. Така, за да определим яркостта на светлината, трябва да вземем квадрата на интензитета на електричното поле, а не самия интензитет. (Интензитетът на електричното поле се характеризира със силата, с която полето действува на неподвижен заряд, а количеството енергия, преминаваща през някоя площ, е пропорционално на квадрата на интензитета и се измерва във ватове на квадратен метър. Коефициентът на пропорционалност ще бъде изведен в следващата глава.) Ако се намираме на запад от системата осцилатори, към нас идват полета от двата осцилатора, еднакви по големина и с еднаква фаза, така че резултантното поле е два пъти по-голямо от полето на отделния осцилатор. Следователно *интензивността ще бъде четири пъти по-голяма от тая на отделния осцилатор*. (Числата на фиг. 29.5 показват интензивността, при това за единица измерение е избрана интензивността на излъчването на единия осцилатор, разположен в началото на координатната система.) Нека сега полето да се измерва в северна или южна посока по линията на осцилаторите. Тъй като разстоянието между осцилаторите е равно на една полувълна, излъчените от тях полета се различават по фаза точно с половин цикъл и следователно резултантното поле е нула. За междинния ъгъл (равен на 30°) интензивността е равна на 2, т. е. намалявайки, интензивността приема последователно стойности 4,2,0 и т. н. Ние трябва да се научим да намираме интензитета за различните ъгли. Фактически това се свежда към задачата за събиране на две трептения с различни фази.



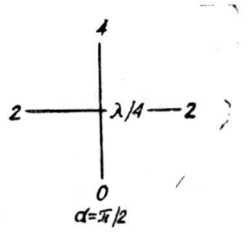
Фиг. 29.5. Зависимост на интензивността на излъчването от два дипола, намиращи се на разстояние половин дължина на вълната от посоката на излъчването
а — диполите са във фаза ($\alpha=0$)
b — диполите са в противофаза ($\alpha=\pi$)

Да разгледаме накратко още няколко интересни случая. Както и по-рано нека разстоянието между осцилаторите да е равно на една полувълна, но трептенията на единия осцилатор да изостават по фаза с половин период спрямо трептенията на другия (вж. фиг. 29.5,б). Интензивността в хоризонтално направление (западна или източна посока) е нула, защото единият осцилатор „тласка“ в една посока, а другият — в обратна. В северна посока сигналът от по-близкия осцилатор пристига с половин период по-рано от сигнала от другия. Но сигналът от по-далечния осцилатор закъснява по фаза *тъкмо с половин период*, тъй че двата сигнала пристигат *едновременно* и интензивността в северната посока е равна на 4. Под ъгъл 30° интензивността е отново равна на 2, както ще бъде показано по-късно.

Сега ние се приближихме към едно интересно свойство, твърде полезно на практика. Ще отбележим, че фазовите съотношения между осцилаторите се използуват при предаването на радиовълни. Да допуснем, че искаме да насочим радиосигнал към Хавайските острови. За целта използуваме система от антени, разположени така, както е показано на фиг. 29.5, а, между които установяваме нулева фазова разлика. Тогава максималната интензивност ще бъде именно в нужната посока, тъй като Хавайските острови са разположени на запад от САЩ. На другия ден решаваме да предаваме сигнали в Канада. А тъй като Канада е на

север, ние трябва да изменим само знака на едната от антените, за да бъдат те в противофаза както на фиг. 29.5,б, и предаването ще става на север. Могат да се измислят различни устройства на системата от антени. Нашият начин е един от най-простите; ние можем доста да усложним системата и като изберем нужните фазови съотношения, да отправим сноп с максимална интензивност в исканата посока, без даже да преместваме от мястото някоя антена. Обаче в двете радиопредавания ние изразходвахме много енергия напразно, тя отиваше в противоположната посока; интересно е да се узнае може ли да се изпращат сигнали само в *една* посока. От пръв поглед изглежда, че две такива антени ще излъчват винаги симетрично. В действителност картината е много по-разнообразна; да разгледаме като пример случая на несиметрично излъчване на две антени.

Нека разстоянието между антените да е четвърт дължина на вълната и северната антена да изостава по фаза с четвърт период. Какво ще се получи тогава (фиг. 29.6)? Както ще покажем по-нататък, в западна посока интензивността е равна на 2. В южна посока се получава *нула*, защото сигналът от северния източник N пристига с 90° по-късно от сигнала от южния източник S и освен това той изостава по фаза още с 90°; в резултат пълната разлика във фазите е 180° и ефектът е равен на нула. В северна посока сигналът от N пристига с 90° по-рано от сигнала от S, тъй като N е с четвърт вълна по-близко. Но разликата във фазите е равна на 90° и *компенсира* задръжката във времето, затова двата сигнала пристигат с *еднаква фаза*, което дава интензивност 4.



Фиг. 29.6. Две диполни антени, даващи максимум лъчение в една посока

Така, като проявим малко изобретателност в разположението на антените и като подберем съответно отместване по фаза, можем да насочим излъчваната енергия в една посока. Вярно е, че енергията все пак ще се изпуска в доста широк ъглов интервал. А може ли излъчването да се фокусира в по-тесен ъгъл? Да се обърнем отново към предаването на вълни към Хавайските острови; в този случай радиовълните се движат на запад и на изток в широк ъглов диапазон и даже на ъгъл 30° интензивността е само два пъти по-малка от максималната, а енергията се изразходва напразно.

Може ли това положение да се подобри? Да разгледаме случая, когато разстоянието между източниците е равно на десет дължини на вълните (фиг. 29.7), а фазовата разлика — нула. Това е по-близко до описаната по-рано ситуация, където ние експериментирахме с интервали, равни на няколко дължини на вълните, а не на малки части от дължината на вълната. Тук картината е друга.

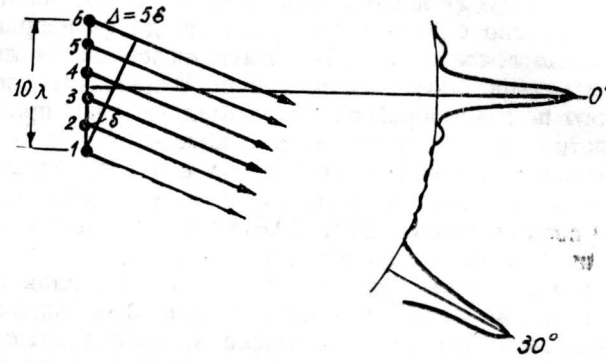
Ако разстоянието между източниците е десет дължини на вълните (ние избираме по-лекия случай, когато те са във фаза), в западна и източна посока интензивността ще бъде максимална, равна на 4. Ако пък се преместим на малък ъгъл, разликата във фазите ще стане 180° и интензивността ще се обърне в нула. По-точно, ако ние прекараме прави от всеки осцилатор до точката на наблюдението и пресметнем разликата Δ в разстоянията между осцилаторите и ако тя се окаже равна на $\lambda/_2$, то двата сигнала ще бъдат в противофаза и резултантният ефект ще е нула. На фиг. 29.7 на тази посока отговаря първата нула (мащабът на рисунката не е спазен, това фактически е груба схема). Това означава, че ние получаваме тесен лъч в нужната посока; ако се преместим малко встрани, интензивността изчезва. За съжаление за практични цели такива предаващи системи имат съществен недостатък: при някой ъгъл разстоянието Δ може да стане равно на λ и тогава двата сигнала отново ще се окажат във фаза. В резултат се получава картина с редуващи се максимуми и минимуми също както в гл. 28 за разстоянието между осцилаторите, равно на 2,5 λ.



Фиг. 29.7. Разпределение на интензивността на два дипола, намиращи се на разстояние 10 λ един от друг

Как да се избавим от излишните максимуми? Има един доста интересен начин за отстраняване на нежелателните максимуми. Да поместим между нашите две антени редица други (фиг. 29.8).

Нека разстоянието между крайните да е както по-рано 10 λ, а през всеки 2λ да поставим по една антена и да настроим всичките във фаза. По такъв начин ще имаме всичко 6 антени и интензивността по направлението запад — изток, разбира се, силно ще нарасне спрямо интензивността на една антена. Полето ще се увеличи шест пъти, а интензивността, която се определя с квадрата на полето — тридесет и шест пъти. Както и по-рано, близко до направлението запад — изток ще възникне направле-



Фиг. 29.8. Устройство на шестдиполни антени и част от разделението на интензивността на неговото излъчване

ние с нулева интензивност, а по-нататък, там, където очаквахме да видим висок максимум, ще се появи само малка „гърбица". Нека се опитаме да разберем защо така се получава.

Както и преди, причина за появяването на максимума като че ли съществува, тъй като Δ може да се равнява на дължината на вълната и осцилаторите 1 и 6, намирайки се във фаза, взаимно да усилват сигналите си. Оказва се, че осцилаторите 3 и 4 не са във фаза с осцилаторите 1 и 6 — отличават се от тях приблизително с половин дължина на вълната и дават обратен ефект спрямо последните. Затова интензивността в даденото направление се оказва малка, макар и не точно нула. В резултат възниква мощен лъч в нужното направление и редица неголеми странични максимуми. Но в нашия частен случай има една добавъчна неприятност, тъй като разстоянието между съседните диполи е равно на 2λ, може да се намери ъгъл, за който разликата σ в хода на лъчите от *два съседни дипола* да е равна точно на λ. Сигналите от съседните осцилатори ще се отличават с 360°, т. е. отново ще се окажат във фаза и в това направление ще получим още един мощен сноп радиовълни. На практика този ефект може лесно да се избегне, ако изберем разстоянието между съседните осцилатори по-малко от дължината на вълната. Самото възникване на добавъчните максимуми при разстояние между осцилаторите повече от λ е много интересно и важно, но не за предаването на радиовълните, а за *дифракционните решетки.*

5. Математично описание на интерференцията

Ние разгледахме излъчването на диполите качествено; сега да разгледаме количествената картина. Най-напред да намерим резултантното поле от два източника в най-общия случай, когато фазовата разлика α и силите на осцилаторите A_1 и A_2 са произволни; затова трябва да съберем два косинуса с еднаква честота, но с различни фази. Разликата във фазите се намира много просто: тя се събира от разликата, възникваща поради нееднаквото отдалечение на точката на наблюдението от двата източника и от вътрешната, зададената фазова разлика на трептенията. Ако говорим математически, ние трябва да съберем две вълни:

$R = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. Как да направим това?

Вероятно всеки ще може да извърши това събиране, но ние

все пак ще проследим хода на пресмятанията. Преди всичко, ако ние знаем математиката и достатъчно добре се справяме с косинусите и синусите, тази задача можем лесно да решим. Най-прост е случаят, когато амплитудите A_1 и A_2 са равни. Нека да означим общата амплитуда с A. При тези условия (да наречем това тригонометричен метод на решение на задачата) имаме

$$R = A[\cos(\omega t + \varphi_1) + \cos(\omega t + \varphi_2)]. \tag{29.9}$$

На уроците по тригонометрия вие вероятно сте доказвали равенството

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right). \tag{29.10}$$

Ако това ни е известно, за R веднага получаваме

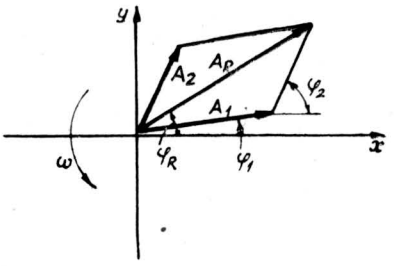
$$R = 2A\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right).\cos\left(\omega t + \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2\right) \tag{29.11}$$

И тъй ние отново получихме синусоидна вълна, но с нова фаза и нова амплитуда. Изобщо резултатът от събирането на две синусоидни вълни е синусоидна вълна с нова амплитуда A_R, наречена резултантна амплитуда, и с нова фаза φ_R — резултантна фаза. В нашия частен случай резултантната амплитуда е

$$A_R = 2A\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right), \tag{29.12}$$

а резултантната фаза е средно аритметично на двете фази. Поставената задача е решена напълно.

Да предположим сега, че сме забравили формулата за събиране на косинуси. Тогава можем да приложим друг метод на решение — геометричен. Косинусът, зависещ от ωt, може да се представи като хоризонтална проекция на някой *въртящ се вектор*. Нека е даден вектор $\mathbf{A}_1$, въртящ се с течение на времето; дължината му е A_1, а ъгълът с абсцисната ос е равен на $\omega t + \varphi_1$. (Засега ние ще изпуснем слагаемото ωt; както ще видим, това не играе роля при извода.) Да направим моментна снимка на векторите в момент $t=0$, като помним, че в действителност цялата схема се върти с ъглова скорост ω (фиг. 29. 9). Проекцията на $\mathbf{A}_1$ върху абсцисната ос е равна на $A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$. В момент $t=0$ втората вълна се дава от вектор $\mathbf{A}_2$, чиято дължина е равна на A_2, а ъгълът му с абсцисата е φ_2, при това той също се върти с течение на времето. Двата вектора се въртят с еднаква ъглова скорост ω и тяхното *относително* разположение е неизменно. Цялата система се върти като твърдо тяло.



Фиг. 29.9. Геометричен метод за събиране на две синусоидни вълни
Чертежът се върти в противоположна посока на часовниковата стрелка със скорост ω

Хоризонталната проекция $\mathbf{A}_2$ е равна на $A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$. От векторния анализ е известно, че при събиране на два вектора по правилото на паралелограма се образува нов, резултантен вектор $\mathbf{A}_R$, при това x-компонентата му е сума от x-компонентите на събираемите вектори. Оттук получаваме решението на задачата. Лесно се проверява, че се получава правилен резултат в нашия частен случай при $A_1 = A_2 = A$. Наистина на фиг. 29.9 се вижда, че $\mathbf{A}_R$ лежи по средата между $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ и съставя ъгъл $\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)$ с всеки от тях. Следователно $A_R = 2A\cos\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)$, което съвпада с предишния резултат. Освен това в случая $A_1 = A_2$ фазата на $\mathbf{A}_R$ е средното аритметично на фазите на $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$. За неравни A_1 и A_2 задачата се решава също така просто. Ние можем да наречем това *геометрично* решение на задачата.

Съществува още един метод за решение на задачата; него бихме могли да наречем *аналитичен*. Вместо да рисуваме схема, подобна на приведената на фиг. 29.9, ще напишем изрази, които имат същия смисъл като чертежа и ще съпоставим на всеки вектор *комплексно число*. Реалните части на тези комплексни числа отговарят на реалните физически величини. В нашия конкретен случай вълните се записват по следния начин:

$A_1 \exp[i(\omega t+\varphi_1)]$ (реалната част е $A_1 \cos(\omega t+\varphi_1)$ и $(A_2 \exp[i(\omega t+$ $+\varphi_2)]$.

Да съберем двете вълни

$$R = A_1 e^{i(\omega t+\varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t+\varphi_2)} = (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2})\, e^{i\omega t}, \tag{29.13}$$

или

$$\hat{R} = A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2} = A_R e^{i\varphi_R}. \tag{29.14}$$

По този начин задачата е решена, тъй като ние имаме окончателен резултат във вид на комплексно число с модул A_R и фаза φ_R. За илюстрация на аналитичния метод да намерим амплитудата A_R, т. е „дължината" на R. Дължината на комлексното число, повдигната на квадрат, е самото комплексно число, умножено по спрегнатото число. Комплексното спрягане се състои в изменението на знака на i. Оттук получаваме

$$A_R^2 = (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2})(A_1 e^{-i\varphi_1} + A_2 e^{-i\varphi_2}). \tag{29.15}$$

Като умножим, получаваме $A_1^2 + A_2^2$ и кръстосаните членове

$$A_1 A_2 [e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} + e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}].$$

По-нататък

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta,$$

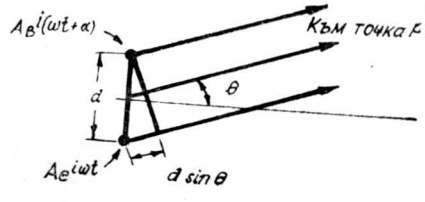
т. е. $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$. Следователно крайният резултат е

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{29.16}$$

(С помощта на формулите от тригонометрията лесно се установява съвпадението на получения резултат с дължината A_R на фиг. 29.9.)

И тъй резултантната интензивност е сума от члена A_{21}, който възниква от действието само на първия източник, от интензивността A_2^2, равна на интензивността на втория източник, и от още един допълнителен член. Този допълнителен член ние ще наречем *интерференчен ефект*. Той представлява разлика от истинската интензивност и сумата от двете интензивности. (В английския разговорен език интерференция (interference) означава намеса, пречка, но във физиката думите често губят първоначалния си смисъл и се употребяват със съвсем друго значение.) Ако интерференчният член е положителен, ние ще говорим за *конструктивна* интерференция (буквалният смисъл на този израз ще се стори ужасен на всички други освен на физиците). Ако е отрицателен, ще говорим за *деструктивна* интерференция.

Сега да видим как да приложим общата формула (29.16) за събирането на полетата на лъчението на два осцилатора към тези частни случаи, които ние вече обсъдихме качествено. За целта е необходимо само да пресметнем фазовата разлика $\varphi_1 - \varphi_2$ на двата сигнала, пристигащи в дадена точка на пространството. (Ефектът, разбира се, е свързан с фазовата разлика, а не с абсолютните стойности на фазите.) Нека да разгледаме случая, когато два осцилатора с равни амплитуди и с относителна фаза на трептенията α (когато трептенията на единия имат нулева фаза, фазата на другия е α) са разположени на разстояние d. Ще търсим интензивността под ъгъл θ спрямо линията запад — изток. (Забележете, че този ъгъл няма *нищо общо* с ъгъла θ във формулата 29.1.) Разликата в разстоянията от точката P до осцилаторите е равна на $d\sin\theta$ (фиг. 29.10), затова фазовата разлика, възникваща поради тази причина, е равна на броя дължини на вълните, които се нанасят върху отсечката $d\sin\theta$, умножена по 2π. (По-подготвеният читател вероятно би умножил вълновото число κ, т. е. скоростта на изменение на фазата с разстоянието, по $d\sin\theta$ — резултатът ще бъде един и същ.) Фазовата разлика, възникваща поради разликата в пътищата на лъчите, е $(2\pi d\sin\theta)/\lambda$, но поради относителното закъснение на осцилаторите възниква допълнителна фазова разлика α. Оттук



Фиг. 29.10. Два осцилатора с еднаква амплитуда и фазова разлика α

пълната фазова разлика на две вълни в точката от наблюдението е

$$\varphi_2-\varphi_1=\alpha+2\pi d\frac{1}{\lambda}\sin\theta. \tag{29.17}$$

Този израз обхваща всички случаи. Сега остава само в (29.16) да заместим $\varphi_2-\varphi_1$ с неговото равно и да положим $A_1=A_2$; ще се получи формула, с чиято помощ може да се изведат всички резултати за две антени с еднаква интензивност.

Да разгледаме частните случаи. Например на фиг. 29.5 ние смятахме, че интензивността под ъгъл 30° е равна на 2. Откъде се получава това? Осцилаторите се намират на разстояние $\lambda/2$, следователно за ъгъл 30° $d\sin\theta=\lambda/4$. Оттук $\varphi_2-\varphi_1=2\pi\lambda/4\lambda=\pi/2$ и интерференчният член е равен на нула. (Става събиране на два вектора, насочени под ъгъл 90° един спрямо друг.) Сумата от векторите е хипотенуза на правоъгълен равнобедрен триъгълник, тя е $\sqrt{2}$ пъти по-голяма от всяка амплитуда. Следователно интензивността е 2 пъти по-голяма от интензивността на всеки източник поотделно. Всичките останали примери се изследват по същия начин.

30

Дифракция

1. **Резултантно поле на n еднакви осцилатора**
2. **Дифракционна решетка**
3. **Разделителна способност на дифракционната решетка**
4. **Параболична антена**
5. **Оцветени слоеве; кристали**
6. **Дифракция от непрозрачен екран**
7. **Поле на система осцилатори, разположени в една равнина**

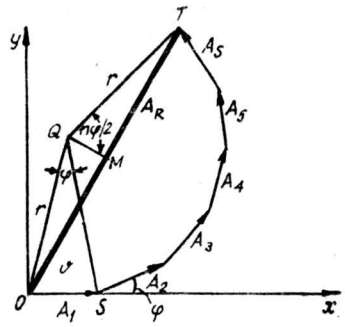
1. Резултантно поле на n еднакви осцилатора

Тази глава е непосредствено продължение на предшествуващата, макар че названието „*Интеференция*“ тук е заменено с думата „*Дифракция*“. На никого досега не му се е удало да обясни удовлетворително разликата между дифракцията и интерференцията. Въпросът е само в навика, а съществено физично различие между тези явления няма. Единственото нещо, което може да се каже по този повод, е следното: когато източниците са малко, например два, резултатът от тяхното съвместно действие обикновено наричат интерференция, а ако са много, по-често говорят за дифракция. Затова ние няма да си усложняваме работата с въпроса интерференция ли е това, или дифракция, а просто ще продължим нашето обсъждане от мястото, на което се спряхме в предшествуващата глава.

Да обсъдим сега случая, когато имаме n осцилатора, разположени на равни разстояния един от друг, имащи равни амплитуди, но различни фази на създаваните от тях полета. Фазовата разлика възниква или от избора на определени фазови изместванията в трептенията на осцилаторите, или от това, че ние се намираме под ъгъл към осцилаторите и възниква разлика в пътищата на лъчите. Независимо от причината за възникване на фазовата разлика необходимо е да се пресметне сума от следния вид:

$$R=A\{\cos\omega t+\cos(\omega t+\varphi)+\cos(\omega t+2\varphi)+\cdots+\cos[\omega t+(n-1)\varphi]\}, \tag{30.1}$$

където φ е фазовата разлика между съседните осцилатори за дадена посока на лъчите. В дадения частен случай $\varphi=\alpha+2\pi d\frac{1}{\lambda}\sin\theta$. Да пресметнем сумата R. За целта ще използуваме геометричния метод за събиране. Дължината на първото слагаемо е A, а фазата му е нула; дължината на второто е също A, а фазата му е φ. Следващото слагаемо отново има дължина A и фаза 2φ и т. н. В края на краищата се получава част от правилен многоъгълник с n страни (фиг. 30.1).



Фиг. 30.1. Резултантна амплитуда от шест еквидистантни източника при фазова разлика φ между всеки два съседни източника

Върховете на многоъгълника, разбира се, лежат върху окръжност, чийто радиус ние трябва да намерим, за да определим полеко резултантната амплитуда. Нека Q е нейният център. Тогава ъгълът OQS е равен на фазата φ (тъй като радиусът QS образува с $\mathbf{A}_2$ ъгъл, еднакъв с тоя между QO и $\mathbf{A}_1$). Следователно радиусът r трябва да удовлетворява равенството $A=2r\sin\varphi/2$, откъдето намираме големината на r. Големият ъгъл OQT е равен на $n\varphi$; следователно $A_R=2r\sin n\varphi/2$. Като изключим от двете равенства r, получаваме

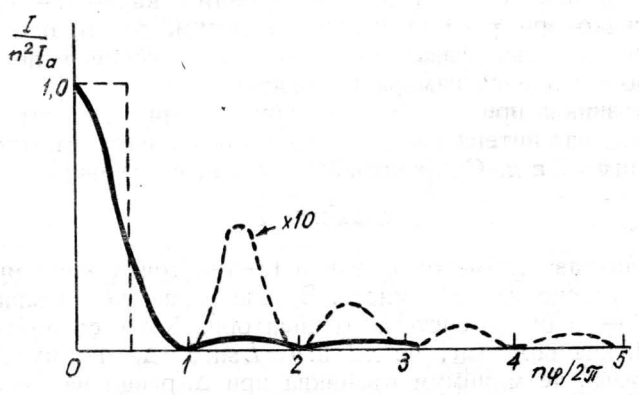
$$A_R=A\frac{\sin n\varphi/2}{\sin\varphi/2}. \tag{30.2}$$

По този начин резултантната интензивност се оказва

$$I=I_0\frac{\sin^2 n\varphi/2}{\sin^2\varphi/2}. \tag{30.3}$$

Да направим анализ на тази формула и да обсъдим произтичащите от нея следствия. Преди всичко, като положим $n=1$, получаваме, както и трябваше да се очаква, $I=I_0$. Да проверим формулата за $n=2$: с помощта на съотношението $\sin\varphi=2\sin\varphi/2\cos\varphi/2$ веднага получаваме $A_R=2A\cos\varphi/2$, което съвпада с (29.12).

Ние сме принудени да разглеждаме събиране на полета от много източници, защото в този случай интензивността в дадена посока се получава много по-голяма, отколкото в съседните, т. е. всички странични максимуми се оказват много по-малки от основния. За да разберем този факт, нека начертаем кривата, която съответствува на израза (30.3) за големи n и за φ, близки до нулата. Преди всичко, когато φ е равно точно на нула, ние получаваме отношение 0/0, но фактически за безкрайно малки φ отношението на синусите е n^2, тъй като синуса можем да заменим с неговия аргумент. Така максимумът на кривата е n^2 пъти по-голям от интензивността на един осцилатор. Този резултат може лесно да се разбере, тъй като при нулева фазова разлика всичките n малки вектора се събират в един, който е n пъти по-голям от изходния, а интензивността се увеличава n^2 пъти.



Фиг. 30.2. Зависимост на интензивността на фазовия ъгъл при голямо число осцилатори с еднакви амплитуди

С нарастването на фазата φ отношението на двата синуса намалява и се обръща в нула за пръв път при $n\varphi/2=\pi$, тъй като $\sin\pi=0$. С други думи, стойността $\varphi=2\pi/n$ отговаря на първия минимум на кривата (фиг. 30.2). От гледна точка на векторите на фиг. 30.1 първият минимум възниква в случая, когато стрелките на векторите се връщат в изходната точка, при това пълната фазова разлика между първия и последния осцилатор е равна на 2π.

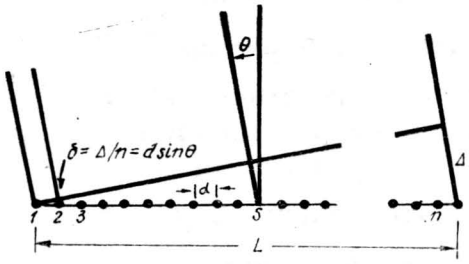
Да преминем към следващия максимум и да покажем, че той наистина, както и очаквахме, е много по-малък от първия. За точното определяне на неговото положение трябва да вземем под внимание едновременното изменение на числителя и знаменателя в (30.3) с изменението на φ. Ние няма да правим това, защото при голямо n $\sin\varphi/2$ се изменя много по-бавно от $\sin n\varphi/2$ и условието $n\varphi/2=1$ дава положението на максимума с достатъчна точност. Последният се достига при $n\varphi/2=\frac{3}{2}\pi$ или $\varphi=\frac{3\pi}{n}$. Това означава, че стрелките на векторите описват окръжност и половина.

Като заместим φ с $3\pi/n$, получаваме $\sin^2 3\pi/2=1$ в числителя на (30.3) (именно за тази цел и избрахме ъгъл φ) и $\sin^2 3\pi/2n$ в знаменателя. При достатъчно големи n можем да заменим синуса с неговия аргумент: $\sin\frac{3\pi}{2n}=\frac{3\pi}{2n}$. Оттук получаваме за интензивността на втория максимум $I=I_0\cdot\frac{4n^2}{9\pi^2}$. Но $n^2 I_0$ не е нищо друго освен интензивността в първия максимум, т. е. интензивността на втория максимум е равна на $4/9\pi^2$ от максималната, което съставя 0,047 от нея или по-малко от 5%. Очевидно останалите максимуми ще бъдат още по-малки. По този начин възниква много тесен главен максимум и слаби допълнителни максимуми от двете страни на главния.

Може да се покаже, че площта под кривата на интензивността, включвайки всичките максимуми, е равна на $2\pi nI_0$ и е два пъти, по-голяма от площта на пунктирания правоъгълник на фиг. 30.2

Да видим сега какво дава формулата (30.3) за различните случаи. Нека източниците да са разположени върху една линия, както е показано на фиг. 30.3. Имаме всичко n източника, на разстояние d един от друг, и разликата на фазите между съседните източници е избрана равна на α. Тогава за лъчите, разпространяващи се в дадена посока θ, смятана от нормалата, възниква допълнителна фазова разлика $2\pi d\frac{1}{\lambda}\sin\theta$ вследствие на разликата в хода на лъчите. По такъв начин

$$\varphi=\alpha+2\pi d\frac{1}{\lambda}\sin\theta=\alpha+k d\sin\theta. \tag{30.4}$$



Фиг. 30.3. Устройство на еднакви осцилатори, разположени на една линия

Фазата на трептенията на s-ия осцилатор е $\alpha s=s\alpha$

Да разгледаме отначало случая $\alpha=0$. Всички осцилатори трептят в еднаква фаза. Трябва да се намери интензивността на лъчението им като функция от ъгъла θ. За целта да заместим φ с $kd\sin\theta$ във формулата (30.3) и да видим какво ще се получи. Преди всичко при $\varphi=0$ възниква максимум. Значи осцилаторите, които трептят във фаза, дават мощно лъчение в посока $\theta=0$. Интересно е къде се намира първият минимум.

Той възниква при $\varphi=2\pi/n$; с други думи, първият минимум на кривата на интензивността се определя от съотношението $(2\pi d/\lambda)\sin\theta=2\pi/n$. Съкращавайки на 2π, получаваме

$$n d\sin\theta=\lambda. \tag{30.5}$$

Сега да разгледаме от физична гледна точка защо минимумът възниква именно на това място. В този израз nd е пълната дължина L на нашата система осцилатори. Като се обърнем към фиг. 30.3, ние виждаме, че $nd\sin\theta=L\sin\theta=\Delta$. Формулата (30.5) ни подсказва, че минимум възниква при Δ, равно на *дължината на вълната* λ. Но защо именно при $\Delta=\lambda$? Работата е там, че полетата на отделните осцилатори са разпределени равномерно по фаза от 0 до 360°. Стрелките (вж. фиг. 30.1) описват пълна окръжност: ние събираме равни вектори, имащи произволни посоки, а в такъв случай сумата е равна на нула. Ето при такива стойности на ъгъла, когато $\Delta=\lambda$, възниква минимум. И това е първият минимум.

Формулата (30.3) има още една важна особеност; при увеличаване на ъгъла φ с число, кратно на 2π, стойността на интензивността не се изменя. Затова при $\varphi=2\pi$, 4π, 6π и т. н. също възникват резки и високи максимуми. Близо до тези максимуми интензивността повтаря своя ход (вж. фиг. 30.2). Да си зададем въпроса, по силата на кои геометрични съотношения възникват другите максимуми. Условието за появяване на максимум се записва във вида $\varphi=2\pi m$, където m е произволно цяло число. Оттук получаваме $(2\pi d/\lambda)\sin\theta=2\pi m$. Като съкратим на 2π, ще получим

$$d\sin\theta=m\lambda. \tag{30.6}$$

Това съотношение прилича много на формулата (30.5). Обаче там имахме $nd\sin\theta=\lambda$. Разликата е в това, че тук трябва да вземем *отделния източник* и да изясним какво означава за него условието $d\sin\theta=m\lambda$; ъгълът θ тук е такъв, че разликата в пътищата $\delta=m\lambda$. С други думи, вълните, идващи от източниците, се отличават по фаза с величина, кратна на 360°, и следователно са *във фаза*. Затова при събиране на вълните възниква пак такъв висок максимум, както и в разгледания по-рано случай при $m=0$. Страничните максимуми и целият ход на интензивността тук е точно такъв, както и при $\varphi=0$. По такъв начин нашата система изпраща снопове лъчи в различни посоки, при това всеки сноп има висок централен максимум и редица слаби странични. В зависимост от големината на m главните (централни) максимуми се наричат максимуми от нулев, първи и т. н. порядък; m се нарича *порядък* на максимума.

Обърнете внимание на следния факт: ако d е по-малко от λ, формулата (30.6) има единствено решение при $m=0$. Затова, когато разстоянието между източниците е малко, възниква един единствен

сноп, концентриран около $\theta = 0$. (Разбира се, има сноп и в обратна посока.) За да получим максимуми от друг порядък, трябва разстоянието d да е по-голямо от дължината на вълната.

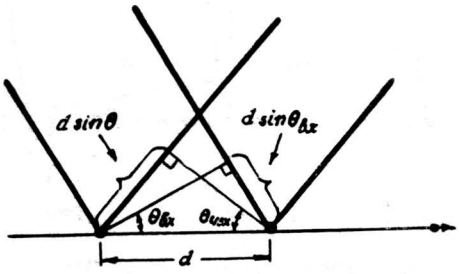
2. Дифракционна решетка

На практика равенството на фазите на осцилаторите или антените се достига с помощта на проводници и някои специални устройства. Възниква въпросът, може ли и как да се създаде подобна система за светлината. Сега ние още не умеем да правим малки радиостанции на оптическа честота в буквалния смисъл на думата, да ги съединяваме с тънки жички и да установяваме за всички еднакви фази. Обаче има един друг много прост начин, който позволява да постигнем целта.

Да предположим, че имаме голямо количество успоредни жици, на разстояние d една от друга, и източник на радиовълни, разположен много надалеч, практически в безкрайност. Този източник създава електрично поле, което при всеки проводник е с една и съща фаза. (Можем да вземем и обемна система от проводници, но ние ще се ограничим с плоска.) Тогава външното електрично поле ще движи електроните във всеки проводник назад-напред, в резултат на което те ще станат *нови излъчватели*. Такова явление се нарича *разсейване*: светлината от някой източник възбужда движение на електроните в средата, а то от своя страна генерира собствени вълни. Затова е достатъчно да вземем редица от проводници на равно разстояние един от друг, да им подействуваме с радиовълни от далечен източник и ще получим нужната ни система без каквито и да било специални контури и т. н. Ако лъчите падат по нормалата към равнината на проводниците, фазите на трептенията ще бъдат еднакви и ще възникне картината, за която говорихме по-горе. Така при разстояние между проводниците, превишаващо дължината на вълната, максималната интензивност на разсейване се получава в посоката на нормалата и в другите посоки, определени с формулата (30.6).

Точно такова устройство е пригодно и за светлината. Само че вместо жици вземат стъклена пластинка и нанасят върху нея редица резки така, че всяка от тях да разсейва светлината различно от останалата повърхност на пластинката. Ако след това насочим върху пластинката сноп светлина, то всяка резка ще стане източник, а ако разстоянието между резките е достатъчно малко, но не по-малко от дължината на вълната (практически, все едно, не може да се достигнат такива малки разстояния), възниква едно удивително явление: лъчите минават през пластинката не само под прав, но и под ъгъл спрямо нормалата, който зависи от разстоянието между резките. Устройства от такъв тип наистина съществуват и широко се използуват; наричат се *дифракционни решетки*.

Една от разновидностите на дифракционните решетки представлява стъклена пластинка, прозрачна и безцветна, с надраскани по нея резки. Броят на резките на 1 mm често достига няколко стотици, а разстоянието между тях се спазва с голяма точност. Действието на такава решетка може да се наблюдава, като насочваме през нея с помощта на проектор тясна вертикална ивица светлина (образ на процеп) върху екран. Като поставим решетката на пътя на светлината така, че резките да са разположени вертикално, ще видим на екрана същата ивица, но от двете ѝ страни ще има и *други* такива, оцветени в различни цветове. Разбира се, ние не получаваме нищо друго освен разширен образ на процепа; ъгълът θ в (30.6) зависи от λ и различното оцветяване на светлината, както знаем, се дължи на различните честоти и различните дължини на вълните. Най-голяма видима дължина на вълната има червената светлина; съгласно условието $d \sin\theta = \lambda$ на нея съответствува най-голямо θ. И ние действително забелязваме, че на екрана червената ивица лежи най-далече от центъра на образа. От другата страна трябва да има също такава ивица и



Фиг. 0.4. Разликата в пътищата на два лъча, отразени от съседните резки на решетката, е равна на $d\sin Q_{изх} - d\sin Q_{вх}$

наистина ние я виждаме на екрана. Изразът (30.6) има още едно решение с $m=2$. На съответното място на екрана се вижда някакво размазано слабо петно, а по-нататък встрани едва се забелязва цяла редица слаби ивици.

Току-що казахме, че максимумите от всеки порядък трябва да имат еднаква интензивност, а тук получаваме различна интензивност. Освен това десният и левият максимуми от първия порядък се отличават по яркост. Тук причината се крие във факта, че решетките се приготвят по особен начин—именно така, че да се получава подобен ефект. Как се прави това? Ако дифракционните решетки имаха безкрайно тънки резки, разположени на строго равни разстояния една от друга, интензивността действително щеше да бъде еднаква за всички максимуми. Но фактически, макар че разгледахме само най-простия случай, ние бихме могли да вземем също така и система от *двойки* антени, при това бихме установили определена фазова разлика и интензивност за всяка двойка. Тогава бихме могли да получим различна интензивност за максимумите от различни порядъци. Върху дифракционната решетка често нанасят не равни, а трионообразни резки. Подбирайки специално формата на „зъбците", може да се увеличи интензивността на спектъра от даден порядък спрямо останалите. При практическа работа с решетките е желателно да има максимална яркост в един порядък. Ние ще отложим засега твърде сложното обяснение на тези факти. Ще кажем само, че такива решетки са много по-полезни в приложенията.

Дотук разглеждахме случая, когато фазите на всички източници са равни. Обаче получената формула (30.3) е пригодна и тогава, когато фазовата разлика φ на всеки източник спрямо предшествуващия е постоянна и равна на α. Това означава, че антените трябва да бъдат съединени по схема, която осигурява малко фазово изместване между тях. Може ли да се създаде подобно устройство за светлината? Да, и много просто. Нека източникът на светлина да се намира в безкрайност и светлината да пада върху решетката под някакъв ъгъл $\theta_{вх}$ (фиг.30.4); да разгледаме разсеяния светлинен сноп, излизащ под ъгъл $\theta_{изх}$ ($\theta_{изх}$ — това е нашият предишен ъгъл θ, а $\theta_{вх}$ е нужен за създаване на фазова разлика между източниците). Светлинният сноп от безкрайно отдалечения източник пада отначало върху първата резка, после върху втората и т. н., фазовото изместване на светлината, падаща върху две съседни резки, е $\alpha = d\sin\theta_{вх}/\lambda$. Оттук получаваме формулата за дифракцията на светлината, падаща върху решетка под някакъв ъгъл:

$$\varphi = 2\pi d\,\frac{\sin\theta_{изх}}{\lambda} - 2\pi d\,\frac{\sin\theta_{вх}}{\lambda}. \qquad (30.7)$$

Нека се опитаме да намерим посоката на максималната интензивност в този случай. Условието за възникване на максимум се състои пак в това, че φ трябва да бъде число, кратно на 2π. Тук трябва да отбележим няколко интересни момента:

Преди всичко да разгледаме доста интересния случай, който съответствува на $m=0$; когато d е по-малко от λ, тогава $m=0$ и други решения не възникват. Тогава получаваме $\sin\theta_{вх} = \sin\theta_{изх}$, т. е. разсеяният лъч излиза в *същата посока*, както и падащият върху дифракционната решетка. Но не трябва да се мисли, че светлината просто „преминава през решетката". Ние говорим за *други лъчи*. Преминаващата направо светлина идва от първоначалния източник, а ние имаме предвид светлината, която *възниква при разсейването*. Получава се така, че разсеяният светлинен сноп се разпространява в същата посока, както и първоначалният; нещо повече, двата снопа могат да интерферират един с друг, за което ние ще разкажем в следващите глави.

В нашия случай има още едно възможно решение. При зададен $\theta_{вх}$ ъгълът $\theta_{изх}$ може да бъде равен на допълнителния на $\theta_{вх}$ ъгъл $(\pi-\theta_{вх})$. По този начин освен лъча по посоката на падащия светлинен сноп възниква още един лъч. Не е трудно да се забележи, че неговата посока се подчинява на следното правило: *ъгълът*

на падането е равен на ъгъла на разсейването. Този лъч ние ще наречем *отразен.*

Така ние се приближаваме към разбирането на основния механизъм на процеса отражение: падащата светлина възбужда движението на атомите в отразяващото тяло, а то от своя страна генерира нова вълна, като една от посоките на разсяната вълна (което е *единствено* за малки спрямо дължината на вълната разстояния между разсейвателите) е такава, че ъгълът на падането на светлинния сноп е равен на ъгъла, под който излиза отразеният лъч.

Да преминем сега към особения случай, когато $d \to 0$. Нека е дадено например плътно тяло с крайни размери. Нека още фазовата разлика между съседните разсейватели да клони към нула. Иначе казано, ще поставяме все нови и нови антени в промежутъците между старите такива, така че фазовите разлики ще стават все по-малки с намаляването на разстоянието до съседните антени, но общото число антени нека да расте така, че пълната фазова разлика между първата и последната антена да остава постоянна. Да видим как се видоизменя формулата (30.3), ако пълната фазова разлика $n\varphi$ остава постоянна (нека $n\varphi = \Phi$), а числото n и фазата φ да клонят съответно към безкрайност и нула. Сега стойността на φ е толкова малка, че $\sin\varphi = \varphi$ и ако вземем под внимание, че $n^2 I_0$ е интензивността I_m в центъра на максимума, ще получим

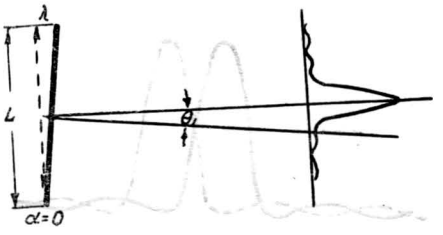
$$I = 4I_m \frac{\sin^2 \Phi/2}{\Phi^2}. \qquad (30.8)$$

На фиг. 30.2 е показан ходът на тази гранична зависимост.

В дадения случай дифракционната картина се получава в общи черти същата, както и за краен промеждутък при $d > \lambda$; страничните максимуми са същите, няма само максимуми от висш порядък. Когато всички разсейватели са във фаза, възниква максимум в посока $\theta_{изх} = 0$ и минимум при $\Delta = \lambda$ точно както за крайни n и d. По такъв начин се оказва възможно да се разгледа *непрекъснатото* разпределение на разсейвателите или осцилаторите, използувайки интеграли вместо суми.

Като пример нека вземем дълга линия, съставена от осцилатори, които трептят паралелно на нея (фиг. 30.5). Такова устройство дава максимална интензивност в посока, перпендикулярна на нишката. Отгоре и отдолу на екваториалната равнина има неголяма интензивност, но тя е много малка. Използувайки този резултат, ще преминем към по-сложно устройство. Нека ни са дадени много нишки, всяка от които излъчва в екваториалната равнина. Ако се намираме в централната равнина, перпендикулярна на всички нишки, интензивността на излъчването на дългите линии от осцилатори в различните посоки се определя също така, както и в случая с безкрайно къси линии—трябва да се съберат интензивностите от всички дълги нишки. Ето защо вместо мъничките решетки—антените, които ние разглеждахме, би могло да се използуват решетки с дълги и тесни процепи. Всеки дълъг процеп излъчва в своя собствена посока, не нагоре или надолу, а само перпендикулярно на процепа и като ги разположим един до друг в хоризонталната равнина, ние получаваме интерференция.

Така може да се създадат още по-сложни устройства, като разполагаме разсейвателите в линия, в равнина или в пространство. Отначало ние ги разполагахме в линия, а после анализирахме случая, когато те запълват цяла ивица; за да получим отговор, всеки път трябва да събираме приносите от отделните разсейватели. Последният принцип важи за всички случаи.



Фиг. 30.5. Разделението на интензивността на излъчването от непрекъсната линия осцилатори има висок централен максимум и многочислени слаби странични максимуми

3. Разделителна способност на дифракционната решетка

Сега вече можем да разберем редица важни явления. Например да опитаме да определим дължината на светлинната вълна с помощта на дифракционна решетка. Образът на процепа върху екрана се разпада на цял спектър от линии, затова с помощта на дифракционната решетка можем да разложим светлината на съставящите я дължини на вълни. Възниква един интересен въпрос: нека предположим, че имаме два източника с малко различни честоти на излъчването или с малко различни дължини на вълните; колко близки трябва да бъдат тези честоти, за да не можем да ги различим една от друга по дифракционната картина? Червените и сините линии се различават ясно. Но ако единият лъч е червен, а другият много малко по-червен, колко близки трябва да бъдат те? Отговорът се дава с величината, която се нарича разделителна способност на решетката. По-долу ние използуваме единия от начините за нейното определяне.

Да предположим, че сме успели да намерим дифракционния максимум за лъчите от определен цвят, разположен под еднакъв ъгъл. Ако изменим дължината на вълната, големината на фазата $(2\pi d \sin\theta/\theta)$ ще бъде друга и максимумът, разбира се, ще възникне при друг ъгъл. Именно затова се разделят на екрана червените и сините линии. С колко трябва да се отличават ъглите, за да можем да различим два различни максимума. Ако върховете на максимумите съвпадат, разбира се, ние не можем да ги различим. Ако пък максимумите са достатъчно далече един от друг, ще възникнат две изпъкналости. За да забележим кога започва да се обрисува двойната изпъкналост, най-добре е да се възползуваме от простото правило (или критерий) на *Релей* (фиг. 30.6). Според това правило първият минимум на дифракционната картина, съответствуваща на дадена дължина на вълната, трябва да съвпада с максимума на другата дължина на вълната. Сега вече не е трудно да се пресметне разликата в дължините на вълните, когато единият минимум съвпада точно с максимума на другия сноп. За целта е най-добре да използуваме геометричния начин.



Фиг. 30.6. Илюстрация на критерия на Релей
Максимумът на едното разпределение съвпада с максимума на другото

За да възникне максимум при дължина на вълната λ', разстоянието Δ (вж. фиг. 30.3) трябва да бъде равно на $n\lambda'$, а за да бъде той от m-ти порядък, разстоянието Δ трябва да бъде $mn\lambda'$. С други думи, $(2\pi d/\lambda')$, $\sin\theta = 2\pi m$ и $nd\sin\theta$, което е равно на Δ, е λ', умножено по mn, или $mn\lambda'$. Ако искаме под същия ъгъл да се появи минимум на друг лъч с дължина на вълната λ, разстоянието Δ трябва да е по-голямо от $mn\lambda$ точно с една дължина на вълната λ, т. е. $\Delta = mn\lambda + \lambda = mn\lambda'$. Оттук, като положим $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$, получаваме

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mn}. \tag{30.9}$$

Отношението $\frac{\lambda}{\delta\lambda}$ се нарича разделителна способност на дифракционната решетка; тя е равна, както се вижда от формулата, на общия брой резки на решетката, умножено по порядъка на максимума на лъча. Можем лесно да се убедим, че тази формула е еквивалентна на следното твърдение: разликата в честотите трябва да бъде равна на реципрочната стойност на разликата във времената за преминаване на най-крайните интерфериращи лъчи[1].

$$\delta\nu = \frac{1}{T}.$$

Полезно е да се запомни именно тази обща формула, защото тя е приложима не само за решетката, но и за всички устройства, докато извеждането на формулата (30.9) е свързано със свойствата на дифракционните решетки.

---

[1] В нашия случай $T = \Delta/c = \frac{mn\lambda}{c}$, където c е скоростта на светлината. Честотата $\nu = c/\lambda$, така че $\delta\nu = c\frac{\delta\lambda}{\lambda^2}$.

4. Параболични антени

Да разгледаме сега още един въпрос, свързан с разделителната способност. Става дума за антените на радиотелескопите, които се използуват за определяне положението и ъгловите размери на небесните източници на радиовълни. Ако вземем нашата стара антена и приемем с нея сигнали, разбира се, не бихме могли да кажем откъде идват сигналите. А да се знае къде се намира източникът е много важно. Разбира се, може цяла Австралия да се покрие с проводници-диполи, разположени на равни разстояния един от друг. След това да включим диполите към един приемник така, че да се изравнява закъснението на сигналите в съединителните проводници. Тогава сигналите от всички диполи ще пристигат в приемника с една и съща фаза. Какво ще се получи в резултат? Ако източникът е разположен достатъчно далече и право над нашата система, сигналите от всички антени ще дойдат до приемника във фаза.

Но да предположим, че източникът е разположен под неголям ъгъл θ спрямо вертикалата. Тогава сигналите, приети от различни антени, ще бъдат малко изместени по фаза. В приемника тия сигнали се събират и ако ъгълът θ е достатъчно голям, ние нищо няма да получим. Но колко голям трябва да бъде този ъгъл? *Отговор*: ние ще получим нула, ако ъгълът $\Delta/L=\theta$ (вж. фиг. 30.3) съответствува на фазово изместване 360°, т. е. ако Δ е равно на дължината на вълната.

Този резултат може лесно да се разбере, ако вземем предвид, че векторите, които съответствуват на сигналите от различни антени, образуват затворен многоъгълник и тогава тяхната сума се обръща в нула. Най-малкият ъгъл, който може да бъде различен от антенното устройство с дължина L, е $\theta=\lambda/L$. Да отбележим, че кривата на чувствителността на антената при приемане има същия вид, както и разпределението на интензивността, което дават антените-предаватели. Тук действува тъй наречения *принцип на обратимостта*. Според този принцип за всички антенни устройства при всички ъгли и т. н. е вярно следното правило: относителната чувствителност в различните посоки съвпада с относителната интензивност за същите посоки, ако заменим приемника с предавател.

Има антенни устройства и от друг тип. Вместо да нареждаме цяла система от диполи с куп проводници помежду им, можем да ги разположим по крива, а приемника да поставим в такава точка, откъдето той би могъл да фиксира отразените сигнали. Кривата се избира с такава хитра сметка, че всички лъчи от далечния източник след разсейването да достигат приемника за едно и също време (вж. фиг. 26.12). Значи кривата трябва да бъде *парабола*; тогава, ако източникът е на нейната ос, то във фокуса ще възникне голяма интензивност на разсеяното лъчение. Разделителната способност на такова устройство се намира лесно. Разположението на антените по параболата тук е несъществено. Параболичната форма е избрана за удобство; тя позволява да се съберат всички сигнали за еднакво време и при това без проводници. Минималният ъгъл, който може да бъде различен с помощта на такова устройство, е пак равен на λ/L, където L е разстоянието между крайните антени. Този ъгъл не зависи от промеждутъка между съседните антени, те могат да бъдат разположени много близко, фактически може вместо система антени да се вземе парче метал. По принцип това е също като огледалото на телескопа. И така ние намерихме разделителната способност на телескопа. (Понякога разделителната способност се пише във вида $\theta=1{,}22\,\lambda/L$, където L е диаметърът на телескопа.) Множителят 1,22 се появява поради следната причина: при извода на формулата $\theta=\lambda/L$ смятахме интензивността на всички диполи еднаква независимо от тяхното положение, но тъй като телескопите обикновено се правят кръгли, а не квадратни, интензивността на сигналите от краищата е по-малка, отколкото от средата; за разлика от случая с

квадратно сечение краищата дават относително малък принос. Следователно ефективният диаметър е по-малък от истинския, което е взето под внимание с множителя 1,22. Всъщност такава точност във формулата за разделителната способност изглежда твърде педантична*.

5. Оцветени слоеве; кристали

По-горе бяха разгледани някои ефекти, възникващи при интерференция на няколко вълни. Но можем да дадем редица други примери, чийто основен механизъм е твърде сложен, за да говорим сега за тях (ние ще ги обсъдим по-нататък), а сега да разгледаме интерференчните явления, които възникват в тези примери.

Например когато светлината пада по нормалата върху повърхността на средата с показател n, част от нея се отразява. *Причината* за отражението сега е трудно да разберем; за нея ще поговорим по-късно. А сега да предположим, че ние знаем за отражението на светлината при влизането и излизането ѝ от пречупващата среда. Тогава при отражение от тънък слой възниква съвкупност от две вълни, отразени от предната и задна повърхност на слоя; при достатъчно малка дебелина на слоя тези вълни ще интерферират, като се усилват и отслабват в зависимост от знака на фазовата разлика. Може да се случи например червената светлина да се отразява с усилване, а синята, която има друга дължина, — с отслабване, така че отразеният лъч има ярка червена окраска. Ако изменим дебелината на слоя и наблюдаваме отражението, да кажем, там, където слоят е по-дебел, можем да видим обратната картина, т. е. червените вълни ще се отслабват, а сините няма да се отслабват и слоят ще изглежда син или зелен, или жълт, изобщо оцветен в някакъв цвят. По такъв начин ние виждаме слоя *оцветен*, а ако гледаме към него под друг ъгъл, цветът ще се измени, тъй като се изменя времето за преминаване на светлината през тънкия слой с изменението на ъгъла на зрението. Така става ясна причината за възникване на сложна цветна гама от нефтените слоеве, сапунените мехури и в много други подобни случаи. Същността на явлението навсякъде е една и съща — събиране на вълни с различни фази.

Ще отбележим още едно важно приложение на дифракцията. Да вземем една дифракционна решетка и да проектираме образа ѝ върху екран. За монохроматичната светлина на определени места на екрана ще възникнат максимуми — главни и от по-висок порядък. По разположението на максимумите и дължината на вълната може да се намери разстоянието между резките на решетката. А по отношението на интензивностите на различните максимуми може да се намери формата на резките и да се различи тяхната тринообразна, праволинейна или друга форма, *без да се гледа решетката.* Този принцип служи за определяне на положението на *атомите в кристалите.* Единствената сложност идва от тримерността на кристала; той представлява тримерна периодична решетка, съставена от атоми. Ние не можем тук да използуваме видимата светлина, защото дължината на вълната трябва да бъде по-малка от разстоянието между атомите, иначе няма да се получи никакъв ефект; следователно трябва да се вземе излъчване с много къса дължина на вълната, т. е. рентгенови лъчи. И така, като осветим кристала с рентгенови лъчи и като намерим интензивността на максимумите от различен порядък, може да определим разположението на атомите в кристала, без да имаме някаква възможност да видим всичко това със собстве-

---

* Преди всичко това самият критерий на Релей е приблизителен. Той само дава ъгловата област, където е трудно да се разбере колко звезди има на образа — една или две. В действителност, ако измерим точно разпределението на интензивността, двата източника могат да се различат и при ъгли θ, дори по-малки от λ/L.

ните си очи. Именно по този начин е намерено разположението на атомите в различните вещества. В гл. 1 ние приведохме няколко схеми, показващи разположението на атомите в кристалите на солта и редица други вещества. Ние пак ще се върнем към този въпрос по-нататък и ще го обсъдим по-подробно, а сега повече няма да се занимаваме с тази интересна проблема.

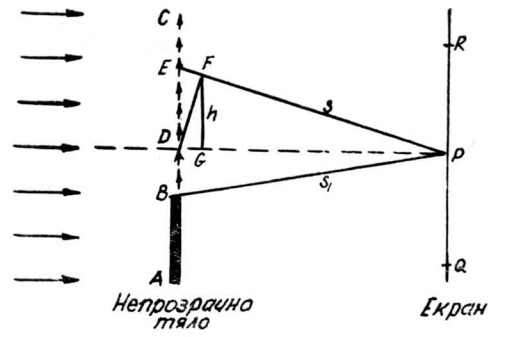
6. Дифракция от непрозрачен екран

Да разгледаме сега едно твърде интересно явление. Нека ни е даден непрозрачен лист с отвори и нека от едната му страна да е разположен светлинен източник. Нас ни интересува какъв образ ще възникне върху екрана от другата страна на листа. Всеки ще каже, че светлината ще премине през отворите и ще се получи на екрана някакъв образ. Оказва се, че този образ може да се получи с голяма точност, ако предположим, че светлинните източници са разположени равномерно по ширината на отворите, а фазите им са точно такива, както ако нямаше непрозрачния лист. В действителност в отворите *няма* източници; това е тъкмо мястото, където те със *сигурност* не могат да бъдат. При това правилна дифракционна картина се получава само ако предположим, че източниците са разположени именно в отворите; доста странен факт. По-късно ще обясним защо такова предположение е правилно, а засега ще го приемем на вяра.

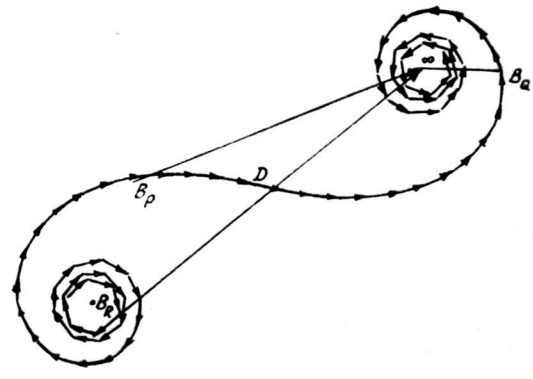
В теорията на дифракцията има един род дифракционни явления, които си струва кратко да обсъдим. Става дума за дифракция от непрозрачни екрани. Обикновено в елементарните курсове за тях се говори много по-късно, тъй като за тяхното обяснение са нужни доста сложни формули за събиране на малки вектори. Във всичко друго тези явления не се отличават от вече разгледаните от нас. По същество всички интерференчни явления са еднакви; в тях не влизат никакви сложни понятия, само условията за възникване могат да бъдат по-сложни и тогава векторите на полето се събират по-трудно; това е всичко.

Да предположим, че светлината идва от безкрайност, пада върху даден предмет и той хвърля сянка. На фиг. 30.7 е изобразен екран, върху който предметът AB хвърля сянка; при това светлинният източник е отдалечен на разстояние, много по-голямо от дължината на вълната. От пръв поглед изглежда, че вън от сянката интензивността на светлината е максимална, а вътре трябва да бъде пълна тъмнина. В действителност, ако разглеждаме интензивността като функция на разстоянието до края на сянката, тя отначало ще расте, а после ще започне да намалява, колебаейки се по най-сложен начин около края на сянката (фиг. 30.8). Да видим защо става така. За обяснението ще се възползуваме от недоказаната от нас теорема, че вместо истинската картина на опита може да се въведат ефективни източници, равномерно разположени вън от обекта.

Да си представим ефективните източници във вид на голямо количество близко разположени антени и да намерим интензивността в някоя точка P. Това е почти същото, с което се занимавахме досега. Но ненапълно, тъй като сега нашият екран не е на безкрайност. В дадения случай ние се интересуваме от интензивността на интерфериращите лъчи на крайно разстояние, а не на безкрайност. Интензивността в дадена точка се дава от сумата на интензивностите от всяка антена. Отначало да вземем антената в точката D, право срещу P. Ако леко изменим ъгъла, да речем, като се повдигнем на височина h, на лъча ще му трябва повече време, за да достигне точката P (амплитудата също ще се измени, тъй като разстоянието до източника се е увеличило, но тази разлика е много малка поради голямото разстояние и е много по-малко важна от фазовото изменение на лъчението). По-нататък, разликата $EP-DP$ е равна на $h^2/2s$, т. е. фазовата разлика е пропорционална на *квадрата* на разстоянието до точката D за разлика от предишния случай, когато s беше безкрайно и фазовата



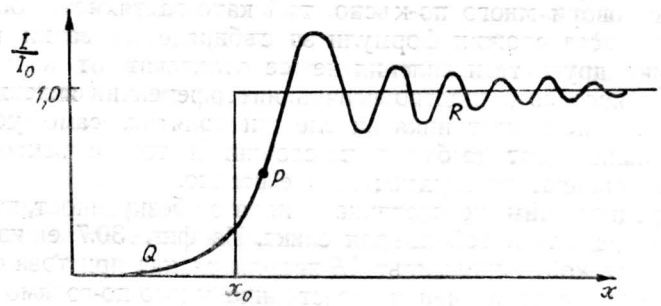
Фиг. 30.7. Далечния източник хвърля сянка от непрозрачния предмет на екрана



Фиг. 30.8. Събиране на амплитуди от голямо число осцилатори, излъчващи с една и съща фаза

Фазовата разлика за сметка на закъснението е пропорционална на квадранта на разстоянието до точката D на фиг. 30.7

разлика беше свързана с h *линейно*. Когато фазите зависят от h линейно, всеки вектор е завъртян на постоянен ъгъл спрямо предшествуващия. А сега ние трябва да построим крива, събирайки безкрайно малки вектори при условие, че образуваният от тях ъгъл с абсцисната ос расте с увеличаването на дължината на кривата не линейно, а *квадратично*. Явният вид на кривата се намира с помощта на доста сложни математични методи, но ние винаги можем да я построим, като нанасяме векторите под нужния ъгъл. В крайна сметка ние получаваме една забележителна крива (наричана спирала на Корню), която е изобразена на фиг. 30.8. Как да се ползуваме от нея? Нека е нужно да се определи интензивността да кажем в точката P. Събираме вълните с различни фази от точката D нагоре до безкрайност и надолу до точката B_p (фиг. 30.8). По такъв начин трябва да нанесем редица стрелки под постоянно растящ ъгъл, започвайки от точката B_p на фиг. 30.8. Интензивността от областта над B_p се дава със спиралната крива. Ако сумирането завършваше в някоя точка, то пълната амплитуда щеше да се представи с вектора от B_p до тази точка; в нашия случай сумирането става до безкрайност, така че търсената амплитуда е векторът $\mathbf{B}_{p\infty}$. Точката върху кривата, която съответствува на точката B_p на предмета, зависи от положението на P, защото точката D върху кривата (инфлексната точка) винаги се отнася към избраната т. P. Следователно в зависимост от положението на P над B началната точка, откъдето се прекарва векторът, попада в различни места на долната спирала и резултатният вектор $\mathbf{B}_{p\infty}$ има многочислени максимуми и минимуми (фиг. 30.9)



Фиг. 30.9. Ход на интензивността около края на сянката
Геометричният край на сянката е в точката x_0

Обаче, ако ние се намираме в точка Q, от другата страна на P, ще ни потрябва само горният край на спиралата. С други думи, началната точка на резултатния вектор ще бъде не D, а B_Q и следователно под P интензивността трябва непрекъснато да пада при отдалечаване на Q в областта на сянката.

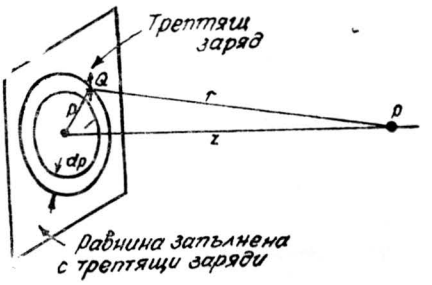
Има една величина, която можем лесно да изчислим веднага и с това да се убедим, че ние тук разбираме нещо, — това е интензивността в точката, лежаща право срещу края на предмета. Тази интензивност е равна на 1/4 от интензивността на падащата светлина. Причина: за точката срещу края на предмета (когато B_p съвпада с D на фиг. 30.8) се получава само половината от кривата вместо цялата, която би се получила, когато точките лежат достатъчно далече в осветената област. Ако точката R е разположена достатъчно високо, резултатният вектор се прекарва от центъра на едната спирала до центъра на другата, а за точката в края на сянката на амплитудата е равна на половината от този вектор; следователно отношението на интензивностите се получава равно на 1/4.

В тази глава ние пресмятахме интензивността в различни посоки при различни разположения на източниците. В заключение ще изведем една формула, която ще ни потрябва в следващата глава, която е посветена на показателя на пречупването. Досега ние се задоволявахме само с относителните интензивности, но

този път ще получим формулата за пълната стойност на полето при условия, за които ще бъде разказано по-долу.

§ 7. Поле на система осцилатори, разположени в една равнина

Да предположим, че имаме равнина, запълнена с осцилатори, които трептят в равнината едновременно с еднаква амплитуда и фаза. На какво е равно полето на крайно, но недостатъчно голямо разстояние от равнината? (Ние не можем да вземем точката на наблюдението близко до равнината, защото нямаме точни формули за полето близо до източника.) Нека равнината на зарядите да съвпада с равнината XY. Ние се интересуваме от полето в точка P, лежаща на оста z, достатъчно далече от равнината (30.10). Да предположим, че броят на зарядите на единица площ е равен на n, а големината на всеки заряд е q. Всички заряди извършват хармонични трептения в едно и също направление, с еднаква амплитуда и фаза. Отклонението на заряда от равновесното му положение се описва от функцията $x_0 \cos \omega t$. Можем да въведем комплексна амплитуда, чиято реална част дава реалното движение и да описваме трептението на заряда чрез $x_0 e^{i\omega t}$.



Фиг. 30.10. Поле на излъчването на осцилиращи заряди, запълващи равнина

За да намерим полето от всички заряди в точката P, трябва да пресметнем отначало полето на отделния заряд q, а после да съберем полетата от всички заряди. Както е известно, излъчваното поле е пропорционално на ускорението на заряда, т. е. на $-\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$ (и еднакво за всички заряди). Електричното поле в точка P, което се създава от заряд, разположен в точка Q, е пропорционално на ускорението на заряда q, трябва само да помним, че полето в точка P в момента се определя от ускорението на заряда в по-ранен момент $t' = t - r/c$, където r/c е времето, за което вълната изминава разстоянието от G до P. Затова в точката P полето е пропорционално на

$$-\omega^2 x_0 e^{i\omega (t-r/c)}. \qquad (30.10)$$

Като заместим тази стойност на ускорението във формулата за полето, създадено от заряда на голямо разстояние, получаваме

$$\begin{pmatrix}\text{Електричното поле в } P,\\ \text{създадено от заряда в } Q.\end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{\omega^2 x_0 e^{i\omega (t-r/c)}}{r} \quad \text{(приблизително).} \qquad (30.11)$$

Но тази формула не е съвсем вярна, защото трябва да се вземе не цялото ускорение, а само тази негова компонента, която е перпендикулярна на линията QP. Ние предполагаме обаче, че P е много по-далече от равнината, отколкото Q от оста t (разстоянието ρ на фиг. 30.10), така че за ефектите, които ние искаме да отчетем, косинусът може да се замени с единица. (Косинусът и така е доста близък до единица.)

Пълното поле в точката P се получава, като съберем приносите на всички заряди в равнината. Разбира се, ние трябва да вземем векторната сума на полетата. Но тъй като посоката на полето е еднаква за всички заряди, в рамките на приетото приближение е достатъчно да съберем големините на всички полета. Освен това полето в P зависи само от r, следователно всички заряди с еднакви r създават равни полета. Затова най-напред ще съберем от всички заряди в пръстена с ширина $d\rho$ и с радиус ρ. Като интегрираме по ρ, ще получим пълното поле от всички заряди.

Броят на зарядите в пръстена е равен на произведението от неговата повърхнина — $2\pi\rho\, d\rho$, и η — плътността на зарядите на единица площ.

Оттук

$$\text{пълното поле в точката } P = \int \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{\omega^2 x_0 e^{i\omega (t-r/c)}}{r} \cdot \eta 2\pi\rho\, d\rho. \qquad (30.12)$$

Интегралът се взема в границите $\rho=0$ и $\rho=\infty$. Времето t, разбира се, е фиксирано и тогава променливи са само величините r и ρ. Можем засега да не вземаме предвид постоянните множители, включително и $e^{i\omega t}$, и да пресметнем интеграла

$$\int_{\rho=0}^{\rho=\infty} \frac{e^{i\omega r/c}}{r}\,\rho\,d\rho. \tag{30.13}$$

За целта вземаме под внимание връзката между ρ и r:

$$r^2=\rho^2+z^2.$$

При диференциране на формулата (30.14) трябва да смятаме z независещо от ρ, тогава

$$2r\,dr=2\rho\,d\rho,$$

което е много уместно, защото при заменяне на $\rho\,d\rho$ в интеграла с rdr знаменателят r се съкращава. Интегралът придобива по-простия вид

$$\int_{r=z}^{r=\infty} e^{-i\omega r/c}\,dr. \tag{30.15}$$

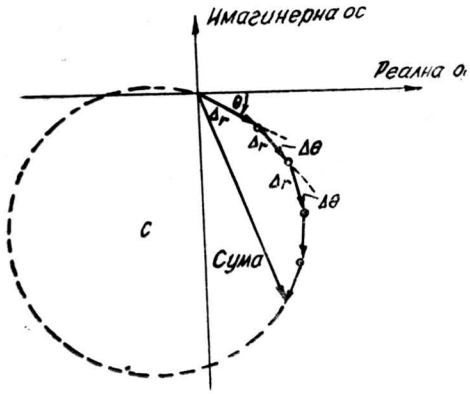
Експонентата се интегрира много просто. Необходимо е в показателя на експонентата да поставим коефициента пред r в знаменателя и да вземем самата експонента в граничните точки. Но границите за r се отличават от тия за ρ. Когато $\rho=0$, долната граница на $r=z$, т. е. границите за r са z и безкрайност. Интегралът (30.15) е равен на

$$-\frac{c}{i\omega}\left[e^{-i\infty}-e^{-(i\omega/c)\,z}\right]. \tag{30.16}$$

Вместо $(r/c).\infty$ тук ние написахме ∞, тъй като и едното, и другото означава безкрайно голяма величина.

Обаче $e^{i\infty}$ е загадъчна величина. Реалната ѝ част е $\cos(-\infty)$, която от математична гледна точка е съвсем неопределена. [Макар че бихме могли да допуснем, че тя се намира някъде, *а* може би и навсякъде (?) — между $+1$ и -1.] Обаче *физически* тази величина може да означава нещо напълно разумно и обикновено се оказва нула. За да се убедим, че и в нашия случай е така, ще се върнем към първоначалния интеграл (30.15).

Изразът (30.15) може да се разбира като сума от голямо число малки комплексни числа, чийто модул е Δr, а ъгълът в комплексната равнина е $\theta=-\omega r/c$. Да се опитаме да определим тази сума графически. На фиг. 30.11 са нанесени първите пет члена от сумата. Всеки отрязък от кривата има дължина Δr и е разположен под ъгъл $\Delta\theta=-\omega(\Delta r/c)$ спрямо предшествуващия отрязък. Сумата от първите пет слагаеми е означена със стрелка от началната точка до края на петия отрязък. Продължавайки да прибавяме нови отрязъци, ние ще опишем многоъгълник, ще се върнем към началната точка и ще започнем да описваме нов. Колкото повече добавяме малки стрелки, толкова повече пъти ще се завъртим, описвайки почти окръжност с радиус c/ω. Сега е ясно защо интегралът дава неопределен отговор.



Фиг. 30.11. Пресмятане на интеграла $\int_z^\infty e^{-i\omega r/c}\,dr$ по графичен начин

$$\theta=\frac{\omega r}{c}\ ;\quad \Delta\theta=-\frac{\omega\,\Delta r}{c}$$

Тук трябва да се обърнем към *физическия* смисъл на нашия пример. Във всеки реален случай равнината на зарядите *не може да бъде* безкрайна, тя трябва някъде да има край. Ако плътността на зарядите отведнъж става нула и границата на равнината има формата на окръжност, нашият интеграл ще бъде равен на някаква стойност от окръжността на фиг. 30.11. Ако пък плътността на зарядите постепенно намалява с отдалечаването от центъра (или се обръща в нула вън от някоя граница с неправилна форма, така че за достатъчно големи ρ приносът от целия пръстен с ширина $d\rho$ е равен на нула), коефициентът η в точния интеграл ще намалява, като клони към нула. Тъй като

дължината на добавяните отрязъци (стрелки) в този случай ще намалява, а ъгълът $\Delta\theta$ остава същият, графиката на кривата, съответстваща на интеграла, ще има вид на спирала. Тя ще свърши в центъра на първоначалната окръжност, както е показано на фиг. 30.12. *Физически* правилната стойност на интеграла се дава с величината A, която на схемата съответствува на разстоянието от началната точка до центъра на окръжността. Лесно можем да се убедим, че това разстояние е

$$\frac{c}{i\omega}e^{-i\omega z/c}. \tag{30.17}$$

Ние щяхме да получим същия резултат, ако в (30.16) бяхме положили $e^{-i\infty}=0$.

(Има още една причина, поради която приносът в интеграла от големите стойности на r клони към нула — това е изпуснатият от нас множител, който дава проекцията на ускорението върху равнината, перпендикулярна на линията PQ.)

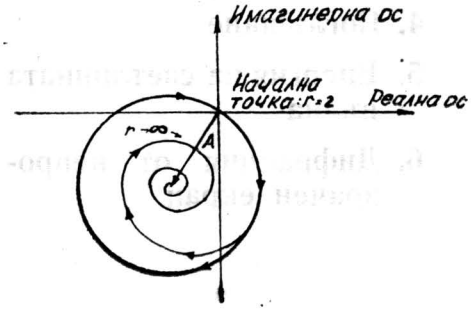
Разбира се, нас ни интересува именно случаят, който има *физически* смисъл, затова ще положим $e^{-i\infty}$ равно на нула. Като се върнем към формулата (30.12) за полето и вземем предвид всички изпуснати по-рано множители, ще получим

$$\text{пълното поле в точката } P=-\frac{\eta q}{2\varepsilon_0 c}\,i\omega x_0 e^{i\omega\,(t-z/c)}. \tag{30.18}$$
(като помним, че $1/i=-i$)

Интересно е да се отбележи, че $i\omega x_0 e^{i\omega t}$ е *скоростта* на зарядите, така че изразът за полето може да се препише в следния вид:

$$\text{пълното поле в точка } P=-\frac{\eta q}{2\varepsilon_0 c}\,[\text{скорост на зарядите}]_{t-z/c}. \tag{30.19}$$

Този резултат е малко странен, защото закъснението отговаря на разстоянието z, което е най-късото разстояние от P до равнината. Но такъв е отговорът и за щастие формулата е доста проста. (Да добавим още, че макар формулите (30.18) и (30.19) да бяха получени само за достатъчно големи разстояния от равнината, те се оказват верни за всички z, даже и за $z<\lambda$.)



Фиг. 30.12. Пресмятане на интеграла $\int_z^\infty \eta e^{-i\omega r/c}\,dr$ по графичен начин.

31
Как възниква показателят на пречупване

1. Показател на пречупване
2. Поле, излъчвано от среда
3. Дисперсия
4. Поглъщане
5. Енергия на светлинната вълна
6. Дифракция от непрозрачен екран

1. Показател на пречупване

Ние вече знаем, че светлината във водата се движи по-бавно отколкото във въздуха, а във въздуха по-бавно, отколкото във вакуума. Този факт намира отражение в показателя на пречупването n. Нека се опитаме сега да разберем как става намаляването на скоростта. В частност особено важно е да се проследи връзката на този факт с някои от физическите предположения или закони, които бяха изказани по-рано, и се свеждат към следното:

а) пълното електрично поле при всички физични условия може да бъде представено във вид на сума от полетата на всички заряди във Вселената;

б) полето, излъчвано от всеки отделен заряд, се определя от неговото ускорение; за ускорението се взема предвид закъсняването, възникващо поради крайната скорост на светлината, винаги равна на c.

Но вие може би веднага ще дадете като пример парче стъкло и ще възкликнете: „Глупости, така не може да бъде. Трябва да се казва, че закъснението отговаря на скоростта c/n.“ Обаче това не е вярно; да се опитаме да разберем защо не е вярно.

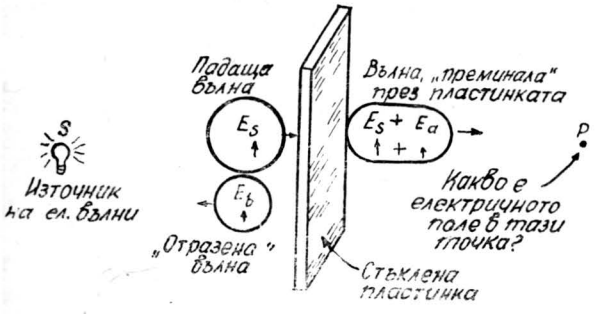
На наблюдателя му се струва, че светлината или всяка друга електрична вълна се разпространява във вещество с показател на пречупване n със скорост c/n. И това донякъде е така. Но в действителност полето се създава от движението на всички товари, в това число и товарите, движещи се в средата, а всички негови съставни части, всичките му слагаеми се разпространяват с максимална скорост c. Пред нас е задачата да разберем как възниква тази привидна по-малка скорост.

Да се опитаме да разберем това явление в следния прост случай. Нека източникът (ще го наречем „външен източник“) да се намира на голямо разстояние от тънка прозрачна пластинка, например стъклена. Ние се интересуваме от полето от другата страна на пластинката, на достатъчно голямо разстояние от нея. Всичко това е представено схематично на фиг. 31.1; предполага се, че точките S и P са много отдалечени от равнината. Според формулираните от нас принципи електричното поле далеч от пластинката се представя със (векторно) сума от полето на външния източник (в точка S) и полетата на всички заряди в стъклената пластинка, при това всяко поле се взема със закъснение при скорост c. Ще напомним, че полето на всеки заряд не се изменя от присъствието на други заряди. Това са нашите основни принципи. По този начин полето на точката P може да бъде записано във вида

$$\mathbf{E} = \sum_{\substack{\text{от всички} \\ \text{заряди}}} \mathbf{E}_{\text{на отд. заряд}}, \tag{31.1}$$

или

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \sum_{\substack{\text{от всички} \\ \text{останали} \\ \text{заряди}}} \mathbf{E}_{\text{на отд. заряд}}, \tag{31.2}$$



Фиг. 31.1. Преминаване на електрическите вълни през слой от прозрачно вещество

където $\mathbf{E}_s$ е полето на външния източник; *ако нямаше пластинка*, то щеше да съвпада с търсеното поле в точка P. Ние очакваме, че при наличието на други движещи се заряди полето в P ще бъде отлично от $\mathbf{E}_s$.

Откъде се вземат движещите се заряди в стъклото? Известно е, че всеки предмет се състои от атоми, които съдържат електрони. Електричното поле на *външния източник* действува на атомите и разлюлява напред-назад електроните, които от своя страна създават поле; те могат да се разглеждат като нови излъчватели. Новите излъчватели са свързани с източника S, тъй като именно неговото поле ги заставя да трептят. Пълното поле се състои не само от полето на S, но и от допълнителните полета, излъчвани от всички движещи се заряди. Това значи, че полето се изменя от присъствието на стъклото, при това така, че скоростта на разпространението му в стъклото изглежда друга. Ние ще се възползуваме именно от тази идея при количественото разглеждане.

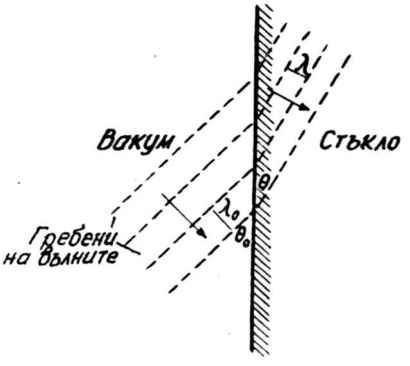
Обаче точното пресмятане е много сложно, защото нашето твърдение, че на зарядите действува само източникът, не е съвсем правилно. Всеки заряд „чувствува" не само източника, но както всеки обект във Вселената, той се влияе и от движението на останалите заряди, в частност и от зарядите, трептящи в стъклото. Затова пълното поле, действуващо на *даден заряд, представлява съвкупност от полетата на всички останали заряди, чието движение от своя страна зависи от движението на дадения заряд.* Вие виждате, че изводът на точната формула изисква решаване на сложна система уравнения. Тази система е много сложна и вие ще я изучавате много по-късно.

А сега да се обърнем към някой съвсем прост пример, за да можем ясно да разберем как се проявяват всички физични принципи. Да предположим, че влиянието на всички останали атоми върху даден атом е малко спрямо това на източника. С други думи, ние имаме такава среда, в която пълното поле слабо се изменя от движението на намиращите се в нея заряди. Такава ситуация е характерна за среди с показател на пречупване много близък към единица, например за разредените среди. Нашите формули ще бъдат верни за всички среди с показател на пречупване, близък до единица. По този начин можем да избегнем трудностите, свързани с решаването на пълната система уравнения.

Вие бихте могли да забележите, че движението на зарядите в пластинката възбужда още един ефект. Това движение създава вълна, която се разпространява назад по посока към източника S. Това не е нищо друго освен светлинният лъч, отразен от прозрачното вещество. Лъчът идва не само от повърхността. Отразеното лъчение се генерира във всички точки вътре във веществото, но пълният ефект е еквивалентен на отражението от повърхността. Този ефект обаче лежи зад границата на приложимостта на нашето приближение, в което показателят на пречупване се смята толкова близък към единица, че отразеното лъчение може да се пренебрегне.

• • •

Преди да преминем към изучаването на показателя на пречупване, трябва да подчертаем, че в основата на явлението пречупване лежи фактът, че привидната *скорост* на разпространение на вълната е различна в различните среди. *Отклонението* на светлинния лъч е *следствие* от изменението на ефективната скорост в различните среди. За да поясним този факт, ние отбелязваме на фиг. 31.2 редица последователни максимуми в амплитудата на вълната, която пада от вакуум върху стъкло. Стрелката, перпендикулярна на указаните максимуми, показва посоката на движение на вълната. Навсякъде във вълната трептенията са с една и съща *честота.* (Ние видяхме, че принудените трептения имат същата честота като трептенията на източника.) Оттук следва, че разстоянията между максимумите на вълните от двете страни на повърхността *съвпадат на самата повърхност,* тъй като вълните тук трябва да бъдат съгласувани и зарядите на повърхността трептят с еднаква честота. *Най-малкото* разстояние между гребените е дължина на вълната, равна на скоростта, разделена на честотата. Във вакуума дължината на вълната е $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$,



Фиг. 31.2. Връзка между пречупването и изменението на скоростта

а в стъклото $\lambda = 2\pi v/\omega$, или $\lambda = 2\pi c/\omega n$, където $v = c/n$ е скоростта на вълната. Както се вижда от фиг. 31.2, единственият начин да се „съшият“ вълните на границата се състои в изменението на посоката на движение във веществото. Едно просто геометрично разсъждение показва, че условието за „съшиване“ се свежда към равенството $\lambda_0/\sin\theta_0 = \lambda/\sin\theta$, или $\sin\theta_0/\sin\theta = n$, а това е законът на Снелиус. Нека вече да не ви вълнува самото отклонение на светлината; трябва само да разберем защо наистина ефективната скорост на светлината в среда с показател на пречупване n е равна на c/n.

• • •

Да се върнем отново към фиг. 31.1. От казаното е ясно, че трябва да пресметнем полето в точка P от осцилиращите заряди в стъклената пластинка. Да означим с E_a частта на полето, която се представя от втория член в равенството (31.2). Добавяйки към нея полето от източника E_s, получаваме пълното поле в точката P.

Стоящата тук пред нас задача може би е най-сложната от всички, с които ще се занимаваме тази година, но нейната сложност се заключава само в голямото количество събираеми членове; сам по себе си всеки член е много прост. За разлика от другите случаи, когато ние казвахме „Забрави извода и гледай само резултата!“, сега за нас изводът е много по-важен от резултата. С други думи, трябва да разберем цялата физическа „кухня“, с чиято помощ се пресмята показателят на пречупването.

За да разберем с какво ще имаме работа, нека намерим какво трябва да бъде „коригиращото поле“ E_a, за да изглежда пълното поле в точката P като полето на източника, забавено при преминаването през стъклената пластинка. Ако пластинката съвсем не влияеше върху полето, вълната щеше да се разпространява надясно (по оста z) съгласно закона

$$E_s = E_0 \cos\omega(t - z/c), \tag{31.3}$$

или, като използуваме експонентата

$$E_s = E_0 e^{i\omega(t-z/c)}. \tag{31.4}$$

А какво би станало, ако вълната преминаваше през пластинката с по-малка скорост? Нека дебелината на пластинката да е Δz. Ако нея я нямаше, светлината би преминала разстоянието Δz за време $\Delta z/c$. А тъй като видимата скорост е c/n, ще е нужно време $n\Delta z/c$, т. е. повече с някакво допълнително време $\Delta t = (n-1)\frac{\Delta z}{c}$. Зад пластинката вълната отново се движи със скорост c. Във формулата (31.4) ще вземем предвид *добавъчното* време за преминаване през пластинката, като заменим t с $(t-\Delta t)$, т. е. $[t-(n-1)\,\Delta z/c]$. По такъв начин, ако поставим пластинката, формулата за вълната ще получи вида

$$E_{\text{зад пластинката}} = E_0 e^{i\omega[t-(n-1)\,\Delta z/c - z/c]}. \tag{31.5}$$

Тази формула може да се препише и така:

$$E_{\text{зад пластинката}} = e^{-i\omega(n-1)\,\Delta z/c} \cdot E_0 e^{i\omega(t-z/c)}, \tag{31.6}$$

откъдето можем да заключим, че полето зад пластинката се получава, като умножим полето E_s от източника по $\exp[-i\omega(n-1)\Delta z/c]$. Както знаем, умножението на осцилираща функция от типа $e^{i\omega t}$ по $e^{i\theta}$ означава изменение на фазата на трептенията с ъгъл θ, възникващ поради забавянето при преминаването през пластинката. Фазата закъснява с величина $\omega(n-1)\Delta z/c$ (именно закъснява, тъй като в експонентата стои знак минус).

Ние вече казахме, че пластинката *добавя* поле E_a към първоначалното $E_s = E_0\exp[i\omega(t-z/c)]$, а вместо това намерихме, че действието на пластинката се свежда към *умножение* на полето с фактор, който изменя фазата на трептенията. Обаче тук няма никакво противоречие, защото същият резултат може да се получи и като прибавим подходящо комплексно число. Това число се намира много лесно за малки Δz, тъй като e^x при малки x с голяма

точност е равно на $(1+x)$. Тогава можем да напишем

$$e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c} = 1 - i\omega(n-1)\Delta z/c. \qquad (31.7)$$

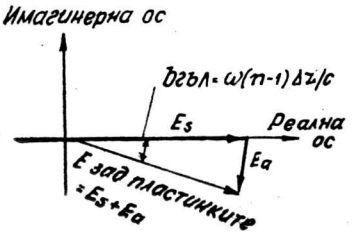
Като заместим в (31.6), получаваме

$$E_{\text{зад пластинката}} = \underbrace{E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_{E_s} - \underbrace{\frac{i\omega(n-1)\Delta z}{c} E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_{E_a}. \qquad (31.8)$$

Първият член в този израз е полето от източника, а вторият член трябва да се приравни на E_a — на полето, което създават осцилиращите заряди в пластинката от дясната ѝ страна. Полето E_a тук е изразено чрез показателя на пречупване n: разбира се, E_a зависи от интензитета на полето на източника.

• • •

Смисълът на направените преобразования най-лесно може да се разбере с помощта на диаграмите на комплексните числа (виж фиг. 31.3). Да нанесем най-напред E_s (z и t са подбрани така, че E_s да лежи на реалната ос, но това не е задължително). Задръжката при преминаването през пластинката води до закъснение на фазата на E_s, т. е. завърта E_s на известен отрицателен ъгъл. Това е все едно, че се добавя малък вектор E_a, насочен почти под прав ъгъл спрямо E_s. Тъкмо такъв е смисълът на множителя $(-i)$ във втория член на (31.8). Той означава, че при реално E_s величината E_a е отрицателна и имагинерна, а в общия случай E_s и E_a образуват прав ъгъл.



Фиг. 31.3. Построяване на вектора на полето на преминалата през веществото вълна при дадени стойности на t и z

2. Поле, излъчвано от среда

Сега трябва да изясним дали полето на осцилиращите заряди в пластинката има същия вид като E_a във втория член на (31.8) Ако това е така, то ние ще можем да намерим и показателя на пречупването n (тъй като n е единственият фактор в (31.8), който не се изразява чрез основните величини). Да се заемем сега с пресмятането на полето E_a, създадено от зарядите в пластинката. (За удобство ние привеждаме в табл. 31.1 означенията, които вече използувахме, и онния, които ще ни потрябват по-нататък.)

Таблица 31.1. **Означения, които ние използуваме при изчисленията**

E_s	поле, създавано от източника
E_a	поле, създавано от зарядите в пластинката
Δz	дебелина на пластинката
z	разстояние до нормалата на пластинката
n	показател на пречупване
ω	честота (ъглова) на лъчението
N	брой на зарядите в единица обем от пластинката
η	брой на зарядите на единица площ на пластинката
m	маса на електрона
q_e	заряд на електрона
ω_0	резонансна честота на електрона, свързан в атома

Ако източникът S на (фиг. 31.1) се намира отляво на достатъчно голямо разстояние, полето E_s ще има еднаква фаза по дължината на пластинката и близко до пластинката ще се записва във вида

$$E_s = E_0 e^{i(\omega t - z/c)}. \qquad (31.9)$$

На самата пластинка в точката $z=0$ имаме

$$E_s = E_0 e^{i\omega t} \quad \text{(на пластинката)}. \qquad (31.10)$$

Това електрично поле действува на всеки електрон в атома, който под влиянието на електрическата сила qE ще трепти нагоре-надолу (ако E_0 е вертикално насочено). За да намерим характера на движението на електроните, да си представим атомите като

малки осцилатори, т. е. нека електроните са еластично съединени с атомите; това значи, че отклонението на електроните от нормалното им положение под влиянието на сила е пропорционално на нейната големина.

Този модел ще ви се покаже смешен, ако вие вече сте чували за атомния модел, в който електроните се въртят по орбити около ядрата. Но ние вземаме сега опростен модел. Точната теория на атома, основана на квантовата механика, твърди, че в *процесите с участие на светлината* поведението на електроните е такова, като че ли те са закрепени с пружини. И тъй да предположим, че на електроните действува еластична сила и те могат да се разглеждат като осцилатори с маса m и резонансна честота ω_0. Ние вече се занимавахме с изучаването на такива осцилатори и знаем уравнението на движение, на което те се подчиняват:

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x\right)=F \tag{31.11}$$

тук F е външната сила).

В нашия случай външната сила се създава от електричното поле на вълната от източника, затова можем да напишем

$$F=q_e E_s=q_e E_0 e^{i\omega t}, \tag{31.12}$$

където q_e е зарядът на електрона, а за E_s ние взехме стойността $E_0 e^{i\omega t}$ от уравнението (31.10). Уравнението на движението на електрона получава вида

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x\right)=q_e E_0 e^{i\omega t}. \tag{31.13}$$

По-рано ние намерихме решението на това уравнение — то има следния вид

$$x=x_0 e^{i\omega t}; \tag{31.14}$$

като заместим в (31.13), получаваме

$$x_0=\frac{q_e E_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}, \tag{31.15}$$

откъдето

$$x=\frac{q_e E_0}{m\left(\omega_0{}^2-\omega^2\right)}\, e^{i\omega t}. \tag{31.16}$$

Ние намерихме това, което искахме — движението на електроните в пластинката. То е еднакво за всички електрони, само средното положение („нулата“ на движението) за всеки електрон е различна.

Сега ние можем да определим полето E_a, създавано от атомите в точка P, тъй като полето от заредена плоскост беше намерено още по-рано (в края на гл. 30). От уравнението (30.19) се вижда, че полето E_a в точката P представлява от само себе си скоростта на заряда, закъсняваща по време с величина z/c, умножена с една отрицателна константа. Диференцираме по x (31.16), за да получим скоростта, заместваме в (30.18) x_0 с неговото равно според (31.15) (за да вземем под внимание закъснението) и получаваме формулата

$$E_a=-\frac{\eta q_e}{2\varepsilon_0 c}\left[\, i\omega\frac{q_e}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\, E_0\, e^{i\omega(t-z/c)}\,\right]. \tag{31.17}$$

Както и трябваше да се очаква, принуденото трептение на електроните породи нова вълна, разпространяваща се надясно (това се вижда от множителя $\exp\left[i\omega(t-z/c)\right]$; амплитудата на вълната е пропорционална на броя на атомите на единица площ от пластинката (множителя η), а също така на амплитудата на полето от източника (E_0). Освен това възникват и други величини, зависещи от свойствата на атомите (q_e, m, ω_0).

Обаче най-важният момент се заключава в това, че формулата (31.17) за E_a прилича много на израза за E_a в (31.8), който ние получихме, като въведохме закъснение в среда с показател на пречупване n. Двата израза съвпадат, ако

$$(n-1)\Delta z=\frac{\eta q_e^2}{2\varepsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2)}. \tag{31.18}$$

Забележете, че двете страни на това равенство са пропорционални на Δz, тъй като η — броят на атомите на единица площ — е равно на $N\Delta z$, където N е броят на атомите в единица обем от пластинката. Като заместим η с $N\Delta z$ и съкратим на Δz, получаваме нашия основен резултат — формулата за показателя на пречупване, изразена с константи, зависещи от свойствата на атомите и честотата на светлината:

$$n=1+\frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2)}. \tag{31.19}$$

Тази формула „обяснява“ показателя на пречупване, към което ние се и стремихме.

3. Дисперсия

Резултатът, който ние получихме, е много интересен. Той дава не само показателя на пречупване, изразен чрез атомните константи, но и показва как показателят се мени с честотата ω на светлината. Само с помощта на простото твърдение „светлината в прозрачна среда се движи с по-малка скорост“ ние никога не бихме могли да получим това важно свойство. Разбира се, трябва да знаем и броя на атомите в единица обем, и тяхната собствена честота ω_0. Ние още не умеем да определяме тия величини, тъй като те са различни за различните вещества, а общата теория по този въпрос сега не можем да изложим. Общата теория за свойствата на различните вещества — техните собствени честоти и др. — се формулира на базата на квантовата механика. Освен това свойствата на различните вещества и големината на показателя на пречупване се изменят силно от вещество към вещество, затова едва ли можем да се надяваме, че въобще може да се получи обща формула, пригодна за всички вещества.

Независимо от това ние ще се опитаме да приложим нашата формула за различните среди. Преди всичко за болшинството газове (например за въздуха, за повечето безцветни газове, водорода, хелия и т. н) собствените честоти на трептенията на електроните съответствуват на ултравиолетовата светлина. Тези честоти са много по-големи от тая на видимата светлина, т. е. ω_0 е много по-голямо от ω и в първо приближение можем да пренебрегнем ω^2 спрямо ω_0^2. Тогава показателят на пречупването се получава почти постоянен. И тъй за газовете можем да смятаме показателя на пречупване за константа. Този извод е валиден също така и за болшинството прозрачни среди, например за стъклото. Като погледнем по-внимателно нашия израз, можем да забележим, че при увеличаване на ω знаменателят намалява и следователно показателят расте. По този начин с увеличаването на честотата n бавно расте. За синия цвят показателят на пречупване е по-голям, отколкото за червения. Именно поради това сините лъчи се отклоняват от призмата повече от червените.

Самият факт, че показателят на пречупване зависи от честотата, се нарича *дисперсия*, тъй като именно поради нея светлината „диспергира“, т. е. се разлага от призмата в спектър. Формулата, която изразява показателя на пречупване като функция на честотата, се нарича *формула на дисперсията*. И така ние намерихме *дисперсионната* формула. (През последните няколко години дисперсионните формули започнаха да се използуват в теорията на елементарните частици).

Нашата дисперсионна формула предсказва редица нови интересни ефекти. Ако честотата ω_0 лежи в областта на видимата светлина или ако измерваме показателя на пречупване например на стъклото за ултравиолетовите лъчи (където ω е близко към ω_0), то знаменателят клони към нула, а показателят на пречупване става много голям. Нека ω да е по-голямо от ω_0. Такъв случай възниква например, ако облъчваме с рентгенови лъчи някое вещество от типа на стъклото. Освен това много вещества, непрозрачни за обикновената светлина (например въглен), са прозрачни за рентгеновите лъчи, затова се говори за показател на пречупване на тези вещества спрямо рентгеновите лъчи. Собствената честота на атомите на въглерода е много по-малка от честотата на рентгеновите лъчи. В този случай показателят на пречупване се дава в нашата дисперсионна формула, ако положим $\omega_0 = 0$ (т. е. ние пренебрегваме ω_0^2 спрямо ω^2).

Аналогичен резултат се получава при облъчване на газ от свободни електрони с радиовълни (или със светлина). В горните слоеве на атмосферата ултравиолетовото лъчение на Слънцето избива електрони от атомите, в резултат на което се образува газ от свободни електрони. За свободните електрони $\omega_0 = 0$ (няма еластична сила). Като положим в нашата дисперсионна формула $\omega_0 = 0$, получаваме формулата за показателя на пречупване на радиовълните в стратосферата, където N сега означава плътност на свободните електрони (броя им в единица обем) в стратосферата. Но както се вижда от формулата, при облъчване на веществата с рентгенови лъчи или на електронен газ с радиовълни членът $(\omega_0^2 - \omega^2)$ става отрицателен, откъдето следва, че n е по-малко от единица. Това значи, че ефективната скорост на електромагнитните вълни във веществото е по-голяма от c. Възможно ли е това?

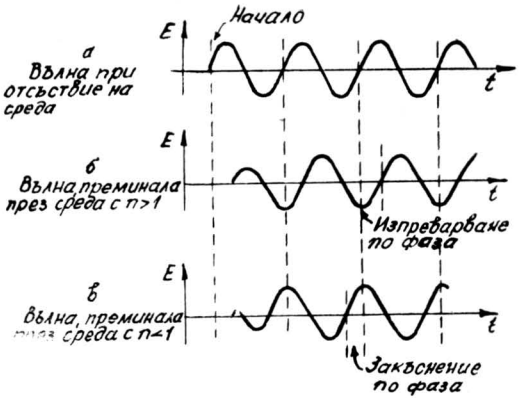
Възможно е. Макар и да казахме, че сигналите не могат да се разпространяват по-бързо от светлината, това не изключва показателят на пречупване при някоя честота да бъде както по-голям, така и по-малък от единица. Това значи, че изместването по фаза за сметка на разсейването на светлината е или положително, или отрицателно. Освен това може да се покаже, че скоростта на сигнала се определя от показателя на пречупването не при дадената стойност на честотата, а при много честоти. Показателят на пречупване определя само движението на гребена на вълната. Но той още не е сигнал. Чистата вълна без модулации, т. е. състояща се от безкрайно повтарящи се правилни осцилации, няма „начало“ и не може да се използува за изпращане на сигнали във времето. За да се изпрати *сигнал*, трябва да се видоизмени вълната, да ѝ се направи белег, т. е. да се направи някъде подебела или по-тънка. Тогава вълната ще съдържа не една, а редица честоти и може да се покаже, че скоростта на разпространение на *сигнала* зависи не от една стойност на показателя на пречупване, а от характера на изменението на показателя с честотата. Ние ще отложим засега този въпрос. В гл. 48 ние ще пресметнем скоростта на разпространение на *сигналите* в стъклото и ще се убедим, че тя не превишава скоростта на светлината, макар че гребените на вълната (понятия чисто математически) се движат по-бързо от нея.

Няколко думи за механизма на това явление. Тук главната трудност е свързана с факта, че принуденото движение на зарядите е противоположно на посоката на полето. Наистина в израза (31.16) за отклонението x на заряда множителят $(\omega_0^2 - \omega^2)$ е отрицателен при малки ω и отклонението има обратен знак спрямо външното поле. Получава се така, че когато полето действува с някаква сила в дадена посока, зарядът се движи в противоположната посока.

Как се е получило така, че зарядът е започнал да се движи в противоположна посока? Наистина при включване на полето той не се движи против силата. Веднага след включването на полето възниква преходен режим, после трептенията се устано-

вяват и едва *след това* те са насочени противоположно на външното поле. Едновременно резултатното поле започва да *изпреварва по фаза* полето от източника. Когато казваме, че „фазовата скорост“, или скоростта на гребена на вълната е по-голяма от c, ние имаме предвид именно *изпреварването по фаза*.

На фиг. 31.4 е показан приблизителният вид на вълните, възникващи при рязко включване на източника (т. е. при изпращане на сигнал). Вижда се, че за вълната, преминаваща през среда с изпреварване по фаза, *сигналът* (т. е. *началото* на вълната) *не изпреварва* по време сигнала от източника.



Фиг. 31.4. Вълнови „сигнали“.

Да се върнем сега отново към дисперсионната формула. Трябва да се помни, че полученият от нас резултат опростява картината на явлението. За да бъдем точни, трябва да внесем някои поправки във формулата. Преди всичко трябва да въведем затихване в нашия модел на атомния осцилатор (иначе той ще трепти до безкрайност, щом веднъж е започнал, а това е неправдоподобно). Ние вече изучавахме движението на затихващ осцилатор в една от предишните глави (виж уравнението (23.8). Ако вземем под внимание затихването, то във формулите (30.16), а оттам и в (31.19) ще получим $(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)$ вместо $(\omega_0^2-\omega^2)$. Тук γ е коефицент на затихването.

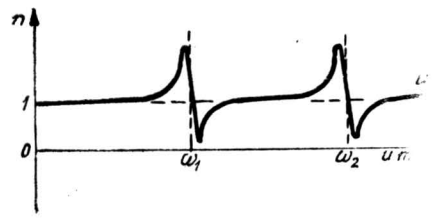
Втората поправка в нашата формула възниква, поради това че обикновено всеки атом има няколко резонансни честоти. Тогава вместо един вид осцилатор трябва да вземем под внимание действието на няколко осцилатори с различни резонансни честоти, чиито трептения протичат независимо едно от друго и да съберем приносите на всички осцилатори.

Нека в единица обем се съдържат N_k електрона със собствена честота ω_k и с коефициент на затихване γ_k. В резултат нашата дисперсионна формула приема вида

$$n=1+\frac{q_e^2}{2\varepsilon_0 m}\sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2-\omega^2+i\gamma_k\omega}. \qquad (31.20_н)$$

Този окончателен израз за показателя на пречупване е валиден за много вещества*. Приблизителният ход на показателя на пречупване според формулата (31.30) е приведен на фиг. 31.5.

Вие виждате, че навсякъде с изключение на областта, където ω е много близко към някоя резонансна честота, наклонът на кривата е положителен. Такава зависимост носи названието „нормална“ дисперсия (защото този случай се среща най-често). Близко около резонансните честоти кривата има отрицателен наклон и в този случай говорят за „аномална“ дисперсия (имайки предвид „ненормална“ дисперсия), защото тя била наблюдавана много по-рано от откриването на електроните и тогава изглеждала непривична. От наша гледна точка двата наклона са напълно „нормални“!



Фиг. 31.5. Показателят на пречупване като функция на честотата

4. Поглъщане

Вие вероятно забелязахте нещо странно в последната форма, (31.20) на нашата дисперсионна формула. Поради члена $i\gamma$, отчитащ затихването, показателят на пречупване стана комплексна величина. Какво значи това? Да изразим n чрез реалната и имагинерната части:

$$n=n'-in'', \qquad (31.21)$$

където n' и n'' са реални. (Пред in'' има знак минус, а самото n'', както лесно може да се убедим, е положително.)

* Същата формула се получава и с помощта на квантовата механика, обаче в тоя случай интерпретацията е друга. В квантовата механика даже едноелектронният атом, например водородът, има няколко резонансни честоти. Затова вместо броят на електроните N_k с честота ω_k се появява множителят Nf_k, където N е броят на атомите в единица обем, а f_k (наричано сила на осцилатора) показва с какво тегло влиза дадената резонансна честота ω_k.

Смисълът на комплексния показател може да се разбере най-добре, като се обърнем към уравнението (31.6) за вълната, преминаваща през пластинката на пречупване n. Като заместим тук комплексното n и като прегрупираме членовете, ще получим

$$E_{\text{зад пластинката}} = \underbrace{e^{-\omega n'' \Delta z/c}}_{A} \underbrace{e^{-i\omega (n'-1)\Delta z/c} E_0 e^{i\omega (t-z/c)}}_{B}. \quad (31.22)$$

Множителите, означени с буквата B, имат предишния вид и както по-рано описват вълна, чиято фаза след преминаването през пластинката закъснява с ъгъл $\omega(n'-1)\Delta z/c$. Множителят A (експонента с реален показател) е нещо ново. Тъй като показателят на експонентата е отрицателен, A е реално и по-малко от единица. Множителят A намалява амплитудата на полето; когато Δz расте, A намалява, а следователно и амплитудата. При преминаване през среда електромагнитната вълна затихва. Средата „поглъща“ част от вълната. Вълната излиза от средата, като вече е изгубила част от своята енергия. Това не е никак чудно, защото въведеното от нас затихване на осцилаторите се дължи на силата на триенето и непременно води към загуба на енергия. Ние виждаме, че поглъщането (или отслабването) на електромагнитната вълна се описва с имагинерната част n'' на комплексния показател на пречупване. Понякога n'' се нарича още „коефициент на поглъщането“.

Ще отбележим още, че появяването на имагинерна част n отклонява вектора, изобразяващ E_a на фиг. 31.3, към началото на координатите. Оттук е ясно защо полето отслабва при преминаване през среда.

Обикновено (както например е при стъклото) поглъщането на светлината е много малко. Тъкмо така и се получава според формулата (31.20), защото имагинерната част на знаменателя $i\gamma_k\omega$ е много по-малка от реалната $(\omega_k^2-\omega^2)$. Обаче, когато ω е близко към ω_k, резонансният член $(\omega_k^2-\omega^2)$ се оказва малък спрямо $i\gamma_k\omega$ и показателят на пречупване става почти чисто имагинерен. В този случай поглъщането е основният ефект. Именно поглъщането дава тъмните линии в слънчевия спектър. Излъчената от повърхността на Слънцето светлина преминава през слънчевата атмосфера (а също така и през земната) и честотите, равни на резонансните честоти на атомите в атмосферата на Слънцето, силно се поглъщат.

Наблюдаването на подобни спектрални линии на слънчевата светлина позволява да се установят резонансните честоти на атомите, а следователно и химичният състав на слънчевата атмосфера. Точно така по спектъра на звездите узнаваме състава на звездното вещество. С помощта на тези методи е било открито, че химичните елементи на Слънцето и на звездите не се отличават от тия на Земята.

5. Енергия на светлинната вълна

Както видяхме, имагинерната част на показателя на пречупването характеризира поглъщането.

Да се опитаме да пресметнем енергията, която се пренася от светлинната вълна. Ние изказахме някои съображения, че енергията на светлинната вълна е пропорционална на E^2, т. е. на усреднения по време квадрат на електричното поле на вълната. Отслабването на електричното поле за сметка на поглъщането на вълната трябва да води към загуба на енергия, преминаваща в своеобразно триене на електроните и в крайна сметка, както не е трудно да се досетим, в топлина.

Като вземем частта от светлинната вълна, падаща върху единица площ, например върху квадратен сантиметър от повърхността на пластинката на фиг. 31.1, можем да запишем енергетичния баланс в следната форма (предполагаме, че енергията се запазва):

Падащата енергия за 1 s = Излизащата енергия за 1 s + Работата, извършвана за 1 s. (31.23)

Вместо първия член можем да напишем $\alpha\overline{E_s^2}$, където α е коефициентът на пропорционалност, свързващ средната стойност на E^2 с пренасяната от вълната енергия. Към втория член трябва да включим полето, което излъчват атомите на средата, т. е. трябва да напишем $\alpha\overline{(E_s+E_a)^2}$, или (като повдигнем на квадрат) $\alpha(\overline{E_s^2}+2\overline{E_sE_a}+\overline{E_a^2})$.

При всички наши изчисления ние предполагахме, че дебелината на слоя вещество е малка и неговият показател на пречупване малко се отличава от единица. Тогава E_a се оказва много по-малко от E_s (това бе направено с цел да се опростят изчисленията). В рамките на нашето приближение членът $\overline{E_a^2}$ трябва да се пренебрегне спрямо $\overline{E_sE_a}$. Вие можете да възразите: „Тогава трябва да се отхвърли $\overline{E_sE_a}$, защото този член е много по-малък от $\overline{E_s^2}$. Наистина $\overline{E_sE_a}$ е много по-малък от $\overline{E_s^2}$, но ако пренебрегнем и този член, ще получим приближение, в което ефектите на средата съвсем ще отсъствуват. Правилността на нашите пресмятания в рамките на даденото приближение се проверява с това, че ние навсякъде оставяхме само членовете, пропорционални на $N\Delta z$ (на плътността на атомите в средата), но отхвърляхме членовете от порядъка на $(N\Delta z)^2$ и от по-високи степени на $N\Delta z$. Бихме могли да наречем нашето приближение „приближение на малката плътност."

Ще отбележим, че нашето уравнение за баланса на енергията не съдържа енергията на отразената вълна. Но така и трябва да бъде, защото последната е пропорционална на $(N\Delta z)^2$, тъй като амплитудата на отразената вълна е пропорционална на $(N\Delta z)$.

За да намерим последния член в (31.23), трябва да пресметнем работата, която падащата вълна извършва над електроните за 1 s. Както е известно, работата е равна на силата, умножена по разстоянието; оттук работата за единица време (наричана още мощност) е равна на произведението от силата по скоростта. Поточно тя е равна на $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$, но в нашия случай силата и скоростта имат едно и също направление, затова скаларното произведение е равно на обикновеното (с точност до знака). И тъй работата, извършвана за 1 s над всеки атом, е равна на $q_e\overline{E_s}v$. Тъй като на единица площ се пада по $N\Delta z$ атома, последният член (31.23) се оказва равен на $N\Delta z q_e\overline{E_s}v$.

Уравнението за баланса на енергията приема вида

$$\alpha\overline{E_s^2}=\alpha\overline{E_s^2}+2\alpha\overline{E_sE_a}+N\Delta z q_e\overline{E_s}v. \tag{31.24}$$

Членовете $\alpha\overline{E_s^2}$ се съкращават и ние получаваме

$$2\alpha\overline{E_sE_a}=N\Delta z q_e\overline{E_s}v. \tag{31.25}$$

От уравнението (30.19) намираме E_a за големи z:

$$E_a=\frac{N\Delta z q_e}{2\varepsilon_0 c}v \text{ (закъснение със } z/c) \tag{31.26}$$

(напомняме, че $\eta=N\Delta z$). Като заместим (31.26) в лявата част на равенството (31.25) получаваме

$$2\alpha\frac{N\Delta z q_e}{2\varepsilon_0 c}\overline{E_s\,(\text{в. т. } z)\cdot v\,(\text{закъсн. със } z/c)}\ .$$

Но E_s (в точката z) е равно на E_s (в точката на атома) със закъснение z/c. Тъй като средната стойност не зависи от времето, тя няма да се измени, ако времето-аргумент закъснява със z/c, т. е. тя е равна на $\overline{E_s(\text{в точката на атома})\cdot v}$, но точно такова средно значение стои и в дясната част на (31.25). Двете части на (31.25) ще бъдат равни, ако е изпълнено съотношението

$$\frac{\alpha}{\varepsilon_0 c}=1 \text{ или } \alpha=\varepsilon_0 c. \tag{31.27}$$

По такъв начин, ако е верен законът за запазване на енергията, количеството енергия на електричната вълна, което се пада на единица площ за единица време (това, което ние наричаме интензивност), трябва да бъде равно на $\varepsilon_0 c\overline{E^2}$. Като означим интензивността с $\overline{S}$, ще получим

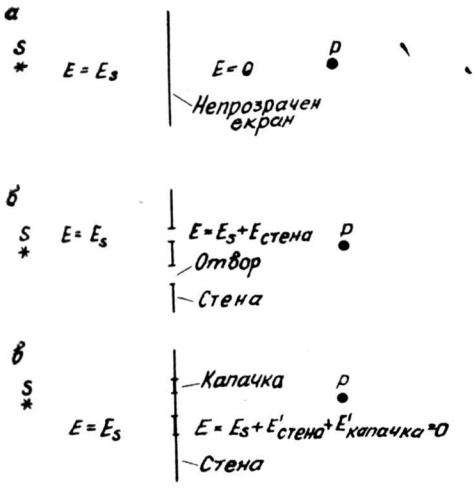
$$\overline{S} = \left\{ \begin{array}{c} \text{интензивност} \\ \text{или} \\ \text{енергия/площ. време} \end{array} \right\} = \varepsilon_0 c\overline{E^2}, \qquad (31.28)$$

където чертата означава *средното по време*. От нашата теория на показателя на пречупването се получи забележителен резултат.

§ 6. Дифракция на светлината от непрозрачен екран

Сега настъпи удобен момент, за да приложим методите от тази глава към решаването на задачи от друг род. В гл. 30 ние казахме, че разпределението на интензивността на светлината — дифракционната картина, възникваща при преминаване на светлина през отвор в непрозрачен екран — може да се намери, ако разпределим равномерно източниците (осцилаторите) по повърхността на отворите. С други думи, дифрактиралата вълна изглежда така, като че ли отворът в екрана служи за източник. Ние трябва да изясним причината на това явление, защото тъкмо в отвора няма източници, няма никакви заряди, движещи се с ускорение.

Да отговорим първо на въпроса какво значи непрозрачен екран. Нека между източника S и наблюдателя P се намира напълно непрозрачен екран, както е показано на фиг. 31.6а. Щом като екранът е „непрозрачен", в точката P няма поле. Защо? Според общите принципи полето в точката P е равно на полето E_s, взето с известно закъснение, плюс полето на всички останали заряди. Но както беше показано, полето E_s привежда зарядите на екрана в движение, а те от своя страна създават ново поле и ако екранът е непрозрачен, това поле трябва точно да гаси полето E_s от задната стена на екрана. Вие тук можете да възразите: „Защо те точно ще се угасят. А какво ще бъде, ако гасенето е непълно?" Ако полетата не се гасяха напълно (напомняме, че екранът има известна дебелина), полето в екрана, близко до задната стена, няма да бъде нула. Но тогава то би привело в движение другите електрони на екрана, създавайки по този начин ново поле, стремящо се да компенсира първоначалното поле. Ако екранът е дебел, в него има достатъчно възможности, за да се сведе остатъчното поле до нула. Използувайки нашата терминология, можем да кажем, че непрозрачният екран притежава голям и чисто имагинерен показател на пречупване и затова в него вълната експоненциално затихва. Навярно на вас ви е известно, че тънки слоеве от повечето непрозрачни вещества, даже от златото, са прозрачни.



Фиг. 31.6. Дифракция от непрозрачен екран

Да видим сега каква картина възниква, ако в тъмен такъв непрозрачен екран с отвор, както е показано на фиг. 31.6,б. Какво ще бъде полето в точката P? Полето в P се състои от две слагаеми — от полето на източника S и от полето на екрана, т. е. от полето на движещите се в екрана заряди. Движението на зарядите в екрана, изглежда, е много сложно, но полето, което те създават, се намира доста лесно.

Да вземем същия екран, но да закрием отворите с капаци, както е показано на фиг. 31.6,в. Нека капаците са направени от същия материал, както и екранът. Забележете, че капаците закриват същите отвори, които са показани на фиг. 31.6,б. Нека сега да пресметнем полето в точка P. Разбира се, в случая, показан на фиг. 31.6,в, то е равно на нула, но от друга страна, то е равно

на полето от източника плюс полето на електроните на екрана и капаците. Можем да напишем следното равенство.

Случай б: $E_{\text{в точка P}} = E_s + E_{\text{от стената}}$;

Случай в: $E'_{\text{в точка P}} = 0 = E_s + E'_{\text{от стената}} + E'_{\text{от капака}}$.

Примовете се отнасят за случая, когато отворите са закрити с капаци. Стойността на E_s, разбира се, в двата случая е една и съща. Като извадим второто равенство от първото, получаваме

$$E_{\text{в точка P}} = (E_{\text{от стената}} - E'_{\text{от стената}}) - E'_{\text{от капака}}.$$

Ако отворите не са съвсем малки (например много по-широки от дължината на вълната), наличието на капаците няма да повлияе на полето близко до екрана с изключение само на тясна област покрай отворите.

Като пренебрегнем този малък ефект, можем да напишем

$E_{\text{от стената}} = E'_{\text{от стената}}$ и следователно

$$E_{\text{в точка P}} = -E'_{\text{от капака}}.$$

Ние стигаме до извода, че полето в точка P при *открити отвори* (случай б) е равно (с точност до знака) на полето, създавано от *тая част* на непрозрачния екран, която се *намира на мястото на отворите*. (Знакът не е интересен, тъй като обикновено се търси интензивността, пропорционална на квадрата на полето.) Този резултат е не само верен (ако отворите не са съвсем малки), но и важен; освен всичко друго той потвърждава верността на обикновената теория на дифракцията.

Полето $E_{\text{от капака}}$ се пресмята при условието, че движението на зарядите на екрана създава такова поле, което гаси полето E_s на задната повърхност на екрана. Като определим движението на зарядите, ние събираме полетата, които те излъчват, и намираме полето в точката P.

Напомняме още веднъж, че нашата теория на дифракцията е приблизителна и вярна само за не много малки отвори. Ако отворите имат малки размери, членът $E_{\text{от капака}}$ е също малък и разликата $E'_{\text{от стената}} - E_{\text{от стената}}$ (която ние считахме равна на нула) може да бъде сравнима и даже много по-голяма от $E'_{\text{от капака}}$. Затова нашето приближение ще бъде неприложимо.

32

Радиационно затихване. Разсейване на светлината

1. Радиационно съпротивление
2. Интензивност на излъчването
3. Радиационно затихване
4. Независими източници
5. Разсейване на светлината

1. Радиационно съпротивление

В предшествуващата глава показахме, че системата от осцилиращи заряди излъчва енергия и намерихме формулата за енергията на лъчението. Количеството енергия, преминаващо за 1 s през повърхност, един квадратен метър, перпендикулярна на посоката на излъчването, се определя от средната стойност на квадрата на електричното поле на системата, умножена по $\varepsilon_0 c$:

$$P = \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle. \tag{32.1}$$

Всеки трептящ заряд излъчва енергия; излъчва например и антена, в която някой външен източник предизвиква движение на зарядите. При излъчване енергията отива в пространството и съгласно закона за запазване на енергията на антената трябва да се подава някаква мощност по проводниците, с които е съединена. Това означава, че антената, присъединена към източник на ток, играе ролята на *съпротивление,* т. е. на такъв елемент на веригата, в който се „губи" енергия (всъщност енергията не се губи, а се излъчва, но спрямо дадената верига тя е изгубена безвъзвратно). В обикновеното съпротивление енергията се превръща в топлина; в дадения случай тя преминава в пространството. От гледна точка на електрическата верига не е важно *в какво* ще премине енергията, резултатът е един и същ — енергията от веригата „изтича". Поради това, даже ако антената е от най-чиста мед, все едно, за генератора тя представлява съпротивление. Желателно е антената да излъчва възможното максимално количество енергия. Поради това се намаляват нейният капацитет и нейната индуктивност; най-добрите антени имат много малък капацитет и индуктивност. Съпротивлението, което оказва антената във веригата, се нарича *радиационно съпротивление.*

Нека през антената тече ток със сила I, тогава средната мощност, която се губи в антената, ще бъде равна на квадрата на силата на тока, умножена по съпротивлението. *Излъчваната* от антената мощност е също пропорционална на квадрата на тока, тъй като интензивността на полето е пропорционална на тока, а излъчената енергия е пропорционална на квадрата на полето. Коефициентът на пропорционалност, свързващ излъчената мощност и $\langle I^2 \rangle$, се нарича радиационно съпротивление.

Интересно е да се разбере защо възниква радиационното съпротивление. Да вземем един прост пример: нека токът в антената тече последователно нагоре и надолу. Ако заставим заредено тяло да се движи с ускорение нагоре-надолу, то ще започне да излъчва (незаредено тяло няма да излъчва). Щом като антената излъчва енергия, ние трябва да извършваме работа. Но едно е да се покаже с помощта на закона за запазване на енергията, че енергия се „губи", а съвсем друго нещо е да се отговори на въпроса *срещу каква сила* се извършва работа. Това е много интересен и труден въпрос, на който в случая с електрона все още не е даден пълен и удовлетворителен отговор. Обаче за случая с антената отговорът е намерен. Ето какво става в антените: полетата, създавани от движещите се електрони в една част на антената, въздействуват на електроните в друга нейна част. Може да се пресметнат действуващите сили и да се намери извършената от тях работа, а оттук да се получи формулата за радиационното съпротивление. Би било неправилно да се твърди: „ние можем да пресметнем", защото н и е още не сме изучили законите на електричеството при малки разстояния и знаем какво е електрич-

ното поле само при големи разстояния. Макар че имаме формулата (28.3), ние още не можем да я използуваме за пресмятане на полето вътре във вълновата зона, защото тази формула за *нас* е твърде сложна. Наистина с помощта на закона за запазване на енергията ние можем да получим резултат даже без да знаем вида на полето при малки разстояния. (Обръщайки хода на разсъжденията, можем да намерим взаимодействието при малки разстояния, ако е известен видът на полето при големи разстояния и ако след това се възползуваме от закона за запазване на енергията, но сега няма да се занимаваме с този въпрос.)

Нека сега имаме един единствен електрон; върху какво е приложена възникващата в него сила на съпротивление? Според старата класическа теория електронът е като малко топче, различните части на което взаимодействуват помежду си. Поради закъсняването при разпространяване на взаимодействието вътре в такова топче силата се оказва изместена по фаза спрямо скоростта на движението. Ние знаем, че когато електронът е неподвижен, „действието е равно на противодействието". Поради това вътрешните сили се уравновесяват и резултантната сила е равна на нула. Но в движещия се с ускорение електрон силата, действуваща на предната половина от страна на задната половина поради закъсняването, не е равна на силата, която действува в обратна посока. Закъсняването на взаимодействието по време нарушава баланса на силите и като резултат цялата система като че ли „си настъпва връзките на обувките". Такова обяснение на възникването на радиационно съпротивление при движението на електрона среща редица трудности и преди всичко, поради това че съгласно съвременните представи електронът не е „малко топче"; проблемът остава нерешен и досега. Макар да не знаем механизма на силите, все пак ние можем да пресметнем точно силата на съпротивлението на излъчването, т. е. загубите на енергия за ускоряване на зарядите.

2. Интензивност на излъчването

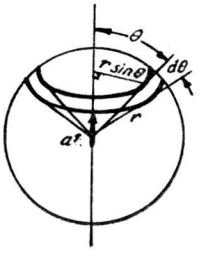
Нека пресметнем сега пълната енергия, която излъчва даден заряд при ускорено движение. За по-голяма общност ще вземем случая с произволно ускорение, считайки обаче движението нерелативистично. Когато ускорението става например във вертикална посока, електричното поле на излъчването е равно на произведението от заряда по проекцията на закъсняващото ускорение, делено на разстоянието. По този начин е известно електричното поле в коя да е точка, а оттук знаем и енергията $\varepsilon_0 cE^2$, преминаваща през единица площ за 1 s.

Величината $\varepsilon_0 c$ често се среща във формулите за разпространение на радиовълни. Реципрочната ѝ стойност може да бъде наречена *импеданс на вакуума* (или съпротивление на вакуума); тя е равна на $\frac{1}{\varepsilon_0 c} = 377\ \Omega$. Оттук мощността (във ватове на квадратен метър) е средният квадрат на интензитета на полето, разделен на 377.

С помощта на формулата (29.1) за електричното поле получаваме

$$S = \frac{q^2 a'^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 r^2 c^3}, \qquad (32.2)$$

където S е мощността на 1 m², излъчена под ъгъл θ, а както вече отбелязахме, S е обратно пропорционално на разстоянието. Интегрирайки, получаваме пълната мощност, излъчена във всички посоки. За това е необходимо първо да умножим S по повърхнината на ивица от сфера; тогава ще получим потока енергия в ъглов интервал $d\theta$ (фиг. 32.1). Площта на ивицата се намира по следния начин: ако радиусът е равен на r, то дебелината на ивицата ще е $rd\theta$, а дължината ѝ — $2\pi r \sin\theta$, тъй като радиусът на кръговата ивица е $r\sin\theta$. Значи повърхнината на ивицата е



Фиг. 32.1. Повърхнина на сферичен пръстен, равен на $2\pi r \sin\theta r d\theta$

$$dA = 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta. \tag{32.3}$$

Като умножим потока (мощността на 1 m² съгласно формула (32.2)) по повърхнината на ивицата, ще намерим енергията, излъчвана в интервала θ, $\theta + d\theta$; по-нататък трябва да интегрираме за всички ъгли от $\theta = 0$ до $\theta = 180°$:

$$P = SdA = \frac{q^2 a'^2}{8\pi\varepsilon_0 c^3} \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta. \tag{32.4}$$

За да пресметнем $\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta$, ще се възползуваме от равенството $\sin^3\theta = (1 - \cos^2\theta)\sin\theta$ и в резултат ще получим 4/3. Оттук имаме окончателно

$$P = \frac{q^2 a'^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}. \tag{32.5}$$

Необходимо е да направим няколко забележки във връзка с този израз. Преди всичко, тъй като $\mathbf{a}'$ е вектор, $\mathbf{a}'^2$ във формулата (32.5) означава $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, т. е. квадрата на дължината на вектора. След това, във формулата (32.2) за потока влиза ускорението, за което е взето предвид закъснението, т. е. ускорението в онзи момент, в който е била излъчена енергията, преминаваща сега през повърхността на сферата. Би могло да се помисли, че енергията действително е била излъчена точно в указания момент от време. Но това не е съвсем правилно. Момента на излъчването не може да се определи точно. Може да се пресметне резултатът само за такова движение, където ускорението в края на краищата изчезва като например за трептенето и т. н. Следователно ние можем да намерим само пълния поток на енергията за целия период на трептенето, пропорционален на средния за един период квадрат на ускорението. Затова a'^2 в (32.5) трябва да означава средното по време от квадрата на ускорението. При такова движение, когато ускорението в началото и в края се обръща в нула, пълната излъчена енергия е равна на интеграла по времето от израза (32.5).

Нека видим какво ще ни даде формулата (32.5), ако имаме осцилираща система, чието ускорение $\mathbf{a}'$ има вида $-\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$. Средното за периода от квадрата на ускорението е равно на (при повдигане на квадрат трябва да помним, че всъщност вместо експонентата трябва да влиза нейната реална част — косинуса а средното от $\cos^2\omega t$ дава $^1/_2$)

$$\langle a'^2 \rangle = \frac{1}{2}\omega^4 x_0^2.$$

Следователно

$$P = \frac{q^2 \omega^4 x_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}. \tag{32.6}$$

Тези формули са получени сравнително неотдавна — в началото на XX век. Това са забележителни формули, те са имали огромно историческо значение и за тях си струва да прочетем в старите книги по физика. Там обаче се е използувала друга система единици, а не СИ. Но в крайните резултати, които се отнасят за електроните, тези усложнения могат да се избягнат с помощта на следното правило за съответствие: величината $q_e^2/4\pi\varepsilon_0$, където q_e е зарядът на електрона (в кулони), по-рано се е записвала като e^2. Лесно е да се убедим, че в системата СИ стойността на e е числено равна на $1{,}5188.10^{-14}$, тъй като знаем, че $q_e = 1{,}60206 . 10^{-19}$ и $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}98748 . 10^9$. По-нататък често ще използуваме следното удобно означение:

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0}. \tag{32.7}$$

Ако заместим e с тази му стойност в старите формули, то всички останали величини в тях можем да смятаме за определени в СИ. Например формулата (32.5) по-рано имаше вида $P=\frac{2}{3}e^2\frac{a^2}{c^3}$. А потенциалната енергия на протона и електрона на разстояние r е $q^2/4\pi\varepsilon_0 r$, или e^2/r, където $e=1{,}5188\cdot 10^{-14}$ ед. в СИ.

3. Радиационно затихване

Заряд, закрепен на пружина със собствена честота ω_0 (или електрон в атома), даже в абсолютно празно пространство не може да трепти безкрайно дълго, тъй като, трептейки, губи енергия за излъчване. В този случай нямаме никакви сили на съпротивление в обикновения смисъл на думата, няма вискозитет. Но трептенията няма да продължават „вечно"; поради излъчване те бавно ще затихват. А колко бавно? Нека определим за всеки осцилатор една величина Q, обусловена от така нареченото радиационно съпротивление или радиационно затихване. За всяка трептяща система величината Q е равна на енергията на системата в дадения момент от време, разделена на загубата на енергия, отнесена към 1 рад:

$$Q=\frac{W}{dW/d\varphi}.$$

Нека запишем Q иначе, като използуваме равенството

$$\frac{dW}{d\varphi}=(dW/dt)/(d\varphi/dt)=-(dW/dt)/\omega:$$

$$Q=-\frac{\omega W}{dW/dt}. \qquad (32.8)$$

Ако Q ни е известно, лесно може да се получи законът за спадане на енергията на трептенията: $\frac{dW}{dt}=-\frac{\omega}{Q}\cdot W$, откъдето следва $W=W_0e^{-\omega t/Q}$; тук W_0 е началната енергия (при $t=0$).

За да намерим Q за излъчващ осцилатор, ще се върнем към формулата (32.8) и ще поставим вместо dW/dt израза (32.6).

А какво трябва да вземем в качеството на енергия W на осцилатора? Кинетичната енергия на осцилатора е равна на $\frac{1}{2}mv^2$, а средната кинетична енергия е равна на $m\omega^2x_0^2/4$. Но ние помним, че пълната енергия на осцилатора е равна на средната кинетична енергия плюс средната потенциална енергия; при това и двете за осцилатора са равни. Пълната енергия е равна на

$$W=\frac{1}{2}\omega^2mx_0^2. \qquad (32.9)$$

Каква честота трябва да се постави в нашите формули? Ние ще вземем собствената честота ω_0, защото практически това е честотата на излъчването на атома, а вместо m ще поставим m_e. След редица съкращения тази формула ще добие вида

$$\frac{1}{Q}=\frac{4\pi e^2}{3\lambda m_ec^2}. \qquad (32.10)$$

(За по-голяма яснота и за да бъдем по-близко към исторически приетата форма, е въведена величината $e^2=q_e^2/4\pi\varepsilon_0$ и е записано $2\pi\lambda$ вместо ω_0/c.) Тъй като Q е безразмерна величина, множителят e^2/m_ec^2, зависещ само от масата m и заряда на електрона и изразяващ неговите вътрешни свойства, трябва да има размерност на *дължина*. Той е бил наречен *класически радиус на електрона*, тъй като в старите модели на електрона са се опитвали да обяснят радиационното съпротивление с действието на една от частите на електрона върху другите, заради което се е наложило размерите на електрона да бъдат избрани от порядъка на e^2/m_ec^2. Но тази величина е загубила предишния си смисъл и никой днес

не счита, че електронът *има* такъв радиус. Числената стойност на класическия радиус на електрона е следната:

$$r_0=\frac{e^2}{m_e c^2}=2.82\,.\,10^{-15}\ \text{m}. \tag{32.11}$$

Да пресметнем стойността на Q за атом, излъчващ видима светлина, например за атома на натрия. Дължината на вълната на излъчване на натрия е равна приблизително на 6000 Å и се намира в жълтата част на спектъра; тази величина е твърде типична. Оттук

$$Q=\frac{3\lambda}{4\pi r_0}\approx 5\,.\,10^7, \tag{32.12}$$

т. е. за атомите Q е от порядъка на 10^8. Това значи, че атомният осцилатор трепти 10^8 рад, или приблизително 10^7 периода, преди неговата енергия да се намали $1/e$ пъти. Честотата на трептенията на светлината $\nu=c/\lambda$ при дължина на вълната 6000 Å е 10^{15} херца; следователно времето на живот, т. е. времето, за което енергията ще се намали $1/e$ пъти, е величината от порядъка на 10^{-8} s.

Приблизително такова време светят свободните атоми в обикновени условия. Направената оценка е валидна само за атомите в празно пространство, неизложени на никакви външни въздействия. Ако електронът се намира в твърдо тяло, той се сблъсква с други атоми и електрони и тогава възниква добавъчно съпротивление и затихването ще бъде друго.

Големината на ефективното съпротивление γ, определяща съпротивлението на осцилатора, може да бъде намерена от съотношението $\frac{1}{Q}=\gamma/\omega_0$; нека си спомним, че именно γ определя ширината на резонансната крива (вж. фиг. 23.2). И тъй ние пресметнахме ширината на *спектралните линии* за свободно излъчващите атоми. От равенството $\lambda=\frac{2\pi c}{\omega}$ получаваме

$$\Delta\lambda=\frac{2\pi c\,\Delta\omega}{\omega^2}=\frac{2\pi c\gamma}{\omega_0^2}=\frac{2\pi c}{Q\omega_0}=\frac{\lambda}{Q}=\frac{4\pi r_0}{3}=1{,}18\,.\,10^{-14}\ \text{m}. \tag{32.13}$$

4. Независими източници

Преди да преминем към втората тема на тази глава — разсейване на светлината, ще обсъдим един частен случай на явлението интерференция, което досега не сме разглеждали. Става дума за случая, когато интерференция *не възниква*. Нека имаме два източника S_1 и S_2 с амплитуди на полето A_1 и A_2. Лъчението се регистрира в някоя точка, в която двата лъча пристигат с фази φ_1 и φ_2 (фазите зависят от истинския момент на излъчване и времето на закъсняване, което е функция на точката на наблюдението).

Наблюдаваната интензивност на лъчението се получава от събирането на два комплексни вектора с модули A_1 и A_2 и фази φ_1 и φ_2 (както в гл. 30) и повдигането на сумата на квадрат; по този начин енергията е пропорционална на

$$A_R^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2). \tag{32.14}$$

Ако липсваше смесеният член $2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$, пълната енергия в дадена посока щеше да бъде равна на сумата от енергиите на всеки източник, т. е. $A_1^2+A_2^2$, което съответствува на нашите обикновени представи. Иначе казано, интензивността на светлината, падаща върху предмет от два източника, би съвпаднала със сумата от интензивностите на двата източника. От друга страна, ако оставим смесения член, няма да се получи сума на интензивностите, защото възниква интерференция. В случаите, когато смесеният член не играе роля, като че ли не съществува интерферен-

ция. Фактически тя съществува винаги, но понякога ние не успяваме да я наблюдаваме.

Ще дадем няколко примера. Нека два източника се намират един от друг на разстояние 7 000 000 000 дължини на вълните, което изобщо е напълно осъществимо. Тогава в някоя фиксирана посока разликата на фазите ще приеме напълно определена стойност. Но ако се отклоним от тази посока поне на косъм, да кажем на няколко дължини на вълните (съвсем нищожно разстояние: зеницата на нашето око е толкова голяма, че действието на лъчите може да се усреднява на разстояния, много по-големи от дължината на вълната), разликата на фазите ще стане друга и стойността на косинуса рязко ще се измени. При пресмятането на *средната* интензивност в малка област на пространството косинусът в точките на тази област непрекъснато ще се изменя — плюс, минус, плюс, минус — и при усредняването ще даде нула.

И тъй усредняването по областта, в която фазата бързо се мени от една точка към друга, обръща интерференчния член в нула.

Друг пример. Да предположим, че два източника трептят и излъчват радиовълни независимо един от друг, т. е. те представляват не един осцилатор, захранван от два проводника (благодарение на което фазовата разлика остава постоянна), а именно два независими източника. Нека още източниците да не са настроени *точно* на една и съща честота (равенството на честотите е много трудно за достигане, ако не се съединят източниците в една верига). Именно при тези условия ще наричаме източниците *независими*. Естествено, че поради честотното изместване фазите на източниците ще се различават, даже ако в началото са съвпадали: едната от фазите ще започне да изпреварва другата и много скоро източниците ще се окажат в противофаза, а при понататъшното изпреварване пак ще се изравнят и т. н. Разликата на фазите по този начин ще се мени с времето, но при измерване в течение на голям промеждутък от време уредите не ще могат да проследят това, тъй като изменението на интензивността подобно на „биенето“ на звука става твърде бързо. Ние ще трябва да извършим усредняване по целия промеждутък от времето на наблюдението, но при това интерференчният член пак ще отпадне.

С други думи, при усредняване по фазовата разлика интерференчният член се обръща в нула.

Има много книги по физика, в които се твърди, че два различни светлинни източника никога не интерферират. Това твърдение не отразява физическия закон, а просто характеризира онази чувствителност на експерименталната техника, която е съществувала до момента на написването на книгата. В светлинния източник става следното: отначало излъчва един атом, след това друг и т. н. Както показахме по-горе, атомите излъчват редица от вълни за време от около 10^{-8} s; след 10^{-8} s даден атом спира да свети, неговото място заема друг, след това трети и т. н. Поради това фазата може да остане постоянна приблизително само в течение на 10^{-8} s. При усредняване за промеждутъци от време, много по-големи от 10^{-8} s, интерференчният член от двата източника отпада, тъй като фазата на източниците за такова време се изменя много пъти. Светлинните клетки на Кер позволяват да се регистрира светлина с много голяма скорост и с тяхна помощ е показано, че интерференчният член се изменя за време от порядъка на 10^{-8} s. Но повечето прибори не могат да регистрират светлината в такива малки интервали от време и естествено не могат да уловят интерференцията. За окото времето за усредняване е около 1/10 s и поради това да се види интерференцията на обикновените източници е съвършенно невъзможно.

Неотдавна бяха създадени такива източници на светлина, в които атомите излъчват *едновременно* и затова може да се заобиколи ефектът на усредняването. Принципът на устройството на такива източници е твърде сложен и може да бъде разбран само ако се знаят законите на квантовата механика. Тези източници се наричат *лазери*. Интерференчната честота на излъчената от ла-

зера светлина, т. е. времето, през което фазата остава постоянна, е много по-голяма от 10^{-8} s. То може да бъде равно на стотна, на десета част от секундата и даже на цяла секунда; с помощта на обикновени светлинни клетки може да се определи интерференчната честота между два лазера. Лесно може да се забележат биенията при събиране на светлината от два лазера. Няма съмнение, че скоро ще стане възможно да се получат такива бавни биения, че насочвайки светлината от два лазера към стена, да ги видим с невъоръжено око като периодически отслабвания и усилвания на яркостта на петното.

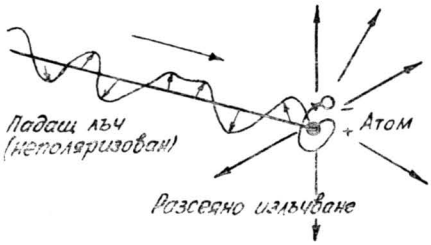
Още един пример за погасяване на интерференцията е случаят, когато се събира светлината не от *два*, а от *много* източници. Тогава A_R^2 е равно на квадрата на сумата от голям брой амплитуди (комплексни числа), т. е. на сумата от квадратите плюс смесените членове от всяка двойка. При определени условия смесените членове могат да се погасят и интерференцията да изчезне. Например когато източниците са хаотично разпределени в пространството. Тогава фазовата разлика между A_1 и A_2, макар и да е постоянна, значително се отличава от фазовата разлика между A_2 и A_3 и т. н. В сумата се получават много косинуси — едни положителни, други отрицателни, които в сбора почти напълно се съкращават.

Ето защо в много случаи ние не забелязваме ефекта на интерференцията, а пълната интензивност се оказва равна на сбора от интензивностите на всички източници.

5. Разсейване на светлината

Приведените по-горе примери ще ни помогнат да разберем едно явление, което възниква във въздуха в резултат на хаотичното разположение на атомите. В главата за показателя на пречупване ние казахме, че падащата светлина възбужда излъчване на атомите. Електричното поле на падащия сноп разлюлява електроните нагоре-надолу и те започват да излъчват (защото се движат с ускорение). Това разсеяно лъчение образува сноп светлина, който се движи в същата посока като падащия лъч, но се отличава по фаза, благодарение на което и възниква показател на пречупване.

Но какво може да се каже за интензивността на разсеяната светлина в другите посоки? Ако атомите се редуват правилно, образувайки красиви геометрични шарки, интензивността във всички останали посоки е равна на нула, защото резултатът от събирането на множество вектори с изменящи се фази е нула. Но ако разположението на атомите е *хаотично*, интензивността във всяка посока е равна на *сумата* от интензивностите на всеки атом поотделно. Нещо повече, атомите на газа се движат постоянно и фазовата разлика между два атома се изменя всеки момент, затова при усредняване по време изчезват *всички* кръстосани членове. Следователно за определяне на интензивността на разсеяната от газ светлина трябва да се вземе разсейването от *един атом* и да се умножи неговата интензивност по броя на атомите.



Фиг. 32.2. Падащият върху атома лъч заставя зарядите (електроните) на атомите да трептят

Движещият се електрон от своя страна излъчва във всички посоки

Както вече бе отбелязано, синият цвят на небето се дължи именно на разсейването на светлината във въздуха. Слънчевата светлина преминава през въздуха и, когато не гледаме към Слънцето, а например перпендикулярно на падащия лъч, ние виждаме светлината в синя окраска; да се опитаме сега да пресметнем *интензивността* на разсеяната светлина и да разберем *защо тя е синя.*

Падащият светлинен лъч с интензитет на електричното поле $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$ в точката, където е разположен атомът, както е известно, заставя електрона да трепти нагоре-надолу (фиг. 32.2). С помощта на уравнението (23.8) намираме амплитудата на трептенията:

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{q_e \mathbf{E}_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\,\omega\gamma\right)} \tag{32.15}$$

Ние бихме могли да вземем под внимание затихването и да сумираме по честотите, смятайки, че атомът действува като съвкупност от осцилатори с различни честоти. Обаче за простота ние ще се ограничим със случая, когато имаме един осцилатор (честота), и ще пренебрегнем затихването. Тогава изразът за амплитудата приема вида, който ние вече използувахме при пресмятането на показателя на пречупването:

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{q_e \hat{\mathbf{E}}_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}. \tag{32.16}$$

От тази формула за $\hat{\mathbf{x}}$ и от равенството (32.2) лесно се получава интензивността на разсейването в дадена посока. Обаче, за да си спестим време, ще пресметнем отначало пълната интензивност на разсейването във всички посоки. Пълната енергия, която атомът разсейва за 1 s във всички посоки, може да бъде получена от формулата (32.7). След като прегрупираме членовете, изразът за енергията приема вида

$$P = \left[\left(\frac{q_e^2\,\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}\right)\frac{q_e^2 E_0^2}{m_e^2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2\right)\frac{8\pi}{3}\left(\frac{q_e^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2 m_e^2 c^4}\right)\left[\frac{\omega^4}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2\right)\left(\frac{8}{3}\pi r_0^2\right)\left[\frac{\omega^4}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}\right]. \tag{32.17}$$

Ние привеждаме резултата в такава форма, защото тя е удобна за запомняне: преди всичко разсейваната енергия е пропорционална на квадрата на падащото поле. Какво означава това? Очевидно квадратът на полето е пропорционален на енергията на падащия сноп, преминаваща за 1 s. (Наистина енергията, падаща върху 1 m² за 1 s, е равна на произведението на $\varepsilon_0 c$ по средния квадрат на електричното поле $\langle E^2\rangle$; ако максималната стойност на E е E_0, то $\langle E^2\rangle = 1/2\,E_0^2$.) С други думи, разсейваната енергия е пропорционална на плътността на падащата енергия; колкото е по-силна слънчевата светлина, толкова по-ярко изглежда небето.

А каква *част* от падаща светлина се разсейва от електрона? Нека си представим мишена с площ σ, поставена на пътя на лъча (не истинска мишена от някакво вещество, защото тя ще доведе до дифракция на светлината и др., а въображаема, нарисувана в пространството). Количеството енергия, преминаващо през повърхността, е пропорционално на падащата интензивност и на площта на мишената:

$$P = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2\right)\sigma. \tag{32.18}$$

А сега нека да се уговорим: пълното количество енергия, разсейвано от атома, ние ще приравняваме към енергията на падащия сноп, преминаващ през определена площ: ако зададем стойността на площта, с това ние ще определим и разсейваната енергия. В такава форма отговорът ни не зависи от интензивността на падащия сноп; той дава отношението на разсейваната енергия към тая, която пада върху 1 m². С други думи,

$$\frac{\text{пълната енергия, разсейвана за 1 s}}{\text{енергията, падаща върху 1 m}^2\text{ за 1 s}} = \text{площ.}$$

Смисълът на тази площ се заключава в това, че ако всичката падаща върху нея енергия се отразяваше, тя би разсейвала толкова енергия, колкото разсейва един атом. Тази площ се нарича *ефективно сечение на разсейването*. Понятието ефективно се-

чение се използува винаги, когато ефектът е пропорционален на интензивността на падащия сноп. В такива случаи ефектът се задава количествено чрез площта на ефективната област, захващаща от снопа такава част, която се равнява на разсеяната. Това съвсем не означава, че нашият осцилатор действително заема такава площ. Ако един свободен електрон се люлее просто назад-напред, на него не му съответствува никаква площ. Това е само начин за изразяване на резултата чрез определена величина; ние само посочваме площта, върху която снопът трябва да падне, за да се получи определена разсеяна енергия. И тъй в нашия случай

$$\sigma_s = \frac{8\pi r_0^2}{3} \frac{\omega^4}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2} \cdot \tag{32.19}$$

(s-разсейване)

Да разгледаме няколко примера. Преди всичко, когато собствената честота е много малка или електронът е свободен, което съответствува на $\omega_0 = 0$, честотата ω се съкращава и сечението става константа. При тази граница сечението се нарича *томпсоново сечение на разсейване.* То е равно на повърхнината на квадрата със страна около 10^{-15} m, т. е. на площ 10^{-30} m^2, което е много малко.

От друга страна, при разсейване на светлината във въздуха собствените честоти на осцилаторите, както вече казахме, са по-големи от честотата на обикновената светлина. Оттук следва, че в знаменателя можем да пренебрегнем ω^2 и сечението се оказва пропорционално на четвъртата степен на честотата. Това значи, че светлина с два пъти по-голяма честота ще се разсейва шестнадесет пъти по-интензивно, а това е доста осезателна разлика. По такъв начин синята светлина, чиято честота е приблизително два пъти по-голяма от тая на червената, се разсейва значително по-силно от последната. И наистина, като погледнем към небето, ние виждаме чудна синева.

Струва си да кажем още няколко думи във връзка с получените резултати. Отговорете първо защо ние виждаме облаците? Откъде се вземат те? На всички е известно, че облаците възникват за сметка на кондензацията. Защо ние не сме ги виждали? А след кондензацията те прекрасно се виждат. Не се виждат — и изведнъж се появяват. Както виждате, тайната на произхода на облаците съвсем не е детски въпрос от типа „татко, откъде е дошла водата?“ и трябва да се обясни.

Ние току-що казахме, че всеки атом разсейва светлината — значи водната пара също трябва да разсейва светлина. Загадъчното е защо кондензиралата се в облаци вода разсейва светлината много по-силно.

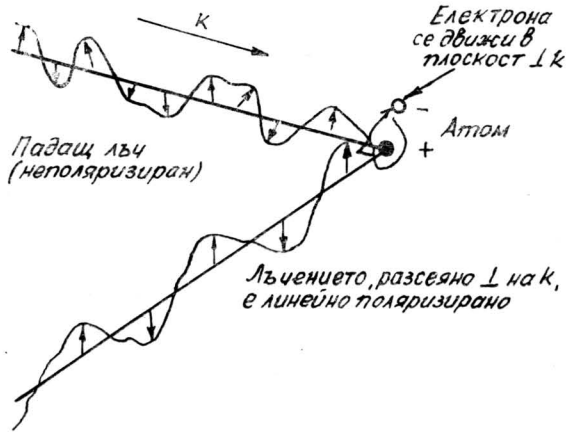
Да видим какво ще се получи, ако вместо един атом вземем куп атоми, най-напред например два атома, разположени на разстояние един от друг много по-малко от дължината на вълната. Да си спомним, че размерите на атома са от порядъка на 1 Å, а дължината на светлинната вълна — от порядъка на 5 000 Å, така че няколко атома напълно могат да образуват куп спрямо светлината. Под действието на електричното поле двата атома ще трептят съвместно като едно цяло. Разсеяното електрично поле ще се окаже равно на сумата от двете полета с еднаква фаза, т. е. с удвоената амплитуда на единия атом, а ще се увеличи четири (а не два) пъти енергията на излъчване на отделния атом. По такъв начин купчина атоми излъчва и разсейва повече енергия, отколкото същият брой атоми поотделно. Нашето старо твърдение, че фазите на два атома не са свързани, се базираше на предположението за голямата фазова разлика между два атома, което е вярно само когато разстоянието помежду им е от порядъка на няколко дължини на вълната или когато те се движат. Ако атомите са съвсем близко, те непременно излъчват с една и съща фаза и тогава възникващата интерференция води към увеличаване на разсейването.

Нека в такава купчина малка водна капка има N атома; тогава под въздействието на електричното поле те ще се движат, както и по-рано, заедно (взаимното влияние на атомите за нас е несъществено, ние искаме само да изясним същността на въпроса). Амплитудата на разсейването на всеки атом е една и съща; следователно полето на разсеяната вълна ще бъде N пъти по-силно. Интензивността на разсеяната светлина се увеличава N^2 пъти. Ако атомите са далеч един от друг, се получава увеличение N пъти в сравнение отделния атом, а тук то е N^2 пъти. Иначе казано, водните капки (по N молекули във всяка) разсейват N пъти по-силно, отколкото същите атоми поотделно. Така че, колкото повече вода се кондензира, толкова разсейването е по-силно. Може ли разсейването да расте *до безкрайност?* Не, разбира се. На кой етап нашите разсъждения ще станат неверни? Отговор: когато водната капка се увеличи дотолкова, че размерите ѝ станат от порядъка на дължината на вълната, трептенията на атомите ще протичат с различни фази, защото разстоянието между тях става много голямо. Разсейването ще расте с увеличаването на размера на капките дотогава, докато те не станат сравними с дължината на вълната, а после с нарастването на капките разсейването ще расте много по-бавно. Освен това синият цвят в разсеяната вълна ще започне да изчезва, защото за късите вълни по-бързо ще настъпи (при по-дребни капки) границата на увеличаването на разсейването, отколкото за дългите вълни. Макар че всеки атом разсейва късите вълни посилно от дългите, капките с размери, по-големи от дължината на вълната, разсейват по-интензивно светлината откъм червения край на спектъра; при наедряването на капките цветът на разсеяното лъчение се мени от син към червен (става по-червен).

Това явление може нагледно да се демонстрира. Трябва да се вземат много малки частички от някое вещество, които после постепенно да нарастват. За целта можем да използуваме разтвор на натриев хипосулфат в сярна киселина, в който се утаяват мънички зрънца сяра. Когато сярата започне да се утаява и зрънцата са мънички, разсеяната светлина има син оттенък. С увеличаването на броя и големината на частичките в утайката отначало светлината става по-интензивна, а после получава белезникав оттенък. Освен това преминаващите лъчи губят синята си компонента. Именно поради това залезът е червен; преминавайки през по-дебел слой атмосфера, сините лъчи се разсейват и светлината придобива оранжева окраска.

На края при разсейването възниква още едно важно явление, което по същество се отнася към поляризацията — темата на следващата глава. То е толкова интересно, че си струва да кажем нещо и сега. Оказва се, че електричното поле на разсеяната светлина трепти предимно в едно определено направление. Нека електричното поле в падащата вълна да трепти в дадено направление. Тогава принудените трептения на осцилатора ще бъдат в същото направление. Ако сега гледаме под прав ъгъл към падащия лъч, ще видим *поляризирана* светлина, т. е. светлина, в която електричното поле ще трепти само в едно направление. Изобщо атомите могат да осцилират във всяко направление, лежащо в равнината, която е перпендикулярна на падащия лъч, но когато те се движат към нас или от нас, ние не ги виждаме. По такъв начин, макар че електричното поле в падащия лъч осцилира във всяко направление (в този случай казват, че светлината е неполяризирана), светлината, разсеяна под ъгъл 90°, съдържа трептения само в едно направление (фиг. 32.3).

Има такова вещество, наречено *полароид,* през което преминава само тая вълна, в която електричното поле е успоредно на дадена ос. С помощта на полароид ние можем да забележим поляризацията и в частност да покажем, че разсеяната от нашия хипосулфатов разтвор светлина наистина е силно поляризирана.



Фиг. 32.3. Възникване на поляризацията в разсеяния лъч, насочен под прав ъгъл спрямо падащия

33

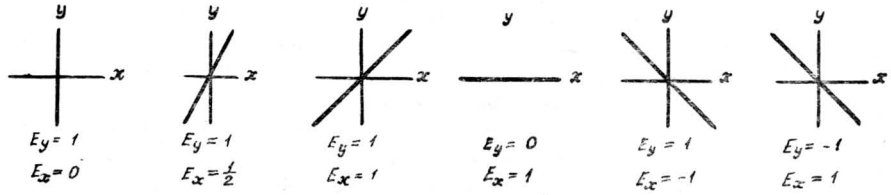
Поляризация

1. Вектор на електричното поле на светлинната вълна
2. Поляризация на разсеяна светлина
3. Двойно пречупване на светлината
4. Поляризатори
5. Оптична активност
6. Интензитет на отразената светлина
7. Аномално пречупване

1. Вектор на електричното поле на светлинната вълна

В тази глава ще разгледаме онези явления, които са свързани с векторния характер на електричното поле на светлинната вълна. В предходните глави ние не се интересувахме от посоката на трептенията на електричното поле. Наистина ние отбелязахме, че векторът на електричното поле лежи в равнина, перпендикулярна на посоката на разпространение на светлината. На нас не ни беше нужно да знаем по-точно посоката на вектора. Сега ще преминем към изучаване на явленията, в които главна роля играе определена посока на трептене на електричния вектор.

В идеално монохроматична светлинна вълна електричното поле трепти с определена честота, а тъй като x- и y- компонентата на полето могат да трептят независимо с една и съща честота, отначало ще разгледаме събиране на две взаимно перпендикулярни трептения. Какво електрично поле възниква при събиране на трептения на x- и y- компонентата на полето с еднаква честота? Събирайки трептене по оста x и трептене със същата фаза по оста y, получаваме трептене по нова ос в равнината xy.



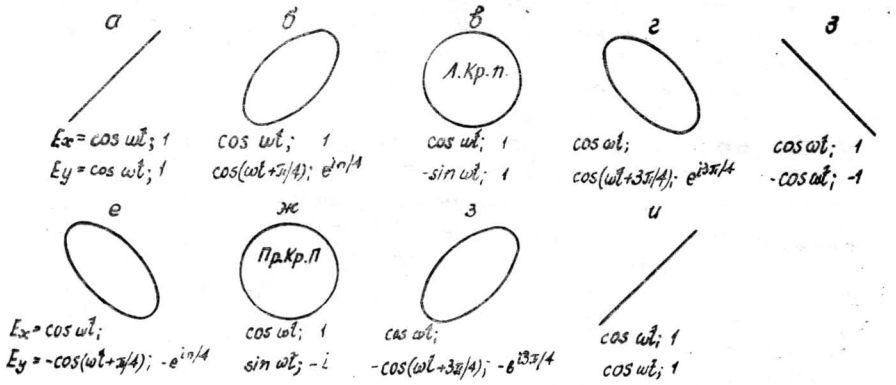
Фиг. 33.1. Събиране на трептения по осите x и y, когато фазовата разлика между тях е равна на нула.

На фиг. 33.1 е показано как става събиране на трептения с различни амплитуди по осите x и y. Но примерите, представени на тази фигура, не изчерпват всички възможности: досега се предполагаше, че трептенията по осите x и y се извършват с *еднакви фази,* обаче това съвсем не е необходимо. Може да се случи трептенията по x и y да имат различни фази.

В последния случай векторът на електричното поле описва елипса, което може да се покаже със следния прост пример. Да окачим на дълга връв топка така, че тя да може да се люлее свободно в една хоризонтална равнина; движението на топката има синусоидален характер. Да си представим мислено осите x и y в хоризонталната равнина на люлеенето на топката с начало на координатите в точката на покоя на топката. Избирайки съответно начално отместване и начална скорост на топката, последната може да бъде заставена да трепти периодично по оста x, по оста y или по кое да е друго направление в равнината xy с една и съща честота, равна на честотата на махалото. Тези трептения на топката са аналогични на трептенията на електричния вектор, представени на фиг. 33.1. Във всеки случай отклоненията по осите x и y достигат своя максимум едновременно и следователно двете трептения се намират във фаза. Но известно е, че най-общият тип движение на топката — движение по елипса — възниква, когато трептенията по осите x и y се извършват с *различни* фази.

На фиг. 33.2 е показано събиране на трептения по осите x и y за различни стойности на фазовото отместване между тях. Във

всичките примери електричният вектор описва елипса. Трептенето по права е също частен случай на елиптичното, когато фазовото отместване е равно на нула (или на цяло число π); при равни амплитуди и фазово отместване 90° (или нечетно число $\frac{\pi}{2}$) имаме движение по окръжност.



Фиг. 33.2. Събиране на трептения по осите x и y с различни фази. Компонентите E_x и E_y са записани и в реални, и в комплексни означения

Компонентите на електричното поле по осите x и y на фиг. 33.2 са изразени във вид на комплексни числа, което се оказва много удобно за намиране на фазовата разлика. В тези означения обаче не бива да се бъркат реалната и имагинерната части с x- и y-компонента на полето. Представените на фиг. 33.2 компоненти на полето по осите x и y са реални физически полета, които могат да се измерят. Реалната и имагинерната части на вектора на електричното поле са въведени само за математическо удобство и това разделяне няма физически смисъл.

Ще направим някои пояснения относно терминологията. Светлината се нарича *линейно поляризирана* (понякога плоско поляризирана), ако електричното поле трепти по права линия; на фиг. 33.1 е показан случай на линейна поляризация. Когато векторът на електричното поле описва елипса, говори се за *елиптична поляризация*. Ако електричният вектор описва окръжност, ние имаме *кръгова поляризация*. Ако електричният вектор при своето движение в светлинната вълна се върти както десен винт, говори се за дясна кръгова поляризация. На фиг. 33.2, ж е даден пример за дясна кръгова поляризация, а на фиг. 33.2, в, пример за лява кръгова поляризация. И в двата случая светлината се разпространява от равнината на страницата към читателя. Нашето определение на лява и дясна кръгова поляризация се съгласува с подобни определения за всички други частици в съвременната физика, за които може да се въведе понятието поляризация (например за електроните). В курсовете по оптика обаче понякога се използуват точно противоположни определения, затова читателят трябва да се отнася с известна предпазливост към термините *лява* и *дясна поляризация*.

Ние описахме линейната, кръговата и елиптичната поляризация на светлината и по такъв начин обхванахме всички възможни случаи на състояние на светлината освен един — случая на *неполяризирана* светлина. Как тогава може да се получи неполяризирана светлина, ако е известно, че трептенията се извършват по една или друга елипса?

Нека вземем не напълно монохроматична светлина, когато фазовото отместване на трептенията по осите x и y не е постоянно и електричният вектор трепти по произволен начин; тогава поляризацията на светлината през цялото време ще се мени. Да си спомним, че един атом излъчва светлина за 10^{-8} s. Ако всички атоми излъчват светлина с различна поляризация, поляризацията на целия светлинен лъч ще се мени след всеки 10^{-8} s. Когато поляризацията на светлината се изменя толкова бързо, че е не-

възможно да се измери, говори се за неполяризирана светлина, защото всички поляризационни ефекти се усредняват и дават резултат, равен на нула. Нито един от интерференчните ефекти не се проявява при събиране на различните поляризации в неполяризирана светлина.

В същото време от самото определение на понятието неполяризирана светлина се разбира, че е невъзможно да се установи експериментално поляризирана ли е дадена светлина, или не е поляризирана.

2. Поляризация на разсеяна светлина

Първият пример от поляризационните явления, който ние вече обсъждахме по-рано, е разсейването на светлината. Нека разгледаме например сноп слънчева светлина, който преминава през въздушна среда. Електричното поле възбужда трептения на зарядите във въздуха и вследствие на тези трептения се излъчва светлина, интензивността на която е максимална в равнината, перпендикулярна на движението на зарядите. Снопът слънчева светлина е неполяризиран, т. е. посоката на поляризацията постоянно се мени, а следователно изменя се и посоката на трептене на зарядите във въздуха. Да вземем светлинен сноп, разсеян под ъгъл 90°; той възниква при излъчване само от ония частици на въздуха, които трептят перпендикулярно на зрителната линия на наблюдателя и следователно снопът разсеяна светлина ще бъде поляризиран по посока на тези трептения. По такъв начин разсейването е пример за получаване на поляризирана светлина.

3. Двойно пречупване на светлината

Има още един интересен факт от областта на поляризационните явления. Срещат се среди, чийто показател на пречупване е различен за светлина, линейно поляризирана в една или друга посока. Да допуснем например, че имаме някакъв материал, съставен от изтеглени несферични молекули, дължината на които е по-голяма от тяхната ширина. Да предположим, че молекулите във веществото са подредени така, че техните големи оси да са успоредни. Какво ще стане, когато на тялото подействува осцилиращо електрично поле? Да предположим, че такава структура на молекулите води до това, че електроните в материала по-лесно се привеждат в трептене по оста на молекулата, отколкото напречно на нея. При такива условия следва да се очаква, че поляризацията в еднага посока ще предизвиква един ефект, а поляризацията, насочена под прав ъгъл спрямо първата — съвсем друг. Да наречем посоката на осите на молекулите *оптична ос*. Показателят на пречупване има различни стойности в зависимост от това ориентирана ли е поляризацията по оптичната ос, или е перпендикулярна на нея. Среда с такива свойства се нарича *двойнопречупваща*. Тя притежава способност да пречупва различно светлината в две посоки, т. е. два показателя на пречупване, в зависимост от поляризацията на светлината в средата. Кои материали имат това свойство? От различни съображения следва, че двойнопречупващата среда трябва да има известно количество ориентирани несферични молекули. Ясно е, че кубическият кристал, който има симетрията на куб, не може да бъде двойно-пречупващ. А дългите игловидни кристали безусловно съдържат несиметрични молекули и при тях лесно се наблюдава ефектът на двойно пречупване.

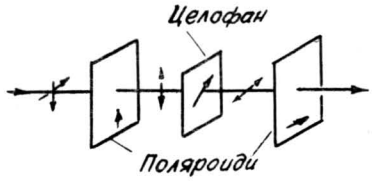
Да се опитаме да съобразим какво ще се получи, ако насочим поляризиран лъч към пластинка от двойнопречупващ материал. Ако поляризацията е успоредна на оптичната ос, светлината ще премине през пластинката с една скорост, а ако поляризацията е перпендикулярна — с друга скорост. Интересно положение възниква, ако светлинният лъч е поляризиран например под ъгъл

45° спрямо посоката на оптичната ос. Тогава поляризацията, както е известно, представлява сума от поляризации по осите x и y с равни амплитуди и фази; този случай е показан на фиг. 33.2, а. Тъй като всеки един от лъчите с поляризация по осите x и y се движи с различна скорост в средата, фазите на двете компоненти на полето ще нарастват нееднакво.

По такъв начин, независимо от това че фазите на x- и y-компонентата съвпадат в началния момент, между тях се появява фазова разлика в средата, която е пропорционална на дълбочината на проникване на светлината в тази среда. Изменението на поляризацията на светлината в процеса на нейното преминаване през средата е показано на серията рисунки на фиг. 33.2. Ако пластинката има такава дебелина, че фазовата разлика между поляризациите по осите x и y при преминаването ѝ да е равна на 90° (фиг. 33.2, в), светлината ще излиза от пластинката кръгово поляризирана. Пластинки с такава дебелина се наричат пластинки четвърт вълна, тъй като те водят до фазова разлика, равна на една четвърт от цикъла. Като пропускаме линейно поляризирана светлина през две четвърт пластинки, отново получаваме линейно поляризирана светлина, но оста на поляризацията се завърта на ъгъл 90° (това се вижда лесно от фиг. 33.2, в).

Явлението двойно пречупване се демонстрира лесно с помощта на целофанов лист. Целофанът се състои от дълги молекуливи влакна и неговата структура е неизотропна, тъй като по-голямата част от влакната са изтеглени в едно направление. За да се наблюдава явлението двойно пречупване, трябва да имаме сноп линейно поляризирана светлина, който се получава лесно, като се пропуска неполяризирана светлина през пластинката на поляроид. За самия поляроид ние ще говорим по-подробно, а засега ще отбележим едно негово важно свойство: светлината, поляризирана по оста на поляроида, преминава през него почти свободно, а светлината, поляризирана перпендикулярно на тази ос, силно се поглъща от поляроида. Когато през пластинката на поляроида се пропуска неполяризирана светлина, преминава само онази част от светлината, чиито трептения са успоредни на оста на поляроида, затова преминалият през пластинката на поляроида лъч ще се окаже линейно поляризиран. Това свойство на поляроида се използува също за определяне посоката на поляризация на линейно поляризирана светлина. Освен това с помощта на поляроида може да се определи има ли в даден светлинен лъч линейна поляризация, или не. За това е достатъчно светлината да се пропусне през пластинката на поляроида, която се върти в равнина, перпендикулярна на лъча. Линейно поляризираната светлина не може да премине през поляроида, когато неговата ос е перпендикулярна на посоката на поляризация на лъча. Завъртайки пластинката на 90°, ние ще видим преминалия през нея лъч само едва забележимо по-слаб, отколкото падащия сноп светлина. Ако яркостта на лъча, преминаващ през поляроида, не зависи от ориентацията на поляроида, падащият светлинен сноп няма линейна поляризация.

За да покажем двойното пречупване в целофан, вземаме два поляроида и ги разполагаме така, както е показано на фиг. 33.3. От първия поляроид излиза линейно поляризиран сноп светлина; ние го пропускаме през целофана, а след това през другия поляроид, за да установим действието на целофана върху поляризираната светлина. Най-напред разполагаме осите на двата поляроида перпендикулярно една на друга и махаме целофановото листче. През втория поляроид не преминава никаква светлина. Сега поставяме целофановото листче между двата поляроида и започваме да го въртим около оста на светлинния сноп. При това въобще известна част от светлината през цялото време ще преминава през втория поляроид. Има обаче две ориентации на целофановото листче, перпендикулярни една на друга, при които през втория поляроид светлина не преминава. Ясно е, че тези ориентации на целофана не влияят на линейната поляризация на преминаващата през него светлина и затова непременно съвпадат с направлението



Фиг. 33.3. Опитна схема за показване двойно пречупване в целофан

Векторите на електричното поле на светлинната вълна са означени с пунктирани стрелки. Посоките на поляризациите, пропускани от поляроидите и оптичните оси на целофана са означени с непрекъснати стрелки. Падащият светлинен лъч е неполяризиран

на оптичната ос на целофана и с перпендикулярното към нея направление.

Тука ние предполагаме, че скоростта на светлината, преминаваща през целофана, е различна за споменатите две посоки на поляризация, но самата посока на поляризацията не се мени при преминаване на светлината. Ако изберем някаква ориентация на целофана някъде между двете главни направления както на фиг. 33.3, през втория поляроид ще премине ярък светлинен сноп.

Оказва се, че дебелината на обикновения целофан, който се използува в магазините за опаковка, е почти равна на половин дължина на вълната за повечето от цветовете, получени при спектралното разлагане на бялата светлина. Целофан с такава дебелина завърта посоката на поляризацията на линейно поляризираната светлина на 90°, ако тази посока в падащия сноп сключва ъгъл 45° с оптичната ос на целофана. По такъв начин излизащият от целофана лъч има точно такава поляризация, че може да премине през втория поляроид.

Ако в нашия опит се използува сноп бяла светлина, то само за една компонента на неговото спектрално разлагане дебелината на целофана съвпада с полудължината на вълната и снопът, пропуснат от втория поляроид, ще има цвета именно на тази компонента. Цветът на снопа, преминал през нашето устройство, ще зависи от дебелината на целофановото листче, а ефективната дебелина на това листче ние можем да меним, като го наклоняваме под някакъв ъгъл и по такъв начин заставяме светлината да преминава по-дълъг път през целофана. При наклоняване на целофановото листче цветът на пропуснатия светлинен сноп се изменя. Като се използува целофан с различна дебелина, могат да се конструират филтри, пропускащи лъчи с напълно определен цвят. Тези филтри имат забележителното свойство да пропускат един цвят, когато осите на двата поляроида са перпендикулярни, и допълнителния на този цвят, когато осите на поляроидите са успоредни.

Системите, съставени от ориентирани молекули, имат още едно, този път напълно практическо приложение. Някои пластмасови материали са съставени от много дълги и сложни молекули, които се преплитат помежду си. При много внимателно провеждане на процеса на втвърдяване на материала молекулите, преплитайки се, образуват непрекъсната маса и се ориентират равномерно в най-различни направления, така че пластмасовият материал обикновено не може да бъде двойнопречупващ. Но при втвърдяването често се образуват дефекти и се създават напрежения, които водят до известна нехомогенност на материала. Напреженията, възникващи в пластмасата, обтягат цяло снопче молекули и молекулните влакна се ориентират по посока на обтягането. Благодарение на вътрешните напрежения пластмасата се превръща в двойнопречупваща и ефектът двойно пречупване на светлината може да се наблюдава, като през материала се пропуска поляризирана светлина. Анализирайки преминалия през материала сноп с помощта на поляроид, ние ще забележим тъмни и светли ивици (оцветени в различни цветове, ако се пропуска сноп бяла светлина). Ако образецът се подложи на разтягане, цялата съвкупност от ивици започва да се отмества, а като се преброят ивиците и се определи мястото на тяхното най-голямо натрупване, могат да се намерят вътрешните напрежения, възникващи в образеца. Инженерите обикновено използуват това явление като метод за определяне напреженията в детайлите, формата на които е трудно да се пресметне.

Още един интересен пример — двойно пречупване в течности. Да разгледаме течност, състояща се от дълги асиметрични молекули, които носят около своите краища разпределен положителен или отрицателен заряд, т. е. молекулите представляват електрични диполи. При своето движение в течността те се сблъскват и могат да заемат произволни ориентации, като някаква доминираща посока на ориентация не съществува. Но ако се приложи електрично поле, молекулите ще започнат да се подреждат по полето

и в този момент течността става двойно пречупваща среда. Като вземем два поляроида и прозрачно обемче с течност от този вид, можем да направим устройство, което пропуска светлина само при включено електрично поле. В резултат на това ние получаваме електрически превключвател на светлина, който се нарича *клетка на Кер*. А самият ефект, когато в течността възниква двойно пречупване на светлината под действие на електрично поле, се нарича *ефект на Кер*.

4. Поляризатори

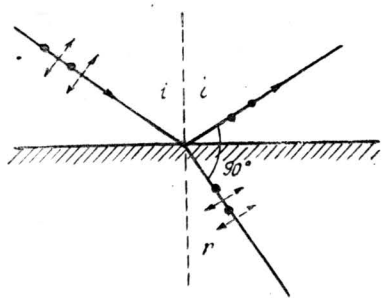
Досега ние говорихме за среди, чийто показател на пречупване е различен за различните посоки на поляризация на падащия светлинен сноп. За практическите приложения голямо значение имат и друг вид среди, при които в зависимост от поляризацията на светлината се мени не само показателят на пречупване, но и коефициентът на поглъщане. Както и в случая на двойното пречупване, лесно е да се разбере, че поглъщането може да зависи от посоката на принудените трептения на зарядите само в анизотропни среди. Първият, много стар, станал вече знаменит пример, е турмалинът, а другият — поляроидът. Поляроидът се състои от тънък слой дребни кристалчета на хепатит (сол на йода и хинина), подредени така, че осите им да са успоредни една на друга. Тези кристали поглъщат светлината, когато трептенията се извършват по едно определено направление и почти не поглъщат светлината, когато трептенията стават по друго направление.

Да пуснем към поляроида сноп светлина, поляризирана под ъгъл θ спрямо неговата ос. Каква ще бъде интензивността на снопа, преминал през поляроида? Разлагаме нашия сноп на две компоненти: една с поляризация, перпендикулярна на онази, която преминава без отслабване (тя е пропорционална на $\sin\theta$), и втора — надлъжна компонента, пропорционална на $\cos\theta$. През поляроида ще премине само частта, пропорционална на $\cos\theta$. Компонентата, пропорционална на $\sin\theta$, ще се поглъща. Амплитудата на светлината, преминала през поляроида, е по-малка от амплитудата на падащата светлина и се получава от нея чрез умножение с $\cos\theta$. Интензивността на светлината е пропорционална на квадрата на $\cos\theta$. По такъв начин, ако падащата светлина е поляризирана под ъгъл θ спрямо оста на поляроида, пропуснатата през поляризатора част от интензивността ще бъде $\cos^2\theta$ от пълната интензивност. Частта от интензивността, поглъщаща се в поляроида, е, разбира се, $\sin^2\theta$.

Интересен парадокс възниква в следния опит. Известно е, че два поляроида с оси, перпендикулярни една на друга, не пропускат светлина. Но ако *между* такива поляроиди се постави трети, оста на който е насочена под ъгъл 45° спрямо осите на другите два, част от светлината ще премине през нашата система. Както е известно, поляроидът само поглъща светлина — той не може да създаде светлина. Независимо от това, поставяйки третия поляроид под ъгъл 45°, ние увеличаваме количеството преминала светлина. Вие можете в качество на упражнение сами да направите анализ на това явление.

Едно от най-интересните поляризационни явления, което възниква не в сложни кристали или някакви специални материали, а в прости и добре известни случаи — това е отражение от повърхност. Изглежда невероятно, но при отражение от стъкло светлината може да се поляризира и този факт се обяснява физически твърде просто. Опитно Брюстер е показал, че отразената от повърхност светлина е напълно поляризирана, ако отразеният и пречупеният в средата лъчи сключват прав ъгъл. Този случай е показан на фиг. 33.4.

Ако падащият лъч е поляризиран в равнината на падането, съвсем няма да има отразен лъч. Отразен лъч възниква само при условие, че падащият лъч е поляризиран перпендикулярно на равнината на падането. Причината за това явление лесно се раз-



Фиг. 33.4. Отражение на линейно поляризирана светлина под ъгъл на Брюстер

Посоката на поляризацията е означена с пунктирани стрелки; кръглите точки означават поляризация, перпендикулярна на равнината на страницата

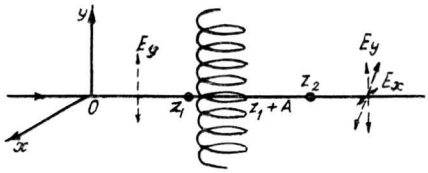
бира. В отразяващата среда светлината е поляризирана перпендикулярно на посоката на движение на лъча, а ние знаем, че именно движението на зарядите в отразяващата среда генерира излизащия от нея лъч, който се нарича отразен. Появяването на този така наречен отразен лъч се обяснява не просто с това, че падащият лъч се отразява; ние сега вече знаем, че падащият лъч възбужда движение на зарядите в средата, а това от своя страна генерира отразения лъч.

От фиг. 33.4 е ясно, че само трептения, перпендикулярни на равнината на страницата, дават излъчване в посока на отразения лъч, а следователно отразеният лъч е поляризиран перпендикулярно на равнината на падането. Ако падащият лъч е поляризиран в равнината на падането, няма да има отразен лъч.

Това явление може да се покаже лесно, като се отразява линейно поляризиран лъч от плоска стъклена пластинка. Като поставяме пластинката под различни ъгли спрямо посоката на падащия поляризиран лъч, можем да забележим рязко спадане на интензивността при стойност на ъгъла, равна на ъгъла на Брюстер. Това намаление на интензивността се наблюдава само в случая, когато равнината на поляризацията съвпада с равнината на падането. Ако равнината на поляризацията е перпендикулярна на равнината на падането, забележимо намаляване на интензивността на отразената светлина не се наблюдава.

5. Оптична активност

Един от най-интересните поляризационни ефекти е бил забелязан в материали, молекулите на които нямат огледална симетрия; Това са молекули от вида на тирбушон, ръкавица за една ръка или въобще някаква форма, която при отражение в огледало преминава в друга форма подобно на това, както ръкавицата за лява ръка в този случай приема вид на ръкавица за дясна ръка. Да предположим, че разглежданото вещество се състои от молекули от едната форма, т. е. във веществото няма молекули, които биха се явили огледално отражение на другите. Тогава в това вещество възниква забележителното явление, наречено *оптична активност* — оста на поляризацията на линейно поляризирана светлина се завърта около оста на снопа при преминаване през веществото.



Фиг. 33.5. Молекула, формата на която няма огледална симетрия

Върху молекулата пада светлинен сноп, линейно поляризиран по оста y

За да се разбере явлението оптична активност, трябва да се изведат редица формули, но същността на въпроса може да се изясни и качествено без всякакви изчисления. Да вземем асиметрична молекула във вид на спирала, показана на фиг. 33.5. Оптичната активност се проявява не непременно при молекули точно с такава форма, но примерът със спиралата е най-прост и типичен за случая, когато няма огледална симетрия.

Нека върху молекулата пада светлинен лъч, линейно поляризиран по оста y; тогава електричното поле предизвиква движение на зарядите надолу и нагоре по спиралата така, че по оста y възниква ток и се излъчва електрично поле E_y, поляризирано отново по оста y. Ако обаче електроните могат да се движат само по дължината на спиралата, появява се слагаема на тока по оста x. Когато токът тече нагоре по спиралата, в точка z_1 той се движи към равнината на рисунката, а в точка z_1+A от равнината (тук A е диаметърът на спираловидната молекула). Изглежда, че x-компонента на тока не дава никакво лъчение, тъй като в противоположните страни на намотката на спиралата тече ток точно в противоположни посоки. Обаче ако се вземе x-компонента на електричното поле, което идва в точка $z=z_2$, ние ще видим, че токът в точката $z=z_1+A$ и токът в точката $z=z$ създават полета в точката z_2 с временен интервал $\frac{A}{c}$ и следователно с фазова разлика $\pi+\omega\frac{A}{c}$. Тъй като фазовата разлика не е точно равна на π, полетата не могат взаимно да се погасят и остава една малка x-компонента на електричното поле, породена

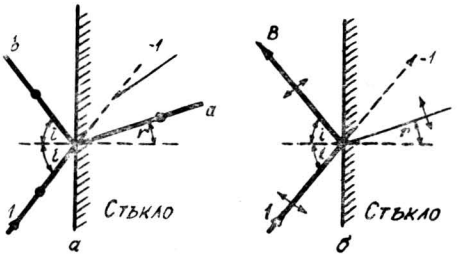
от движението на електроните в молекулата, макар че първоначалното поле е имало само y-компонента. Събирайки малката компонента по оста x и голямата компонента по оста y, получаваме резултатно поле, сключващо малък ъгъл с оста y (първоначалната ос на поляризацията). При движение на светлинния лъч през средата оста на поляризацията се завърта около оста на лъча. Като нарисуваме молекули в различни положения и определим токовете, индуцирани от падащото електрично поле, можем да се убедим, че появяването на оптичната активност и посоката на въртене не зависят от ориентацията на молекулите.

Пример за среда, притежаваща оптична активност, е обикновеният петмез. За демонстриране на явлението опитно вземаме поляроид, който дава на изхода линейно поляризиран лъч, прозрачен съд с петмез и втори поляроид, който служи за определяне въртенето на плоскостта на поляризацията.

6. Интензивност на отразената светлина

Тук ще разгледаме количествената зависимост на коефициента на отражение от ъгъла на падане. На фиг. 33.6,а е показан сноп светлина, падащ върху повърхността на стъклена пластинка, от която той частично се отразява, а останалата негова част се пречупва и отива във вътрешността на стъклото. Нека падащият лъч да има единична амплитуда и да е линейно поляризиран перпендикулярно на равнината на рисунката. Да означим амплитудата на отразената вълна с буквата b, а амплитудата на пречупената — с буквата a. Отразената и пречупената вълни ще бъдат, разбира се, линейно поляризирани, а посоките на електричното поле в падащата, отразената и пречупената вълни са успоредни една на друга. На фиг. 33.6 е показана подобна ситуация, но при условие, че падащият лъч е поляризиран в равнината на рисунката. Тук с B и A са означени съответно амплитудите на отразената и пречупената вълна.

Ние искаме да пресметнем интензивността на отразения лъч в двата случая, представени на фиг. 33.6. Както вече знаем, в случая, показан на фиг. 33.6, отразена вълна не възниква, ако ъгълът между отразения и пречупения лъч е прав, но ние желаем да получим количествен резултат—точни формули за амплитудите B и b като функция на ъгъла на падането i. Полезно е да се усвои следният принцип. Индуцираните в стъклото токове генерират две вълни. Преди всичко те създават отразената вълна. По-нататък, ако в стъклото не би имало токове, падащата вълна би преминала през него, без да изменя своята посока. Да си спомним, че всички заряди във Вселената създават някакво резултантно поле. Източникът, създаващ падащия сноп, дава поле с единична амплитуда, което, погледнато изолирано, би трябвало да премине във вътрешността на стъклото по пунктираната линия (вж. фиг. 33.6). Но това поле не се наблюдава във вътрешността на стъклото, а следователно токовете, възбуждани в стъклото, трябва да излъчват поле с амплитуда — 1 по дължината на същата пунктирана линия. Това ни дава възможност да пресметнем амплитудите a и A на пречупените вълни.



Фиг. 33.6. Падаща вълна с единична амплитуда се отразява и пречупва от повърхността на стъкло

а — падащата в на е поляризирана по нормалата към равнината на страницата; *б* — падащата вълна е поляризирана в направление, показана с пунктирана стрелка

От фиг. 33.6,а се вижда, че поле с амплитуда b се създава от движението на зарядите в стъклото, а във вътрешността на стъклото същото това движение дава поле с амплитуда a; следователно амплитудата b е пропорционална на амплитудата a. По-нататък, ако се абстрахираме от направлението на поляризацията, бихме могли да предположим, че отношението $\frac{B}{A}$ е равно на отношението $\frac{b}{a}$, тъй като двете схеми на фиг. 33.6 може да се считат еднакви. Всъщност това не е съвсем правилно, защото на фиг. 33.6,б за разлика от ситуацията, представена на фиг. 33.6,а, направленията на поляризациите не са успоредни едно на друго. В създаването на амплитудата B ефективно участвува само ком-

понентата A, успоредна на B, т. е. $A\cos(i+r)$. Затова правилното равенство между отношенията изглежда така:

$$\frac{b}{a}=\frac{B}{A\cos(i+r)}. \tag{33.1}$$

Сега малко ще изхитруваме. Както знаем, на двете рисунки на фиг. 33.6 електричното поле в стъклото предизвиква движение на зарядите, което генерира поле с амплитуда, равна на -1, поляризирано точно така, както и в падащия лъч, и разпространяващо се по пунктираната права линия. Но от фиг. 33.6,б се вижда, че само перпендикулярната на пунктираната права компонента A дава на полето необходимата поляризация, докато на фиг. 33.6,*а* в създаването на полето по пунктираната права ефективно участвува цялата амплитуда a, тъй като нейната поляризация е успоредна на поляризацията на полето с амплитуда -1. Следователно вярно е съотношението

$$\frac{A\cos(i-r)}{a}=\frac{-1}{-1}, \tag{33,2}$$

понеже двете амплитуди в лявата част на (33.2) създават вълни с амплитуда -1.

Като разделим (33.1) на (33.2), получаваме

$$\frac{B}{b}=\frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)}. \tag{33,3}$$

Да проверим правилността на получения резултат за известен вече факт. Като положим $i+r=90°$ от (33.3), получаваме $B=0$, което е било намерено на времето си от Брюстер; по такъв начин нашият резултат поне не съдържа очевидна грешка.

По предположение падащата вълна има единична амплитуда; тогава $|B|^2/1^2$ е коефициентът на отражение на лъчите, поляризирани в равнината на падането, а $|b|^2/1^2$ — коефициентът на отражение на лъчите, поляризирани перпендикулярно на равнината на падането. Отношението на тези два коефициента се определя с помощта на формулата (33.3).

А сега ще направим чудо и ще пресметнем не само отношението, но и всеки коефициент $|B|^2$ и $|b|^2$ поотделно. От закона за запазване на енергията следва, че енергията на пречупената вълна трябва да бъде равна на енергията на падащата вълна минус енергията на отразената вълна, т. е. на $1-|B|^2$ в единия случай и на $1-|b|^2$ — в другия. Нещо повече, енергията на светлината, преминала във вътрешността на стъклото в случая, показан на фиг. 33.6,*а*, и същата енергия в случая 33.6,б се отнасят една към друга както квадратите на амплитудите на пречупените вълни: $|A|^2/|a|^2$. Възниква въпрос, възможно ли е да се пресметне енергията на вълната в стъклото, ако освен енергията на електричното поле, общо казано, има и енергия на движение на атомите. Ясно е обаче, че всеки принос към пълната енергия трябва да бъде пропорционален на квадрата на амплитудата на електричното поле. Следователно

$$\frac{1-|B|^2}{1-|b|^2}=\frac{|A|^2}{|a|^2}. \tag{33.4}$$

Да заместим в тази формула A/a, определено от (33.2), а величината B да изразим чрез b с помощта на формулата (33.3); получаваме

$$\frac{1-|b|^2\dfrac{\cos^2(i+r)}{\cos^2(i-r)}}{1-|b|^2}=\frac{1}{\cos^2(i-r)}. \tag{33.5}$$

Тука неизвестна величина остава само b. Решавайки уравнението относно $|b|^2$, получаваме

$$|b|^2=\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} \tag{33.6}$$

и използувайки (33.3), намираме

$$|B|^2=\frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)}. \tag{33.7}$$

По такъв начин ние намерихме коефициента на отражение $|b|^2$ за падащата вълна, поляризирана перпендикулярно на равнината на падането и коефициента на отражение $|B|^2$ за вълната, поляризирана в равнината на падането.

Като използуваме подобни прийоми, можем да отидем понататък и да изведем, че b е реално. За доказателство нека разгледаме случая, когато пада светлина едновременно от двете страни на повърхността на стъклото (ситуация, трудно осъществима опитно, но забавна в теоретично отношение). Анализирайки този общ случай, можем да се убедим, че величината b е реална, откъдето следва, че $b=\pm\sin(i-r)/\sin(i+r)$. Ако вземем много тънък слой, в който светлината се отразява от двете повърхности, и изчистим интензитета на отразената светлина, можем да определим и знака на b. На нас ни е известна частта на светлината, отразена от тънък слой, тъй като ние знаем тока, генериран в такъв слой, и даже получихме формула за полето, което се създава от тока. Тези аргументи водят до съотношенията

$$b=-\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}, \quad B=-\frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)}. \tag{33.8}$$

Формулите (33.8) са коефициентите на отражение като функции на ъглите на падане и пречупване се наричат *формули на Френел*.

В граничния случай, когато ъглите i и r клонят към нула, т. е. в случая на падане по нормалата, ние получаваме $B^2\approx b^2\approx$ $\approx(i-r)^2/(i+r)^2$ за двете поляризации, понеже синусите и тангенсите при тези условия практически са равни на ъглите. Но, както вече знаем, $\sin i/\sin r=n$, а за малки ъгли $i/r=n$. Оттука е съвсем просто да се изведе, че коефициентът на отражение в случай на падане по нормалата е равен на

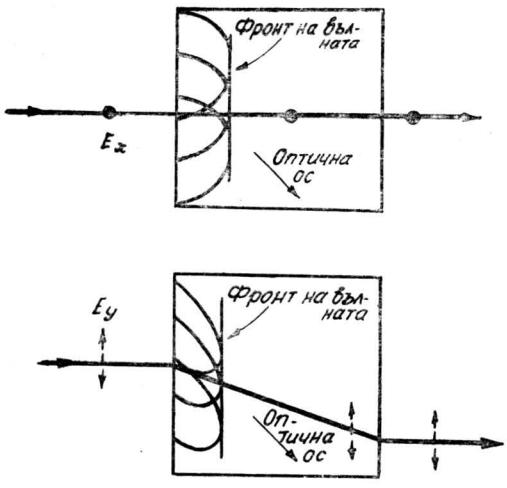
$$B^2=b^2=\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}.$$

Интересно е да се изчисли например коефициентът на отражение за водата. В този случай $n=\frac{4}{3}$ и коефициентът на отражение е равен на $\left(\frac{1}{7}\right)^2\approx 2\%$. При падане на лъчите по нормалата към повърхността на водата отразява се само 2% от цялата енергия.

7. Аномално пречупване

Последно ще разгледаме поляризационното явление, което исторически е било забелязано най-напред — аномално пречупване на светлината. Моряците, плавали до Исландия, са донасяли в Европа кристали от исландски шпат ($CaCO_3$), които имат това забавно свойство, че разглежданите през тях предмети изглеждали двойни, т. е. получават се два образа на предмета. Това явление привлякло вниманието на Хюйгенс и изиграло важна роля при откриване поляризацията на светлината. Както се случва често, забелязаните по-рано от другите явления се оказват в крайна сметка най-трудни за обяснение. Обикновено, след като физическата идея стане ясна и в най-тънки подробности, едва тогава могат да се подберат явления, илюстриращи тази идея най-просто и нагледно.

Аномалното пречупване представлява частен случай на изученото вече от нас явление двойно пречупване на светлината. Аномалното пречупване възниква тогава, когато оптичната ос, т. е. голямата ос на асиметричните молекули, *не е успоредна* на повърхността на кристала.

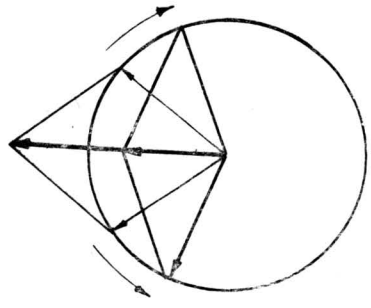


Фиг. 33.7. Пътят на обикновения лъч (горе) и пътят на необикновения лъч (долу) в двойно пречупващ кристал
Оптичната ос лежи в равнината на страницата

На фиг. 33.7 са дадени два двойно пречупващи кристала и е показана посоката на оптичната ос. На горната рисунка падащият лъч е линейно поляризиран с направление, перпендикулярно на оптичната ос на кристала. Когато лъчът попадне върху повърхността на кристала, всяка точка от повърхността служи като източник на нова вълна, разпространяваща се във вътрешността на кристала със скорост v_1 (скоростта на светлината в кристала, поляризацията на която е перпендикулярна на оптичната ос). Вълновият фронт представлява просто обвивката на всичките тези малки сферични вълни и той се движи направо през кристала. Такова поведение на светлината се счита за обикновено, а съответният лъч се нарича *обикновен лъч.*

На долната рисунка на фиг. 33.7 поляризацията на падащия лъч е завъртяна на 90°, така че оптичната ос лежи в равнината на поляризацията. Да разгледаме сега малките вълни, идващи от повърхността на кристала; те вече не са сферични както в предходния случай. Светлинният лъч по оптичната ос се разпространява със скорост v_1, понеже поляризацията е перпендикулярна на оптичната ос, а светлинният лъч, който е перпендикулярен на оста, се разпространява със скорост $v_{\parallel}$, понеже поляризацията и оптичната ос са успоредни. В двойнопречупващия материал $v_{\parallel} \neq v_{\perp}$ и на нашата рисунка е избран случаят, когато $v_{\parallel} < v_{\perp}$. По-подробен анализ показва, че вълните при повърхността на кристала имат форма на елипсоиди, голямата ос на които съвпада с оптичната ос на кристала. Обвивката на тези елиптични вълни — вълновият фронт — се движи през кристала, както е показано на долната рисунка на фиг. 33.7. На задната стена на кристала лъчът се отклонява на същия ъгъл както на предната и излиза успоредно на падащия лъч, отместен на известно разстояние. Съвсем очевидно е, че този лъч не се подчинява на закона на Снелиус и се движи съвсем необикновено. Затова го наричат *необикновен лъч.*

Ако върху аномално пречупващ кристал се насочи неполяризиран светлинен сноп, той ще се разцепи на два лъча: обикновен, разпространяващ се направо през кристала по обикновените закони, и необикновен, който след като премине през кристала, излиза отместен спрямо падащия лъч. Двата лъча, преминали през кристала, са линейно поляризирани перпендикулярно един на друг. Този факт може лесно да се установи по обикновения път, като се използува поляроид за определяне поляризацията на излезлите от кристала светлинни лъчи. Правилността на нашата интерпретация може също да се потвърди, като се пуска върху кристала линейно поляризиран лъч. Избирайки нужната ориентация на поляризацията на падащия сноп, ние в един случай ще видим само лъч, преминал направо през кристала, а в друг — само отместен лъч.



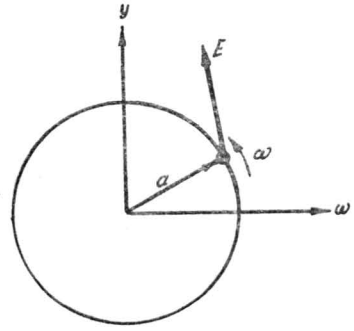
Фиг. 33.8. Два вектора с една и съща дължина, като се въртят в противоположни страни, дават при събиране вектор, направлението на който не се мени, а амплитудата осцилира

На фиг. 33.1 и 33.2 бяха представени най-различни поляризации във вид на суперпозиции на двете основни, а именно на поляризациите по осите x и y с различни амплитуди и фази. Вместо тях могат да се изберат и други двойки основни поляризации. Един от възможните примери са поляризациите по две перпендикулярни оси x' и y', завъртени относно x и y (може също така всяка поляризация да се представи като суперпозиция на случаите *а* и *д* на фиг. 33.2). Оказва се, че тази мисъл може да бъде продължена. Например всяка *линейна* поляризация може да се представи във вид на суперпозиция на *дясна* и *лява кръгова* поляризация със съответни амплитуди и фази (случаите *в* и *ж* на фиг. 33.2), тъй като два равни вектора, въртящи се в различни посоки, при събиране дават вектор, осцилиращ по права линия (фиг. 33.8).

Ако фазите на въртящите се вектори са различни, правата ще бъде наклонена. По такъв начин всички графики на фиг. 33.1 могат да се нарекат „суперпозиции на равни количества дясно и ляво поляризирана светлина при различни фазови отмествания". Когато ляво поляризираната светлина изостава по фаза от дясно-поляризираната, оста на линейната поляризация се завърта. Затова оптично активните среди в известен смисъл могат да се нарекат

двойнопречупващи. Свойството оптична активност може да се охарактеризира и по друг начин, като се каза, че такива среди имат различни показатели на пречупване за светлина с лява и дясна кръгова поляризация. Суперпозицията на дясно и ляво поляризирана светлина с различни амплитуди дава елиптично поляризирана светлина.

Светлината с кръгова поляризация има интересно свойство — тя пренася *момент на количеството на движение* (взет спрямо посоката на разпространение на лъча). За да поясним това твърдение, нека предположим, че кръгово поляризирана светлина пада на атом, който представлява хармоничен осцилатор, способен да трепти по произволна ос в равнината xy. Тогава отместването на електрона по оста x отговаря на компонентата E_x на полето, а отместването по оста y отговаря на компонентата E_y, равна по големина, но изоставаща по фаза с 90°. Това означава, че електронът под действие на въртящото се електрично поле на светлинната вълна (фиг. 33.9) ще се движи по окръжност с ъглова скорост ω.



Фиг. 33.9. Действие на кръгово поляризирана светлина върху въртящ се заряд

В зависимост от чувствителността на осцилатора към действуващата върху него сила, посоката на вектора на отместването на електрона **a** не съвпада непременно с посоката на силата $q_e\mathbf{E}$, но все пак двата вектора се въртят едновременно един до друг. Интензитетът на полето **E** въобще има компонента, перпендикулярна на отместването на електрона **a**, така че системата извършва работа, а освен това върху нея действува въртящ момент τ. Работата, която той извършва за 1 s, е равна на $\tau\omega$. За един период T на системата се предава енергия $\tau\omega T$, при което τT е моментът на количеството на движение, поглъщан заедно с енергията на излъчването. По такъв начин ние виждаме, *че един дясно кръгово поляризиран светлинен лъч с енергия, равна на E, пренася момент на количеството на движение* (*векторът на който лежи върху правата на разпространение на лъча*), *равен по големина на* E/ω. Наистина, ако лъч дясно поляризирана светлина се погълне от веществото, на последното се предава порция момент на количеството на движение, равна на E/ω. Лявополяризираната светлина носи момент на количеството на движение с обратен знак, т. е. $-E/\omega$.

34

Релативистични явления при излъчването

1. Движещи се източници
2. Определение на „привидното движение“
3. Синхротронно лъчение
4. Космично синхротронно лъчение
5. Спирачно лъчение
6. Доплеров ефект
7. Четиривекторът (ω, k)
8. Аберация
9. Импулс на светлинната вълна

1. Движещи се източници

В тази глава ние ще разкажем за редица ефекти, свързани с излъчването, и с това ще завършим изложението на класическата теория на светлината. Проведеният в предходните глави анализ на светлинните явления бе достатъчно пълен и подробен. Обаче ние не засегнахме един важен за приложенията електромагнитен процес — не изследвахме поведението на радиовълните в ограничен обем с отразяващи стени, с размери от порядъка на дължината на вълната или на радиовълните, пропускани през дълга тръба. Явленията, възникващи в така наречените кухи *резонатори и вълноводи*, ще бъдат обсъдени по-късно, като преди това в качеството на илюстрация ще разгледаме друг пример — пример със звука. В останалата си част изучаването на класическата теория на светлината завършва с тази глава.

Характерното за всички разглеждани тук ефекти е това, че те са свързани с *движението на източника*. Ние повече няма да предполагаме, че отместването на източника е незначително и че неговото движение става с относително малка скорост около фиксирана точка.

Да си спомним, че съгласно основните закони на електродинамиката електричното поле на големи разстояния от движещ се заряд се дава с формулата

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{d^2\mathbf{e}_{R'}}{dt^2}. \qquad (34.1)$$

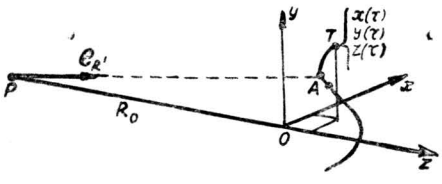
Определяща величина тук се явява втората производна на единичния вектор $\mathbf{e}_R$, насочен към привидното положение на заряда. Единичният вектор характеризира положението на заряда, разбира се, не в същия момент, в който се наблюдава полето $\mathbf{E}$, а. мястото, където би се намирал зарядът, ако се вземе под внимание крайната скорост на предаване на информация от заряда към наблюдателя.

Заедно с електричното поле възниква магнитно поле, насочено винаги перпендикулярно на електричното поле и на посоката към привидното положение на заряда. То се дава с формулата

$$\mathbf{B} = -\mathbf{e}_{R'} \times \frac{\mathbf{E}}{c}. \qquad (34.2)$$

Досега ние разглеждахме нерелативистичен случай, когато движението по посока на източника би могло да се пренебрегне. Нека сега се обърнем към общия случай на произволни скорости и да видим какви ефекти възникват в тези условия. И тъй нека движението да се извършва с произволна скорост, но разстоянието от детектора до източника както преди да е голямо.

В гл. 28 ние вече говорихме, че в производната $d^2\mathbf{e}_{R'}/dt^2$ влиза само изменението на *посоката* на $\mathbf{e}_{R'}$. Нека зарядът да се намира в точка с координати (x, y, z) и оста z да лежи върху линията на наблюдението (фиг. 34.1). В даден момент τ координатите на заряда са $x(\tau)$, $y(\tau)$, $z(\tau)$. Разстоянието R с голяма точност е равно на $R(\tau) = R_0 + z(\tau)$. Посоката на вектора $\mathbf{e}_{R'}$ зависи главно от x и y и почти съвсем не зависи от z. Напречните компоненти на единичния вектор са равни на x/R и y/R; диференцирайки ги, получаваме членове, съдържащи R^2 в знаменателя;



Фиг. 34.1. Траектория на движещ се заряд.
Истинското положение в момента τ е T, положението след отчитане на закъснението е A

$$\frac{d(x/R)}{dt}=\frac{dx/dt}{R}-\frac{dz}{dt}\frac{x}{R^2}.$$

По такъв начин на достатъчно големи разстояния са съществени само членовете с производните на x и y. Оттук

$$E_x=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R_0}\frac{d^2x'}{dt^2},$$
$$E_y=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R_0}\frac{d^2y'}{dt^2}, \tag{34.3}$$

където R_0 е почти равно на разстоянието до заряда q; определяме го като разстояние OP до началото на координатите (x, y, z). И тъй електричното поле е равно на константа, умножена на една много проста величина — производната на координатите x и y по времето. (Математически x и y можем да наречем *напречни* компоненти на вектора на положението на заряда **r**, но от това яснотата не става по-голяма).

Разбира се, трябва винаги да се помни, че координатите се вземат не в момента на наблюдението, а с отчитане на закъснението. В случая закъснението *зависи* и от $z(\tau)$. На какво е равно времето на закъснение? Нека с t да означим времето за наблюдението (това е времето в точката на наблюдението P); тогава времето τ, което в точката A съответствува на времето t, няма да съвпада с t, а изостава от него с временен интервал, необходим на светлината да измине разстоянието от заряда до точката на наблюдението. В първо приближение времето на закъснение е равно на R_0/c, т. е. на постоянна (което не е интересно), а в следващото приближение трябва да зависи от z- координата на положението на заряда в момент τ, защото за заряда q, малко отместен назад, закъснението се увеличава. Този ефект ние пренебрегвахме по-рано, но ако сега го вземем под внимание, ще получим формула, използуваема при произволни скорости.

Остава ни да изберем определена стойност на t, да пресметнем с негова помощ τ и да намерим x и y в момент τ. Закъсняващите стойности на x и y означаваме с x' и y', а техните втори производни определят полето. И тъй τ се определя от уравненията:

$$t=\tau+\frac{R_0}{c}+\frac{z(\tau)}{c}$$

$$x'(t)=x(\tau),\quad y'(t)=y(\tau). \tag{34.4}$$

Тези уравнения са твърде сложни, но тяхното решение се получава лесно по геометричен път. Чертежът ще ви даде възможност да почувствувате качествено как възникват съотношения, макар че за извода на точни резултати се налага да се преодолеят още немалко математически трудности.

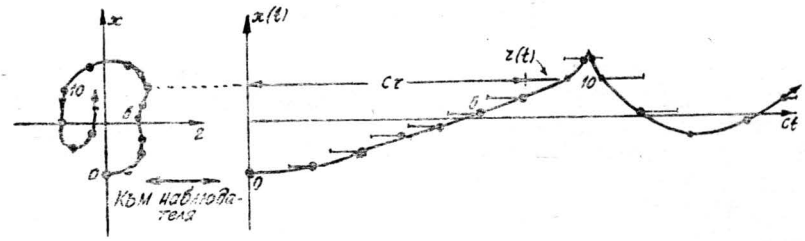
2. Определение на „привидното“ движение

Написаното по-горе уравнение може да се опрости по доста интересен начин. Изпускаме неинтересния за нас постоянен член R_0/c (това означава единствено, че ние отместваме началната точка, от която отчитаме времето t с един постоянен интервал) и записваме

$$ct=c\tau+z(\tau),\ x'=x(\tau),\ y'=y(\tau). \tag{34.5}$$

Ние трябва да намерим x' и y' като функции на t, а не на τ и това се постига по следния начин: както ни подсказва уравнението (34.5), необходимо е да вземем истинското движение на заряда и да добавим времето τ, умножено с константа (скоростта на светлината). На фиг. 34.2 е показано нагледно какво означава това. Вземаме истинската траектория на заряда (показана отляво) и нека да си представим, че едновременно с движението по тази траектория зарядът се отдалечава от точка P със скорост c (тук

няма каквито и да е релативистични скъсявания или нещо подобно; това е просто математическо прибавяне на $c\tau$). По този начин се получава нова траектория, където по абсцисната ос е нанесено ct, както е показано на рисунката отдясно. (На рисунката е представена траектория на доста сложно равнинно движение, но движението може да се извършва не само в равнина.) Смисълът на приведената процедура се състои в това, че хоризонталното раз-

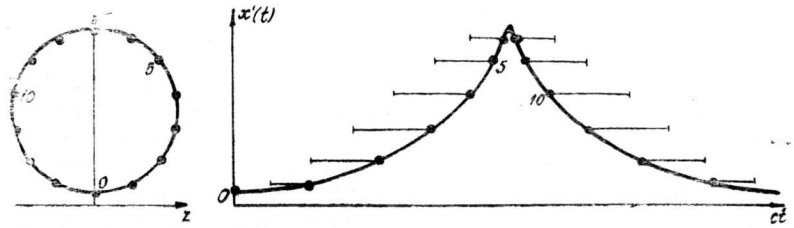


Фиг. 34.2. Геометричен начин за определяне на $x'(t)$ от уравнението (34.5)

стояние на дясната част на фиг. 34.2 за разлика от лявата е равно не на z, а на $z+c\tau$, т. е. на ct. Ние намерихме по такъв начин графиката на изменението на x' (и y') в зависимост от t. Остава само да се определи ускорението върху кривата, т. е. да се диференцира тя два пъти. Оттук правим окончателен извод: за да намерим електричното поле на движещ се заряд, трябва да вземем траекторията на движението и да заставим всяка нейна точка да се отдалечава от наблюдателя със скорост c; получената крива дава координатите x' и y' като функция на t. Ускорението на тази крива определя електричното поле в зависимост от t. Можем, ако искате, да си представим, че цялата тази „твърда" крива се движи напред със скорост c през равнината на зрението, така че пресечната ѝ точка с равнината на зрението има координати x' и y'. Ускорението на тази точка ще определи и електричното поле. Полученото решение ще бъде не по-малко точно, отколкото формулата, от която ние тръгнахме — това е просто нейното геометрично представяне.

Ако източникът извършва относително бавно движение, както например бавно трептящ нагоре и надолу осцилатор, то при разтягане на това движение със скоростта на светлината ще се получи проста синусоидална крива. Оттук може да се получи формула за полето, което се създава от осцилиращ заряд, която ние срещахме неведнъж.

По-интересен пример — това е електрон, движещ се по окръжност със скорост, близка до скоростта на светлината. Ако наблюдателят се намира в равнината на движението на електрона, закъсняващото движение $x'(t)$ има за него вид, показан на фиг. 34.3. Що за крива е това? Ако ние си представим радиусвектор, прекаран от центъра на окръжността към заряда, и ако продължим тези радиални линии съвсем малко зад заряда (съвсем мъничко, ако зарядът се движи бързо), ще дойдем в точка, която се движи със скоростта на светлината c. Затова резултантното движение е движение на заряд, закрепен за колело, което се търкаля назад (без хлъзгане) със скорост c; това ни дава крива, която много прилича на циклоида и се нарича *хипоциклоида*.



Фиг. 34.3. Графика на функцията $x'(t)$ за частица, въртяща се по окръжност с постоянна скорост $v=0{,}94\ c$

Когато зарядът се движи по окръжността със скорост, близка до скоростта на светлината, максимумите на кривата стават много остри, а при скорост, равна на скоростта на светлината, те биха били безкрайно остри. „Безкрайно остри“ максимуми. Много интересно; това значи, че близко до такъв максимум втората производна е много голяма. Един път в течение на всеки период възниква мощен и рязък импулс на електричното поле. Нищо подобно няма в случая на нерелативистично движение; там електричното поле в течение на целия период приема стойности приблизително от един и същ порядък. Вместо това в случая на големи скорости възникват резки импулси на електричното поле с временен интервал $\frac{1}{T_0}$, където T_0 е периодът на завъртане на електрона. Това силно електрично поле се излъчва в тесен конус около посоката на движение на заряда. Когато зарядът се отдалечава от точката на наблюдението P, производната на кривата е малка и излъчването в посока на P е много слабо.

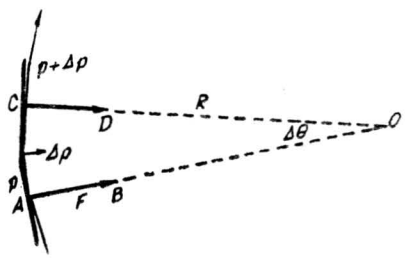
3. Синхротронно лъчение

В синхротрона електроните се движат по окръжности с големи скорости, близки до скоростта на светлината, и описаното явление може да се види като истинска *светлина*. Да обсъдим това явление по-подробно.

Електроните в синхротрона се движат по окръжности в еднородно магнитно поле. Нека да видим преди всичко защо те се движат по окръжности. Съгласно уравнението (12.10) силата, която действува на частица в магнитното поле, е равна на

$$\mathbf{F}=q\,.\,\mathbf{v}\times\mathbf{B} \tag{34.6}$$

и е насочена перпендикулярно на полето и скоростта. Както обикновено силата е равна на скоростта на изменение на импулса с времето. Ако полето е насочено нагоре от равнината на страницата, импулсът и силата се разполагат така, както е показано на фиг. 34.4. Понеже силата е перпендикулярна на скоростта, кинетичната енергия, а значи и големината на вектора на скоростта остават *постоянни*. Действието на магнитното поле се свежда само до изменение на *посоката на движение*. За малък интервал време Δt векторът на импулса ще се измени с величината $\Delta\mathbf{p}=\mathbf{F}\Delta t$, насочена перпендикулярно на импулса, т. е. векторът на импулса $\mathbf{p}$ ще се завърти на ъгъл $\Delta\theta=\Delta p/p=qvB\Delta t/p$, тъй като $|\mathbf{F}|=qv|\mathbf{B}|$. Но за същото време електронът ще измине разстоянието $\Delta s=v\,\Delta t$. Двете прави AB и CD очевидно ще се пресекат в точката O, за която $OA=OC=R$, а $\Delta s=R\Delta\theta$. Като комбинираме написаните формули, получаваме $R\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=R\omega=v=qvBR/p$, откъдето



Фиг. 34.4. Движение на заредена частица в еднородно магнитно поле по окръжност (или по спирала).

$$p=qBR \tag{34.7}$$

и

$$\omega=\frac{qvB}{p}. \tag{34.8}$$

Ние можем да повторим това разсъждение за всеки следващ интервал време и ще дойдем по такъв начин до заключение, че заредена частица в магнитно поле се движи по *окръжност* с радиус R с ъглова скорост ω.

Равенството (34.7), изразяващо импулса като произведение на заряда, радиуса и магнитното поле, представлява един много важен закон, който намира твърде широко приложение. Той има голямо практическо значение, поради това че позволява да се измерят радиусите на кривината на траекториите при наблюдаване движението на частици с еднакви заряди в магнитно поле; като

се знае освен това големината на магнитното поле, може да се определи по този начин импулсът на частиците. Умножавайки двете части на (34.7) с c и изразявайки заряда q чрез заряда на електрона, ние получаваме формула за импулса в *електронволти* (eV)

$$pc\,(\text{eV}) = 3 \cdot 10^8 \left(\frac{q}{q_e}\right) BR. \qquad (34.9)$$

Тук B, R и скоростта на светлината са определени в системата единици SI, в която скоростта на светлината числено е равна на $3 \cdot 10^8$.

Единицата за измерване на магнитното поле в системата SI се нарича *вебер на квадратен метър*. Често се употребява старата единица *гаус* (Gs). Един Wb/m^2 е равен на 10^4Gs. За да получим представа за големината на магнитните полета, ще приведем някои цифри. Най-силното магнитно поле, което може да се създаде в желязото, е от порядъка на $1{,}5 \cdot 10^4$ Gs; при по-големи полета става неизгодно да се използува желязо. Засега електромагнитите с намотка от свръхпроводяща жица позволяват да се получи постоянно магнитно поле с интензитет, по-голям от 10^5Gs, т. е. 10 ед. SI. Интензитетът на магнитното поле на Земята при екватора е около няколко десети от гауса.

Да се обърнем отново към формулата (34.9) и да вземем за пример синхротрон, който ускорява частиците до един милиард електронволта, т. е. дава частици с pc, равно на 10^9 eV (по-надолу ние ще определим и енергията на частиците). Нека $B = 10^4$Gs, или 1 ед. SI; това е достатъчно силно поле. При това R се оказва равно на 3,3 m. Синхротронът на КАЛТЕХ има радиус 3,7 m, полето му е с малко по-силно от взетото тук, а енергията на частиците е 1,5 милиарда eV (или 1,5 GeV), т. е. величините имат един и същ порядък. Сега става ясно защо синхротронът има такива размери.

По-горе ние вземахме импулса на частиците; пълната енергия, включваща и енергията на покой, се дава от формулата $W = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$. Енергията на покой на електрона mc^2 е равна на $0{,}511 \cdot 10^6$ eV, затова при импулс $pc = 10^9$ eV величината m^2c^4 може да се пренебрегне и за всички практически цели да се използува формулата $W = pc$, която е вярна в случай на релативистични скорости. Фактически няма никаква разлика, когато ние говорим, че енергията на електрона е равна на 1GeV или че импулсът на електрона, умножен на c, е равен на 1GeV. Когато $W = 10^9$eV, то, както е лесно да се покаже, скоростта на частицата е равна на скоростта на светлината с точност до една осеммилионна.

Сега да се върнем към излъчването, което се изпуска от такава частица. Движейки се по окръжност с радиус 3,3 m и дължина 20 m, частицата прави един оборот приблизително за същото време, за което светлината изминава 20 m. Затова би могло да се стори, че дължината на вълната на изпусканото лъчение е 20 m, т. е. лежи в областта на късите радиовълни. Но, както вече говорихме, възникват максимуми в излъчването (вж. фиг. 34.3) и поради това че скоростта на електрона се отличава от скоростта на светлината c с една осеммилионна, като ширината на максимумите е пренебрежимо малка в сравнение с разстоянието между тях. Ускорението, което се определя от втората производна по времето, води до появяване на „множител на скъсяване“ $8 \cdot 10^6$ в квадрат, понеже мащабът на времето се намалява $8 \cdot 10^6$ пъти в областта на максимума, при което той влиза два пъти. Затова ефективната дължина на вълната трябва да бъде $64 \cdot 10^{12}$ пъти по-малка от 20 m, което съответствува вече на областта на рентгеновите лъчи. (Всъщност ефектът се определя не от стойността в самия максимум, а от някаква област около него. Това дава степен 3/2 вместо квадрат, но все едно води до дължини на вълните, малко по-къси от тези във видимата светлина.)

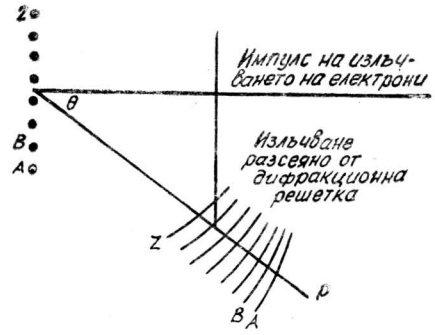
И тъй, ако даже бавнодвижещ се електрон излъчва радиовълни с дължина от порядъка на 20 m, то релативистичните ефек-

ти скъсяват дължината на вълната до такава степен, че ние можем да *видим* лъчението. Очевидно светлината трябва да бъде *поляризирана* перпендикулярно на еднородното магнитно поле.

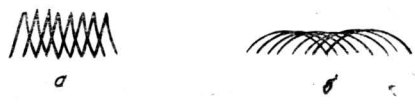
Да предположим по-нататък, че ние сме насочили подобен светлинен сноп (импулсите на излъчването възникват разделени от дълги временни интервали, така че за простота ще вземем един такъв импулс) към дифракционна решетка, състояща се от множество разсейващи резки. Каква картина възниква след преминаване на излъчването през решетката? (Би могло да се помисли, че ние трябва да видим червени, сини ивици светлина и т. н., ако въобще видим светлина.) А какво ще видим в действителност?

Импулсът попада направо върху решетката и всички осцилатори на резките на решетката започват едновременно бясно да трептят по всички направления. При това те излъчват в различни посоки, както е показано на фиг. 34.5. Но точка P е разположена по-близко до единия край на решетката и затова лъчението попада в нея най-напред от A, после от B и т. н., накрая последен идва импулсът от най-крайната линия. В крайна сметка съвкупността на всички отразени вълни приема вид, показан на фиг. 34.6, а. Това електрично поле, състоящо се от цяла редица импулси, много прилича на синусоидална вълна, при което дължината на вълната е равна на разстоянието между съседните импулси, точно така, както е при една монохроматична вълна, падаща върху дифракционната решетка. По такъв начин ние действително ще видим светлината оцветена. Но същите аргументи на пръв поглед ни дават право да мислим, че „импулси“ с произволна форма ще създадат видима светлина. Не, това не е така. Да предположим, че максимумите са много по-гладки; нека отново да съберем всички разсеяни вълни, разделени от малки временни интервали (фиг. 34.6, б). Тогава ние ще видим, че полето почти не изпитва трептения и се представя от една твърде гладка крива, тъй като всеки импулс малко се изменя за времето между пристигането на две съседни разсеяни вълни.

Електромагнитното лъчение, изпускано от релативистична заредена частица, която се върти в магнитно поле, се нарича *синхротронно лъчение*. Произходът на това наименование е очевиден, макар че такова лъчение възниква не само в синхротроните и даже не само в земни условия. Твърде интересно и увлекателно е това, че то възниква и във Вселената.



Фиг. 34.5. Падащият на решетка светлинен импулс във форма на остър максимум след отражението дава в различните посоки лъчи с различно оцветяване.



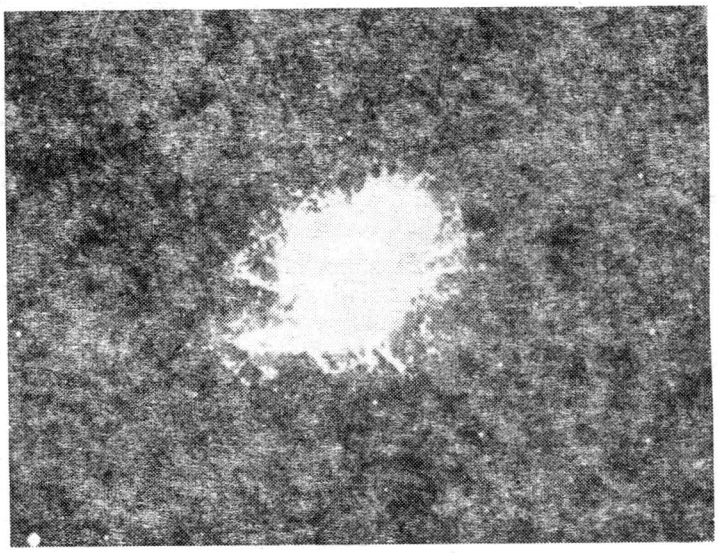
Фиг. 34.6. Сумарно електрично поле, получено от съвкупността на остри импулси (*а*) и на гладки импулси (*б*)

4. Космично синхротронно лъчение

Към 1054 г. на нашата ера китайската и японската цивилизации са били едни от най-напредналите в света: китайците и японците още тогава са наблюдавали явленията във Вселената и в тази същата година те са открили и описали забележително събитие — внезапно появяване на ярка звезда. (Любопитно е, че нито един от европейските монаси, които са написали толкова книги в Средните векове, даже не е помислял да отбележи това събитие.) На фиг. 34.7 е показано как сега изглежда родилата се по онова време звезда. Отвън се вижда голямо количество червени нишки, които се създават от атомите на тънката газова обвивка, излъчващи свои собствени честоти; спектърът на лъчението се състои от отделни ярки линии. Червената светлина се появява благодарение на азота. А в центъра свети странно размазано петно, излъчващо непрекъснат спектър от честоти, т. е. честотите, присъщи на разните атоми, съвсем не са отделени. Това петно съвсем не е прашен облак, отразяващ светлина от съседните звезди, което също би могло да доведе до лъчение с непрекъснат спектър. През това образование могат да се видят звезди; значи то е прозрачно и само *излъчва* светлина.

На фиг. 34.8 е показан същият обект, но сега фотографиран с помощта на лъчи от спектралния диапазон, където няма ярки линии, т. е. фактически се вижда само централната част. Освен

това снимките са правени през поляризатор и двете представени снимки съответствуват на два взаимно перпендикулярни поляризатора. Лесно е да се види, че снимките са различни. По такъв



Фиг. 34.7. Ракообразна мъглявина. Снимка без филтър

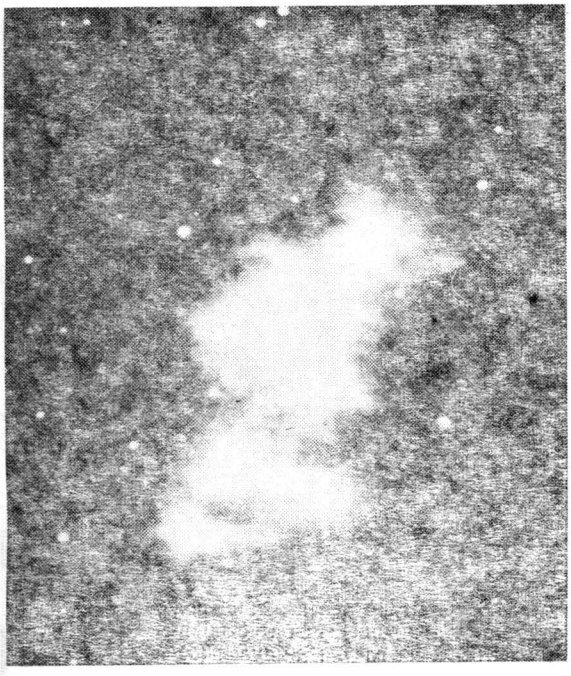
начин идващата до нас светлина е поляризирана. Може да се предположи, че причината за този ефект се състои в следното: в мъглявината има местно магнитно поле, в което се върти едно множество от изключително бързи електрони.

Ние току-що обяснихме как електроните се движат в полето по окръжности. Ако към това движение се добави произволно равномерно движение по посока на полето, лъчението на полето няма да се измени, тъй като силата $q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ няма компонента по посока на полето, а синхротронното лъчение (както вече отбелязахме) винаги е поляризирано под прав ъгъл спрямо посоката на проекцията на магнитното поле върху равнината на зрението.

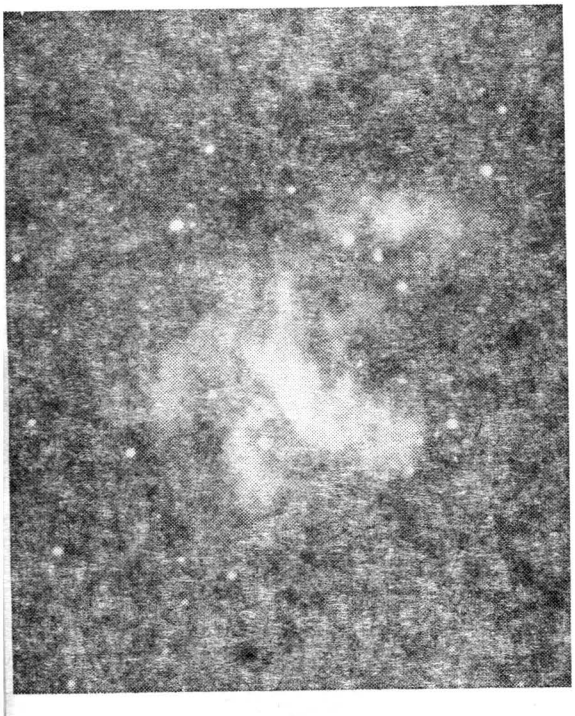
Съпоставяйки тези два факта, ние виждаме, че в района, където едната снимка е светла, а другата тъмна, електричното поле на светлинната вълна трябва да бъде напълно поляризирано в една определена посока. Това означава, че перпендикулярно на определената посока има магнитно поле, а в онези райони, където втората снимка има светло петно, магнитното поле е насочено под друг ъгъл. При внимателно изучаване на фиг. 34.8 може да се забележи, че тук има, грубо казано, редица „линии“ в едно направление на първата снимка и в перпендикулярно към него направление на втората снимка. Изображенията имат сякаш влакнеста структура. Може да се мисли, че магнитните силови линии се простират доста далеч в едно и също направление и затова вероятно възникват продълговати участъци на магнитното поле, където електроните се завъртат в една посока, а в областите с друга посока на полето електроните се завъртат по друг начин.

Защо енергията на електроните остава голяма толкова дълго време? Нали от момента на взрива са минали вече 900 години; как се е случило така, че електроните да се въртят все тъй бързо? Причината за такава продължителност на описания процес като цяло и за запазване на голямата енергия на електроните в частност досега още не е съвсем ясна.

Фиг. 34.8. Ракообразна мъглявина
снимка през син филтър и поляроид.
а — електричният вектор е насочен вертикално
б — електричният вектор е насочен хоризонтално



а

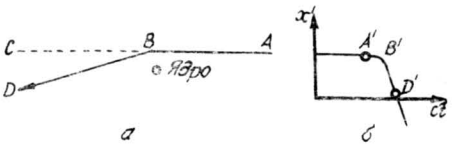


б

5. Спирачно лъчение

Ние накратко ще разкажем за още един интересен ефект, свързан с излъчването на бързо движеща се частица. По същество този процес много прилича на току-що описаното лъчение. Нека да предположим, че имаме материал, съдържащ заредени части-

ци, и покрай него преминава много бърз електрон (фиг. 34.9). Тогава под действие на електричното поле на ядрото електронът ще се привлича и ускорява и неговата траектория се закривява. Какво ще бъде излъчваното електрично поле по посока на точка C, ако скоростта на електрона е близка до скоростта на светлината? Да си спомним нашето правило: трябва да вземем истинското движение, да го пренесем назад със скорост c и тогава ще получим кривата, чиято производна определя електричното поле. Електронът пристига до нас със скорост v, следователно при пренасянето се получава обратно движение и цялата траектория се свива толкова пъти, колкото $c-v$ е по-малко от c. По такъв начин при $1-\frac{v}{c}\ll 1$ кривината на привидната траектория в точка B' е много голяма и вземайки втората производна, ние получаваме мощно лъчение по посока на движението. Следователно при преминаване през среда електроните с висока енергия излъчват напред. Това явление се нарича *спирачно лъчене*.

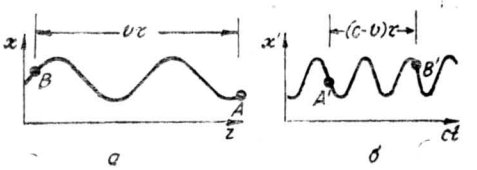


Фиг. 34.9. Бърз електрон, преминаващ недалеч от ядро, излъчва по посока на своето движение

На практика синхротроните се използуват не толкова за получаване на електрони с голяма енергия (вероятно, ако последните биха могли да се извеждат по-леко от синхротрона, не бихме говорили така), колкото за получаване на енергетични фотони или γ-кванти при преминаване на електроните през плътни мишени, където те пораждат спирачно лъчение.

6. Ефект на Доплер

Сега да разгледаме редица други ефекти, свързани с движението на източника. Нека източник да бъде атом в покой, трептящ със своята обикновена честота ω_0. Честотата на наблюдаваната светлина тогава ще бъде ω_0. Но да вземем друг пример — нека също такъв атом да трепти с честота ω_1 и в същото време целият атом, този осцилатор като цяло, да се движи със скорост v по посока на наблюдателя. Тогава истинското движение в пространството ще бъде такова, каквото е представено на фиг. 34.10, а. Използуваме нашия обикновен прийом и добавяме $c\tau$, т. е. отместваме цялата крива назад: получаваме трептения, представени на фиг. 34.10, б. За временния интервал τ осцилаторът изминава разстояние $v\tau$, а на графиката с оси x' и y' съответното разстояние е равно на $(c-v)\tau$. По такъв начин броят на трептенията с честота ω_1, който се е нанасял върху интервал $\Delta\tau$, на новия чертеж се нанася върху интервал $\Delta\tau'=(1-v/c)\Delta\tau$ осцилациите се свиват и когато новата крива се движи покрай нас със скорост c, ние ще наблюдаваме *по-висока честота*, увеличена за сметка на фактора на скъсяването $\left(1-\frac{v}{c}\right)$. И тъй наблюдаваната честота е равна на



Фиг. 34.10. Движение на осцилатор в равнината $x-z$ и в равнината $x'-t$

$$\omega=\frac{\omega_1}{1-\frac{v}{c}}. \qquad (34.10)$$

Този ефект може да се обясни, разбира се, и по други начини. Нека например същият атом изпуска не синусоидална вълна, а краткотрайни импулси (пип, пип, пип, пип) с някаква честота ω_1. С каква честота ще възприемаме ние тези сигнали? Първият импулс ще дойде до нас след определено време, а вторият ще дойде вече за по-малко време, защото атомът за това време е успял да се приближи към нас. Следователно временният интервал между сигналите „пип“ се скъсява за сметка на движението на атома. Анализирайки тази картина от геометрична гледна точка, ние ще дойдем до извода, че честотата на импулсите се увеличава $1/\left(1-\frac{v}{c}\right)$ пъти.

Ще се наблюдава ли честота $\omega=\omega_0/\left(1-\frac{v}{c}\right)$, ако атом със собствена честота ω_0 се движи със скорост v към наблюдателя?

Не. Ние добре знаем, че собствената честота на движещия се атом ω_1 и честотата на покоящия се атом ω_0 не са едно и също нещо поради релативистичното забавяне на хода на времето. Така че ако ω_0 е собствената честота на покоящия се атом, то честотата на движещия се атом ще бъде равна на

$$\omega_1=\omega_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{34.11}$$

Затова наблюдаемата честота ω окончателно е равна на

$$\omega=\frac{\omega_0\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-v/c}\,. \tag{34.12}$$

Изменението на честотата, възникващо в този случай, се нарича *ефект на Доплер*: ако излъчващият обект се движи към нас, излъчваната от него светлина изглежда по-синя, а ако той се отдалечава от нас, светлината става по-червена.

Ще дадем още два други извода на този интересен и важен резултат. Нека сега покоящият се *източник* да излъчва с честота ω_0, а *наблюдателят* да се движи със скорост v към източника. За време t наблюдателят ще се премести на разстояние vt от това място, където е бил при $t=0$. Колко радиана от фазата ще преминат пред наблюдателя? Преди всичко, както и покрай всяка фиксирана точка, ще преминат $\omega_0 t$ радиана, а също известна добавка за сметка на движението на източника, а именно vtk_0 (това е броят на радианите на метър, умножен по разстоянието).

Оттук броят на радианите за единица време, или наблюдаваната честота, е равен на $\omega_1=\omega_0+k_0v$. Целият този извод бе направен от гледна точка на наблюдател в покой да видим какво ще вижда движещият се наблюдател. Тук ние отново сме длъжни да вземем под внимание разликата в протичане на времето за наблюдателя в покой и движение, а това означава, че сме длъжни да разделим резултата с $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. И тъй нека k_0 е вълновото число (количеството радиан на метър по посока на движението), а ω_0 — честотата; тогава честотата, която ще регистрира движещия се наблюдател, е равна на

$$\omega=\frac{\omega_0+k_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{34.13}$$

Ние знаем, че за светлината $k_0=\frac{\omega_0}{c}$. Следователно търсеното съотношение в разглежданията пример има вид

$$\omega=\frac{\omega_0\left(1+\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{34.14}$$

и на пръв поглед не прилича на (34.12).

Отличава ли се честотата, наблюдавана при нашето движение към източника от честотата, наблюдавана при движението на източника към нас? Разбира се, не. Теорията на относителността твърди, че двете честоти трябва да бъдат *точно равни*. Ако ние бяхме достатъчно математически подготвени, то бихме могли да се убедим, че двата математически израза са точно равни. В действителност *изискването за равенство* на двата израза често се използува за извод на релативистичното забавяне на времето, защото без квадратни корени равенството автоматически се нарушава.

Тъй като вече сме започнали да говорим за теорията на относителността, ще дадем и трети начин за доказателство, който ще се окаже може би най-общ. (По същество всичко си остава както по-рано, понеже няма значение по *какъв начин* е получен резултатът.) В теорията на относителността има връзка между положението в пространството и времето, определени от един наблюдател, и положението и времето, определени от друг наб-

людател, който се движи относно първия. Ние вече писахме тези съотношения (гл. 16). Това са правите и обратни *трансформации на Лоренц.*

$$x'=\frac{x+vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad x=\frac{x'-vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$
$$t'=\frac{t+vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad t=\frac{t'-vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{34.15}$$

За неподвижния наблюдател вълната има вид $\cos(\omega t-kx)$; всичките гребени, долчини и нули се описват от тази формула. А как ще изглежда тази същата вълна за движещ се наблюдател? Там, където полето е равно на *нула, всеки* наблюдател при измерване ще получи нула; това е релативистичен инвариант. Следователно формата на вълната не се изменя; трябва само тя да се запише в координатната система на движещия се наблюдател:

$$\cos(\omega t-kx)=\cos\left[\omega\,\frac{t'-vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-k\frac{x'-vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right].$$

Като прегрупираме членовете, получаваме

$$\cos(\omega t-kx)=\cos\left[\frac{\omega+kv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}t'-\frac{k+v\omega/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}x'\right]=$$
$$=\cos\left[\omega' t'-k' x'\right]. \tag{34.16}$$

Ние отново имаме една вълна във вид на косинус с честота ω' в качеството на коефициент при t' и някаква друга константа k'— коефициент при x'. Нека k' (броя на трептенията на 1 m) да наречем вълново число за втория наблюдател. По такъв начин движещият се наблюдател ще измери друга честота и друго вълново число, определени от формулите

$$\omega'=\frac{\omega+kv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{34.17}$$

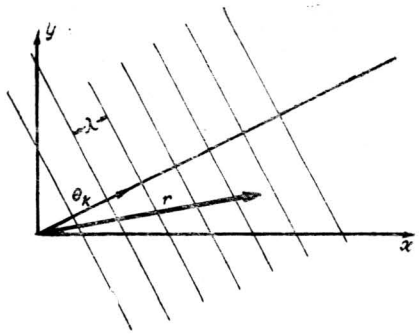
и

$$k'=\frac{k+\omega v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{34.18}$$

Лесно е да се види, че (34.17) съвпада с формулата (34.13), която беше получена от нас въз основа на чисто физически разсъждения.

7. Четиривекторът $(\omega, \mathbf{k})$

Равенствата (34.17) и (34.18) имат твърде интересно свойство: новата честота ω' е линейно свързана със старата честота ω и със старото вълново число k, а новото вълново число k' се представя във вид на линейна комбинация на старото вълново число и старата честота. По-нататък вълновото число ни дава скоростта на изменение на фазата с разстоянието, а честотата — скоростта на изменение на фазата с времето и самите равенства много приличат на трансформациите на Лоренц за координатата и времето: ако ω се съпостави с t, а k с x/c^2, то новото ω' се съпоставя с t', а k' — с координатата x'/c^2. С други думи, *при* всяка *трансформация на Лоренц* ω *и* k *се изменят така както* t *и* x. Тези величини, ω и k, образуват един така наречен *четиривектор.* Всяка четирикомпонентна величина, преобразуваща се като четирите величини време и координати, представлява един четиривектор. Тука всичко е правилно с изключение само на едно — четиривекторът има *четири компоненти,* а при нашия случай фигурират само две. Както вече казахме, ω и k са аналози на времето и на една от пространствените координати; за да се въведат двете останали координати, трябва да се изучи разпространението на светлината в тримерното пространство.



Фиг. 34.11. Плоска вълна, движеща се под ъгъл

Нека е дадена координатната система x, y, z и разглежданата вълна да се разпространява в пространството като вълнов фронт (фиг. 34.11). Дължината на вълната е λ, а посоката на разпространение на вълната не съвпада с някоя от координатните оси. Какъв вид има формулата, която описва движението на такава вълна? Отговорът е очевиден: това е $\cos(\omega t - ks)$, където $k = 2\pi/\lambda$, а s (разстоянието по посока на движение на вълната) е проекцията на вектора на положението върху посоката на движението. Да запишем това по следния начин: нека $\mathbf{r}$ да е радиус-векторът на разглежданата точка в пространството; тогава s е равно на $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k$, където $\mathbf{e}_k$ е единичният вектор по посока на движение на вълната. Иначе казано, s е равно на $r\cos(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k)$, т. е. на проекцията на разстоянието r върху посоката на движение. Следователно нашата вълна се описва с формулата $\cos(\omega t - k\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{r})$.

Оказва се изключително удобно да се въведе векторът $\mathbf{k}$, наречен *вълнов вектор*; големината му е равна на вълновото число $2\pi/\lambda$, а посоката му съвпада с посоката на разпространение на вълната:

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi \mathbf{e}_k}{\lambda} = k\mathbf{e}_k. \tag{34.19}$$

Благодарение на въвеждането на вектора $\mathbf{k}$ вълната придобива вид $\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, или $\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$. Да изясним смисъла на проекциите на $\mathbf{k}$, например на κ_x. Очевидно k_x е скоростта на изменение на фазата в зависимост от координатата x. Фиг. 34.11 ни подсказва, че фазата се изменя с нарастване на x така, както ако по оста x би се разпространявала една вълна, обаче *с по-голяма дължина* на вълната. „Дължината на вълната по посока на x" е по-голяма от истинската с множител, равен на секанса от ъгъла α между оста x и посоката на движението на истинската вълна:

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos\alpha}. \tag{34.20}$$

Следователно скоростта на изменение на фазата, *обратно* пропорционална на λ_x, се оказва *по-малка* с множител $\cos\alpha$ по посока на x; но същият множител съдържа и k_x, понеже k_x е равно на модула на $\mathbf{k}$, умножен на косинуса от ъгъла между $\mathbf{k}$ и оста x.

И тъй ние изяснихме смисъла на вълновия вектор, който описва разпространението на вълната в тримерното пространство. Четирите величини ω, k_x, k_y, k_z се преобразуват в теорията на относителността като четиривектор, при което ω съответствува на времето, а k_x, k_y, k_z съответствуват на x, y и z и всички заедно — на компонентите на един четиривектор.

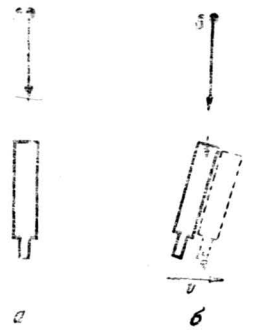
По-рано, когато се занимавахме с теорията на относителността (гл. 17), ние изяснихме, че от четиривекторите може да се състави релативистично примовано произведение. Вземайки вектора на положението x_μ (където μ номерира четирите координати — време и трите пространствени) и вълновия вектор k_μ (където μ отново приема четири стойности), можем да си образуваме примованото произведение на x_μ и k_μ, което се записва във вида $\Sigma' k_\mu x_\mu$. Това произведение е инвариант, който не зависи от избора на координатната система. Съгласно определението на примованото произведение $\Sigma' k_\mu x_\mu$ може да се запише в следния вид:

$$\Sigma' k_\mu x_\mu = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z. \tag{34.21}$$

Тъй като k_μ е четиривектор, то, както вече знаем, $\Sigma' k_\mu x_\mu$ е инвариант по отношение на трансформациите на Лоренц. Под знака на косинуса в нашата формула за плоската вълна влиза именно това произведение и то *задължително* трябва да бъде инвариант относно трансформациите на Лоренц. Ние не можем да имаме формула, в която под знака на косинуса да стои неинвариантна величина, защото знаем, че стойността на фазата не зависи от избора на координатната система.

8. Аберация

При извода на формулите (34.17) и (34.18) взехме прост пример, когато **k** лежи по посока на движението на координатната система; но ние можем сега да обобщим тези формули и за други възможни случаи. Нека източникът да изпуска светлинен лъч в определена посока; тази посока се фиксира от неподвижния наблюдател, а ние се движим, да речем, по земната повърхност в хоризонтална посока (фиг 34.12,а). В каква посока пада светлинният лъч от наша гледна точка? Отговор може да се получи, като се запишат четирите компоненти k_μ и се приложат трансформациите на Лоренц. Но можем да се възползуваме и от следното разсъждение: за да се види светлинният лъч, нашият телескоп трябва да се наклони на някакъв ъгъл (фиг. 34.12,б). Защо? Защото светлината пада отгоре със скорост c, а ние се движим хоризонтално със скорост v и светлината ще премине „направо“ през телескопа, ако последният е наклонен на някакъв ъгъл. Лесно е да се разбере, че разстоянието по хоризонталата е равно на vt, а по вертикалата на ct и като означим с θ' ъгъла на наклона, ще получим $\operatorname{tg}\theta' = v/c$. Забележително. Всъщност забележително, ако не беше една малка подробност: θ' *не е* този ъгъл, под който трябва да се наклони телескопът *спрямо повърхността на Земята*, защото нашият анализ се провежда от гледна точка на неподвижния наблюдател. Хоризонталното разстояние, което ние считаме, че е равно на vt, за неподвижния относно Земята наблюдател ще бъде равно на съвсем друга величина, тъй като той се ползува от наша гледна точка със „скъсена“ линийка. Поради ефекта на скъсяването възниква съвсем друго съотношение:



Фиг. 34.12. Отдалечен светлинен източник S
а — наблюдаван през неподвижен телескоп
б — наблюдаван през телескоп, движещ се в странична посока

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{34.22}$$

което е еквивалентно на съотношението

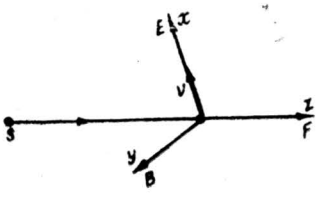
$$\sin\theta = \frac{v}{c}. \tag{34.23}$$

За вас ще бъде полезно да получите сами това съотношение с помощта на трансформациите на Лоренц.

Описаният по-горе ефект на привидно изменение на посоката на лъча се нарича *аберация* и се наблюдава опитно. Как може да се прояви той? Нали никой не знае къде *всъщност* е разположена звездата. Нека ние наистина да гледаме към звездата в неправилна, привидна посока; откъде ни е известно, че тя е неправилна? Известно ни е, защото Земята се върти около Слънцето. Днес ние поставяме телескопа под един ъгъл, а след шест месеца ние ще трябва вече да го завъртим. Ето откъде знаем ние за съществуването на този ефект.

9. Импулс на светлинната вълна

Да се заемем сега с друг въпрос. В предишните глави ние никъде не говорихме за *магнитното* поле на светлинната вълна. Обикновено ефектите, свързани с магнитното поле, са много малки, обаче има един интересен и важен ефект, който възниква под влияние на магнитното поле. Нека да имаме светлинен лъч, изпращан от някакъв източник, който действува на заряд и го принуждава да трепти нагоре-надолу. Да предположим, че електричното поле е насочено по оста x; тогава трептенията на заряда ще стават също по оста x: положението на заряда се дава от стойността на координатата x, а скоростта на заряда е v (фиг. 34.13).



Фиг. 34.13. Заряд, движещ се под действие на електрично поле, на който действува сила от страна на магнитно поле, насочена по посока на светлинния лъч

Магнитното поле е насочено перпендикулярно на електричното. Електричното поле, действуващи на заряда, заставя последният да се движи нагоре-надолу. А как действува в случая магнитно поле? Магнитното поле действува само на движещ

се заряд (нека това бъде например електрон); но електронът наистина се движи, нали той се ускорява от електричното поле, следователно двете полета действуват съвместно. Движейки се нагоре-надолу с някаква скорост, електронът изпитва действието на сила, равна по големина на произведението Bvq; а каква е нейната *посока? Посоката на силата съвпада с посоката на разпространение на светлината.* Следователно падащият върху заряда светлинен лъч заставя заряда да трепти и освен това го дърпа с някаква сила по посока на движение на светлинната вълна. Това явление носи името налягане на електромагнитните вълни, или *светлинно налягане.*

Да определим големината на светлинното налягане. Тя очевидно е равна на $F=qvB$ или поради това че зарядът и полето осцилират, е равна на *средното по времето от* F, т. е. на $\langle F\rangle$. Съгласно (34.2) интензитетът на магнитното поле е равен на интензитета на електричното поле, делен на c, така че ние трябва да намерим средното от произведението на електричното поле, скоростта и заряда, делено на c: $\langle F\rangle = q\langle vE\rangle/c$. От друга страна, произведението на заряда q и полето E е силата, действуваща на заряда от страна на електричното поле, а произведението на силата и скоростта е равно на работата за единица време dW/dt, която полето извършва над заряда.

Следователно средната сила („тласкащият импулс"), действуваща на заряда, е равна на *погълнатата светлинна енергия за* 1 s, делена на c. Този закон е валиден и в общия случай, тъй като на нас не ни е необходимо да знаем силата на осцилатора, а също така взаимното умножение на действието на различните заряди. *Във всеки случай, когато става поглъщане на светлина, възниква налягане.* Импулсът, предаден от светлинната вълна, винаги е равен на погълнатата енергия, делена на c:

$$\langle F\rangle = \frac{dW/dt}{c}. \qquad (34—24)$$

Ние вече знаем, че светлината пренася със себе си енергия Сега ние идваме до извода, че светлината носи също така и *импулс* и освен това импулсът на светлинната вълна винаги е равен на енергията, делена на c.

И обратно, при изпускане на светлина източникът губи импулс. Ако един атом излъчва енергия в определена посока, той отскача в обратната посока с импулс $p=W/c$. Светлинен сноп, падащ перпендикулярно върху огледало, при *отражение* действува на огледалото с два пъти по-голяма сила.

Всичко казано се намира в рамките на класическата теория на светлината. Ние, разбира се, знаем, че съществува квантова теория и че светлината в много отношения има поведение на частица. Енергията на светлината-частица е равна на честотата, умножена с една постоянна величина:

$$W=h\nu=\hbar\omega. \qquad (34.25)$$

Шом светлината пренася импулс, равен на енергията, делена на c, то ефективните частици, *фотоните*, носят импулс

$$p=\frac{W}{c}=\frac{\hbar\omega}{c}=\hbar k. \qquad (34.26)$$

Посоката на импулса съвпада, разбира се, с посоката на разпространение на светлината. Следователно това може да се запише във векторна форма:

$$W=\hbar\omega, \quad \mathbf{p}=\hbar\mathbf{k}. \qquad (34.27)$$

Ние знаем вече, че енергията и импулсът на една частица образуват четиривектор. Изяснихме, че ω и $\mathbf{k}$ също така образуват четиривектор. И много добре е, че в двете равенства (34.27) влиза една и съща константа; това означава, че квантовата теория и теорията на относителността са във взаимно съгласие.

На уравнението (34.27) може да се придаде по-елегантен вид: $p_\mu = \hbar k_\mu$ (релативистично уравнение за частица, на която се поставя в съответствие вълна). Макар че това уравнение е написано за фотони, за които k (модулът на $\mathbf{k}$ е равно на ω/c, а $p = W/c$, всъщност то има много по-общ характер. В квантовата механика *всички* частици, а не само фотоните, проявяват вълнови свойства, при което честотата и вълновото число на съответните вълни са свързани с енергията и импулса на частицата със съотношенията (34.27) (те се наричат *съотношения на де Бройл*) даже в случай, че p не е равно на W/c.

В предходната глава ние видяхме, че светлина с дясна и лява кръгова поляризация пренася също така *момент на количеството на движение,* който е пропорционален на енергията E на вълната. От квантова гледна точка светлинният сноп с кръгова поляризация представлява поток фотони, всеки един от които носи момент на количеството на движение $\pm\hbar$, насочен *по* или *против* движението. Вие виждате в какво се превръща поляризацията от корпускулярна гледна точка — фотоните притежават момент на количеството на движение точно така както въртящите се куршуми, изстреляни от пушка. Но картината с „куршумите“ е толкова непълна, колкото и „вълновата“ картина и на нас ни предстои да обсъдим тези представи по-подробно в следващите глави, които са посветени на квантовите явления.

35

Цветно зрение

1. Човешко око
2. Цветът зависи от интензитета
3. Измерване на възприятието за цвят
4. Диаграма на цветовете
5. Механизъм на цветното зрение
6. Физико-химични свойства на цветното зрение

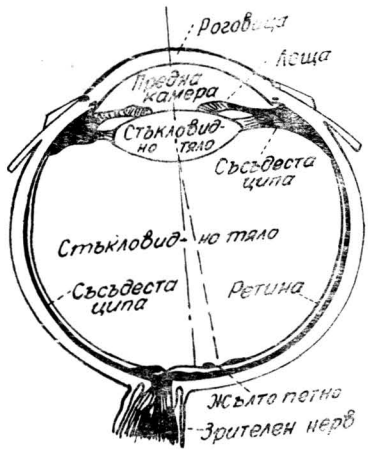
1. Човешко око

Проявата на цветовете е обусловена отчасти от физически процеси. Ние вече говорихме за цветната гама на сапунени ципи, предизвикана от интерференцията. Но цветът освен това е свързан още с функцията на окото и с това, което става зад него, т. е. с дейността на мозъка. Физиката изучава поведението на светлината, докато тя се намира извън човешкото око, а нашите усещания, след като светлината е попаднала в окото, възникват в резултат на фотохимични и нервни процеси, а също така на психологични рефлекси.

С възприятието на светлината са свързани много интересни явления, в които тясно се преплитат и физични, и физиологични процеси, така че опознаването на природните явления, възприемани посредством *зрението*, излиза извън рамките на физиката като такава. Ние не ще започнем сега да се извиняваме за това, че ще навлезем за малко в други области на науката, защото, както вече сме подчертавали, науките са разделени не по естествен път, а само по съображения за удобство. Природата съвсем не е заинтересована от такова разделяне и много интересни явления лежат именно на границите между различните области на науката.

В гл. 3 говорихме в общи черти за връзките на физиката с другите науки; сега ние искаме по-подробно да изследваме тази област от явления, където физиката и другите науки са изключително тясно свързани помежду си. Тази област е възприятието на светлината — *зрението*. Особено внимание ще отделим на *цветното зрение*. В тази глава ще говорим преди всичко за явленията, свързани със зрението на човека; следващата глава ще бъде посветена на физиологичните аспекти на зрението както у човека, така и у животните.

Зрението започва от окото; за да разберем как виждаме, необходимо е да разберем устройството на самото око. В следващата глава ние ще говорим доста подробно за функциите на отделните части на окото и техните връзки с нервната система. А сега накратко ще опишем как функционира окото.

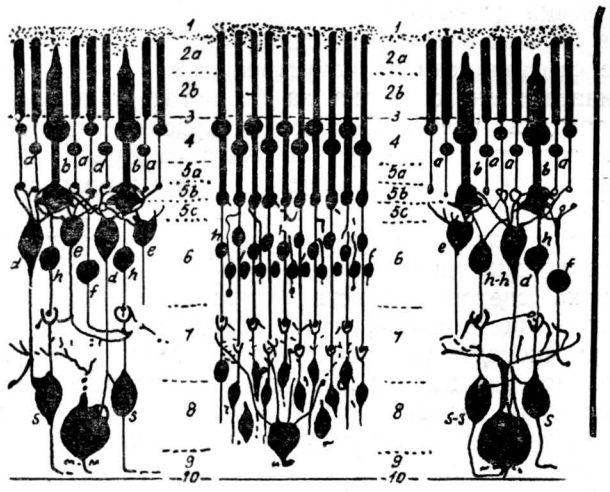


Фиг. 35.1. Схема на човешкото око

Светлината попада в окото през *роговицата* (фиг. 35.1); ние вече разказахме по-рано как се пречупва светлината и попада на задната повърхнина на окото върху слоя, който се нарича *ретина*; различните части на ретината възприемат лъчи от различните области на зрителното поле извън окото. Ретината не е напълно еднородна: в центъра ѝ има участък — петно, което ние използуваме, когато искаме да видим предметите особено ясно; в този участък острота на зрението е особено голяма — той се нарича *жълто петно* или централна ямичка. Лесно е да се убедим с непосредствени опити, че страничните участъци на окото различават подробностите на разглеждания предмет не толкова ефективно, колкото централният участък. Върху ретината има още един участък, където зрителните нерви, носещи цялата информация, се събират заедно и излизат извън окото; този участък се нарича *сляпо петно*. Ретината там е нечувствителна и ако например затворим лявото си око и погледнем пред себе си, а след това започнем да местим пръста си (или друг неголям предмет) из полето на зрението, в определено място на полезрението този предмет неочаквано изчезва. Засега е известен само един случай, когато от този ефект е била извлечена реална полза. Един физиолог, който показал действието на сляпото петно, станал любимец в двореца на френския крал; на уморителните

заседания със своите придворни кралят се развличал, като „отсичал“ главите им: той гледал един от тях и следил как в същото време „изчезвала“ главата на друг.

На фиг. 35.2 е показана в увеличен мащаб структурата на ретината. Различните нейни части имат различна структура. По периферията на ретината най-често се срещат удължени обекти, наречени *пръчици*. Близо до жълтото петно освен пръчици се срещат още и *колбички*. По-нататък ние ще опишем структурата



Фиг. 35.2. Структура на ретината (светлината влиза отдолу)

на тези елементи. Колкото разглежданата област от ретината е по-близко до жълтото петно, толкова повече стават колбичките, а в самото жълто петно фактически има само колбички, лежащи толкова близо една до друга, че тук те са много по-малки или по-тесни, отколкото на другите места на ретината. Следователно в центъра на полето на зрението ние виждаме с помощта на колбички, а по краищата във възприятието на светлината участвуват пръчици. Интересно е, че всяка чувствителна към светлината клетка на ретината не е свързана със зрителния нерв непосредствено, а е съединена с други клетки, които от своя страна са свързани помежду си. Съществуват няколко типа клетки: едни носят информация към зрителния нерв, а други са свързани помежду си главно в „хоризонтално“ направление. Клетките са всичко четири типа, но ние сега няма да говорим за това подробно, а само ще подчертаем основната идея: това е, че светлинният сигнал вече в този етап на възприемането се „обмисля“. С други думи, информацията, получена от различните клетки, не постъпва веднага в мозъка от всяка точка поотделно, а частично се осмисля в ретината чрез комбиниране на информацията от няколко зрителни рецептора. Важно е да се разбере, че самото око изпълнява част от функциите на осмислянето, които са присъщи на главния мозък.

2. Цветът зависи от интензивността

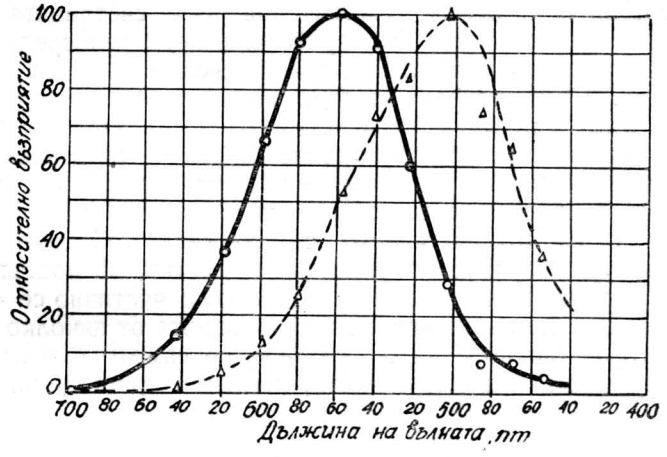
Едно от най-забележителните свойства на зрението е способността на окото да привиква (да се адаптира) към тъмнината. Когато влизаме от ярко осветена стая в тъмна, известно време ние не виждаме нищо и само постепенно околните предмети започват да се очертават все по-ясно и в края на краищата ние започваме да забелязваме това, което по-рано съвсем не сме виждали. При много слаба светлина предметите изглеждат *лишени от окраска*. Установено е, че зрението в условия на тъмнинна адаптация се осъществява изключително с помощта на пръчиците, а в условия на ярко осветление — с помощта на колбичките.

В резултат на това ние разпознаваме цяла поредица явления, свързани с предаване на зрителните функции от пръчиците и колбичките, действуващи съвместно, само на пръчиците.

В много случаи обектите, които се считат за едноцветни, при увеличение на интензивността на светлината могат да придобият окраска и да станат изумително красиви. Например образът на някоя слаба мъглявина в телескопа обикновено изглежда „черно-бял", обаче астрономът Милер от обсерваторията Маунт Уилсън и Паломар успял благодарение на своето търпение да получи *цветни* снимки на няколко мъглявини. Никой никога не е виждал окраските на мъглявините с очите си, но това не означава, че цветовете са създадени по изкуствен път; просто интензивността на светлината е много малка, за да могат колбичките в нашите очи да определят цвета. Особено са красиви Пръстеновидната и Ракообразната мъглявини. На снимката на Пръстеновидната мъглявина централната част е оцветена в прекрасен син цвят; тази част е обградена от ярък червен ореол, а на снимката на Ракообразната мъглявина на фона на синкава мъглица се преплитат ярки червеноранжеви нишки.

При ярка светлина чувствителността на пръчиците по всяка вероятност е много малка, но на тъмно с течение на времето те придобиват способността да виждат. Относителните изменения на интензивността, към които окото може да се приспособява, превишават един милион пъти. Природата е създала за тази цел два рода клетки: едните виждат при ярка светлина и различават цветовете — това са колбичките, другите са приспособени да виждат на тъмно — това са пръчиците.

Оттук възникват интересни следствия: първото — това е обезцветяването на предметите (при слаба светлина), а второто — различието в относителната яркост на два предмета, оцветени в различни цветове. Оказва се, че пръчиците виждат синия край на спектъра по-добре от колбичките, но затова колбичките виждат например тъмночервения цвят, който пръчиците съвсем не могат да видят. Затова за пръчиците червеният цвят е все едно черен. Ако вземем два листа хартия, да кажем червен и син, в полумрак синият ще изглежда по-ярък от червения,



Фиг. 35.3. Спектрална чувствителност на окото
Непрекъснатата крива на светло; пунктираната — на тъмно

макар че при добро осветление червеният лист е много по-ярък от синия. Това е съвсем поразително явление. Ако разглеждаме на тъмно ярко оцветена корица на списание и си представяме в тези условия нейната разцветка, на светлина всичко става съвсем неузнаваемо. Описаното явление се нарича *ефект на Пуркине.*

На фиг. 35.3 пунктираната крива характеризира чувствителността на окото на тъмно, т. е. чувствителността за сметка на пръчиците, а непрекъснатата крива се отнася за зрението на свет-

ло. Вижда се, че максималната чувствителност на пръчиците лежи в областта на зеления цвят, а на колбичките — в областта на жълтия цвят. Затова червеният лист (червеният цвят има дължина на вълната около 650 nm), който се вижда добре при ярка светлина, почти съвсем не се вижда на тъмно.

Този факт, че зрението на тъмно се осъществява с помощта на пръчиците, а в района на жълтото петно пръчици няма, се проявява още и в това, че ние виждаме на тъмно предметите, които се намират непосредствено пред нас, по-неясно от предметите, разположени отстрани. Понякога се случва така, че слабите звезди и мъглявини се забелязват по-лесно, ако гледаме малко настрана на тях, тъй като в центъра на ретината почти съвсем няма пръчици.

Намаляването на броя на колбичките към периферията на окото води от своя страна до още един интересен ефект — в края на полезрението даже ярките предмети загубват своята окраска. Този ефект се проверява лесно. Фиксирайте вашия поглед в определена посока и помолете приятеля си да тръгне към вас отстрани, като държи в ръката си ярко оцветени листове. Опитайте се да определите цвета на листовете, преди те да са точно пред вас. Вие ще забележите, че сте видели самите листове много преди момента, в който сте определили какъв цвят имат те. Най-добре е, ако вашият приятел влиза в полето на зрението откъм страната, противоположна на сляпото петно, иначе възниква объркване: вие ще започнете да различавате цветовете и изведнъж всичко ще изчезне, а след това листовете отново ще се появят и вие ясно ще различите техния цвят.

Интересно е също, че периферията на ретината е изключително чувствителна към движението на обектите на зрението. Макар че ние лошо виждаме, когато гледаме косо, с единия ъгъл на окото, все пак веднага забелязваме летящ отстрани бръмбар или муха независимо от това, че съвсем не сме очаквали да видим каквото и да било на това място. При това сякаш нещо ни „тегли“ да погледнем какво се мярка в края на полето на зрението.

3. Измерване на възприятието за цвят

Сега ще се заемем със зрението, осъществявано с помощта на колбичките, т. е. зрението при ярко осветление. Най-главното и най-характерното свойство на това зрение — това е цветът. Ние знаем вече, че бялата светлина може да се разложи с помощта на призма на цял спектър от лъчи с различна дължина на вълната, които ни изглеждат оцветени в различни цветове; цветовете именно ни *изглеждат* — това са определени усещания. Светлината от всеки източник може да бъде анализирана с помощта на дифракционна решетка или призма и да се намери нейното спектрално разпределение, т. е. „количеството“ светлина с една или друга дължина на вълната. Един светлинен лъч може да съдържа по-голямо количество син, малко червен и съвсем малко жълт цвят, друг може да съдържа цветове в друга пропорция и т. н. За физиката такава характеристика ще бъде напълно достатъчна, но тука ние трябва да отговорим на въпроса, какъв *цвят* ще има даден лъч, какъв ще ни изглежда той. Очевидно е, че окраската някак си е свързана със спектралното разпределение на светлината, но нашата задача се състои в това да намерим от коя именно характеристика на спектралното разпределение зависи възприятието за един или друг цвят. Например как да се получи зелен цвят. Ние добре знаем, че може просто да се избере съответната област на спектъра. А няма ли *друг* начин за получаване на зелен, оранжев и въобще който и да е друг цвят?

Може ли да има няколко спектрални разпределения, причиняващи един и същ зрителен ефект? Отговорът е съвсем определен — *да, може.* Броят на различните зрителни възприятия е

доста ограничен; както ще видим скоро, този брой обхваща само тримерното множество от възприятия, а броят на кривите — спектралните разпределения за различните източници — е безкраен. Възниква въпросът, който ние ще обсъдим най-напред: при какви условия различните разпределения изглеждат като един и същ цвят?

Най-действеният психофизичен начин за оценка на чувствителността към цветовете се състои в използуването на окото като *нулев уред*. При това не е необходимо да се изследва как произлиза усещането за зелен цвят или да се измерват факторите, които предизвикват усещането за зелен цвят; това би било твърде сложно. Вместо това ние ще изучим условията, при които две дразнения (две въздействия) стават *неразличими*. При това не е необходимо да знаем възможно ли е двама души да получат еднакво зрително усещане при различни условия, а е необходимо само да се установи, че две дразнения, предизвикващи еднакви усещания за един човек, водят до еднакви усещания и за другия. Съвсем излишно е да се сравняват зрителните усещания на две различни лица, гледащи един и същ, да кажем, зелен предмет. За това ние нищо не знаем.

За илюстрация на възможностите на този метод нека да вземем набор от четири проекционни апарата, снабдени с филтри. Тяхната яркост може да се мени непрекъснато в широки граници: първият апарат има червен филтър и хвърля на екрана червено петно, вторият — зелен филтър и дава зелено петно, третият — син филтър и накрая четвъртият образува върху екрана бял кръг с черно петно по средата. Включваме червения и зеления апарат така, че светлинните петна на екрана частично да се покриват; тогава областта, в която петната се покриват, причинява у нас усещане за нов цвят, не червено-зелен, а жълт. Изменяйки пропорцията на червения и зеления, можем да преминем през всевъзможните оттенъци на оранжевия цвят и т. н. Проектирайки върху екрана определен жълт цвят, можем да получим точно такъв цвят, като смесваме други компоненти, например използувайки жълт филтър и смесвайки след това жълта светлина с лъч бяла светлина. С други думи, едни и същи цветове могат да се създават по няколко начина, като се смесва светлина от различните филтри.

Откритото от нас явление може да се запише аналитически по следния начин. Нека да означим с буквата Y дадения жълт цвят; той представлява сума от някакви количества светлина от червения филтър (R) и от зеления (G). С помощта на две числа, да кажем r и g, определящи яркостите (R) и (G), формулата за жълтия цвят се записва във вида

$$Y = rR + gG. \tag{35.1}$$

Въпросът сега се състои в това може ли *всеки* цвят да се получи чрез събиране на два или три различни фиксирани цвята. Да се опитаме да отговорим на този въпрос. Разбира се, не може да се получи всеки цвят, като се смесва само зелен и червен, защото син цвят от такава комбинация никога няма да се получи. Обаче, ако към тях се добави син, на мястото на пресичането на тези три цвята може да се осъществи появяването на чисто бял цвят. Смесвайки три различни цвята в различни пропорции, в областта на пресичането им могат да се получат цветове в много широк диапазон; ето защо не е изключено от смесването на три такива цвята да може по принцип да се получи *всеки цвят*. Ние после ще видим до каква степен това твърдение е правилно; по същество то е вярно, а след малко ние ще го формулираме по-точно.

Нека да съберем цветните петна от трите апарата на едно място и да се опитаме да подберем същия цвят, какъвто се появява във външния пръстен от четвъртия апарат, който да обгражда петното със смесен цвят (получено от трите апарата). Светлината от четвъртия апарат, която ние отначало приехме за „бяла", сега изглежда бледожълта. Опитваме се да подберем този цвят, смесвайки червен, зелен и син; оказва се, че по метода на про-

бите и грешките може да се създаде „кремав“ цвят, чийто оттенък е много близък до нужния ни цвят. Затова е лесно да се повярва, че и всеки цвят може да се подбере чрез съчетаване на червен, зелен и син цвят. По-късно ние ще се опитаме да получим жълт цвят, но отначало бихме желали да създадем един цвят, който се получава много трудно. Когато четат лекции за цветовете, обикновено демонстрират „ярките“ цветове и никога не показват *кафявия;* може би даже е невъзможно някой да си спомни, че е виждал кафява светлина. И наистина такава светлина никога не се използува, например за създаване на сценични ефекти и прожектори с кафява светлина никой не е виждал; всичко сякаш говори за това, че е невъзможно да се получи кафява светлина. Не е излишно да се отбележи по този повод обаче, че ние просто не сме свикнали да гледаме кафява светлина изолирано, без какъвто и да било фон. Такава светлина може да се създаде практически,като се смеси червена и жълта в някаква пропорция. За да се убедим, че наистина на екрана се е получил кафяв цвят, достатъчно е да увеличим яркостта наобкръжаващия фон, върху който е разположено цветното петно; тогава виждаме петно със също такъв цвят, който се нарича кафяв. Кафявият цвят винаги изглежда тъмен на фона на по-светло обкръжение. Лесно е да се получи кафяв цвят с най-различни оттенъци. Например, ако се намали частта на жълтата светлина, възниква червеникавокафяв цвят с шоколадов оттенък, а ако се добави зелена, получава се ужасният цвят на военна униформа, приет в армията. Но самата светлина, създаваща този цвят, не е чак толкова страшна — това е просто жълтозелен цвят, който се разглежда на светъл фон.

Да поставим сега жълт филтър на четвъртия проекционен апарат и да се опитаме да подберем същия този жълт цвят чрез смесване. (Яркостта на четвъртия апарат трябва да се намира в границите на яркостта на първите три; иначе ние няма да съумеем да създадем смесен цвят точно с такава яркост.) Оказва се, че ние *можем* да получим жълт цвят; достатъчно е да се смесва само зелен и червен, а за оттенъка да се добави малко син. След това вече не е трудно да се провери, че при съответни условия може съвсем точно да се подбере всеки зададен цвят.

Нека сега да обсъдим законите за смесване на цветовете. Преди всичко, както вече говорихме, един и същ цвят може да бъде създаден от различни спектрални разпределения; по-нататък ние отбелязахме, че „всеки“ цвят може да бъде получен чрез смесване на три основни цвята: червен, син и зелен. Най-интересното свойство на една смес от цветове се състои в следното: нека е дадена светлина с определен състав, да я обозначим с X, която на око не се отличава от друга светлина Y (те могат да имат различни спектрални разпределения, но зрително *изглеждат* еднакви); да наречем тези цветове „еднакви“ в този смисъл, че окото ги вижда като еднакви и да запишем

$$X=Y. \qquad (35.2)$$

Да прибавим *към всеки цвят* нов, да речем Z (операцията сумиране $X+Z$ означава, че двата светлинни снопа падат на едно и също място върху екрана), и точно такъв светлинен сноп добавяме към Y. Тогава един от основните закони на цветовете се изразява така: ако две спектрални разпределения са неразличими на око по цвят, след добавяне към тях на едно и също количество нов цвят *смесите си остават неразличими:*

$$X+Z=Y+Z. \qquad (35.3)$$

Ние току-що съумяхме да подберем два еднакви жълти цвята; ако двата цвята осветим с розова светлина, те ще си останат еднакви. И тъй, добавяйки какъвто и да е цвят към еднакви цветове, получаваме еднакъв цвят. Обобщавайки всички цветови явления от този род, можем да кажем и така: ако цветовете на два разположени един до друг светлинни лъча изглеждат еднакви при едни условия, то при каквито и да е смесвания те остават еднакви и единият лъч може да бъде заменен с дру-

гия във всякаква смес от цветове. Важно и интересно се оказва също и това обстоятелство, че съвпадението на цветовете не зависи от свойствата на зрението в момента на наблюдението; известно е, че ако дълго се гледа яркочервена повърхност или яркочервена светлина, а след това се погледне лист бяла хартия, то последният изглежда зеленикав и другите цветове също ще се възприемат с изкривявания (по причина, че преди това дълго сме гледали яркочервен цвят). Нека да сме постигнали съвпадение на два жълти цвята, а след това дълго да сме гледали ярък червен цвят; обръщайки се отново към жълтите петна, ще видим, че те вече не ни изглеждат жълти (какви именно ще изглеждат те, аз не зная, но във всеки случай не жълти). Обаче при всички условия *двата цвята, както и преди, ще изглеждат еднакви,* т. е. способността на окото да приравнява два цвята се запазва независимо от адаптацията на окото в условията на различна интензивност. Очевидно изключение е само случаят при много малка интензивност, когато функцията на зрението преминава от колбичките към пръчиците; тук вече не бива да се говори за сравняване на цветовете, тъй като системата на зрението е съвсем друга.

Вторият закон за смесване на цветовете се състои в следното: *всеки цвят може да бъде получен чрез смесване на три различни цвята* (в нашия случай на зелен, червен и син). Ние вече показахме с два примера, че смесването на три цвята може да даде най-различни цветове. Описаните по-горе закони освен това са много интересни от математическа гледна точка. За тези, които се интересуват от математическата страна на проблемата, ще разкажем подробно. Да вземем трите наши цвята — зелен, червен и син, да ги означим с буквите A, B и C и да ги наречем *основни.* Тогава който и да е цвят може да бъде получен чрез смесване в определени количества на всеки от дадените три цвята: например цветът X се получава като смес на количество a от цвета A, количество b от цвета B и количество c от цвета C:

$$X=aA+bB+cC. \tag{35.4}$$

Да съставим сега от същите три цвята нов цвят Y:

$$Y=a'B+b'B+c'C. \tag{35.5}$$

Тогава сместа от цветовете X и Y се определя от сумите на компонентите им в основните цветове (като следствие от двата главни закона на цветовете, приведени по-горе):

$$Z=X+Y=(a+a')A+(b+b')B+(c+c')C. \tag{35.6}$$

Това правило много напомня сумирането на вектори, като (a, b, c) играят роля на компоненти на единия вектор, а (a', b', c') — на компоненти на втория вектор и новата светлина Z се определя от „сумата“ на векторите. Това съответствие постоянно е привличало вниманието на физиците и математиците. В частност Шрьодингер е написал забележителен труд върху цветното зрение, в който той развил теория на „векторния анализ“, пригодена за използуване към смеси от цветове.

Възниква въпрос: как трябва да се изберат основните цветове? Всъщност няма никакъв единствен правилен избор. От практична гледна точка понякога се оказва по-полезно да се изберат три определени цвята, тъй като те дават в смес повече оттенъци, но ние няма да се спираме на това сега.

Всеки три различно оцветени светлинни снопа[1] могат да образуват *който и да е друг цвят,* ако се смесват в нужната пропорция. Възможно ли е да се покаже опитно действието на това удивително, фантастично правило? Да вземем вместо проекционни апарати с червена, зелена и синя светлина апарати с червен, син и жълт филтър и да видим образува ли сместа от тези цветове, да речем, зелен цвят.

[1] Разбира се, с изключение на този случай, когато един от трите цвята се получава чрез смесване на другите два.

Смесвайки тези три нови цвята в различни пропорции, ние получаваме цял спектър от различни цветове. Но след редица проби и грешки ние се убеждаваме, че нищо, приличащо на зелен цвят, не може да се получи. А *можем* ли ние въобще да получим зелен цвят? Да, можем. Но по какъв начин? Проектирайки червена светлина върху зелено петно, ние можем след това да подберем точно такъв цвят като получения чрез смесване на жълта и синя светлина. По такъв начин ние съставяме две комбинации с един и същ цвят; наистина малко изхитрувахме, тъй като примесихме червения цвят към търсения. Но тъй като ние вече умеем да вникваме в математическите хитрости, прекрасно разбираме, че вместо доказателство на възможността за съставяне на цвета X от три други цвята, например жълт, червен и небесносин, ние установяваме, че комбинацията на червения и цвета X може да бъде получена от жълт и небесносин. Пренасяме сега червения цвят от другата страна на равенството и ще го интерпретираме като *отрицателна величина*. Следователно в уравненията от типа на (35.4) са възможни както положителни, така и отрицателни стойности на коефициентите; при това на отрицателните величини се придава такъв смисъл, че те трябва да се пренесат от *другата страна на равенството* със знак плюс — тогава всеки цвят наистина може да бъде съставен от кои да е три цвята и да се говори за някакъв „правилен“ избор на основните цветове е безсмислено.

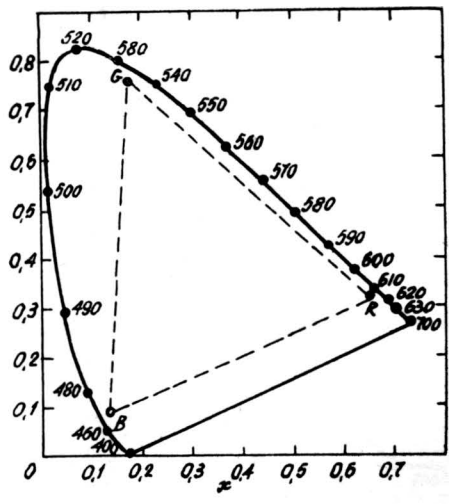
Възниква въпросът винаги ли при съставяне на смес с какъв да е цвят влизат трите основни цвята с положителни коефициенти. Не, не винаги. За всяка тройка основни цветове има цветове, за получаване на които в сместа се появява отрицателен коефициент и затова еднозначен способ за избор на основната тройка не съществува. В популярните книжки цветовете червен, зелен и син обикновено се наричат основни цветове, но това се обяснява само с факта, че с помощта на тези цветове може да се създаде по-широк набор от цветове при положителни стойности на коефициентите в комбинациите на основните.

4. Диаграма на цветовете

Да разгледаме сега смесването на цветовете от математична гледна точка като някакво геометрично построение. Цветът, описван от уравнението (35.4), може да се представи от вектор в тримерното пространство, където по трите оси са нанесени величините a, b и c, т. е. на дадения цвят съответствува точка в пространството. Точката, съответствуваща на друг цвят с компоненти a', b' и c', е разположена на друго място. Както вече знаем, сумата на двата цвята е нов цвят, който се получава чрез векторно събиране на първите два. Диаграмата може да се опрости и всичко да се представи върху равнината, ако се възползуваме от следното наблюдение: вземаме светлина с определена окраска и просто удвояваме коефициентите a, b и c, т. е. увеличаваме всички компоненти, а съотношението между тях оставяме неизменно; тогава ще се получи светлина със същата окраска, но по-ярка. Затова всеки цвят може да бъде приведен *към един и същ интензитет* и след това цялата диаграма в тримерното пространство да се проектира върху равнината, както това е направено на фиг. 35.4.

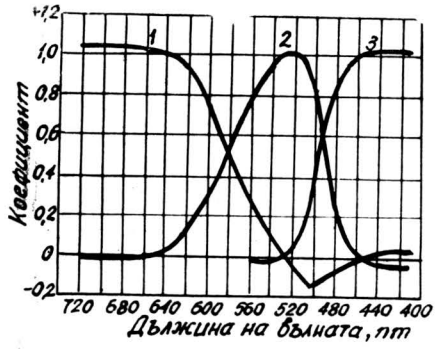
Оттук следва, че всеки цвят, получен чрез смесване на два дадени цвята, се определя от точка, лежаща на линията, която съединява двата избрани цвята. Например смес, съставена от равни части от двата цвята, лежи по средата на съединяващата ги отсечка; смес от 1/4 от единия и 3/4 от другия цвят лежи на разстояние 1/4 от дължината на отсечката и т. н.

Ако за основни цветове се изберат червеният, зеленият и синият, всички цветове, получени от тях с положителни коефициенти, лежат във вътрешността на триъгълника, изобразен на рисунката с пунктир. По същество триъгълникът съдържа почти



Фиг. 35.4. Стандартна диаграма на цветовете

всички цветове, които ние виждаме, тъй като въобще всички цветове, достъпни за нашето зрение, са затворени във вътрешността на крива с доста странна форма, малко излизаща извън триъгълника. Откъде се е взела тази крива? Някой си някога си е съставил твърде грижливо всички видими цветове като смеси от трите избрани. Но ние няма да проверяваме *всички* цветове; достатъчно е да изследваме само чистите спектрални тонове, линиите на спектъра. Всеки цвят може да се разглежда като сума от чисти спектрални тонове с различни, но положителни коефициенти (чисти от физична гледна точка). Всеки цвят се състои от някакви количества червен, жълт, син и т. н. до изчерпването на всички цветове от спектъра. Като знаем как са съставени спектралните тонове от трите основни цвята, можем да пресметнем необходимата пропорция на основните цветове и за кой да е цвят. Затова определяйки *цветовите коефициенти* на всички спектрални тонове по отношение на трите основни цвята, лесно е да съставим пълна таблица за смесване на цветовете.



Фиг. 35.5. Цветови коефициенти на чисти спектрални тонове за определен избор на основните цветове
1 — червен ; 2 — зелен ; 3 — син

Като пример на фиг. 35.5 са дадени опитни данни по смесване на три цвята. Кривите показват количеството на всеки от трите основни цвята (червен, зелен, син), образуващи при смесване всеки от цветовете на спектъра. Червеният цвят е разположен в левия край на спектъра, след него идва жълтият цвят и т. н. до синия цвят, разположен в десния край. Забележете, че в някои случаи е необходимо да се вземат отрицателни коефициенти. От такива именно данни са били определени положенията на точките за всички цветове на диаграмата, при което координатите x и y са свързани с относителните количества на основните цветове, използувани при получаването на различни цветове. Оттука е била намерена и граничната крива на диаграмата. Тя представлява геометрично място на всички чисти спектрални тонове. Но всеки цвят може да бъде получен чрез смесване на спектрални тонове, затова всеки цвят на линията, съединяваща две произволни точки от кривата, съществува в природата. На диаграмата правата линия съединява крайния виолетов и далечния червен край на спектъра. Върху нея са разположени и пурпурните цветове. Във вътрешността на кривата се намират онези цветове, които могат да бъдат получени с помощта на светлина, а цветовете извън кривата въобще не могат да бъдат създадени по този начин и тях никой никога не ги е виждал (освен само на сън).

5. Механизъм на цветното зрение

Първият въпрос, който възниква във връзка с изложените закономерности, е: *защо* цветовете имат такова поведение?

В най-простата теория, създадена от Юнг и Хелмхолц, се е предполагало, че окото има три вида пигменти, чувствителни към светлината, и че спектрите на поглъщане на тези пигменти са различни, да кажем, едни силно поглъщат червена светлина, други — синя, а трети — зелена. Затова, когато в окото попада светлина, поглъщането във всяка от трите области е различно, а като приема различната постъпваща информация, нашият мозък или нашето око, или още нещо решава какъв цвят е попаднал в окото. Лесно е да се покаже, че от предположението за трите вида пигменти следват всички правила за смесване на цветовете.

По-нататък на пръв поглед оставало само да се определят кривите на поглъщане на трите вида пигменти, но по този повод възникнали сериозни разногласия. За нещастие оказало се, че могат да се намерят само всевъзможните линейни комбинации от кривите на поглъщане, а не самите криви за всеки пигмент поотделно, защото координатните оси на диаграмата могат да бъдат завъртени по произволен начин. Правени са опити да се използуват най-различни пътища за получаване на кривите, характеризиращи отделните физични свойства на окото. Една от този вид криви, наречена *крива на яркостта,* е представена на фиг. 35.3.

На рисунката са показани две криви: едната за око, приспо-

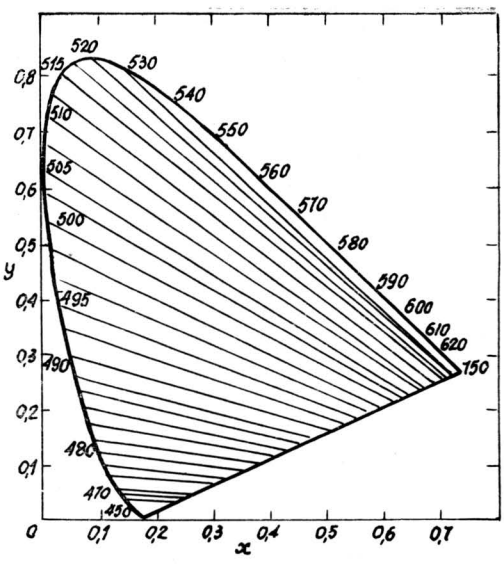
собено (адаптирано) за гледане на тъмно, а другата за зрение на светло (последната характеризира зрението с помощта на колбички). Кривата ни дава най-малката яркост на светлина с дадена окраска, която все още е способно да възприеме окото, т. е. характеризира чувствителността на окото в различните области на спектъра.

Има друг, много интересен начин за измерване на същата величина. Вземаме два цвята и ги показваме един след друг на екрана. Тогава, ако честотата на тяхното появяване е достатъчно малка, ние ще видим на екрана трептене. С нарастване на честотата трептенето в края на краищата изчезва. Това става при някаква честота, зависеща от яркостта на светлината, равна например на 16 повторения в секунда. Сега можем така да подберем яркостите или интензивностите на двата цвята, че трептенето на цвета да изчезне при 16 цикъла. При установената яркост трептене на цветовете възниква, само ако преминем към по-малка честота. Следователно при големи честоти ние получаваме така нареченото трептене на яркостта, а при малки честоти — трептене на цвета. По такъв начин става възможно да се подберат два цвята с „еднаква яркост". Получените оттук резултати са почти, (но не съвсем) аналогични на данните за праговата чувствителност на окото към слаби светлинни потоци, наблюдавани с помощта на колбичките. Повечето специалисти при определяне кривата на яркостта използуват данни от опита с трептене на цвета.

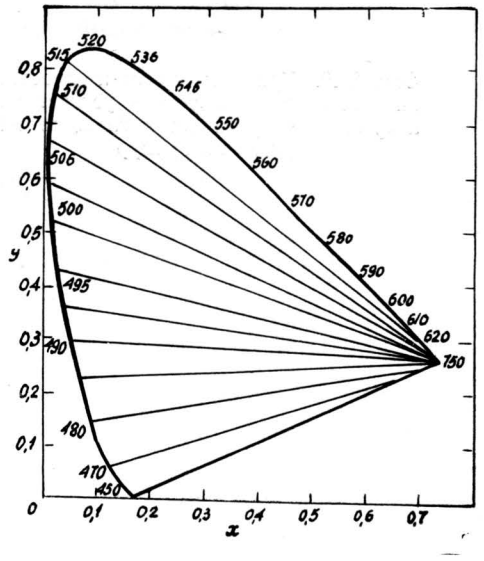
И тъй, ако окото съдържа три рода светочувствителен пигмент, то задачата се състои в определяне формата на спектъра на поглъщане за всеки от тях. Как да се направи това? Известно е, че има хора, които не различават цветовете; сред мъжете те наброяват 8%, а сред жените — 0,5%. Повечето хора с някакви отклонения в цветното зрение или въобще непритежаващи такова са чувствителни към изменения на цвета в различна степен, но за всички такива е характерно възприятие на трите основни цвята. Има обаче и такива хора (наричат ги *дихромати*), за които всеки цвят е съставен от *два* основни цвята. Естествено е да се предположи, че при тях липсва един от трите рода пигменти. Ако биха съществували три типа дихромати, за които правилата за смесване биха били различни, у едните би трябвало да липсва *червената* пигментация, у другите — *зелената*, а у третите — *синята*. По изменението на цветовите възприятия у тези три типа хора може да се определят трите търсени криви на поглъщане. И *наистина наблюдават* се три типа дихромати: двата от тях се срещат твърде често, а третият — крайно рядко; измерванията са дали възможност да се установят спектрите на поглъщане на пигмента.

На фиг. 35.6 е показан механизмът на смесване на цветовете у един тип хора, страдащи от неправилни възприятия за цвят. При тях на определен цвят съответствува линия на диаграмата, а не точка, т. е. всички цветове на линията за тях изглеждат еднакви. Ако е правилно предположението, че у такива хора липсва една от трите съставни части на цветовата информация, то всички линии, съответствуващи на определени, но различни цветове, трябва да се пресичат в една точка. Внимателното измерване на графиката показва, че линиите наистина се пресичат в една точка. Но тези линии очевидно са били построени от математиците и съвсем не съвпадат с реалните опитни данни. Наистина, ако вземем последните опитни данни, то ще се окаже, че точката на пресичането на фиг. 35.6 се намира не там, където тя трябва да бъде. Даденото на рисунката положение на линиите води до физически неправилен спектър на поглъщане: в редица области възниква и положително, и отрицателно поглъщане. Но от последните данни на Юстова се получава, че кривите на поглъщане навсякъде са положителни.

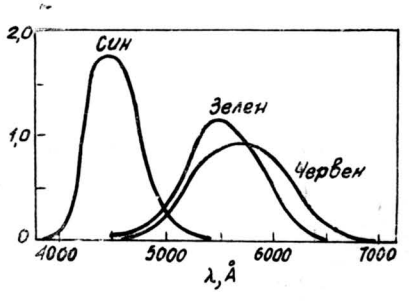
Фиг. 35.7 илюстрира друг дефект на цветовото зрение, присъщ на протанопите; линиите на рисунката се събират в точка, близо до червения край на граничната крива. Приблизително такова положение на пресечната точка се получава и по данните



Фиг. 35.6. Смесване на цветовете у дейтеранопите



Фиг. 35.7. Дефект в цветното зрение, присъщ на протанопите

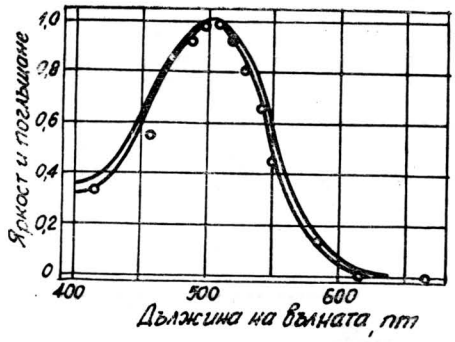


Фиг. 35.8. Криви на спектралната чувствителност за рецепторите, възприемащи трите основни цвята

на Юстова. Измерванията на цветовото възприятие у хора, страдащи от трите различни дефекта на цветовото зрение, окончателно са установили кривите на поглъщане за трите пигмента и те са приведени на фиг. 35.8. Окончателно ли? Може би. Остава да се изяснят още следните въпроси: вярна ли е всъщност теорията за трите пигмента, произлизат ли дефектите във възприятието за цвят поради недостиг на пигмент и освен това не е ясно до каква степен са правилни данните по смесване на цветовете в случай на дефекти в зрението. Редица изследователи са получили различни резултати. Тези въпроси засега се намират в стадий на изучаване.

6. Физико-химични свойства на цветното зрение

Какво може да се каже след сравняване на получените криви със свойствата на истинския очен пигмент? Пигментите, които се извличат от ретината, са главно от един вид, наречен зрителен пурпур. Неговите най-забележителни свойства се състоят в това, че той се среща в очите почти на всички гръбначни животни и неговата крива на поглъщане съвпада почти точно с кривата на чувствителността на окото.



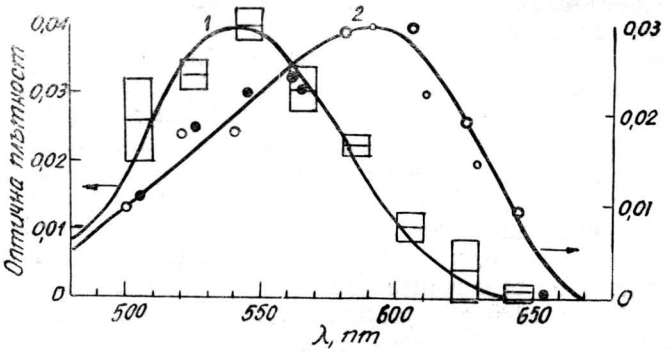
Фиг. 35.9. Крива на чувствителността на окото при гледане в условия на полумрак и крива на поглъщане на зрителния пурпур

На фиг. 35.9 са представени в един и същ мащаб кривата на поглъщане на зрителния пурпур и кривата на чувствителността на окото, адаптирано за гледане на тъмно. Очевидно ние получаваме възможност да виждаме на тъмно именно с помощта на пурпура. Зрителният пурпур представлява пигмент на пръчиците и няма никакво отношение към цветовото зрение. Този факт е бил установен през 1877 г. Но веднага трябва да кажем и това че цветовите пигменти на колбичките нито веднаж не са отделяни в епруветка. В 1958 г. е могло да се твърди още, че тях никой никога не ги е виждал. Но оттогава два от тях бяха наблюдавани от Раштон, който използувал много прост и красив метод.

Трудността вероятно се състои в това, че окото много по-малко е чувствително към ярката светлина, отколкото към светлина с малка интензивност и следователно за зрението е необходим много пурпур, но относително малко пигмент, чувствителен към цветовете. Идеята на Раштон се състои в това *да остави пигмента* в окото и там някак си да определи неговите свойства. Конкретно той прави следното. Има един такъв прибор — офталмоскоп, който дава възможност да се изпрати светлинен лъч в окото през неговата леща и да се фокусира отразеният от окото лъч. С помощта на този прибор може да се измери количеството отразена светлина. В резултат на това се получава коефициентът на отражение за светлината, *два пъти* преминала през пигмента (светлината се отразява от задните слоеве на очната ябълка и отново преминава през пигмента на колбичките). В природата рядко бива така устроено! Колбичките са устроени така хитро, че попадащата в тях светлина се отразява многократно и постепенно идва до малките чувствителни точки във върховете на колбичките. Попадайки право в чувствителната точка, светлината се отразява и излиза обратно, изминавайки значително разстояние в светлочувствителния пигмент. Освен това, ако лъчът се насочи към жълтото петно, където няма пръчици, подобно действие на зрителния пурпур може да се избегне. Цветът на ретината е наблюдаван много отдавна, той има оранжеворозов оттенък; но тук се примесва също цветът на кръвоносните съдове и цветът на задната стена на окото и т. н. Как да се разбере кога в офталмоскопа се вижда самият пигмент? *Отговор:* отначало трябва да се намери човек с дефект в цветното зрение, у който пигментите са по-малко и следователно върху когото е по-лесно да се проведе анализ. Второ, много пигменти, в частност зрителният пурпур, се обезцветяват на светло и губят своята интензивност; при осветление тяхната концентрация се изменя. Затова при измерване на спектъра на поглъщане на окото Раштон е осветявал цялото око с друг сноп, изменящ концентрацията на пигмента, и изуча-

вал изменението на спектъра, върху който вече не оказва влияние отражението от кръвоносните съдове, задната стена на окото и т. н. По такъв начин Раштон успява да получи кривата на поглъщане за чистия пигмент в окото на протаноп, показана на фиг. 35.10.

Втората крива на фиг. 35.10 е получена при изследване на нормално око по следния начин: след предварително изучаване на нормалното око и определяне на това, към какви лъчи е чувствителен даден пигмент, останалият пигмент се обезцветявал с по-



Фиг. 35.10. Спектър на поглъщане на цветовия пигмент на протаноп (квадратчета) и на нормално око (точки)
В опита лъчът е преминал през пигментния слой два пъти

мощта на червена светлина, към която първият пигмент е нечувствителен. Червената светлина не оказва никакво въздействие на окото на протанопа, а нормалното око, е чувствително към тази светлина; по такъв начин може да се получи кривата за липсващия пигмент. Формата на едната крива прекрасно се съгласува с кривата на Юстова за зеления пигмент, но другата крива, червената, малко е отместена. Затова може да се мисли, че ние се намираме на правилен път. А може би не. Последните данни от изследванията на дейтеранопите не говорят за отсъствие на някакъв определен пигмент.

Проявата на цветовете не се отнася към физиката на светлината като такава. Цветът е усещане, а усещането на различните цветове при различни условия е различно. Ако вземем например розова светлина, получена при събиране на снопове бяла и червена светлина (от червен и бял очевидно може да се получи само розов цвят), то в сравнение с нея бялата светлина може да изглежда небесносиня. Предмет, поставен на пътя на лъчите, хвърля две сенки — едната от тях се осветява само от бяла, а другата — само от червената светлина. За повечето хора „бялата“ сянка изглежда небесносиня, но ако увеличаваме областта на сянката, докато тя не е покрила още целия екран, ние неочаквано ще видим бял, а не небесносин цвят. Подобни ефекти могат да се получат и при смесване на червена, бяла и жълта светлина. Тази смес може да даде само оранжевожълт цвят с различни оттенъци. Смесвайки тези цветове в равни количества, ние ще получим само оранжев цвят. Независимо от това, разглеждайки сенките, върху които лъчите се наслагват в разни комбинации, можем да видим набор от много красиви цветове, липсващи в самата светлина (тъй като в нея има само оранжеви лъчи), но възникващи *в нашите усещания.* Ние ясно *виждаме* разнообразни цветове, които съвсем не приличат на „физическите“ цветове, присъствуващи в самите светлинни лъчи. Важно е да се помни, че ретината сама „осмисля“ светлината; тя, макар и несъзнателно, сравнява това, което вижда в една област, с онова, което вижда в друга област. А какво е известно относно това как се извършва този процес, ще бъде разказано в следващата глава.

36

Механизъм на зрението

1. Усещане на цвета
2. Физиология на зрението
3. Пръчици
4. Сложни очи на насекомите
5. Други видове очи
6. Нервни механизми на зрението

1. Усещане на цвета

Като обсъждаме механизма на зрението, необходимо е преди всичко да разберем, че ние обикновено виждаме не безпорядъчен набор цветни или светлинни петна (разбира се, ако не се намираме на изложба на някои съвременни художници). Когато ние гледаме нещо, то ние виждаме *човек* или *вещ;* с други думи, мозъкът интерпретира това, което виждаме като човек или вещ. Как той прави това, никой не знае, но той прави това, трябва да кажем, великолепно. Макар че ние се учим от опита да познаваме как изглежда човекът, има обаче някои по-елементарни свойства на зрението, които все пак включват съпоставянето на информацията от различните части на онова, което ние виждаме. За да разберем как се извършва интерпретацията на изображението в цяло, трябва да изучим първите стадии на съпоставяне на информацията от различните клетки на ретината. В тази глава ние ще концентрираме нашето внимание главно около тези страни на зрението, макар че пътьом ще отбележим и някои други близки въпроси.

Пример за такова съпоставяне на информация (макар и на елементарно ниво), постъпваща едновременно от няколко части на окото и осъществяваща се независимо от нашата воля, контрол и съзнание, може да служи небесносинята сянка от бялата светлина, когато екранът се осветява едновременно още с червена светлина. При това най-малкото се предполага, че на нас ни е известно, че основата на екрана е червена и макар в окото да попадат само „бели" лъчи, някъде обаче тези отделни късчета информация се събират заедно и ние виждаме небесносиня сянка. Колкото по-пълна и привична е картината, толкова по-голяма поправка прави окото. Действително Ланд е показал следното: ако ние вземем два диапозитива, поместим пред тях два филтъра, поглъщащи червена и бяла светлина в различни отношения, и смесваме различни интензивности на изглеждаща ни небесносиня и червена светлина, ще можем да получим доста правдиво изображение на реална сцена с натурални предмети. Освен червен и бял ние ще получим в този случай множество междинни цветове. Аналогични резултати могат да се получат, като се смесват червен и синьозелен цвят; оказва се, че ние получаваме почти пълен набор цветове. Впрочем, ако внимателно се вгледаме в тях, то ние ще видим, че те не са чак толкова хубави. Но даже и при тези условия е просто удивително как може толкова много да се получи само от червен и бял цвят. Колкото повече изображението напомня реалната картина, толкова сме по-способни да компенсираме обстоятелството, че цветът е фактически само розов.

Като друг пример може да послужи появяването на „цвят" върху черно-бял въртящ се диск, представен на фиг. 36.1. При въртене на диска черният и белият цвят за всеки радиус са напълно еднакви; това създава фон, върху който се виждат два „пръстена". Първият пръстен изглежда оцветен в един цвят, а вторият в друг[1]. Досега никой не е разбрал причината за появяване на окраска в случая, обаче ясно е, че най-правдоподобното обяснение се състои в това, че вероятно на някакво елементарно ниво в окото се извършва събиране на информацията.

Почти всички съвременни теории на цветното зрение се оказ-



Фиг. 36.1. При въртене на този диск един от пръстените изглежда цветен; при промяна на посоката на въртене оцветен изглежда вторият пръстен

[1] Тези цветове зависят от скоростта на въртене, яркостта на осветлението и до известна степен от това, кой гледа диска и доколко внимателно.

ват единодушни относно това, че опитите по смесване на цветовете говорят за съществуване в окото само на три вида пигменти и че усещането на цвета е свързано именно със спектъра на поглъщане на тези три пигмента. Обаче пълната чувствителност, свързана с характеристиките на поглъщане на тези пигменти, функциониращи едновременно, не е равна непременно на сумата от техните чувствителности. Всеки знае, че жълтият цвят *не ни изглежда* червеникавозелен и вероятно мнозина ще бъдат удивени от факта, че всеки възприеман от тях цвят по същество е смес от различни цветове, защото на тях им се струва, че чувството за цвят се предизвиква от някакъв друг механизъм, а не просто от смесване, подобно на музикалното съчетание на звуците в акорди, когато едновременно звучат, да речем, три ноти. Нали в акорда, ако внимателно слушаме, можем да различим отделни ноти, а в жълтия цвят, колкото и да се взираме, невъзможно е да видим червен и зелен цвят отделно.

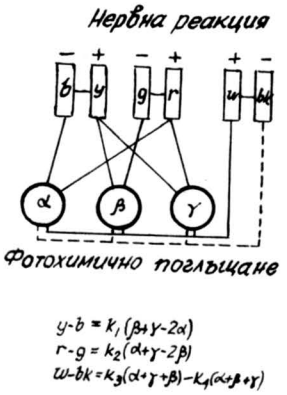
Още първите теории на зрението са твърдели, че има три вида пигменти и съответно три вида колбички, всяка една от които съдържа даден вид пигмент; че от всяка колбичка към мозъка водят нерви, така че в мозъка се пренасят три вида информация и там нещо става. Разбира се, това е много несъвършена теория, тъй като тя не дава възможност да се разбере що за информация се пренася по зрителните нерви в мозъка; тя даже не се е опитвала да решава тази проблема. Ние трябва да знаем по-фундаменталния въпрос: не е ли все едно *къде* става събиране на информацията? Доколко е необходимо тази информация да се предава по зрителните нерви направо в мозъка и не може ли някакъв първоначален анализ да се извършва от самата ретина? Ние знаем, че ретината е невероятно сложна и притежава множество вътрешни връзки (вж. фиг. 35.2); някакъв анализ тя е способна да изпълни.

Работата е там, че учените, които се занимават с анатомията и развитието на окото, са показали, че ретината всъщност не е нищо друго освен част на самия мозък; при развитието на зародиша част от мозъка се изнася напред, от тази част израстват назад дълги влакна, които я свързват с останалия мозък. По своята организация ретината много прилича на мозък. По този повод някой прекрасно е казал, че така „мозъкът измислил как да надникне в света". Очите — това са късчета мозък, посредством които той, така да се каже, „влиза в допир със светлината", с външния свят. Така че няма нищо необикновено в това, ако някакъв анализ на цвета се извършва още в самата ретина.

Това ни предоставя твърде интересна възможност. Нали никакъв друг орган на чувствата не прави толкова много, ако можем така да се изразим, предварителни пресмятания, както окото, преди сигналът да е попаднал на нерва, където той може да бъде измерен. Пресмятанията за всичките останали органи на чувствата обикновено се провеждат от самия мозък, а поради огромното количество вътрешни връзки в мозъка много е трудно да се достигне до това специфично място и да се проведат някакви измервания. В окото пресмятанията се извършват в три слоя клетки, след това резултатът от тях се предава по зрителния нерв в мозъка. Така че тука ние очевидно за първи път получаваме възможност да наблюдаваме физиологически как работи първият мозъчен слой може би в началния стадий.

Това е двойно по-интересно не само за разбиране на зрението, но и за всички проблеми на физиологията.

Този факт, че съществуват три вида пигменти, съвсем не означава, че трябва да има също така три вида усещания. Съществува теория на цветното зрение, построена на съвсем противоположна цветова схема (фиг. 36.2). Съгласно с тази схема някое от нервните влакна пренася много импулси, ако ние виждаме жълт цвят, и по-малко, отколкото обикновено, ако виждаме небесносин цвят. Друго нервно влакно точно по същия начин пренася информация за зеления и червения цвят, а трето — за белия и черния. С



Фиг. 36.2. Мерни връзки, съгласно теорията на цветното зрение

в — небесно син, *у* — жълт, *д* — зелен, *ч* — червен, *w* — бял, *вк* — черен

други думи, в тази теория вече започват да се правят догадки за системата на връзки и метода на анализ.

Въпросите, които ние се опитваме да решим с помощта на догадки относно първоначалния анализ, са следните: проблемата за привидните цветове на розов фон; какво става, когато окото привиква към различните цветове; въпросът за така наречените психологически явления. Под този термин ние разбираме например, че белият цвят не се „усеща“ от нас като смес от червен, жълт и син и такава теория е възникнала затова, защото, както твърдят психолозите, съществуват *четири* привидно чисти цвята: „Съществуват четири мощни възбудителя, предизвикващи съответно простите небесносин, жълт, зелен и червен оттенъци. За разлика от такива цветове като охра, пурпур, фуксин и други различими цветове тези прости оттенъци са несмесваеми в този смисъл, че нито един от тях не взема участие в образуването на другите, в частност небесносиният цвят не може да се нарече жълтеникав, червеникав, зеленикав и т. н.; психологически тези цветове представляват първични оттенъци.“

В това се състои така наричаният психологически факт. За да се изясни откъде се е взел този факт, необходимо е много старателно да се прегледа цялата литература. Всичко, което ние намираме в съвременната литература по този въпрос, повтаря същите твърдения или твърденията на един от немските психолози, за който авторитет е Леонардо да Винчи, добре известният на всички велик художник. Този психолог говори: „Леонардо е считал, че съществуват пет цвята.“ По-нататъшните търсения ни довеждат до още по-древни книги. В тези книги се говори приблизително следното: „Виолетовият цвят — това е червеникавосин, оранжевият — това е червеникавожълт, но може ли червеният да се разглежда като виолетовооранжев? Няма ли да бъдат червеният и жълтият по-основни цветове, отколкото виолетовият и оранжевият? На въпроса, какви цветове считат основни, повечето от хората ще назоват червения, жълтия и синия, а някои ще добавят към тези три още и четвърти — зеления. Психолозите са свикнали да приемат тези четири цвята за основни.“

И тъй от гледна точка на психолозите, щом всички говорят, че има три цвята, а някои твърдят, че те са четири и искат да бъдат четири, нека те да бъдат четири. Това илюстрира трудностите, съпътстващи психологическите изследвания. Ясно е, че ние имаме такова чувство, но много е трудно да узнаем за него нещо повече.

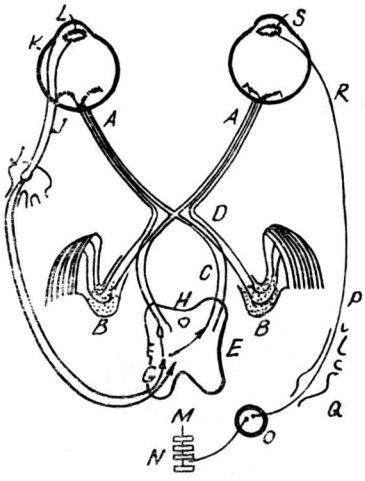
Може да се върви по друг път — физиологически — и експериментално да се установи какво всъщност става в мозъка, в окото, в ретината или на друго някое място и може би ще се удаде да се установи, че някои комбинации импулси от различни клетки се предават по определени нервни влакна. За съжаление първичните пигменти не са съсредоточени всеки в отделна клетка: срещат се клетки, в които се съдържа смес от различни пигменти, клетки с червени и зелени пигменти или с трите вида едновременно (информацията от тези три пигмента ще бъде „бяла“ информация) и т. н. Има много начини да се свърже тази система и ние трябва да изясним кой от тях е предпочела природата. В същото време иска ни се да се надяваме, че като разберем физиологическите връзки, ние, макар и малко, ще се придвижим напред по пътя, който води до разбиране на някои психологически аспекти. И тъй напред по този път.

2. Физиология на зрението

Ние започнахме да говорим не само за цветното зрение, но за зрението въобще, само за да напомним за вътрешните връзки в ретината, показани на фиг. 35.2. Ретината наистина напомня повърхността на мозъка. Макар истинската картина под микроскоп да изглежда малко по-сложна, отколкото тази схематична рисунка, независимо от това при внимателен анализ могат да се ви-

дят всички тези вътрешни връзки. Работата не е в това, че една част от ретината е свързана с другите части и че информацията, предадена по дългите аксони[1], образуващи зрителния нерв, представлява комбинирана информация от много клетки. Работата е в това, че съществуват три слоя клетки, чиито функции са следните: първо, това са фоторецептори, на които непосредствено действува светлината, след това междинни клетки, които приемат информацията от един или няколко фоторецептора и отново я предават на няколко клетки от третия слой, а след това в мозъка. Между клетките от различните слоеве съществуват разнообразни кръстосващи се връзки.

Да се върнем към някои аспекти на строежа и функциите на окото (вж. фиг. 35.1). Светлината се фокусира главно от роговицата благодарение на това, че нейната повърхнина е изкривена и тя „закривява" светлинните лъчи. Ето защо под водата ние не виждаме така добре — показателите на пречупване на роговицата (1,37) и на водата (1,33) се отличават недостатъчно силно. Зад роговицата се намира практически водна среда с показател на пречупване 1,33, а по-нататък — лещата, устройството на която е много интересно: тя се състои от редица слоеве като луковица, с тази само разлика, че тези слоеве са прозрачни и техният показател на пречупване се изменя от 1,40 в средата до 1,38 по краищата. (Не би било лошо да се изготви леща с необходимия показател на пречупване на всяко място; тогава не би било нужно тя да се изкривява както лещата с постоянен показател на пречупване.) Нещо повече, формата на роговицата съвсем не е сферична. Сферичната леща притежава известна сферична аберация. Външната част на роговицата е „по-плоска" от сфера, при това точно толкова, че нейната сферична аберация да се оказва по-малка от аберацията на сферичната леща, която ние бихме поставили вместо нея. Посредством оптичната система роговица—леща светлината се фокусира върху ретината. Ако ние гледаме близко разположени или отдалечени предмети, то лещата се изкривява или изправя, като по този начин изменя своето фокусно разстояние и се настройва за гледане на различна далечина. За регулиране на общото количество светлина в окото има ирис, който определя „цвета" на очите — едни кафяви, други сини и пр. При увеличаване на количеството светлина ирисът се свива и зеницата става по-малка, при намаляване — ирисът се отпуска и зеницата се разширява.



Фиг. 36.3. Нервни връзки, управляващи механичните движения на окото

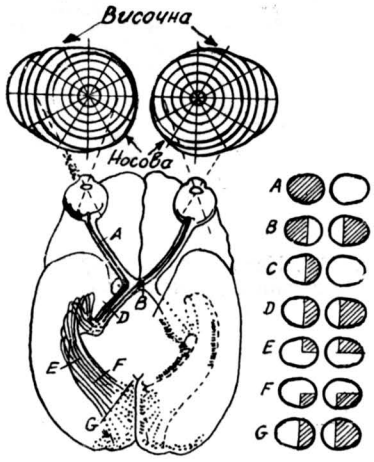
Да разгледаме сега представената на фиг. 36.3 схема на нервния механизъм, регулиращ акомодацията на лещата, движението на окото (способността на окото да завърта очната ябълка в очната кухина) и диаметъра на зеницата. Основната част от цялата информация попада в зрителния нерв *A*, който се разделя на два снопа (за тях ние ще говорим по-нататък още) и по него отива в мозъка. Обаче има няколко влакна (именно те сега ни интересуват), които не водят направо към зрителната кора, където ние „виждаме" изображението, а вместо това се отправят към средния мозък *H*. Това са точно онези влакна, по които се предава информация за средната интензивност на светлината и команди за необходимия диаметър на зеницата или, ако изображението изглежда неясно, за кривината на лещата. Ако изображението е раздвоено, то по тези влакна се изпраща команда за регулиране на очите за бинокулярно гледане. Във всеки случай те преминават през центъра на мозъка и се връщат назад в окото. Нека с буквата *K* да означим мускулите, които управляват лещата при акомодация, а с буквата *L* — мускулите-мигачи. Ирисът има две мускулни системи: 1) мускул, свиващ зеницата (циркулярен мускул) *L*; той работи много бързо и е свързан непосредствено с мозъка с къс аксон; 2) мускул, разширяващ зеницата (радиален мускул), който действува тогава, когато осветлението на предмета намалява и циркулярният мускул се от-

[1] Израстък на нервна клетка (неврит), който провежда нервния импулс от тялото на клетката към периферията (бел. прев.)

пуска. Както и в много други части на тялото, тука също двойката мускули работи в противоположни посоки; почти във всеки подобен случай управляващата ги нервна система е „настроена" толкова точно, че когато към единия от мускулите се изпраща команда да се свие, към другия автоматически се изпраща команда да се разслаби. Обаче ирисът представлява любопитно изключение: ние току-що описахме нервите, които заставят обвивката да се свива, но досега никой точно не знае откъде излизат нервите, заставящи я да се *разпуска*. Те отиват някъде надолу, в гръбначния мозък, в областта на дробовете, от гръбначния мозък нагоре през шийния нервен възел, след това отново назад в главата и към другия край на ириса. Сигналът фактически преминава през съвсем друга нервна система, не през централната, а през симпатичната. Много странно за какво е нужно всичко това.

В окото, както ние подчертавахме, има още една странност, светочувствителните клетки са разположени в ретината в дълбочина така, че преди да попадне в рецепторите, светлината трябва да премине през няколко слоеве други клетки — ретината сякаш е обърната наопаки. Въобще някои неща в устройството на окото ни изглежат великолепни, а други — просто глупави.

На фиг. 36.4 е показана връзката на окото с частта на мозъка, която най-непосредствено взема участие в процеса на зрението.



Фиг. 36.4. Нервна връзка на окото със зрителната кора

Зрителните нервни влакна водят към някаква област, лежаща непосредствено зад участъка D, който се нарича *латерално коленчато тяло*, а след това в участъка от мозъка, наричан *зрителна кора*. Трябва да се помни, че от всяко око някои влакна отиват към другата половина на мозъка, така че представената картина не е пълна. Зрителните нерви от лявата част на дясното око преминават през зрителния нервен кръстопът *B*, докато нервите от лявата част на лявото око го заобикалят отстрани. По такъв начин лявата част на мозъка получава цялата информация, идваща от левите страни на двете очи, т. е. от дясната страна на полезрението, докато дясната страна на мозъка „вижда" лявата част на полезрението. Ето по такъв начин става събирането на информацията от двете очи и се определя разстоянието до предмета. Такава е системата на бинокулярното зрение.

Много са интересни връзките между ретината и зрителната кора. Ако ние по някакъв начин възбудим или разрушим някоя област в ретината, цялото влакно умира, затова ние можем да узнаем къде води то и с какво е свързано. Най-интересното е, че между ретината и зрителната кора съществува еднозначно съответствие: на всяко петно от ретината съответствува петно в зрителната кора и две едно до друго разположени петна на ретината се оказват едно до друго и в зрителната кора. Така че зрителната кора освен всичко останало отразява и пространственото разположение на пръчиците и колбичките, макар и твърде изкривено. Предметите, намиращи се в центъра на полезрението и заемащи много малко място в ретината, в зрителната кора се разпространяват върху твърде много клетки. Очевидно много е важно първоначално разположените близко предмети да се окажат близко разположени и в зрителната кора. Обаче най-интересното тука е следното. Участъкът, който сякаш е най-важен за близко разположените предмети, се намира точно в средата на полезрението. Наистина невероятно, но правата вертикална линия в средата на полезрението има това свойство, че информацията, получена от всички точки, разположени надясно от нея, постъпва в лявото полукълбо на мозъка, а информацията от точките, разположени отляво—в дясното полукълбо. Но точно по средата преминава границата, така че предметите, които са много близки и са разположени по средата от двете страни на границата, в мозъка се оказват много далечни. Информацията все пак преминава по някакви други канали от едната половина на мозъка в другата и това е много странно.

Много е интересно как всичко това се свързва заедно. Въпросът за това, какво вече е свързано и какво още трябва да се

научим да свързваме е доста стар. Преди са мислили, че вероятно никакви вродени връзки въобще няма; има само някакви груби проекти и едва после от опита още в детство се постига това, че когато предметите се намират „ето там“, те пораждат някакво усещане. (Лекарите постоянно уверено заявяват какво чувстуват малките деца, но откъде те *самите* знаят какво чувствува едногодишно дете?) Може би едногодишното дете, виждайки предмета „ето там“, изпитва някакво чувство и се учи да протяга ръка именно „там“, защото когато то протегне ръка „насам“, то не може да хване предмета. Но вероятно този подход все пак е неверен, тъй като, както ние вече видяхме в много случаи, такива специфични междинни връзки съществуват още по рождение.

По-показателни в това отношение са забележителните опити със саламандрите. (За щастие у саламандрата има пряка кръстосана връзка без зрителен нервен кръстопът, тъй като нейните очи са разположени отстрани на главата и зрителните полета на двете очи не се покриват. Затова саламандрите нямат нужда от бинокулярно гледане.) Тези опити се състоят в следното. Ние можем да прережем зрителния нерв на саламандрата; той обаче отново започва да расте от окото. Така от само себе си ще се възстановяват хиляди и хиляди клетки. И макар че влакната на зрителните нерви няма да лежат едно до друго (те сега напомнят дебел, небрежно изготвен телефонен кабел, всичките жички на който са омотани и забъркани), достигайки обаче до мозъка, те отново се разполагат в нужния ред. Когато се пререже зрителният нерв на саламандрата, възниква въпрос: възстановява ли се той отново? Да, възстановява се. Такъв е забележителният отговор. Ако зрителният нерв на саламандрата се пререже, той отново израства и тя ще вижда не по-лошо, отколкото преди. Обаче, ако ние прережем зрителния нерв и *завъртим окото*, а след това го оставим в покой, нервите отново ще израстат и саламандрата ще прогледа, но сега тя ще прави ужасни грешки: виждайки муха горе, саламандрата скача надолу и тя вече никога не ще може да се „научи“ да действува правилно. Така че по някакъв непостижим начин хиляди и хиляди клетки на нервните влакна намират своето истинско място в мозъка.

Проблемата за връзките в мозъка, т. е. в каква степен всичко там е свързано и в каква не, — това е най-важната проблема в теорията на развитието на живите същества. Отговорът е още неизвестен, но той се търси интензивно.

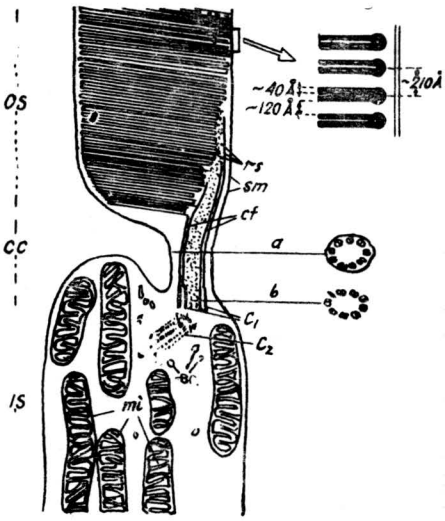
Аналогичен опит със златната рибка води до същия резултат: на това място, където ние прерязваме нерва, се образува страшен възел, подобен на голям белег или тумор и независимо от всичко това влакната отново „прорастват“ в мозъка към своето истинско място. За да може това да стане, влакната, които растат по стария канал на зрителния нерв, са „длъжни да решават“ в каква посока да растат. Но как те могат да правят това? Възможно е тука да работи някакъв химичен механизъм, който действува по различен начин на отделните влакна. Да си помислим само какво огромно е числото на растящите влакна и всяко от тях някак си по своему се отличава от съседните; реагирайки на някакъв химичен механизъм, то прави това достатъчно еднозначно, за да намери своето истинско място сред връзките в мозъка. Това е поразително, фантастично. Това е едно от най-великите явления, открити от биолозите в последно време, и то несъмнено е свързано с много стари нерешени проблеми на растежа, организацията и развитието на организма, особено на зародиша.

Друго интересно явление е свързано с движението на окото. За да може двете изображения да съвпаднат, окото трябва да притежава способността да се движи. Тези движения могат да бъдат най-различни; когато ние следим нещо, двете очи трябва да се завъртат едновременно в една посока — наляво или надясно; когато ние следим отдалечаващ се или приближаващ се предмет, очите трябва да се движат в противоположни посоки.

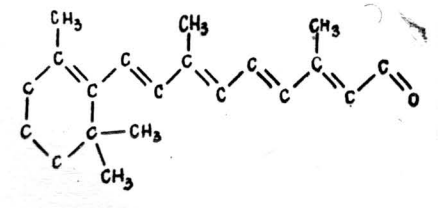
Нервите, идващи от мозъка към очните мускули, са точно приспособени за тези цели. Едни нерви заставят външните мускули например на лявото око и вътрешните мускули на дясното да се свиват, а противоположните мускули — да се отпускат, така че двете очи се движат в една посока. Но има и други центрове, възбуждането на които заставя очите да се движат едно срещу друго. Всяко око може да бъде завъртяно към външното ъгълче, ако второто при това се движи към носа, *но съвсем невъзможно е* съзнателно или несъзнателно едновременно да се завъртят очите в *различни посоки*, и то не затова, защото няма мускули, способни да направят това, а защото няма начин да се изпратят такива сигнали, че двете очи да се завъртят в различни посоки. (Разбира се, ако не е станало никакво нарушение, например не е прерязан нервът.) И макар че мускулите на едното око напълно могат да го завъртат на всички страни, даже йогите с цената на никакви усилия на волята не могат да завъртят двете си очи в различни посоки. Просто, защото няма никаква възможност да се направи това. До известна степен ние вече сме сковани по рождение. Това е много важен пункт, тъй като повечето предишни книги по анатомия и психология не са признавали и не са забелязвали този факт, че ние до известна степен сме сковани по рождение; те твърдят, че е възможно да се научим на всичко.

3. Пръчици

Да видим сега по-подробно какво става в пръчиците на ретината. На фиг. 36.5 е показана микрофотография на средата на пръчица (краят ѝ излиза нагоре извън границите на снимката). Отдясно се виждат няколко слоя плоски структури, съдържащи родопсин (зрителен пурпур) — оцветяващо вещество или пигмент, който собствено и обуславя функциите на пръчиците. Родопсинът е съставен от големи молекули белтък, съдържащ специална група, наречена ретинен, която може да бъде отцепена от белтъка, което несъмнено е и главната причина за поглъщане на светлината. За нас все още не е ясно защо тези структури са плоски, но твърде възможно е, че това е така, за да могат молекулите на родопсина да лежат успоредно една на друга. Химията на това явление сега е известна доста добре, но освен това възможно е тука да взема участие и физиката. Може да се каже, че всички молекули се разполагат в своеобразен ред и когато една от тях се възбуди, то излетелият при това електрон (или просто вълната на възбуждането) идва до някакво място в края на структурата и поражда сигнал или нещо аналогично. Това е много важна област; тя е още съвсем неразработена и представлява поле за дейност, която могат да развиват биохимията и физиката на твърдото тяло или нещо в този дух.



Фиг. 36.5. Електронна микрофотография на пръчица



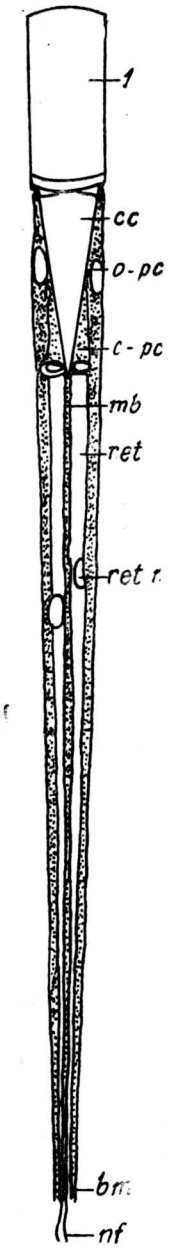
Фиг. 36.6. Строеж на ретинен

Подобни слоисти структури са намерени и на други места, където светлината е също важна, например в хлоропластите на растенията, където под действие на светлината става фотосинтезата. Под голямо увеличение ние откриваме същите слоеве, но разбира се, вместо ретинен ние намираме хлорофил. Химичната форма на ретинена е показана на фиг. 36.6. Неговата странична клонка съдържа серия алтернираци двойни връзки, характерни почти за всички силно поглъщащи органични вещества, подобни на хлорофила, хемоглобина и др. Човешкият организъм не може да изготви тези вещества в своите собствени клетки и той ги набавя чрез храната във вид на специално вещество, което в течен вид прилича на ретинен с изключение на водородната връзка в десния край. Това вещество се нарича витамин А. Ако той е недостатъчен в храната, запасът от ретинен в организма не се попълва и се развива това, което ние наричаме *кокоша слепота*, т. е. количеството пигмент става недостатъчно, за да може да се гледа в полумрак. Известно е също защо такава серия от двойни връзки много силно поглъща светлината. Аз ще ви разкажа малко за това. Алтернираща серия двойни връзки се нарича спрегната

двойна връзка. Двойната връзка означава, че там има допълнителен електрон, който лесно може да се придвижи наляво или надясно. Когато светлината попада в такава молекула, електронът на всяка двойна връзка се отмества с една стъпка. В резултат на това електроните по цялата верига се отместват подобно на подредените една зад друга топки на сметало при удар и макар че всеки един от тях изминава много малко разстояние (ние приемаме, че електроните в отделните атоми могат да изминават само много малки разстояния), в края на краищата се получава такъв ефект, какъвто ако един електрон е преминал от единия край на веригата на другия. Това е същото, както ако един електрон би преминал цялото разстояние назад и напред, а в такъв случай става значително по-силно поглъщане под действие на електричното поле, отколкото, ако ние бихме придвижили електрона само на разстояние в пределите на един атом. А тъй като съвсем не е трудно да се движат електроните назад и напред, то ретиненът поглъща светлината много силно; такъв е механизмът, в основата на който лежи физиката и химията.

4. Фацетни очи на насекомите

Да се върнем сега към биологията. Човешкото око съвсем не е единствен тип око. Макар очите на всички почти гръбначни да приличат на човешките, у низшите животни срещаме множество други типове очи, които ние нямаме време да обсъждаме. Но сред безгръбначните (например насекомите) се срещат и високоразвити типове очи; това са *фацетни очи.* (Повечето насекоми освен фацетните очи имат още прости очи или очички.) Най-внимателно е изучавано зрението на пчелата. Да се изучат особеностите на зрението на пчелите е лесно, тъй като, както е известно, те се привличат от меда и ние можем да поставяме опити, намазвайки с мед например синя или червена хартия и наблюдавайки коя от тях ще привлече пчелата. По този метод са били открити много интересни особености в зрението на пчелата. Преди всичко, опитвайки се да определят доколко ясно пчелата вижда разликата между две късчета „бяла" хартия, някои изследователи са установили, че тя вижда хартията не особено ясно, а други, напротив, че тя прави това дяволски добре. Даже ако са вземали две почти точно еднакви късчета хартия, пчелата все пак ги различавала. Единият къс хартия например се боядисвал с цинкова боя, а другият — с оловна и макар че двата къса изглеждали съвсем еднакви, пчелата ги различавала, тъй като те различно отразяват ултравиолетовата светлина. По такъв начин било установено, че окото на пчелата е чувствително към по-късите дължини на вълните, отколкото човешкото око. Нашите очи виждат в диапазона от 7000 до 4000 Å, от червения до виолетовия, а пчелите могат да виждат до 3000Å, т. е. в ултравиолетовата област. А това поражда редица много интересни ефекти. Преди всичко пчелите различават много цветове, които за нас изглеждат абсолютно еднакви. В това няма нищо удивително; нали цветята цъвтят съвсем не затова, за да радват нашия двор. Те служат като примамка за пчелите, своеобразен сигнал за това, че при тях има мед. Всички знаят, че има много „бели" цветя. Цвете, което *ни изглежда* бяло, вероятно остава незабелязано от пчелите, тъй като е изяснено, че различните бели цветя не отразяват *ултравиолетовите* лъчи така пълно, както това става при *истински* белите цветя. От белия предмет се отразява не всичката падаща на него светлина, ултравиолетовите лъчи се губят, а това е същото както за нас загубата на небесносиния цвят, т. е. получаването на жълт цвят. И тъй всички бели цветя изглеждат цветни за пчелите. Обаче на нас ни е известно също, че пчелите не виждат червения цвят. Излиза, че червените цветя изглеждат черни за пчелите. Нищо подобно. Внимателното изучаване на червените цветя показва, че първо даже нашите очи са способни да различат в огромно количество червени цветя лек синкав оттенък, причинен от



Фиг. 36.7. Строеж на фасетка (оматидий)

допълнителното отражение от повечето от тях на синия цвят, който се намира във видимата за пчелите област. Освен това опитите също показват, че цветята се отличават по своята способност да отразяват ултравиолета от различните части на венчелистчетата и т. н. И тъй, ако ние бихме могли да видим цветята такива, каквито ги виждат пчелите, бихме ги намерили за още по-прекрасни и разнообразни.

Впрочем било е забелязано, че има такива червени цветя, които не отразяват небесносините и ултравиолетовите лъчи, затова те трябва да изглеждат *черни* за пчелите. Това обяснява до известна степен недоумението на онези, които се вълнуват много от този въпрос: нали черният цвят не изглежда привлекателен, пък и трудно е той да се отличи от тъмната гъста сянка. Така се и получава всъщност: пчелите не *кацат* на тези цветя. Но затова именно те се харесват на миниатюрните колибри; оказва се, тези птички виждат отлично червения цвят.

Има още една интересна страна на въпроса за зрението на пчелата. Поглеждайки към част от небето, без да вижда слънцето, пчелата вероятно все пак може да определи къде се намира слънцето. За нас това не е така просто. Погледнете небето през прозореца. Вие виждате, че то е синьо. А в коя посока се намира слънцето в дадения момент? Пчелата може да определи това, понеже е много чувствителна към посоката на *поляризираната* светлина, а отразената от небето светлина е поляризирана.[1] И досега спорят как тя прави това: дали затова, че разсейването на светлината е различно при различни обстоятелства, или затова, че очите на пчелата са чувствителни непосредствено към посоката на поляризираната светлина. В най-последно време са получени данни, говорещи за непосредствена чувствителност на очите на пчелата.

Казват също, че пчелата е способна да различава отделни светлинни импулси с честота 200 импулса в 1 s, докато ние различаваме само 20 светвания в секунда. В кошера пчелите се движат много бързо; те мърдат с крачка; махат с крилца, но нашите очи трудно успяват да проследят всички тези движения. Но ако ние бихме могли да различаваме по-бързи импулси, тогава би било по-друго. Вероятно за пчелата е много важно нейните очи да имат толкова бърза реакция.

Сега да поговорим за това, каква собствено е остротата на зрението на пчелата. Окото на пчелата е сложно; то се състои от огромен брой особени очички, наречени оматидии (фасетки), които са разположени на почти сферични повърхности от двете страни на главата на насекомото. На фиг. 36.7 е показан оматидий. На върха му има прозрачна област, своего рода „леща“, но в действителност това повече напомня филтър, заставящ светлината да се разпространява по дължината на тясно влакно, където вероятно и става нейното поглъщане. До другия край на оматидия излиза нервно влакно. Централното нервно влакно има отстрани по шест клетки, от които фактически води начало излизащото от оматидия нервно влакно. За нашите цели това описание е напълно достатъчно; главното е това, че клетката има конична форма и множество такива клетки, прилепени една към друга, образуват повърхността на окото на пчелата.

Да видим сега каква е разделителната способност на такова око. Прекарваме линия (фиг. 36.8), схематически представляваща оматидий, на повърхността на окото, което ще считаме за сфера с радиус r. Ние сега ще се опитаме да *пресметнем* ширината на всеки оматидий, за което ще напрегнем малко нашата съобра-

[1] Човешкото око също е леко чувствително към посоката на поляризираната светлина и въобще е *възможно* да се научим да познаваме посоката към слънцето! Тук се използува явлението, наричано хайдингерово гребенче (Haidinger's brush). Това е едно бледожълтеникаво петно в центъра на полезрението с форма, напомняща пясъчен часовник; то се вижда през поляризационни очила на фона на безграничното безцветно пространство. Впрочем ние можем да го видим и без поляризационни очила на синьото небе, ако си въртим главата наляво-надясно около зрителната ос.

зителност и ще предположим, че природата също толкова съобразителна, колкото и ние. Ако оматидият е много голям, то разделителната способност не може да бъде голяма. С други думи, един оматидий получава информация за една посока в пространството, съседният — за друга и т. н., а предметите, попадащи между тези посоки, пчелата няма да може да види достатъчно добре. По такъв начин неопределеността в остротата на зрението на окото несъмнено е свързана с ъгловия размер на края на оматидия относно центъра на кривината на окото. (В действителност очите са разположени само на повърхността на главата.) Но ъгълът от един оматидий до следващия е равен, разбира се, на диаметъра на оматидия, делен на радиуса на кривината на очната повърхнина:

$$\Delta\theta_g = \frac{\delta}{r} \cdot \tag{36.1}$$

И тъй можем да кажем: „Колкото по-малка е стойността на δ, толкова по-голяма ще се окаже остротата на зрението. Но защо тогава природата не е дала на пчелата много, много малки оматидии?“ В отговор може да се каже следното: ние вече достатъчно добре знаем физика, за да разберем, че при опит да се пропусне светлина през тясно процепче поради дифракцията е невъзможно да се види достатъчно добре в дадената посока, тъй като там ще попада светлина от различни посоки, т. е. от всички посоки, намиращи се във вътрешността на ъгъла $\Delta\theta_d$, така че

$$\Delta\theta_d = \frac{\lambda}{\delta} \cdot \tag{36.2}$$

Сега е ясно, че ако вземем δ твърде малко, всеки оматидий вследствие на дифракцията ще вижда не само в една посока. Но ако стойността на δ е твърде голяма, тогава, макар че всеки оматидий ще вижда в една посока, те ще бъдат много малко, за да се получи достатъчно подробна картина. По такъв начин се вижда, че ние трябва да подберем такова разстояние, че пълният ефект на тези два механизма да бъде минимален. Ако съберем двата израза и намерим мястото, където сумата има минимум, получаваме

$$\frac{d(\Delta\theta_g + \Delta\theta_d)}{d\delta} = 0 = \frac{1}{r} - \frac{\lambda}{\delta^2}, \tag{36.3}$$

което дава разстоянието

$$\delta = \sqrt{\lambda r} \cdot \tag{36.4}$$

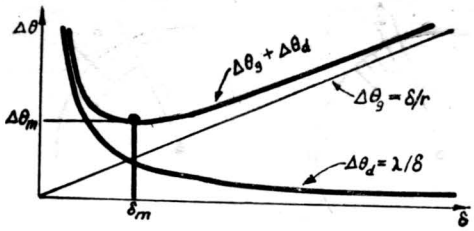
Ако ние, за да получим оценка, считаме, че r приблизително е равно на 3 mm, а дължината на вълната на светлината, която пчелата вижда, приемем равна на 4000 Å, то след умножаване и извличане на квадратен корен намираме

$$\delta = (3.10^{-3} 4.10^{-7})^{1/2}\,\mathrm{m} = 3{,}5\ 10^{-5}\mathrm{m} = 35\mu\mathrm{m}. \tag{36.5}$$

В книгите се посочва диаметър, равен на 30 μm. Както виждате, съгласието е доста добро. Ясно е, че именно този механизъм определя размера на окото на пчелата и той е напълно достъпен за нашето разбиране. Заместващи сега полученото число в (36.1), лесно определяме каква е ъгловата разделителна способност на окото на пчелата. Тя се оказва много лоша в сравнение с тази на човешкото око. Ние сме способни да виждаме предмети, привидният размер на които е тридесет пъти по малък от предметите, които вижда пчелата. Така че в сравнение с човека изображението у пчелата се получава доста размито, нефокусирано. Все пак така си е; тя просто на повече не може и да разчита. Естествено възниква въпрос: а защо пчелата да няма същото око като нашето, с леща и с всичко останало? За това пречат няколко твърде интересни причини. Преди всичко пчелата е много малка; ако нейното око би било подобно на нашето, но съответно умалено, размерът на зеницата би се оказал от порядъка на 30 μm и дифракцията би била толкова силна, че пчелата, все едно, не би



Фиг. 36.8. Схема на разпределението на фасетките по повърхността на окото на пчелата



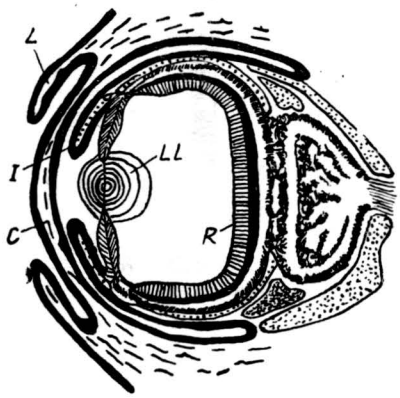
Фиг. 36.9. Оптималният размер на фасетката

виждала по-добре. Освен това, ако окото се направи голямо колкото главата на пчелата, то би заело цялата глава. Нали ценността на фацетното око се състои в това, че то практически не заема място — просто тънък слой на повърхността на главата на пчелата. Така че, преди да започнете да давате съвети на пчелата, не забравяйте, че тя си има свои собствени проблеми.

5. Други видове очи

Освен пчелите много други животни могат да различават цветовете. Риби, пеперуди, птици и влечуги също могат да различават цветовете. Напротив, много млекопитаещи, както се предполага, не могат. Висшите бозайници обаче могат. Птиците несъмнено различават цветовете, за това говори тяхната окраска. Какъв би бил смисълът самците така бляскаво да се премѐнят, ако самките не биха могли да видят това. С други думи казано, привличащото оперение, което се среща у птиците, е резултат на това, че самките са способни да различават цветовете. Така че следващия път, когато вие видите паун и започнете да се удивлявате от тази блестяща изложба на ярки багри, да се възхищавате от изтънчено подбраните цветове и да онемявате пред удивителното чувство за естетика у птиците, не забравяйте, че вашият възторг се отнася собствено към самката на пауна, към нейната наблюдателност и тънък вкус: само това наистина е породило такова удивително зрелище.

Повечето безгръбначни имат или недоразвити, или фацетни очи, а очите на всички гръбначни животни приличат на човешкото око. Обаче има едно изключение. Разглеждайки висшите животни, ние обикновено възкликваме: „Разбира се, че е така!“, но ако застанем на по-малко предвзета гледна точка и се ограничим само с безгръбначните, за да изключим себе си, и попитаме зоолозите кое от безгръбначните животни те считат за най-развито, то повечето от тях ще отговорят в един глас — октоподът. Твърде интересно е, че освен развития мозък неговите реакции и всичко останало, които са изключително добри за безгръбначно, октоподът има високоразвито око и то съвсем не прилича на които и да било други очи. Това не е фацетно око и не е светочувствително петно; в него има и роговица, и клепач, има и ирис, и две кухини, запълнени с течност, и леща, и ретина (фиг. 36.10). Съвсем както у гръбначните. Това е забележителен пример за съвпадение в еволюцията, когато природата два пъти е дошла до едно и също решение на една проблема, но с едно малко подобрение. Ретината на октопода, както се оказва, представлява също част от мозъка и се образува при ембриоталното развитие както у гръбначните животни, но има едно много интересно и поразително отличие: чувствителните към светлината клетки са разположени не зад слоевете от други клетки както у човека, но непосредствено върху вътрешната повърхност на очната ябълка, а клетките, изпълняващи изчислителни функции, зад тях. Сега ние поне виждаме, че в разположението на клетките в нашето око няма дълбок смисъл. При друг случай природата е имала възможност да си поправи грешката. С най-големи очи е надарен октоподът; диаметърът им е 38 cm!



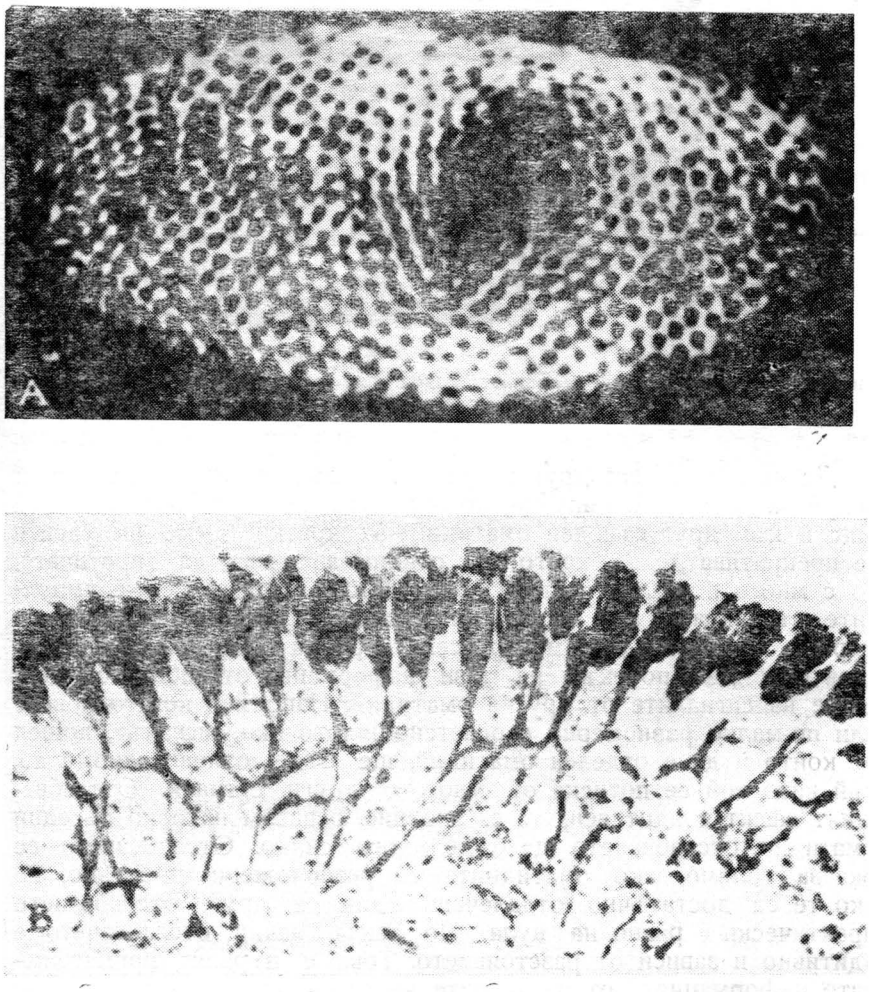
Фиг. 36.10. Око на октопод

6. Нервни механизми на зрението

Една от основните теми на тази глава е взаимната връзка и взаимната информация на отделните части на окото. Нека да разгледаме сложното око на рака-меченосец,[1] с който са направени твърде много опити. Преди всичко трябва да се разбере какъв тип информация може да се предава по нервите. По нерва се предава нещо от рода на смущение от електрична природа,

[1] Вид морски рак, представител на разреда Xiphosura (бел. прев.).

което може да бъде лесно зарегистрирано. Това е някакво вълнообразно смущение, което се разпространява по нерва и предизвиква определен ефект на другия негов край. Информацията се пренася от дълъг израстък на нервната клетка, наречен аксон, и ако единият край на аксона е възбуден, по него „протича импулс". По-нататък, ако по нерва вече преминава един импулс, след него не може незабавно да последва втори. Всички импулси имат една и съща големина, така че, когато нервът е силно възбуден, това съвсем не означава, че по него се разпространява голям импулс, а просто броят на импулсите за 1 s се увеличава. Големината на импулса се определя от нервното влакно. Това е важно да се усвои, за да се разбере какво ще стане по-нататък.

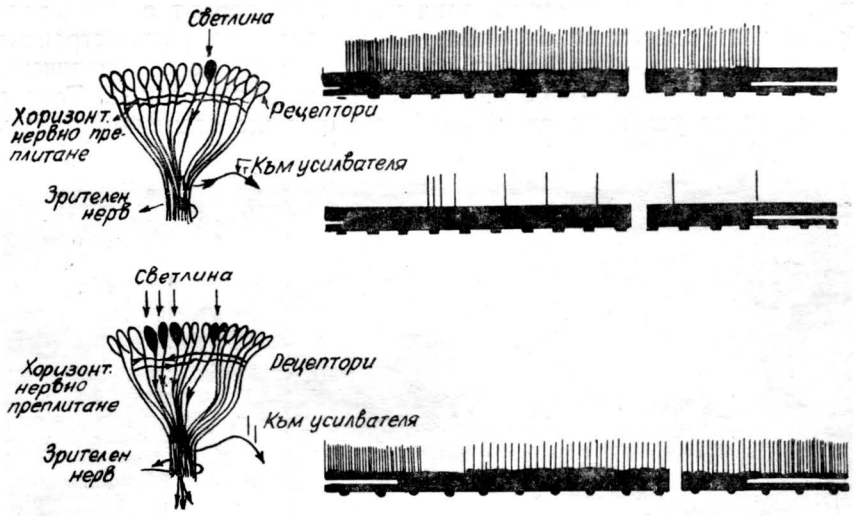


Фиг. 36.11. Сложно око на рак — меченосец
а — общ вид;
б — разрез

На фиг. 36.11,а е показано сложното око на рака-меченосец; в него има всичко около хиляда оматидия. Фиг. 36.11,б представлява напречен разрез на тази система. Виждат се отделните оматидии и нервните влакна, свързващи ги с мозъка. Но обърнете внимание, че даже у този морски рак има вътрешни връзки. Те, разбира се, са много по-малко сложни, отколкото в окото на човека, но именно това ни дава възможност да изучим подобни връзки в един прост пример.

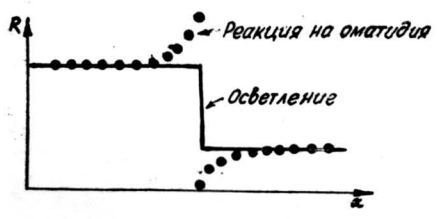
Да разгледаме такъв опит: поставяме на зрителния нерв на нашия рак малки електроди и осветяваме само един оматидий; това може лесно да се направи с помощта на лещи. Ако в някакъв момент t_0 включим светлината и започнем да измерваме електричните импулси, ще видим, че след малко закъснение ще

последва бърза серия от разряди, честотата на които постепенно ще намалява, докато не достигне някаква равномерност (фиг. 36.12,а). След изключване на светлината разрядите се прекратяват. Интересно е, че ако усилвателят остане свързан със същия нерв, а светлината бъде насочена към друг омотидий, нищо няма да се случи, сигнали няма да има.



Фиг. 36.12. Реакция на нервните влакна на окото на рака = меченосец при осветление

Да направим сега друг опит: осветяваме първия оматидий и получаваме същите импулси, но ако сега ние насочим светлина още и към друг съседен оматидий; за кратко време импулсите се прекратяват, след което те отново започват да „протичат", но с много по-малка честота (фиг. 36.12,б). Оказва се, че импулсите, възникващи във втория оматидий, затрудняват импулсите в първия. С други думи, макар всеки нерв да носи информация за своя оматидий, потокът на тази информация отслабва под действие на сигналите от другия оматидий. Например когато повече или по-малко равномерно е осветено цялото око, сигналът, дошел от който и да е отделен оматидий, ще бъде относително слаб, тъй като той се потиска от многото други сигнали. Отслабващият ефект е адитивен, т. е. ако ние осветим няколко съседни оматидии, отслабването ще бъде много силно. Отслабването се оказва голямо, ако оматидиите са резположени по-близко, но ако те са достатъчно отдалечени един от друг, отслабването практически е равно на нула. По такъв начин отслабването е адитивно и зависи от разстоянието. Това е първият пример, когато информацията от различните части на окото се преработва в самото око. Ако помислим малко, можем да разберем, че този механизъм е предназначен за усилване на *контраста* в краищата на обекта, тъй като, ако една част от предмета е осветена, а друга не, оматидиите, насочени към осветената област, дават импулси, които се потискат от всички съседни оматидии, виждащи осветената област така, че те са относително слаби. От друга страна, оматидиите, виждащи границата на осветената област и даващи „бял" сигнал, макар и потиснати от своите съседи, които не са чак толкова много, понеже някои от тях са съвсем тъмни (не виждат светлина), ще дават вследствие на това по-силен сигнал. В крайна сметка се получава крива, подобна на представената на фиг. 36.13. Ракът вижда един вид „усилен" контур.



Фиг. 36.13. Реакция на фасетка от око на рак = меченосец, когато гледа рязко осветен край

Обаче този факт, че съществува описаното „усилване" на контура, е известен още отдавна. Това е действително забележителен ефект, който се е обсъждал нееднократно от психолозите. За да изобразим един предмет, на нас ни е достатъчно да нарисуваме само неговите контури. Ние не сме привикнали да гледаме картини, на които са нарисувани само контури. Но какво е

това контур? Нали това е просто границата между тъмно и светло или между един цвят и друг. Всъщност това съвсем не е нещо определено. Можем да си мислим каквото си искаме, но около предмета никаква линия няма. Няма, всичко това е наша измислица. Сега ние започваме да разбираме защо на нас ни е достатъчен контурът, за да си представим целия предмет. Вероятно нашите очи също работят подобно на очите на рака-меченосец, разбира се, много по-сложно, но все пак аналогично.

На края аз съвсем накратко ще опиша по-сложни опити, много красиви и трудни, които са правени с жаба. При тяхното изпълнение в зрителния нерв на жабата се вкарвали миниатюрни, изкусно направени нишковидни сонди и се измервали сигналите, разпространяващи се по един определен аксон; точно така, както и в случая с рака-меченосец било установено, че информацията зависи не просто от една дадена точка на окото, а е сума от информации, получени от няколко части.

Най-съвременната картина на операциите, извършвани на окото на жабата, изглежда така. Могат да се намерят четири типа различни зрителни нервни влакна в този смисъл, че съществуват четири различни вида реакции на дразненията. В тези експерименти не е имало светлинни импулси: жабата не забелязва такива неща. Тя просто стои и очите ѝ са неподвижни дотогава, докато листът на лилията например не започне да се движи. Тогава очите на жабата се движат точно така, че изображението да остава в полето на зрението. Обаче самата жаба не си движи очите и не търси къде се е дянал обектът. Ако в нейното поле на зрение се движи нещо, напомнящо малко насекомо (необходимо е тя да може да вижда нещо малко, движещо се на неподвижен фон), наблюдават се четири различни вида нервни влакна, реагиращи на това дразнение. Техните свойства са дадени в табл. 36.1. Продължителното (незаличимо) забелязване накрай означава, че ако ние внесем предмет с рязко очертан край в

Табл. 36.1 **Видове ответни реакции на зрителните нервни влакна у жабата**

	Реакция	Скорост на предаване на импулсите m/s	Ъглово поле grad
1.	Продължително (незаличимо) забелязване на край	0,2—0,5	1
2.	Забелязване (заличимо) на огъната повърхност	0,5	2—3
3.	Регистрация на изменението на контраста	1—2	7—10
4.	Регистрация на притъмняването	до 1/2	до 15
5.	Регистрация на тъмнината	?	много голямо

полето на зрението на жабата, в тези фоторецептори, покрай които той се движи, възникват редица импулси, които преминават след това в редки импулси, продължаващи дотогава, докато краят се намира в полето на зрението, даже ако той стои неподвижен. След изключване на светлината импулсите се прекратяват. Ако отново се включи светлина и краят на предмета се намира както преди в полезрението, то импулсите възникват отново. Те не изчезват. Другият вид влакна много прилича на първия, но с това изключение, че те не работят, ако краят е прав. Необходимо е краят да бъде изгънат. Колко сложна трябва да е системата на взаимни връзки в ретината на окото на жабата, за да може тя да вижда движението на огъната повърхност. Нещо повече, ако тези влакна са възбудени от нещо, то възбуждането не може да трае така дълго както в първия случай и ако ние изключим светлината и отново я включим, то импулсите не се възобновяват. Впрочем това зависи от движението на изпъкналата повърхност.

Окото вижда нейното движение и помни къде се намира тя, но ако ние за момент изключим светлината, то окото просто забравя за повърхността и повече не я вижда.

Следващият вид е регистрацията на изменението на контраста. Ако краят се приближава или отдалечава, то сигнал има. Но ако предметът е неподвижен, никакви сигнали въобще няма.

След това има „регистрация на притъмняването". Ако интензивността на светлината намалява, възникват импулси, ако тя стане неизменна — импулсите се прекратяват: регистраторът работи само когато притъмнява.

И на края има няколко влакна, които служат за регистратори на тъмнината. Най-удивителното е, че те непрекъснато „стрелят"!



Фиг. 36.14. Мозъчна обвивка на жаба

Ако светлината се усилва, „изстрелите" стават по-редки, а ако отслабва, обратно — „огънят" става по-чест, но той не прекратява нито за секунда. На тъмно те „стрелят" автоматично като луди, напомняйки постоянно: „тъмнина! тъмнина! тъмнина!".

Всички тези реакции изглеждат твърде сложни, за да може някак си да бъдат класифицирани. Подозрително е даже това, правилно ли са изтълкувани експериментите. Но най-интересното

е, че същите тези видове влакна много ясно са отделени и от самата анатомия на жабата. След като влакната са били класифицирани (много важно е, че това е било направено *след* класификацията), други видове измервания са показали, че *скоростта* на импулсите, предаващи се по различните влакна, не е една и съща. По такъв начин е бил намерен друг независим способ за определяне вида на влакната.

Още един интересен въпрос: колко голяма е анализиращата област, свързана с едно кое да е влакно? Отговорът се оказва различен за различните видове влакна.

На фиг. 36.14 е показана повърхността на така наречената мозъчна обвивка на жабата. До нея водят влакната от зрителния нерв. Всички тези нервни влакна са свързани с различните слоеве на обвивката. Слоистият строеж на последната напомня строежа ма ретината (това е един от фактите, показващи, че ретината и дозъкът са твърде сходни). Ако сега вземем електрод и започнем на го вкарваме постепенно напречно на слоевете, можем да определим къде завършват различните видове зрителни влакна. Опитът дава много красив и удивителен резултат: оказва се, че различните видове влакна завършват в различни слоеве. В първия слой завършват първият тип влакна, във втория — вторият: третият и петият завършват в един и същ слой, а най-дълбоко от всичките прониква четвъртият вид. (Вие не бива да се удивлявате, че номерата почти на всичките видове нервни влакна съвпадат с номерата на слоевете. Именно затова те са номерирани така. В по-старите работи тази номерация е била друга.)

Всичко, което ние научихме, може да се формулира така: по всяка вероятност има три вида пигменти. Може да има много видове рецептори, в които тези пигменти влизат в различни пропорции, обаче големият брой вътрешни връзки дава възможност да се събират и вадят ефектите на отделните нервни клетки. По такъв начин, преди да разберем наистина същността на цветното зрение, необходимо е да разберем крайния етап на зрителното усещане въобще. Това е все още открит въпрос, но изследванията у микроелектродите вероятно ще ни дадат в края на краищата допълнителни сведения за това, как ние виждаме цветовете.

37. Квантово поведение

1. Атомна механика
2. Опит с картечна стрелба
3. Опит с вълни
4. Опит с електрони
5. Интерференция на електронните вълни
6. Как да проследим електрона
7. Начални принципи на квантовата механика
8. Принцип на неопределеността

1. Атомна механика

В последните няколко глави ние с вас разгледахме много съществени понятия, без които е невъзможно да се разберат нито светлинните явления, нито въобще електромагнитното излъчване. (Някои специални въпроси — теория на показателя на пречупване на плътно вещество и на пълно вътрешно отражение — ние отложихме за бъдещи времена.) Ние имахме работа с така наречената „класическа теория“ на електромагнитните вълни и за много явления тя ни даваше достатъчно точно описание на природата. И ние не особено се грижехме за това, че светлинната енергия винаги се доставя на порции — „фотони“.

Поредна тема, с която ние се готвим да се заемем (в главите след 39) е проблемата за поведението на сравнително големи количества вещество — техните механични или да речем техните топлинни свойства. Запознавайки се с тези свойства, ние ще видим, че старата класическа теория тук незабавно търпи неуспех, търпи по тази причина, че веществото всъщност се състои от частици с атомни размери. И ако ние все пак имаме намерение да използуваме старата теория, то е само защото това е единственото, което можем да разберем с помощта на изучената от нас класическа механика. Но нашите успехи няма да са големи. Ние ще открием, че за разлика от теорията на светлината теорията на веществото доста скоро среща затруднения по този път. Би могло, разбира се, всички атомни ефекти да се заобиколят. Но вместо това ние решихме да включим тук малка разходка из основните идеи на квантовите свойства на веществото, в квантовите представи на атомната физика. Все пак необходимо е вие, макар и приблизително, да имате представа как изглежда това, което заобикаляме. Все едно, нали атомните ефекти са толкова важни, че няма да се размине, без да се запознаете с тях отблизо.

Значи сега ще преминем към увода в предмета на квантовата механика. Но вие ще можете да проникнете напълно в същността на предмета едва много по-късно.

Квантовата механика — това е описание на поведението на най-малките частици вещество, в частност на всичко произлизащо в атомни мащаби. Поведението на тяло с много малки размери не прилича на поведението на нито на едно от телата, с които вие се срещате всеки ден. Тези тела нямат поведение нито на вълни, нито на частици, нито на облаци или билярдни топки или тежинки, окачени на пружини — накратко казано, те не приличат на нито едно нещо, с което ви се е случвало да се срещате когато и да било.

Нютон е смятал, че светлината се състои от частици. А после се оказало, както вече се убедихме, че светлината има вълнови свойства. По-късно обаче (в началото на XX век) забелязали, че поведението на светлината наистина понякога напомня поведението на частици. За електрона, обратно, отначало считали, че той прилича на частица, а после било изяснено, че в много отношения той има поведението на вълна. Значи всъщност неговото поведение на нищо не прилича. И ние сме се предали. Ние така си и казваме: „Той на нищо не прилича.“

Обаче за щастие има още една вратичка: работата е там, че електроните имат съвсем същото поведение като светлината. Квантовото поведение на всички атомни обекти (електрони, протони, неутрони, фотони и т. н.) е еднакво: всичките могат да бъдат наречени „частици — вълни“ (годно е впрочем и всяко

друго наименование). Значи всичко, което вие ще узнаете за свойствата на електроните (а именно те ще ни служат за пример), ще се отнася за кои да е „частици“, включително и за фотоните на светлината.

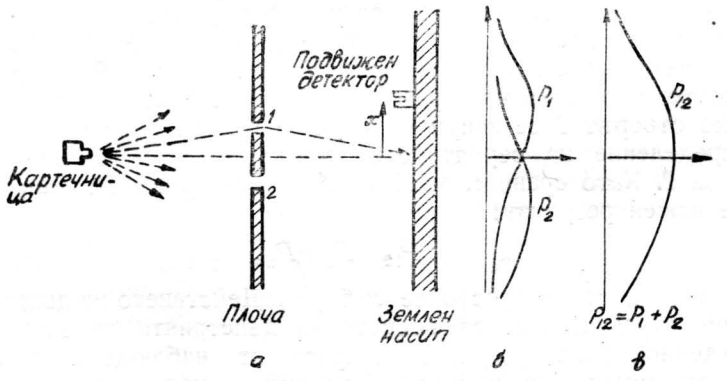
В течение на първата четвърт от нашия век постепенно се натрупвала информация за поведението на атомите и другите най-малки частици и запознанството с това поведение водело до все по-голямо забъркване сред физиците. В 1926—1927 г. то било отстранено с работите на Шрьодингер, Хайзенберг и Борн. Те успели в края на краищата да получат непротиворечиво описание на поведението на веществото с атомни размери. В тази глава ние ще се запознаем с основните характерни черти на това описание.

Щом поведението на атомите до такава степен не прилича на нашия всекидневен опит, то много е трудно да се свикне с него. И за начинаещия в науката, и за опитния физик — на всички изглежда своеобразно и мъгливо. Даже големите учени не го разбират така както биха желали и това е съвсем естествено, защото целият непосредствен опит на човека, цялата негова интуиция — всичко се отнася за големи тела. Ние знаем какво ще бъде с голям предмет; но именно така най-малките телца не постъпват. Затова, изучавайки ги, налага се да прибягваме към най-различни абстракции, да си напрягаме въображението и да не се опитваме да ги свързваме с нашия непосредствен опит.

В тази глава ние веднага ще се опитаме да се хванем за най-основния елемент от тайнственото поведение в най-странната негова форма. Ние сме избрали за анализ такова явление, което е невъзможно, съвсем абсолютно невъзможно да се обясни по класически начин. В това явление се крие самата същност на квантовата механика. Но всъщност в него се крие една единствена тайна. Ние не можем да я разкрием в този смисъл, че не можем да „обясним“ как тя работи. Ние просто ще ви разкажем как тя работи. Разказвайки за това, ние ще ви запознаем с основните особености на цялата квантова механика.

2. Опит с картечна стрелба

Опитвайки се да разберем квантовото поведение на електроните ние ще го съпоставим с привичните за нас движения на обикновените частици, приличащи на куршум, и на обикновените вълни, приличащи на водните вълни. Най-напред ние ще се заемем



Фиг. 37.1. Опит с картечна стрелба

със стрелба от устройството, показано схематически на фиг. 37.1. Това е картечница, която изстрелва цял сноп куршуми. Стрелбата на тази картечница не е чак толкова точна. При стрелба нейните куршуми се разсейват под доста голям ъгъл, както това е показано на рисунката. Пред картечницата стои стена (бронирана), а в нея са пробити два отвора, през които куршумът преминава свободно. Зад стената има земен насип, който „поглъща“ попадналите в него куршуми. Пред насипа стои предмет, който ние

ще наречем „детектор“. За такъв може да служи, да речем, сандък с пясък. Всеки попаднал в детектора куршум остава в него. Ако трябва, сандъкът се отваря и всички попаднали в него куршуми се изброяват. Детекторът може да се придвижва назад и напред (по направление на x). Този прибор позволява експериментално да се отговори на въпроса: „Каква е вероятността един куршум, преминал през стената, да попадне в насипа на разстояние x от средата?“ Забележете, че ние говорим само за вероятността, понеже е невъзможно да кажем определено къде ще попадне поредният куршум. Куршум, попаднал даже в една от дупките, може да рекушира и да излезе в съвсем неизвестна посока. Под „вероятност“ ние разбираме шанса да улучим с куршум детектора, който е разположен на разстояние x метра от средата. Този шанс може да се измери, като се преброят куршумите, попаднали в детектора за определено време, а след това полученото число се раздели на *пълния* брой куршуми, попаднали в насипа за същото време. Или полагайки, че скоростта на стрелбата е била постоянна, можем да смятаме, че вероятността е пропорционална на броя на куршумите, попаднали в детектора за определеното време.

За нашите цели е необходимо да си въобразим идеализиран до известна степен опит, когато куршумите не дават осколки и остават цели. Тогава виждаме, че куршумите винаги попадат в детектора на порции: ако ние нещо сме напипали в детектора, то това е винаги цял куршум, а не половина или четвърт. Даже когато скоростта на стрелбата стане много малка, все едно, в детектора за определено време или нищо не се натрупва, или там попадат цяло — непременно цяло число куршуми. Значи размерът на отделната порция не зависи от скоростта на стрелбата. Затова ние казваме: „Куршумите *винаги* идват на равни порции.“ С помощта на нашия детектор ние измерваме точно вероятността за идване на поредните порции като функция на x. Получените резултати от тези измервания (ние наистина все още не сме провели такъв експеримент и сега просто си въобразяваме какъв ще бъде резултатът) са представени графически на фиг. 37.1,в. Вероятността е нанесена надясно, а x — по вертикалната линия в съответствие с движението на детектора. Вероятността е означена с P_{12}, за да се подчертае, че куршумите могат да преминават и през отвора *1*, и през отвора *2*. Вие, разбира се, не ще се удивите, че вероятността P_{12} около средата на графиката е голяма, а по краищата малка. Вас може да ви смути обаче факта, че най-голямата стойност на P_{12} се оказва при $x=0$. Това е лесно да се разбере, ако един път се направи опитът, като се запуши отворът *2*, а втори път — отворът *1*. В първия случай куршумите ще могат да преминават само през отвора *1* и получената крива е P_1 (вж. фиг.37,1,б). Тук, както трябва да се очаква, максимумът на P_1 е при онова x, което се намира на правата от картечницата през отвора *1*. А ако отворът *1* се запуши, получава се симетричната крива P_2 — разпределение на вероятността за куршумите, преминали през отвора *2*. Като сравним частите *б* и *в* на фиг. 37.1, ние получаваме важен резултат:

$$P_{12}=P_1+P_2, \tag{31.1}$$

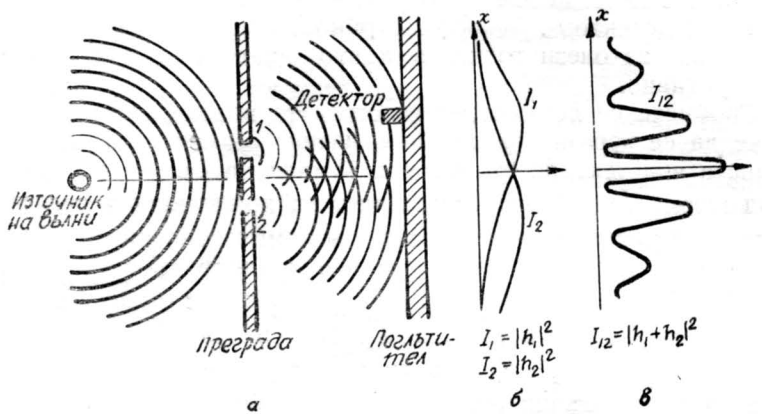
т.е. вероятностите просто се събират. Действието на двата отвора заедно е резултат от събирането на действията на всеки отвор поотделно. Този резултат, получен от наблюденията, ние ще наречем *отсъствие на интерференция* — причината за това вие ще научите после. С това завършваме с куршумите.

Те идват на порции и вероятностите за тяхното попадане се събират без интерференция.

3. Опит с вълни

Сега ще проведем опит с водни вълни. Приборът е показан схематически на фиг. 37.2. Това е малко коритце, пълно с вода. Частта, означена като „източник на вълните“, движейки се нагоре-

надолу под действие на моторче, поражда кръгови вълни. Отдясно на източника пак стои преграда с два отвора, а по-нататък — втора стена, която за простота е направена поглъщаща (без да отразява вълните); насипан е пясък и е образувана плитчина. Пред



Фиг. 37.2. Опит с водни вълни

плитчината се поставя детектор, той, както и по-рано, може да се мести по оста x. Детекторът сега — това е устройство, измерващо „интензивността" на вълновото движение. Представете си приспособление, измерващо височината на вълната. Ако неговата скала се разграфи така, че деленията да са пропорционални на *квадрата* на височината, отчетените по скалата резултати могат да дават интензивността на вълната. Детекторът по такъв начин ще определя *енергията*, която се пренася от вълната или по-точно частта от енергията на вълната, попаднала в детектора.

Първото нещо, в което можем да се убедим при помощта на такъв вълнов апарат, това е, че интензивността може да бъде *произволна величина*. Когато източникът едва-едва се движи, то и детекторът показва едва забележимо движение. Ако движението се усили, то и в детектора интензивността ще се усили. Интензивността на вълната може да бъде произволна. Ние вече *не ще кажем*, че в интензивността на вълната има някаква „порционност".

Оставяме сега вълновият източник да работи стабилно и сами започваме да измерваме интензивността на вълните при различни стойности на x. Ние ще получим интересна крива (кривата I_{12} на фиг. 37.2, в).

Но ние вече видяхме откъде могат да възникнат такива картинки — това беше, когато изучавахме интерференцията на електричните вълни. И тук може да се види как първоначалната вълна дифрактира при отворите, как от всеки отвор излизат кръгови вълни. Ако затворим единия отвор за малко и измерим интензивността при поглъщащата стена, ще получим доста прости криви (вж. фиг. 37.2, б).

Кривата I_1 — това е интензивността на вълната от процепа *1* (когато тази интензивност се измерва, отворът *2* е затворен), а кривата I_2 — интензивността на вълната от отвора *2* (при затворен процеп *1*).

Ние виждаме съвсем определено, че интензивността I_{12}, наблюдавана, когато двата процепа са отворени, не е равна на сумата от интензивностите I_1 и I_2. Ние казваме, че в този случай има място „интерференция", наслагване на две вълни една върху друга. В някои места (където на кривата I_{12} има максимум) вълните се оказват „във фаза", максимумите на вълните се събират, давайки по-голяма амплитуда и по този начин по-голяма интензивност. Казва се, че в тези места има „конструктивна интерференция". Тя се наблюдава в местата, разстоянието от които до единия процеп се отличава с цяло число дължини на вълната от разстоянието до другия процеп.

А в тези места, където двете вълни идват с фазово отместване π (т. е. намират се „в противофаза“), движението на вълната представлява разлика от двете вълнови амплитуди. Вълните „интерферират деструктивно“, получава се малка интензивност. Това става там, където разстоянието от процепа *1* до детектора се отличава с нечетно число полувълни от разстоянието между процепа 2 и детектора. Малките стойности на I_{12} на фиг. 37.2 съответстват на онези точки, в които двете вълни интерферират деструктивно.

Спомнете си сега, че количествената връзка между I_1, I_2 и I_{12} може да се изрази по следния начин: моментната височина на вълната в детектора от процепа *1* може да бъде представена във вида (взема се действителната част на комплексното число) $\hat{h}_1 e^{i\omega t}$, където „амплитудата“ $\hat{h}_1$ въобще е комплексно число. Интензивността е пропорционална на средния квадрат от височината или, използувайки комплексните числа, на $|\hat{h}_1|^2$. Височината на вълната от процепа *2* също е равна на $\hat{h}_2 e^{i\omega t}$, а интензивността ѝ е пропорционална на $|\hat{h}_2|^2$. Когато двата процепа са отворени, височините на двете вълни се събират, давайки височина $(\hat{h}_1+\hat{h}_2)e^{i\omega t}$, и интензивност $|\hat{h}_1+\hat{h}_2|^2$. Множителят на пропорционалност нас сега не ни интересува, така че формулата за *интерфериращите* вълни може да се запише във вида

$$I_1=|\hat{h}_1|^2, \qquad I_2=|\hat{h}_2|^2, \qquad I_{12}=|\hat{h}_1+\hat{h}_2|^2. \tag{37.2}$$

Вие виждате, че нищо подобно на това, което беше с куршумите не се получава тук. Разкривайки $|\hat{h}_1+\hat{h}_2|^2$ можем да пишем

$$|\hat{h}_1+\hat{h}_2|^2=|\hat{h}_1|^2+|\hat{h}_2|^2+2|\hat{h}_1|\,|\hat{h}_2|\cos\delta, \tag{37.3}$$

където δ е фазовата разлика между $\hat{h}_1$ и $\hat{h}_2$. Заместваики интензивностите от (37.2), получаваме

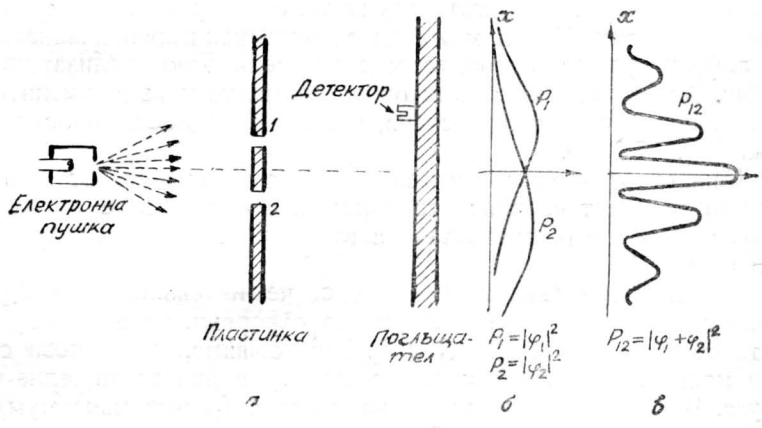
$$I_{12}=I_1+I_2+2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta. \tag{37.4}$$

Последният член е „интерференционен член“.

С това ние завършваме с вълните. *Интензивността им може да бъде произволна, но между тях възниква интерференция.*

4. Опит с електрони

Да си представим сега също такъв опит с електрони. Схемата на опита е дадена на фиг. 37.3. Ние поставяме електронна пушка, която се състои от волфрамова жичка, нагрявана с ток и помес-



Фиг. 37.3. Опит с електрони

тена в метална кутийка с отвор. Ако на жичката е подадено отрицателно напрежение, а на кутийката — положително, електроните, изпускани от жичката, ще се ускоряват от стените на ку-

тийката, а някои от тях ще излизат през отвора. Всички електрони, които излизат от пушката, ще имат (приблизително) еднаква енергия. А пред пушката ние поставяме отново стена (този път тънка метална пластинка) с две дупчици. Зад стената се поставя друга пластинка; тя служи за „земен насип“, т. е. да поглъща електроните. Пред нея има подвижен детектор, например Гайгер- Мюлеров брояч, а още по-добре — електронен умножител, към който е включен високоговорител.

Отнапред ви предупреждаваме: не се опитвайте да правите този опит (за разлика от първите два, които вие може би вече сте направили), този опит все още никой никога не се е опитвал да направи. Цялата работа е там, че за получаване на интересуващите ни ефекти приборът трябва да бъде извънредно миниатюрен. Ние с вас сега правим „мислен експеримент“, отличаващ се от другите по това, че той може лесно да бъде обмислен. Какво *трябва* да се получи в него, е известно отнапред, понеже вече са направени много опити с прибори, размерите и пропорциите на които са били подбрани така, че да стане забележим този ефект, който ние сега ще опишем.

Първото нещо, което забелязваме в нашия опит с електроните, това са резките звуци „пук“, „пук„, които се чуват от детектора (по-точно от високоговорителя). Всичките „пукания“ са еднакви. *Никакви* „полупукания“.

Ние забелязваме също, че те следват съвсем неравномерно. Например така: пук..... пук-пук..... пук..... пук..... пук-пук..... пук..... и т. н. Който е имал случай да види Гайгер-Мюлеров брояч, знае как работи той. Ако преброим колко пъти високоговорителят е „пукнал“ за достатъчно дълго време (да речем за няколко минути), а след това отново преброим колко пъти е „пукнал“ за друг също такъв интервал време, ще установим, че двете числа са почти равни. Затова може да се говори за *средна честота* на сигналите (еди колко си „пукания“ средно в минута).

Когато ние преместваме детектора, *честотата* на импулсите ту расте, ту намалява, но големината (силата) на всеки импулс винаги остава една и съща. Ако ние охладим жичката в пушката, честотата на импулсите спада, но всеки сигнал ще звучи както преди. Поставяме до поглъщащата пластинка два отделни детектора; тогава ние веднага забелязваме, че пука ту единият от тях, ту другият, но никога двата заедно. (Може би само понякога нашето ухо не разделя двата импулса, последвали много бързо един след друг). Затова ние правим заключение, че всичко, което попада в детектора, идва в него „на порции“. Всички „порции“ са еднакви по големина; в детектора (или поглъщащата пластинка) попада само цяла „порция“; в поглъщащата пластинка в даден момент може да попадне само една порция. Ние казваме: „Електроните винаги идват на еднакви порции.“

Както и в опита с картечната стрелба, ние ще се опитаме сега да потърсим в новия опит отговор на въпроса: „Каква е относителната вероятност електронна „порция“ да попадне в поглъщащата пластинка на различни разстояния x от средата?“. Както и в първия опит, ние ще получим относителната вероятност, като пресметнем честотата на импулсите при стабилна работа на пушката. Вероятността порциите да се окажат на определено разстояние x е пропорционална на средната честота на импулсите при това x.

Като резултат от нашия опит е получена изключително интересна крива P_{12}, представена на фиг. 37.3, в. Да! Именно такова поведение имат електроните.

5. Интерференция на електромагнитни вълни

Да се опитаме да анализираме кривата на фиг. 37.3 и да видим ще можем ли да разберем поведението на електроните. Първото нещо, което ни се иска да отбележим, това е, че щом те

идват на порции, всяка една порция (естествено е тя също да се нарече електрон) преминава или през отвора *1*, или през отвора *2*. Ние ще формулираме това във вид на „Твърдение".

Твърдение А: Всеки електрон преминава *или* през отвора *1*, *или* през отвора *2*.

Ако предположим това, всичките електрони, достигнали до поглъщащата пластинка, могат да се разбият на два класа: 1) проникнали през отвора 1; 2) проникнали през отвора *2*. Значи получената крива — това е сумата от ефектите, породени от електроните, които са преминали през отвора *1*, и електроните, преминали през отвора *2*. Нека сега да проверим това съображение експериментално. Първо ще направим измервания с електрони, които преминават през отвора *1*. Затваряме дупчицата *2* и преброяваме импулсите („пуканията") в детектора. По честотата на импулсите ние определяме стойностите на P_1. Резултатът от измерванията е показан на фиг. 37.3, б, графика P_1. Тая графика изглежда напълно разумно. По същия начин построяваме P_2 — разпределението на вероятността за попадане на електроните, преминали през отвора *2*. То също е показано на рисунката.

Кривата P_{12}, получена, когато двете дупчици са отворени, съвсем явно не съвпада със сумата P_1+P_2 (сумата от вероятностите при едно работещо отворче). По аналогия с нашите опити, проведени с водни вълни, ние ще кажем: „Тук има интерференция":

$$\text{За електроните } P_{12} \neq P_1+P_2. \tag{37.5}$$

Откъде е могла да се появи интерференция? Може би трябва да се каже така: „Това, че порциите (отделните електрони) преминават или през отвора *1*, или през отвора 2 е *невярно*, тъй като, ако това би било така, то биха се събирали вероятностите. Трябва значи тяхното движение да е по-сложно. Те се разделят на две половини и . . ." Не, не е така! Това е невъзможно, нали те винаги идват на цели порции. . . „Добре, тогава може би е така: някой от тях, след като премине отвора *1*, връща се през 2, а след това отново преминава през *1* и така — няколко пъти, или още някак си броди през двата отвора. Тогава, закривайки отвора 2, ние ще отрежем пътя на електроните и ще изменим вероятността за това един електрон, след като *излезе* от отвора 1, да попадне в края на краищата в поглъщащата пластинка." Но погледнете. Нали има такива точки от кривата, в които при *две* отворени дупчици попадат много малко електрони, а при една *затворена* дупчица — попадат много *повече*. Излиза, че затварянето на едната дупчица увеличава броя на електроните, преминаващи през другата. И обратно, средата на кривата P_{12} повече от два пъти превишава сумата P_1+P_2. Тука, *затваряйки* едната дупчица, вие всъщност *намалявате* броя на електроните, преминаващи през другата. Да се обяснят *двата* ефекта, като се предположи, че електроните блуждаят по сложни траектории между двете дупчици, очевидно е доста трудно.

Всичко това изглежда твърде тайнствено. И толкова по-тайнствено е, колкото повече човек мисли за това. Идеи, обясняващи кривата P_{12} като резултат от сложното движение на отделните електрони през двата отвора, са били изфабрикувани много. Но нито един от тези опити не е бил успешен. Нито една от идеите не е могла да изрази P_{12} чрез P_1 и P_2.

При това, колкото и странно да е, *математиката*, свързваща P_1 и P_2 с P_{12}, е изключително проста. Нали кривата P_{12} по нищо не се отличава от кривата I_{12} на фиг. 37.2, а *последната* крива се получава много просто. Това, което се приближава към поглъщащата пластинка, може да бъде описано с две комплексни числа $\hat{\varphi}_1$ и $\hat{\varphi}_2$ (това са функции на x). Квадратът на абсолютната стойност на $\hat{\varphi}_1$ дава ефекта от единия отвор $1: P_1=|\hat{\varphi}_1|^2$. Ефектът, получен при отворен отвор 2, се получава съвсем по същия начин от $\hat{\varphi}_2$, т. е. $P_2=|\hat{\varphi}_2|^2$. А общото действие на двата отвора ще се дава от израза $P_{12}=|\hat{\varphi}_1+\hat{\varphi}_2|^2$. *Изчисленията* са абсо-

лютно същите както за водните вълни. (А опитайте впрочем да получите такъв прост резултат, като считате, че електроните сноват напред и назад през пластинката по необикновени траектории.)

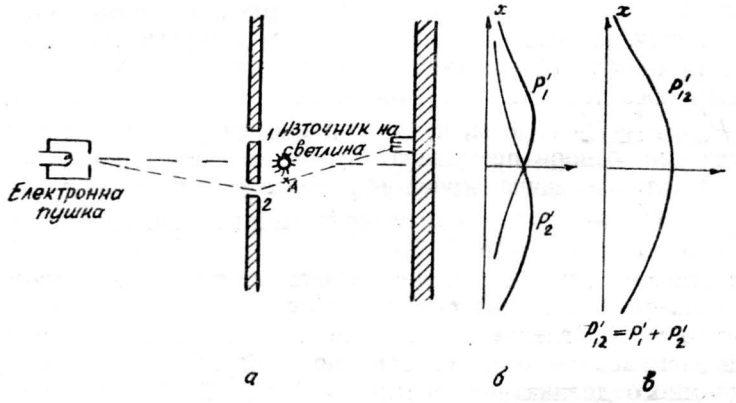
В края на краищата ние стигаме до следното заключение: електроните идват на порции, подобно на частици, а вероятността за пристигането на тези порции е разпределена така както интензивността на пристигащи вълни. Именно в този смисъл електронът има поведение „частично на частица и частично на вълна".

Да отбележим впрочем, че имайки работа с класически вълни, ние определихме интензивността като усреднен по времето квадрат на амплитудата на вълната и използувахме комплексните числа като математически прийом, облекчаващ пресмятанията. Но в квантовата механика амплитудите трябва задължително да се представят от комплексни числа. Само реалната част на амплитудите е недостатъчна. Засега впрочем това изглежда само като техническа подробност, защото формулите са едни и същи на вид.

А тъй като вероятността за преминаване през двата отвора се изразява толкова просто (макар да не е равна на сумата P_1+P_2), повече няма какво да се каже по този повод. Но има още множество тънкости, свързани с такова едно поведение на природата. Бих желал да ви разкажа за някои от тях. Най-напред, щом броят на частиците, попадащи в определена точка, не е равен на броя на преминаванията през отвора *1* плюс броя на преминаванията през отвора *2* (както това би могло да се очаква въз основа на „Твърдение *А*"), несъмнено *„Твърдение А" е невярно. Не е вярно,* че електроните преминават *или* през отвора 1, *или* през отвора *2*. Но този извод може да се провери и по друг начин.

6. Как да се проследи електронът

Да се опитаме да направим такъв опит. Поместваме в нашия електронен прибор силен светлинен източник точно зад стената



Фиг. 37.4. Друг опит с електрони

между двата отвора (фиг. 37.4) Известно е, че електричните заряди разсейват светлината. Затова по какъвто и път да идва електронът до детектора, той непременно ще разсее малко светлина към нашето око и ние ще *видим* къде е преминал той. Да речем, ако той премине през отвора *2*, както е показано на рисунката, то ние ще *видим* някъде около точка А нещо да блесне. Ако електронът премине през горния отвор, той ще блесне някъде около този отвор *1*. Ами ако се случи така, че светлина да блесне едновременно на две места, понеже електронът се е разделил на две, то . . . . Но по-добре е да пристъпим към опита.

Ето какво ще видим ние: *всеки път,* когато чуем пукане в детектора, ние *също виждаме* светлинен блясък *или* при отвора *1*, *или* при отвора 2, но *никога* при двата отвора едновременно! Така става при всяко положение на детектора. Оттук ние пра-

вим извод, че когато гледаме електрона, виждаме той да преминава или през единия отвор, или през другия. „Твърдение А“, както показва опитът, се удовлетворява по необходимост.

В такъв случай какво е невярно в нашите доводи *против* „Твърдение *А*“? Защо все пак P_{12} *не е равно на* P_1+P_2? Да продължим нашия опит. Нека да проследим електроните и да видим какво поведение имат те. За всяко положение на детектора (при всяко фиксирано x) ние преброяваме колко електрона попадат в него и *едновременно с* това проследяваме (наблюдавайки блесванията) през кои отвори преминават. Ще наблюдаваме по следния начин: чувайки „пук“, ние поставяме чертичка в един стълбец, ако забележим блясване при първия отвор; ако се светне при втория отвор, ние отбелязваме това посредством чертичка във втора колонка. Всеки попаднал в детектора електрон причисляваме към един от двата класа: или към класа на електроните, проникнали през отвора *1*, или към класа на електроните, проникнали през отвора *2*. Броят на чертичките в първата колонка ни дава P_1' — вероятността електронът да попадне в детектора през отвора *1*; точно така втората колонка ни дава P_2' — вероятността електронът да се е възползувал от отвора *2*. Повтаряйки тези измервания за много стойности на x, ние ще получим кривите P_1' и P_2', показани на фиг. 37.4,б. Какво от това, в тях няма нищо неочаквано. Кривата P_1' е подобна на кривата P_1, която се получава, когато отворът 2 е затворен, а кривата P_2' прилича на P_2 — получена, когато е затворен отворът 1. И тъй никакво блуждаене от дупка на дупка *няма*. Когато ние следим електроните, оказва се, че те проникват през стената с отворите точно така, както ние очакваме. Отворени ли са дупчиците, или затворени все едно — онези електрони, които ние виждаме да преминават през отвора *1*, са еднакво разпределени.

Но почакайте. Каква е *сега пълната* вероятност — вероятността електронът да попадне в детектора по кой да е начин? Ние вече имаме сведения за това. Преструваме се, че не забелязваме светлинните блясвания, т. е. събираме чертичките, намиращи се в двете колонки. На нас ни трябва само да *съберем числа*. За вероятността електронът да попадне в поглъщащата пластинка, преминавайки през *кои да е* от отворите, ние действително ще получим $P_{12}'=P_1'+P_2'$. Излиза, че макар ние да успяхме да проследим през кои отвори преминават отделните електрони, никаква предишна интерференчна крива P_{12} не се получава; получава се нова крива P_{12}' — крива без интерференция. Изключете светлината и отново възниква P_{12}.

Ние стигаме до извода, че *когато гледаме електроните*, тяхното разпределение на екрана съвсем не е такова, каквото е то, когато не ги гледаме. Не е ли включването на светлината причина за изменяне хода на събитията? Трябва електроните да са нещо много деликатно; светлината, разсейвайки се от електроните, тласка последните и изменя тяхното движение. Нали ние знаем, че електричното поле действува на зарядите с определена сила. По тази причина очевидно трябва да се очаква изменение на движението. Във всеки случай светлината оказва на електроните голямо влияние. Опитвайки се да „проследим“ електроните, ние изменихме тяхното движение. Тласъците, изпитвани от електроните при разсейване на фотоните, очевидно са такива, че движението на елекроните силно се изменя: електронът, който преди е могъл да попадне в максимума на P_{12}, сега се приземява в минимума на P_{12}; ето защо никаква интерференция не се забелязва.

„Но защо поставяме такъв ярък светлинсн източник — можете да помислите вие. Намалете яркостта. Светлинните вълни ще отслабнат и няма да могат така силно да действуват на електроните; отслабвайки светлината все повече и повече, може по принцип да се стигне дотам, че действието на светлината върху електроните да може въобще да се пренебрегне.“ Да бъде както сте казали. Нека да опитаме.

Първото нещо, което забелязваме, това е, че блясъците, получени при разсейване на светлината от електроните, *не отслабват. Силата на светлинните импулси остава предишната.* От това, че светлината е отслабнала, се изменя само едно: понякога, чувайки звуков импулс от детектора, ние не забелязваме *никакво светване* от електрона; електронът е преминал незабелязано. Ние просто установяваме, че светлината има поведение, подобно на електроните: ние знаем, че тя е „вълниста", а сега се убеждаваме, че тя наред с това се разпространява на „порции". Тя се разпространява, или се разсейва на порции, които ние наричаме „фотони". Намалявайки *интензивността* на светлинния източник, ние не изменяме *големината* на фотоните, а изменяме само *темпа*, с който те се излъчват. С това се и обяснява фактът защо при слаба светлина някои от електроните достигат детектора незабелязано. Просто точно в момента, когато електронът се е движил към детектора, не е имало фотон на нужното място.

Всичко това ни обезкуражава малко. Ако е правилно това, че всеки път, когато ние „виждаме" електрон, светванията са еднакви, то всички видени от нас досега електрони са били „смутени" (пертурбирани) електрони. Нека тогава да проведем по друг начин опита с бледата светлина. Сега, чувайки звуков сигнал от детектора, ние ще поставяме чертичка в една от трите колони: в първата, ако електронът е забелязан при отвора *1*, във втората, ако сме го видели при отвора *2*, и в третата, ако въобще не сме го видели. Като обработим данните (пресметнем вероятностите), ние получаваме следните резултати: „Забелязаните при отвора *1*" ще бъдат разпределени по закона P_1', „забелязаните при отвора *2*" — по закона P_2' (така че „забелязаните или при отвора *1*, или при отвора *2*" са разпределени по закона P_{12}', а „незабелязаните" са разпределени „вълноподобно", т. е. по закона P_{12} на фиг. 37.3. *Ако електроните са невидими, възниква интерференция.*

Това вече може да се разбере. Когато ние не виждаме електрона, значи фотонът не го е смутил; а ако ние сме го забелязали вече, значи той е смутен от фотона. Степента на смущението е винаги една и съща, поради това че всички фотони причиняват един и същ ефект, достатъчен по големина, за да размие каквито и да било интерференчни ефекти.

Но няма ли *какъвто и да било* начин да се види електронът, без да се смути? Ние вече говорихме, че импулсът, който има фотонът, е обратно пропорционален на дължината на неговата вълна ($p=h/\lambda$). Колкото по-голям е импулсът на фотона, толкова по-силно тласка той електрона, когато се разсейва от него. Аха! Щом ние искаме колкото може по-слабо да смущаваме електроните, то не си струва да намаляваме *интензивността* на светлината, по-добре е да намалим *честотата* ѝ (или, което е все същото, да увеличим дължината на вълната ѝ). Трябва електроните да се осветят с червена светлина. Може да се използува даже инфрачервена светлина или радиовълни (като в радара). С помощта на уреди, приспособени за регистрация на нискочестотна (дълговълнова) светлина, може също да се види къде минава електронът. Може би „по-меката" светлина ще ни помогне да избегнем силните смущения в движението на електроните.

Но какво да се прави, заемаме се да експериментираме с дълги вълни. Ще повторим нашия опит, увеличавайки все повече и повече дължината на вълната. На първо време нищо няма да се измени, всички резултати ще приличат на предишните. А после ще се случи ужасно неприятно нещо. Вие помните, че изучавайки микроскопа, ние забелязахме, че вследствие *вълновата природа* на светлината се появяват ограничения в разстоянията на които две точки все още не се сливат в една. Това разстояние е от порядъка на дължината на светлинната вълна. И ето сега това ограничение отново се препречва. Щом дължината на вълната стане сравнима с разстоянието между двата отвора, светванията ще станат толкова размити, че ще бъде невъзможно да се определи около кои отвори се светва

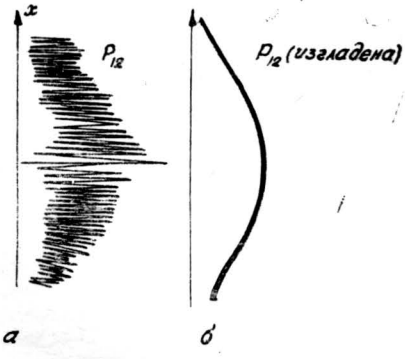
Ние не ще можем повече да познаваме от коя дупка се е възползувал електронът. Известно е, че е минал през някъде, а къде не е ясно. И това точно при такъв цвят на светлината, когато тласъците стават едва забележими, а кривата P'_{12} започва да прилича на P_{12}, т. е. започва да се чувствува интерференцията. И само при дълги вълни, много пъти превишаващи разстоянието между отворите (когато вече няма никаква възможност да се разбере откъде е минал електронът), смущението, причинено от светлината, става толкова слабо, че отново се появява кривата P_{12} (вж. фиг. 37.3).

Ние се убеждаваме с нашия опит, че е невъзможно да се приспособи светлината за регистриране през кой отвор е преминал електронът и в същото време да не се изкриви картината. Хайзенберг предположил, че новите закони на природата биха били съвместими един с друг само в този случай, ако биха съществували някои фундаментални ограничения на нашите експериментални възможности, ограничения, които преди не са забелязвали. Той предложил в качеството на общ принцип своя *принцип на неопределеността.* В термините на нашия експеримент той звучи така: „Не може да се построи апарат, който ни дава възможност да определим през кой отвор преминава електронът, без да се смути движението на електрона до такава степен, че интерференчната картина да изчезне.“ Ако апаратът е способен да определя през кой отвор преминава електронът, той е *неспособен* да бъде толкова деликатен, че да не изкриви картината по най-съществен начин. Никой никога не е успял да открие или да посочи някакъв път за заобикаляне на принципа на неопределеността. Значи ние сме длъжни да допуснем, че той описва една от основните характеристики на природата.

Цялата теория на квантовата механика, която ние сега използуваме за описание на атомите, а следователно и на веществото въобще, зависи от верността на принципа на неопределеността. Квантовата механика съвсем успешно се справя със своите задачи; това укрепва нашата вяра в принципа. Но ако някога се случи да се „разгроми“ принципът на неопределеността, квантовата механика ще започне да дава несъгласувани резултати и ще се наложи тя да бъде изключена от редовете на правилните теории за природните явления.

„Е добре — ще кажете вие, — а какво ще стане с „Твърдението А?“ Значи вярно е все пак, че електронът преминава или през отвора *1* или през *2*? Или това *не е вярно?*“ Единственият отговор, който може да бъде даден, е такъв: ние намираме опитно, че съществува някакъв определен начин, по който сме длъжни да разсъждаваме, за да не стигнем до противоречия.

Ето как ние сме длъжни да разсъждаваме, за да не правим погрешни предвиждания. Ако вие наблюдавате отворите, а поточно, ако вие имате прибор, способен да регистрира през кой от двата отвора е проникнал даден електрон, то вие *можете* да говорите, че той е преминал през отвора *1* (или *2*). Но ако вие *не сте* се опитвали да узнаете откъде е преминал електронът, ако в опита не е имало нищо смущаващо електрона, *вие да не сте посмели* да мислите, че електронът е преминал или през отвора 1, или през отвора *2*. Ако все пак започнете така да мислите и след това да правите от тази мисъл различни изводи, то несъмнено ще направите грешки в своя анализ. Вие сте принудени да балансирате на това логическо въже, ако искате успешно да описвате природата.



Фиг. 37.5. Интерференчна картина при разсейване на куршуми а) истинска (схематично); б) наблюдаема

• • •

Ако движението на веществото трябва да се описва подобно на електроните, като се използуват вълновите понятия, то как да бъде с куршумите от нашия първи опит? Защо ние не видяхме там интерференчна картина? Работата се оказва в това, че дължината на вълната на куршумите е толкова незначителна, че ин-

терференчните ивици стават много тънки. Толкова тънки, че никакъв детектор с разумни размери не може да ги раздели на отделни максимуми и минимуми. Ние с вас гледахме само нещо усреднено — това е точно класическата крива. На фиг. 37.5 се опитахме схематично да изобразим какво става с големи тела. На фиг. 37.5,а е показано разпределението на вероятността за куршумите, предсказвано от квантовата механика. Предполага се, че резките колебания дават представа за интерференчната картина на много къси вълни. Но всеки физически детектор е принуден неизбежно да покрие едновременно много зигзаги на тази крива, така че измерванията, направени с негова помощ, ще дадат плавната крива, показана на фиг. 37,5,б.

7. Начални принципи на квантовата механика

Сега да направим равносметка на основните изводи от нашите опити. Ще направим това в такава форма, че те да се окажат валидни за целия клас подобни опити. Равносметката може да се запише най-просто, ако най-напред се определи понятието „идеален опит", т. е. опит, в който отсъствуват неопределени външни влияния и няма никакви неподдаващи се на регистрация изменения, колебания и т. н. Точната формулировка ще бъде такава: „Идеален опит се нарича такъв, в който всички начални и крайни условия на опита са напълно определени." Такава съвкупност от начални и крайни условия ние ще наричаме „събитие." (Например: „електрон излита от пушката, попада в детектора и повече нищо не произлиза"). А сега ще дадем нашия списък на изводите.

Списък на изводите

1. Вероятността за събитието в идеалния опит се дава от квадрата на абсолютната стойност на комплексното число φ, наричано амплитуда на вероятността.

$$\begin{aligned} &P \text{ — вероятност,} \\ &\varphi \text{ — амплитуда на вероятността,} \\ &P=|\varphi|^2 . \end{aligned} \tag{37.6}$$

2. Ако събитието може да протече по няколко взаимно изключващи се начина, амплитудата на вероятността на събитието е сума от амплитудите на вероятностите за всеки отделен начин Възниква интерференция:

$$\begin{aligned} &\varphi=\varphi_1+\varphi_2, \\ &P=|\varphi_1+\varphi_2|^2. \end{aligned} \tag{37.7}$$

3. Ако се провежда опит, позволяващ да се каже кой от тези взаимно изключващи се начини се осъществява всъщност, то вероятността за събитието — това е сума от вероятностите за протичане на събитието по всеки отделен начин. Интерференция отсъствува:

$$P=P_1+P_2. \tag{37.8}$$

• • •

Може би вие все още искате да си изясните: „А защо е това? Какъв механизъм се крие зад този закон?" Ето какво ще кажем по този въпрос: никой не е успял да намери никакъв механизъм. Никой в света не ще може да ви „обясни" нито на йота повече от това, което „обяснихме" ние. Никой не ще ви даде някаква по-дълбока представа за положението на нещата. У нас ги няма, няма представи за по-фундаменталната механика, от която могат да се изведат тези резултати.

Ние бихме желали да подчертаем едно много важно различие между класическата и квантовата механика. Ние вече говорихме за вероятността електронът да попадне тук или там при дадени обстоятелства. Ние подразбирахме, че с нашето (а и с най-съвършеното) експериментално устройство ще бъде не-

възможно да се предсказва точно какво ще стане. Ние сме способни да определяме само шансовете. Ако това твърдение е правилно, то би означавало, че физиката се е отказала от опитите да предсказва точно какво ще се случи при определени условия. Да! Физиката *наистина* се предава. *Ние не умеем да предсказваме какво би трябвало да се случи при дадени обстоятелства.* Но това не стига, ние сме уверени, че то е немислимо: единственото, което се поддава на предсказание, това са вероятностите за различните събития. Налага се да си признаем, че ние сме изменили на нашите предишни идеали за разбиране на природата. Може би това е крачка назад, но никой не ни е научил как да я избегнем.

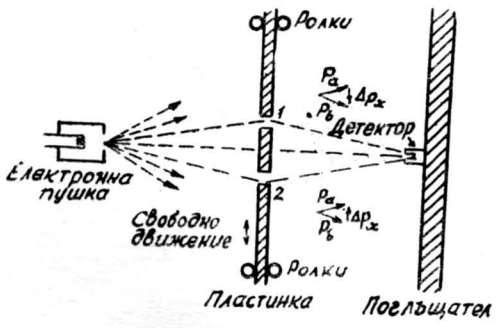
Сега ще направим няколко забележки относно едно твърдение, което понякога са правили тези, които са искали да се ползуват от приведеното описание. Те са казвали: „Може би в електрона стават някакви вътрешни процеси, може би има някакви вътрешни променливи, за които неща ние още нищо не знаем. Може би именно затова ние не умеем да предсказваме какво ще се случи. А ако ние бихме могли по-внимателно да се вгледаме в електрона, то бихме могли да кажем къде ще достигне той.“ Доколкото ни е известно, такава възможност няма. Трудностите все едно остават. Да предположим, че вътре в електрона има някакъв си механизъм, който определя къде се готви да попадне електронът. Тогава тази машина е длъжна да определи *също* през кой отвор той има намерение да премине. Но не забравяйте, че цялата тази вътрешноелектронна механика не бива да зависи от това какво правим ние и в частност — отворили ли сме ние дадения отвор, или не. Значи, ако електронът, тръгвайки на път, вече е съобразил през коя дупка той ще се провира и къде ще се приземява, то за електроните, харесали си отвора 1, ние ще получим разпределението P_1, а за останалите — разпределението P_2. А тогава за електроните, които са преминали през двата отвора, разпределението ще се окаже *по необходимост* равно на сумата P_1+P_2. Не се вижда начин да се заобиколи този краен извод. Но ние експериментално доказахме, че той не е верен. Никой още не е решил тази кръстословица. Значи в дадения момент се налага да се ограничаваме с пресмятане на вероятности. Ние казваме „в дадения момент“, но ние имаме много сериозни основания да подозираме, че всичко това е вече завинаги и че човешките зъби са слаби да разчупят този костелив орех, понеже *природата на нещата е такава.*

8. Принцип на неопределеността

Ето как сам Хайзенберг е сформулирал своя принцип на неопределеността: ако вие изучавате някакво тяло и сте в състояние да определите x- компонентата на импулса на тялото с неточност Δp, вие не можете да определите едновременно координатата x на тялото с точност, по-голяма от $\Delta x = h/\Delta p$.

Произведението от неточностите в положението и импулса на тялото във всеки момент трябва да бъде по-голямо от постоянната на Планк. Това е частен случай на принципа на неопределеността. По-обща формулировка бе дадена в предходния параграф: невъзможно е по никакъв начин да се направи уред, определящ кое от двете взаимно изключващи се събития се е осъществило, без при това в същото време да не се наруши интерференчната картина.

Сега ние ще покажем в един частен случай, че ако нямаме на разположение някакъв принцип, подобен на принципа на Хайзенберг, не е възможно по никакъв начин да се избягнат трудностите. Да си представим такова видоизменение на опита, показан на фиг. 37.3, в който за стена с отвори да служи пластинка, поставена на ролки — това й дава възможност да се отмества нагоре и надолу (по направление на x), както е показано на фиг. 37.6.



Фиг. 37.6. Опит, в който се измерва отскачането на стената

Следейки внимателно движението на пластинката, можем да се опитаме да узнаем през кой отвор е преминал даден електрон. Представете си какво ще се случи, когато детекторът се постави в точка $x=0$. Когато електронът преминава през отвора 1, той се отклонява от пластинката надолу, за да попадне в детектора. Тъй като се е изменила вертикалната компонента на импулса, на пластинката ще действува сила на отблъскване — същият импулс, но в противоположна посока. Пластинката изпитва тласък нагоре. А когато електронът премине през долния отвор, пластинката ще почувствува тласък надолу. И при всяко друго положение на детектора импулсът, получаван от пластинката, ще бъде също нееднакъв: когато електронът преминава през горната дупка — един, когато през долната — друг. И значи, без да докосваме електрона, без да го смущаваме ни най-малко, а само като следим движенията на *пластинката,* ние можем да узнаем по кой път е минал той.

За да определим това, ние трябва да знаем само какъв е бил импулсът на екрана до неговото преминаване. Тогава, измервайки импулса на екрана след преминаването на електрона, ние веднага ще видим с колко той се е изменил. Но спомнете си, че при това съгласно принципа на неопределеността вече е невъзможно да знаем положението на пластинката с произволна точност. Обаче ако ние не знаем точно *къде* се намира тя, как тогава ще знаем къде се намират тези два отвора? За всеки нов електрон, проникващ през пластинката, отворите ще се оказват на ново място. А това означава, че центърът на интерференчната картина за всеки електрон също ще бъде на ново място. Интерференчните ивици (колебанията във вероятността) ще се размият. В следващата глава ние ще докажем числено, че при измерване на импулса на пластинката (достатъчно точно, за да може по измерването на отскачането да се узнае номерът на отвора (неопределеността в координатата x на пластинката е тъкмо достатъчна, за да измести възникващата в детектора картина нагоре или надолу на разстояние, равно на разстоянието от максимума до най-близкия минимум. От тези случайни отмествания картината на интерференцията се размазва и от нея в края на краищата не остава и следа.

Принципът на неопределеността „спасява" квантовата механика. Хайзенберг е разбирал добре, че ако би било възможно да се измерва с по-голяма точност едновременно и положението, и импулсът, квантовата механика рухва. Ето защо той допуска, че това е невъзможно. Тогава хората се заели да измислят способи как все пак да направят това. Но никой не успял да си представи способ, по който да измерва положението и импулса на каквото искате — на екран, електрон, билярдна топка, на какъвто и да е предмет — с голяма точност. И квантовата механика продължава да води своя рискован впрочем напълно ясно очертан начин на живот.

38

Връзка между вълновото и корпускулярното гледище

1. Вълни на амплитудата на вероятността
2. Измерване на положението и импулса
3. Дифракция от кристал
4. Размер на атома
5. Енергетични нива

1. Вълни на амплитудата на вероятността

В тази глава ние с вас ще обсъдим връзката между вълновата и корпускулярната гледни точки. От предходната глава знаем, че нито едната, нито другата е невярна. Обикновено ние винаги се стараехме да формулираме понятията акуратно или поне достатъчно точно, за да не се наложи те да се изменят при по-нататъшно изучаване. Разрешаваше се те да се разширяват, обобщават, но в никакъв случай да не се изменят. Но щом ние се опитаме да говорим за електрона като вълна или за електрона като частица, всяка от тези гледни точки рано или късно се изменя; те и двете са приблизителни. Затова всичко, което ще изучим в тази глава, в известен смисъл е неправилно; ще бъдат изказани някои полуинтуитивни съображения, които с течение на времето предстои да се уточнят и ще се наложи тук-там да се изменят, когато ние ги уточним с помощта на квантовата механика. Причината е в това, че без да се готвим сега да изучаваме квантовата механика по всички правила, ние искаме да получим поне представа за характера на ефектите, които ще открием там. При това целият наш опит се отнася или за вълните, или за частиците и затова твърде удобно е да се използват ту едните, ту другите представи, за да се постигне някакво разбиране на това, което ще се случи при определени обстоятелства, докато ние не знаем още цялата математика на квантовомеханичните амплитуди. С нашето придвижване напред ще се стараем да изясняваме най-слабите места. Впрочем много от тези места са почти верни, цялата работа е просто в тълкуването.

Преди всичко ние знаем, че новият, предложен от квантовата механика начин за описване на света — новата система на света — се състои в това, че той дава амплитудата на всяко събитие, което може да се случи. Ако събитието се състои в регистрация на частица, може да се даде амплитудата за намиране на частицата на това или онова място в един или друг момент време. Вероятността да се намери частицата тогава ще бъде пропорционална на квадрата на абсолютната стойност на амплитудата. Въобще вероятността да се намери частицата в някой момент на някакво място се изменя в зависимост от мястото и времето.

В частен случай амплитудата може да се изменя синусоидално в пространството и времето по закона $\exp[i(\omega t - \mathbf{k}.\mathbf{r})]$ (не забравяйте, че амплитудата е комплексно число, а не реално); тогава в нея влиза определена честота ω и определен вълнов вектор $\mathbf{k}$ (величината $k = |\mathbf{k}|$ се нарича *вълново число*). Това отговаря на онази определена класическа ситуация, когато може да се счита, че имаме частица с определена енергия E, свързана с честотата посредством връзката

$$E = \hbar\omega \tag{38.1}$$

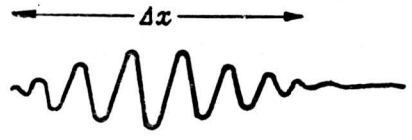
и с известен импулс $\mathbf{p}$, свързан с вълновия вектор посредством формулата

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \tag{38.2}$$

Това означава, че понятието частица е ограничено. Самото понятие частица, понятията положение, импулс на частицата и т. н., които ние така често използуваме, в известен смисъл не са удовлетворителни. Например, когато амплитудата, отнасяща се за събитието за намиране на частицата на едно или друго място,

се дава с функцията $\exp[i(\omega t - \mathbf{k}.\mathbf{r})]$, равна по абсолютна стойност на единица, то това означава, че вероятността частицата да се намери в коя да е точка е една и съща за всички точки. Получава се, че тогава ние просто не знаем *къде* се намира тя. Тя може да се окаже къде да е, нейното положение е неопределено в най-висша степен.

Когато пък положението на частицата е по-малко или повече известно, когато то може да бъде предсказано достатъчно точно, вероятността за това или онова местоположение трябва да бъде отлична от нула в определена област, имаща дължина например Δx. Вън от тази област вероятността е равна на нула. Вероятността — това е квадратът на модула на амплитудата. Когато квадратът от абсолютната стойност е равен на нула, то и амплитудата е равна на нула. Излиза, че амплитудата описва вълнов пакет с размер Δx (фиг. 38.1), а на дължината на вълната (разстоянието между максимумите на вълните) в пакета съответствува някаква стойност на импулса на частицата.



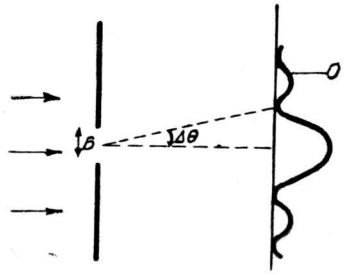
Фиг 38.1. Вълнов пакет с дължина Δx

Тук ние се сблъскваме със странно и в същото време много просто явление, което съвсем не е свързано непосредствено с квантовата механика. То е известно на всички, които са се занимавали с вълни, даже без да знаят квантовата механика, а именно: *невъзможно е еднозначно да се определи дължината на вълната за къс вълнов пакет.* Такъв вълнов пакет *няма* определена дължина на вълната; във вълновото число има неопределеност, свързана с крайната дължина на пакета, а значи и неопределеност в импулса.

2. Измерване на положението и импулса

За да разберем защо в квантовата механика се появява неопределеност в положението и (или) в импулса, ще разгледаме два примера. Ние вече видяхме по-рано, че ако това не би било така, ако би могло успоредно да се измерва и местоположението, и импулсът на някакво тяло, би възникнал парадокс. За щастие парадокс не възниква, а обстоятелството, че неопределеността възниква по естествен начин от вълновата картина, свидетелствува за това, че всичко тук е взаимно свързано.

Ето първият пример, показващ връзката между импулс и координата в условия, които е лесно да си представим. Нека през един единствен процеп на вертикален екран да преминават частици дошли отдалеч и имащи определена енергия. Всички те се движат хоризонтално (фиг. 38.2). Да съсредоточим нашето внимание върху вертикалната слагаема на импулса. Всяка от тези частици има (в обикновен класически смисъл) хоризонтална слагаема на импулса с определена големина p_0. Вертикалната слагаема на импулса p_y (преди частицата да е преминала през прореза) е също добре известна в класически смисъл: частиците не се движат нито нагоре, нито надолу, тъй като техният източник е много отдалечен и следователно вертикалната съставяща на импулса на частиците е равен точно на нула. А сега да предположим, че ширината на процепа е равна на B. Когато частицата премине през процепа, нейната вертикална координата ще се определи с добра точност $\pm B$. Това значи, че неопределеността в положението на частицата Δy ще бъде от порядъка на B. Може би вие искате да кажете, че $\Delta p_y = 0$, затова защото импулсът на частиците е точно хоризонтален. Но това не е така. Ние знаехме *преди* преминаването, че импулсът има само хоризонтална съставяща, а сега вече не знаем това. Преди преминаването на частицата през процепа ние знаехме нейната вертикална координата. След като частицата премине през процепа, ние знаем нейната вертикална координата, но загубваме информацията на вертикалната съставяща на импулса. Защо? Защото съгласно вълновата теория има място отклонение или дифракция на вълните, преминали през процепа, подобно на това, което става със светлината. Затова има крайна вероятност частиците, преминавайки през процепа, да не



Фиг. 38.2. Дифракция на частици, преминаващи през процеп

тръгнат право напред. Цялата картина на разпространението се размива за сметка на дифракцията и ъгълът на това разширяване (ъгълът, под който се вижда първият максимум) е мярка за неопределеността в посоката на движение на частицата.

Как става размиването на изображението в ширина? Размиването означава, че съществува някаква вероятност за това частицата да се отклони нагоре или надолу, т. е. да придобие компонента на импулса, насочена нагоре или надолу. (Ние говорим и за *вероятност*, и за *частица*, защото дифракционната картина може да се установи с помощта на брояч за частици, а когато броячът регистрира частица, например в точка C на фиг. 38.2, то той я регистрира като цяла частица. А това в класически смисъл значи, че частицата има и вертикален импулс, който я насочва от процепа направо в точка C.)

За да си представим примерно степента на неопределеността в импулса, нека напишем, че вертикалният импулс p_y е размазан на $p_0\Delta\theta$, където p_0 е хоризонталният импулс. Каква е величината $\Delta\theta$ в размазаната картина? Известно е, че първият минимум се наблюдава под ъгъл $\Delta\theta$ такъв, че в тази посока вълната от далечния край на процепа трябва да изостава с една дължина на вълната от вълната от близкия край (ние вече говорихме за това в гл. 30). Значи $\Delta\theta$ е равно на λ/B и тогава Δp_y в този експеримент е равно на $p_0\,\lambda/B$. Колкото по-малко е B, толкова по-точно се определя положението на частицата, толкова по-широка е дифракционната картина. Спомнете си, че когато ние затваряхме процепите в експеримента с микровълни, интензивността настрана от процепа нарастваше. Значи колкото по-тесен е процепът, толкова по-широка става дифракционната картина, толкова по-правдоподобно е, че ние ще намерим импулс у частицата, насочен настрана. И неопределеността във вертикалния импулс действително е обратно пропорционална на неопределеността в y, защото тяхното произведение е равно на $p_0\lambda$. Но λ — това е дължината на вълната, а p_0 — импулсът и съгласно квантовата механика тяхното произведение е равно на постоянната на Планк h. Получава се, че произведението от неопределеността във вертикалната слагаема на импулса и във вертикалната координата е величина от порядъка на h:

$$\Delta y\Delta p_y \approx h\,. \tag{38.3}$$

Ние не можем да приготвим система, в която положението на частицата по вертикалната ос да е известно с точност Δy и в същото време да предсказваме с определеност, превишаваща $\frac{h}{\Delta y}$, отклонението на нейното движение от вертикалата. Неопределеността във вертикалния импулс винаги е по-голяма от $\frac{h}{\Delta y}$, ако Δy е неопределеността, с която ние знаем положението на частицата.

Някои хора твърдят, че в квантовата механика всичко е неправилно. Когато частицата се е приближавала отляво, казват те, нейният вертикален импулс е бил равен на нула. А когато тя е преминала през процепа, става известно нейното положение. И едното, и другото може да бъде определено с произволна точност.

Съвсем вярно. Ние можем да зарегистрираме частицата, да определим нейното положение и това какъв би трябвало да бъде нейният импулс, за да попадне тя там, където е попаднала. Това всичкото е вярно. Но съотношението (38.3) между неопределеностите Δx и Δy няма нищо общо с това. Уравнението (38.3) има отношение към възможността за *предсказване*, а не към забележките относно това, какво се е *случило* в миналото. Каква е ползата от това, че ние ще кажем: „Аз знаех какъв е бил импулсът до преминаването на частицата през процепа, а сега зная освен това и координатата?“ Ето точно сега знанието за импулса на частицата вече е загубено. Щом тя е преминала през процепа, то ние вече не можем по-нататък да предсказваме нейния вертикален импулс. Става дума за теория, способна да предсказва, а не за някакви измервания, след като всичко се е свършило. Ние обсъждаме именно въпроса за това какво може да се предвиди.

Да се опитаме сега да подходим към тези неща по друг начин. Ще приведем друг пример за същото явление, но този път с по-подробни количествени оценки. Преди измервахме импулса по класически методи: ние разглеждахме посока, скорост, ъгли и тем подобни; в това се състоеше начинът за получаване на импулса по пътя на класическия анализ. Но щом импулсът е свързан с вълновото число, в природата съществува и друг, съвсем друг път за измерване на импулса на частиците (все едно — на фотона или на коя да е друга частица), който няма аналог в класическата механика. При него се използува уравнението 38.2) и просто се измерва *дължината на вълната*. Нека да опитаме да измерим импулса по този начин.

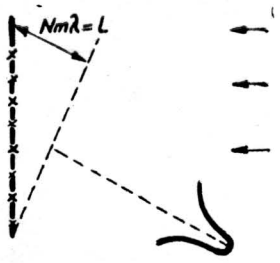
Нека имаме дифракционна решетка с много резки (фиг. (38,3) върху която пада сноп частици. Ние сме разглеждали такава задача не един път: когато частиците имат определен импулс, то вследствие интерференцията в определена посока възниква много рязък максимум. Ние също говорихме за това доколко точно може да се определи този импулс, т. е. каква е разделителната способност на решетката. Ние няма да извеждаме всичко това отново, а ще се позовем на гл. 30; там пресметнахме, че относителната неопределеност в дължината на вълната, свързана с дадена решетка, е равна на $1/Nm$, където N е броят на резките на решетката, а m — порядъкът на дифракционния максимум, т. е.

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{1}{Nm}. \tag{38.4}$$

Да препишем тази формула във вида

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}=\frac{1}{Nm\lambda}=\frac{1}{L}, \tag{38.5}$$

където L е разстоянието, показано на фиг. 38.3. Това е разликата между две разстояния: разстоянието, което изминава вълната (или частицата), отразила се от долната част на решетката и разстоянието, което изминава вълната, отразила се от горната част на решетката.



Фиг. 38.3. Определяне на импулса с помощта на дифракционна решетка

С други думи, вълните, образуващи дифракционен максимум, това са вълни, идващи от различни части на решетката. Първи пристигат вълните, тръгнали от долната част — това е началото на вълновия пакет, след това идват частите на пакета от средата на решетката и накрая — вълните от горния край на решетката. За това време вълновият пакет се отмества на разстояние L. Следователно, за да се получи рязка линия в спектъра, отговаряща на определен импулс (с точност, дадена от формулата (38.4), трябва да имаме вълнов пакет с дължина L. Ако пакетът е много къс (по-къс от L), няма да работи цялата решетка. Вълните, даващи спектъра, ще се отразяват при това само от една малка част на решетката и последната няма да работи качествено — получава се силно размазване по ъгъл. За да се ограничи това размазване, трябва да се използува цялата ширина на решетката, така че, макар за един кратък момент, целият вълнов пакет да пресича едновременно решетката и да се разсейва от всичките нейни части. Затова дължината на пакета трябва да бъде равна на L; само тогава неопределеността в дължината на вълната ще се окаже по-малка от това, което ни дава формулата (38.5). Виждаме, че

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}=\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{\Delta k}{2\pi}, \tag{38.6}$$

затова

$$\Delta k=\frac{2\pi}{L}, \tag{38.7}$$

където L е дължината на вълновия пакет.

Това означава, че когато вълновият пакет е по-къс от L, то неопределеността във вълновото число надхвърля $2\pi/L$. С други

думи, неопределеността във вълновото число, умножена с дължината на вълновия пакет (да я означим за малко с Δx), е поголяма от 2π. Ние нарекохме дължината на пакета Δx, тъй като точно това е неопределеността в положението на частицата. Ако вълновият пакет се разпростира само на една крайна дължина, то само там можем да открием частицата с неопределеност Δx. Това свойство на вълните (този факт, че произведението на дължината на вълновия пакет и неопределеността във вълновото число, свързано с този пакет, не е по-малко от 2π) е също така добре известно на всеки, който се е занимавал с вълни. И то няма никакво отношение към вълновата механика. Просто не могат да се преброят много точно вълните в краен вълнов пакет.

Това може да се обясни и по друг начин. Нека дължината на вълновия пакет да е L. Тъй като в краищата на пакета вълните спадат (както на фиг. 38.1), броят на вълните на разстояние L е известен с точност от порядъка на ± 1. Но броят на вълните на разстояние L е равен на $kL/2\pi$. Значи неопределеността в k е равна на $2\pi/L$. Отново се получи формулата (38.7) като просто свойство на какви да е вълни.

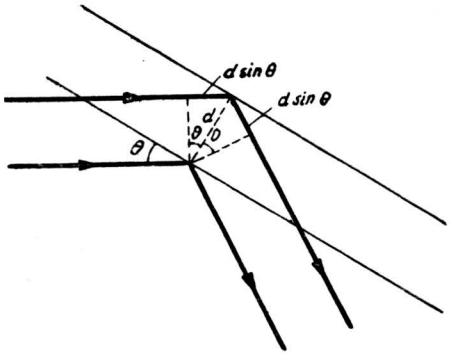
Това остава вярно винаги: и за вълни в пространството, когато k е броят радиани на 1 cm, а L — дължината на вълновия пакет, и за вълни на времето, когато ω е броят на трептенията за 1 s., а T — „дължината“ във времето на същия пакет. Иначе казано, ако вълновият пакет има продължителност само крайно време T, то неопределеността в честотата се дава с формулата

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{38.8}$$

Ние през цялото време се стараехме да подчертаем, че това е свойство на самите вълни, че всичко това е добре известно например в теорията на звука. А квантовомеханичните приложения на тези свойства се опират на тълкуването на вълновото число k като мярка за импулса на частицата p, свързан с k чрез равенството $p = \hbar k$, така че с формулата (38.7) вече се твърди, че $\Delta p \approx h/\Delta x$. Това установява границата на класическата представа за импулса. (Естествено е то да бъде някак подложено на ограничение, щом ние се готвим да описваме частиците като вълни.) И много добре е, че ние намерихме правило, което по някакъв начин ни посочва къде се нарушават класическите представи.

3. Дифракция от кристал

Сега ще разгледаме отражение на вълните на веществото от кристал. Кристал — това е твърдо тяло, състоящо се от много еднакви атоми, разположени в строг ред. Как трябва да се разположи този строй от атоми, за да се получи силен максимум, когато в дадена посока се отрази даден сноп светлина (рентгенови лъчи), електрони, неутрони или каквото и да е. За да се получи силно отражение, лъчите, разсеяни от всички атоми, трябва да бъдат във фаза един с друг. Не може да бъде така, че точно половината от вълните да са във фаза, а другата половина — в противофаза; тогава всички вълни ще изчезнат. Нужно е следователно да се намерят повърхнините на постоянна фаза; това са, както вече обяснихме по-рано, равнини, сключващи еднакви ъгли с началната и крайната посоки (фиг. 38.4).



Фиг. 38.4. Разсейване на вълни от кристални повърхности

Ако ние разгледаме две успоредни равнини, както е показано на фиг. 38.4, вълните, разсеяни от тях, ще се окажат във фаза само тогава, когато разликата между разстоянията, изминати от фронта, бъде равна на цяло число дължини на вълната. Тази разлика, както лесно се вижда, е равна на $2d\sin\theta$, където d е разстоянието между равнините. И тъй условието за кохерентно отражение има вида

$$2d\sin\theta = n\lambda \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{38.9}$$

Ако например кристалът е такъв, че атомите в него се подреждат в равнини, удовлетворяващи условието (38.9) с $n=1$, то ще се наблюдава силно отражение. Ако, от друга страна, съществуват други атоми със същите свойства (и те са разпределени със същата плътност), разположени точно по средата между слоевете, то тези междинни равнини ще разсейват вълните със същата сила; това разсейване интерферира с първото и те взаимно се погасяват. Затова d в израза (38.9) трябва да означава разстоянието между *съседните* равнини; не бива да се вземат две равнини, между които има пет други слоя атоми, и да се прилага за тях тази формула.

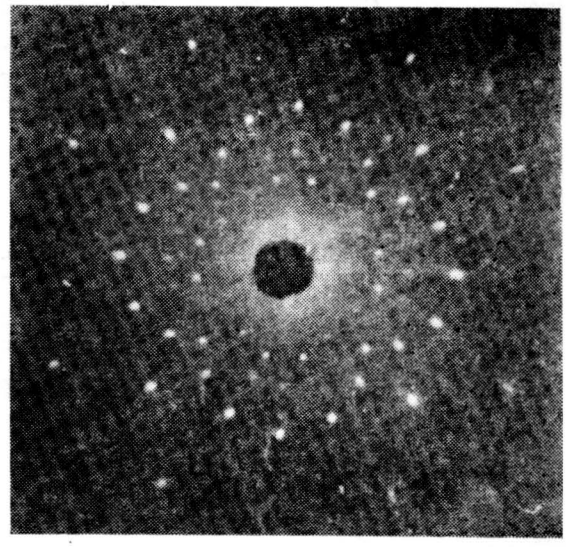
Интересно е, че истинските кристали обикновено не са толкова прости — те са съставени не от еднакви атоми, повтарящи се по определен закон. Те по-скоро приличат, ако си послужим с двумерна аналогия, на тапети, върху които се повтаря един и същ сложен мотив. За атомите „мотивът" е някакво тяхно разпределение, в което може да влизат доста голям брой атоми; например в калциевия карбонат това са атомите на калция, въглерода и три атома на кислорода. Важното е не какъв е рисунъкът, а това, че той се повтаря.

Този основен рисунък се нарича *елементарна клетка*, а законът, по който се повтаря той, определя *типа на решетката*; типът на решетката може веднага да се определи, като се видят отраженията и се разгледа тяхната симетрия. С други думи, от типа на решетката зависи къде *няма да има отражение* (на лъчите от кристала), но за да се разбере какво има във всяка елементарна клетка, трябва да се вземе под внимание и *интензивността* на разсейването в едни или други посоки. Посоките на разсейването зависят от типа на решетката, а *силата* на разсейването се определя от това какво има вътре във всяка елементарна клетка; по такъв начин е бил изучен строежът на кристалите.

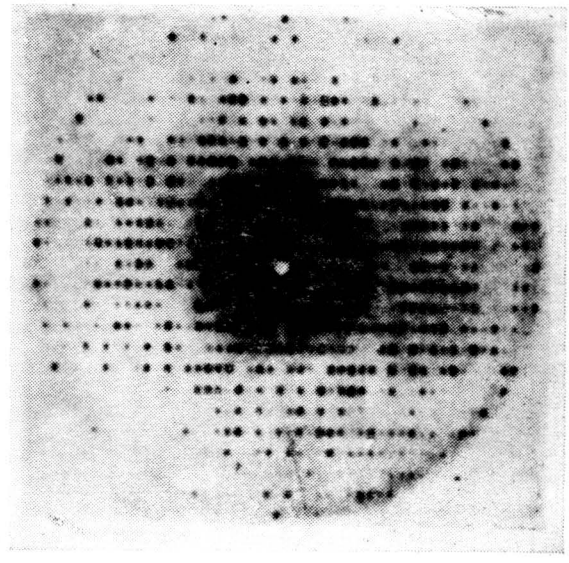
Две фотографии, получени при дифракция на рентгенови лъчи, са дадени на фиг. 38.5 и 38.6.

Забавна картина се получава с разсейването, когато разстоянието между две съседни равнини е по-малко от $\lambda/2$. В този случай уравнението (38.9) въобще няма решения за никое n. Излиза, че когато λ е по-голямо от удвоеното разстояние между две съседни равнини, никакви странични дифракционни петна няма и светлината (и не само светлината, но всичко каквото поискате) преминава направо през веществото. Преминава, без да се отразява, разсейва или губи някъде. В частност светлината (за нея λ е много по-голямо от междините) преминава, без да дава някаква картина от отраженията в кристалните равнини.

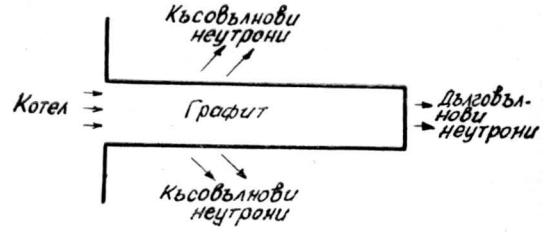
Интересни следствия на това явление се наблюдават в урановите реактори — източници на неутрони (неутроните — това вече са безспорно частици, попитайте когото искате.) Ако тези частици — неутрони, се пропускат през дълъг графитов блок, то те ще започнат да се разсейват и много трудно ще проникват на дълбоко в блока (фиг. 38.7). Те се разсейват, поради това че отскачат при удар с атомите на графита. Но строго погледнато, съгласно вълновата теория всичко изглежда съвсем иначе — неутроните отскачат от атомите поради дифракцията от кристалните равнини. Оказва се, че ако вземем дълга графитова пръчка, всички неутрони, излизащи от нейния далечен край, ще имат по-голяма дължина на вълната! Ако представим графически интензивността на неутроните като функция от дължината на вълната, на получената графика ще са представени само дължини на вълната, по-големи от една минимална дължина (фиг. 38.8). Значи по такъв начин могат да се получат много бавни неутрони. През графита проникват само най-бавните неутрони, те не дифрактират, не се разсейват от кристалните равнини на графита, а спокойно преминават като светлина през стъкло. И няма никакво разсейване настрана. Има още много доказателства за реалността на неутронните вълни и на другите частици.



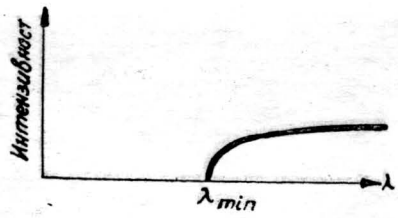
Фиг. 38.5. Дифракция на рентгенови лъчи от кристал на каменна сол



Фиг. 38.6. Дифракция на рентгенови лъчи от миоглобин



Фиг. 38.7. Дифузия на реакторни неутрони в графитен блок



Фиг. 38.8. Интензивност на неутроните, излизащи от графитна пръчка, във функция от дължината на вълната

4. Размер на атома

Ще разгледаме още едно приложение на принципа на неопределеността (38.3), но само, моля ви се, не възприемайте това пресмятане прекалено буквално; общата мисъл е правилна, обаче анализът не е направен много акуратно. Тази мисъл се отнася за определяне размерите на атомите; нали според класическите възгледи електроните би трябвало да излъчват светлина и обикаляйки по спирали, да паднат на повърхността на ядрото. Но съгласно квантовата механика това е невъзможно, тъй като в противен случай ние щяхме да знаем къде ще се окаже електронът и колко бързо се е въртял той.

Да допуснем, че имаме водороден атом и измерваме положението на електрона; ние не сме длъжни да бъдем в състояние да предвиждаме точно къде ще се окаже той, тъй като в противен случай неопределеността на импулса ще стане безкрайна. Всеки път, когато гледаме електрона, той ще бъде някъде; той има амплитуда на вероятността да бъде на различни места, така че има вероятност да бъде намерен където и да е. Обаче не всички тези места непременно трябва да бъдат около самото ядро; да предположим, че стойностите на разстоянието до ядрото са разсеяни около стойността a, т. е. разстоянието от ядрото до електрона средно е равно на a. Ще определим a, като изискваме пълната енергия на атома да бъде минимална.

При това положение стойностите на импулса съгласно съотношението на неопределеността са разсеяни около стойността h/a; затова, опитвайки се да измерим някак импулса на електрона (например като разсейваме на него фотони и наблюдаваме доплеровия ефект от подвижен разсейващ център), ние няма да получаваме винаги нулев ефект (електронът не стои на едно място), а ще получаваме импулси от порядъка $p \approx \frac{h}{a}$. Кинетичната енергия на електроните ще бъде приблизително равна на $1/2\ mv^2 = p^2/2m = h^2/2ma^2$. (Това, което ние правим сега, в известен смисъл е анализ на размерностите: ние съобразяваме как кинетичната енергия може да зависи от постоянната на Планк h, масата m и размера на атома a. Отговорът се получава с точност до числови множители от вида 2, π и т. н. Ние даже не определихме както трябва a. (По-нататък потенциалната енергия е равна на резултата от делението на минус e^2 с разстоянието до центъра a, т. е. — на $-\frac{e^2}{a}$ (както помните e^2 това е квадратът на електронния заряд, делен на $4\pi\varepsilon_0$). Сега гледайте: когато a намалява, потенциалната енергия също намалява, но колкото по-малко е a, толкова по-голяма е изискваната от принципа на неопределеността неопределеност в импулса и толкова по-голяма е кинетичната енергия. Пълната енергия е равна на

$$E = \frac{h^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{a}. \tag{38.10}$$

Ние не знаем на колко е равно a, но вместо това анаем, че атомът, осигурявайки своето съществуване, е принуден да се съгласи на компромис, така че неговата пълна енергия да бъде колкото е възможно по-малка. За да намерим минимума на E, диференцираме (38.10) по a, приравняваме производната на нула и намираме a. Производната на E е равна на

$$\frac{dE}{da} = -\frac{h^2}{ma^3} + \frac{e^2}{a^2}. \tag{38.11}$$

Уравнението $dE/da = 0$ дава за a стойността

$$a_0 = \frac{h^2}{me^2} = 0{,}528\text{Å} = 0{,}528 \cdot 10^{-10}\text{m}. \tag{38.12}$$

Това разстояние се нарича *боровски радиус* и ние виждаме, че размерите на атома са от порядъка на ангстрьом. Получи се

правилен числен резултат. Това е много добре, това е даже удивително добре, тъй като досега ние не разполагаме с никакви теоретични съображения относно размера на атома. От гледна точка на класическата физика атомите просто са невъзможни: електроните трябва да паднат върху ядрото на атома.

Като заместим a_0 от формулата (38.12) в (38.10), ние ще намерим енергията. Тя се оказва равна на

$$E_0 = -\frac{e^2}{2a_0} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -13{,}4 \text{ eV}. \qquad (38.13)$$

Какво означава отрицателната енергия? Просто това, че когато електронът се намира в атома, неговата енергия е по-малка, отколкото когато е свободен. Иначе казано, в атома електронът е свързан. И за да се откъсне той от атома, е нужна енергия; за йонизация на водородния атом е нужна енергия 13,6 eV. Не е изключено, разбира се, да е нужно два или три пъти повече енергия, или π пъти по-малко, тъй като нашето пресмятане беше твърде небрежно. Обаче ние се изхитрихме и избрахме всички константи така, че полученият резултат да бъде абсолютно верен. Величината—13,6 eV се нарича *ридберг* енергия; това е йонизационната енергия на водорода.

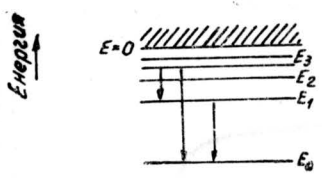
Едва сега става ясно защо ние не пропадаме през пода. Когато ходим, цялата маса атоми на нашите обувки се отблъсква от пода, от цялата маса негови атоми. Атомите се свиват, електроните са принудени да заемат по-малък обем и по принципа на наопределеността техните импулси средно нарастват, а това води до увеличение на енергията. Съпротивлението на атомите при свиване — това не е класически, а квантовомеханичен ефект. Според класическите понятия трябва да се очаква, че при сближаване на електроните с протоните енергията намалява; най-изгодното разположение на положителните и отрицателните заряди в класическата физика е, когато те стоят един върху друг. Това е било добре известно на класическата физика и е представлявало за нея една загадка: атомите все пак си съществували. Разбира се, учените и тогава измисляли разни начини за излизане от задънената улица, но *правилният* (да се надяваме) начин е известен само на нас.

Впрочем, когато ядрото има много електрони, те също се стараят да бъдат по-далеч един от друг. Причината за това на вас не ви е ясна още, но факт е, че ако един електрон е заел някакво място, друг няма вече да заеме това място. По-точно поради съществуване на две ориентации на спина тези елекрони могат да застанат един върху друг и да се въртят: единият в една посока, другият в друга. Но вие вече не можете да поставите на това място никакъв трети електрон. Вие сте длъжни да поставяте другите електрони на други места; и точно тук е истинската причина за това, че веществото има свойството еластичност. Ако би могло всички електрони да се поместят на едно място, веществото би било даже по-плътно, отколкото е обикновено. Именно благодарение на това, че електроните не могат да стоят един върху друг, съществуват и маси, и столове, и други твърди предмети.

Затова, ако искаме да разберем свойствата на веществото, естествено е да използуваме квантовата механика; за тази цел класическата явно е недостатъчна.

5. Енергетични нива

Ние говорихме вече за атома в най-ниското възможно енергетично състояние. Но оказва се, че електронът е способен и на много други неща. Той може да се върти много по-живо, неговите възможности за движение в атома са твърде разнообразни. Съгласно квантовата механика при установилите се условия на движение атомът може да има само напълно определени енергии. На диаграмата, представена на фиг. 38.9, ние ще нанасяме енер-



Фиг. 38.9. Схема на атомните енергетични нива
Показани са няколко възможни прехода

гията по вертикалата, а с хоризонтални линии ще отбелязваме разрешените стойности на енергията. Когато електронът е свободен, т. е. когато неговата енергия е положителна, тя може да приема произволни стойности; скоростта на електрона също може да бъде каква да е. Но енергиите на свързаните състояния не са произволни. Атомът може да има само една или друга енергия от допустимата съвкупност от стойности, например такива като на фиг. 38. 9.

Да означим тези разрешени стойности с E_0, E_1, E_2, E_3. Ако атомът първоначално се намира в едно от „възбудените състояния E_1, E_2 и т. н., той няма да остане в това състояние завинаги. Рано или късно той ще премине в по-ниско състояние и ще излъчи при това енергия във вид на светлина. Честотата на излъчената светлина се определя от изискването за запазване на енергията плюс квантовомеханичното разбиране на това, че честотата на светлината е свързана с енергията на светлината посредством условието (38.1). Затова например честотата на светлината, освободена при прехода от състояние с енергия E_3 в състояние с енергия E_1 е равна на

$$\omega_{31}=\frac{E_3-E_1}{\hbar}. \tag{38.14}$$

Тази честота е характерна за дадения вид атоми и определя линия в спектъра на излъчването. Възможен е и друг преход — от E_3 към E_0. Той има своя честота:

$$\omega_{30}=\frac{E_3-E_0}{\hbar}. \tag{38.15}$$

Още една възможност се състои в това, че ако атомът се намира във възбудено състояние E_1, той може да премине в основно състояние E_1, излъчвайки фотон с честота

$$\omega_{10}=\frac{E_1-E_0}{\hbar}. \tag{38.16}$$

Ние приведохме тука тези три прехода, за да подчертаем една интересна връзка между тях. От трите формули — (38.14), (38.15), (38.16), лесно получаваме връзката

$$\omega_{30}=\omega_{31}+\omega_{10}. \tag{38.17}$$

Въобще, откривайки две линии в спектъра, може да се очаква че ще се намери линия с честота, равна на сумата (или разликата) от двете честоти. Всички линии могат да се обяснят, като се намери определена серия от нива, такива, че всяка линия да съответствува на разликата на енергиите между някои две нива. Това забележително съвпадение между честотите на линиите в спектъра и нивата е било забелязано още до откриването на квантовата механика. То се нарича *комбинационен принцип на Рмц.* От гледна точка на класическата механика и той изглежда тайнствен. Впрочем, няма да напомняме повече за това, че класическата механика е фалирала в света на атомите; аз мисля, че вече убедително показахме това.

Ние говорихме за това, че в квантовата механика всички събития се представят във вид на амплитуди, които имат свойствата на вълни, имат определена честота и вълново число. Да видим сега как с помощта на амплитудите се обяснява това, че атомът има само определени енергетични състояния. Да се изведе и разбере това от всичко, което беше казано досега, е невъзможно. Но затова ние всички знаем, че вълните в ограничен обем имат определени честоти. Например, ако звуковата вълна е ограничена от стените на органната тръба или по друг някакъв начин, то звуковите трептения могат да бъдат различни, но честотите им не могат да бъдат произволни. И така е винаги: във всяко тяло, в което се задържат вълни, може да има само определени резонансни честоти. Вълните, затворени в ограничен обем, винаги имат само определени честоти. (По-нататък ние ще изучаваме това явление по-подробно и ще напишем всички нужни

формули.) Е, тогава щом съществува общо съотношение между амплитудната честота на трептенето и енергията, няма нищо удивително в това, че електроните, свързани в атомите, имат само напълно определени енергии.

6. Малко философия

Ще поговорим още малко относно философията на квантовата механика. Както винаги и тука има две страни: философското съдържание на физиката и неговата екстраполация за другите области на знанието. Когато философските идеи, свързани с науката, се пренасят в други области, те обикновено при това се изкривяват до неузнаваемост. Затова ние ще се ограничим в нашите бележки, доколкото това е възможно, само с физиката.

Най-напред ще започнем с най-интересния предмет — с идеята на принципа на неопределеността: наблюдението въздействува на явлението. Макар винаги да е било известно, че наблюдавайки дадено явление, ние му въздействуваме, тук смисълът е в това, че това въздействие не може да се пренебрегне, не може да се сведе до нула, не може чрез изменение в уреда произволно да се намали това влияние. Наблюдавайки явлението, невъзможно е, макар леко, да не се наруши ходът му и *теорията не може да бъде последователна, без да вземе под внимание това нарушение.* И в доквантовата физика наблюдателят понякога е бивал важен, но само в доста тривиален смисъл. Разглеждал се е да речем такъв въпрос: в гората пада дърво, но там няма никой, който да чуе това; причинява ли падането шум? И следвал отговор: *истинско* дърво, падайки в *истинска* гора, безспорно ще причини шум даже ако няма никой наоколо. Нека никой да не е могъл да слуша падането, все едно, ще останат други следи — някъде ще паднат листа, а на някои листа ще останат едва забележими драскотини от клонките, които е възможно да бъдат обяснени само с това, че листата са трептели. Така че следва да се допусне, че в известен смисъл звук наистина е имало. „Но имало ли е *усещане* за звук?“ — можем да попитаме ние. Не, за усещане явно трябва и съзнание. А имат ли съзнание мравките, пък и вдят ли се те в тази гора и съзнават ли нещо самите дървета — тъмен въпрос. Затова да захвърлим тази задача.

С раждането на квантовата механика започнали да подчертават и друго положение: не трябва да се говори за неща, които е невъзможно да се измерят. (Впрочем и теорията на относителността също е говорила за това.) Докато не е определено как да се измерва дадена величина, за нея няма място в теорията. А тъй като точната стойност на импулса на локализирана (намираща се на определено място) частица не може да бъде определена чрез измервателна процедура, то значи импулсът няма работа в теорията.

Та ето какво, ако вие мислите, че класическата теория затова е загинала, вие *имате грешка.* Би било лекомислено да се направи такъв извод. Невъзможността точно да се *измерва* координатата и едновременно с това импулсът не означава априори, че за тях *не трябва* да се говори, а само означава, че да се говори за тях *не е необходимо.* Всъщност в науките се случва иначе: идея или понятие, които е невъзможно пряко да се свържат с опита или да се измерят, могат да бъдат полезни, а може да са и безполезни. За тях може само да се каже, че присъствието им в теорията *не е задължително.* Нека например да сравняваме класическата теория на света с квантовата теория, а от експеримента следва, че координатата и импулсът могат да се измерват само неточно. Ние се питаме има ли смисъл *понятието* точно положение на частицата, или точен импулс на частицата. Класическата теория отговаря „да“, а квантата — „не“. Но това само по себе си не означава, че класическата физика прави грешка.

Когато била открита новата, квантовата механика, привържениците на класическата теория, т. е. всички физици освен Хайзен-

берг, Шредингер и Борн казвали: „Какво хубаво има в нея, във вашата теория, щом тя не може да отговори на най-простите въпроси: какво е точното положение на частицата? През кой отвор е преминала тя? и други.“ Отговорът на Хайзенберг гласял: „Аз не съм длъжен да отговарям на такива въпроси, тъй като вие не можете да ги зададете експериментално.“ С други думи, да се отговаря би означавало да се прави това, което не *обезателно* трябва да се прави. Да разгледаме две теории: (*А*) и (*Б*). Теорията (*А*) съдържа в себе си идея, която не може да се провери непосредствено, но която се използува в анализа; теорията (*Б*) не съдържа тази идея. Ако техните предсказания се различават, не може да се твърди, че теорията (*Б*) е грешна въз основа на това, че тя не може да обясни идеята от теорията (*А*); нали тази идея принадлежи точно към онези неща, които не могат да бъдат проверени непосредствено.

Какво да се прави? Добре е, разбира се, да се знаят кои от идеите не се поддават на експериментална проверка, но няма нужда всички те да бъдат отхвърлени. Не е вярно, че наука може да се гради само от такива понятия, които са пряко свързани с опита. Нали в самата квантова механика има и амплитуда на вълновата функция, и потенциал, и много други умствени построения, не поддаващи се на пряко измерване. Основата на науката е нейната способност да *предвижда*. Да се предвижда — това означава да се съобщи какво ще се случи в един опит, който никога преди това не е бил правен. Как може да се постигне това? Предполагайки, че ние независимо от експеримента знаем какво ще се случи, ние екстраполираме опита, въвеждаме го в област, в която той не е бил поставян. Ние разширяваме своите представи до такива граници, в които те никога не са били проверявани. Ако това не е направено — никакво предсказване няма. Затова някога напълно разумно е било за физика-класик в състояние на щастлива неосведоменост да предполага, че понятието положение, което безспорно има смисъл във футбола, има някакъв смисъл и за електрона. Това не е било глупост. Това е било разумна процедура. А сега например ние говорим, че принципът на относителността е верен при всякакви енергии, но нали може един прекрасен ден да се яви някой и да ни обясни колко глупави сме били. Ние няма да се досетим на кое място вършим „глупост“, докато не „надраснем себе си“; цялата проблема се свежда до това как и кога ще можем да направим това. Единственият начин да видим в какво се състои нашата грешка е да разберем *в какво се състоят* нашите предсказания. Така че без умствени построения не може.

Ние вече правихме редица бележки относно недетерминираността на квантовата механика, т. е. затова, че тя не е способна да предсказва какво ще се случи при дадени физически условия, колкото и акуратно да са осъществени тези условия в опита. Ако един атом се намира във възбудено състояние и може всеки момент да изпусне фотон, ние не можем да кажем в кой момент ще стане това; съществува крайна амплитуда на вероятността за излъчване на фотона във всеки момент и ние можем да предвидим само тази вероятност. Ние не можем точно да предскажем бъдещето. На тази основа се и изказват глупости от най-различен род относно неопределеността на всички явления в света, възникват въпроси относно свобода на волята на частиците и т. н.

Трябва, разбира се, да се подчертае, че и класическата физика е била в известен смисъл недетерминирана. Обикновено се мисли, че недетерминираността, невъзможността да се предсказва бъдещето — това е особеност на квантовата механика и именно с нея свързват възникването на представите за свобода на волята и т. н. Но ако нашият свят даже би бил класически, т.е. ако законите на механиката биха били класически, все едно, от това не следва, че същите или аналогични представи не биха възникнали. Да, разбира се, от гледна точка на класическата физика, като знаем местоположението и скоростта на всички частици в света (или в съд с газ), можем точно да предскажем какво ще бъде по-нататък. В

този смисъл класическият свят е детерминиран. Но представете си сега, че нашата точност е ограничена и че ние не знаем точното положение само на един от атомите; знаем го да речем с грешка една милиардна. Тогава, ако този атом се удари о друг атом, неопределеността на нашето знание за неговите координати след удара ще нарасне. А следващият удар още повече ще увеличи грешката. Така че, ако отначало грешката е била незабележима, то все едно, скоро тя ще израсте до огромна неопределеност. Ето ви един пример: вода, падайки от язовирна стена, пръска капки на всички страни. Отидете по-близко и на вашия нос също ще паднат няколко капчици. Това изглежда чиста случайност, макар че поведението на водата може да бъде предсказано на основата на чисто класически закони. Точното положение на всички капки зависи от най-малките колебания на водния поток пред стената. Но как то зависи? Едва забележими нерегулярности в падането на водата се усилват и довеждат до пълна случайност в движението. Ясно е, че ние не можем както трябва да предвиждаме положението на капките, ако не знаем движението на водата *абсолютно точно.*

По-правилно ще бъде, ако се каже, че за дадена точност (колкото и голяма да е тя, но крайна) може винаги да се намери такъв (голям) временен интервал, че за него става невъзможно да се направи предсказание. И този интервал (в това е същината) не е чак толкова голям. Той не е равен на милион години при точност една милиардна. С намаляване на грешката времето расте логаритмически и се оказва, че за много, много малко време цялата наша информация се загубва. Ако точността е равна даже на една милиард-милиард-милиардна (поставете колкото искате милиарда, но само се спрете някога), все едно, може да се посочи временен интервал, по-малък от времето, нужно за провеждане на измерване с такава огромна точност, след изтичането на който вече ще бъде невъзможно да се предсказва какво ще се случи. Затова не е честно да се говори, че вече във видимата свобода и недетерминираност на човешкото мислене ние виждаме доказателства за невъзможността за изучаването му в рамките на класическата „детерминирана“ физика и да приветствуваме квантовата механика като избавителка на нашия дух от „абсолютно механистичната“ Вселена. От практическа гледна точка „детерминизъм“ не е имало и в класическата механика.

39

Кинетична теория на газовете

1. Свойства на веществото
2. Налягане на газа
3. Свиваемост на излъчването
4. Температура и кинетична енергия
5. Закон за идеалния газ

1. Свойства на веществото

С тази глава започваме изучаването на нова тема, която ще ни отнеме много време. Ще започнем анализа на свойствата на веществото от физична гледна точка. Като знаем, че веществото е изградено от голям брой атоми или някакви други елементарни частици, които си взаимодействуват електрически и се подчиняват на законите на механиката, ще се постараем да разберем защо натрупванията на атомите имат точно определено поведение, а не някакво друго.

Не ще и дума, това е трудна задача. И ще бъде по-добре, ако ние още от самото начало подчертаем, че това е *извънредно* трудна задача и че за нейното решение ще са ни нужни съвсем различни способи от предишните. Когато изучавахме механиката и оптиката, можехме да започнем с точни формулировки на някои закони, например законите на Нютон, или с формулата за полето, създадено от ускорен заряд. Като ги опознахме, ние веднага можахме да обясним цяла бездна от всякакви явления, а след това тези закони ставаха за нас здрава основа, благодарение на която се усъвършенствувахме и в механиката, и в оптиката. Можем да продължаваме изучаването и по-нататък, но вече не ще открием някаква нова физика, а просто ще решаваме старите задачи с по-точни математически методи.

Такъв начин не е пригоден за изучаване на свойствата на веществото. За свойствата на веществото можем да кажем само най-прости неща. Този предмет е твърде сложен, за да може да се започне с най-основните закони. Ние, както и по-рано, ще се ползуваме от законите на механиката и електричеството. Но тези закони са твърде далеч от онези свойства, които ние възнамерявахме да изучаваме. От законите на Нютон до свойствата на веществото има твърде много крачки и всяка от тях е много трудна. Сега ние ще направим няколко такива крачки, но ми се иска да ви предупредя, че ако в предишните глави анализирахме явленията повече или по-малко строго, то сега с всяка стъпка все повече ще се отдалечаваме от строгостта. Свойствата на веществото ще можем да разберем само твърде приблизително.

Това е така по няколко причини. Първо, нашият анализ не може да бъде пълен, защото за него е необходимо дълбоко познаване на теорията на вероятностите, нали ние не възнамеряваме да проследим движението на всеки отделен атом, а искаме да узнаем средния брой атоми, движещи се в една или друга посока, и да пресметнем до какво ще ни доведе разликата в тези средни стойности. По такъв начин теорията на вероятностите влиза органически в нашата тема, а в математиката ние не сме още твърде силни и не може да се иска много от нас.

Втората и по-сериозна причина е чисто физична. Поведението на атомите се подчинява не на законите на класическата, а на квантовата механика и докато не изучим квантовата механика, не бива да говорим сериозно за изучаването на свойствата на веществото. Става дума не за прехода от големите предмети към малките (например от автомобила към билярдните топки), разликата между законите на класическата и квантовата механика е много по-дълбока и съществена и много обяснения просто ще бъдат неверни, ако изхождаме от класическата механика. Така че много неща засега въобще не сме в състояние да разберем, обаче за да бъдем предупредени, ще подчертаваме всеки път къде се намира безизходицата, когато обяснени-

ята ни доведат до нея. Затова в предишните глави се говореше за квантова механика: трябваше да се разбере в кои случаи се отказваме от класическата механика.

Защо изобщо ние изучаваме свойствата на веществото? Не би ли било по-добре да почакаме половин или една година, докато поизучим теорията на вероятностите и квантовата механика, а после да се захванем по-основно със свойствата на веществото? На това трябва да се отговори, че е по-добре да не се бърза с изучаването на трудните неща. Отначало — добре ли, зле ли — ще се запознаем с общите идеи, ще помислим какво може да се случи при едни или други обстоятелства, а после, когато опознаем по-добре основните закони, ще формулираме по-точно всичко това.

Всеки, който иска сериозно да анализира свойствата на веществото, трябва отначало да напише основните уравнения и да се опита да ги реши. Но всеки, който е започнал с това, е претърпял неуспех. Успехът е идвал само при този, който е пристъпвал към работата като *физик*. Тези хора са нямали в началото нищо освен груба идея, а след това са намерили вярното приближение, съобразявайки кое в това трудно положение е могло да се смята за голямо и кое за малко. Задачите в тази област са толкова сложни, че даже не съвсем точна и половинчата идея оправдава загубеното за нея време и човек може постоянно да се връща към една и съща задача, като се доближава малко по малко към нейното точно решение. Така постъпваме и в нашия курс.

И още една причина, поради която ние пристъпваме сега към изучаването на свойствата на веществата — срещнахме се вече с подобни идеи например в химията. Някои от тях са ни известни още от училището. Би било интересно да ги разберем от гледна точка на физика.

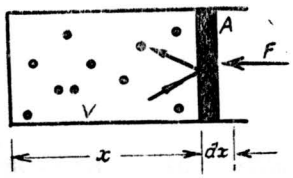
Ето един от най-увлекателните примери: известно е, че при еднакво налягане и температура равните обеми газ съдържат еднакъв брой молекули. Авогадро пръв е разбрал закона за кратните отношения: от това, че в химическата реакция между два газа обемите на реагиращите газове се отнасят като цели числа, следва, че равните обеми съдържат равен брой атоми? Но защо в равните обеми се съдържат равен брой атоми? Може ли да се обясни това, като се изхожда от законите на Нютон? Затова ще ви се наложи да изучите тази глава. Впоследствие ще говорим още много за налягания, обеми, температура и топлина.

Ще открием при това, че много съотношения между свойствата на веществото могат да се разберат, без да става дума за атоми. Например ако свием някое тяло — то ще се нагрее; ако нагреем тялото — ще се разшири. Връзката между тези явления може да се разбере, без да се изучава строежът на тялото. Науката, която се занимава с такива неща, се нарича термодинамика. Разбира се, дълбоко разбиране на термодинамиката е възможно едва след подробно изучаване на механизма, лежащ в основата на един или друг процес. Ето с това ще се занимаем: ще приемем от самото начало факта, че всички вещества се състоят от атоми и ще се постараем да разберем свойствата на веществото и законите на термодинамиката.

И така да започнем с изучаването свойствата на газовете, като изхождаме от законите на Нютон.

2. Налягане на газа

Всеки знае, че газът оказва налягане. Но защо? Това трябва да се разбере правилно. Ако нашите уши бяха много по-чувствителни, отколкото са в същност, през цялото време бихме чували страшен шум. Но природата се е погрижила нашите уши да не са така възприемчиви, иначе те биха се оказали съвсем безполезни за нас — в тях постоянно би имало диво бучене, приличащо на шум от стартираща ракета. Работата е в това, че



Фиг. 39.1. Атоми на газ в съд, в който се движи бутало без триене.

тъпанчетата на нашите уши са в съприкосновение с въздуха, а той се състои от огромно множество безпорядъчно движещи се молекули, които, като се удрят в тъпанчетата, създават такъв шум, като че ли едновременно много барабанчици бият безпорядъчно — бум, бум, бум... Ние обаче не чуваме тези звукове, защото атомите са твърде малки, а нашите уши — недостатъчно чувствителни. Безпорядъчните удари на молекулите би трябвало да пробият тъпанчетата, но те ги бомбардират непрекъснато и от вътрешната страна и в резултат пълната сила, действуваща на мембраната, се оказва равна на нула. Ако изпомпаме въздуха от едната страна или поне да го направим различен от двете страни по неговото относително количество, то тъпанчето би се пробило или в едната, или в другата посока, поради това че бомбардировката от едната страна би се оказала много по-силна. Понякога изпитваме това неприятно усещане, когато твърде бързо се издигаме с лифт или самолет, а още по-зле, ако при това сме простинали (в такъв случай набухналата слизеста обвивка запушва каналите, съединяващи през носоглътката вътрешната кухина на ухото с външното пространство, и по такъв начин двете налягания не могат бързо да се уравновесят).

За да анализираме това явление количествено, да предположим, че газът се намира в съд, на който едната стена представлява бутало, способно да се премества (фиг. 39. 1). Да намерим силата, с която действуват на буталото намиращите се вътре в съда атоми. В буталото се удрят атоми, които се движат вътре в обема V с всевъзможни скорости. Да предположим, че извън съда няма нищо — истински вакуум. Какво ще стане? Ако оставим буталото само на себе си и не го придържаме, при всеки удар на молекула то ще получава малък импулс и постепенно ще бъде съвсем изтикано от съда. За да го задържим там, ще се наложи да приложим сила F. Каква трябва да бъде тази сила? Говорейки за сила, ние ще я отнасяме към единица площ: ако площта на буталото е равна на A, то действуващата на него сила ще бъде пропорционална на площта. Да определим налягането като величина, равна на отношението на приложената върху буталото сила към площта на буталото:

$$P=\frac{F}{A}. \tag{39.1}$$

За да разберем по-добре защо се прави това, да пресметнем безкрайно малката *работа* dW, която трябва да изразходваме, за да преместим буталото на безкрайно малко разстояние dx (покъсно това ще ни послужи и за други цели). Тази работа е равна на произведението от силата по разстоянието или, съгласно (39.1) на произведението от налягането, площта на буталото и разстоянието. Всичко това е равно на произведението от налягането по изменението на обема, взето с обратен знак:

$$dW=F(-dx)=-PAdx=-PdV. \tag{39.2}$$

(Произведението на площта A по изменението на височината dx е равно на изменението на обема.) В този израз знакът минус идва от това, че при свиване обемът се *намалява* и ако го вземем под внимание, ще получим правилния резултат: за да свием газа, трябва да *изразходваме* работа.

И така с каква сила трябва да натискаме върху буталото, за да уравновесим ударите на молекулите? При всеки удар на буталото се придава някакъв импулс. Всяка секунда буталото получава определен импулс и започва да се движи. За да се предотврати това, приложената от нас сила върху буталото за една секунда трябва да му придаде точно същия импулс. По такъв начин силата е равна на импулса, придаден на буталото за 1 секунда. Същото може да се каже и по друг начин: ако оставим буталото само на себе си, то ще набере скорост за сметка на бомбардировката, с всеки удар ще бъде подтиквано и ще се движи с ускорение. Бързината на изменението на скоростта на буталото или ускорението е пропорционална на

действуващата сила. По такъв начин силата, която ние определихме като произведение от налягането по площта, е равна на импулса, придаден на буталото за 1 s от всички молекули вътре в съда.

Да пресметнем импулса, който се придава на буталото за 1 s е лесно. Ще направим това на два етапа: отначало ще определим импулса, придаден от един атом при сблъскване с буталото, а след това ще умножим тази величина с броя на сблъскванията на атомите с буталото за 1 s. Силата ще бъде произведението на тези две величини.

Да се заемем сега с тези величини: да предположим отначало, че буталото е идеален „отражател" на атомите. Ако това не е така, ще рухне цялата наша теория — буталото ще започне да се нагрява и ще произлязат множество най-различни събития, които не сме в състояние да предскажем. Обаче когато се установи отново равновесие, в резултат ще се окаже, че ефективно всяко стълкновение ще е еластично. Средно енергията на идващите и отиващите си частици не ще се измени. И така да предположим, че газът се намира в равновесие и буталото, като е неподвижно, не поглъща енергия. В такъв случай частица, долетяла до буталото с определена скорост, ще отлети от него със същата скорост, при което масата на частицата не ще се измени.

Ако v е скоростта на атома, а v_x — съставящата на скоростта по оста x, то импулсът „към буталото" е равен на mv_x, но щом частицата „се отрази", то импулсът „от буталото" е равен на същата величина. Значи при едно стълкновение на буталото се придава импулс $2mv_x$.

Сега е необходимо да пресметнем броя на атомните удари за 1 секунда. Можем да вземем който и да е интервал от време dt, а след това да разделим броя на ударите на dt. Много ли атоми ще попаднат в целта за това време? Да предположим, че обемът V съдържа N атома, т. е. във всеки единичен обем има $n=N/V$ атома. Да отбележим сега, че за времето t до буталото ще достигнат не всички частици, движещи се към него с дадената скорост, а само тези, които са се оказали достатъчно близко до него. Ако частиците са били твърде далеч, въпреки че се стремят към буталото, те не ще успеят да стигнат в срок. По такъв начин за времето t в буталото ще се ударят само онези частици, които в началния момент са били на разстояние не по-голямо от $v_x t$ от него. Следователно броят на ударите за време t е равен на броя на атомите, намиращи се на разстояние, което не превишава $v_x t$, а тъй като площта на буталото е равна на A, атомите, които с времето ще попаднат в целта, заемат *обема* $Av_x t$. А *броят* на атомите, попаднали в целта, е равен на произведението на обема по броя на атомите в единица обем $nv_x At$. Но нас, разбира се, не ни интересува броя на ударите за време t, а искаме да знаем броя на ударите за 1 секунда, затова ние делим на t и получаваме $nv_x A$. (Времето t може да бъде взето твърде малко, за красота може да се пише dt и после да се диференцира, но това е едно и също.)

И така, ние намерихме, че силата е равна на

$$F=nv_x\ A\,.\,2mv_x\,. \tag{39.3}$$

Обърнете внимание, че ако фиксираме плътността на частиците, то силата се оказва *пропорционална* на площта! Да се намери налягането след това е твърде просто:

$$P=2nmv_x^2\,. \tag{39.4}$$

Сега трябва да поправим някои неточности. Преди всичко не всички молекули имат една и съща скорост и не всички се движат в една посока, така че ще ни се наложи да имаме работа с различни v_x^2! Всяка молекула, като се удари в буталото, внася своя принос, затова трябва да вземем *средното* по всички молекули. Като направим това, ще получим

$$P=nm\langle v_x^2\rangle. \tag{39.5}$$

А не забравихме ли множителя 2? Не, защото само половината от атомите се движат към буталото. Другите летят в противоположна посока, а усреднявайки по v_x^2, ние усредняваме както по *положителните*, така и по *отрицателните* съставящи v_x. Ако просто усредним по v_x^2, ще се получи двойно по-голям резултат. Средното v_x^2 за положителните v_x е равно на половината от средното v_x^2 за *всички* v_x.

Но атомите подскачат в съда както си искат и затова е ясно, че „x-посоката" с нищо не се отличава за тях от която и да е друга; те се движат, където си искат: надясно-наляво, нагоре-надолу, напред-назад. Затова $\langle v_x^2\rangle$ (средния квадрат на скоростта на движение в една посока) е равен на средния квадрат на скоростта, в която и да е друга посока

$$\langle v_x^2\rangle = \langle v_y^2\rangle = \langle v_z^2\rangle. \tag{39.6}$$

Ще използуваме това обстоятелство за малък математически трик и ще открием, че всеки от членовете в (39.6) е равен на тяхната сума, делена на три, а сумата — това е квадратът на големината на скоростта:

$$\langle v_x^2\rangle = \frac{1}{3}\langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\rangle = \frac{\langle v^2\rangle}{3}. \tag{39.7}$$

Това е много добре, защото сега вече не е необходимо да се грижим за координатните оси и формулата за налягането може да се запише в следния вид

$$P = \frac{2}{3} n\left\langle \frac{mv^2}{2}\right\rangle. \tag{39.8}$$

Ние отделихме множителя $\langle mv^2/2\rangle$, защото това е *кинетичната енергия* на движението на молекулите като цяло. И така намерихме

$$PV = N\frac{2}{3}\left\langle \frac{mv^2}{2}\right\rangle. \tag{39.9}$$

Ако знаем скоростта на молекулите, много бързо ще пресметнем налягането.

В качеството на прост пример може да се опишат такива газове като хелий, парите на живак и калий при достатъчно висока температура или аргон; това са едноатомни газове, за които може да се смята, че техните атоми нямат вътрешни степени на свобода. Ако ни попадне сложна молекула, в нея може да има всевъзможни вътрешни движения, всякакъв род колебания и т. н. Ние предполагаме, че може да не ги взимаме под внимание, но можем ли да направим това, е въпрос сложен и ние пак ще се върнем към него, в същност за нашия случай това ще се окаже допустимо. И така, да предположим, че вътрешното движение на атомите може да не се разглежда и затова кинетичната енергия на движението на молекулата като цяло представя цялата енергия. За едноатомен газ кинетичната енергия е действително пълната енергия. Ще означаваме пълната енергия с буквата U (понякога нея я наричат пълна *вътрешна* енергия, като че ли в газа може да има някаква *външна* енергия), т. е. цялата енергия на всичките молекули на газа или който и да е друг обект.

В случая на едноатомен газ ще предположим, че пълната енергия U е равна на произведението от броя на атомите по средната кинетична енергия на всеки от тях, защото ние пренебрегнахме възможното възбуждане на атомите или каквито и да са вътрешно атомни движения. Тогава

$$PV = \frac{2}{3}U. \tag{39.10}$$

Малко ще се спрем и ще отговорим на следния въпрос: да предположим, че бавно свиваме газа; какво трябва да бъде налягането, за да свием газа до даден обем? Това се определя лесно, тъй като налягането е енергията, разделена на обема. Но когато газът се свива, се извършва работа и затова енергията на газа U нараства. Процесът на свиването се описва с някакво диферен-

циално уравнение. В началния момент газът заема определен обем и има определена енергия, поради това ни е известно и налягането. Щом започнем да свиваме газа, енергията U нараства, обемът V се намалява, а как ще се измени налягането — тепърва ще узнаем.

И така, предстои ни да решим диференциално уравнение. Сега ще направим това. Обаче трябва да подчертаем в самото начало, че свивайки газа, ние предполагаме, че цялата работа отива за увеличение на енергията на атомите му. Вие ще попитате: „А трябва ли да спрем тук? Къде още може да отиде тя?“ Оказва се, че изразходваната работа може да отиде и на друго място. Енергията може да „изтече“ от съда през стените: топлите (т. е. твърде бързите) атоми могат при бомбардировката да нагряват стените на съда и енергията да излезе навън. Но ние предполагаме, че това в нашия случай не става.

Ще направим малко обобщение, въпреки че и сега ще разглеждаме съвсем частен случай: ще запишем вместо $PV=\frac{2}{3}U$

$$PV=(\gamma-1)\,U. \tag{39.11}$$

Енергията U се умножава по $(\gamma-1)$ за удобство, защото по-нататък ще ни се наложи да имаме работа с газове, за които множителят пред U е равен не на 2/3, а на някое друго число. За да можем да описваме и такива случаи, да запишем този множител така, както го записват от почти сто години. Тогава в нашия случай на едноатомен газ, какъвто е хелият, $\gamma=5/3$, защото $5/3-1=2/3$.

Ние вече казахме, че извършената при свиването на газа работа е равна на $-PdV$. Свиване, при което не се поглъща и не се отделя топлина, се нарича *адиабатно* свиване, тази дума е образувана от три гръцки думи: a (*не*) + dia (*през*) + bainein (*преминава*). (Думата адиабатен се употребява във физиката в няколко различни смисъла, така че не винаги може да се разбере какво общо имат помежду си.) При адиабатното свиване цялата изразходвана работа отива за изменение на вътрешната енергия. Ето в това е смисълът, че няма загуба на енергия и значи $PdV=-dU$. Но тъй като $U=PV/\gamma-1$, може да се напише

$$dU=\frac{PdV+VdP}{\gamma-1}. \tag{39.12}$$

И така, $PdV=-(PdV+VdP)\,/\gamma-1$ или, като приведем подобните членове, $\gamma PdV=-VdP$, или

$$\gamma\frac{dV}{V}+\frac{dP}{P}=0. \tag{39.13}$$

Ако приемем, че γ е константа, а това е така в случая на едноатомните газове, уравнението ще се интегрира и ще получим $\gamma\ln V+\ln P=\ln C$, където C е интеграционна константа. Минавайки в степенна форма, ще получим такъв закон:

$$PV^{\gamma}=C \text{ (константа)}. \tag{39.14}$$

Казано по друг начин, ако са изпълнени адиабатните условия, т.е. няма загуби на енергия и газът при свиване се затопля, в случая на едноатомен газ произведението от обема по налягането, повдигнато в степен 5/3, е постоянна величина! Този резултат ние получихме чисто теоретически, но опитът показва, че и в действителност всичко става точно така.

3. Свиваемост на излъчването

Да приведем още един пример от кинетичната теория на газовете: Химиците не се интересуват особено от него, но е много важен за астрономите. Вътре в нагретия до висока температура съд се намират огромен брой фотони. (В качеството на такъв съд може да вземем много гореща звезда. Слънцето не е достатъчно топло за тази цел. В звездата, разбира се, има твърде много атоми, но ако температурата ѝ е много висока, атомите могат да се

пренебрегнат и да се счита, че вътрешността на звездата изцяло е запълнена с фотони.) Да си спомним сега, че фотонът притежава импулс **p**. (При изучаването на кинетичната теория на газовете ние винаги ще изпитваме страшни неудобства; p е налягане, но **p** — още и импулс; V е обем, но това е едновременно и скорост, а T е и температура, и кинетична енергия, и време, и момент на силата; тук трябва да се гледа с 4 очи.) Сега буквата **p** е импулс, вектор. Ще постъпим така, както и в предишния параграф, за ударите на фотоните в стената е отговорна x-компонентата на импулса, а удвоената x-компонента на импулса е импулсът, получен от стената след всеки удар. Така, вместо $2mv_x$ пишем $2p_x$, а при изчислението на броя на ударите е нужно да се поставя както преди v_x. Извършвайки това, ние вече записваме формулата (39.4) за налягането във вида

$$P=2np_xv_x. \tag{39.15}$$

След усредняването ще получим произведението на n по средната стойност на p_xv_x (спомнете си какво говорихме за множителя 2), а след като на помощ бъдат повикани двете други измерения, ще намерим

$$PV=N\frac{\langle \mathbf{p}\cdot\mathbf{v}\rangle}{3}. \tag{39.16}$$

Тази формула почти съвпада с (39.9), защото импулсът е равен на $m\mathbf{v}$, просто това е по-обща формула, това е всичко. Произведението на налягането по обема е равно на произведението на пълния брой атоми по средната стойност $1/3$ $(\mathbf{p}\cdot\mathbf{v})$.

На какво е равно $\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}$ за фотоните? Импулсът и скоростта имат еднаква посока, а скоростта е равна на скоростта на светлината, затова интересуващото ни произведение е импулсът на фотона, умножен по скоростта на светлината. Произведението на импулса на фотона по скоростта на светлината е енергията на фотона: $E=p.c.$ Ние имаме работа с *енергията* на всеки фотон и трябва да умножим средната енергия на фотона по броя на фотоните. Получава се една трета от пълната енергия:

$$PV=\frac{U}{3} \text{ (в случая на фотонен газ).} \tag{39.17}$$

Следователно за фотоните, тъй като отпред стои $1/3$, множителят $(\gamma-1)$ в (39.11) е равен на $1/3$, т.е. $\gamma=4/3$, значи излъчването в съда се подчинява на закона

$$PV^{4/3}=C. \tag{39.18}$$

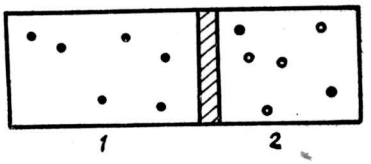
По такъв начин ние знаем свиваемостта на излъчването! Тази формула може да се използува при анализа на участието на излъчването в налягането вътре в звездата, да се пресметне налягането и да се прецени как то се изменя при свиването на звездата. Просто удивително е колко много ние вече можем!

4. Температура и кинетична енергия

Досега ние нямахме работа с *температурата*, съзнателно избягвахме разговори на тази тема. Знаем, че ако свиваме газа, енергията на молекулите нараства и обикновено казваме, че тогава газът се нагрява. Сега трябва да разберем какво отношение има това към температурата. Известно ни е какво е това адиабатно свиване, но как да направим опита, за да можем да кажем, че е бил проведен при *постоянна температура*? Ако вземем два еднакви съда с газ, допрем ги един до друг и ги подържим така достатъчно дълго, даже ако в началото тези два съда са притежавали това, което ние наричаме различна температура, в края на краищата техните температури ще станат еднакви. Какво означава това? Само това, че съдовете са достигнали състоянието, което те в края на краищата биха достигнали, ако бихме ги

оставили дълго време сами на себе си! Състоянието, в което температурата на двете тела е еднаква, е точно окончателното състояние, което достигат след продължителен допир едно с друго.

Нека да разгледаме какво ще стане, ако съдът е разделен на две части от движещо се бутало и всяко отделение е запълнено с различен газ, както това е показано на фиг. 39.2 (за простота да предположим, че имаме два едноатомни газа, да кажем, хелий и неон). В частта 1 атоми с маса m_1 се движат със скорост v_1, а в единица обем имаме n_1 броя, в частта 2 тези числа са съответно равни на m_2, v_2 и n_2. При какви условия се достига равновесие?



фиг. 39.2. Атоми на два различни едноатомни газа, разделени с подвижно бутало

Разбира се, бомбардировката отляво кара буталото да се движи надясно и да свива газа във втората част, след това същото става отдясно и буталото се движи така назад и напред, докато налягането от двете страни се изравни и тогава буталото спира. Ние можем да направим така, че налягането от двете страни да бъде еднакво, за това е необходимо вътрешните енергии, падащи се на единица обем, да бъдат еднакви или произведението на броя на частиците в единица обем n по средната кинетична енергия да бъде еднакво в двете части. Сега ще се опитаме да докажем, че при равновесие трябва да бъдат еднакви и отделните множители. Засега знаем само, че произведенията на броя на частиците в единичните обеми по средните кинетични енергии са равни помежду си

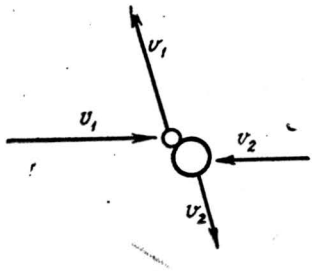
$$n_1\left\langle\frac{m_1v^2}{2}\right\rangle=n_2\left\langle\frac{m_2v_2^2}{2}\right\rangle,$$

което следва от условието за равенството на наляганията и от (39.8). Предстои ни да установим, че когато температурите на газовете се изравняват, заедно с постепенното приближаване към равновесието се изпълнява не само това условие, а става и нещо друго.

За да бъде по-ясно, да предположим, че нужното налягане вляво се достига за сметка на много голяма плътност, но малки скорости. При големи n и малки v може да се получи същото налягане както при малки n и големи v. Ако атомите са плътно опаковани, могат да се движат бавно, а те могат да бъдат и съвсем малко, но да се удрят в буталото с голяма сила. Ще се установи ли равновесието завинаги? Отначало изглежда, че буталото няма да мръдне никъде и така ще бъде винаги, но ако премислим всичко още един път, ще стане ясно, че сме пропуснали много важно нещо. Работата е в това, че налягането върху буталото съвсем не е равномерно, буталото се разтрептява точно така, както тъпанчето на ухото, за което говорихме в началото на главата, нали всеки нов удар не прилича на предишния. Получава се не постоянно равномерно налягане, а по-скоро нещо като барабанна дроб — налягането непрекъснато се мени и нашето бутало като че ли постоянно трепти. Да предположим, че атомите от дясната част се удрят в буталото повече или по-малко равномерно, а отляво атомите са по-малко и ударите им са редки, но много енергични. Тогава буталото ще получава твърде силен импулс отляво и ще се отмества надясно към страната на по-бавните атоми, при което скоростта на тези атоми ще нараства. (При удар в буталото всеки атом приема или губи енергия в зависимост от това, в каква посока се движи буталото в момента на стълкновението.) След няколко стълкновения буталото ще мръдне, после още, още и още..., газът в дясната част ще потрепва от време на време, а това ще доведе до увеличение на енергията на неговите атоми и тяхното движение ще се ускори. Така ще продължава дотогава, докато не се уравновеси поклащането на буталото. А равновесие ще се установи тогава, когато буталото получи такава скорост, че да отнема от атомите енергия толкова бързо, колкото и ще им я отдава. И така, буталото се движи с някаква средна скорост и на нас ни предстои да я намерим. Ако това ни се удаде, ще стигнем по-близо до решението на задачата, защото атомите трябва така да си изменят скоростите, че всеки газ да получава чрез буталото толкова енергия, колкото губи.

Твърде трудно е да се пресметне движението на буталото във всичките му детайли. Въпреки че е лесно да се разбере всичко това, оказва се, че да се анализира е малко по-трудно. Преди да пристъпим към такъв анализ, да решим друга задача: нека съдът да е напълнен с два вида молекули с маси m_1 и m_2, със скорости v_1 и v_2 и т. н. — сега молекулите ще могат да се изучат по-отблизо. Ако отначало всички молекули № 2 са в покой, то това не може да продължава дълго, защото в тях ще се удрят молекулите № 1 и ще им придават някаква скорост. Ако молекулите № 2 могат да се движат значително по-бързо, отколкото молекулите № 1, то все едно, рано или късно ще им се наложи да отдадат част от своята енергия на по-бавните молекули. По такъв начин, ако съдът е запълнен със смес от два газа, то проблемът се състои в определяне на относителната скорост на молекулите от двата вида.

Това е също трудна задача, но все пак ще я решим. Отначало ще се наложи да решим „подзадачата“ (отново един от тези случаи, когато независимо от това как се решава задачата, крайният резултат се помни леко, а изводът изисква голямо изкуство). Да предположим, че пред нас са още сблъскващи се молекули, притежаващи различни маси. За избягване на усложнения ние наблюдаваме сгълкновението от системата на техните центрове на масите (ц. м.), откъдето по-леко се проследява ударът на молекулите. По законите на сблъскванията, изведени от законите за запазване на импулса и енергията, след удара молекулите могат да се движат само така, че всяка запазва големината на своята първоначална скорост, а може да се измени само *посоката* на движението. Типичното сблъскване изглежда така, както е изобразено на фиг. 39.3. Да предположим за момент, че ние наблюдаваме сблъскване, при което системата на центровете на масите е в покой. Освен това трябва да предположим, че всички молекули се движат хоризонтално. Разбира се, след първия удар част от молекулите ще се движи вече под някакъв ъгъл спрямо изходната посока. Казано по друг начин, ако в началото всички молекули се движеха хоризонтално, то след известно време ще открием вече молекули, движещи се вертикално. След редица други стълкновения те отново ще сменят посоката си и ще се завъртят на някакъв ъгъл. По такъв начин дори някому в началото да се удаде да въведе порядък всред молекулите все пак те твърде скоро ще се разпръснат в разни посоки и всеки път все повече ще се разпиляват. До какво в края на краищата ще ни доведе това? *Отговор*: *всяка двойка молекули ще се движи в произволно избраната посока така охотно, както и в коя и да е друга.* След това по-нататъшните сблъсквания не могат вече да изменят разпределението на молекулите.



фиг. 39.3. Сблъскване на две нееднакви молекули, наблюдавано от система та на центъра на масата

Какво се има пред вид, когато се говори за равновероятно движение в кое и да е направление? Разбира се, не може да се говори за вероятност на движението по дадена права — правата е много тънка, за да може към нея да се отнесе вероятност, а трябва да се вземе „нещо“ за единица. Идеята се заключава в това, че през даден участък от сфера с център в точката на сблъскването преминават толкова молекули, колкото през всеки друг участък на сферата. В резултат на сблъскванията молекулите се разпределят по посоки така, че на всеки два равни по площ участъка от сферата ще съответстват равни вероятности (т.е. еднакъв брой преминали през тези участъци молекули).

Между другото, ако сравняваме първоначалната посока с тази, образуваща с нея някакъв ъгъл θ, интересно е, че елементарната площ на сфера с радиус единица е равна на произведението 2π по $\sin\theta d\theta$ или същото по диференциал на $\cos\theta$. Това означава, че косинусът на ъгъла θ между две посоки приема с равна вероятност която и да е стойност между -1 и $+1$.

Сега трябва да си спомним за това, което става в същност, нали нямаме стълкновение в системата на центъра на тежестта, а се удрят два атома с произволни векторни скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Какво става с тях? Ще постъпим така: отново ще преминем към

системата на центъра на тежестта, само че сега тя се движи с „усреднена по масите“ скорост $\mathbf{v}_{\text{ц.м.}} = (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)/(m_1+m_2)$. Ако следим удара от системата на центъра на тежестта, той ще изглежда така, както е изобразено на фиг. 39.3, само че трябва да помислим за относителната скорост на сблъскването $\mathbf{w}$. Относителната скорост е равна на $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$. Следователно работата стои така: движи се системата на центъра на тежестта, а вътре в тази система молекулите се приближават с относителната скорост $\mathbf{w}$, след като са се ударили, те се движат в нови посоки. Докато става всичко това, центърът на тежеста се движи през всичкото време с една и съща скорост без изменение.

Е, какво ще се получи в края на краищата? От предишните разсъждения правим следния извод: при равновесие *всички посоки на* $\mathbf{w}$ *са равновероятни относно посоката на движение на центъра на масата.*[1] Това значи, че в края на краищата между посоката на относителната скорост и движението на центъра на тежестта няма никаква корелация. Ако даже такава корелация е съществувала в началото, то сблъскванията биха я нарушили и тя на края ще изчезне напълно. Затова средната стойност на косинуса на ъгъла между $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}_{\text{ц.м.}}$ е равна на нула. Това значи, ч

$$\langle \mathbf{w}.\mathbf{v}_{\text{ц. м.}} \rangle = 0. \tag{39.19}$$

Скаларното произведение $\mathbf{w}.\mathbf{v}_{\text{ц.м}}$ се изразява лесно чрез $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{w}.\mathbf{v}_{\text{ц.м.}} = \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)}{m_1+m_2} =$$

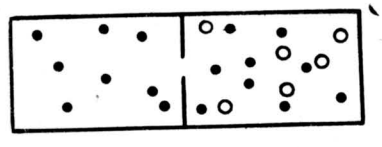
$$= \frac{(m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2) + (m_2 - m_1)(\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2)}{m_1+m_2}. \tag{39.20}$$

Да започнем отначало с $\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2$. На какво е равно средното $\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2$, т. е. на какво е равна средната проекция на скоростта на една молекула върху посоката на скоростта на другата молекула? Ясно е, че вероятността за движението на молекулата както в едната посока, така и в противоположната е еднаква. *Средната стойност на скоростта* $\mathbf{v}_2$, *в която и да е посока е равна на нула.* Затова и в посоката на $\mathbf{v}_1$ средната стойност на $\mathbf{v}_2$ също е равна на нула. И така, средната стойност на $\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2$ е равна на нула! Следователно стигнахме до извода, че средната $m_1 v_1^2$ трябва да бъде равна на $m_2 v_2^2$. Това значи, че *средните кинетични енергии на двете молекули трябва да бъдат равни:*

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \tag{39.21}$$

Ако газът се състои от два вида атоми, то може да се покаже (и ние даже смятаме, че ни се удаде да направим това), че средните кинетични енергии на двата вида атоми са равни, когато газът се намира в състояние на равновесие. Това означава, че тежките атоми се движат по-бавно, отколкото леките, а това се проверява лесно, като направим опит с „атоми“ с различни маси във въздушен жлеб.

Сега да направим следващата крачка и да покажем, че ако в съда се намират два газа, разделени с преграда, то по мярката на постигнатото равновесие средните кинетични енергии на атомите на различните газове ще бъдат еднакви, въпреки че атомите са затворени в различни съдове. Това разсъждение може да се построи и по други начини. Например можем да си представим, че в преградата е направена малка дупчица (фиг. 39.4), така че молекулите на единия газ минават през нея, а молекулите на втория са толкова големи, че не могат да преминат. Когато се установи равновесие, в тази половина, където се намира сместа на двата газа, средните кинетични енергии на молекулите от двата вида се



фиг. 39.4. Два газа в съд, резделен от полунепроницаема преграда

[1] Този аргумент, който привеждаше още Максвел, е малко коварен. Въпреки че окончателният извод е верен, той *не следва* непосредствено от съображенията за симетрия, които ние използувахме по-рано. Нали минавайки към отправна система, движеща се през газа, ние можем да открием изкривено разпределение на скоростите. Не можахме да намерим просто доказателство за този резултат.

изравняват. Но нали измежду проникналите през дупката молекули има и такива, които при това не са загубили енергия, поради което средната кинетична енергия на молекулите на чистия газ трябва да бъде равна на тази на сместа. Това доказателство не е много задоволително, защото нали би могло и да няма такава дупка, през която да могат да минават молекулите на единия газ и да не могат да преминават тези на другия.

Да се върнем към задачата за буталото. Може да се покаже, че кинетичната енергия на буталото също трябва да бъде равна на $^1/_2 m_2 v_2^2$. В същност кинетичната енергия на буталото е свързана само с неговото хоризонтално движение. Пренебрегвайки възможните движения на буталото нагоре и надолу, ние ще намерим, че на хоризонталното движение съответствува кинетична енергия $^1/_2 m_2 v_{2x}^2$. Но точно по същия начин, изхождайки от равновесието от другата страна, може да се покаже, че кинетичната енергия на буталото трябва да бъде равна на $^1/_2 m_1 v_{1x}^2$. Въпреки че повтаряме предишното разсъждение, възникват някои допълнителни трудности във връзка с това, че в резултат на сблъскванията средните кинетични енергии на буталото и молекулите на газа се изравняват, защото буталото се намира не вътре в газа, а е отместено на една страна.

Ако не ви удовлетворява и това доказателство, то може да се измисли и изкуствен пример, когато равновесието се обезпечава от устройство, по което молекулите на всеки газ бият от двете страни. Да предположим, че през буталото минава къс прът, на чиито краища е поставена по една сфера. Прътът може да се движи през буталото без триене. По всяка от сферите от всички страни се удрят молекули от единия вид. Нека масата на нашето устройство да е равна на m, а масите на молекулите на газа, както и по-рано, са равни на m_1 и m_2. В резултат на стълкновенията с молекулите от първия вид кинетичната енергия на тялото с маса m е равна на средната стойност $^1/_2 m_1 v_1^2$ (ние вече доказахме това). Точно по същия начин сблъскванията с молекулите от втория вид заставят тялото да има кинетична енергия, равна на средната стойност на $^1/_2 m_2 v_2^2$. Ако газовете се намират в топлинно равновесие, кинетичните енергии на двете сфери трябва да бъдат *равни*. По такъв начин резултатът, доказан за случая на смес от газове, може да се обобщи незабавно за случая на два различни газа при еднаква температура.

И така, ако два газа имат еднаква температура, то средните кинетични енергии на молекулите на тези газове в системата на центъра на масите са равни.

Средната кинетична енергия на молекулите е свойство само на „температурата". А щом е свойство на „температурата", а *не на газа*, тя може да служи като *определение* на температурата. По такъв начин средната кинетична енергия на молекулите е някаква функция на температурата. Но кой ще ни подскаже по коя скала да отчитаме температурата? Ние можем сами да *определим* скалата на температурата така, че средната енергия да бъде пропорционална на температурата. Затова най-добре е да наречем „температура" самата средна енергия. Това би било най-простата функция, но за нещастие тази скала са я избрали другояче и вместо да нарекат енергията на молекулите просто „температура", използуват постоянен множител, свързващ средната енергия на молекулите с градуса на абсолютната температура или градуса на Келвин. Този множител е $k = 1{,}38.10^{-23}$J на всеки градус по Келвин.[1] По такъв начин, ако абсолютната температура на газа е равна на T, то средната кинетична енергия на молекулите е равна на $^3/_2\ kT$ (множителят 3/2 е въведен само за удобство, благодарение на което ще изчезнат множителите в другите формули).

Да отбележим, че кинетичната енергия, свързана със съставящата на движението в коя да е посока, е равна на $^1/_2\ kT$. Трите независими посоки на движението я довеждат до $^3/_2\ kT$.

---

[1] Стоградусовата скала — това е скалата на Келвин, в която за нула е приета температурата 273,16°, така че T = 273,16 + стоградусовата температура.

5. Закон за идеалния газ

Сега нашето определение за температурата може да се вмъкне в уравнението (39.9) и да се намери законът за зависимостта на налягането на газа от температурата: произведението на налягането по обема е равно на произведението на пълния брой на атомите по универсалната константа k и температурата:

$$PV=NkT. \tag{39.22}$$

Следователно при еднаква температура, налягане и обем *броят на атомите* е строго определен — това е също универсална константа! По такъв начин от законите на Нютон следва, че в равни обеми, на които и да е газове, при еднакви температура и налягане, се съдържат равно количество молекули. Какъв неочакван извод!

На практика, когато имаме работа с молекули, се налага да оперираме с големи числа, затова химиците произволно избрали едно число, много голямо число, и му измислили специално име. Нарекли го *мол*. Молът е едно много изкуствено число. Защо химиците не взеха за единица 10^{24}, за да излезе кръгло число — това е исторически въпрос.

Така се случи, че те избраха за удобство стандартното число $N_0=6{,}02.10^{23}$ обекта и го нарекоха един мол обекти. След това, вместо да измерват броя на молекулите в парчета, те ги измерват в молове[1]. Може да се напише броят на моловете (изразявайки ги чрез N_0) и да се умножи по броя на атомите в един мол, след това да се умножи по kT, а след това, ако искаме, да разделим произведението на броя на атомите в един мол на k. Тогава ще получим моларната стойност на k, за тази величина ще отделим специална буква R. Моларната стойност на k е равна на 8,317 J: $R=N_0k=8{,}317$ J /мол. $^0K^{-1}$. По такъв начин ние намерихме закона за газа във вид на произведение на броя на моловете (него го означаваме с буква N) по RT или във вид на произведение на броя на атомите по kT:

$$PV=NRT \tag{39.23}$$

Смисълът е същият, само единиците за измерване са различни. В качеството на единица ние използуваме 1, а химиците 6.10^{23}!

Ще направим още една забележка по повод на газовия закон; тя се касае до неща по-сложни от едноатомните молекули. Досега ние имахме работа само с движението на едноатомен газ в центъра на масата. А какво ще стане, ако отчетем при това и действието на силите? Да разгледаме отначало случая, когато буталото се задържа от хоризонтално разположена пружина, на която действува сила. Взаимното сблъскване на атомите и буталото във всеки момент, разбира се, не зависи от положението на буталото. Условията на равновесието остават предишните. Независимо от това, къде се намира буталото, от него се иска само да има такава скорост на движение, че да получава от молекулите толкова енергия, колкото им отдава. Наличието на пружинка не променя нещата. *Скоростта*, с която се движи буталото, средно е същата. По такъв начин, нашата теорема за това, че средната кинетична енергия в една посока е равна на $^1/_2kT$, е *вярна независимо от това, има ли сили, или няма.*

Да разгледаме например двуатомна молекула, съставена от атоми с маси m_A и m_B. На нас ни се удаде да докажем, че движението в центъра на тежестта на частите A и B е такова, че $\langle {}^1/_2 m_A v_A^2\rangle=\langle {}^1/_2 m_B v_B^2\rangle=3/2\,kT$. Но как може да бъде така, ако отделните части са свързани помежду си? Въпреки че са свързани помежду си, обменът на енергия при взаимни завъртания, изменения на разстояния и сблъсквания с други молекули *зависи само от то-*

[1]Това, което химиците наричат молекулно тегло, не е нищо друго освен масата на един мол молекули в грамове. Молът се определя така, че масата на един мол атоми на изотопа въглерод 12 (чието ядро се състои от 6 протона и 6 неутрона) е точно равна на 12 g.

ва, колко бързо те се движат. Само от това се определя обменът на енергията при удар. Силата във всеки отделен момент няма никакво значение. Следователно даже ако между отделните части на молекулата действуват сили, този принцип е верен.

Ще докажем на края, че законът за газа е верен и в случай, когато вътрешното движение не се отчита. Досега на нас не ни беше нужно да включваме вътрешното движение. Ние просто разглеждахме едноатомен газ. Но сега ще покажем, че скоростта на центъра на масата на какъвто и да е обект, който може да се разглежда като тяло с маса M, е равна на

$$\frac{1}{2} M v^2_{\text{ц.м}} = \frac{3}{2} kT. \qquad (39.24)$$

Казано по друг начин, могат да се разглеждат както отделните части, така и цялата молекула изцяло. Да видим защо може да се прави това: масата на двуатомната молекула е равна на $M = m_A + m_B$, а скоростта на центъра на масата е $\mathbf{v}_{\text{ц.м.}} = (m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B)/M$. Нужно ни е да определим $\langle v^2_{\text{ц.м}} \rangle$. Ако повдигнем в квадрат $V_{\text{ц.м}}$, ще се получи

$$v^2_{\text{ц.м}} = \frac{m_A^2 v_A^2 + 2m_A m_B \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B + m_B^2 v_B^2}{M^2}.$$

Умножавайки това по $1/2\ M$ и усреднявайки, ще получим

$$\frac{1}{2} M v^2_{\text{ц.м}} = \frac{m_A {}^3/_2 kT + 2m_A m_B \langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle + m_B {}^3/_2 kT =}{M}$$

$$= \frac{{}^3/_2 kT + 2m_A m_B \langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle .}{M}$$

[Ние се възползувахме от това, че $(m_A + m_B)/M = 1$]. А на какво е равно $\langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle$? (Хубаво би било да беше равно на нула!) За да намерим това средно, ще използуваме нашето предположение, че относителната скорост $\mathbf{w} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$ не предпочита някоя определена посока, т. е. средната съставяща по която и да е посока е равна на нула. Следователно ние предполагаме, че

$$\langle \mathbf{w} . \mathbf{v}_{\text{ц.м}} \rangle = 0.$$

Но какво е това $\mathbf{w} . \mathbf{v}_{\text{ц.м}}$? Това е скаларното произведение, равно на

$$\mathbf{w} . \mathbf{v}_{\text{ц.м}} = \frac{(\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B)(m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B)}{M} =$$

$$= \frac{m_A v_A^2 + (m_B - m_A)(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B) - m_B v_B^2}{M}.$$

По-нататък, тъй като $\langle m_A v_A^2 \rangle = \langle m_B v_B^2 \rangle$, първият и последният член се унищожават взаимно и получаваме

$$(m_B - m_A) \langle \mathbf{v}_A . \mathbf{v}_B \rangle = 0.$$

Така, ако $m_A \neq m_B$, то $\langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle = 0$, а това означава, че на твърдото движение на цялата молекула, разглеждана като една частица с маса M, отговаря средна кинетична енергия, равна на ${}^3/_2 kT$.

Едновременно доказахме, че средната кинетична енергия на *вътрешното* движение на двуатомната молекула е равна на ${}^3/_2 kT$, ако не отчитаме движението на центъра на тежестта! Нали пълната кинетична енергия на отделните части на молекулата е равна на ${}^1/_2 m_A v_A^2 + {}^1/_2 m_B v_B^2$, а средната ѝ стойност — ${}^3/_2 kT + {}^3/_2 kT$ или $3kT$. Кинетичната енергия на движението на центъра на тежестта е равна на ${}^3/_2 kT$, така че средната кинетична енергия на въртеливото и трептеливото движение на двата атома вътре в молекулата — това е разликата на тези две величини, ${}^3/_2 kT$.

Теоремата за средната енергия на центъра на тежестта — това е една твърде обща теорема: за всеки обект, разглеждан като единно цяло, независимо от това дали действуват на този обект сили, или не, средната кинетична енергия на всяко независимо движение е

равна на $^1/_2kT$. Тези „независими посоки на движение“ понякога се наричат *степени на свобода* на системата. Броят на степените на свобода на молекула, съставена от r атоми, е равен на $3r$, защото за определянето на положението на всеки атом са нужни три координати. Пълната кинетична енергия на молекулата може да се представи или като сума от кинетичните енергии на отделните атоми, или като сума от кинетичната енергия на движението на центъра на тежестта и кинетичната енергия на вътрешните движения. Понякога последната може да се представи като сума от кинетичната енергия на въртене и кинетичната енергия на трептене, но това може да стане само приблизително. Ако приложим нашата теорема към r-атомна молекула, тя ще гласи, че средната кинетична енергия на молекулата е равна на $^3/_2rkT$J, от които $^3/_2kT$ е кинетичната енергия на движението на молекулата като цяло, а остатъкът $^3/_2(r-1)kT$ е вътрешната кинетична енергия на въртене и трептене.

40
Принципи на статистическата механика

1. Експоненциална атмосфера
2. Закон на Болцман
3. Изпарение на течност
4. Разпределение на молекулите по скорости
5. Специфични топлоемности на газовете
6. Поражение на класическата физика

1. Експоненциална атмосфера

Ние вече изучавахме някои свойства на голям брой сблъскващи се атоми. Науката, която се занимава с това, се нарича кинетична теория и описва свойствата на веществата, разглеждайки как се сблъскват атомите. Ние твърдим, че всяко свойство на веществото може да се обясни изцяло, като разглеждаме движението на отделните му части.

Засега ще се ограничим със случая на топлинно равновесие, т. е. само с един подклас от всичките явления в природата. Законите на механиката, приложими в условията на топлинното равновесие, получиха името *статистическа механика*, и в тази глава вие ще се запознаете малко с някои основни теореми на тази наука.

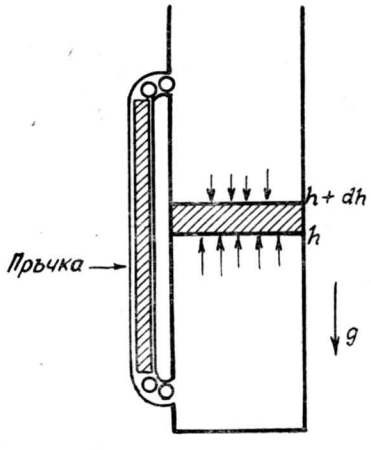
Вие вече знаете една теорема от статистическата механика. Съгласно с тази теорема, за кое да е движение при абсолютна температура T, средната кинетична енергия на всяко независимо движение (всяка степен на свобода) е равна на $\frac{1}{2}kT$. След това на нас ни става нещичко ясно за средния квадрат на скоростта на атомите. Сега ни е необходимо да узнаем малко повече за координатите на атомите, за да изясним много ли от тях се намират при топлинно равновесие в една или в друга точка от пространството, а също и по-подробно да изучим разпределението на атомите по скорости. Въпреки че знаем на какво е равен средният квадрат на скоростта, ние все пак не можем да отговорим на въпроса, колко атоми притежават три пъти по-голяма скорост от корена от средния квадрат на скоростта, или пък имат скорост, равна на една четвърт корен от средния квадрат на скоростта. А изведнаж всички атоми имат еднаква скорост?

И така, ето два въпроса, на които ще се опитаме да дадем отговор: 1) Как се разполагат в пространството атомите, когато им действуват сили? 2) Какво е разпределението на атомите по скорости?

Да забележим, че това са два съвършено независими въпроса и че разпределението по скорости винаги е еднакво. Това би могло да се очаква, след като изяснихме, че средната кинетична енергия на една степен на свобода винаги е равна на $\frac{1}{2}kT$, независимо от това, какви сили действуват на молекулите. Разпределението на молекулите по скорости не зависи от силите, защото силите не влияят на честотата на сблъскванията.

Нека започнем с примера за разпределението на молекулите в атмосфера, подобна на тази, в която ние живеем, но без вятър или каквито и да са други смущения.

Да предположим, че имаме работа с достатъчно висок стълб газ, намиращ се в топлинно равновесие (не както в истинска атмосфера, в нея както е известно, с изкачването нагоре става по-студено). Тук ще посочим, че нарушение на равновесието в случай на разлика в температурите на различни височини може да се демонстрира, помествайки в стълба газ един металически прът така, че неговите краища да се докосват до малки сферички (фиг. 40.1). Долните топчета, получавайки от молекулите на газа енергия $\frac{1}{2}kT$, я предават чрез пръта на горните топчета и ги разтърсват, горните топчета на свой ред разтърсват докосващите се с тях молекули. Разбира се, в края на краищата температурата на различните височини в гравитационното поле ще стане еднаква.



фиг. 40.1. Равновесие в атмосфера с постоянна температура

Налягането на височина h трябва да е по-голямо от налягането на височина $h + dh$ с теглото на газа, затворен между тези две нива. Прътът и топчетата изравняват температурата.

Предстои ни да намерим закона, по който ще става разреждането на атмосферата по време на изкачването нагоре, когато температурата на всички височини е еднаква. Ако N е пълният брой на молекулите в обема V на газа с налягане P, то $PV=NkT$ или $P=nkT$, където n е броят на молекулите в единица обем. С други думи, ако е известен броят на молекулите в единица обем, то известно е и налягането и обратно: налягането и плътността са пропорционални една на друга, нали температурата в нашия случай е постоянна. Но налягането не може да бъде постоянно, с намалението на височината то трябва да расте, защото на долния слой се пада, така да се каже, да издържа теглото на всички атоми, разположени отгоре. Сега може да се определи как налягането се изменя с височината. Ако на височина h се отдели площадка с единица площ, то на тая площадка ще действува отдолу сила, равна на налягането P. Ако не беше силата на тежестта, то на площадка на височина $h+dh$ би действувала отгоре надолу точно същата сила. Но в нашия случай това не е така: действуващата отдолу сила трябва да превъзхожда силата, действуваща отгоре със стойност, равна на теглото на газа, затворен между слоевете h и $h+dh$. На всяка молекула действува силата на тежестта mg, където g е ускорението на силата на тежестта. В интересуващия ни слой се намират ndh молекули.

Това води към такова диференциално уравнение: $P_{h+dh}-P_h=dP=-mgndh$. Тъй като $P=nkT$, а T е постоянна, можем да се избавим или от P, или от n. Да изключим от уравнението P; тогава ще получим

$$\frac{dn}{dh}=-\frac{mg}{kT}n.$$

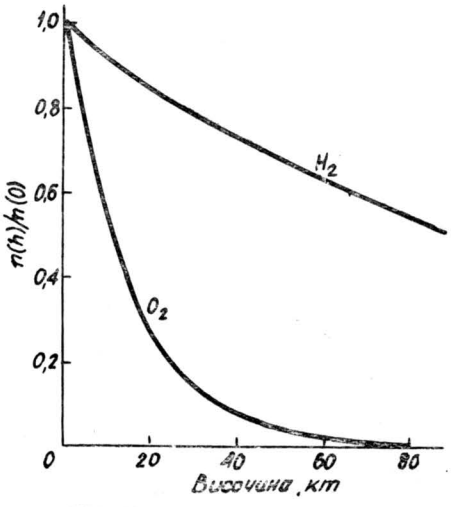
Това диференциално уравнение ни показва как намалява плътността с увеличението на височината.

Сега ние разполагаме с диференциално уравнение за плътността на частиците n, която се изменя с височината, но се изменя така, че производната на плътността е пропорционална на самата плътност функция, производната на която е пропорционална на самата функция е експоненциална функция и решението на диференциалното уравнение има вида

$$n=n_0e^{-mgh/kT}\ . \qquad (40.1)$$

Тук интеграционната константа n_0 е плътността на височина $h=0$ (която може да се зададе произволно), с височината плътността намалява експоненциално.

Да отбележим, че ако имаме няколко вида молекули с различни маси, техният брой ще спада по различни експоненти. Броят на по-тежките молекули намалява по-бързо с височината, отколкото броя на леките молекули. Затова може да се очаква, че щом кислородът е по-тежък от азота, то с изкачването нагоре относителното съдържание на азот в атмосферата (смес от азот и кислород) ще нараства. В нашата атмосфера във всеки случай на достъпна височина това фактически не става, понеже вследствие на смущения газовете отново се смесват, нали това не е изотермична атмосфера. При това на големи височини преобладават много леки газове, например водород, тъй като молекулите на леките са способни да се изкачат на такава височина, където всички останали експоненти вече са умрели (фиг. 40.2).



фиг. 40.2. Нормираната плътност за кислорода и водорода като функция на височината в гравитационното поле на Земята при постоянна температура

2. Закон на Болцман

Да отбележим тук факта, че числителят на експоненциалния показател в равенството (40.1) е *потенциалната енергия* на атома. Затова в нашия случай е възможно да се формулира законът по следния начин: плътността във всяка точка е пропорционална на

$$e^{-\text{п. е.}/kT},$$

където п. е. е потенциалната енергия на отделния атом.

Възможно е това да е случайност и този закон да е верен само в частния случай на еднородно гравитационно поле. Обаче може да се покаже, че това е много общо твърдение. Да предположим, че на молекулите на газа действуват някакви други, негравитационни сили. Например молекулите притежават електрически заряди, а тогава те ще реагират на електрическо поле или на друг заряд, който ги притегля. А може би в резултат на взаимно притегляне на атомите един към друг или към стените, или към кое да е твърдо тяло, или към каквото и да е съществуват някакви сили на притегляне, които зависят от взаимното разположение на молекулите и действуват на всички молекули. Да предположим сега за простота, че всички молекули са еднакви и че силата действува на всяка отделна молекула, така че пълната сила, действуваща на произволно отделена част от газа, е равна просто на произведението на броя на молекулите по силата, действуваща на една молекула. Работата съвсем ще се опрости, ако изберем координатната система така, че силата F да действува по оста x.

Така, както и по-рано, да разсечем газа с две паралелни плоскости, промеждутъкът между които е равен на dx. Тогава силата, действуваща на всеки атом, умножена по броя на атомите в 1 cm^3 (обобщение на предишното nmg) и умножена по dx, трябва да уравновеси изменението на налягането: $Fndx = dP = kTdn$. Или, придавайки на този закон друга форма, която ще потрябва по-късно, ще запишем:

$$F = kT\frac{d}{dx}(\ln n). \tag{40.2}$$

Сега да отбележим, че Fdx е работата, която трябва да се извърши за пренасянето на молекулата от x в $x+dx$ и ако силата F е произлязла от потенциала, т. е. работата може да се описва с помощта на потенциалната енергия, необходимата ни величина може да смятаме като изменение на потенциалната енергия (п. е.). Отрицателното изменение на потенциалната енергия е извършената работа Fdx, така че $d(\ln n) = -d(\text{п. е.})/kT$, или след интегрирането

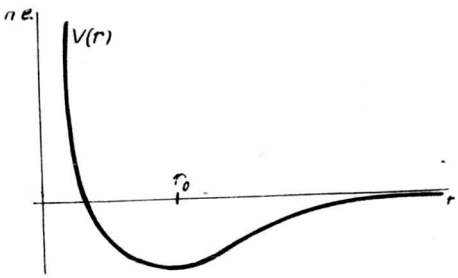
$$n = (\text{константа})\, e^{-\text{п.е.}/kT}. \tag{40.3}$$

По такъв начин, това което ни се удаде да забележим в частния случай, е вярно изобщо. (А какво ще стане, ако силата F не произлиза от потенциала? Тогава (40.2) чисто и просто няма решение. В такъв случай, след като някой атом опише затворен път, по който пълната работа не е равна на нула, или ще се прибави, или ще се загуби енергия и никога няма да се установи равновесие. Температурното равновесие е невъзможно, ако външните сили, действуващи на газа, не са консервативни. (Уравнението (40.3) е известно под името *закон на Болцман*. Това е още един от принципите на статистическата механика: вероятността една молекула да бъде намерена в определена точка на дадена пространствена конфигурация се изменя експоненциално, при което показателят на експонентата се състои от потенциалната енергия на дадена пространствена конфигурация, взета с обратен знак и разделена на kT.

По такъв начин ние знаем нещо за разпределението на молекулите. Да предположим, че имаме на разположение плаващ в течност положителен йон, който притегля обкръжаващите го отрицателни йони. Много ли от тях ще се окажат на различни разстояния от положителния йон? Ако на нас ни е известно, как потенциалната енергия зависи от разстоянието, отношението между броя на йоните, намиращи се на различни разстояния, се определя от получения от нас закон. На този закон могат да се намерят и много други приложения.

3. Изпарение на течност

В по-висшата статистическа механика се опитват да решат следната важна задача. Да предположим, че съществува съвкупност от взаимно привличащи се молекули и силата между всеки две от тях, да кажем i-та и j-та, зависи само от разстоянието помежду тях r_{ij} и може да бъде представена във вид на производна от потенциалната енергия $V(r_{ij})$. На фиг. 40.3 е показан възможният вид на такава функция. Ако $r > r_0$ при сближаване на молекулите енергията се намалява, затова молекулите се притеглят; ако молекулите се сближат още повече, енергията ще нарасне рязко, значи на малки разстояния молекулите силно се отблъскват. Такова е в общи черти поведението на молекулите.



фиг. 40.3. Крива на потенциалната енергия за две молекули.
Потенциалната енергия зависи само от разстоянието

Да предположим сега, че ние сме запълнили някакъв съд с тези молекули и искаме да знаем как средно те ще се поместят там. На това дава отговор изразът exp $(-$п. е.$/\kappa T)$. В този случай пълната потенциална енергия, ако предположим, че молекулите си взаимодействуват само по двойки, е равна на сумата на всички енергии на двойките (в по-сложните случаи могат да се срещнат и тройни сили, но електрическите сили например са по двойки). Поради това вероятността, че молекулите образуват конфигурация, характеризираща се с дадени комбинации на разстоянията r_{ij}, е пропорционална на

$$\exp\Big[-\frac{1}{\kappa T}\sum_{i,j} V(r_{ij})\Big]$$

Ако температурата е много висока, така че $\kappa T \gg |V(r_0)|$, експонентата почти навсякъде е малка и вероятността да се намери молекулата на едно или друго място почти не зависи от разстоянието до другите молекули. Да разгледаме случая на две молекули: в този случай exp (-п. е.$/\kappa T$) ще бъде вероятността да се намерят молекулите на разстояние r една от друга. Ясно е, че вероятността е максимална тогава, когато потенциалът е най-отрицателен, а когато потенциалът се стреми към безкрайност, вероятността е почти равна на нула (това става на много малки разстояния). Това означава, че атомите на газа нямат шанс да се сблъскат един с друг, вече толкова много силно се отблъскват. Но шансовете да се намерят тези молекули са твърде големи (ако отнесем вероятността *към единица обем*) близо до точката r_0. Тук вероятността е по-голяма, отколкото в другите точки, но колко е по-голяма — това зависи от температурата. Ако температурата е много голяма в сравнение с разликата на енергията в точките $r = r_0$ и $r = \infty$, експонентата е почти винаги равна на единица. Това е случаят, когато средната кинетична енергия (тя е от порядъка на κT) значително превъзхожда потенциалната енергия. В този случай силите нямат значение. Но със спадането на температурата вероятността да се намерят молекулите на разстояние, близко до r_0, рязко нараства в сравнение с вероятността да се намерят молекулите на което и да е друго място. И наистина, ако κT е много по-малко от $[V(r_0)]$, около r_0 експонентата има достатъчно голям положителен показател. С други думи, при даден обем молекулите предпочитат да бъдат на разстоянието на минималната енергия, а не твърде далече една от друга. С падането на температурата атомите се сближават, сбиват се в куп, обединяват се в течности, в твърди тела и молекули, а ако ги загреем, се изпаряват.

Ако е необходимо да се опише точно как протича изпарението или въобще да се уточни как се държат молекулите при дадени обстоятелства, то се постъпва така. Преди всичко е необходимо, колкото се може по-точно да се узнае законът за взаимодействието на молекулите $V(r)$. Как ще се направи това, е безразлично: може да се изчисли потенциалът с помощта на квантовата механика или да се установи експериментално законът на взаимодействието. Но даже и да е известен законът за взаимодействието на молекулите, все пак е нужно да се отчете, че се

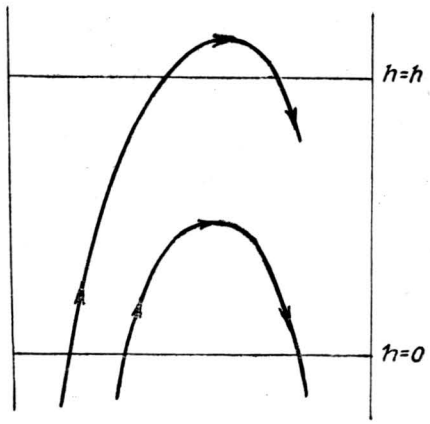
касае до милиони молекули и ще трябва още да се поблъскаме при изучаването на функцията $\exp\left(-\sum V_{ij}/\kappa T\right)$. Все пак е удивително, че функцията е така проста и като че ли всичко е ясно, доколкото е известен точният потенциал на взаимодействието, а това се оказва *невероятно сложна* работа. Трудността се заключава в ужасно големия брой променливите.

Но въпросът е много интересен и грабва. Той е един от примерите за това, което наричат „задача за многото тела“ и съдържа наистина много увлекателни неща. Единствената формула, която ще получим, като решим задачата, трябва да съдържа всичките детайли, например преходът на газа в твърдо състояние или възможните кристални строежи на твърдото тяло. Мнозина са се опитвали да я пресметнат, но математическите трудности тук са много големи и работата не е в трудността за извеждане на общ закон, а просто в това, да се справиш с огромния брой променливи.

Това е всичко, което се отнася до разпределението на частиците в пространството. С това собствено се свършва класическата статистическа механика или, ако са ни известни силите, по принцип ние можем да намерим пространственото разпределение, а разпределението на скоростите се намира веднаж завинаги, то не ще се мени от случай на случай. Основната задача се състои в получаването на по-конкретна информация от нашето формално решение. Това е основно занимание на класическата статистическа механика.

4. Разпределение на молекулите по скорости

Да обсъдим сега разпределението на молекулите по скорости, защото е интересно, а понякога и полезно да се знае, каква част от молекулите се движи с една или с друга скорост. За да изясним това, може да използуваме тези знания, които ние придобихме, когато изучавахме разпределението на газа в атмосферата. Ще считаме газа идеален (ние предполагахме това, като пренебрегвахме взаимното привличане на атомите при пресмятането на потенциалната енергия). В нашия пръв пример ние включихме само потенциалната енергия на силата на тежестта. Ако между атомите съществуваха взаимни сили, разбира се, щеше да ни се наложи да напишем нещо по-сложно. Но ние както по-рано ще предполагаме, че между атомите не съществуват никакви сили и за момент даже ще забравим за сблъскванията, а след това ще се опитаме да намерим оправдание на това. Виждаме, че на височина h се намират много по-малко молекули, отколкото на височина 0 (фиг. 40.4), съгласно с формула (40.1) броят им намалява експоненциално с височината. Но защо на по-голяма височина има по-малко молекули? Нима не всички молекули, живеещи на височина 0, се появяват на височина h? Не, защото на височина 0 има молекули, които се движат твърде бавно и те не са способни да се изкачат на потенциалната планина до височината h. Това е ключът за решаване на задачата за разпределението на молекулите по скорости; нали, като знаем равенството (40.1), ние знаем *броя* на молекулите, чиято скорост е много малка за достигане на височината h. Те са точно толкова, че да създадат нужното падане на плътността при увеличение на h.



Фиг. 40.4, Височината h достигат само тези молекули, чиято скорост на височина $h=0$ е достатъчно голяма

Нека да формулираме всичко по-точно: да пресметнем колко молекули преминават отгоре надолу през нивото $h=0$ (като го наричаме тук ниво с нулева височина, ние съвсем не смятаме, че това е подът, просто това е по-удобно за начало на отчитането, а газ може да се намира и на отрицателна височина). Тези молекули на газа се движат във всички посоки и някои от тях преминават през нашето ниво, по такъв начин във всеки момент през нивото минават отдолу нагоре известен брой молекули за секунда с дадена скорост. След това да отбележим следното: ако с u означим скоростта, необходима за издигане на височина h (кинетичната енергия $mu^2/2=mgh$), то броят на молекулите в секун-

да, издигащи се от долното ниво право нагоре и имащи компонента на скоростта, по-голяма от u, е точно равен на броя на молекулите, пресичащи горното ниво с *каквато* и да е вертикална компонента на скоростта. Тези молекули, чиято вертикална скорост не превишава u, не достигат горното ниво. По такъв начин

$$\begin{array}{c}\text{Броят на молекулите,}\\ \text{пресичащи } h=0 \text{ с}\\ v_z>u\end{array} = \begin{array}{c}\text{Броят на молекулите,}\\ \text{пресичащи } h=h \text{ с}\\ v_z>0\end{array}$$

Но броят на молекулите, пресичащи h с каквато и да е скорост по-голяма от нула, е по-малък от броя на молекулите, пресичащи долното ниво, с каквато и да е скорост по-голяма от нула, дори само заради това, че долу има повече атоми. Това е всичко, което ни е необходимо. Ние вече знаем, че разпределението на молекулите по скорости на всички височини е еднакво, нали вече изяснихме, че температурата в цялата атмосфера е еднаква. Но тъй като разпределението на скоростите е еднакво навсякъде и броят на атомите, пресичащи долното ниво, е поголям, то е ясно, че отношението на $n_{>0}(h)$ (броят на атомите, пресичащи нивото h с положителна скорост) и $n_{>0}(0)$ (броят на атомите, пресичащи с положителна скорост нивото 0) е равно на отношението на плътностите на тези височини, т. е. $\exp(-mgh/kT)$. Но $n_{>0}(h)=h_{>u}(0)$, затова

$$\frac{n_{>u}(0)}{u_{>0}(0)}=e^{-mgh/kT}=e^{-mu^2/2kT},$$

Тъй като $1/2\, mu^2=mgh$. Сега да кажем това със свои думи: броят на молекулите, пресичащи за 1 s единична площ на височина 0 с вертикална компонента на скоростта, превишаваща u, е равен на броя на молекулите, пресичащи тази площадка, със скорост по-голяма от нула, умножен по $\exp(-mu^2/2\kappa T)$.

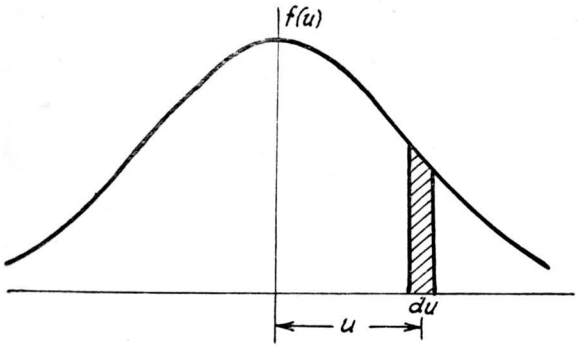
Това е вярно не само за произволната височина 0, но и за всяка друга височина, затова разпределението по скорости е *еднакво навсякъде*! (Окончателният резултат не включва височината h, тя се появява само в междинните разсъждения.) Това е обща теорема за разпределението по скорости. В нея се твърди, че ако в стълба газ пробием малка дупчица, но съвсем малка, така че сблъскванията там да бъдат редки и дължината на пробега на молекулата между два удара да бъде много по-голяма от диаметъра на дупчицата, то молекулите ще излитат от нея с различни скорости, но частта от молекули, излитащи със скорост, превишаваща u, е равна на $\exp(-mu^2/2\kappa T)$.

Сега да се върнем към въпроса за това може ли да пренебрегнем сблъскванията. Защо това няма значение? Ние бихме могли да повторим всички наши доводи, като използуваме не крайната височина h, а безкрайно малката височина h, толкова малка, че за сблъскване между височините 0 и h би имало твърде малко място. Но това не е задължително. Нашите доводи очевидно са основани само на анализа на стойностите на енергията и на запазването на енергията — при сблъскване става обмен на енергия между молекулите. Но на нас ни е напълно безразлично дали ние следим една и съща молекула, щом има обмен на енергия с друга молекула. И се получава, че даже и да направим това твърде щателно (а да се проведе такава работа е, разбира се, по-трудно), то резултатът ще бъде същият.

Интересно е, че намереното от нас разпределение по скорости има вида

$$n_{>u}\sim e^{-\text{к.е.}/kT}. \tag{40.4}$$

Този начин за описване на разпределението по скорости, когато се пресмята броят на молекулите, преминаващи през отделена площадка с дадена минимална z-компонента на скоростта, съвсем не е най-удобният. Например най-често искат да знаят колко молекули в даден обем се движат, като имат z-компонента на скоростта между две дадени стойности, а това, разбира се,



Фиг. 40.5. Функцията на разпределението на скоростите.

Защрихованата площ е равна на $f(u)du$ — това е относителният брой на частиците, чиито скорости се намират в отрязъка du около точката u

няма да се получи веднага от (40.4). Затова да придадем на нашата формула удобна форма, въпреки че това, което получихме, е един твърде общ резултат. Да отбележим, че е *невъзможно да се твърди, че някоя молекула притежава точно една или друга предварително зададена скорост*, нито една от тях не се движи със скорост, точно равна на 1,7962899173 m/s. И така, за да дадем на нашето твърдение някакъв смисъл, ние трябва да запитаме колко молекули можем да намерим в даден *интервал* от скорости. Ще ни се наложи да говорим за това, колко често се срещат скоростите в интервал между 1,796 и 1,797 и т. н. Изразявайки се математически, нека $f(u)du$ бъде частта от всички молекули, чиито скорости се намират помежду u и $u+du$ или, което е същото (ако du е безкрайно малко), частта от всички молекули, имащи скорост u с точност до du. На фиг. 40.5 е представена възможната форма на функция $f(u)$, а защрихованата част с ширина du и средна височина $f(u)$ — това е частта молекули $f(u)du$.

По такъв начин отношението на площта на защрихования участък към цялата площ под кривата е равно на относителния брой на молекулите със скорост u вътре в отрязъка du. Ако определим $f(u)$ така, че относителният брой на молекулите да бъде просто равен на площта на защрихования участък, то пълната площ под кривата са всичките 100 % молекули, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1 . \tag{40.5}$$

Сега остава само да намерим това разпределение, като го сравним с резултата от доказаната по-рано теорема. Отначало трябва да изясним как да изразим чрез $f(u)$ броя на молекулите, преминаващи за 1 s през дадената площадка със скорост, превишаваща u?

Този брой не е равен на интеграла $\int_{u}^{\infty} f(u)du$ (въпреки че това е първото, което ни идва наум), нали нас ни интересува броя на молекулите, минаващи през площадката за *секунда*. По-бързите молекули ще пресичат площадката, така да се каже, по-често, отколкото по-бавните, затова, за да намерим броя на преминаващите молекули, трябва да умножим плътността на молекулите по скоростта. (Ние вече обсъждахме това в предишната глава, когато пресмятахме броя на сблъскванията).

Пълният брой на молекулите, преминаващи през една повърхност за време t, е равен на броя на молекулите, способни да достигнат до повърхността, а това са молекулите, идващи към повърхността от разстоянието ut. По такъв начин броят на молекулите, достигащи площадката, се определя не просто от броя на молекулите, движещи се с дадена скорост, а е равен на този брой, отнесен към единица обем и умножен по разстоянието, което те ще преминат, преди да достигнат площадката, през която те очевидно са длъжни да преминат, а това разстояние е пропорционално на u. Значи на нас ни предстои да изчислим интеграла от *произведението* на u по $f(u)du$, взет от u до безкрайност. При това ние вече знаем, че този интеграл трябва обезателно да бъде пропорционален на $\exp(-mu^2/2kT)$, а коефициентът на пропорционалност трябва да се определи:

$$\int_{u}^{\infty} uf(u)\,du = const \cdot e^{-mu^2/2kT}. \tag{40.6}$$

Ако сега диференцираме интеграла по u, ще получим подинтегралния израз (със знак минус, защото u е долната граница на интегрирането), а като диференцираме дясната част на равенството, ще получим произведението на u по експонентата (и по някоя константа). Да съкратим в двете части u и тогава

$$f(u)\,du = Ce^{-mu^2/2kT}\,du. \tag{40.7}$$

Ние оставихме du в двете части на равенството, за да помним, че това е *разпределение*, то ни говори за относителния брой на молекулите, имащи скорост между u и $u+du$.

Константата C трябва да се определи от условието за равенството на интеграла на единица съгласно с уравнение (40.5). Може да се докаже[1], че

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

Като използуваме това обстоятелство, лесно се намира $C=\sqrt{m/2\pi kT}$.

Щом като скоростта и импулсът са пропорционални, може да се твърди, че разпределението на молекулите по импулси, отнесено към единицата на импулсната скала, е също пропорционално на exp (—к. $e./kT$). Оказва се, че тази теорема е вярна също в теорията на относителността, ако само я формулираме в импулсни термини, тъй като в скоростни термини това вече не е така, затова ще формулираме всичко в импулсни термини:

$$f(p)\,dp=ce^{-k.\,e./kT}dp\,. \tag{40.8}$$

Това значи, че ние установихме, че вероятностите, определяни от енергии с различен произход (и кинетична, и потенциална) и в двата случая се изразяват еднакво: exp (—*енергия*/kT); по такъв начин нашата забележителна теорема прие твърде удобна за запомняне форма.

Досега обаче ние говорехме само за „вертикално“ разпределение на скоростите. Но можем да запитаме каква е вероятността за това, молекулата да се движи в друга посока? Разбира се, тези разпределения са свързани едно с друго и пълното разпределение може да се получи, като се изхожда от кое и да е от тях, нали пълното разпределение зависи само от квадрата на големината на скоростта, а не от нейната z-компонента. Разпределението по скорости не трябва да зависи от посоката и се определя само от функцията u^2 — вероятността за стойността на скоростта. На нас ни е известно разпределението на z-компонентата и искаме да получим оттук разпределението на другите компоненти. В резултат пълното разпределение е както по-рано пропорционално на exp (—к. е./kT), само че сега кинетичната енергия се състои от три части: $mv_x^2/2$, $mv_y^2/2$ и $mv_z^2/2$, събираеми в показателя на експонентата. А това може да се запише и във вид на произведение:

$$f(v_x,\ v_y,\ v_z)\,dv_x\,dv_y\,dv_z\sim$$

$$\sim e^{-mv_x^2/2kT}e^{-mv_y^2/2kT}e^{-mv_z^2/2kT}dv_x\,dv_y\,dv_z. \tag{40.9}$$

Вие можете да се убедите в това, че тази формула е вярна, по-нееже, първо, разпределението зависи само от v^2 и второ, вероятностите на дадените v_z се получават след интегриране по всички v_x и v_y и това трябва да доведе до (40.7). Но само функцията (40.9) удовлетворява тези изисквания.

---

[1] За да изчислим този интеграл, да положим

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

Тогава

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy,$$

а това е двоен интеграл в равнината xy. Но него можем да изчислим и в полярни координати:

$$I^2=\int_0^{\infty} e^{-r^2}2\pi r\,dr=\pi\int_0^{\infty} e^{-t}dt=\pi.$$

5. Специфични топлоемности на газовете

Сега да разгледаме как може да направим проверка и да оценим колко е добра класическата теория на газовете. Ние вече казахме, че ако U е вътрешната енергия на N молекули, то формулата $pV=NkT=(\gamma-1)U$ понякога и за някои газове може да се окаже правилна. Ние знаем, че за едноатомен газ дясната част е равна на $^2/_3$ от кинетичната енергия на движението на центъра на масата на атомите. При едноатомен газ кинетичната енергия е равна на вътрешната енергия, затова $\gamma-1=^2/_3$.

Но да предположим, че се сблъскаме с по-сложна молекула, която може да се върти и трепти и да предположим (в класическата механика това е така), че енергията на вътрешните движения е също пропорционална на kT. Затова при дадена температура молекулата освен кинетична енергия kT има и вътрешна енергия на въртене и трептене. Тогава пълната енергия U не включва само кинетичната енергия, но и енергията на въртене и ние ще получим други значения на γ. Най-добрият начин за измерване на γ е измерването на специфичната топлоемност, характеризираща изменението на енергията при изменението на температурата. Ние ще се върнем пак към този начин, а сега да предположим, че ни се е удало да определим експериментално γ с помощта на кривата PV^γ, съответстваща на адиабатното свиване.

Да се опитаме да изчислим γ за редица частни случаи. Преди всичко за едноатомните газове пълната енергия U не е нищо друго освен кинетичната енергия и в този случай, както вече знаем, γ е равно на $^5/_3$. В качеството на примери за двуатомни газове да разгледаме кислород, водород, йодни пари и т. н. и да предположим, че двуатомният газ може да се представи като съвкупност от двойки атоми, между които действуват сили, подобни на тези, които са изобразени на фиг. 40.3. Може също да се предположи и се оказва, че това е напълно законно, че при температури, нормални за двуатомните газове, двойките атоми се стремят да се отдалечат една от друга на разстояние r_0 (разстоянието на минимум потенциална енергия). Ако това не беше така и вероятността не зависеше твърде силно от отдалечаването от равновесната конфигурация, то ние бихме открили, че кислородът е смес на сравними количества O_2 и единични атоми кислород. А ние знаем, че в кислорода има твърде малко единични атоми кислород и това означава, че дълбочината на потенциалната яма е значително по-голяма от kT, а в същност точно това и предположихме. Но щом атомите, съставящи молекулата, са здраво закрепени на разстояние r_0, на нас ще ни бъде необходима само част от потенциалната крива близо до минимума, която в този случай може да се замести приблизително с парабола. Параболичният потенциал съответствува на хармоничния осцилатор и в същност два съединени с пружинка атома могат да послужат отлично за модел на молекулата на кислорода.

Но на какво е равна пълната енергия на молекулата при температурата T? Ние знаем, че кинетичната енергия на всеки от атомите е равна на $^3/_2kT$, така че кинетичната енергия на двата атома е равна на $^3/_2\ kT+^3/_2\ kT$. Тази енергия може да се разпредели и по друг начин, тогава същите тези $^3/_2+^3/_2$ ще изглеждат като кинетична енергия на центъра на масата ($^3/_2$), кинетична енергия на въртене ($^2/_2$) и кинетична енергия на трептене ($^1/_2$). Известно е, че на кинетичната енергия на трептене се пада $^1/_2$, защото това е едномерно движение, а на всяка степен на свобода съответствува $^1/_2kT$. Обръщайки се към въртенето, ние можем да отделим две оси на въртене, на които съответствуват две независими движения. Ние си представяме атомите във вид на точки, които не могат да се въртят около съединяващите ги линии. Но за всеки случай да запомним това предположение, защото, ако изпаднем някъде в затруднение, може би тук ще се открие коренът на злото. Нас трябва да ни интересува още и един друг въпрос: на какво е равна потенциалната енергия на трептенето, голяма ли е тя? Средната потенциална енергия на

хармоничния осцилатор е равна на средната кинетична енергия, т. е. също $^1/_2\,kT$. Пълната енергия на молекулата е $U=^7/_2kT$ или $kT=^2/_7U$ на атом. Това означава, че γ е равно на $^9/_7$, а не на $^5/_3$, т. е. $\gamma=1{,}286$.

Тези числа могат да се сравнят с действително измерените стойности на γ, приведени в таблица 40.1. Отначало погледнете хелия, това е едноатомен газ и стойността на γ е много близка до $^5/_3$. Отклонението от тази стойност е вероятно просто следствие на експерименталните неточности, въпреки че при толкова ниски температури между атомите могат да се появят сили на взаимодействие. Криптонът и аргонът — още два едноатомни газове — също дават съгласуващи се стойности в рамките на грешките на опита.

Таблица 40.1

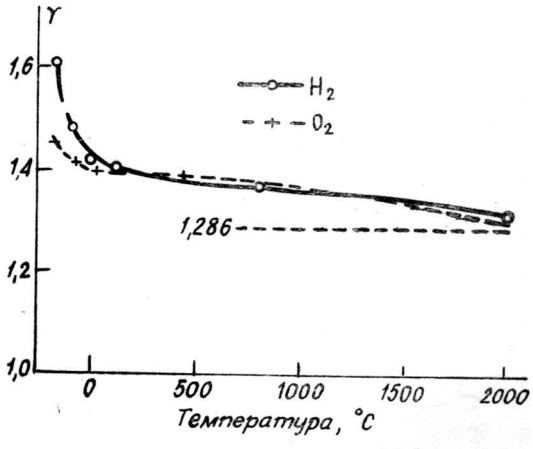
Измерени стойности на различни газове

Газ	T, °C	γ	Газ	T, °C	γ
He	—180	1,660	HI	100	1,40
Kr	19	1,68	Br_2	300	1,32
Ar	15	1,668	I_2	185	1,30
H_2	100	1,404	NH_3	15	1,310
O_2	100	1,399	C_2H_6	15	1,22

Да преминем към двуатомни газове. Тук ще открием, че стойността на γ за водорода е равна на 1,404, което не се съгласува с теоретичната стойност 1,286. Твърде близка стойност дава и кислородът 1,399, но отново не се съгласува с теоретичната. За йодоводорода тя е просто равна на 1,40. Започва да изглежда, че сме намерили общия закон: за двуатомните молекули γ е равно на 1,40. Но не, погледнете по-нататък. За брома получаваме 1,32, за йода 1,30. Тъй като 1,30 е достатъчно близо до 1,286, то може да се смята, че опитната стойност на γ за йода се съгласува с теоретичната, а кислородът представлява изключение. Това вече е неприятно. Това, което е вярно за една молекула, не е вярно за друга и очевидно ние трябва да проявим хитрост, за да обясним това.

Нека разгледаме още по-сложни молекули, състоящи се от голям брой части, например C_2H_6-етан. Молекулата се състои от осем различни атома и всички те трептят и се въртят в най-различни комбинации, така че пълната стойност на вътрешната енергия трябва да се съставя от огромен брой kT, най-малко 12 kT за една кинетична енергия, затова $\gamma-1$ трябва да бъде твърде близо до нула, а γ да бъде почти точно равно на единица. И действително стойността на γ за етана е *по-малка*, отколкото в предишните случаи, но 1,22 не е така малко, във всеки случай е повече от $1\frac{1}{12}$, на колкото трябва да бъде равно γ, ако отчитаме само кинетичната енергия. Това съвсем не може да се разбере!

Но по-нататък е още по-лошо, понеже двуатомната молекула даже и в граничен случай не може да се разглежда като абсолютно твърда. Дори ако връзката между атомите е така силна, че те не могат и да се помръднат, все пак трябва да се смята, че те трептят. Енергията на трептене винаги е равна на kT, тъй като тя не зависи от силата на връзката. Но ако си представим двуатомната молекула *абсолютно* твърда, спрем трептенето и изхвърлим тази степен на свобода, ще получим $U=^5/_2kT$ и $\gamma=1{,}40$ за двуатомните газове. Като че ли това подхожда и за H_2, и за O_2. Но въпросът остава открит като по-рано, защото γ и за водорода, и за кислорода зависи от температурата! На фиг. 40.6 са показани резултатите от няколко измервания. За H_2 стойността на γ се мени от 1,6 при —185°C до 1,3 при 2000°C. В случая на водорода изменението на γ е по-голямо, но и в случая на кислорода γ явно се стреми да нарасне при падане на температурата.



Фиг. 40.6. Опитните стойности на γ като функция на температурата за водорода и кислорода.

Класическата теория предсказва стойност $\gamma=1{,}286$, която не зависи от температурата,

6. Поражение на класическата физика

И така, трябва да кажем, че се натъкнахме на трудности. Може да съединим атомите не с пружинка, а с нещо друго, но се оказва, че това само увеличава стойността на γ. Ако пуснем в ход други видове енергии, то въпреки фактите γ ще се приближи много до единица. Всичко, което знаем от класическата теоретична физика, само влошава положението. На нас ни е известно например, че всеки атом съдържа електрони и атомните спектри дължат своето съществуване на вътрешно движение на електрона. Всеки електрон трябва да има най-малко $^1/_2kT$ от кинетичната енергия и още нещо от потенциалната, а когато всичко това се сумира, γ става още по-малко. Просто смешно. И явно нещо не е в ред.

Първата забележителна работа по динамичната теория на газовете беше направена от Максвел в 1859 г. Като изхожда от идеите, с които ние току-що се запознахме, той съумя точно да обясни много известни явления, такива като закона на Бойл, теорията на дифузията, вискозитета на газовете и други неща, за които ще говорим още в следващата глава. Като направил равносметка на всички тези велики постижения, той е писал: „Накрая, установявайки необходимото съотношение между постъпателното и въртеливо движение на несферични частици (той е имал пред вид теоремата за $^1/_2kT$), ние доказахме, че в система от такива частици не може да се изпълни известното съотношение между двете топлоемности". Тук той говори за γ (по-късно ще видим, че тази величина е свързана с два различни начина на измерване на специфичната топлоемност) и отбелязва, че никой не е в състояние да даде верен отговор.

В изнесената 10 години по-късно лекция той казал: „Аз трябва да ви изложа това, което смятам за най-голяма трудност, стояща пред молекулярната теория." Това е било първото указание за неверността на законите на класическата физика, първото предчувствие за това, че съществува нещо, необяснено от самото начало, понеже строго доказаната теорема противоречала на опита.

Около 1890 г. Джинс заговорил отново за тази загадка. Често чуваме, че физиците от края на деветнадесети век са били уверени в това, че всички съществуващи природни законн са им известни и работата се състои само в това да се получат нужните числа с максимален брой десетични знаци. Някой го е казал, а останалите го повтарят. Но ако се поразровим във физическите списания от тези години ще стане ясно, че почти всеки от тях в нещо се е съмнявал. Джинс говорил за този проблем като за загадъчно явление, от което като че ли следва, че с падането на температурата някои видове движения „замръзват".

Ако можехме да предположим, че при ниски температури няма трептения и те възникват само при високи температури, то би било възможно да си представим, че съществува такъв газ, в който при ниски температури няма трептения, така че $\gamma = 1{,}40$, а при високи температури възникват трептения и следователно γ намалява. Същото може да се допусне и при въртенето. Ако бихме могли да се избавим от въртенето, например като го „замразим", понижавайки достатъчно температурата, би станало ясно защо при ниски температури γ за водорода се приближава към 1,66. Но как да разберем всичко това? Разбира се, като оставаме в рамките на класическата механика, не можем да обясним „замръзващите" движения. Всичко се подреди едва след откриването на квантовата механика.

Ние ще формулираме без доказателства основните резултати на статистическата механика, построени на основата на квантовата механика. Да напомним, че съгласно с квантовата механика, система, свързана с потенциал, например осцилатор, има дискретен набор от нива на енергията, т. е. от състояния с различна енергия. Възниква въпросът как да се модифицира статистическата механика, за да се доведе до съгласие с квантовата механика? Обърнете внимание на интересната подробност: въпреки

че болшинството задачи на квантовата механика са по-сложни от съответните задачи в класическата физика, проблемите на статистическата механика се решават с помощта на квантовата теория много по-просто!

Простичкият резултат на класическата механика, че $n = n_0 \exp(-\text{енергия}/kT)$, става в квантовата механика много важна теорема: ако наборът от молекулярни състояния се характеризира с енергиите $E_0, E_1, E_2, \ldots E_i \ldots$, то в случай на топлинно равновесие вероятността да се намери молекулата в състояние с енергия E_i е пропорционална на $\exp(-E_i/kT)$. Така се определя вероятността за престои в различни състояния. Казано по друг начин, относителният шанс — вероятността молекулата да се намира в състояние E_1 в сравнение с вероятността тя да се намира в E_0, е равен на

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{e^{-E_1/kT}}{e^{-E_0/kT}} \tag{40.10}$$

това, разбира се, е също като и

$$n_1 = n_0 e^{-(E_1 - E_0)/kT}, \tag{40.11}$$

защото $P_1 = n_1/N$, а $P_0 = n_0/N$. По такъв начин състоянията с по-голяма енергия са по-малко вероятни, отколкото състоянията с по-малка енергия. Отношението на броя на атомите в горното състояние към броя на атомите в долното състояние е равно на e на степен (разликата на енергиите, делена на kT, с обратен знак) — много проста теорема.

Да обърнем внимание на това, че нивата на енергията на хармоничния осцилатор отстоят едно от друго на равни разстояния. Да припишем на най-долното ниво енергия $E_0 = 0$ (в същност тази енергия се отличава малко от нула, но отместването на всички нива на една и съща величина няма значение), тогава енергията на следващото ниво $E_1 = \hbar\omega$, след това следват $2\hbar\omega$, $3\hbar\omega$ и т. н.

А сега да разгледаме какво ще се получи от това. Да предположим, че ние изучаваме трептенето на двуатомна молекула, която сега можем да смятаме за хармоничен осцилатор. Какви са относителните шансове да намерим молекулата в състоянието E_1, а не в E_0? *Отговор:* Отношението на шанса да намерим молекулата в състояние E_1, към шанса да намерим тази молекула в състояние E_0 е равно на $\exp(-\hbar\omega/kT)$. Да предположим, че kT е много по-малко от $\hbar\omega$, т. е. ние се намираме в областта на ниските температури. Тогава вероятността да открием състоянието E_1 е извънредно малка. Практически всички молекули се намират в състояние E_0. Ако температурата се измени, но както преди се поддържа много малка, то шансът да се намери молекулата в състоянието $E_1 = \hbar\omega$ както по-рано е безкрайно малък — енергията на осцилатора е все още почти равна на нула, тя не се изменя с температурата, докато температурата остава много по-малка от $\hbar\omega$. Всички осцилатори се намират в най-ниско състояние, тяхното движение ефективно е „замразено“ и те не дават своя дял в топлоемността. С помощта на дачните от табл. 40.I може да се установи, че при 100° С, а това е равно на 373° К (абсолютна температура), kT е много по-малка от енергията на трептене на молекулите на кислорода и водорода, но е сравнима с енергията на трептене на йода. Причината за тази разлика е в това, че атомите на йода са много по-тежки от тези на водорода и въпреки че силите, действуващи между атомите на йода и водорода, са сравними, молекулата на йода е толкова тежка, че собствената ѝ честота на трептения е извънредно малка в сравнение със собствената честота на водорода. При стайна температура kT е такова, че $\hbar\omega$ на водорода е по-голямо от kT, а $\hbar\omega$ на йода е по-малко. Затова класическата енергия на трептене може да се забележи само при йода.

Ако температурата на газа се увеличава, като се започне от твърде малки стойности на T, когато почти всички молекули се намират в тяхното най-ниско състояние, то се появява осезаема

вероятност да се намери молекула във второто състояние, след това в следващото и т. н. Когато много състояния получат забележима вероятност, газът се държи повече или по-малко така, както изисква това класическата физика, нали в този случай системата от квантови състояния се различава трудно от непрекъснатото разпределение на енергията и системата може да притежава почти всякаква енергия. По такъв начин при повишение на температурата ние отново попадаме в областта на класическата физика, както това се вижда от фиг. 40.6. Аналогично може да се покаже, че точно така се квантуват и състоянията на въртене на атомите, но тези състояния са разположени така близо, че обикновено kT е по-голямо от разстоянието между нивата. В този случай са възбудени едновременно много нива и кинетичната енергия на въртене се държи класически. Само водородът при стайна температура се държи по друг начин.

Това е първият случай, когато при сравнение с опита се открива, че с класическата физика става нещо нередно. Ние търсехме способи да преодолеем тези трудности в квантовата механика по начина, по който това в същност е станало в действителност. Изминаха около 30 или 40 години, докато беше открита още една трудност отново в статистическата механика, но този път в механиката на фотонния газ. Новата задача беше решена от Планк в първите години на нашето столетие.

41
Броуново движение

1. Равно разпределение на енергията
2. Топлинно равновесие на излъчването
3. Равномерно разпределение и квантов осцилатор
4. Случайни блуждаения

1. Равно разпределение на енергията

Ботаникът Роберт Броун е открил в 1827 г. Броуновото движение. Изучавайки живота под микроскоп, той забелязал, че най-малките частици на цветния прашец танцуват в неговото полезрение, а в същото време той бил достатъчно сведущ, за да разбере, че пред него не се намират живи същества, а просто плаващи във водата прашинки. За да докаже окончателно, че това не са живи същества, Броун потърсил парче кварц, във вътрешността на който имало запълнена с вода кухина. Водата е попаднала там преди много милиони години, но и в такава вода прашинките продължавали своя танц. Изглеждало, че много малките частици танцуват непрекъснато. По-късно било доказано, че това е един от ефектите на *молекулното движение* и то може да се разбере качествено, ако си представим, че някъде отдалеч следим игра на пушбол. Ние знаем, че под голямата топка се движи тълпа от хора и всеки бута топката накъдето си иска. Не виждаме отделните играчи, защото игралното поле е много далеч от нас, но виждаме топката и забелязваме, че тя се премества твърде безпорядъчно. От разгледаните в предишните глави теореми вече знаем, че средната кинетична енергия на плуващата в газ или течност малка частица е равна на $3/2\ kT$, даже ако тази частица е много по-тежка от молекулите на газа. Ако е много тежка, тя ще се движи сравнително бавно, но в същност се оказва, че скоростта на частицата не е толкова малка. Разбира се, не е много лесно да се забележи движението на частицата, защото на средна кинетична енаргия $3/_2 kT$ съответствува скорост около 1 mm/s, ако диаметърът на частицата е равен на 1—2 микрона. Такова движение се забелязва трудно дори под микроскоп, защото частицата постоянно мени направлението на своето движение и не желае да тръгне в която и да е определена посока. В края на главата ние ще видим може ли тя да отиде далече. Този въпрос бил разрешен за пръв път от Айнщайн в началото на нашето столетие.

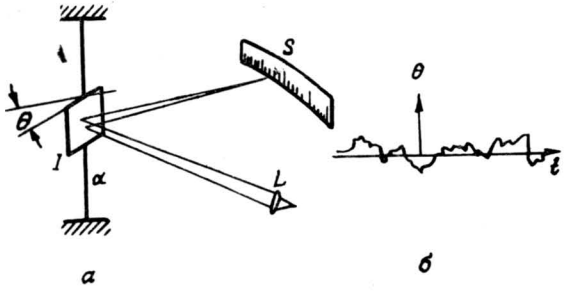
Между другото, когато казват, че средната кинетична енергия на частицата е равна на $3/_2 kT$, изискват този резултат да бъде изведен от кинетичната теория, т. е. от законите на Нютон. Ние можем вече да получаваме разни удивителни неща с помощта на кинетичната теория и най-интересното е, че ни се удава да получим толкова много от толкова малко. Разбира се, ние не искаме да кажем, че законите на Нютон — това е „малко“, те в същност дават всичко необходимо за решението на задачата, просто ни се пада да се потрудим съвсем малко. Как ни се удаде да получим толкова много? Просто ние винаги изхождаме от твърде важното предположение, че ако определената система се намира в топлинно равновесие при някоя температура, при същата температура тя ще бъде в равновесие с *каквото и да е*. Да кажем, че ни се иска да видим как се движи една частица, ако тя се сблъсква с вода.

Затова да си представим, че освен водата и частицата има още и газ, който се състои от частици от друг вид — малки сачмички, които, както ние предполагаме, не взаимодействуват с водата, а само се удрят силно в нашата частица. Да предположим, че частицата е настръхнала насреща им с остри шипове и всички сачмички се натъкват на тях. Ние знаем всичко за този въображаем газ от сачмички при температура T — това е идеален газ. Водата е сложна работа, а идеалният газ е по-прост. И

ето *нашата частица се намира в равновесие с газа от сачмички.* Следователно средното движение на частицата трябва да бъде такова, каквото трябва да бъде вследствие на сблъскванията с атомите, защото ако частицата би се движила с по-голяма скорост спрямо водата, отколкото се полага, то сачмичките, отнемайки от частицата част от нейната енергия, биха се нагрели повече, отколкото водата. Но нали ние започнахме с равни температури и предполагаме, че ако е настъпило веднаж равновесие, то ще си остане такова. Не може изведнаж едната част на системата да се нагрее, а другата да изстине.

Това предположение е вярно и може да се докаже, като се използуват законите на механиката, но е много сложно да се разбере доказателството само ако се знае добре механиката. Да се докаже това с помощта на квантовата механика е много по-лесно, отколкото с помощта на класическата. За пръв път тази теорема е доказал Болцман, а ние, като приемем, че тя е вярна, можем да твърдим, че ако частицата се сблъсква с въображаемите сачмички, нейната енергия е равна на $^3/_2\ kT$. Но същата тази енергия тя трябва да има, ако махнем сачмичките и оставим частицата насаме с водата при същата температура. Това е странна, но правилна верига от разсъждения.

Освен движенията на колоидни частици, при които за пръв път беше открито броуновото движение, има още и редица други явления и не само в лабораторни, но и в други условия, които позволяват да се открие броуново движение. Ако бихме могли да направим извънредно фино измерително устройство, да кажем миниатюрно огледалце, прикрепено към тънка кварцова нишка на много чувствителен балистичен галванометър (фиг. 41.1), огледалцето не би стояло на мястото, а *непрекъснато* би танцувало, затова ако бихме осветили това огледалце с лъч светлина и проследим отразеното петно, бихме изгубили надежда да създадем съвършен измерителен инструмент, тъй като огледалцето през цялото време танцува. Защо? Защото средната кинетична енергия на въртене на огледалцето е равна на $^1/_2\ kT$.



Фиг. 41.1. Чувствителен огледален галванометър и модел на запис от скалата като функция на времето

Снопът светлина от източника L се отразява върху скалата от малко огледалце

На какво е равен средно квадратичният ъгъл на люлеене на огледалцето? Да предположим, че сме определили периода на собствените колебания на огледалцето, като чукнем леко едната му страна и като наблюдаваме колко време то ще се люлее напред-назад и нека също ни е известен инерчният момент I. Ние знаем формулата за кинетичната енергия на въртене; това е равенството (19.8) $T=^1/_2\ I\omega^2$. А потенциалната енергия е пропорционална на квадрата на ъгъла на отклонението, т. е. $V=^1/_2\varkappa\theta^2$. Но ако знаем периода на колебанията t_0 и можем да изчислим собствената честота $\omega_0=2\pi/t_0$, и потенциалната енергия може да се запише във вида $V=^1/_2 I\omega_0{}^2\theta^2$. Знаем, че средната кинетична енергия е равна на $^1/_2\ kT$, но тъй като пред нас е хармоничен осцилатор, средната потенциална енергия също е равна на $^1/_2 kT$. Следователно

$$\frac{1}{2}\, I\,\omega_0^2\,\langle\theta^2\rangle=\frac{1}{2}\,kT,$$

или

$$\langle\theta^2\rangle=\frac{kT}{I\,\omega_0^2}\,. \tag{41.1}$$

По такъв начин ние можем да пресметнем колебанията на огледалцето на галванометъра и да намерим границата на точността на нашия инструмент. Ако ни е необходимо да намалим колебанията, трябва да охладим огледалцето. Но тук възниква интересен въпрос — *на кое място да го охладим?* Всичко зависи от това, откъде то получава повече удари. Ако за колебанията е виновна кварцовата нишка, трябва да се охлажда от горния й край, а ако огледалцето се намира в газова среда и се разклаща предимно за сметка на ударите с молекулите на газа, то по-добре е да се охлажда газът. И така, на практика, ако е известно защо има *затихване* на колебанията, оказва се, че винаги

има някакъв *източник* на флуктуации; към този въпрос ние ще се върнем пак.

Същите флуктуации действуват, и то по доста чудноват начин в *електричните вериги.* Да предположим, че сме построили много чувствителен, точен усилвател за някаква определена честота и към неговия вход сме включили една резонансна верига (фиг. 41.2), настроена на същата честота, подобно на радиоприемник, само че по-добре. Да предположим, че сме поискали колкото се може по-точно да изучим флуктуациите, за което сме взели напрежение, да кажем от индуктивността и сме го подали на усилвателя. Разбира се, във всяка такава верига има някакви загуби. Това не е идеална резонансна верига, но все пак много добра верига, и тя има малко съпротивление (на схемата съпротивлението е показано, трябва само да се помни, че то е много малко). А сега ние искаме да узнаем колко големи са флуктуациите на пада на напрежението върху индуктивността. *Отговор:* Известно ни е, че „кинетичната енергия" на резонансна верига, снабдена с бобина, е равна на $^1/_2\, LI^2$ (вж. гл. 25). Затова средната стойност $^1/_2\, LI^2$ е равна на $^1/_2\, kT$, това ни дава средната квадратична стойност на тока, а оттук може да се определи и средната квадратична стойност на напрежението. Ако искаме да знаем пада на напрежението върху индуктивността, ще ни послужи формулата $\hat{V}_L = i\omega\, L\hat{I}$, тогава средният квадрат на модула на пада на напрежението върху индуктивността е равен на $\langle V_L^2\rangle = L^2\omega_0^2\langle I^2\rangle$, а като положим $^1/_2 L\langle I^2\rangle = {}^1/_2 kT$, получаваме

$$\langle V_L^2\rangle = L\omega_0^2\, kT. \tag{41.2}$$

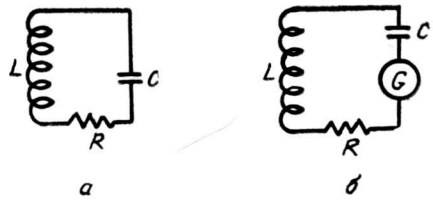
И така, сега можем да пресметнем веригата и да предскажем какъв ще бъде в нея така нареченият шум на Джонсон, т. е. шумът, свързан с топлинните флуктуации!

Но откъде се вземат тези флуктуации? Всичко е заради *съпротивлението,* по-точно казано, в резултат на играта на електроните в съпротивлението. Нали те се намират в топлинно равновесие с останалия материал на съпротивлението, а това води към флуктуации на плътността на електроните. По такъв начин те пораждат миниатюрни електрични полета, които управляват резонансната верига.

Електроинженерите обясняват всичко това по друг начин. За физически източник на шумовете служи съпротивлението. Обаче реалната верига с действителното съпротивление, предизвикващо шумовете, може да се замени с фиктивна верига, съдържаща малък генератор, който като че ли поражда шумовете, а съпротивлението сега е идеално — то вече не шуми. Всички шумове сега излизат от фиктивния генератор. И така, ако на нас са ни известни характеристиките на пораждания от съпротивлението шум и ние разполагаме с подходяща формула за това, може да се пресметне как реагира веригата на този шум. Следователно необходима ни е формула за шумовите флуктуации. Съпротивлението поражда еднакво добре шумове с всякакви честоти, тъй като то самото не е резонатор. Разбира се, резонансната верига само „чува" част от този шум близо до определена честота, а в съпротивлението са затворени много други честоти. Силата на генератора може да се опише по такъв начин: средната мощност, отделяна върху съпротивлението (ако то е свързано непосредствено с генератора на шум), е равна на $\langle E^2\rangle/R$, където E е снетото от генератора напрежение. Но сега искаме да знаем по-подробно за разпределението на мощността по честоти. На всяка определена честота отговаря една много малка мощност. Нека $P(\omega)\, d\omega$ да е мощността, която генераторът изпраща на съпротивлението в интервала на честотите $d\omega$. Тогава може да се докаже (това ще докажем за друг случай, но математиката и там, и тук е една и съща), че отделяната мощност е равна на

$$P(\omega)\, d\omega = \frac{2}{\pi}\, kT\, d\omega \tag{41.3}$$

и по такъв начин *не зависи от съпротивлението.*



а б

Фиг. 41.2. Резонансен кръг с голямо Q
а — реалната верига при температура T; б — изкуствена верига с идеално (безшумно) съпротивление и „генератор на шум"

2. Топлинно равновесие на излъчването

Ще пристъпим към обсъждането на по-сложна и интересна теорема, чиято същност се състои в следното. Да предположим, че имаме зареден осцилатор, подобен на този, за когото говорихме, когато ставаше дума за светлината. Нека това да бъде електрон, който трепти нагоре и надолу в атома. А щом трепти, той излъчва светлина. Да предположим сега, че този осцилатор е попаднал в силно разреден газ, състоящ се от други атоми и от време на време се сблъсква с тези атоми. Когато в края на краищата настъпи равновесие, осцилаторът ще придобие такава енергия, че кинетичната енергия на трептенето ще бъде равна на $^1/_2\ kT$, а щом като това е хармоничен осцилатор, пълната енергия на движението ще стане равна на kT.

Това, разбира се, не е вярно, защото осцилаторът носи *електричен заряд*, а щом като притежава енергия kT, докато се люлее нагоре-надолу, той *излъчва светлина*. Поради това е невъзможно да се получи равновесие само на веществото, без зарядите да излъчват светлина, а когато се излъчва светлина, изтича енергия. С времето осцилаторът изразходва енергията kT, а газът, който окръжава и се сблъсква с осцилатора — постепенно изстива. Именно по такъв начин изстива през нощта затоплената от вчера печка, изпущайки във въздуха всичката топлина. Подскачащите в нейните тухли атоми са заредени и непрекъснато излъчват, а в резултат на това излъчване постепенно се забавя танцът на атомите.

Но ако затворим всички атоми и осцилатори в съд, така че светлината да не може да отива в безкрайност, топлинно равновесие *може* да настъпи. Ние можем да поставим газа в съд, в чиито стени има и други излъчватели, изпускащи светлина вътре в съда, а още по-добре е да се направи съд с огледални стени. Този пример ще помогне да се разбере по-добре какво ще стане. И така, ние предполагаме, че цялото излъчване на осцилатора ще остане вътре в съда. И в този случай осцилаторът ще започне да излъчва, но твърде скоро той все пак ще достигне до стойността kT на своята кинетична енергия. Това става, защото осцилаторът ще се осветява сам, така да се каже, със собствената си светлина, отразена от стените на съда. Скоро в съда ще има много светлина и въпреки че осцилаторът продължава да излъчва, част от светлината ще се връща и ще се замества загубената от него енергия.

А сега да пресметнем колко трябва да бъде осветен съдът при температура T, за да може разсейването на светлина върху осцилатора да му обезпечи точно такава енергия, каквато е нужна за поддържане на излъчването. Нека атомите в съда да са съвсем малко и да се намират далеч един от друг, така че нашият осцилатор да бъде идеален, в който няма друго триене освен радиационното. Сега да отбележим, че при топлинно равновесие осцилаторът върши едновременно две работи. Първо, той излъчва и ние можем да пресметнем енергията на излъчването. Второ, той в замяна получава точно същото количество енергия като резултат на разсяната върху него светлина. Доколкото отникъде не може да дойде повече енергия, то ефективното излъчване е точно тази част от „общата светлина", която се е разсеяла върху осцилатора.

По такъв начин ние преди всичко изчисляваме енергията, излъчвана за 1 s от осцилатор с дадена енергия. (Затова от глава 32, посветена на радиационното триене, ще взаимствуваме няколко равенства и няма да привеждаме тук тяхното извеждане). Отношението на енергията, излъчена в един радиан, към енергията на осцилатора се нарича $1/Q$ (вж. уравнение (32.8)): $1/Q = (dW/dt)/\omega_0 W$. Като използуваме величината γ (константата на затихване), това може да се напише във вида $1/Q = \gamma/\omega_0$, където ω_0 е собствената честота на осцилатора, ако γ е много малка, а Q — много голямо. Излъчената енергия за 1 s е равна на

$$\frac{dW}{dt}=\frac{\omega_0 W}{Q}=\frac{\omega_0 W\gamma}{\omega_0}=\gamma W. \tag{41.4}$$

Излъчената за 1 s енергия е просто равна на произведението на γ по енергията на осцилатора. Средната енергия на нашия осцилатор е равна на kT, затова произведението на γ по kT е средната стойност на излъчената за 1 s енергия:

$$\left\langle\frac{dW}{dt}\right\rangle=\gamma kT. \tag{41.5}$$

Сега трябва само да узнаем какво е това γ. Тази величина се намира лесно от уравнението (32.12):

$$\gamma=\frac{\omega_0}{Q}=\frac{2}{3}\frac{r_0\omega_0^2}{c}, \tag{41.6}$$

където $r_0=e^2/mc^2$ е класическият радиус на електрона и ние сме положили $\lambda=2\pi c/\omega_0$.

Окончателният резултат за средната скорост на излъчването на светлина близо до честота ω_0 е такъв:

$$\frac{dW}{dt}=\frac{2}{3}\frac{r_0\omega_0^2}{c}kT. \tag{41.7}$$

Сега да изясним трябва ли да бъде силно осветен осцилаторът. Осветяването трябва да бъде такова, че погълнатата от осцилатора енергия (и по-късно разсеяна) да има точно предишната стойност. Казано по друг начин, излъчената светлина е светлина, *разсеяна* при осветяването на осцилатора в кухината. Така остана ни да пресметнем колко светлина се разсейва от осцилатора, ако на него пада някаква (неизвестна) доза излъчване. Нека $I(\omega)\,d\omega$ е енергията на светлината с честота ω в интервала от честоти $d\omega$ (нали ние нямаме светлина с *точно* определена честота — излъчването е разпределено по спектър). По такъв начин $I(\omega)$ е *спектралното разпределение*, което трябва да намерим. Това е този цвят на огъня, който ние виждаме в пещта при температура T, ако отворим вратичката и погледнем вътре.

Все пак колко светлина ще се погълне? Ние вече определихме погълнатото количество на излъчването от определен сноп падаща светлина и го изразихме чрез *ефективното сечение*. Като че ли сме предполагали, че се поглъща цялата светлина, падаща на площадка с определена площ. По такъв начин пълният преизлъчен (разсеян) интензитет е равен на произведението на интензитета на падащата светлина $I(\omega)\,d\omega$ по ефективното сечение σ.

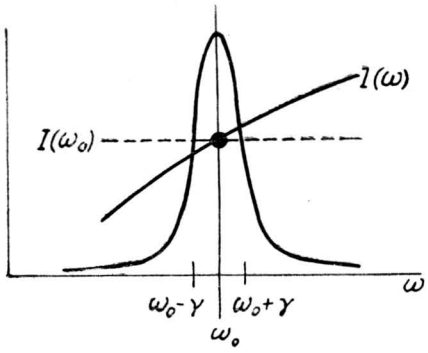
Ние изведохме формулата за ефективното сечение [вж. уравнение (31.19)], която не включва затихването. Не е трудно да се повтори този извод отново и да се отчете триенето, което тогава пренебрегнахме. Ако направим това, изчислявайки ефективното сечение по предишния образец, ще получим

$$\sigma_s=\frac{8\pi r_0^2}{3}\left(\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2}\right). \tag{41.8}$$

Да отидем по-далеч: σ_s като функция на честотата има повече или по-малко забележима стойност само за ω около собствената честота ω_0. (Да си спомним, че за излъчващ осцилатор Q е от порядъка на 10^8.) Когато ω е равна на ω_0, осцилаторът разсейва твърде силно, а при други стойности на ω той почти не разсейва. Затова е възможно да се замени ω с ω_0, а $\omega^2-\omega_0^2$ с $2\omega_0(\omega-\omega_0)$; тогава

$$\sigma_s=\frac{2\pi r_0^2\omega_0^2}{3[(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2/4]}. \tag{41.9}$$

Сега почти цялата крива е затворена в областта около $\omega=\omega_0$. (Фактически ние не сме длъжни да правим никакви приближения, но по-лесно е да имаш работа с интеграл, при който подинтегралният израз е малко по-прост.) Ако умножим интензитета в



Фиг. 41.3. Множителите на подинтегралния израз (41.10)

Пикът—това е резонансната крива $1/[(\omega-\omega_0)^2+(\gamma^2/4)]$. Множителят $I(\omega)$ може да се замени при добро приближение с $I(\omega_0)$

дадения интервал на честоти по ефективното сечение на разсейването, ще се получи енергията разсеяна в интервала $d\omega$. Пълната разсеяна енергия е интегралът по цялата ω. По такъв начин

$$\frac{dWs}{dt}=\int_0^\infty I(\omega)\,\sigma_s(\omega)\,d\omega=\int_0^\infty \frac{2\pi r_0^2\ \omega_0^2\, I(\omega)\,d\omega}{3[(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2/4]}. \tag{41.10}$$

Сега ние ще положим $dW_s/dt=3\gamma kT$. Но защо тук има 3? Защото в гл. 32 ние предполагахме, че светлината е поляризирана така, че може да приведе в трептене осцилатора. Ако използувахме осцилатор, способен да трепти само в една посока, а светлината би била, да кажем, неправилно поляризирана, то тя съвсем не би се разсейвала. Затова ние сме длъжни или да усредним ефективното сечение на разсейване на осцилатора, който е способен да трепти само в една посока, по всички направления на падащите лъчи и на поляризацията на светлината в лъча, или, което се прави по-лесно, да си представим, че нашият осцилатор послушно следва полето, там където той се намира, каквото и да бъде то. Такъв осцилатор, който еднакво лесно се разтрептява, в което и да е от трите направления, има средна енергия $3kT$, защото той има три степени на свобода. А щом има три степени на свобода, трябва да се пише $3\gamma kT$.

Да се заемем сега с интеграла. Да предположим, че неизвестното спектрално разпределение на светлината $I(\omega)$ е плавна крива, която в тази тясна област на честоти, където σ_s има остър максимум, не се мени много силно (фиг. 41.3). Тогава що-годе съществен принос в интеграла дават само тези честоти, които са близки до ω_0 и са на разстояние от нея на много малката величина γ. Затова въпреки че $I(\omega)$ е неизвестна и може би сложна функция, важно е само нейното поведение около $\omega=\omega_0$ и става възможно да се замени плавната крива с още по-равна — „константна“ — навсякъде с еднаква височина. Казано по друг начин, ние просто ще изнесем $I(\omega)$ извън знака на интеграла и това ще наречем $I(\omega_0)$. Ще изнесем и другите константи пред интеграла и тогава ще получим

$$\frac{2}{3}\pi r_0^2\,\omega_0^2\,I(\omega_0)\int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2/4}=3\gamma kT. \tag{41.11}$$

Интегралът се взима от нула до безкрайност, но 0 стои така далече от ω_0, че в това време кривата върви почти по абсцисната ос, затова ще заменим 0 с $-\infty$, разликата не е голяма, а интегралът се решава по-лесно. Интеграл от вида $\int dx/(x^2+a^2)$ води към аркустангенс. Ако погледнем в справочника, ще видим, че той е равен на π/a. И така, за нашия случай това е $2\pi/\gamma$. След малки манипулации ще получим

$$I(\omega_0)=\frac{9\gamma^2 kT}{4\pi^2 r_0^2\,\omega_0^2}. \tag{41.12}$$

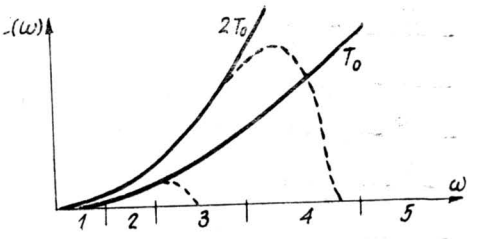
След това ще вмъкнем тук формулата (41.6) за γ (ние вече не ще се стараем да пишем ω_0, щом това е вярно за всяка ω_0, то можем просто да я наречем ω) и формулата за $I(\omega)$ ще приема вида

$$I(\omega)=\frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^2}. \tag{41.13}$$

Тя определя разпределението на светлината в горящата печка. Това е така нареченото излъчване на *абсолютно черно тяло*. То е черно, поради това че ако погледнем през вратичката на горящата печка при абсолютната нула, вътре тя ще бъде черна.

Формулата (41.13) дава разпределението на енергията на излъчването вътре в съда при температура T съгласно с класическата теория. Да отбележим отначало забележителната особеност на този израз. Зарядът на осцилатора, масата на осцилатора,

всички негови частни свойства *отпаднаха* от формулата, нали щом сме достигнали равновесие с единия осцилатор, трябва да се погрижим и за равновесието, с който и да е друг осцилатор с друга маса, иначе ще имаме неприятности. По такъв начин това е важен начин за проверка на нашата теорема, за това, че равновесието зависи *само от температурата,* а не от онова, което води до равновесие. Сега може да се начертае кривата $I(\omega)$ (фиг. 41.4). Тя ще ни покаже каква е осветеността при различни честоти.



Фиг. 41.4. Разпределение на интензитета на излъчването на черно тяло при две различни температури

Плътните криви — съгласно с класическата теория; пунктирните — истинското разпределение. 1 — радиовълни; 2 — инфрачервено лъчение; 3 — видима светлина; 4 — ултравиолетово лъчение; 5 — рентгенови лъчи

В израза за интензитета, падащ се на единица честота в съда, влиза, както се вижда, квадратът на честотата. Това означава, че ако вземем съд при която и да е температура, в него ще се открие бездна от рентгенови лъчи!

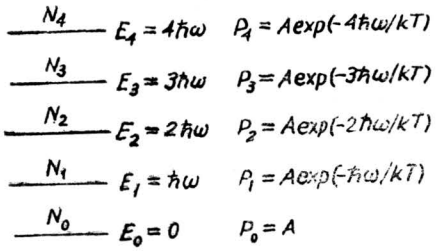
Ние, разбира се, знаем, че това не е вярно. Когато отваряме печката и поглеждаме в нея, не си увреждаме очите с рентгенови лъчи. По-нататък е по-лошо, *пълната енергия* на съда, пълният интензитет, сумиран по всички честоти, трябва да бъде площта под тази отиваща в безкрайност крива. И така, тук има нещо съвсем невярно в самата основа.

Това значи, че класическата теория е *съвсем непригодна* за правилното описание на разпределението на излъчването на черното тяло, както и за описанието на топлоемността на газовете. Физиците се въртяха около този извод, разглеждаха го от всички страни и не намериха изход. Това е *предсказание* на класическата физика. Уравнението (41.13) се нарича *закон на Релей*, предсказано от класическата физика и е абсурдно до очевидност.

3. Равномерното разпределение и квантовият осцилатор

Току-що отбелязаната трудност е само едната страна на проблемата за непрекъснатостта в класическата физика. Тя започна с безредието в топлоемностите на газовете, а след това тази проблема се концентрира върху разпределението на светлината в черното тяло. Разбира се, докато теоретиците обсъждаха тези неща, се провеждаха още и *измервания* на истинските криви. Беше установено, че правилната крива изглежда така, както пунктирните криви на фиг. 41.4. Там няма никакви рентгенови лъчи. Ако температурата се понижава, то кривите се приближават към абсцисната ос, например така, както изисква класическата теория, но и при ниска температура опитните криви също се прекъсват в края.

По такъв начин началото на кривата на разпределението описва правилно опита, а нейният високочестотен край се отбива от верния път. Защо пък е така? Когато Джеймс Джинс размишлявал относно топлоемностите на газовете, забелязал, че движението, извършвано с голяма честота, „замръзва“ при понижение на температурата. Значи осцилаторът *не може* да обладава средна енергия kT, ако температурата е много малка или ако честотата на трептене е много голяма. А сега да си спомним как изведохме (41.13). Всичко зависеше от енергията на осцилатора при топлинното равновесие. Когато ние заместихме kT в (41.5), това беше същото kT, както и в (41.13), т. е. средната енергия на хармоничния осцилатор с честота ω при температура T. Класическата физика казва, че тя е равна на kT, а експериментът отговаря: Не! При много ниски температури или при много високи честоти това не е така. По такъв начин кривата пада по същата причина, по която и топлоемността на газовете. Кривата на черното тяло се изучава по-лесно, отколкото топлоемността на газовете, където има много сложни неща. Ние ще концентрираме вниманието си върху определянето на правилната крива на излъчването на черното тяло, защото тя ще бъде тази крива, която ще ни разкаже как зависи средната енергия на хармоничния осцилатор при всяка негова честота от температурата.



Фиг. 41.5. Нивата на енергията на хармоничния осцилатор
Те се намират на равни разстояния едно от друго $E_n = n\hbar\omega$

С изучаването на тази крива се заел Планк. Отначало той намерил чисто емпиричен отговор, сравнявайки опитната крива с известни функции, които покривали тази крива по-добре от всички други. По такъв начин той получил емпиричната формула за средната енергия на хармоничния осцилатор като функция на температурата. Казано по друг начин, той заменил kT с *правилната* формула, а след това намерил прост вид на тази формула, наистина при твърде странно предположение. Предположението се състои в това, че *хармоничният осцилатор може да погълне наведнъж енергия, равна само на* $\hbar\omega$. След това вече не бива и да се мисли, че осцилаторът може да притежава *всякаква енергия.* Разбира се, това беше началото на края на класическата физика.

Сега ние ще изведем първата правилна формула на квантовата механика. Да предположим, че позволените нива на енергия на хармоничния осцилатор лежат на равно разстояние $\hbar\omega_0$ едно от друго, затова осцилаторът може да притежава само една от тези енергии (фиг. 41.5). Аргументите на Планк изглеждат малко по-сложни от нашите, нали това е било самото начало на квантовата механика и на него му се е налагало нещичко да доказва. Добре, а ние просто ще приемем като факт (който установил Планк), че вероятността да е заето нивото на енергия E, е равно на $P(E) = \alpha \exp(-E/kT)$. Като изхождаме от това, ще получим правилния резултат.

Да предположим, че имаме много осцилатори и всеки трепти с честота ω_0. Някои от тях се намират в най-ниското квантово състояние, други са се издигнали на едно ниво по-високо и т. н. Нужно ни е да знаем средната енергия на тези осцилатори. За да я намерим, нека да изчислим пълната енергия на всички осцилатори и да разделим резултата на техния брой. Тогава ще получим средната енергия на един осцилатор при топлинно равновесие, а това е същото, както и енергията при равновесие с излъчването на черното тяло и тя трябва да се постави в уравнение (41.13) вместо kT.

Нека N_0 е броят на осцилаторите в основното състояние (състоянието с най-малка енергия), N_1 — броят на осцилаторите в състояние E_1, N_2 — в E_2, и т. н. Съгласно хипотезата (която ние не доказахме) класическите изрази за вероятността $\exp(-\text{п. е.}/kT)$ или $\exp(-\text{к. е.}/kT)$ се заменят в квантовата механика с $\exp(-\Delta E/kT)$, където ΔE е разликата на енергиите. Може да се твърди, че броят на осцилаторите в първото състояние N_1 е равен на произведението на броя на молекулите в основното състояние N_0 по $\exp(-\hbar\omega/kT)$. Аналогично N_2 (броят на молекулите във второто състояние) е равно на $N_2 = N_0 \exp(-2\hbar\omega/kT)$. За да се опрости алгебрата, да въведем $x = \exp(-\hbar\omega/kT)$. Тогава всичко изглежда много просто:

$$N_1 = N_0 x,\ N_2 = N_0 x^2,\ \ldots\ N_n = N_0 x^n.$$

Отначало да намерим пълната енергия на всички осцилатори. Ако осцилаторът се намира в основното състояние, неговата енергия е нула. Ако той се намира в първото състояние, то неговата енергия е равна на $\hbar\omega_0$, а тези осцилатори са N_1. Значи, в това състояние е натрупана енергия $N_1\hbar\omega$ или $\hbar\omega N_0 x$. Енергията на осцилатора във второто състояние е $2\hbar\omega_0$, а броят им е N_2, затова получаваме такава енергия: $N_2\, 2\hbar\omega = 2\hbar\omega_0 N_0 x^2$ и т. н. Като съберем всичко това, ще намерим пълната енергия $E_{\text{пълна}} = N_0\hbar\omega (0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots)$.

А колко са всичко осцилаторите? В основното състояние, разбира се, N_0, в първото състояние N_1 и т. н. Отново ще съберем всичко и ще получим $N_{\text{общо}} = N_0\ (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$. Затова средната енергия е равна на

$$\langle E \rangle = \frac{E_{\text{пълна}}}{N_{\text{общо}}} = \frac{N_0\hbar\omega(0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots)}{N_0\,(1 + x + x^2 + \ldots)} \qquad (41.14)$$

На читателя се предоставя възможност да се позабавлява с тези суми и да получи удоволствие от това. Когато завършите

сумирането и поставите в крайния резултат стойността на x; ще получите, ако не сте сбъркали:

$$\langle E\rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1} \tag{41.15}$$

Това беше не само най-първата формула, но и най-първата мисъл на квантовата механика и тя се яви великолепен отговор на всички недоумения на предишните десетилетия. Максвел вече е разбирал, че има нещо невярно, но въпросът бил в това, кое е *правилното ?* Тук се съдържа количественият отговор — какво трябва да се вземе вместо kT. Изразът за енергията, разбира се, клони към kT при $\omega \to 0$ или при $T \to \infty$. Опитайте да докажете това — тук трябва да се постъпи така, както ни учи математиката.

Изразът за средната енергия съдържа знаменития прекъсващ множител, когото предвидя Джинс, и ако използуваме него вместо kT в (41.13), ще получим разпределението на светлината в черния съд:

$$I(\omega)\, d\omega = \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT}-1)}. \tag{41.16}$$

И така, въпреки че в числителя има ω^3, ние виждаме, че при големи ω кривата рязко пада, защото знаменателят съдържа e на извънредно висока степен. В кривата няма и намек за подем там, където в действителност няма нито ултравиолетови, нито рентгенови лъчи!

Може да се появи недоволство и във връзка с това, че при извода на (41.16) използувахме квантовата теория за нивата на енергията на хармоничния осцилатор, а при определянето на ефективното сечение σ_s оставахме верни на класическата теория. Но квантовата теория за взаимодействието на светлината с хармоничния осцилатор води точно към същите резултати, както и класическата. Това обстоятелство оправдава времето, което изгубихме за изучаване на показателя на пречупване и на разсейване на светлината, основано на представата за атома като малък осцилатор — квантовите формули са същите.

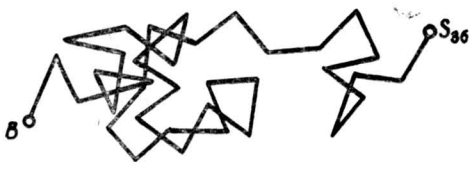
Сега да се върнем към шума на Джонсон в съпротивлението. Ние вече отбелязахме, че теорията за мощността на шума по същество е самата класическа теория за излъчване на черното тяло. В същност, както вече казахме, съпротивлението във веригата не е истинско съпротивление, а прилича по-скоро на антена (нали антената също прилича на съпротивление, тя излъчва енергия). Това е радиационно съпротивление и лесно е да се пресметне излъчваната от него мощност. Тази мощност е равна на мощността, която получава антената от околната светлина и ние сме длъжни да достигнем същото разпределение с точност до един, два множителя. Можем да предположим, че съпротивлението е генератор с неизвестен спектър на мощността $P(\omega)$. За намиране на разпределението ще ни помогне обстоятелството, че генераторът, включен в резонансна верига *с произволна честота* (както на фиг. 41.2, б), предизвиква върху индуктивността пад на напрежението, определян от равенството (41.2). Това ще ни доведе до същия интеграл, какъвто е (41.10), а като продължим да работим по същите методи, ще получим уравнение (41.3). Разбира се, за ниските температури kT в (41.3) трябва да се замени с израза (41.15). Двете теории (за излъчването на черното тяло и за шумовете на Джонсон) са тясно свързани физически, тъй като можем да свържем резонансната верига с *антената* и тогава съпротивлението R ще бъде *радиационно съпротивление* в чист вид. Доколкото (41.2) не зависи от физическите свойства на съпротивлението, генераторът G за истинското и за радиационното съпротивление ще бъде еднакъв. А какво ще стане с източника на генерираната мощност $P(\omega)$, ако съпротивлението R сега е просто идеална антена, която се намира в равновесие с околната среда при температура T? Това е излъчването в пространството при температура T, което

попада върху антената в качеството си на „приет сигнал“ и служи за ефективен генератор. Следователно, като се движим от (41.13) към (41.3), може да се намери прякото съответствие между $P(\omega)$ и $I(\omega)$.

Обяснението на явленията, за което ние сега говорим (така наречения шум на Джонсон, разпределението на Планк и теорията на броуновото движение, за което се каним да говорим) — това са достижения на първото десетилетие на нашия век. След като узнахме това и след като надникнахме в историята, да се върнем към броуновото движение.

4. Случайни блуждаения

Да се опитаме да разберем как се мени положението на танцуващата частица за време, много пъти по-голямо от интервала между два удара. Да проследим една малка частица, която е въвлечена в броуново движение и танцува под непрекъснато и безпорядъчно сипещите се върху нея удари на молекулите на водата. *Въпрос:* Далече ли ще отиде частицата от първоначалното си положение, когато изтече определено време? Тази задача решиха Айнщайн и Смолуховски. Да си представим, че сме разделили отделеното от нас време на малки интервали, да кажем, по една стотна част от секундата, така че след първата стотна от секундата частицата се оказва в едно положение, по време на втората стотна тя се е придвижила още повече, в края на следващата — още и т. н. При тази скорост на бомбардировката, на която е подхвърлена частицата, една стотна от секундата е огромно време.



Фиг. 41.6. Зигзагообразен път от 36 случайни стъпки с дължина L.
Колко далеч е разположена точката S_{36} от B? Средно на $6L$

Читателят лесно може да провери, че броят на сблъскванията, които изпитва една плаваща във вода молекула, е от порядъка на 10^{14} в секунда, така че на една стотна част от секундата се падат приблизително 10^{12} сблъсквания, а това е твърде много! Естествено по време на едната стотна от секундата, частицата не „помни“ какво е ставало с нея дотогава. Другояче казано, всички сблъсквания са *случайни*, така че всяка следваща „стъпка“ на частицата не зависи никак от предишната. Това напомня знаменитата задача за пияния моряк, който излиза от бара и прави няколко крачки, но се държи лошо на краката си и всяка стъпка прави някъде встрани, случайно (фиг. 41.6). Така че къде ще се озове нашият матрос след известно време? Разбира се, ние не знаем това! И е невъзможно да се предскаже. Всичко, което може да се каже, е, че той сигурно се намира някъде, но това е съвсем неопределено. Е добре, но все пак далеч ли ще отиде той? *Какво ще бъде това средно разстояние от бара, на което ще се озове матросът?* На този въпрос ние вече отговорихме, защото веднаж обсъдихме суперпозицията на светлината от огромен брой източници с различни фази, а това значи, че сме събирали огромен брой стрелки, насочени по произволни направления (вж. гл. 32). Тогава открихме, че средният квадрат на разстоянието от единия край на веригата от безпорядъчни стъпки до другия край, т. е. интензитетът на светлината, е равен на сумата от интензитетите на отделните източници. Съвършено аналогично, използувайки същата математика, може незабавно да се покаже, че ако $\mathbf{R}_N$ е векторното разстояние от началото до края на N стъпки, то средният квадрат на разстоянието от началото е пропорционален на броя на стъпките N. Това значи, че $\langle R_N^2\rangle = NL^2$, където L е дължината на всяка стъпка. Тъй като броят на стъпките е пропорционален на определеното чрез условията на задачата време, *средният квадрат на разстоянието е пропорционален на времето:*

$$\langle R^2\rangle = \alpha t \tag{41.17}$$

Това не означава, че *средното разстояние* е пропорционално на времето. Ако средното разстояние беше пропорционално на времето, частицата би се движила с напълно определена постоянна скорост. Матросът, несъмнено, върви напред, но неговото

движение е такова, че *квадратът* на средното разстояние е пропорционален на времето. Това е и характерната особеност на случайните блуждаения.

Ние ще докажем лесно, че всяка стъпка увеличава квадрата на разстоянието средно с L^2. Ако запишем $\mathbf{R}_N = \mathbf{R}_{N-1} + \mathbf{L}$ ще се окаже, че $\mathbf{R}_N^2$ е равно на

$$\mathbf{R}_N \cdot \mathbf{R}_N = R_N^2 = R_{N-1}^2 + 2\mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{L} + L^2,$$

а като усредним по многото опити, ще получим $\langle R_N^2 \rangle = \langle R_{N-1}^2 \rangle + L^2$, защото $\langle \mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{L} \rangle = 0$. По такъв начин по индукция

$$R_N^2 = NL^2. \tag{41.18}$$

Сега би било добре да изчислим коефициента α в уравнението (41.17), за което е нужно да се добави още нещо. Да предположим, че ако към частицата е приложена сила (тя няма никакво отношение към броуновото движение, просто търсим израз за импулса), то частицата ще противодейства на силата по следния начин. Преди всичко трябва да се прояви инерцията. Нека m е коефициент на инерция, ефективната маса на частицата (не обезателно истинската маса на истинската частица, защото ако прекарваме частицата през вода, ще се движи и водата). Затова ако разглеждаме движението в една посока, трябва, от една страна, да се сдобием със събираемото $m(d^2x/dt^2)$. По-нататък да подчертаем, че ако тласкаме частицата равномерно, тя трябва да се спира от течността със сила пропорционална на скоростта. Освен инерцията на течността съществува още и съпротивление на течението, предизвикано от вискозитета и сложния строеж на течността. За възникването на флуктуации е абсолютно *необходимо* съществуването на необратими загуби, нещо като съпротивление. Докато няма такива загуби, няма начин да получим kT. Причината за флуктуациите е тясно свързана с такива загуби. Ние тепърва ще обсъдим какъв е механизмът на това триене, ще поговорим за сили пропорционални на скоростта и ще изясним откъде се взимат те. А засега нека просто да предположим, че такова съпротивление съществува. Тогава формулата за движението под действието на външна сила, ако тя блъска частицата по най-обикновен начин, изглежда така:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} = F_{\text{вън}}\,. \tag{41.19}$$

Величината μ може да се определи експериментално. Например можем да изучим падането на капка под действието на силата на тежестта. Тогава е известно, че силата е равна на mg, а μ е mg, делено на окончателно установилата се скорост на падането на капката. Или можем да поместим капката в центрофуга и да следим за скоростта на утаяването. А ако тя е заредена, можем да приложим електрическо поле. По такъв начин μ е измеряема величина, а не е нещо изкуствено и нейната стойност е известна за много видове колоидни частици.

Да приложим тази формула даже в случай, когато силата не е външна, а е равна на безпорядъчните сили на броуновото движение. Да опитаме да определим средния квадрат на пътя, изминат от тялото. Ще разгледаме разстоянието не в три, а в едно измерение и ще определим средната стойност на x^2, за да се подготвим за решаването на задачата. (Разбира се, средната стойност на x^2 е равна на средната на y^2 и на средната на z^2, затова средният квадрат на разстоянието ще бъде три пъти по-голям от това, което ще получим.)

Разбира се, x компонентата на безпорядъчното движение е така безпорядъчна, както и останалите компоненти. На какво е равна скоростта на изменението на x^2? Тя е равна на $(d/dt)(x^2) = 2x(dx/dt)$, затова скоростта на изменението на средното x^2 може да се намери, като се усредни произведението на скоростта по координатата. Ще покажем, че това е посто-

янна величина, т. е. средният квадрат на радиуса нараства пропорционално на времето и ще намерим скоростта на нарастването. Ако умножим уравнението (41.19) по x, ще получим $mx\,(d^2x/dt^2)+\mu x\,(dx/dt)=xF_x$. Нас ни интересува средното на $x\,(dx/dt)$ по времето, затова ще усредним по времето цялото уравнение и ще изучим трите събираеми. Какво може да се каже за произведението на x по силата? Въпреки че частицата е достигнала до точката x, следващите тласъци могат да бъдат насочени в кое и да е направление относно x, нали случайната сила е *напълно* случайна и нея не я интересува откъде е започнала да се движи частицата. Ако координатата x е положителна, средната сила няма никакво основание да се насочи в същата посока. За нея тя е толкова вероятна, колкото и всяка друга. Случайните сили не могат да отправят частицата в определено направление. Затова средното произведение от x по F_x е равно на нула. От друга страна, възможно е на събираемото $mx\,(d^2x/dt^2)$, ако малко си поиграем, да дадем вида

$$mx\frac{d^2x}{dt^2}=m\frac{d}{dt}\left(x\frac{dx}{dt}\right)-m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Ние разделихме първоначалното събираемо на две и сега трябва да усредним и двете. Да видим на какво е равно произведението на x по скоростта. Това произведение не се изменя с времето, защото, когато частицата попада в дадена точка, тя вече не помни къде е била по-рано и величините, характеризиращи такива положения, не трябва да зависят от времето. Затова средната стойност на тази величина е равна на нула. На нас ни остана само mv^2, а за тази величина ние знаем нещичко: средната стойност на $mv^2/2$ е равна на $^1/_2\,kT$. Следователно ние установихме, че

$$\left\langle mx\frac{d^2x}{dt^2}\right\rangle+\mu\left\langle x\frac{dx}{dt}\right\rangle=\langle xF_x\rangle$$

влече след себе си

$$-\langle mv^2\rangle+\frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle=0$$

или

$$\frac{d\langle x^2\rangle}{dt}=2\,\frac{kT}{\mu}. \tag{41.20}$$

Това значи, че средният квадрат на радиус-вектора на частицата $\langle R^2\rangle$ в момента t е равен на

$$\langle R^2\rangle=6kT\frac{t}{\mu}\ . \tag{41.21}$$

По такъв начин ние в същност можем да изясним *колко далече* ще отидат частиците! Отначало трябва да се изучи реакцията на частицата срещу постоянна сила, да се изясни скоростта на дрейфа на частицата под действието на известна сила (за да се определи μ) и тогава ще можем да разберем ще се разпълзят ли надалече безпорядъчно движещите се частици. Полученото от нас уравнение има голяма историческа стойност, защото на него се базира един от първите начини за определянето на константата k. Нали в края на краищата може да се измери величината μ и времето, да се определи разстоянието, на което ще се отдалечи частицата и да се получи средната стойност.

Защо е толкова важно да се получи точната стойност на k? Защото по закона $PV=RT$ за един мол може да се измери R, което е равно на броя на атомите в един мол по k. Някога молът се определяше като толкова и толкова *грама* кислород 16 (сега за тази цел използуват въглерода), затова отначало не се знаеше броят на *атомите* в един мол. Това е, разбира се, интересен и важен въпрос. Какви са размерите на атомите? Много ли са те? Така един от най-ранните начини за определяне броя на атомите се сведе до определянето, далече ли ще отидат най-малките прашинки, докато ние ги разглеждаме търпеливо в микроскопа в течение на строго определено време. След това стана възможно да се намери и константата на Болцман k, и числото на Авогадро N_0, защото по това време R било вече измерено.

42

Приложения на кинетичната теория

Изпарение

1. Изпарение
2. Термойонна емисия
3. Топлинна йонизация
4. Химическа кинетика
5. Закони на Айнщайн за излъчването

Тази глава е посветена на по-нататъшното приложение на кинетичната теория. В предишната глава ние подчертахме един от изводите на тази теория, че средната кинетична енергия на всяка степен на свобода на молекулата или на който и да е друг обект е равна на $^1/_2 kT$. Сега централен пункт на нашето изложение ще бъде твърдението, че отнесената към единица обем вероятност за това да се намери частицата на едно или друго място е пропорционална на $\exp(-\text{п. е.}/kT)$. (Това твърдение ние използувахме в редица задачи.)

Явленията, които смятаме да изучим, са доста сложни: изпарение на течност, излитане на електрони от повърхността на метал или химическа реакция, в която участвуват много атоми. В такива случаи кинетичната теория не дава прости и точни предписания, ситуацията е твърде сложна за това. Затова изводите на тази глава, с изключение на специално уговорените, са твърде неточни. Ние само ще подчертаем, че, като изхождаме от кинетичната теория, е възможно *повече или по-малко* добре да разберем тези явления. Но много по-точна представа за тях дават термодинамичните аргументи или някои измервания на отделни критични величини.

Полезно е да се знае, дори и твърде приблизително, защо това, което става, става именно по този начин. Тогава, като се натъкнем на явление, което съдържа в себе си нещо, което ние още не сме видели, или такова, което не сме и възнамерявали да анализираме, може би, ще можем повече или по-малко точно да кажем какво е станало. Такъв анализ ще бъде в най-висока степен неточен, но в общи черти верен — верен по същество, но едва-едва опростен, да кажем в някои тънки подробности.

Да разгледаме първия пример — изпарение на течност. Да предположим, че голям съд е напълнен при дадена температура по равно с течност и пара. Ще смятаме, че средните разстояния между молекулите на парата са достатъчно големи, а в течността молекулите са опаковани плътно. Задачата се състои в това да се определи броят на молекулите, намиращи се в газова фаза, в сравнение с броя на молекулите, намиращи се в течността. Каква е плътността на парата при дадената температура и как зависи тя от температурата?

Нека n е броят на молекулите на парата в единица обем. Този брой, естествено, се мени с температурата. С притока на топлина се увеличава изпарението. Да добавим още една величина $1/V_a$, равна на броя на атомите в единица обем, които се съдържат в течността: ние предполагаме, че на всяка молекула в течността е отреден напълно определен обем, затова колкото повече молекули има в течността, толкова по-голям обем те ще заемат. Ако V_a е обемът, отреден на една молекула, то броят на молекулите в единица обем ще е равен на единичния обем, разделен на обема, заеман от едната молекула. По-нататък да предположим, че между молекулите действуват сили на привличане, задържащи ги вътре в течността. Иначе не можем да разберем защо става кондензацията. И така, да предположим че съществуват сили на привличане и че съществува енергия на свързването на молекулите в течността, която се губи при прехода на молекулите в пара. Това навежда на мисълта, че за превеждането на някоя молекула от течност в пара трябва да се извърши работа W. Съществува определена разлика W между енергията на

молекулата в течността и нейната енергия в парата, защото за пренасянето на молекулата в парата ние трябва да я откъснем от всички молекули, към които тя е привличана.

Сега да се обърнем към общия принцип, по който отношението на броя на атомите в единица обем в различни области е равно на $n_2/n_1 = \exp[-(E_2-E_1)/kT]$. Значи n-броят на молекулите в единица обем на парата, разделен на $1/V_a$ (броя на молекулите в единица обем на течността), е равен на

$$nV_a = e^{-w/kT}. \tag{42.1}$$

Такова е общото правило. Това прилича твърде много на равновесна атмосфера в полето на тежестта, когато ниските слоеве на газа са по-плътни от по-горните и затова за издигането на молекула на височина h е нужна енергия mgh. В течността молекулите са разположени по-плътно, отколкото в газа, тъй като те са принудени да се постесняват от енергията на „подема“ W и отношението на плътностите е равно на $\exp(-W/kT)$.

Това е, което искахме да изведем — плътността на парата се изменя като e на някаква степен. За показател служи взетата със знак минус, приличаща на енергия величина, делена на kT. Множителите пред експонентата не са особено интересни, защото в болшинството случаи плътността на парата е много по-малка от плътността на течността. При тези обстоятелства, когато сме далеч от критичната точка, където плътността е почти еднаква, съотношението на плътностите, при което n е много по-малко от $1/V_a$, се обезпечава от това, че W е много по-голяма от kT. Затова формулите от типа на (42.1) са интересни само тогава, когато W *действително* е много по-голяма от kT. В този случай e се повдига на грамадна отрицателна степен и ако изменим малко T, изменя се малко и грамадната степен, а това ще повлече след себе си такива изменения на експонентата, които ще бъдат много по-важни от възможните изменения на предекспоненциалните множители. Но защо ще се изменят такива множители като $1/V_a$? Поради това, че нашето описание е приблизително. Нали в действителност всяка молекула няма определен обем, при изменение на температурата обемът V_a не остава постоянен — течностите се свиват и разширяват. Има още и други дребни неща като това, така че действителното положение е много по-сложно. Почти навсякъде стоят бавно изменящи се с температурата множители. В действителност само W се мени бавно с температурата, защото при различни температури на молекулите са отредени различни обеми, притеглянето трябва да бъде различно и т. н. И така, можем да стигнем до извода, че тъй като ние получихме формула, в която всичко се мени по неизвестен начин с температурата, в същност нямаме и никаква формула. Но ако знаем, че показателят на експонентата W/kT е значително голям, можем да се убедим, че най-големите изменения на кривата на плътността на парата като функция на температурата са обусловени от експоненциалния множител. Затова ако смятаме W за постоянна величина, а коефициента $1/V_a$ за почти постоянна, това ще бъде добро приближение за неголям интервал от нашата крива. Казано по друг начин, основните изменения се определят от вида на функцията $\exp(-W/kT)$.

Излиза, че в природата има много, твърде много процеси, за които е характерно взимането на енергия назаем. Основно свойство на такива процеси се явява експоненциалната температурна зависимост: e се повдига на отношението на взетата с отрицателен знак енергия към kT. Това е полезен факт, но само в тези случаи, когато енергията е голяма в сравнение с kT, тъй като главната част на измененията в зависимост от температурата се определят от изменението на kT, а не от големината на константите и другите множители.

Нека да разгледаме сега малко по-подробно друг способ за получаване на почти аналогичен резултат за изпарението. За да се получи (42.1), ние винаги прилагахме вярното при равновесие правило, но малко разбрахме от същността на явлението

Затова не е вредно да погледнем по-детайлно как протича изпарението. То може да се опише примерно така: молекулите на парата непрекъснато атакуват повърхността на течността, при удара те могат или да я пробият, или да отскочат от повърхността. На нас не ни е известно кое се случва по-често, може би отношението е 50 към 50, а може би и 10 към 90. Да предположим, че повърхността се пробива всякога, а след това ще видим към какво ще ни доведе предположението за поздрава повърхност. Тогава във всеки момент ще има определен брой атоми, които ще се кондензират на повърхността на течността. Броят на кондензираните молекули (броят на молекулите преминали през площадка с площ единица) е равен на броя на молекулите в единица обем n, умножен по скоростта v. Тази скорост на молекулите е свързана с температурата, нали е известно, че средно $^1/_2mv^2$ е равно на $^3/_2kT$. Затова v е някаква средна скорост. Разбира се, необходимо е още да се интегрира по ъглите и да се направят всякакъв вид усредняванията, но резултатът е право пропорционален на корена от средния квадрат на скоростта. По такъв начин

$$N_c = nv, \tag{42.2}$$

т. е. това е броят на молекулите, достигнали единичната площ и кондензирани там.

Но атомите на течността се движат непрекъснато и от време на време някои изскачат навън. Сега ни е необходимо да изясним често ли става това. При равновесие броят на молекулите, изскочили за 1 s от течността, е равен на броя на постъпилите в единица време на нейната повърхност.

Е, а много ли молекули изскачат? За да изскочи навън, молекулата трябва някак си да се изхитри да придобие някаква добавъчна енергия, която ще се окаже по-голяма от енергията на нейните съседки. И този излишък на енергия трябва да бъде достатъчно голям, нали нашата молекула се притегля твърде силно към останалите молекули на течността. Обикновено на нея не ѝ се удава да преодолее това силно притегляне, но понякога при сблъсканията на нея ѝ се пада излишък от енергия. Шансовете за получаване на необходимия в нашия случай излишък от енергия W не са големи, ако $W \geqslant kT$. Действително вероятността атомът да добие енергия по-голяма от W е равна на $\exp(-W/kT)$. Това е общ принцип на кинетичната теория: шансовете да се получи енергия w по-голяма от средната енергия са равни на e, повдигнато в степен, чийто показател е равен на отношението на W към kT със знак минус. Да предположим, че на някои молекули се е удало да получат тази енергия. Сега може да се установи колко молекули напущат повърхността на течността за 1 s. Разбира се, получаването от молекулата на необходимата енергия още не означава, че е обезпечено изпарението. Нали тази молекула може да се намира твърде дълбоко в течността, а даже и да се намира на повърхността, тя може да не се движи към нея. Броят на молекулите, които напущат единичната площ за 1 s, е например броят на молекулите на единица площ, намиращи се близо до повърхността, делен на времето необходимо на молекулата, за да избяга и умножен по вероятността $\exp(-W/kT)$ за готовността на молекулата за бягство, в смисъл, че те вече са получили достатъчно количество енергия.

Да предположим, че всяка молекула на повърхността на течността заема определена площадка с площ A. Тогава броят на молекулите на единица повърхност от течността е равен на $1/A$. А много ли време трябва на молекулата, за да извърши своето бягство? Ако молекулите се движат с определена средна скорост v и трябва да преминат разстояние, да кажем, равно на диаметъра на молекулата D (дебелината на външния слой), то времето, необходимо за преодоляването на това разстояние, е и времето за бягството, при условие че молекулата притежава достатъчно енергия. Това време е равно на D/v. По такъв начин броят на молекулите, които се изпаряват, е приблизително равен на

$$N_e = \frac{1}{A}\,\frac{v}{D}\,e^{-W/kT} \quad . \tag{42.3}$$

Да отбележим, че произведението на площта на всяка молекула по дебелината на слоя е приблизително равно на обема V_a, отреден на всяка молекула. И така, за получаване на равновесие е необходимо да имаме $N_c = N_e$ или

$$nv = \frac{v}{V_a}\,e^{-W/kT}. \tag{42.4}$$

От това равенство може да се махнат скоростите, защото са равни; дори и да е специално отбелязано, че едната от тях е скоростта на молекулата от парата, а другата — на изпаряващата се молекула, все едно, те са еднакви, нали ние знаем, че средната кинетична енергия на двете молекули (в едно направление) е равна на $^1/_2kT$. Но може да се каже: „Не! Не! Нали се изпаряват само особено бързите молекули. Само те са придобили достатъчен излишък от енергия". Това не е съвсем така, защото в момента, когато тези молекули изскачат от течността, те *губят* този излишък, преодолявайки потенциалната енергия. Затова при идването до повърхността те се движат вече със забавена скорост v! Точно така беше работата с разпределението на молекулярните скорости в атмосферата — в долните слоеве молекулите бяха разпределени по определен начин по енергии. Тези от тях, които достигаха по-горните слоеве, се разпределяха по енергии *точно така*, защото бавните молекули съвсем не се издигат нагоре, а бързите, като се издигат, се движат по-бавно. Изпаряващите се молекули са разпределени по скорости така, както молекулите, които се движат в дълбочината на течността — наистина поразителен факт. Във всеки случай няма смисъл да се опитваме да обсъждаме толкова строго нашата формула, защото в нея има и други неточности, например ние разглеждахме вероятността за отразяване на молекулите от повърхността, а не тяхната кондензация и т. н. Ние имаме работа само с грубо описание на скоростта на изпарение и кондензация и виждаме естествено, че плътността на парата n се изменя така, както и по-рано, но сега разбираме този процес много по-добре, а по-рано писахме почти произволна формула.

По-дълбокото разбиране ще ни позволи да изясним още нещо. Например да предположим, че изпомпваме парата, при това така бързо, че парата се отделя практически с такава скорост, с каквато се образува (ако нашата помпа е много добра, а изпарението става бавно). С каква скорост ще протича изпарението, ако температурата на течността T се поддържа постоянна? Да предположим, че сме измерили вече опитно равновесната плътност на парата и ни е известно колко молекули в единица обем могат да бъдат в равновесие с течността при дадена температура. Сега искаме да знаем *скоростта на изпарение* на течността. Въпреки че се ограничихме само с груб анализ на изпарението, той все пак ни даде сведения за броя на молекулите, пристигащи в парата наистина с точност до един неизвестен коефициент на отражението. Затова можем да използуваме обстоятелството, че при равновесие броят на молекулите, напущащи парата, е равен на броя на молекулите, идващи в парата. Наистина парата се изпомпва и молекулите могат само да напускат течността, но ако се остави парата в покой, то ще се установи разновесна плътност, при която броят на идващите в течността молекули ще е равен на броя на изпаряващите се. Следователно лесно се вижда, че в този случай броят на молекулите, напущащи повърхността на течността за 1 s, е равен на произведението на неизвестния коефициент на отражението R по броя на молекулите, които ежесекундно биха се връщали в течността, ако парата не се изпомпваше, защото именно този брой влиза в уравнението на баланса за изпарението при равновесие:

$$N_e = nvR = \frac{vR}{V_a}\,e^{-W/kT}. \tag{42.5}$$

Разбира се, по-лесно е да се пресметне броят на молекулите, преминаващи от пара в течност, защото в този случай не е необходимо да се предполага нищо за силите, както това трябваше да правим при пресмятането на броя на молекулите, напускащи течността. По-просто е да се измени пътят на разсъждения.

2. Термойонна емисия

Може да се приведе още един пример на често срещащ се процес, който толкова прилича на изпарението на течности, че даже няма да се наложи да го анализираме отделно. Всъщност това е същата задача. Във всяка радиолампа има източник на електрони—волфрамова нишка, която се нагрява, и положително заредена пластинка, привличаща електроните. Откъсналият се от повърхността на волфрама електрон незабавно отлита към пластинката. Това е „идеална" помпа, която непрекъснато „изпомпва" електрони. Възниква въпросът: колко електрони напускат ежесекундно волфрамовата нишка и как зависи техният брой от температурата? Решението на задачата се дава със същото уравнение (42.5), защото електроните, намиращи се в парче метал, се привличат от йоните или атомите на метала. Те, грубо казано, се притеглят от метала. За да се откъсне електрон от метала, трябва да му се придаде определено количество енергия, т. е. да се изразходва за това работа. Тази работа за различните метали е различна. Фактически тя се мени даже и от вида на повърхността при един и същ метал, но общо тя е няколко електронволта — величина, изобщо типична за енергията на химически реакции. При това полезно е да си спомним, че разликата в потенциалите на химическите елементи, например батерията за магнезиева светкавица, която се поражда от химически реакции, е от порядъка на 1 волт.

Как да се определи броят на електроните, напускащи метала за 1 s? Много трудно е да се изчисли всичко, което може да повлияе на излизането на електрона, по-лесно е да се реши задачата по друг начин. Да си представим, че ние не махаме излетелите електрони, а те образуват нещо като газ и могат да се връщат в метала. В този случай съществува напълно определена равновесна плътност на електроните, която се определя от същата формула, каквато е (42.1), където V_a, грубо казано, е обемът, отреден в метала на един електрон, а $W=q_e\varphi$ (φ — така наречената *работа за откъсването* или потенциалната разлика, необходима за откъсването на електрон от повърхността на метала). Тази формула ще ни подскаже колко електрони трябва да се намират в околното пространство и да проникват в метала, за да компенсират загубата на електроните, които са напуснали метала. Сега е лесно да се пресметне колко електрони ще напуснат метала, ако непрекъснато ги изпомпваме, защото броят на излезлите електрони е точно равен на броя на електроните, които би трябвало да се върнат в метала, ако съществуваше електронна „пара", чиято плътност се определя от формулата (42.1). Казано по друг начин, електрическият ток през единица площ е равен на произведението на заряда на електрона по броя на електроните, преминаващи за 1 s през площадка с единица площ. Последното е равно на броя на електроните в единица обем по скоростта. Затова, както вече много пъти видяхме,

$$I=q_e nv=\frac{q_e v}{V_a}\,e^{-q_e\varphi/kT}. \qquad (42.6)$$

Ние знаем, че 1 eV съответствува на κT при температура, достигаща до 11 600 grad. Нагрятата нишка на радиолампата работи например при 1100 grad; затова експоненциалният множител е равен например на e^{-10}. Когато леко изменим температурата, експоненциалният множител се изменя много силно. Това е отново основното свойство на формулите, съдържащи $\exp(-q_e\varphi/kT)$. Предекспоненциалният множител е съвсем неверен. Оказва се, че по-

веденията на електроните в метала се описва правилно от квантовата механика, а не от класическата, но правилният множител се отличава само малко от нашия. Фактически досега още никой не е могъл да изчисли точно този множител, въпреки че мнозина са използували при пресмятанията квантови формули от висша класа. Основната задача се състои в това да се изясни, не се ли изменя W с температурата, макар и бавно? Ако е така, то бавно изменящата се с температурата величина W не може да се отдели от предекспоненциалните коефициенти. Ако например W зависи от температурата линейно, така че $W=W_0+\alpha kT$, то

$$e^{-W/kT}=e^{-(W_0+\alpha kT)/kT}=e^{-\alpha}e^{-W_0/kT}.$$

Такава линейна зависимост на W от температурата е еквивалентна на променена „константа". Опитът за точно изчисление на предекспоненциалния множител е много труден и обикновено безплоден.

3. Топлинна йонизация

Да минем сега към още едно приложение на всичките тези идеи. Сега ще говорим за йонизацията. Да предположим, че газът се състои от голямо множество атоми, които нормално са неутрални, но ако газът се нагрее, атомите могат да се окажат йонизирани. На нас ни е необходимо да знаем колко йони съществуват при едни или други обстоятелства, т. е. при дадена плътност на атомите в единица обем и при определена температура. Отново ще се наложи да си представим съд, в който се намират N атома, съдържащи в себе си електрони. (Ако един електрон напуща атома, то на атома се поставя името йон, а ако атомът е неутрален, просто се казва атом.) По такъв начин да предположим, че в дадения момент в единица обем броят на неутралните атоми е равен на n_a, броят на йоните е равен на n_i, а броят на електроните е равен на n_e. Трябва да определим как са свързани тези три числа помежду си?

Преди всичко тези три числа се подчиняват на две условия или връзки. Например можем да меним както искаме различните условия, температурата и т. н., но сумата n_a+n_i винаги остава една и съща, защото това е чисто и просто а N — броят на атомните ядра в съда. Ако в единица обем броят на ядрата се запазва постоянен, а се изменя, да кажем, температурата, то, въпреки че в резултат на йонизацията някои атоми се превръщат в йони, общият брой на атомите и йоните не се изменя. Значи $n_a+n_i=N$. Другото условие произтича от това, че ако газът е изцяло електрически неутрален (и ако ние пренебрегнем двойната или тройна йонизация), то броят на йоните винаги ще е равен на броя на електроните, или $n_e=n_i$. Тези допълнителни условия просто изразяват запазването на заряда и запазването на атомите.

Равенствата са верни и ние в края на краищата винаги ги използуваме при решаването на реални задачи. Но на нас ни е необходимо да получим друго съотношение между тези величини. Това може да се направи така. Да се обърнем отново към идеята, че за откъсването на електрон от атома се изисква някакво количество енергия, което ние ще наричаме *енергия на йонизацията* и ще я означаваме с буквата W (за да изглеждат новите формули така, както и по-раншните). И така, W е равна на енергията, необходима за да се откъсне електрон от атома и да се получи йон. Ние отново се убеждаваме, че броят на свободните електрони в единица обем „пара" е равен на произведението на броя на електроните в единичния обем, свързани в атоми, по e на степен минус разликата на енергиите на свързания и свободния електрон, делена на kT. Отново основното уравнение. Но как да запишем това? Броят на свободните електрони в единица обем, резбира се, е n_e, защото определението е n_e. Е, а какво може да се каже за броя на свързаните в атома електрони в единица обем? Общият брой на местата, отдадени на електроните, е равен на n_a+n_i и

ние ще предположим, че когато всички електрони са свързани, то на всеки се пада някакъв обем V_a. По такъв начин пълният атомен обем, заеман от свързаните електрони, е равен на $(n_a+n_i)V_a$ и нашата формула сега може да се запише във вида

$$n_e=\frac{n_a}{(n_a+n_i)V_a}\,e^{-W/kT}.$$

Но тази формула е невярна. Ние сме изпуснали пред вид едно съществено обстоятелство: когато един електрон е попаднал в атом, друг електрон не може вече да проникне в този обем! Другояче казано, не всички обеми от броя на възможните са достъпни за електрона, който мисли накъде да се отправи — в парата или в кондензираното състояние. Тук възникват непредвидени усложнения, по силата на които електронът не може да дойде близо до това място, където вече се намира друг електрон — те се отблъскват. По тази причина ние трябва да смятаме само тази част на обема, която електронът може да заеме. Нали тези обеми, които вече са заети, не може да се причислят към броя на възможните и само тези обеми, които са предоставени на *йоните*, могат да се разглеждат като места, вакантни за електрони. Тогава, отчитайки това обстоятелство, ние ще намерим, че по-точната формула се записва във вида

$$\frac{n_e n_i}{n_a}=\frac{1}{V_a}\,e^{-W/kT}. \qquad (42.7)$$

Тази формула наричат *уравнение на йонизацията* или *уравнение на Сах*. Сега да видим можем ли качествено да разберем защо се получава формула, подобна на тази, ако следим кинетиката на процеса.

Преди всичко, от време на време, когато електрон се сблъска с йон, те се обединяват в атом. Точно така от време на време атомът претърпява сблъскване и се разбива на йон и електрон. Скоростите на двата процеса трябва да бъдат равни. А дълго ли ще се търсят електронът и йонът? Разбира се, срещите стават по често, ако нараства броят на електроните в единица обем. Към това води и увеличението на броя на йоните в единица обем. Следователно пълната скорост на рекомбинацията е пропорционална на произведението от броя на електроните по броя на йоните. По-нататък пълната скорост на йонизацията в резултат не сблъскванията трябва да зависи линейно от броя на способната на йонизация атоми. По такъв начин скоростите на двата процеса ще се уравновесят тогава, когато се установи определено съотношение между произведението $n_e n_i$ и броя на атомите n_a. Фактът, че това съотношение се изразява с особена формула, където влиза енергията на йонизацията W, дава, разбира се, малко по-голяма информация, но ние можем лесно да съобразим, че такава формула трябва обезателно да съдържа концентрациите на електрони, йони и атоми в комбинацията $n_e n_i/n_a$, която води към константа, независеща повече от числата n, а само от температурата, атомните размери и други константи.

Да отбележим също, че тъй като уравнението съдържа броя в *единица обем* и ако ние поставим два опита с един и същ пълен брой N атоми и йони, т. е. строго определен брой ядра, но затворени в съдове с различни обеми, то числата n ще бъдат по-малки за по-големите съдове. Обаче отношението $n_e n_i/n_a$ трябва да остава постоянно, защото *пълният брой* на електроните и йоните трябва да бъде по-голям в по-големия съд. За да се убедим в това, да предположим, че в съд с обем V са поместени N ядра и тяхната f-та част е йонизирана. Тогава $n_e=fN/V=n_i$ и $n_a=(1-f)N/V$. В този случай нашето уравнение приема вида

$$\frac{f^2}{1-f}\,\frac{N}{V}=\frac{e^{-W/kT}}{V_a}. \qquad (42.8)$$

Казано с други думи, ако взимаме все по-малка и по-малка плътност на атомите или непрекъснато увеличаваме обема на съда, относителният брой на електроните и йоните f трябва да нараства.

Това, че йонизацията може да бъде предизвикана просто от „разширение“, при което плътността се намалява, ни обяснява защо при твърде малки плътности (каквито се срещат в студеното междузвездно пространство) има много йони, въпреки че това е трудно да се разбере, като отчитаме енергията, която е на наше разположение. Енергията е много, много пъти по-голяма от kT, но все пак йони има.

Защо йоните могат да съществуват само при условие, че около тях има много място, докато при увеличение на плътността те се стремят да изчезнат? *Отговор*: Цялата работа е в атомите. От време на време светлина или друг атом, или йон, или още нещо, което поддържа топлинното равновесие, разрушава атомите. Твърде рядко, защото за това се изискват огромни количества излишна енергия, се откъсва електрон и става превръщането на атома в йон. Ако пространствата са огромни, то електронът ще се движи много дълго, може би години и няма да срещне нищо. Но срещне ли веднаж йон, тогава те се обединяват в атом. Скоростта, с която електроните напускат атомите, е твърде малка. Но ако обемът е огромен, то избягалият електрон така дълго търси йон, с който той би могъл да се рекомбинира, че вероятността за рекомбинация е нищожно малка; затова, макар че за йонизацията са необходими големи излишъци от енергия, броят на електроните може да бъде съвсем осезаем.

4. Химическа кинетика

При химическите реакции става нещо подобно на „йонизацията. Например две вещества A и B се комбинират в едно основно вещество AB и тогава, като помислим малко, можем да наречем AB атом (B е това, което ние наричаме електрон, а A — което наричаме йон). След такава замяна, както и по-рано може да се напише уравнението на равновесието

$$\frac{n_A n_B}{n_{AB}} = ce^{-W/kT}. \tag{42.9}$$

Тази формула, разбира се, не е точна, защото „константата“ c зависи от това, в какъв обем е позволено да се обединяват A с B и т. н., но като се обърнем към термодинамичните аргументи, може да се даде смисъл на величината W в експоненциалния множител и тогава да се окаже, че тя е тясно свързана с енергията, необходима за реакцията.

Да се опитаме да разберем тази формула като резултат от сблъскванията приблизително така, както достигнахме формулата за изпарението, като преброяваме електроните, които се откъсват в пространството, и тези, които се връщат назад за единица време. Да предположим, че при сблъскванията A и B понякога образуват съединението AB. И да предположим още, че AB е сложна молекула, която участвува в общата игра, и в която се удрят другите молекули, при което от време на време тя получава енергия, достатъчна, за да се разкъса и отново да се раздели на частите A и B.

Да отбележим, че в химическите реакции работата се състои в това, че ако сближаващите се атоми имат твърде малко енергия, то въпреки че тази енергия е достатъчна за реакцията $A+B \rightarrow AB$, фактът на удар между A и B още не означава начало на реакцията. Обикновено се изисква ударът да бъде „по-твърд“, „мекият“ удар между A и B може да се окаже недостатъчен за начало на реакцията, даже ако в процеса се освобождава достатъчно за реакцията количество енергия. Да предположим, че обща черта на химическите реакции е изискването, според което за обединяването на A и B в AB е недостатъчно само сблъскване, а е нужно те да са се ударили, *имайки определено количество енергия*. Тази енергия се нарича *енергия на активацията*, т. е. енергия необходима за „активация“ на реакцията. Нека A^* е този излишък на енергия, който е необходим, за да могат сблъскванията

да предизвикват реакция. Тогава скоростта R_f, с която A и B образуват AB, трябва да съдържа произведението на броя на атомите A и B, умножено по скоростта, с която отделният атом се удря в някаква площадка с големина σ_{AB} и по величината exp $(-A^*/kT)$ (вероятността за това, атомите да имат достатъчно енергия):

$$R_f = n_A n_B v \sigma_{AB} e^{-A^*/kT}. \qquad (42.10)$$

Сега трябва да намерим скоростта на обратния процес R_r. Съществува някаква вероятност, че A и B отново ще се разделят. За да се разделят, на тях им е недостатъчна енергията W, която ще обезпечи отделното им съществуване. Но щом молекулата се съединява трудно, трябва да съществува някаква бариера, през която A и B да се прехвърлят, за да се разделят. Те трябва да се запасят не само с необходимата за тяхното съществуване енергия, но и да вземат нещо за запас. Получава се нещо като изкачване на хълм преди спускане в долина; отначало се налага да се изкачим на височината, после да се спуснем и чак след това да се разделим (фиг. 42.1). По такъв начин скоростта на прехода AB в A и B е пропорционална на произведението: n_{AB} — началния брой на молекулите AB по ерх $[-(W+A^*)/kT]$

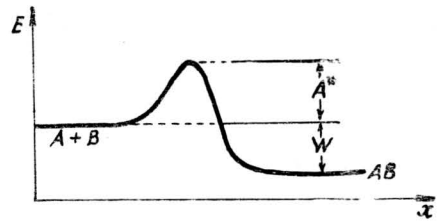
$$R_r = c' n_{AB} e^{-(W+A^*)/kT}. \qquad (42.11)$$

Константата c' се образува от обема на атомите и честотата на сблъскванията. Тя може да се получи, както и в случая на изпарението, като умножим площта и дебелината на слоя, но сега ние няма да правим това. Сега ни интересува повече фактът, че когато тези скорости са равни, тяхното отношение е равно на единица. Това говори, че както и по-рано, $(n_A n_B/n_{AB}) = c \exp(-W/kT)$, където c съдържа сечението, скоростта и други множители, независещи от числата n.

Интересно е, че както и по-рано, скоростта на реакцията се изменя като exp $(-\text{const.}/kT)$, въпреки че тази константа няма вече никакво отношение към тази, с която ние се срещахме в задачата за концентрациите, енергията на активацията A^* се отличава силно от енергията W. *Енергията W регулира пропорциите на A, B и AB, при които се установява равновесие,* но ако ни се поиска да узнаем бързо ли преминава $A+B$ в AB, то това вече няма отношение към равновесието и се появява друга енергия, *енергия на активацията,* която управлява скоростта на реакцията с помощта на експонентата.

Освен това A^* не се явява фундаментална константа както W. Да предположим, че реакцията протича на повърхността на стената или на някаква друга повърхност, тагаваА и В могат да се разтекат по нея така, че обединяването в AB да бъде по-лека работа за тях. Другояче казано, през планината може да се пробие тунел или да се срине възвишението на планината. По силата на запазването на енергията, по какъвто и път да вървим, резултатът ще бъде един: от A и B ще се получи AB, така че разликата в енергиите не зависи от пътя, по който върви реакцията, обаче енергията на активацията A^* *много силно* зависи от този път. Ето защо скоростите на химическите реакции са толкова чувствителни към външните условия. Скоростта на реакция може да се измени, като се измени повърхността, с която се допират реактивите, може да се направи „серия бъчвички" и с тяхна помощ да се подбират всякакви скорости, ако те зависят от свойствата на повърхността. В средата, в която протича реакцията, може да се внесе трети предмет, това също може да измени силно скоростта на реакцията. Такива вещества при незначителни изменения на A^* понякога влияят извънредно много на скоростта на реакцията. Наричат ги *катализатори.* Практически реакция може и да няма, защото A^* е много голяма за дадената температура, но ако добавим това специално вещество—катализатора, реакцията протича твърде бързо, защото A^* се намалява.

Между другото, тази реакция A плюс B, даваща AB, доставя немалко вълнения. Нали е невъзможно да се запазят едновре-



Фиг. 42.1 Съотношение на енергиите при реакцията $A+B \rightarrow AB$

менно и енергията, и импулсът, като подгоним два предмета един към друг, за да направим от тях един по-устойчив. Следователно, необходим е най-малко трети предмет C и реалната реакция изглежда много по-сложна. Скоростта на прекия процес трябва да съдържа произведението $n_A\, n_B\, n_C$ и може да се мисли, че нашата формула става невярна, но това не е така! Ако започнем да търсим скоростта на разпадането на AB, ще се изясни, че тази молекула трябва още да се сблъска и със C, затова скоростта на обратната реакция е пропорционална на $n_{AB}\, n_C$ и от формулата за равновесните концентрации изпада n_C. Правилността на закона за равновесието (42.9), който ние написахме в началото, е абсолютно гарантирана независимо какъв е механизмът на реакцията!

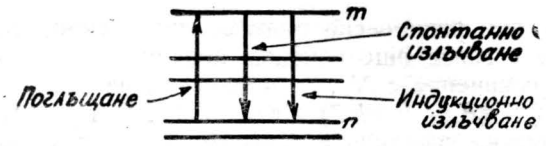
5. Закони на Айнщайн за излъчването

Да се обърнем сега към интересната задача, която прилича на току-що описаната и е свързана със закона за излъчване на черното тяло. В предишната глава ние разглеждахме извода на закона за разпределението на излъчването в празно пространство по метода на Планк, като разглеждахме излъчването на осцилатор. Осцилаторът има определена средна енергия, а щом той осцилира, трябва да излъчва и да поглъща лъчение в празното пространство, докато то не се изпълни с такова количество лъчене, което е нужно за поддържане на равновесие между излъчване и поглъщане. Разсъждавайки по такъв начин, ние намерихме, че интензитетът на излъчване с честата ω се дава от формулата

$$I(\omega)\, d\omega = \frac{\hbar\, \omega^3\, d\omega}{\pi^2 c^2 \left(e^{\hbar\omega/kT} - 1\right)}\,. \qquad (42.12)$$

Този извод съдържа предположението, че генериращият излъчването осцилатор има определени нива на енергията, отстоящи на равни разстояния едно от друго. Ние не говорим за това, че светлината се състои от фотони или нещо подобно. Ние даже не задаваме въпроса, по какъв начин при прехода на атома от едно ниво на енергията на друго се пренася единична енергия $\hbar\omega$ във вид на светлина. Първоначалната идея на Планк се състоеше в това, че веществото е квантовано, а светлината — не: осцилаторът не може да получава всякаква енергия, а трябва да я приема на порции. Предизвиква безпокойство още това, че начинът на извеждането е полукласически. Ние изчислихме скоростта на излъчване на осцилатора, като излязохме от законите на класическата физика, а после забравихме това и казахме: „Не, този осцилатор има много нива на енергия". Но за последователно строгия извод на тази чисто квантова формула се наложи да минем дълъг път, който завърши в 1927 г. със създаването на квантовата механика. А в същото време Айнщайн се опита да замени гледната точка на Планк, че само материалните генератори са квантовани, с идеята за това, че светлината действително се състои от фотони и нея трябва в определен смисъл да я разбираме като газ от частици с енергия $\hbar\omega$. По-нататък Бор обърна внимание на това, че *всяка* система от атоми има нива на енергия, но разстоянията между тях не са непременно постоянни като при осцилаторите Планк. Затова възникна необходимостта да се преразгледа изводът или даже само по-точно да се изследват законите на излъчването, като се изхожда от по-последователна квантовомеханична гледна точка.

Айнщайн предположи, че окончателната формула на Планк е правилна и я използува за получаването на нова, по-рано неизвестна информация за взаимодействието на излъчването с веществото. Той разсъждавал така: трябва да се разгледат кои да са две от възможните нива на енергия на атома да кажем m-то и n-то ниво (фиг. 42.2). След това Айнщайн предположил, че когато атомът се осветява със светлина с подходяща честота,



Фит. 42.2. Преход между две нива на енергия в атом.

той може да погълне фотон, преминавайки от състоянието n в състоянието m и вероятността за този преход за 1 s е *пропорционална на интензитета на осветяващата атома светлина* и още зависи от това, какви нива ще вземем.

Да наречем коефициента на пропорционалност B_{nm}, за да помним, че това не е универсална константа на природата и че тя зависи от това, коя двойка нива ще изберем: някои нива се възбуждат лесно, а други се възбуждат с голям труд. Сега трябва да намерим формулата, описваща скоростта на прехода от m в n. Айнщайн предположил, че тя се състои от две части. Даже ако няма външно излъчване, съществува вероятност атомът, като излъчи фотон, да премине от възбудено състояние в състояние с по-малка енергия. Това е така нареченото *спонтанно излъчване.*

Това предположение е аналогично на идеята, че даже класическият осцилатор, притежавайки определена енергия, не може да я запази и излъчването неизбежно ще предизвика загуба на енергия. По такъв начин по аналогия със спонтанното излъчване на класическите системи съществува определена вероятност A_{mn} (тя пак зависи от нивата), с която атомът преминава от състояние m в състояние n и тази вероятност не зависи от това, осветява ли се атомът със светлина или не. Но Айнщайн отишъл още по-далеч и като сравнил с класическата физика, и като използувал други аргументи, дошъл до извода, че излъчването зависи от наличието на светлина наоколо. Когато атомът се осветява със светлина с подходяща честота, вероятността за излъчване на фотон нараства пропорционално на интензитета на светлината с коефициент на пропорционалност B_{mn}. Ако ни се беше удало да покажем, че този коефициент е равен на нула, ние бихме уличили Айнщайн в грешка. Но, разбира се, ще видим, че той е бил прав.

И така Айнщайн е предположил, че съществуват три вида процеси: поглъщане, пропорционално на интензитета на светлината, излъчване, пропорционално на интензитета на светлината, (него го наричат *индуцирано излъчване*, или *принудено излъчване),* и спонтанно излъчване, независещо от интензитета на светлината.

Да предположим сега, че при температура T се е установило равновесие и в състоянието n се намират известно количество атоми N_n, а в състоянието m — известно количество атоми N_m. Тогава пълният брой на атомите, преминаващи от n в m, е равен на произведението на броя на атомите в състояние n по скоростта на прехода на един атом от състояние n в състояние m. По такъв начин ние получихме формула за броя на атомите, преминаващи за 1 s от n в m:

$$R_{n\to m} = N_n B_{nm} I(\omega). \tag{42.13}$$

Броят на атомите, преминаващи от m в n, се получава точно по същия начин: трябва да се умножи броят на атомите в състояние m по скоростта на прехода на един атом. Този път полученият израз изглежда така:

$$R_{m\to n} = N_m [A_{mn} + B_{mn} I(\omega)]. \tag{42.14}$$

Сега да предположим, че при топлинно равновесие броят на атомите, издигащи се на горното ниво, трябва да бъде равен на броя на атомите, спускащи се надолу. Това е най-малко един от

начините за задържане постоянен броя на атомите на всяко ниво.[1]

Следователно при равновесие смятаме двете скорости за равни. Но ние имаме в запас още някаква информация: знаем колко е голямо N_m в сравнение с N_n. Отношението на тези две числа е равно на $\exp(-(E_m-E_n)/kT)$. След това Айнщайн предположил, че на честотата на светлината, която влиза в игра при преходите от m в n, съответствува разлика на енергията, така че във всички наши формули $E_m-E_n=\hbar\omega$. И така,

$$N_m=N_n e^{-\hbar\omega/kT} \tag{42.15}$$

По такъв начин, ако се приравнят двете скорости: $N_n B_{mn} I(\omega)=N_m[A_{mn}+B_{mn}I(\omega)]$ и разделим на N_m, ще получим

$$B_{nm}I(\omega)eA^{\hbar\omega/kT}=A_{mn}+B_{mn}I(\omega) \tag{42.16}$$

От този израз може да се намери $I(\omega)$. Това е просто:

$$I(\omega)=\frac{A_{mn}}{B_{nm}e^{\hbar\omega/kT}-B_{mn}}. \tag{42.17}$$

Но Планк вече ни каза, че формулата трябва да има вида (42.12). Следователно ние можем да направим някои изводи: преди всичко B_{mn} трябва да бъде равно на B_{nm}, защото иначе няма да получим $\exp(\hbar\omega/kT)-1$. По такъв начин Айнщайн откри някои съотношения, чието пряко извеждане той не знаеше, например, че *вероятностите за принуденото излъчване и поглъщане трябва да са равни.* Това е интересно. Освен това, за да могат да се съгласуват (42.17) и (42.12)

$$\frac{A_{mn}}{B_{mn}} \text{ трябва да бъде равно на } \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^2}. \tag{42.18}$$

Значи, ако е известна, да кажем, скоростта на поглъщане за дадено ниво, то може да се получи скоростта на спонтанното излъчване и скоростта на принуденото излъчване или някаква комбинация от тези величини.

Въз основа на толкова общи предположения, нито Айнщайн нито който и да е друг, не може да получи повече от това. За да се изчисли действително абсолютната скорост на спонтанното излъчване или въобще коя да е скорост на специфично атомния преход, трябва да се знаят всички скрити механизми на атома. На това учи така наречената квантова електродинамика, открита само единадесет години по-късно. А Айнщайн предсказа всичко това в 1916 г.

Възможността за принудено излъчване намери в наши дни интересно приложение. Ако има светлина, то тя се стреми да предизвиква преход отгоре надолу. Тогава този преход може да увеличи енергията на светлината с $\hbar\omega$, ако се намерят такива атоми, в които е заето горното ниво. Може да се разработи безтоплинен метод за получаване на газ, в който броят на състоянията m е много повече от състоянията n. Газът ще бъде твърде далече от равновесие и формулата $\exp(-\hbar\omega/kT)$, вярна за равновесно състояние, няма да може да се приложи към него. Може даже да се постигне броят на горните състояния да бъде много голям, докато броят на атомите в долното състояние практически да бъде равен на нула. Тогава светлина с честота, съответна на разликата в енергиите E_m-E_n, ще се поглъща твърде слабо, защото атомите, намиращи се в състоянието n и способни да я погълнат, са твърде малко. От друга страна, когато газът от такива атоми е осветен, то светлината ще предизвика излъчване от горното състояние! По такъв начин, ако в горното



Фиг. 42.3. При възбуждане със синя светлина атомът се покачва най-високото ниво h и като изпусне бързо един фотон, слиза от него на нивото m. Когато броят на атомите в състояние m стане достатъчно голям, започва действието на лазера

[1] Това не е само начин да се задържи броят на атомите постоянен на всяко ниво, но е и действителният път, който избира природата. При топлинното равновесие всеки процес трябва да се уравновесява от противоположен процес, това е така наречените *принцип на детайлно равновесие.*

състояние се намират много атоми, започва нещо като верижна реакция, когато и атомите изведнаж започват да излъчват. Нещо повече, те са принудени да излъчват и всички изведнаж пропадат в долното състояние. Така работи *лазерът*, а ако се изучават инфрачервени вълни, източникът се нарича *мазер*.

За да се подгонят атомите в състоянието m, прибягват към разни хитрости. Може да съществува по-високо ниво, на което атомите да бъдат повдигнати със силен сноп светлина с висока честота. От това високо ниво атомите падат надолу, като изпускат най-различни фотони, докато не се съберат на нивото m. Ако атомите се стремят да се задържат на нивото m, без да излъчват фотони, то това ниво се нарича *метастабилно*. А след това атомите скачат изведнаж от нивото m, като съпровождат скока си с принудено излъчване. Още една техническа подробност — ако поместим нашата система в един обикновен съд, то тя може да излъчва спонтанно в много направления, което е в ущърб на принуденото излъчване. Но ефектът на принудителност може да се усили и да се увеличи неговото значение, като се поставят при всяка стена на сандъка почти напълно отразяващи огледала. Тогава излъчената светлина получава шанса да предизвика допълнително излъчване, следващото отражение ще добави още един такъв шанс, а след това още, и още, и още. Въпреки че огледалата отразяват почти цялата светлина, съществува малка вероятност за преминаване на част от светлината през огледалото и излизане навън. В края на краищата цялата светлина, като се подчинява на закона за запазване на енергията, ще излезе навън във вид на тънък, силен лъч. Така получават мощните снопове светлина в лазерите.

43

Дифузия

1. Сблъсквания на молекулите
2. Средна дължина на свободния пробег
3. Скорост на дрейфа
4. Йонна проводимост
5. Молекулна дифузия
6. Топлопроводност

1. Сблъсквания на молекулите

Досега изучавахме движението на молекулите само при топлинното равновесие. А сега трябва да обсъдим как се движат молекулите на газа, когато той е близо до равновесие, но още не го е достигнал напълно. Ако газът е далеч от равновесие, всичко става извънредно сложно и е много трудно да се разбере какво става там, а ако отклоненията от равновесието са незначителни, то задачите се решават лесно. Обаче, за да се вникне какво става в такъв газ, трябва отново да се върнем към кинетичната теория. Статистическата механика и термодинамика са годни, когато имаме равновесие, а за да се анализира това, което става при отклонение от равновесието, се налага, така да се каже, да се разглежда атом по атом.

В качеството на прост пример на неравновесна задача да разгледаме дифузията на йони в газ. Да предположим, че в газа се съдържат малко йони — електрически заредени молекули. Ако към газа приложим електрическо поле, на всеки йон ще действува сила, отличаваща се от силите, действуващи на неутралните молекули. Ако ги нямаше другите молекули, йонът би се движил с постоянно ускорение, докато не срещне стената на съда. Но наличието на други молекули променя работата: скоростта на йона нараства само дотогава, докато не се удари в молекула и не загуби своя импулс. След това той отново започва да се ускорява, но отново губи импулс. В резултат йонът е принуден да се движи по начупен път, като все пак в края на краищата той се движи по посока на електричното поле. По такъв начин ние виждаме, че йонът „дрейфтвува“ със средна скорост, пропорционална на електрическото поле. Колкото е посилно полето, толкова по-бързо се движи йонът. Разбира се, докато съществува полето и докато йонът се движи, *не може и дума да става* за топлинно равновесие. Системата се стреми да отиде към равновесие, но за това е нужно всички йони да са се залепили към стените на съда. С помощта на кинетичната теория може да се изчисли скоростта на дрейфа на йоните.

Нашите математически познания са още недостатъчни, за да изчислим *точно* всичко, което ще стане, но ние можем да получим едно приближено решение, което правилно да предаде всички съществени особености на явлението. Можем да определим зависимостта на ефекта от налягането, температурата и т. н., но не е по нашите сили да изчислим точно всички коефициенти, стоящи пред множителите. Затова няма да се измъчваме с грижата за точните значения на тези коефициенти. Те могат да се получат само след много тънък математичен анализ.

Преди да разсъждаваме за това, какво става в отсъствие на равновесие, да разгледаме по-внимателно един равновесен газ. Например необходимо е да се знае средното време между две последователни сблъсквания на молекулите.

Всяка молекула се сблъсква непрекъснато с другите молекули. Разбира се, всички тези сблъсквания стават случайно. Ако изберем някоя молекула, за достатъчно дълго време T тя ще получи определен брой N удари. Ако увеличим интервала от време два пъти, и броят на ударите ще нарасне два пъти. По такъв начин броят на сблъскванията е пропорционален на времето T. Това може да се изрази по следния начин:

$$N=\frac{T}{\tau}\cdot \qquad (43.1)$$

Ние записахме коефициента на пропорционалност във вида $1/\tau$, където τ има измерение на време. Константата τ е средното време между сблъскванията. Като пример да предположим, че за един час стават 60 сблъсквания; тогава τ е равно на 1 min. Ние ще казваме, че τ (една минута) това е *средното време* между ударите.

Често ще ни се налага да търсим отговор на такъв въпрос: Каква е *вероятността* молекулата да се сблъска в течение на *малък промеждутък* от време dt? Ние се досещаме, че тази вероятност е равна на dt/τ. Да се опитаме обаче да приведем по-убедителни аргументи. Да предположим, че имаме на наше разположение много голям брой N молекули. Колко от тези молекули ще се сблъскат в течение на интервала от време dt? Ако молекулите се намират в равновесно състояние, то *средно* нищо няма да се изменя с времето. По такъв начин N молекули, били в съда в течение на интервала dt, изпитват толкова удари, колкото една молекула за времето Ndt. Броят на сблъскванията на една молекула за голямото време Ndt е известен — това е Ndt/τ. А ако броят на сблъскванията на N молекули за време dt е равен на Ndt/τ, то вероятността за удар на една молекула е равна на $1/N$ част от тази величина или $(1/N)(Ndt/\tau)=dt/\tau$ (както казахме от самото начало). По такъв начин относителният брой на молекулите, сблъскващи се за време dt, грубо казано, е равен на dt/τ. Ако например τ е равно на една минута, то за една секунда ще се сблъскат 1/60 част от всички молекули.

Разбира се, това означава, че ако в даден момент 1/60 част от молекулите е дошла близо до това, с което трябва да се сблъска, то *тяхното* сблъскване ще стане в течение на следващата минута.

Когато ние казваме, че τ (средното време между сблъскванията) е равно на една минута, то ние съвсем не смятаме, че всички сблъсквания са точно разделени от минутни интервали. Веднаж сблъскала се, частицата съвсем не чака още една минута след това, за да нанесе следващия удар. Промеждутъците между последователните сблъсквания са най-различни. Вярно е, че по-нататък това няма да ни потрябва, но може да се зададе такъв въпрос: А на какво все пак е *равно* времето между сблъскванията? Ние вече знаем, че в приведения по-горе пример *средното* време е равно на една минута, но може би трябва да знаем каква е вероятността молекулата да не се сблъска с никого в течение на *две* минути.

Да отговорим на по-общия въпрос: Каква е вероятността молекулата да не изпита нито едно сблъскване за време t? Да започнем да следим една определена молекула в някой произволен момент от време, който ние ще наречем $t=0$. Каква е вероятността, че до момента на срещата ѝ с друга молекула ще мине време t? За да изчислим вероятността, да видим какво ще се случи с всички N_0 молекули, които се намират в съда. Докато ние чакаме в течение на времето t, между някои молекули стават сблъсквания. Нека $N(t)$ е броят на молекулите, които *не са изпитали* сблъсквания за времето t. Ние можем да определим $N(t)$, тъй като ни е известно как се мени с времето този брой. Този брой $N(t)$ естествено е по-малък от общия брой на молекулите N_0. Ако знаем, че за време t на $N(t)$ молекули се е удало да избягнат сблъскванията, то $N(t+dt)$ (броят на молекулите, на които се е удало да сторят това за време $t+dt$) е *по-малък* от $N(t)$ с броя на молекулите, които все пак са се сблъскали за времето dt. Ние вече се научихме по-рано да определяме броя на молекулите, на които не се е удало да избягнат сблъскванията за време dt, с помощта на средното време τ: $dN=N(t)dt/\tau$. Ние получаваме уравнението

$$N(t+dt)=N(t)-N(t)\frac{dt}{\tau}\,. \qquad (43.2)$$

Величината, която стои в лявата част на уравнението $N(t+dt)$, може съгласно с общите правила на диференциалното смятане

да се запише във вида $N(t)+(dN/dt)(dt)$. Като направим това въвеждане, ние ще приведем уравнението (43.2) във вида

$$\frac{dN(t)}{dt}=-\frac{N(t)}{\tau}. \tag{43.3}$$

Броят на молекулите, които са били извън играта за интервала dt, е пропорционален на броя на наличните молекули и обратно пропорционален на средното време на живот τ. Уравнението (43.3) се интегрира лесно, ако го препишем във вида

$$\frac{dN(t)}{N(t)}=-\frac{dt}{\tau}. \tag{43.4}$$

Тъй като и в двете части имаме пълен диференциал, интегралът на уравнението е такъв:

$$\ln N(t)=-\frac{t}{\tau}+\text{константа} \tag{43.5}$$

или, което е същото,

$$N(t)=(\text{константа})\ e^{-t/\tau}. \tag{43.6}$$

Ние знаем, че константата трябва да бъде равна на N_0 — пълния брой на молекулите, защото в началния момент $t=0$ всички молекули чакат „следващия“ удар. Можем да запишем нашия резултат във вида

$$N(t)=N_0\ e^{-t/\tau}. \tag{43.7}$$

Ако искаме да определим *вероятността* $P(t)$ за това, че молекулата не ще претърпи сблъсквания, трябва да разделим величината $N(t)$ на N_0 и тогава ще получим

$$P(t)=e^{-t/\tau}. \tag{43.8}$$

Ето нашият резултат: вероятността за това, че някоя молекула може да преживее времето t, като не се сблъска, е равна на $\exp(-t/\tau)$, където τ е средното време между ударите. Тази вероятност започва от 1 (очевидността) при $t=0$ и се намалява, когато t става все по-голямо и по-голямо. Вероятността за време τ молекулата да избегне сблъскванията е равна на $e^{-1}=0{,}37\ldots$ Шансовете да издържи по-дълго от средното време между сблъскванията са по-малки от 50 %. В това няма нищо странно, защото съществуват достатъчно много молекули, които избягват ударите значително *по-дълго* от средното време между сблъскванията, така че средното време между сблъскванията, както по-рано е равно на τ.

Отначало ние определихме τ като средното време *между* сблъскванията. Резултатът, формулиран в уравнението (43.7), ни говори, че средното време, отчитано от *произволно* взет момент до *следващото* сблъскване, *също е равно на* τ. Този малко удивителен факт може да се покаже по следния начин. Броят на молекулите, които претърпяват *следващия* удар в промеждутъка dt, отчитан от времето t, след произволно взето начално време, е равен на $N(t)dt/\tau$. Техният „интервал от време до следващото сблъскване“ е равен, разбира се, на t. „Средното време до следващото сблъскване“ се получава по обикновен начин:

$$\text{Средното време до следващото сблъскване}=\frac{1}{N_0}\int_0^\infty t\frac{N(t)}{\tau}dt.$$

Като използуваме получения от (43.7) брой $N(t)$ и като изчислим интеграла, ще намерим, че τ е средното време, отчетено от *кой да* е момент до следващото сблъскване.

2. Средна дължина на свободния пробег

Има още една възможност за описване на сблъскванията на молекулите, като за това не се въвежда *времето* между сблъскванията. Може да се определи *далече* ли ще отиде частицата между отделните сблъсквания. Ако знаем, че средното време между сблъскванията е равно на τ, а средната скорост на молекулите е равна на v, то очевидно средното *разстояние* между сблъскванията, което ние ще означим с буквата l, е равно на произведението на τ и v. Това разстояние между ударите обикновено се нарича *дължина на свободния пробег:*

Дължина на свободния пробег $l=\tau v$. (43.9)

В тази глава няма да уточняваме при всеки случай *какъв вид средно* имаме пред вид. Съществуващите различни средни — средно, корен от средния квадрат и т. н., са приблизително равни и се отличават само с множители, близки до единица. Доколкото за получаване на правилни множители е необходим подробен анализ, за нас няма голям смисъл да се стараем да уточним кое именно средно се използува в един или в друг случай. Ние искаме още да предупредим читателите, че използуваните за означаване на физическите величини алгебрически символи (например l за дължина на свободния пробег) не са общоприети, защото никой още специално не се е уговарял за това.

Вероятността молекулата да изпита сблъскване, преминавайки разстоянието dx, е равно на dx/l, както и вероятността за сблъскване за краткия интервал от време dt е равна на dt/τ. Като повика на помощ същите аргументи, както и по-рано, читателят ще може да покаже, че вероятността молекулата да измине поне разстоянието x, преди да е изпитала следващото сблъскване, е равна на $e^{-x/l}$.

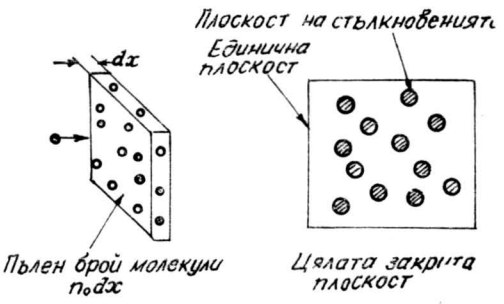
Средното разстояние, което молекулата преминава между сблъскванията (дължината на свободния пробег l), зависи от броя на молекулите, които я обкръжават, и от това, с какъв „размер“ са тези молекули, т. е. от това, колко уязвима мишена представляват самите те. „Размерите“ на мишената при сблъскванията обикновено се описват с помощта на „ефективното сечение на сблъскванията“. Тази идея се използува и в ядрената физика или в задачите за разсейване на светлината.

Да разгледаме движеща се частица, която преминава разстоянието dx вътре в газа, съдържащ n_0 разсейватели (молекули) в единица обем (фиг. 43.1). На всяка площадка с единична площ, перпендикулярна към посоката на движение на избраната от нас частица, се намират $n_0 dx$ молекули. Ако всяка може да бъде представена чрез ефективната площ на сблъскването или, както обикновено казват, с „ефективното сечение на сблъскването“ σ_c, то пълната площ, покривана от разсейвателите, е равна на $\sigma_c n_0 dx$.

Под „ефективно сечение на сблъскванията“ се разбира площта, в която трябва да попадне центърът на частицата, ако тя трябва да се сблъска с дадена молекула. Ако молекулите изглеждат като малки топчета (класическа картина), трябва да се очаква, че $\sigma_c=\pi(r_1+r_2)^2$, където r_1 и r_2 са радиусите на двете сблъскващи се молекули. Вероятността нашата частица да се сблъска с някоя молекула е равна на отношението на площта, покривана от разсейващите молекули, към пълната площ, приета от нас за единица. По такъв начин вероятността за сблъскване по пътя dx е равна на $\sigma_c n_0 dx$:

Вероятността за сблъскване по пътя $dx=\sigma_c n_0 dx$. (43.10)

Ние вече отбелязахме по-рано, че вероятността за сблъскване по пътя dx може да бъде записана чрез термините за дължина на свободния пробег l като dx/l. Като сравним това с (43.10), може да се свърже дължината на свободния пробег с ефективното сечение на сблъскванията:



Фиг. 43.1. Ефективно сечение на сблъскването

$$\frac{1}{l} = \sigma_c n_0 . \qquad (43.11)$$

Това равенство се запомня по-лесно, ако се запише така:

$$\sigma_c n_0 l = 1. \qquad (43.12)$$

Тази формула говори, че ако частицата преминава пътя l в разсейвателя, в който молекулите *могат* изведнаж да покрият цялата площ, то средно става едно сблъскване. В цилиндър с височина l, поставен на основа с единица площ се съдържат $n_0 l$ разсейватели. Ако всеки от тях заема площ σ_c, то пълната площ, покрита от тях, е равна $n_0 l \sigma_c$, а това е точно единичната площ. Разбира се, молекулите *не покриват* цялата площ, защото една част от молекулите се скрива зад съседните молекули. Затова някои молекули ще преминат между сблъскванията разстояние, по-голямо от l. Нали само *средно* се дава на молекулите толкова време между сблъскванията, че те да могат да преминат разстояние l. Като се измери дължината на свободния пробег l, може да се определи ефективното сечение на разсейването σ_c и да се сравни този резултат с пресмятанията, основани на детайлната теория за строежа на атома. Но това е вече съвсем друга тема. А сега да се върнем към проблемата за неравновесните състояния.

3. Скорост на дрейфа

Ние искаме да опишем поведението на една или няколко молекули, които с нещо се отличават от огромното болшинство останали молекули на газа. Ще наричаме „болшинството“ молекули молекули на „фона“, а отличаващите се от тях молекули ще получат названието „особени“ молекули или (за краткост) S-молекули. Молекулата може да бъде особена по цял ред причини: тя, да кажем, може да бъде по-тежка от молекулите на фона. Тя може да се отличава от тях и по химически състав. А може би особените молекули носят електрически заряд — тогава това ще бъде йон на фона на неутралните молекули. Поради необичайността на масите или зарядите на S-молекулите действуват сили, които се отличават от силите между молекулите на фона. Като изучаваме поведението на S-молекулите, могат да се разберат основните ефекти, които влизат в игра при много разнообразни явления. Да изброим някои от тях: дифузия на газовете, електрически ток в батерия, утайване, разделяне с помощта на центрофуга и т. н.

Да започнем с изучаването на основния процес: молекулите на фона действуват на S-молекула в газа с някаква особена сила **F** (това е може би сила на тежестта или електрическа сила). И *освен това* с по-обикновени сили, обусловени от сблъскванията между молекулите на фона и S-молекулите. Нас ни интересува *общият* характер на поведение на S-молекулата. Детайлното описание на нейното поведение са непрекъснати стремителни удари и следващи едно след друго сблъсквания с другите молекули. Но ако я проследим внимателно, ще стане ясно, че молекулата неотклонно се движи по посока на силата **F**. Ние казваме, че *дрейфът* се наслагва върху безпорядъчното движение. Но бихме искали да знаем как зависи *скоростта на дрейфа* от силата **F**.

Ако в някой произволен момент от време започнем да наблюдаваме S-молекулата, то може да се надяваме, че сме попаднали точно между две сблъсквания. Това време молекулата ще употреби, за да увеличи компонентата на скоростта си по посока на силата **F** в допълнение към скоростта, която й е останала след всички удари. Не след много (средно след време τ) тя отново изпитва сблъскване и започва да се движи по нова отсечка от своя път. Разбира се, стартовата скорост ще бъде друга, но ускорението от силата **F** остава постоянно.

За да опростим сега работата, да предположим, че след всяко сблъскване нашата S-молекула излиза на съвършено „свободен“ старт. Това значи, че в нея не е останал никакъв спомен за предишните ускорения под действието на силата $\mathbf{F}$. Такова предположение би било разумно, ако нашата S-молекула беше много по-лека от молекулите на фона, но това, разбира се, не е така. По-късно ние ще обсъдим едно по-разумно предположение.

А сега да предположим, че всички направления на скоростта на S-молекулата са равновероятни след всяко сблъскване. Стартовата скорост има каквато и да е посока и не може да даде никакъв принос в резултантното движение, затова няма да вземаме под внимание началната скорост след всяко сблъскване. Но освен случайното движение всяка S-молекула във всеки момент има допълнителна скорост по посоката на силата $\mathbf{F}$, която се увеличава *от времето* на последното сблъскване. На какво е равна *средната* стойност на *тази* част на скоростта? Тя е равна на произведението от ускорението $\mathbf{F}/m$ (където m е масата на S-молекулата) по *средното* време, изтекло от момента на последното сблъскване. Но средното време, изтекло *след последното* сблъскване, трябва да бъде равно на средното време *преди следващото* сблъскване, което ние вече означихме с буквата τ. *Средната* скорост, пораждана от силата $\mathbf{F}$, това е точно скоростта на дрейфа. По такъв начин стигнахме до съотношението

$$\mathbf{v}_{\text{др}}=\frac{F\tau}{m}. \qquad (43.13)$$

Това е нашето основно съотношение, главното в цялата глава. При намиране на τ могат да се появят всякакъв вид усложнения, но основният процес се определя от уравнението (43.13).

Обърнете внимание, че скоростта на дрейфа е *пропорционална* на силата. За съжаление ние още не сме се уговорили за названието на коефициента на пропорционалност. Коефициентът пред всякакъв вид сила има своето название. В задачите, свързани с електричеството, можем да представим силата като произведение от заряда по интензитета на електричното поле: $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$. В този случай коефициентът на пропорционалност между скоростта и интензитета на електричното поле $\mathbf{E}$ се нарича „подвижност“. Като не обръщаме внимание на възможните недоразумения, ще прилагаме термина *подвижност* по отношение на скоростта на дрейфа към *всякакъв* вид сила. Ще пишем

$$v_{\text{др}}=\mu F \qquad (43.14)$$

и ще наричаме μ подвижност. От уравнението (43.13) следва

$$\mu=\frac{\tau}{m}. \qquad (43.15)$$

Подвижността е пропорционална на средното време между сблъскванията (редките сблъсквания пречат малко на S-молекулата) и е обратно пропорционална на масата (колкото по-голяма е инерцията, толкова по-бавно се набира скорост между сблъскванията.)

За да се получи правилният числен коефициент в уравнението (43.13) (а при нас той е верен), трябва известно внимание. За избягване на недоразумения трябва да се помни, че ние използуваме коварни аргументи, че те могат да се употребяват само след внимателно и детайлно изучаване. За да се покаже какви са трудностите, въпреки че отвън всичко изглежда благополучно, ще се върнем отново към тези аргументи, които приведохме при извода на уравнението (43.13), но тези аргументи, които изглеждат напълно убедителни, сега ще ни доведат към *неверен резултат* (за съжаление разсъждения от такъв род могат да се намерят в много учебници).

Може да се разсъждава така: средното време между сблъскванията е равно на τ. След сблъскването частицата, започнала да се движи със случайна скорост, набира преди следващото сблъскване допълнителна скорост, която е равна на произведението от времето по ускорението. Тъй като до *следващото* сблъскване ще

измине време τ, частицата ще набере скорост $(F/m)\tau$. В момента на сблъскването тази скорост ще бъде равна на нула. Затова средната скорост между две сблъсквания е равна на половината от крайната скорост, а средната скорост на дрейфа е равна на $1/2\, F\tau/m$. (Не е вярно.) Този извод не е верен, а уравнението (43.13) е правилно, въпреки че, както изглежда, в двата случая ние разсъждавахме еднакво убедително. Във втория резултат се вмъкна една доста коварна грешка: при неговото извеждане ние фактически предположихме, че всички сблъсквания отстоят едно от друго на време τ. Всъщност някои от тях настъпват по-рано, а други по-късно от това време. По-кратките времена се срещат *по-често*, но техният принос в скоростта на дрейфа е *малък*, защото в този случай е твърде малка вероятността за „реално подтикване напред". Ако вземем под внимание съществуването на *разпределение* на свободното време между сблъскванията, ще видим, че множителят $1/2$, получен във втория случай, няма откъде да дойде. Грешката дойде от това, че като се излъгахме от простотата на аргументите, се опитахме твърде просто да свържем средната скорост със *средната крайна* скорост. Връзката между тях не е чак толкова проста, затова е по-добре да се подчертае, че на нас ни е нужна самата средна скорост. В първия случай ние от самото начало търсехме средната скорост и намерихме нейната вярна стойност. Може би, сега на вас ви е ясно защо не се опитахме да намерим точните стойности на всички числени коефициенти в нашите елементарни уравнения.

Да се върнем към нашето предположение за това, че всяко сблъскване напълно изтрива от паметта на молекулата всичко за нейното предишно движение и че след всяко сблъскване молекулата започва с нов старт. Да предположим, че нашата S-молекула е тежък обект на фона на по-леките молекули. Тогава вече е недостатъчно едно сблъскване, за да отнемем на S-молекулата нейния насочен „напред" импулс. Само няколко последователни сблъсквания внасят „безпорядък" в нейното движение. И така вместо нашето първоначално разсъждение да предположим сега, че след всяко сблъскване (средно след време τ) S-молекулата губи определена част от своя импулс. Ние не ще изследваме подробно до какво ще доведе такова предположение. Ясно е, че то е еквивалентно на замяната на времето τ (средното време между сблъскванията) с друго, по-дълго τ, съответстващо на „средното време на забравяне", т.е. на средното време, за което S-молекулата ще забрави, че някога е имала насочен напред импулс. Ако така се разбира τ, то може да се използува нашата формула (43.15) за случаи, не така прости както първоначалният.

4. Йонна проводимост

Да приложим нашите резултати към частен случай. Да предположим, че в съд, запълнен с газ, се съдържат също йони — атоми или молекули с излишен електричен заряд. Схематично това изглежда така, както е на фиг. 43.2. Ако двете противоположни стени на съда са направени от металически пластинки, те могат да се присъединят към полюсите на батерия и по такъв начин в газа да се създаде електрично поле.

Електричното поле ще действува с някаква сила на йоните и те ще започнат своя дрейф към едната от пластинките. В резултат ще възникне електрически ток и газът със своите йони ще действува като съпротивление. Като изразим йонния поток чрез скоростта на дрейфа може да се пресметне големината на съпротивлението. Нас ни интересува повече от всичко зависимостта на йонния поток от потенциалната разлика V, приложена към пластинките.

В нашия случай съдът е правоъгълен, дължината е b, а площта на напречното сечение е A (вж. фиг. 43.2). Ако към пластинките е приложена потенциална разлика V, то електричното поле между тях E е равно на V/b. (Електричният потенциал, това е ра-

ботата, извършена при пренасянето на единичен заряд от едната пластинка до другата. Силата, която действува на единичния заряд, е равна на **E**. Ако стойността **E** е еднаква навсякъде между двете пластинки, което може да се предположи с достатъчно основание в нашия случай, то работата, изразходвана на единичен заряд, е равна на Eb, т.е. $V=Eb$). В нашия случай на йоните действува сила $q\mathbf{E}$, където q е зарядът на йона. Скоростта на дрейфа на йона е равна на произведението на силата по μ:

$$v_{др}=\mu F=\mu qE=\mu q\frac{V}{b}\ . \tag{43.16}$$

Електрическият ток I е равен на потока на заряда за 1s. По такъв начин електрическият ток през една от пластинките е равен на пълния заряд на йоните, които достигат до пластинката за 1s. Ако йоните се движат към пластинката със скорост $v_{др}$, то за времето T до пластинката ще достигнат тези йони, които са се намирали на разстояние от нея, не по-голямо от $v_{др}T$. Ако в единичен обем има n_i йони, за време T на пластинката ще се отложат $n_iAv_{др}T$ йони. Всеки йон носи заряд q, затова

$$\text{събраният за време } T \text{ заряд}=qn_iAv_{др}T. \tag{43.17}$$

Токът I—това е отношението на събрания за време T заряд, към времето T:

$$I=qn_iAv_{др} \tag{43.18}$$

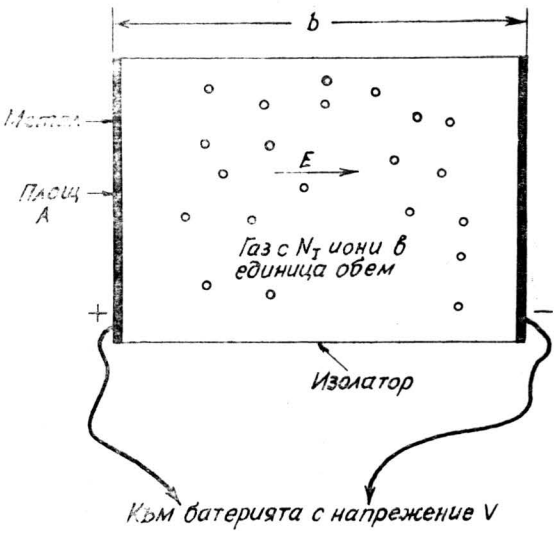
Като поставим тук скоростта на дрейфа $v_{др}$. от (43.16), получаваме

$$I=\mu q^2n_i\frac{A}{b}V. \tag{43.19}$$

Ние изяснихме, че токът е пропорционален на потенциалната разлика, а това е всъщност законът на Ом, а съпротивлението R е равно на реципрочната стойност на пропорционалност:

$$\frac{1}{R}=\mu q^2n_i\frac{A}{b}\ . \tag{43.20}$$

Ние намерихме връзката на съпротивлението със свойствата на молекулите n_i, q и μ, което на свой ред зависи от τ и m. Ако ние с помощта на атомни измервания определим n_i и q, то, измервайки R, може да се определи μ, а после и τ.



Фиг. 43.2. Електрически ток в йонизиран газ

5. Молекулна дифузия

Да преминем към друга задача, за която ще ни се наложи да изменим малко метода на анализа — задачата за дифузията. Да предположим, че сме взели съд, пълен с газ, който се намира в топлинно равновесие, а след това на известно място в съда сме впръснали малко количество от друг газ. Да наречем първоначалния газ газ на „фона“, а новия газ — „особен“ газ. Особеният газ започва да се разпространява по целия съд, но това разпространение се забавя от наличието на молекулите на фона. Явлението на такова забавено разпространение се нарича дифузия. Дифузията се определя основно от сблъскванията на молекулите на особения газ с молекулите на фона. След много сблъсквания особените молекули, повече или по-малко равномерно, се разпределят по целия съд. Важно е да не *се сбърка* дифузията на газа с пренасянето на големи количества вещество в резултат на конвекционни токове. Обикновеното смесване на два газа става именно в резултат на комбинацията от конвекция и дифузия. Сега нас ни интересува само такова смесване, което *не се съпровожда* с „пориви на вятъра“. Газът се разпространява само благодарение на молекулното движение, т. е. става дифузия. Нека да изясним бързо ли става дифузията.

И така пристъпваме към изчисляването на *общия поток* на молекули на особения газ, който се поражда от молекулното движение. Общият поток не е равен на нула само тогава, когато

разпределението на молекулите се отличава от равновесното, иначе усредняването на молекулното движение свежда общия поток до нула. Ще разгледаме отначало потока по посока на оста x. За да се определи на какво е равен този поток, трябва да си представим площадка, перпендикулярна към оста и да преброим броя на молекулите, пресичащи тази площадка. За да определим общия поток, трябва да смятаме положителни тези молекули, които се движат в посока на положителните x, и да *извадим* от този брой молекулите, които се движат в противоположна посока. Както неведнъж се убеждавахме, броят на молекулите, пресичащи площадката в течение на времето ΔT, е равен на броя на молекулите, които в началото на интервала ΔT се намират вътре в обема, затворен от нашата площадка и площадката, разположена от нея на разстояние $v\Delta T$. (Да отбележим, че тук v е истинската скорост на молекулата, а съвсем не скоростта на дрейфа.)

Ще опростим нашите изводи, ако вземем площадка с единична площ. Тогава броят на особените молекули, които пресичат площадката от ляво на дясно (надясно от площадката лежат положителните x-посоки), е равен на $n_- v\Delta T$, където n_- е броят на особените молекули в единичен обем наляво от площадката (с точност до множителя $\sim 1/6$, но ние ще пренебрегнем такива множители).

Аналогично броят на особените молекули, които се движат от дясно на ляво, е равен на $n_+ v\Delta T$, където n_+ е плътността на особените молекули отдясно на площадката. Ако означим молекулярния поток с буквата J, под която ще разбираме общия поток на молекулите през единица площ за единица време, ще получим

$$J = \frac{n_- v\Delta T - n_+ v\Delta T}{\Delta T}, \tag{43.21}$$

или

$$J = (n_- - n_+)v. \tag{43.22}$$

А какво да разбираме под n_- и n_+? Когато казваме „плътност вляво от площадката“, то колко *далеч* наляво? Ние трябва да измерим плътността в това място, откъдето молекулата се отправя в „свободен полет“, защото броят на стартиращите молекули се определя от броя на молекулите, намиращи се на това място. По такъв начин n_- е плътността на молекулите на разстоянието на дължината на свободния пробег l вляво от нашата въображаема площадка, а n_+ е плътността на молекулите на разстоянието на дължината на свободния пробег вдясно от нея.

Разпределението на особените молекули в съда се описва удобно с помощта на непрекъсната функция на x, y и z, която ние ще означим с n_a. Под $n_a(x, y, z)$ трябва да се разбира плътността на особените молекули в малък обем около точката (x, y, z). Тогава разликата $(n_+ - n_-)$ може да се представи във вида

$$(n_+ - n_-) = \frac{dn_a}{dx}\Delta x = \frac{dn_a}{dx}\cdot 2l. \tag{43.23}$$

Като поставим този резултат в (43.22) и като пренебрегнем множителя 2, ще получим

$$J_x = -lv\frac{dn_a}{dx}. \tag{43.24}$$

Ние изяснихме, че потокът на особените молекули е пропорционален на производната от плътността или както понякога се казва, на „градиента на плътността“.

Ясно е, че направихме няколко груби приближения. А да не говорим за това, че постоянно забравяхме множителите. Използувахме v, когато беше нужно да използуваме v_x, а като разместихме обемите, които съдържат n_+ и n_- молекули на краищата на нормалите към площадката, взехме нормали с дължина l. Между другото, за тези молекули, които се движат не перпендику-

лярно към повърхността, на l съответствува дължина на *наклонения* път. Тези недостатъци могат да се поправят. По-щателният анализ показва, че дясната част на уравнението (43.24) трябва да се умножи по 1/3. По-правилният отговор изглежда така:

$$J_x = -\frac{lv}{3}\frac{dn_a}{dx}. \tag{43.25}$$

Аналогични уравнения могат да се напишат и за токовете по y и z посоки.

С помощта на макроскопични измервания може да се определи токът J_x и градиентът на плътността dn_a/d_x. Тяхното отношение, определено опитно, се нарича „коефициент на дифузията" D. Това значи, че

$$J_x = -D\frac{dn_a}{dx}. \tag{43.26}$$

Ние успяхме да покажем, че очакваната стойност на коефициента за газа D е равна на

$$D = \frac{1}{3}lv. \tag{43.27}$$

Досега ние изучихме в тази глава два различни процеса: *подвижност* (дрейфа на молекулите под действието на „външна" сила) и *дифузия* (разпръскването на молекулите, което се определя само от вътрешните сили, от случайните сблъсквания). Тези процеси обаче са свързани един с друг, защото в основата и на двете явления лежи топлинното движение и двата пъти в сметките се появяваше дължината на свободния пробег l.

Ако в уравнението (43.25) се постави $l = v\tau$ и $\tau = \mu m$, то ще се получи

$$J_x = -\frac{1}{3}m\bar{v}^2\mu\frac{dn_a}{dx}. \tag{43.28}$$

Но $m\bar{v}^2$ зависи само от температурата. Ние също помним, че

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}kT, \tag{43.29}$$

така че

$$J_x = -\mu kT\frac{dn_a}{dx}. \tag{43.30}$$

По такъв начин коефициентът на *дифузията* D е равен на произведението на kT по μ—коефициента на *подвижност*:

$$D = \mu kT. \tag{43.31}$$

Оказва се, че (43.31) е *точното* съотношение между коефициентите. Въпреки че изхождаме от твърде груби предположения, към него не е нужно да се добавят никакви допълнителни множители. Може да се покаже, че (43.31) всъщност *винаги* точно се удовлетворява. Това е вярно даже и в твърде сложни случаи (например в случая на малки частици, плуващи в течност), когато нашите прости изчисления явно отказват да ни служат.

За да покажем, че (43.31) е вярно в най-общите случаи, ние ще го изведем по друг начин, като използуваме само основните принципи на статистическата механика. Представете си, че по някакъв начин съществува градиент на „особените" молекули и е възникнал дифузионен ток, който съгласно с (43.26) е пропорционален на градиента на плътността. Тогава ще създадем по посока на оста x силово поле, така че на всяка особена молекула ще действува сила F. Съгласно с *определението* за подвижност μ скоростта на дрейфа се дава от отношението

$$v_{\text{др}} = \mu F. \tag{43.32}$$

Като се използуват обичайните аргументи, може да се намери *токът на дрейфа* (*общият* брой на молекулите, които пресичат единица площ за единица време):

$$J_{\text{др}} = n_a v_{\text{др}}, \tag{43.33}$$

или

$$J_{\text{др}} = n_a \mu F. \tag{43.34}$$

А сега можем така да се *разпоредим* със силата F, че токът на дрейфа, предизвикан от силата F, *да компенсира* дифузията и тогава *пълният ток* на особените молекули ще бъде равен на нула. В този случай ние имаме $J_x + J_{\text{др}} = 0$,
или

$$D\frac{dn_a}{dx} = n_a \mu F. \tag{43.35}$$

В този случай на „компенсация" съществува постоянен (във времето) градиент на плътността, равен на

$$\frac{dn_a}{dx} = \frac{n_a \mu F}{D}. \tag{43.36}$$

Сега вече е лесно да се съобразява по-нататък. Нали ние се сдобихме с *равновесие* и сега можем да прилагаме нашите *равновесни* закони на статистическата механика. По тези закони вероятността да се намира молекулата около точката x е пропорционална на $\exp(-U/kT)$, където U е потенциалната енергия. Ако говорим за плътността на молекулите n_a, това означава, че:

$$n_a = n_0 e^{-U/kT}. \tag{43.37}$$

Диференцирайки (43.37) по x, получаваме

$$\frac{dn_a}{dx} = -n_0 e^{-U/kT} \frac{1}{kT} \frac{dU}{dx}, \tag{43.38}$$

или

$$\frac{dn_a}{dx} = -\frac{n_a}{kT} \frac{dU}{dx}. \tag{43.39}$$

В нашия случай силата F е насочена по оста x и потенциалната енергия U е равна на $-Fx$, а $-dU/dx = F$. Уравнението (43.39) приема вида

$$\frac{dn_a}{dx} = \frac{n_a F}{kT}. \tag{43.40}$$

(Това е точно уравнението (40.2), от което ние изведохме $\exp(-U/kT)$); кръгът се затвори. Като сравним (43.40) с (43.36), ние получаваме уравнението (43.31). Показахме, че в уравнението (43.31), което изразява тока на дифузията чрез подвижността, всички коефициенти са правилни, а самото уравнение винаги е правилно. Подвижността и дифузията са тясно свързани. Тази връзка е открил Айнщайн.

6. Топлопроводност

Методите на кинетичната теория, които ние така успешно прилагахме, позволяват също да се пресметне и *топлопроводността* на газа. Ако в горната част на съда газът е по-топъл, отколкото в по-долната част, топлината ще протича от горе на долу. (Ние предполагаме, че горната част на съда е по-топла, защото в противен случай ще възникнат възходящи конвекционни токове, а този случай вече няма отношение към топлопроводността.) Преносът на топлина от топлия към студения газ се нарича дифузия на „топлите" молекули (т. е. на молекулите с по-голяма енергия) надолу и дифузия на „студените" молекули нагоре. За да се изчисли потокът на топлинната енергия, трябва да знаем, първо, нещо за енергията, която се пренася през определената площадка от горе на долу (нея я пренасят молекулите, които се движат надолу), след това за енергията, която се пренася през площадката от долу на горе (за това вече отговарят молекулите, които се издигат нагоре). Разликата между тези два потока на енергия ще ни даде пълния поток на енергията от горе на долу.

Топлопроводността се определя като отношение на скоростта на преноса на топлинната енергия през единица площ към градиента на температурата:

$$\frac{1}{A}\frac{dQ}{dt}=-\varkappa\frac{dT}{dz}. \tag{43.41}$$

Тъй като ходът на изчисленията на топлопроводността е твърде подобен на изчислението на потока на заредените частици в йонизирания газ, предлагаме на читателя да докаже във вид на упражнение, че

$$\varkappa=\frac{knlv}{\gamma-1}; \tag{43.42}$$

при това $(\gamma-1)kT$ е средната енергия на молекулата при температура T.

Ако си спомним за съотношението $nl\sigma_c=1$, то топлопроводността може да се запише във вида

$$\varkappa=\frac{1}{\gamma-1}\frac{kv}{\sigma_c}. \tag{43.43}$$

Ние получихме наистина удивителен резултат. Известно е, че средната скорост на молекулите на газа зависи от температурата *и не зависи от плътността.* Може да се мисли, че σ_c зависи само от *размерите* на молекулите. По такъв начин нашият твърде прост извод се свежда към това, че топлопроводността $\varkappa$ (а следователно и *скоростта* на потока топлина във всеки частен случай) не зависи от *плътността* на газа. Изменението на броя на „носителите“ на енергия при изменения на плътността се компенсира точно от изменението на разстоянието, което се изминава от „носителя“ между сблъскванията.

А сега може да се запита: действително ли потокът на топлина не винаги зависи от плътността на газа. Е, а ако плътността клони към нула и в съда съвсем не остане газ? Разбира се, не. Формулата (43.43), както и другите формули от тази глава, е изведена при предположението, че средната дължина на свободния пробег между сблъскванията е много по-малък от които и да са размери на съда. Ако плътността на газа е толкова малка, че молекулата има голям шанс да мине от едната стена на съда до другата, като не се сблъска нито веднаж, то всичките изчисления в тази глава ще рухнат. В тези случаи трябва да се върнем към кинетичната теория и отново основно да пресметнем всичко.

44

Закони на термодинамиката

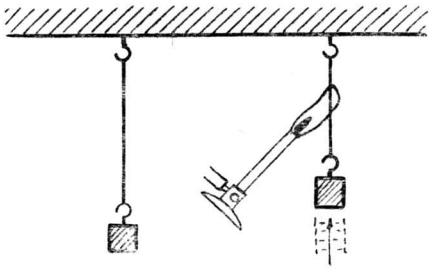
1. Топлинни машини, първи закон
2. Втори закон
3. Обратими машини
4. Коефициент на полезното действие на идеалната машина
5. Термодинамична температура
6. Ентропия

1. Топлинни машини, първи закон

Досега ние разглеждахме свойствата на веществата от атомна гледна точка, при това се опитвахме, макар в общи черти, да разберем какво ще стане, ако приемем, че веществото се състои от атоми, подчиняващи се на тези или други закони. Обаче веществото притежава и такива свойства, които могат да се разберат, без да се изучава подробно неговият строеж. С опити за намиране на съотношения между различните свойства на веществото, без да се задълбочава в изучаването на неговия вътрешен строеж, се занимава *термодинамиката*. Исторически термодинамиката е станала наука още преди да се е знаело нещо повече или по-малко точно за вътрешния строеж на веществото.

Ще приведем пример: съгласно с кинетичната теория налягането на газа се предизвиква от молекулната бомбардировка и на нас ни е известно, че при нагряване на газа бомбардировката се усилва и налягането трябва да се повиши. И обратно, ако в съд с газ се движи бутало, което преодолява съпротивлението на бомбардиращите го молекули, енергията на тези молекули ще нараства, а съответно ще нараства и температурата. И така, като повишаваме температурата в даден обем, ние увеличаваме налягането. Ако свиваме газа, повишава се неговата температура. Като използуваме кинетичната теория, можем да намерим количествените съотношения между тези два ефекта, обаче на всеки е ясно, че между налягане и температура трябва обезателно да съществува някаква връзка, която не зависи от детайлите на сблъскванията.

Да разгледаме още един пример. Навярно на мнозина е известно интересното свойство на гумата — ако я разтеглим, тя се нагрява. Ако вие стиснете между устните си едно ластиче и го разтеглите с ръка, ще почувствувате ясно, че то се е нагряло. Това нагряване е обратимо, т. е., ако вие продължавате да държите ластичето с уста и бързо го отпуснете, ще възникне същото ясно усещане за студ. Това означава, че при разтягане гумата се нагрява, а при отпускане тя се охлажда. Нашият инстинкт може да ни подскаже, че нагрятата гума тегли по-добре: ако разтягането нагрява гумата, то нагряването трябва да я застави да се свие. Действително, ако поднесем газова горелка към ластик, на който е закачена тежест, ще забележим, че той рязко ще се свие (фиг. 44.1). По такъв начин при нагряване напрежението в гумата се увеличава и това се съгласува напълно с факта, че при намаляването на напрежението тя изстива.



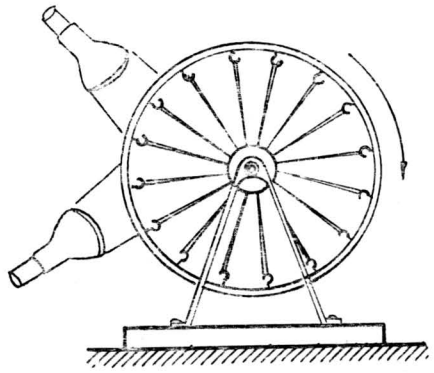
Фиг. 44.1. Нагрята гума

Скритите в гумата механизми, които управляват тези ефекти, са много сложни. Ние ще ги опишем от молекулна гледна точка, въпреки че главната задача на тази глава е да се научим да разбираме връзката между такива ефекти независимо от молекулярния модел. При това, като изхождаме именно от молекулния модел, ние можем да покажем, че тези две явления са тясно свързани. Поведението на гумата може да се обясни така. Представете си, че гумата по същество е едно огромно кълбо, състоящо се от много дълги молекули, нещо като „молекулни макарони", но с малко допълнително усложнение: между тези молекулни вериги съществуват съединителни вериги. По такъв начин за модел на парче гума може да послужат слепили се по време на варенето макарони, които образуват огромна топка. Когато разтягаме такова кълбо, някои молекулни вериги се стремят да се разтегнат по линията на посоката на разтягането. В същото време

всички вериги участвуват в топлинното движение и непрекъснато се сблъскват една с друга. Затова, когато се разтяга такава верига, тя не ще остане в разтегнато положение, тъй като в нея се удрят от всички страни други вериги и други молекули и тя ще бъде принудена да се огъне отново. Истинската причина гумата през цялото време да се стреми да се свие се заключава в следното: при разтягането веригите действително се разтягат в една посока, но топлинните движения на веригите се стремят да ги объркат отново и да намалят дължината им. Затова, ако веригите се разтегнат и температурата се увеличи, ще се увеличи и бомбардировката на веригите, което ще доведе до увеличение на напрежението. С това се обяснява способността на нагрятата гума да вдига по-голяма тежест. Ако отпуснем гума, разтегната в течение на известно време, то всяка верига става по-мека и удрящите се в разхлабените вериги молекули губят енергия и температурата спада.

И така ние видяхме, че кинетичната теория установява връзка между свиването при нагряване и охлаждането при отпускане, но би било извънредно сложно да се опитаме да изведем с методите на кинетичната теория точните съотношения между тези ефекти. Би се наложило да изясним колко сблъсквания стават ежесекундно и как изглеждат молекулните вериги. И изобщо не могат да се изброят всички трудности. Детайлите на механизма са толкова сложни, че кинетичната теория не е в състояние да опише точно всичко, което става. Обаче могат да се изведат някои съотношения между тия ефекти, като не знаем практически нищо за вътрешния механизъм.

Цялата термодинамика се свежда например към такива разсъждения: щом при висока температура гумата е „по-силна", околкото при ниска, с помощта на топлината могат да се извършат най-различни работи, да кажем, да се повдигат тежести и да се преместват на ново място. И действително ние вече се убедихме, че нагрятата гума е способна да повдига тежести. С изучаването на възможността за използуването на топлината за извършване на работа започва термодинамиката. Може ли да се построи машина, в която да се използуват топлинните свойства на гумата? Да, но тя ще изглежда глупаво. За целта може да се усъвършенствува малко едно велосипедно колело, като му поставим гумени спици (фиг. 44.2). Ако с помощта на две нагревателни лампи нагреем гумата от едната страна на колелото, то тя ще стане „по-силна", отколкото ненагрятата гума от другата страна. Центърът на тежестта на колелото ще се отмести спрямо опорната точка. Колелото ще се завърти. След завъртването на колелото студените гумени спици ще се приближат по-близко до топлината, а нагретите ще им отстъпят своето топло място и ще изстинат. И колелото ще се върти бавно, докато горят лампите. Коефициентът на полезното действие на такава машина е извънредно малък. За въртенето на колелото едва стига съдържащата се в двете лампи мощност около 400 *W*., а то е способно да повдигне само една бълха. Обаче веднага възниква интересният въпрос: не може ли по-ефективно да се превърне топлината в работа?



Фиг. 44.2. Топлинна машина с гумени спици.

Всъщност термодинамиката води своето начало от работите на знаменития инженер Сади Карно, който искал да построи най-добрата и най-икономичната машина. Това е един от малкото забележителни случаи, когато инженер е поставил основите на физическа теория. Наум ни идва още един пример, но вече сравнително по-нов — това е анализът на теорията на информацията, направен от Клод Шенон. При това тези въпроси са тясно свързани.

В парната машина топлината се използува за кипене на водата. Образуваната пара, като се разширява, тласка буталото, а буталото върти маховика. И така парата е изтикала буталото докрай — по-нататък какво? Тази порция от парата е изпълнила своята работа, обаче много глупаво би било да завършим цикъла с пущането на парата в атмосферата, тогава ще се наложи отново да се налива вода в котела. По-евтино, а значи и по-ефективно е

да се отведе парата в друг съд, където тя ще се кондензира със студена вода и образуваната при това вода може отново да се върне в парния котел, като се обезпечава непрекъсната циркулация. По такъв начин парната машина поглъща топлина и я превръща в работа. А може би по-добре е да се напълни котела със спирт? Какви свойства трябва на има веществото, за да се обезпечи най-добра работа на машината? Този въпрос си задавал Карно и расъждавайки по такъв начин, както ние вече казахме, между другото открил съотношение от твърде общ тип.

Всички резултати на термодинамиката се съдържат в няколко пределно прости твърдения, наречени *закони на термодинамиката*. По времето на Карно първият закон на термодинамиката— законът за запазването на енергията — още не е бил известен. Обаче аргументите били така точно формулирани от Карно, че те се оказали правилни, въпреки че първият закон тогава още не е бил открит. Малко по-късно Клаузиус направил по-прост извод, който се оказал по-лесен за разбиране, отколкото твърде тънките разсъждения на Карно. Но Клаузиус изхождал от предположението, че се запазва не пълната енергия, а топлината — така смятала по това време калоричната теория, която впоследствие изобщо била отхвърлена като невярна. Затова често казват, че аргументите на Карно били лъжливи. Всъщност логиката на Карно е безукорна. Не е вярно само опростеното тълкуване на тези аргументи от Клаузиус, а именно с него се запознават обикновено всички.

Случило се, че така наречения втори закон на термодинамиката бил открит от Карно по-рано от първия закон. Би било много интересно да се приведат тук аргументите на Карно, които не се опират на първия закон. Но ще трябва да се откажем от това, защото ние изучаваме физика, а не история. Още от самото начало ще използуваме първия закон, въпреки че и без него може да се направи много.

Отначало да формулираме първия закон, закона за запазване на енергията: ако е дадена една система и ние ѝ придадем топлина и извършим над нея някаква работа, то нарастването на енергията на системата е равно на придадената топлина и изразходваната работа. Ще запишем всичко това така: на системата се придава топлина Q и над нея се извършва работа W, тогава енергията на системата U нараства и тази енергия понякога я наричат вътрешна енергия. Тези величини са свързани със следните съотношения:

Изменението на $U = Q + W$. (44.1)

Изменението на U може да се получи, като се добави малко количество топлина ΔQ и малко работа ΔW:

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W. \quad (44.2)$$

Това е диференциалната форма на този закон. Ние вече добре знаем всичко това от предишната глава.

2. Втори закон

А какво представлява вторият закон на термодинамиката? Знаем, че ако при работа се наложи да преодоляваме триене, то загубената работа е равна на отделилата се топлина. Ако преодоляваме триенето в стая при температура T и правим това достатъчно бавно, температурата в стаята ще се измени малко. Ние превръщаме работата в топлина при постоянна температура. Е, а може ли да се постъпи обратно? Ще съумеем ли по някакъв начин да превърнем топлината в работа при постоянна температура? Вторият закон на термодинамиката твърди, че това е невъзможно. Би било много хубаво да се научим да превръщаме топлината в работа, като изменим само посоката на процеса, приличащ на триене. Ако излезем само от закона за запазване на енергията, може да се смята, че топлинната енергия, например

енергията на трептене на молекулите, е способна да служи за удобен източник на полезна енергия. Но Карно твърдял, че при постоянна температура не може да се извлече топлинна енергия от нейния източник. Другояче казано, ако целият свят имаше навсякъде еднаква температура, то би се оказало невъзможно да се превърне топлинната енергия в работа. Въпреки че процесите, при които работата преминава в топлина, могат да протичат при постоянна температура, невъзможно е те да се обърнат и да се върне работата обратно. По-точно, Карно твърдял, че при постоянна температура не може да се извлече топлина от нейния източник и да се превърне в работа, *без да стават повече никакви изменения* в дадената система или в околното пространство.

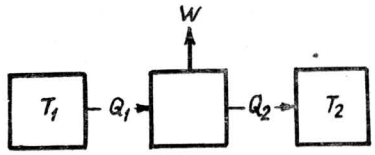
Последната фаза е много важна. Да предположим, че в запоен контейнер се намира сгъстен въздух при постоянна температура и ние сме му позволили да се разшири. Такова устройство може да върши работа, то може да привежда в движение пневматичен чук. Например при разширението въздухът едва-едва се охлажда, но ако имаме на разположение много голямо море, огромен топлинен резервоар, може отново да го нагреем. И така ние взехме от морето (резервоара) топлина и произведохме работа с помощта на сгъстения въздух. Обаче Карно не е сбъркал. Нали ние *не успяхме да оставим всичко в системата без изменение.* За да се свие отново въздухът, на когото позволихме да се разшири, ще ни се наложи да извършим допълнителна работа. Като свършим това, ще забележим, че не сме успели да заставим системата да работи при дадената температура T, но даже и сами вложихме някаква работа. Ние трябва да говорим само за такива случаи, когато *пълният резултат* на целия процес се свежда до изземване на топлина и превръщането ѝ в работа, точно така както при преодоляването на триенето крайният резултат беше превръщането на работата в топлина. Ако процесът се свежда до движение по окръжност, системата може да се върне точно в изходното положение, но крайният резултат на този процес ще бъде преминаването на изразходваната при преодоляването на триенето работа в топлина. А може ли да се обърне този процес? Да се завърти да кажем някаква ръчка, за да се обърне всичко обратно, триенето да произвежда полезна работа, а моретата да изстиват. Карно казва, че това не може да бъде. Хайде и ние да предположим, че това е невъзможно.

Ако изведнаж това стане възможно, то това би означавало, че освен многото други полезни неща ние бихме могли например без всякакви загуби да отнемем топлина от студеното тяло и да я отдадем на топлото. Между другото, всеки знае, че топлината преминава от топлото тяло към студеното.

Ако ние просто допрем топлото тяло към студеното и не направим нищо повече, то, доколкото ни е известно, топлото тяло никога няма да стане по-топло, а студеното по-студено. Но даже ако ние бихме могли да произведем работа, отнемайки топлина, да кажем от океана или нещо друго, без да изменим неговата температура, бихме могли, като извикаме на помощ триенето, отново да превърнем тази работа в топлина, но вече при друга температура. Например второто рамо на нашата въображаема машина може да се трие в нещо, което и без това се е нагряло. В този случай пълният резултат от процеса се свежда към охлаждане на „студеното" тяло (в нашия случай океана) и нагряване на топлите триещи се части на машината. Хипотезата на Карно — Вторият закон на термодинамиката, понякога се формулира така: топлината не може да премине от само себе си от студеното тяло към топлото. Но ние току-що се убедихме в еквивалентността на тези две твърдения. Да ги повторим отначало. *Първо,* не може да се осъществи процес, чийто единствен резултат е превръщането на топлината в работа при постоянна температура. *Второ,* топлината не може да преминава от само себе си от студеното тяло към топлото. Ние ще ползуваме по-често първата формулировка.

Анализът на работата на топлинната машина, направен от Карно, много прилича на това, което направихме в гл. 4, когато изучавахме подемните машини и разсъждавахме за закона за запазването на енергията. Нещо повече, приведените там аргументи са подсказани от аргументите на Карно за работата на топлинните машини. Затова някои разсъждения в тази глава ще ви се сторят вече познати.

Да предположим, че „котелът" на построената от нас топлинна машина се поддържа при температура T_1. За сметка на отнетата от котела топлина Q_1 парата е извършила работа W и е отделила в „кондензора" топлина Q_2 [температурата на кондензора е равна на T_2 (фиг. 44.3)]. Карно не е уточнил на какво е равна тази топлина, защото не е знаел Първия закон и не е предполагал, че Q_2 е равно на Q_1, защото не е вярвал в това. Мнозина считали, че Q_1 и Q_2 са еднакви, така предписвала калоричната теория. Но Карно не предполагал това, което е и една от тънкостите на неговите аргументи. Ако се използува Първият закон, ще намерим, че отделената топлина Q_2 е равна на Q_1 без извършената работа:



Фиг. 44.3. Схема на топлинна машина

$$Q_2 = Q_1 - W. \tag{44.3}$$

(Ако нашият процес беше цикличен и кондензираната вода отново постъпваше в котела, то след всеки цикъл при дадено количество вода, участвуващо в цикъла, би се поглъщало топлина Q_1 и би се произвеждала работа W.)

А сега да построим друга машина и да видим не можем ли да извършим по-голяма работа при същото количество топлина, отделящо се при температура T_1. В кондензатора ще се поддържа същата температура T_2. Ние ще използуваме същата топлина Q_1 от котела и ще се опитаме да извършим по-голяма работа, отколкото тази, която беше произведена от старата парна машина. Затова ще се наложи може би да използуваме друга течност, да кажем, спирт.

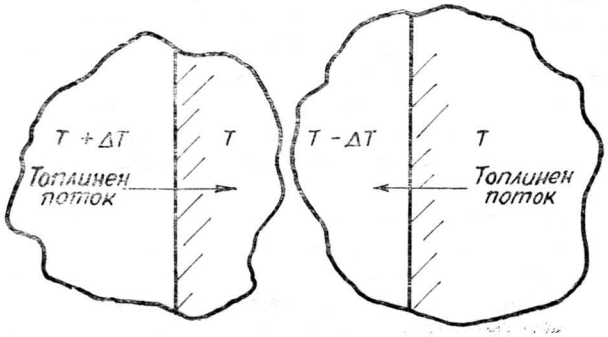
3. Обратими машини

Нека разгледаме по-добре нашите машини. Едно от свойствата на всички машини вече ни е известно. Ако в машината има триене, неизбежни са загубите на енергия. Най-добрата машина би била машина без триене. Да предположим, че имаме работа със същите идеални машини както при изучаването на закона за запазването на енергията, т. е. машини, които съвсем не трябва да преодоляват триене.

А сега да обсъдим аналога на движението без триене — „лишеното от триене" пренасяне на топлина. Ако допрем топло тяло до тяло, имащо по-ниска температура, ще възникне топлинен поток. Топлината ще тече от топлото тяло към студеното и за да се обърне потокът обратно, трябва леко да се измени температурата на някое друго тяло. Но машината, лишена от триене, ще се движи послушно под действието на произволно малка сила натам, където ѝ заповядват, а когато силата започне да действува в друга посока, охотно ще тръгне след нея. За аналог на машина без триене може да послужи устройство, в което безкрайно малките изменения на температурата могат да обърнат обратно топлинния поток. Ако разликата в температурите е крайна, то това е невъзможно. Но ако топлината протича между две тела, които са при практически еднаква температура и достатъчно безкрайно малка разлика в температурите, за да може потокът топлина да се обръща в коя и да е посока, потокът се смята за обратим (фиг. 44.4). Ако нагреем леко лявата половина на тялото, топлината ще потече надясно, ако едва-едва охладим лявата половина, топлината ще се устреми наляво. И така оказа се, че идеална машина се явява така наречената *обратима* машина, в която всеки процес е обратим в този смисъл, че най-малките изменения на условията на работа могат да заставят ма-

шината да заработи в обратна посока. Това означава, че в машината не трябва в никакъв случай да има триене. Освен това в такава машина не трябва да има места, където топлината на резервоара или парата на котела да се допират пряко с някакви по-студени или по-топли части.

Да се заемем с идеалната машина, в която всички процеси са обратими. За да покажем, че създаването на такава машина е възможно по принцип, просто ще приведем пример на работен



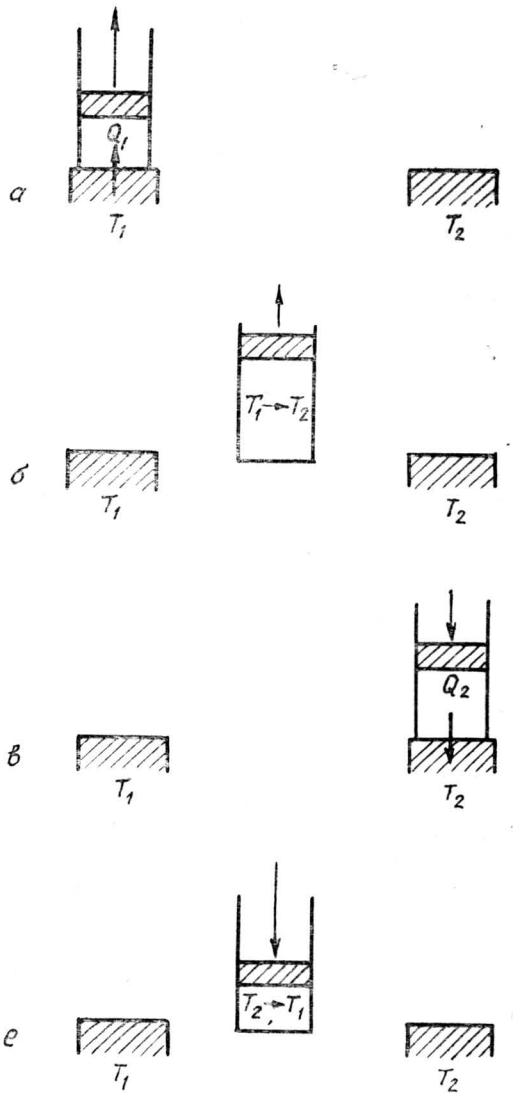
Фиг. 44.4. Обратим пренос на топлина

цикъл, при който нас не ни интересува възможността за неговата практическа реализация. Достатъчно е това, че от гледна точка на Карно той е обратим.

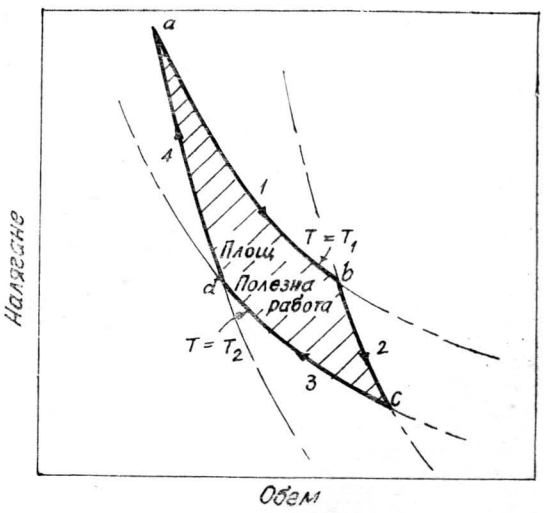
Да предположим, че в цилиндър, снабден с бутало без триене, се намира газ. Това не е задължително идеален газ. Въобще съдържанието на цилиндъра може да не бъде газ. Но за определеност ще смятаме, че в цилиндъра има идеален газ. Да предположим още, че имаме две топлинни възглавници T_1 и T_2 — две много големи тела, които са поддържани при определени температури T_1 и T_2 (фиг. 44.5). Ще смятаме, че T_1 е по-голяма от T_2. За начало да нагреем газа и като положим цилиндъра на възглавницата T_1 да позволим на газа да се разшири. Нека по време на притока на топлина в газа буталото да се изважда много бавно от цилиндъра. Тогава може да се гарантира, че температурата на газа няма да се отклонява силно от T_1. Ако издърпаме много бързо буталото, температурата в цилиндъра може да падне значително по-ниско от T_1 и процесът вече не може да бъде считан за напълно обратим. Ако изваждаме бавно буталото, температурата на газа ще остане близка до температурата T_1. От друга страна, ако буталото се вкарва бавно в цилиндъра, температурата ще стане само едва-едва по-висока от температурата T_1 и топлината ще потече обратно. Вие виждате, че такова изотермично (при постоянна температура) разширение може да бъде обратим процес само ако го провеждаме бавно и внимателно.

За да се разбере по-добре какво става, ще нарисуваме кривата на зависимостта на налягането на газа от неговия обем (фиг. 44.6). Когато газът се разширява, неговото налягане спада. Кривата *1* показва как се изменят обемът и налягането, ако в цилиндъра се поддържа постоянна температура T_1. За идеалния газ тази крива се описва от уравнението $PV = N\kappa T_1$. По време на изотермичното разширение при увеличение на обема налягането пада, докато не стигнем точка *b*. За това време газът ще вземе от резервоара топлина Q; нали ние вече знаем, че ако газът се разширява, без да се допира до резервоара, той би изстинал. И така завършихме разширението в точка *b*. Нека сега да снемем цилиндъра от резервоара и да продължим разширението. Но сега няма откъде да вземем топлина. И отново изваждаме бавно буталото, така че нямаме причини процесът да може да бъде необратим. Разбира се, ние отново предполагаме, че няма триене. Газът продължава да се разширява и температурата да пада, защото връзката с източниците на топлина е прекъсната.

Ще разширяваме газа така, че разширението да се описва



Фиг. 44.5 Стъпки на цикъла на Карно.
а — *стъпка* 1. Изотермично разширение при T_1, поглъща се топлина Q_1; б — *стъпка* 2. Адиабатно разширение, температурата пада от T_1 до T_2; в — *стъпка* 3. Изотермично свиване при T_2, отделя се топлина Q_2; г — *стъпка* 4. Адиабатно свиване, температурата се покачва от T_2 до T_1



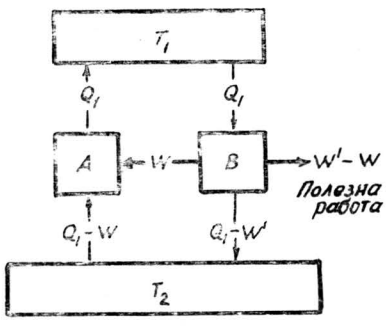
Фиг. 44.6. Цикъл на Карно

от кривата *2* дотогава, докато не достигнем точка *c*, където температурата пада до T_2. Такова разширение без приток на топлина се нарича *адиабатно*. Ние вече знаем, че в случай на идеален газ кривата *2* има вида $PV^\gamma = const$, където γ е константа, по-голяма от единица, и затова адиабатната крива пада по-стръмно от изотермната. Ако температурата на газа в цилиндъра е достигнала до T_2, то като положим цилиндъра на втората топлинна възглавница, не рискуваме да предизвикаме температурни изменения. Сега можем да свиваме бавно газа, като се движим по кривата *3*, при което цилиндърът се допира до резервоара при температура T_2 (виж фиг. 44.5, стъпка *2*). Тъй като цилиндърът е в допир с резервоара, неговата температура не може да се повиши, но на газа ще се наложи да отдава на резервоара топлина Q_2 при температура T_2. Като се предвижим по кривата *3* до точка *d*, ние отново ще снемем цилиндъра от топлинната възглавница при температура T_2 и ще продължим да свиваме газ. Този път няма да отнемаме топлина от газа. При това температурата ще се повиши, а налягането ще тръгне по кривата *4*. Ако извършим внимателно всички етапи, ще се върнем в изходната точка *a* при температура T_1 и можем да повторим цикъла.

Съдейки по тази диаграма, газът е извършил пълен цикъл, като е отнел за това време топлина Q_1 при температура T_1 и е отдал топлина Q_2 при температура T_2. Този цикъл е обратим и затова можем да направим стъпка по стъпка целия път в обратна посока. Бихме могли да тръгнем назад, а не напред и бихме могли да започнем движението от точка *a* при температура T_1, да се движим по кривата *4*, а след това да погълнем топлина Q_2 при температура T_2 (за целта трябва през цялото време буталото да се вади) и т. н., докато не бъде завършен цикълът. Ако сме извършвали цикъла в едната посока, заставили сме газа да работи, но ако бихме искали да се върнем назад, ще се наложи сами да поработим.

Между другото, лесно се пресмята пълната работа. Пълната работа, извършена при разширяването, е равна на произведението на налягането по изменението на обема: $\int PdV$. На нашата диаграма ние нанасяхме P вертикално, а V — хоризонтално. Ако означим вертикалното разстояние с буквата y, а хоризонталното с буквата x, ще получим интеграла $\int ydx$, а това е площта под кривата. По такъв начин площта под всяка от номерираните криви измерва работата, извършена било от газа, било от нас за съответния етап на цикъла. Лесно е да се разбере, че чистото отдаване на работа е равно на площта, заградена от кривите.

Щом вече сме привели примера на една обратима машина, то може да се предположи, че е възможно съществуването и на други такива устройства. Нека обратимата машина A взема топлина Q_1 при температура T_1, извършва работа W и връща някакво количество топлина при температура T_2. Да предположим също, че имаме още една машина B — творение на човешки ръце, вече конструирана, а може би и още неизработена. Можем да вземем парната машина, колелото с гумените спици — с една дума, каквото си искаме. Ние даже не се интересуваме обратима ли е тази машина. Важно е само това, тя да поглъща топлина Q_1 при температура T_1 и да връща част от тази топлина при по-ниската температура T_2. Да предположим, че машината B извършва някаква работа W'. Сега ще покажем, че W' не може да бъде по-голяма от W. Няма такава машина, която би работила по-добре от обратимата машина. Но защо? Да предположим, че W' е по-голяма от W. Тогава ние можем да вземем топлина Q_1 при температура T_1 и да я отдадем на машината B. Тази машина ще извърши работа W' и ще отдаде някакво количество топлина (не е важно какво) на резервоара с температура T_2. След това можем да се разпоредим с известна част от работата W', която ние смятаме за по-голяма от W. Да запазим засега част от работата W, а остатъкът $W' - W$ да употребим в своя полза (фиг. 44.7). Като разполагаме с работа W, можем да пуснем машината A в обратна посока, *нали това е обратима машина.* При това тя ще по-



Фиг. 44.7 Машината B заставя обратимата машина A да работи в обратна посока

гълне известно количество топлина от резервоара с температура T_2, но за сметка на това ще върне топлина Q_1 на резервоара при температура T_1. Какъв е чистият резултат от този двоен цикъл? Ние върнахме *всичко* към изходното състояние и извършихме допълнително работата $W' - W$. Всичко се сведе към това, че извлякохме енергия от резервоара с температура T_2! Топлината Q_1, взета от резервоара с температура T', бе върната акуратно. Щом тази топлина все пак се възвръща, то в качеството на резервоар с температура T_1 може да се вземе нещо по-малко от океан и да се включи това нещо вътре в съставната машина $A+B$. Чистият резултат от цикъла на такава машина ще бъде изземването от резервоара с температура T_2 на топлината $W' - W$ и превръщането ѝ в работа. Но извличането от резервоара на полезна работа при неизменна температура *без други изменения* се забранява от постулата на Карно. Това не може да се направи. По такъв начин не съществуват машини, които биха извлекли известно количество топлина от резервоара при температура T_1, биха върнали някаква нейна част при температура T_2 и биха извършили по-голяма работа, отколкото една обратима машина, която работи при същите температурни условия.

Сега да предположим, че машината B е също обратима. Разбира се, тогава не само W' няма да бъде по-голямо от W, но и W, не по-голямо от W'. За да се докаже това, трябва просто да се обърнат предишните аргументи. И така, ако две машини са обратими, те трябва да произвеждат еднаква работа и ние дойдохме до блестящия извод на Карно: ако машината е обратима, безразлично е как тя ще се изхитри да превърне топлината в работа. Произведената от машината работа, само ако тя поглъща определено количество топлина при температура T_1 и връща някаква нейна част при температура T_2, *не зависи от устройството на машината.* Така е устроен светът и това не зависи от частните свойства на машината.

Ако бихме намерили закон, който определя работата при изземане на топлина Q_1 при температура T_1 и връщане на част от тази топлина при температура T_2, тази величина би била универсална константа, независеща от свойствата на веществото. Разбира се, ако са ни известни свойствата на някое вещество, ние можем да пресметнем интересуващата ни величина. След това ще бъдем в правото си да заявим, че всички останали вещества ще произвеждат точно същата работа, ако с тяхна помощ се построи обратима машина. Такава е основната идея, ключът, с чиято помощ ние можем да намерим следващите съотношения. Например искаме да узнаем колко ще се свие гумата при нагряването и колко тя ще изстине, когато ѝ позволим да се свие. Да предположим, че сме взели гумата в качеството на работно вещество в обратима машина и сме извършили обратим цикъл. Чистият резултат, пълната произведена работа — това е универсална функция, велика функция, която не зависи от свойствата на веществата. По такъв начин ние се убеждаваме, че има нещо, което в известен смисъл ограничава разнообразието на свойствата на веществото. Ние не можем да направим тези свойства, каквито си искаме, не можем да открием вещество, което, бидейки използувано в топлинна машина, би произвело в обратим цикъл работа повече от допустимата. Този принцип, това ограничение е единственото реално правило, което може да се изведе от термодинамиката.

4. Коефициент на полезно действие на идеалната машина

А сега да се опитаме да намерим закона, определящ работата W като функция на Q_1, T_1 и T_2. Ясно е, че W е пропорционално на Q_1 или ако две обратими машини работят в паралел, то такава удвоена машина ще бъде също обратима. Ако всяка от тези машини поглъща топлина Q_1, то двете заедно ще поглъщат $2Q_1$,

а работата, която те извършват, е равна на $2W$ и т. н. Затова пропорционалността между W и изразходваната топлина Q_1 е напълно естествена.

След това ще направим още една важна стъпка към универсалния закон. В качеството на работно вещество на машината може да се вземе едно вещество с добре познати ни свойства. Ще се възползуваме от това и ще изберем идеален газ. Това може и да не се направи, а да се изведе интересуващото ни правило чисто логически, без да се използува за това каквото и да е вещество. Това е едно от най-блестящите теоретични доказателства във физиката, но засега ще използуваме по-малко абстрактния и по-прост метод на пряко изчисление.

Необходимо ни е само да получим формули за Q_1 и Q_2 (нали $W=Q_1-Q_2$) — топлините, които машината обменя с резервоарите по време на изотермичното разширение и свиване. Например да изчислим Q_1-топлината, получена от резервоара при температура T_1 по време на изотермичното разширение (кривата *1* на фиг. 44.6) от точката a, където налягането е равно на p_a, обемът е V_a, температурата е T_1, до точката b, където налягането е равно на p_b, обемът на V_b, а температурата е същата — T_1. Енергията на всяка молекула от идеалния газ зависи само от температурата, а тъй като в точките a и b са еднакви и температурата, и броят на молекулите, то и вътрешната енергия е също еднаква. *Енергията U не се изменя.* Пълната работа на газа в периода на разширението

$$W=\int_a^b p\,dV$$

се извършва за сметка на енергията Q_1, получена от резервоара. По време на разширението $pV=NkT_1$ или

$$p=\frac{NkT_1}{V};$$

значи

$$Q_1=\int_a^b p\,dV=\int_a^b NkT_1\frac{dV}{V}, \qquad (44.4)$$

т. е.

$$Q_1=NkT_1\ln\frac{V_b}{V_a}.$$

Ето я топлината, която е взета от резервоара при температура T_1. Точно по този начин може да се изчисли и топлината, отдадена на резервоара при свиването (кривата *3* на фиг. 44.6) при температура T_2:

$$Q_2=NkT_2\ln\frac{V_c}{V_d}. \qquad (44.5)$$

За да се завърши анализът, трябва още да се намери съотношението между V_c/V_d и V_b/V_a. Затова да погледнем отначало кривата *2*, която описва адиабатното разширение от b до c. В това време pV^γ остава постоянно. Тъй като $pV=NkT$, формулата за адиабатното разширение в крайните точки на пътя може да се напише във вида $(pV)V^{\gamma-1}=const$, или $TV^{\gamma-1}=const$, т. е.

$$T_1V_b^{\gamma-1}=T_2V_c^{\gamma-1} \qquad (44.6)$$

Тъй като кривата *4* описва адиабатното свиване от d до a, то

$$T_1V_a^{\gamma-1}=T_2V_d^{\gamma-1}. \qquad (44.6а)$$

Ако разделим тези равенства едно на друго, ще изясним, че отношенията V_b/V_a и V_c/V_d са равни, затова са равни и логаритмите в (44.4) и (44.5). Значи

$$\frac{Q_1}{T_1}=\frac{Q_2}{T_2}. \qquad (44.7)$$

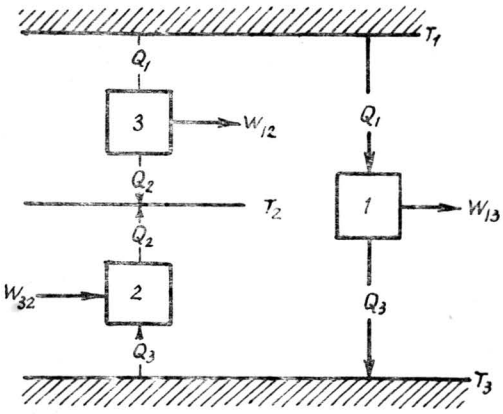
Това е и съотношението, което търсехме. Въпреки че то е доказано за машина с идеален газ, ние вече знаем, че то е *правилно за всяка обратима машина.*

А сега да видим как може да се изведе този универсален закон въз основа само на логически аргументи, като не се интересуваме от частните свойства на веществата. Да предположим, че разполагаме с три машини и три температури: T_1, T_2, T_3. Едната от машините поглъща топлина Q_1 при температура T_1, а произвежда работа W_{13} и отдава топлина Q_3 при температура T_3 (фиг. 44.8). Другата машина работи при прехода между температурите T_2 и T_3. Да предположим, че тази машина е устроена така, че поглъща същата топлина Q_3 при температура T_3 и отдава топлина Q_2. Тогава ще ни се наложи да изразходваме работата W_{32} (нали заставихме машината да работи в обратна посока). Цикълът на първата машина се заключава в поглъщане на топлина Q_1 и отделяне на топлина Q_3 при температура T_3. В същото време втората машина взима от резервоара същата топлина Q_3 при температура T_3 и я отдава в резервоара с температура T_2. По такъв начин чистият резултат от цикъла на тази двойка машини се състои във взимане на топлина Q_1 при температура T_1 и отделяне на топлина Q_2 при температура T_2. Тези машини са еквивалентни на третата, която поглъща топлина Q_1 при температура T_1, извършва работа W_{12} и отделя топлина Q_2 при температура T_2. Действително, като се излезе от първия закон, може веднага да се покаже, че $W_{12}=W_{13}-W_{32}$:

$$W_{13}-W_{32}=(Q_1-Q_3)-(Q_2-Q_3)=Q_1-Q_2=W_{12}. \qquad (44.8)$$

Сега може да се получи законът, който свързва коефициентите на полезно действие на машините. Нали е ясно, че между ефективностите на машините, работещи при температурните преходи T_1-T_3, T_2-T_3 и T_1-T_2, трябва да съществуват определени съотношения.

Да формулираме по-ясно нашите аргументи. Ние се убедихме, че винаги можем да свържем топлината, погълната при температура T_1, и топлината, отделена при температура T_2, като определим топлината, отделена при някаква друга температура T_3. Това означава, че можем да опишем всички свойства на машината, ако въведем стандартна температура и анализираме всички процеси с помощта именно на тази стандартна температура. Казано по друг начин, ако знаем коефициента на полезното действие на машината, работеща между температурата T и някаква стандартна температура, можем да изчислим коефициента на полезното действие на машина, работеща при какъвто и да е температурен преход. Нали разглеждаме само обратими машини, затова нищо не ни пречи да се спуснем от началната температура към стандартната, а после отново да се върнем към крайната температура. Да приемем температурата от *един градус* за стандартна. За означаване на отделяната при стандартната температура топлина ще използуваме особения символ Q_S. Това означава, че ако машината поглъща при температура T топлина Q, то при температура от един градус тя ще отделя топлина Q_S. *Ако някаква машина, която поглъща топлина Q_1 при T_1, отделя топлина Q_S при температура един градус, а друга машина, като погълне топлина Q_2 при T_2, отделя същата топлина Q_S при температура от един градус, то машината, поглъщаща Q_1 при T_1, трябва при температура T_2 да отделя топлина Q_2.* Ние вече доказахме това, като разгледахме три машини, работещи при три температури. По такъв начин за пълното описание на работата на машините ни остава да знаем съвсем малко. Ще изясним колко топлина Q_1 трябва да погълне машината при температура T_1, за да отдели при единична температура топлина Q_S. Разбира се, между топлината Q и температурата T съществува зависимост. Лесно е да се разбере, че топлината трябва да нараства с температурата, нали знаем, че ако се застави машината да работи в обратна посока, то при по-високата температура тя отдава топлина. Лесно е също да се разбере, че топлината Q_1 трябва да бъде пропорционал-



Фиг. 44.8. Сдвоените машини 1 и 2 са еквивалентни на машина 3

на на Q_S. По такъв начин нашият велик закон би изглеждал така: на всяко количество топлина Q_S, отделено при температура от един градус, съответствува количество топлина, погълнато от машината при температура T, равно на Q_S, умножено по някаква нарастваща функция Q на температурата:

$$Q = Q_S f(T). \tag{44.9}$$

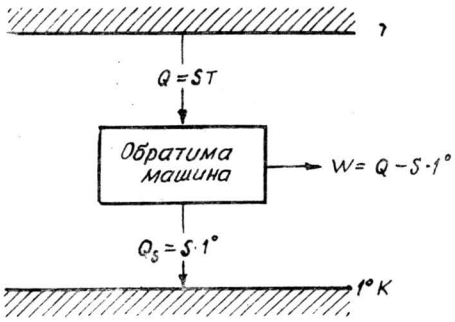
5. Термодинамична температура

Засега няма да правим опити да изразяваме тази нарастваща функция според термините на познатия ни живачен термометър, а в замяна *ще определим нова температурна скала.* Някога температурата се е определяла също така произволно. Като мярка за температура са служели знаците, нанесени на равни разстояния на стената на тръбичката, в която при нагряване се разширявала вода. След това решили да измерват температурата с живачен термометър и открили, че градусните разстояния вече не са еднакви. Сега *можем да дадем определение на температурата, което не зависи от каквито и да са частни свойства на веществото.* За това ще използуваме функцията $f(T)$, която не зависи от никакво устройство, защото ефективността на обратимите машини не зависи от работното вещество в тях. Тъй като намерената от нас функция нараства с температурата, можем да смятаме, че тя *сама по себе си* измерва температурата, като започва от стандартната температура от един градус. За това трябва само да се уговорим, че

$$Q = Q_S T, \tag{44.10}$$

а

$$Q = S.1°. \tag{44.11}$$



Фиг. 44.9. Абсолютна термодинамична температура

Това означава, че сега можем да намерим температурата на тялото, като определим количеството топлина, което се поглъща от обратимата машина, работеща в интервала между температурата на тялото и температурата от един градус (фиг. 44.9). Ако машината взима от котела седем пъти повече топлина, отколкото постъпва в едноградусовия кондензор, то температурата на котела е равна на седем градуса и т. н. По такъв начин, като измерваме количеството топлина, погълнато при различни температури, ние определяме температурата. Получената по такъв начин температура се нарича *абсолютна термодинамична температура* и не зависи от свойствата на веществото. Сега ще се ползуваме изключително от това определение на температурата[1].

Сега ни е ясно, че ако имаме две машини, от които едната работи при температурния преход между T_1 и един градус, а другата — между T_2 и един градус, а двете отделят при единичната температура еднакви количества топлина, то погълнатите от тях топлини трябва да удовлетворяват съотношението

$$\frac{Q_1}{T_1} = S = \frac{Q_2}{T_2}. \tag{44.12}$$

Но това означава, че ако някаква обратима машина погълне топлина Q_1 при температура T_1, а отделя топлина Q_2 при температура T_2, то отношението Q_1 към T_1 е равно на отношението на Q_2 към T_2. Това е вярно за всяка обратима машина. Всичко, което ще стане по-нататък, се съдържа в това съотношение. Това е центърът на термодинамичната наука.

Но ако това е всичко, което се съдържа в термодинамиката, защо тогава я смятат за такава трудна наука? Опитайте да опи-

[1] По-рано определяхме температурната скала по друг начин. Ние твърдяхме, че средната кинетична енергия на молекулата на идеалния газ е пропорционална на температурата, или съгласно закона за идеалния газ pV е пропорционално на T. Еквивалентно ли е това на новото определение? Да. Нали крайният резултат (в. 447), изведен от закона за идеалния газ, съвпада с приведените тук резултати. Ние още ще говорим за това в следващата глава.

шете поведението на кое и да е вещество, даже ако предварително ви е известно, че масата на веществото е постоянна през цялото време. В този случай състоянието на веществото във всеки момент от времето се определя от неговата температура и обем. Ако са известни температурата и обемът на веществото, а също и зависимостта на налягането от обема и температурата, може да се узнае и вътрешната енергия. Но някой ще каже: „А аз искам да постъпя по друг начин. Дайте ми температурата и налягането и аз ще ви кажа какъв е обемът. Аз мога да смятам обема за функция на температурата и налягането и да търся зависимостта на вътрешната енергия именно от тези променливи.“ Трудността на термодинамиката е свързана именно с това, че всеки може да подходи към задачата откъдето си иска. Трябва само да се седне и да се изберат определени променливи, а след това вече твърдо да се стои на своето и всичко ще стане лесно и просто.

Сега да пристъпим към изводите. В механиката ние дойдохме до всички нужни за нас резултати, като изхождахме от центъра на механичния свят $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$. Такава роля в термодинамиката ще изиграе току-що намереният от нас принцип. Но какви изводи може да се направят, като се излезе от този принцип?

Да започнем. Отначало ще комбинираме закона за запазването на енергията и закона, свързващ Q_1 и Q_2, за да намерим *коефициента на полезното действие на обратимата машина.* Първият закон гласи, че $W=Q_1-Q_2$. Съгласно нашия нов принцип

$$Q_2=\frac{T_2}{T_1}\,Q_1\,.$$

Затова работата е равна на

$$W=Q_1\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right)=Q_1\,\frac{T_1-T_2}{T_1}\,. \tag{44.13}$$

Това съотношение характеризира ефективността на машината, т. е. количеството работа, произведено при определен разход на топлина. Коефициентът на полезното действие е пропорционален на температурния преход, при който работи машината, разделен на по-високата температура:

$$\text{к. п. д.}=\frac{W}{Q_1}=\frac{T_1-T_2}{T_1}\,. \tag{44.14}$$

Коефициентът на полезното действие не може да бъде по-голям от единица, а абсолютната температура не може да бъде по-малка от нула, абсолютната нула. По такъв начин, щом T_2 трябва да бъде положителна, то коефициентът на полезното действие е винаги по-малък от единица. Това е нашият пръв извод.

6. Ентропия

Уравнението (44.7) или (44.12) може да бъде изтълкувано по особен начин. При работа на обратими машини $Q_1/T_1=Q_2/T_2$ топлината Q_1 при температура T_1 е „еквивалентна“ на топлината Q_2 при температура T_2, нали ако се поглъща Q_1, то винаги се отделя топлина Q_2. Ако сега за Q/T се измисли особено име, може да се каже, че при обратимите процеси се поглъща толкова Q/T, колкото се и отделя. Или Q/T не намалява и не нараства. Тази величина Q/T се нарича *ентропия* и ние казваме, че „за обратим цикъл изменението на ентропията е равно на нула“. Ако $T=1°$, то ентропията е равна на $Q/1°$. Вече снабдихме ентропията с особен символ $S=Q_S/1°$. Ентропията навсякъде се означава с буквата S, а числено е равна на топлината (която ние означихме с Q_S), отделяна в едноградусовия резервоар (ентропията не е просто равна на топлината, това е топлина, делена на температурата, и тя се измерва в *джаули на градус*).

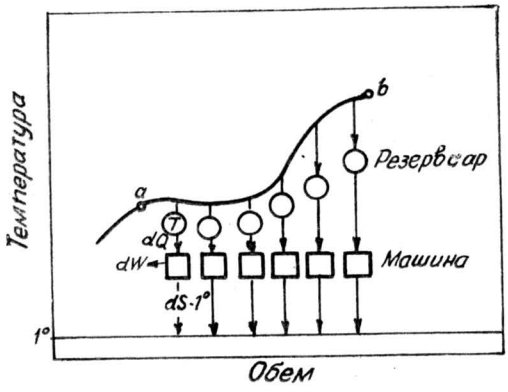
Интересно е, че освен налягането, което зависи от температурата, обема и вътрешната енергия (функция на същите тези обем и температура), ние намерихме още една величина — ен-

тропията на веществото, която също се явява функция на състоянието. Ще се постараем да обясним как се изчислява ентропията и какво разбираме под думите „функция на състоянието". Ще проследим поведението на системата при различни условия. При опити ние вече умеем да създаваме различни условия, например можем да заставим системата да се разширява адиабатно или изотермично. (Между другото не е задължително машината да има само два резервоара, а може да има и три, и четири различни температури и да обменя топлина с всеки от тях.) Ние можем да се разходим по цялата pV диаграма, като преминаваме от едно състояние в друго. Казано по друг начин, може да се преведе газът от състояние a в кое да е друго състояние b и да се изиска преходът от a в b да бъде обратим. Сега да предположим, че по пътя от a до b са поставени малки резервоари с различни температури. Тогава всяка малка стъпка ще се съпровожда с отнемане от веществото на топлина dQ и предаването ѝ в резервоар при температура, съответна на дадената точка от пътя. Нека да свържем всички тези резервоари чрез обратими топлинни машини с един резервоар с температура, равна на единица. След като завършим превеждането на веществото от състояние a в състояние b, да върнем всички резервоари в тяхното първоначално състояние. Обратимата машина ще върне всяка частица топлина dQ, взета от веществото при температура T, и всеки път при единичната температура ще се отделя ентропия dS, равна на

$$dS = \frac{dQ}{T} . \tag{44.15}$$

Да пресметнем сега пълното количество на отделената ентропия. Разликата в ентропиите, или ентропията, нужна за прехода от a в b в резултат на някакво обратимо изменение — това е пълната ентропия, т. е. ентропията, взета от малките резервоари и отделена при единичната температура:

$$S_b - S_a = \int_a^b \frac{dQ}{T} . \tag{44.16}$$



Фиг. 44.10. Изменение на ентропията при обратим преход

Въпросът се състои в това, зависи ли разликата в ентропиите от пътя в равнината pV. От a до b водят много пътища. Да си спомним, че в цикъла на Карно ние можехме да преминем от точката a в точката c по два начина (вж. фиг. 44.6). Беше възможно отначало да се разшири газът изотермично, а после — адиабатно, а можеше и да се започне с адиабатното разширение и да се завърши с изотермичното. И така ние трябва да изясним променя ли се ентропията при промяната на пътя от a до b (фиг. 44.10). *Тя не трябва да се изменя*, защото, ако бяхме извършили пълен цикъл, излизайки от a до b по един път и връщайки се по друг, то това пътешествие ще бъде еквивалентно на пълен цикъл на обратима машина. При такъв цикъл никаква топлина не се предава на едноградусовия резервоар. Тъй като ние нямаме право да вземаме топлина от едноградусовия резервоар, при всяко пътешествие от a до b ще трябва да се задоволим с едно и също количество ентропия. Това количество *не зависи от пътя*, съществени са само крайните точки. По такъв начин може да се говори за някаква функция, която ние нарекохме ентропия на веществото. Тази функция зависи само от състоянието на веществото, т. е. само от обема и температурата.

Функцията $S(V, T)$ вече може да се намери. Ще пресметнем изменението на ентропията при обратимите изменения на веществото, като следим топлината, отделяна в едноградусовия резервоар. Но това изменение може да се изрази още чрез топлината dQ, взета от веществото при температура T:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} . \tag{44.17}$$

Пълното изменение на ентропията е равно на разликата от ентропиите в крайната и началната точка на пътя:

$$\Delta S = S(V_b, T_b) - S(V_a, T_a) = \int_a^b \frac{dQ}{T}. \qquad (44.18)$$

Този израз не определя напълно ентропията. Засега е известна само *разликата* на ентропиите в две различни състояния. Можем да определим ентропията абсолютно само след като съумеем да изчислим ентропията на едно какво и да е състояние.

Дълго време се смяташе, че абсолютната ентропия — това е едно въобще нищо не значещо понятие. Но в края на краищата Нернст изказа мисълта, наречена от него *топлинна теорема* (понякога я наричат трети закон на термодинамиката). Нейният смисъл е много прост. Сега ще съобщим тази теорема, без да обясняваме защо е вярна. Постулатът на Нернст просто казва, че ентропията на всяко тяло при абсолютната нула е равна на нула. Сега знаем при какви T и V (при $T=0$) ентропията е равна на нула и можем да изчислим ентропията във всяка друга точка.

За да се илюстрира тази идея, нека да пресметнем ентропията на идеалния газ. При изотермично (а следователно обратимо) разширение $\int \frac{dQ}{T}$ е просто равен на Q/T, понеже T е постоянна. По такъв начин съгласно (44.4) изменението на ентропията е равно на

$$S(V_a, T) - S(V_b, T) = Nk \ln \frac{V_a}{V_b},$$

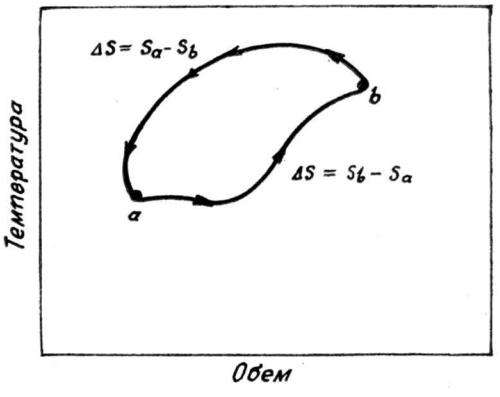
така че $S(V,T) = Nk \ln V$ плюс функция само на температурата. А как зависи S от T? Ние вече знаем, че при адиабатно разширение *няма топлообмен.* По такъв начин ентропията остава постоянна, въпреки че обемът V се изменя, като кара да се изменя и T (за да се запази $TV^{\gamma-1} = \text{const}$). Ясно ли ви е след това, че

$$S(V, T) = Nk\left[\ln V - \frac{1}{\gamma - 1} \ln T\right] + a,$$

където a е константа, не зависеща *нито от* V, *нито от* T. Константата a се нарича химическа константа. Тя зависи от свойствата на газа и може да се определи опитно в съответствие с теоремата на Нернст. Затова трябва да се измери топлината, отделяна от газа при неговото охлаждане и кондензация до превръщането му в твърдо тяло при 0° (хелият и при тази температура остава течен). След това трябва да се намери интегралът $\int \frac{dQ}{T}$. Може да се намери a и теоретично. За това ще са необходими константата на Планк и квантовата механика, но в нашия курс няма да стигнем дотам.

Да отбележим някои свойства на ентропията. Отначало да си спомним, че на участъка от обратимия цикъл между точките a и b ентропията се изменя с $S_b - S_a$ (фиг. 44.11). Да си спомним още, че по време на придвижването по този път ентропията (топлината, отделяна при единичната температура) нараства в съгласие с правилото $dS = dQ/T$, където dQ е топлината, взета от веществото при температура T.

Ние вече знаем, че след обратим *цикъл* пълната ентропия на всичко, което е включено в процеса, не се изменя. Нали топлината Q_1, погълната при T_1 и топлината Q_2, отделена при T_2, внасят в ентропията равни по големина, но противоположни по знак части. Затова чистото изменение на ентропията е равно на нула. По такъв начин при обратим цикъл ентропията на всички участници в цикъла, включително разервоарите, не се изменя. Това правило като че ли прилича на закона за запазването на енергията, но не е така. То е приложимо само към обратими цикли. Ако се премине към необратими цикли, законът за съхранение на ентропията вече не съществува.



фиг. 44.11. Изменение на ентропията при пълен обратим цикъл
Пълното изменение на ентропията е равно на нула

Ще приведем два примера. За начало да предположим, че някаква машина с триене произвежда необратима работа, като отделя топлина Q при температура T. Ентропията нараства с Q/T. Топлината Q е равна на изразходваната работа и когато извършваме някаква работа с помощта на триене в някакъв предмет, чиято температура е равна на T, то ентропията нараства с W/T.

Друг пример на необратимост: ако допрем един към друг два предмета с различни температури, да кажем T_1 и T_2, от единия предмет към другия ще протече известно количество топлина. Да предположим например, че сме хвърлили горещ камък в студена вода. С колко ще се измени ентропията на камъка, ако той отдаде на водата топлина ΔQ при температура T_1? Тя се намалява с $\Delta Q/T_1$. А с колко ще се измени ентропията на водата? Тя ще нарасне с $\Delta Q/T_2$. Разбира се, топлината може да протече само от по-високата температура T_1 към по-ниската T_2. Затова ако T_1 е по-голяма от T_2, то ΔQ е положително. По такъв начин изменението на ентропията е положително и е равно на разликата между двете дроби:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_2} - \frac{\Delta Q}{T_1}. \tag{44.19}$$

И така вярна е следната теорема: при всеки необратим процес ентропията на всяко нещо нараства. Само обратимите процеси могат да задържат ентропията на едно ниво. А тъй като абсолютно необратими процеси не съществуват, ентропията винаги малко расте. Обратимите процеси са идеализирани процеси с минимален прираст на ентропията.

За съжаление няма да ни се отдаде възможност да се задълбочим в областта на термодинамиката. Нашата цел е само да илюстрираме основните идеи на тази наука и да обясним причините, по които е възможно да се позоваваме на тези аргументи. Но в нашия курс няма често да прибягваме към термодинамиката. От термодинамиката широко се ползуват в техниката и химията. Затова с термодинамиката вие ще се запознаете практически в курса по химия или в техническите науки. А да се дублира няма смисъл и ние ще се ограничим само с известен обзор на естеството на теорията и няма да се впускаме в детайлите за специалните й приложения.

Двата закона на термодинамиката често се формулират така:

Първи закон: Енергията на Вселената е винаги постоянна.

Втори закон: Ентропията на Вселената винаги нараства.

Това не е много добра формулировка на втория закон. В нея например нищо не се казва за това, че ентропията не се изменя след обратим цикъл и не се уточнява самото понятие ентропия. Просто това е лесно запомняща се форма на двата закона, но от нея не е лесно да се разбере за какво всъщност става дума.

Всички закони, за които говорихме, сме ги събрали в табл. 44.1. А в следващата глава ще използуваме тази справка за законите, за да намерим съотношението между топлината, отделена от гумата при разтягане и допълнителното напрежение на гумата при нейното нагряване.

Таблица 44.1

Закони на термодинамиката

Първи закон
Придадената на системата топлина + Работата, извършена над системата = Нарастване на вътрешната енергия на системата: $dQ+dW=dU$
Втори закон
Не е възможен процес, чийто единствен резултат би бил взимането на топлина от резервоара и превръщането ѝ в работа.

Нито една машина, която поглъща топлина Q_1 при температура T_1 и отделя топлина Q_2 при температура T_2, не може да работи повече от обратима машина[1] Работата на обратимата машина е равна на

$$W=Q_1-Q_2=Q_1\left(\frac{T_1-T_2}{T_1}\right).$$

Определяне на ентропията на системата

а) Ако в системата има обратим приток на топлина ΔQ при температура T, то ентропията на системата нараства с $\Delta S=\Delta Q/T$.

б) Ако $T=0$, то $S=0$ *(трети закон).*

При *обратими изменения* пълната ентропия на всички участници (включително резервоарите) не се изменя.

При *необратими изменения* пълната ентропия на системата винаги нараства.

45

Примери от термодинамиката

1. Вътрешна енергия
2. Приложения
3. Уравнение на Клаузиус-Клапейрон

1. Вътрешна енергия

Когато се наложи да се използува термодинамиката за работа, оказва се, че тя е твърде труден и сложен предмет. В тази книга обаче ние не ще навлизаме в нейните дебри. Тази област е особено интересна за химиците и инженерите и този, който би искал да се запознае по-добре с нея, трябва да се обърне към физикохимията или инженерната термодинамика. Има още редица добри книги за справка, в които тази тема се обсъжда по-подробно.

Термодинамиката е сложна, поради това че тя позволява всяко явление да се описва по много начини. Ако ни е необходимо да опишем поведението на един газ, ние можем да излезем от това, че неговото налягане зависи от обема и температурата, а може да се предположи, че обемът зависи от налягането и температурата. Същото е и с вътрешната енергия U. Може да се каже, че тя се определя от температурата и обема, стига само да изберем точно тези променливи, но може да се говори за зависимост от температурата и налягането или от налягането и обема и т. н. В предишната глава ние се запознахме с друга функция на температурата и обема, наречена ентропия S. И сега нищо няма да ни попречи да построим другите функции на тези променливи. Например функцията $U-TS$ също зависи от температурата и обема. По такъв начин ни се налага да имаме работа с голямо количество величини, зависещи от разнообразни комбинации на променливи.

За да се опрости разбирането на тази глава, да се уговорим от самото начало да изберем в качеството на независими променливи *температурата и обема.* Химиците използуват за това температурата и налягането, защото те по-лесно се измерват и контролират в химичните реакции. Но ние навсякъде в тази глава ще използуваме температурата и обема и ще им изневерим само на едно място, за да видим как се извършва преходът към химическите променливи.

И така да разгледаме отначало само една система от независими променливи — температура и обем. След това ще ни интересуват само две функции на тези променливи: вътрешната енергия и налягането. Всички други термодинамични функции могат да се получат с помощта на тези две, но не е задължително това да стане именно сега. Даже след тези ограничения термодинамиката си остава още труден предмет, но все пак не толкова невъзможен за разбиране.

Да се заемем отначало малко с математиката. Ако една величина е функция на две променливи, ще се наложи да я диференцираме по-внимателно, отколкото правехме това по-рано, когато имахме работа с една променлива. Какво разбираме под производна на налягането по температурата? Изменението на налягането, съпровождащо изменението на температурата, зависи, разбира се, от това, какво се е случило с *обема*, докато се е променяла температурата. Преди понятието производна по температурата да придобие ясен смисъл, трябва да се каже нещо определено и за изменението на обема. Например може да се попита каква е скоростта на изменението на P относно T при постоянен обем. Тогава отношението на измененията на тези две величини е по същество обикновена производна, на която сме привикнали да приписваме символа dP/dT. Обикновено ние използуваме особения символ $\partial P/\partial T$. Той ни напомня, че P зависи освен от T още и от променливата V и че тази променлива не

се изменя. За да подчертаем факта, че V не се изменя, ние не само използуваме символа ∂, но ще отбележим още чрез индекс оставащата постоянна променлива $(\partial P/\partial T)_V$. Разбира се, тъй като имаме само две независими променливи, това означаване е излишно, но може би то ще ни помогне по-лесно да преминем през термодинамичните дебри на частните производни.

Да предположим, че функцията $f(x, y)$ зависи от две независими променливи x и y. Под символа $(\partial f/\partial x)_y$ ние разбираме най-обикновена производна, получена по общоприетия начин, ако y е постоянна:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогично се определя и

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Например, ако $f(x, y) = x^2 + yx$, то $(\partial f/\partial x)_y = 2x + y$, а $(\partial f/\partial y)_x = x$. Ние можем да разпространим това и на по-високите производни: $\partial^2 f/\partial y^2$ или $\partial^2 f/\partial y \partial x$. Последният случай означава, че отначало f е диференцирано по x, като се счита y за постоянно, а след това резултатът се диференцира по y, но вече постоянно е станало x. Порядъкът на диференцирането няма значение: $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x$.

Ще се наложи да пресмятаме изменението Δf, което става с $f(x, y)$, ако x стане $x + \Delta x$, а y стане $y + \Delta y$. Ще предполагаме, че Δx и Δy са безкрайно малки:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) \\ &= \underbrace{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}_{\Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y} + \underbrace{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}_{\Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x}. \end{aligned} \tag{45.1}$$

Последното уравнение е основното съотношение, което свързва нарастването на Δf с Δx и Δy.

Да видим как се използува това съотношение. Нека да изчислим изменението на вътрешната енергия $U(T, V)$, ако температурата T премине в $T + \Delta T$, а обемът V премине във $V + \Delta V$. Ще използуваме формулата (45.1) и ще напишем

$$\Delta U = \Delta T \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \Delta V \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T. \tag{45.2}$$

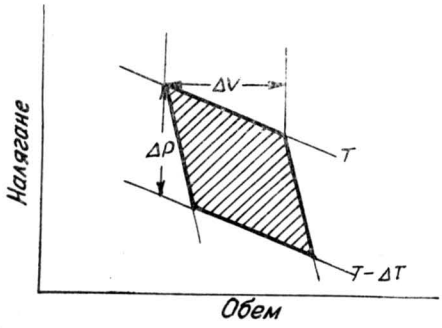
В предишната глава намерихме друг израз за изменението на вътрешната енергия ΔU, тогава към постъпващия газ се прибавяше топлината ΔQ:

$$\Delta U = \Delta Q - P \Delta V. \tag{45.3}$$

Като сравним (45.2) и (45.3), би могло да си помислим, че $P = (\partial U/\partial V)_T$, но това не е така. За да се получи верният резултат, отначало да предположим, че газът получава топлина ΔQ, при което обемът му не се изменя, така че $\Delta V = 0$. Ако $\Delta V = 0$, то уравнението (45.3) ни говори, че $\Delta U = \Delta Q$, а уравнението (45.2) показва, че $\Delta U = (\partial U/\partial T)_V \Delta T$, затова $(\partial U/\partial T)_V = \Delta Q/\Delta T$. Отношението $\Delta Q/\Delta T$ — количеството топлина, която трябва да се подаде на тялото, за да се измени неговата температура с един градус, като се поддържа обемът постоянен, се нарича *специфична топлоемност при постоянен обем* и се означава със символа C_V. По такъв начин ние показахме, че

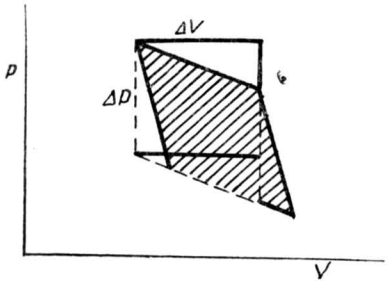
$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = C_V. \tag{45.4}$$

Сега отново да подадем на гава топлина ΔQ, но този път ще се условим, че температурата на газа остава постоянна, а обемът ще позволим да се измени с ΔV. В този случай анализът е по-сложен, но ние можем да изчислим ΔU, като използуваме аргументите на Карно, за което ще ни се наложи да призовем отново на помощ цикъла на Карно от предишната глава.



Фиг. 45.1. P-V диаграма за цикъла на Карно

Кривите, отбелязани с T и $T-\Delta T$, са изотерми; стръмните криви между тях — адиабати. Когато газът се разширява изотермично при температура T, той получава топлина ΔQ и увеличава своя обем с ΔV; P-изменение на налягането при постоянен обем, в това време температурата пада от T до $T-\Delta T$.



Фиг. 45.2. Защрихованата област = Площта, оградена от пунктирната линия = Площта на правоъгълника $=\Delta P \Delta V$

Диаграмата налягане — обем за цикъла на Карно е показана на фиг. 45.1. Вече показахме, че пълната работа, извършена от газа при обратим цикъл, е равна на $\Delta Q(\Delta T/T)$, където ΔQ е топлината, подадена към газа при температура T по време на изотермичното разширяване от V до $V+\Delta V$, а T — ΔT е крайната температура, която достига газът при адиабатното разширение през втория етап на цикъла. Сега ще покажем, че освен това тази работа е равна на защрихованата площ на фиг. 45.1. Работата на газа във всички случаи на живота е равна на $\int PdV$. Тя е положителна, ако газът се разширява, и отрицателна, когато той се свива. Ако се начертае зависимостта на P от V, то измененията на P и V се изобразяват от кривата, във всяка точка на която на определена стойност на P съответствува определена стойност на V. Работата, произведена от газа, докато неговият обем се мени от една стойност до друга (интегралът $\int PdV$), е площта под кривата, съединяваща началната с крайната стойност на V. Да приложим тази идея към цикъла на Карно и ще се убедим, че ако се обиколи цикълът, като се помни знакът на извършената от газа работа, чистата работа на газа ще бъде равна на защрихованата площ на фиг. 45.1.

А сега да пресметнем тази площ чисто геометрически. Цикълът, който е бил използуван за получаване на фиг. 45.1, се отличава от цикъла, описан в предишната глава, по това, че сега ΔQ и ΔT са безкрайно малки. Нашите адиабати и изотерми са твърде близки едни до други, затова фигурата, описана с плътна линия на фиг. 45.1, се приближава до паралелограм, когато нарастванията на ΔQ и ΔT се стремят към нула. Площта на този паралелограм е точно равна на $\Delta V \Delta P$ (където ΔV е изменението на обема, когато към газа се подава енергия ΔQ при постоянна температура, а ΔP е изменението на налягането при изменение на температурата с ΔT и постоянен обем). Лесно е да се покаже, че защрихованата площ на фиг. 45.1 е равна на площта, ограничена с пунктир на фиг. 45.2. А тази фигура се превръща лесно в правоъгълник със страни ΔP и ΔV, за което е необходимо само да се изрежат от нея триъгълници и да се поставят малко по друг начин.

Да съберем всички наши изводи заедно.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Работата на газа} = \text{Защрихованата площ} = \Delta V \Delta P = \Delta Q \frac{\Delta T}{T}, \\ &\text{или} \\ &\frac{\Delta T}{T} \cdot (\text{Топлината, необходима за измененията на } V \text{ с } \Delta V)_T = \\ &= \Delta V \cdot (\text{Изменението на } P, \text{ когато } T \text{ се изменя с } \Delta T)_V, \\ &\text{или} \\ &\frac{1}{\Delta V} \cdot (\text{Топлината, необходима за изменение на } V \text{ с } \Delta V)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V. \end{aligned}\right\} \quad (45.5)$$

Изразът (45.5) съдържа в себе си същността на резултатите, които следват от аргументите на Карно. Цялата термодинамика може да се изведе от (45.5) и първият закон, съдържащ се в уравнение (45.3). Изразът (45.5) е всъщност вторият закон, въпреки че отначало Карно го е формулирал малко по-другояче, тъй като не се е ползувал от нашето определение за температурата.

А сега може да се пристъпи към пресмятането на $(\partial U/\partial V)_T$. С колко ще се измени вътрешната енергия U, ако обемът се измени с ΔV? Първо, вътрешната енергия U се изменя за сметка на подадената топлина и второ, за сметка на извършената работа. Подадената топлина съгласно (45.5) е равна на

$$\Delta Q = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \Delta V,$$

а извършената над веществото работа е равна на $-P\Delta V$. Именно затова изменението ΔU се състои от две части:

$$\Delta U = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \Delta V - P\Delta V. \quad (45.6)$$

Ако разделим двете страни на ΔV, ще намерим скоростта на изменението на U относно V при постоянна T:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P. \qquad (45.7)$$

В нашата термодинамика, където има само две променливи — T и V, и само две функции — P и U, уравненията (45.3) и (45.7) са основните уравнения, от които могат да се изведат всички следващи резултати.

2. Приложения

Да обсъдим сега смисъла на уравнението (45.7) и да видим защо то дава отговор на поставените в предишната глава въпроси. Ние се занимавахме с разглеждането на такава задача: в кинетичната теория е ясно, че нарастването на температурата води към увеличение на налягането, защото усилва бомбардировката на буталото с атоми. Същите физически причини водят и към това, че при изтласкване на буталото от газа се отнема топлина и за да задържим температурата постоянна, трябва да се погрижим за приток на топлина. При разширяването газът изстива, а при нагряването — налягането му нараства. Между тези явления трябва да съществува някаква връзка и тя напълно се определя от уравнението (45.7). Ако задържаме обема постоянен и повишаваме температурата, то налягането расте със скорост $(\partial P/\partial T)_V$. Ето ние намерихме тази връзка: ако увеличим обема и не подадем никакво количество топлина за поддържане на температурата, газът ще изстине, а величината $(\partial U/\partial V)_T$ ще ни подскаже колко топлина трябва да добавим. Уравнението (45.7) изразява фундаменталната връзка между тези два ефекта. Именно това обещахме да намерим, когато се отправихме в търсене законите на термодинамиката. Не познавайки вътрешния строеж на газа и вярвайки само, че не е по силите ни да построим вечен двигател от втори род, ние съумяхме да изведем съотношението между количеството топлина, необходимо за поддържането на постоянна температура при разширението на газа, и изменението на налягането на газа при нагряване.

След като получихме от газа всичко, което ни е необходимо, да разгледаме друг случай — гумата. Когато разтегляхме ластик, открихме, че неговата температура нарастваше, а нагряването го заставяше да се свива. Кое уравнение, в случая за гумата дава същия резултат, какъвто уравнението (45.3) за газа? Отначало всичко върви както и по-рано: когато към гумата се подава топлина ΔQ, вътрешната енергия се изменя с ΔU и се произвежда някаква работа. Само че сега тази работа е равна на $-F\Delta L$ вместо на $P\Delta V$, където F е приложената към ластика сила, а L е дължината на ластика. Силата F зависи от температурата и дължината на ластика. Като заменим в (45.3) $P\Delta V$ с $-F\Delta L$, ще получим

$$\Delta U = \Delta Q + F\Delta L. \qquad (45.8)$$

Като сравним (45.3) с (45.8), ще се убедим, че уравнението за гумата се е получило веднага след замяната на едни букви с други. Ако заменим V с L, а P с $-F$, всички аргументи на цикъла на Карно ще се окажат приложими към гумата. Може веднага да се изведе, че топлината ΔQ, нужна, за да се разтегне с ΔL, се определя от уравнение, аналогично на (45.5): $\Delta Q = -T(\partial F/\partial T)_L \Delta L$. Това уравнение ни казва с колко ще се увеличи силата, ако дължината на ластика остава постоянна при нагряването. Трябва само да се узнае колко топлина е необходима за поддържане на постоянна температура при малко разтягане на лентата. И така ние виждаме, че и към гумата, и към газа са приложими едни и същи уравнения. Може даже да се напише: $\Delta U = \Delta Q + A\Delta B$, където A и B са най-различни величини: сила и дължина, налягане и обем и т. н. Ако ни интересува поведението на газа, трябва да се замени A и B с P и V.

Като пример да разгледаме разликата в електрическите потенциали или електродвижещото напрежение (е. д. н.) на батерията E и заряд ΔZ, преминал през батерията. Ние знаем, че работата, произведена с обратима електрическа батерия, например акумулатор, е равна на $E\Delta Z$. (Тъй като не включихме за разглеждане члена $P\Delta V$, ще се наложи да се изисква обемът да остава постоянен.) Да видим какво ще каже за работата на батерията термодинамиката. Ако заменим P с E, а V със Z, вместо уравнението (45.6) ще се получи

$$\frac{\Delta U}{\Delta Z}=T\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_Z-E. \tag{45.9}$$

Това уравнение ни показва, че при пътешествията на заряда ΔZ по батерията се изменя вътрешната енергия U. Но защо $\Delta U/\Delta Z$ да не е просто е. д. н. на батерията E? Работата е в това, че в реални условия движението на зарядите вътре в батерията предизвиква отделяне на топлина. Вътрешната енергия на батерията се изменя най-напред за сметка на работата, произведена от батерията във външната верига, и второ, за сметка на нагряването на батерията. Интересно е, че втората част на изменението на вътрешната енергия отново може да се пресметне, като се следи как се изменя е. д. н. на батерията при изменение на температурата. Впрочем, когато зарядите текат по батерията, там произлизат химически реакции и уравнението (45.9) показва един отличен начин за измерване на необходимата за реакцията енергия. За това ни е необходимо само да направим батерия, работеща чрез тази реакция, и отначало просто да измерим е. д. н., а след това да проследим как се изменя тя с температурата, ако нито един заряд не се изпуска извън батерията.

Ние предположихме, че обемът на батерията може да се поддържа постоянен, само затова си позволихме да пренебрегнем члена $P\Delta V$, и да смятаме, че работата на батерията е равна на $E\Delta Z$. Но се оказва, че да се поддържа обемът постоянен е много трудно технически. Много по-лесно е да се държи батерията при постоянно атмосферно налягане. Ето защо химиците не обичат току-що написаното от нас уравнение, а предпочитат уравнения, които биха били свързани с постоянно *налягане*. Ние от самото начало на тази глава приехме за независими променливи V и T. На химиците повече им се нравят P и T, затова да видим сега как ще се преобразуват нашите изводи при прехода към химическата система от променливи. Постарайте се при това да не сбъркате, защото ние някак си изведнаж сменихме детайлите и преминахме от T и V към T и P.

Да започнем с (45.3), където $\Delta U=\Delta Q-P\Delta V$. Членът $P\Delta V$ може да се замести с $E\Delta Z$ или даже с $A\Delta B$. Ако ни се удадеше някак си да заменим $P\Delta V$ с $V\Delta P$, тогава V и P биха си разменили ролите и химиците биха останали доволни. Този, който е съобразителен, ще забележи, че диференциалът на произведението PV е равен на $d(PV)=PdV+VdP$. Като прибави това равенство към (45.3), той ще получи

$$\begin{gathered}\Delta(PV)=P\Delta V+V\Delta P\\ \Delta U=\Delta Q-P\Delta V\\ \hline \Delta(U+PV)=\Delta Q+V\Delta P\end{gathered}.$$

За да могат всички наши следващи изводи да приличат на изводите от уравнението (45.3), ще считаме $U+PV$ като някаква нова функция, ще я наречем *енталпия* H и ще я напишем в такъв вид: $\Delta H=\Delta Q+V\Delta P$.

Ето сега ние сме готови да преведем всички наши разсъждения на химически език, само трябва да се помни, че $U\to H$, $P\to -V$, $V\to P$. Химиците смятат, че цялата термодинамика се съдържа не в уравнението (45.7), а в уравнението

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T=-T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P+V.$$

Като изяснихме как става преходът към химическите променливи T и P, да се върнем към нашите стари променливи. Сега, пък и до края на главата, наши независими променливи ще бъдат T и V.

Нека приложим получените резултати към някои физически процеси. Отначало да разгледаме идеален газ. От кинетичната теория е известно, че вътрешната енергия на газа зависи само от характера на движението на молекулите и от техния брой. Вътрешната енергия зависи само от T, а към V е безразлична. Ако изменяме V при постоянно T, то U не ще се измени. Значи $(\partial U/\partial V)_T=0$ и уравнението (45.7) ни показва, че за идеалния газ

$$T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V-P=0\,. \tag{45.10}$$

Уравнението (45.10) е диференциално уравнение и то ще ни разкаже нещичко за P. Ние ще се разправим с частните производни така: тъй като частната производна е пресметната при постоянно V, тя може да се замени с обикновена, само трябва да се помни, че всичко това се върши „при постоянен V“. Уравнението (45.10) тогава приема вида

$$T\frac{\Delta P}{\Delta T}-P=0 \text{ (при постоянен } V)\,. \tag{45.11}$$

Интегрирането не представлява трудност за нас и ще получим

$$\begin{aligned} \ln P&=\ln T+const \text{ (при постоянен } V),\\ P&=const\times T \text{ (при постоянен } V). \end{aligned} \tag{45.12}$$

Ние знаем, че налягането на идеалния газ е равно на

$$P=\frac{RT}{V}\,. \tag{45.13}$$

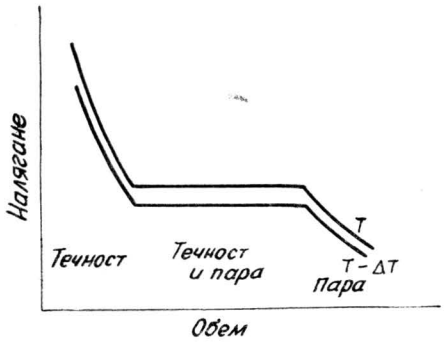
Това съотношение е съвместимо с (45.12), защото R и V са постоянни. Но защо тогава се мъчихме да решаваме тези уравнения? Нали резултатът беше вече известен. Защото използувахме *две независими определения на температурата!* Веднаж предположихме, че кинетичната енергия на молекулите е пропорционална на температурата. Това предположение ни доведе до температурната скала, която нарекохме скала на идеалния газ. Температурата T в уравнението (45.13) се отчита по газовата скала. Ние нарекохме отчитаната по газовата скала температура *кинетична* температура. След това определихме температурата по друг начин и това определение въобще не се нуждаеше от никакво вещество. Изхождайки от втория закон, ние определихме това, което може да се нарече „абсолютна термодинамична температура“ T—тя се появява в уравнението (45.12). Тук ние само доказахме, че налягането на идеалния газ (за нас идеалният газ е нещо, чиято вътрешна енергия не зависи от обема) е пропорционално на абсолютната термодинамична температура. Освен това ние знаем, че налягането е пропорционално на температурата, измерена по газовата скала. По такъв начин може да се заключи, че кинетичната температура е пропорционална на „абсолютната термодинамична температура“. Това, разбира се, означава, че ако бяхме благоразумни, то показанията на двете скали биха могли да живеят винаги в съгласие. В края на краищата тези скали могат да се *изберат* така, че да съвпаднат — коефициентът на пропорционалност може да бъде положен за равен на единица. Твърде дълго хората си създаваха сами трудности, но на края превърнаха двете скали в една.

3. Уравнение на Клаузиус—Клапейрон

Изпарението на течността — ето още една област, в която могат да се приложат нашите резултати. Да предположим, че ние придвижваме бутало в цилиндър с някакво вещество. Естествено е да си зададем въпроса: как зависи налягането от обема, ако температурата остава постоянна? Казано по друг начин, ние ис-

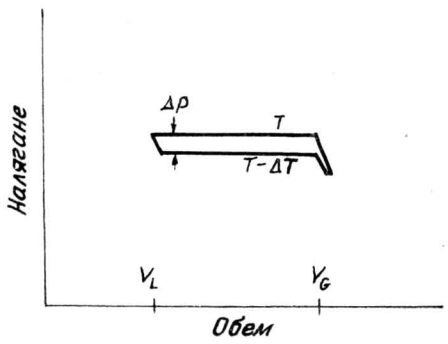
каме да начертаем изотермичните линии на P-V диаграмата. Веществото в цилиндъра далеч не е идеалният газ, с който имахме работа. Сега това е течност или пара, а може би и двете заедно. Ако свием веществото достатъчно силно, то ще започне да се превръща в течност. Ако продължаваме да увеличаваме налягането, обемът ще се измени твърде малко, а нашите изотерми при намаляването на обема ще тръгнат рязко нагоре, както това е показано в лявата част на фиг. 45.3.

Ако увеличаваме обема, като изваждаме буталото от цилиндъра, налягането ще пада, докато стигнем до точката на кипене на течността и в цилиндъра се появи пара. По-нататъшното изтегляне на буталото ще доведе до по-силно изпарение. Когато цилиндърът частично е запълнен с пара и частично с течност, между тях се установява равновесие — течността се изпарява — парата се кондензира и скоростите на тези процеси са равни. Ако на парата се предостави по-голям обем, то за да се запази по-раншното налягане, ще е нужна повече пара. Затова, въпреки че течността постоянно се изпарява, налягането остава постоянно. По плоската част на кривата на фиг. 45.3 налягането не се изменя, това налягане се нарича *налягане на парата при температура* T. Ако обемът продължава да се увеличава, ще настъпи момент, когато запасите от течност ще пресъхнат. При такова положение налягането пада при увеличение на обема, нали сега имаме работа с обикновен газ. Това е изобразено на дясната част на P—V диаграмата. Долната крива на фиг. 45.3 е изотермичната крива при по-ниската температура $T-\Delta T$. Налягането на течността в този случай е малко по-малко, защото с нарастването на температурата течностите се разширяват (не всички течности, около точката на замръзването водата постъпва обратно), а налягането на парата при намаление на температурата, разбира се, пада.



Фиг. 45.3. Изотерми на кондензираща се пара

Парата се свива в цилиндъра. Ляво — цялото вещество се е превърнало в течност; дясно — цялата течност се е изпарила; в средата — в цилиндъра има и пара и течност



Фиг. 45.4. P—V диаграма за цикъла на Карно с кондензираща се в цилиндъра пара

Ляво — цялото вещество преминава в течност. За да се изпари тя напълно при температура T, трябва да се добави топлина L. При падане на температурата от T до ΔT парата се разширява адиабатно

От двете изотерми може отново да се построи цикъл, като се съединят краищата на техните плоски участъци (да кажем с адиабати), както това е показано на фиг. 45.4. Малкият зъбец в долния десен ъгъл на фигурата не е съществен и ние просто ще го забравим. Нека използуваме аргументите на Карно, които показват как е свързана топлината, подадена на течността за превръщането ѝ в пара с работата, извършена от веществото при описването на цикъла. Нека L да е топлината, необходима за изпаряването на течността в цилиндъра. Да си спомним как разсъждавахме при извеждането на уравнението (45.5) и веднага ще кажем, че $L(\Delta T/T)$ е равна на работата, извършена от веществото Както и по-рано, работата на веществата е равна на площта, ограничена от цикъла. Тази площ е приблизително равна на $\Delta P(V_G - V_L)$, където ΔP е разликата на наляганията на парата при температури T и $T-\Delta T$, V_G е обемът на газа, а V_L е обемът на течността. Двата обема трябва да се измерват при налягане, равно на налягането на парата. Като се сравнят тези два израза за работата, получаваме $L(\Delta T/T)=\Delta P(V_G-V_L)$, или

$$\frac{L}{T(V_G-V_L)}=\frac{\partial P_{\text{пара}}}{\partial T}. \qquad (45.14)$$

Уравнението (45.14) свързва скоростта на изменението на налягането на парата с температурата и количеството топлина, необходими за изпарението на течността. Въпреки че го е извел Карно, то се нарича уравнение на Клаузиус—Клапейрон.

Да сравним уравнението (45.14) с резултата, който следва от кинетичната теория. Обикновено V_G е много по-голям от V_L, затова $V_G-V_L\approx V_G=RT/P$ на мол. Ако предположим още, че L е независеща от температурата константа (въпреки че това не е много добро приближение), ще получим $\partial P/\partial T=L/(RT^2P)$. Ето решението на това диференциално уравнение:

$$P=const\,.\,e^{-L/RT}. \qquad (45.15)$$

Трябва да се изясни в какви отношения се намира този израз с получената по-рано с помощта на кинетичната теория зависи-

мост на налягането от температурата. Кинетичната теория казва, макар и много неопределено, че броят на молекулите пара над течността е равен например на

$$n=\left(\frac{1}{V_A}\right)e^{-(U_G-U_L)/RT}, \qquad (45.16)$$

където U_G-U_L е разликата на отнесените към един мол вътрешни енергии на газа и течността. Термодинамичното уравнение (45.15) и кинетичното уравнение (45.16) са твърде сходни, поради това че налягането е равно на nkT, но все пак това са различни уравнения. Обаче те могат да бъдат направени еднакви, ако заменим старото предположение, че $L=const$ с това, че $L-U_G=const$. Ако предположим, че $L-U_G$ е независеща от температурата константа, то съображенията, от които по-рано следваше (45.15), сега ще ни доведат до уравнението (45.16).

Това сравнение показва преимуществата и недостатъците на термодинамиката в сравнение с кинетичната теория. Преди всичко термодинамически полученото уравнение (45.14) е точно съотношение, а (45.16) — всичко на всичко приближение. Нали ни се наложи да предположим, че U е приблизително постоянно и че нашият модел е верен. Второ, на нас може би никога няма да ни се удаде докрай да разберем как газът преминава в течност и все пак уравнението (45.14) е правилно, а (45.16) — само приближение. Трето, въпреки че говорихме за превръщането на газа в течност, нашите аргументи са верни за всеки преход от едно състояние в друго. Например преходът твърдо тяло-течност се описва от криви, твърде подобни на кривите на фиг. 45.3 и 45.4. Като въведем скритата топлина на топенето M/мол, ще получим формула, аналогична на уравнението (45.14): $(\partial P_{\text{топ}}/\partial T)_V=M/[T(V_L-V_S)]$. Ние можем да не знаем нищо за кинетичната теория на процеса на топенето и въпреки това да получим правилно уравнение. Ако се запознаем обаче с кинетичната теория, веднага ще получим голямо преимущество. Уравнението (45.14) е само диференциално уравнение и ние още съвсем не умеем да намираме интеграционните константи. В кинетичната теория могат да се пресметнат и тези константи, само трябва да се измисли добър модел, който да описва напълно явлението. И така във всяка теория има и добро, и лошо. Ако нашите познания са слаби, а картината сложна, термодинамичните съотношения се оказват най-мощното средство. Когато картината се упрости дотолкова, че може да се анализира теоретично, по-добре е отначало да опитаме да изстискаме от този анализ колкото се може повече.

Още един пример: излъчване на черното тяло. Ние вече говорихме за съда, съдържащ излъчване и нищо повече, и вече разсъждавахме за равновесието между излъчването и осцилатора. Ние изяснихме също, че когато фотоните се удрят в стената на съда, те създават налягане P. Изведохме формулата $PV=U/3$, където U е пълната енергия на фотоните, а V — обемът на сандъка. Ако заместим $U=3PV$ в основното уравнение (45.7), ще открием, че

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=3P=T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V-P. \qquad (45.17)$$

Доколкото обемът на съда не се изменя, може да се замени $(\partial P/\partial T)_V$ с dP/dT и да се получи обикновено диференциално уравнение. То се интегрира лесно и дава $\ln P=4\ln T+const$, или $P=const\,.\,T^4$. Налягането на излъчването се изменя както четвъртата степен на температурата, затова включената в излъчването енергия $U/V=P/3$ също се изменя както T^4. Обикновено се пише така: $U/V=(4\sigma/c)T^4$, където c е скоростта на светлината, а σ — друга константа. Термодинамиката сама по себе си нищо няма да ни каже за тази константа. Това е хубав пример и за нейното могъщество, и за нейното безсилие. Да се знае, че U/V се изменя като T^4 е вече голяма работа, но да узнае на какво именно е равно U/V при такава или друга температура може само спра-

вилата се с всички подробности пълна теория. Ние имаме теория на излъчването на черното тяло и сега ще изчислим σ.

Нека $I(\omega)d\omega$ да е разпределението на интензитета, т. е. потокът енергия през 1 m² за 1 s в интервала на честотите между ω и $\omega+d\omega$:

$$\text{Разпределението на плътността на енергията} = \frac{\text{Енергия}}{\text{Обем}} = \frac{I(\omega)\,d\omega}{c},$$

затова

$$\frac{U}{V} = \text{Пълната плътност на енергията}$$

$$= \int_{\omega=0}^{\infty} (\text{Плътността на енергията между } \omega \text{ и } \omega+d\omega),$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{I(\omega)d\omega}{c}.$$

Ние вече успяхме да узнаем, че

$$I(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^2(e^{\hbar\omega/kT}-1)}.$$

Като поставим израза за $I(\omega)$ в нашето уравнение за U/V, получаваме

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{\pi^2c^3}\int_0^{\infty} \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1}.$$

Ако се направи смяна на променливите $x=\hbar\omega/kT$, този израз приема вида

$$\frac{U}{V} = \frac{(kT)^4}{\hbar^3\pi^2c^3}\int_0^{\infty} \frac{x^3dx}{e^x-1}.$$

Този интеграл е чисто и просто някакво число и ние можем приблизително да го намерим. За целта трябва само да се начертае подинтегралната крива и да се пресметне площта под нея. Тя приблизително е равна на 6,5. Математиците могат да пресметнат нашия интеграл точно, той е равен на $\pi^4/15$[1]. Като сравним този израз със записания по-рано $U/V=(4\sigma/c)T^4$, ще намерим σ:

$$\sigma = \frac{k^4\pi^2}{60\hbar^3c^2} = 5{,}67.10^{-8} \quad \frac{\text{ват}}{(\text{метър})^2.(\text{градус})^4}.$$

Много ли енергия ще изтече за 1 s през дупка с единична площ, направена в стената на съда? За да намерим потока на енергията, да умножим плътността на енергията U/V по c. Трябва още да умножим и по 1/4. Тази четвърт се намесва по следните причини. Първо, 1/2 се появява, поради това че ние пресмятаме току-що излетялата *навън* енергия и второ, понеже потокът попада в дупката не под прав ъгъл, то му е по-трудно да се измъкне. Това намаление на ефективността се отчита чрез умножаване на косинуса на ъгъла с нормалата. Средната стойност на косинуса е 1/2. Сега е ясно защо писахме $U/V=(4\sigma/c)\,T^4$; така е по-просто да се изрази потокът на енергията през малък отвор. Ако отнесем потока към единица площ, той е равен просто на σT^4.

---

[1] Тъй като $(e^{-x}-1)^{-1}=e^{-x}+e^{-2x}+\ldots$, то интегралът е равен на

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-nx}x^3dx.$$

Но $\int_0^{\infty} e^{-nx}dx = 1/n$, затова като диференцираме три пъти по n, получаваме $\int_0^{\infty} e^{-nx}x^3dx = 6/n^4$, така че интегралът е равен на $6(1+1/16+1/81+\ldots)$ и няколкото първи члена на реда дават вече добро приближение. В глава 50 ние ще можем да покажем, че сумата на обратните четвърти степени на целите числа е равна на $\pi^5/90$.

46

Острозъбо колело и палец

1. Как действува острозъбото колело

В тази глава ние ще поговорим за острозъбото колело и палеца — едно много просто устройство, което позволява на оста да се върти само в една посока. Възможността да се получи едностранно въртене заслужава дълбок и щателен анализ, от него ще произлезат интересни заключения.

Въпросите, които ще обсъждаме, възникват при опит да се намери просто обяснение от молекулярна или кинетична гледна точка, затова че съществува предел на работата, която може да бъде получена от топлинна машина. Вярно е, че вече знаем същността на доказателството на Карно, но би било приятно да се намери и неговото елементарно обяснение — това, което би показало какво става всъщност физически. Разбира се, съществуват и сложни, почиващи на законите на Нютон математически доказателства за ограничеността на количеството на работата, която може да се получи, когато топлината протича от едно място към друго, но е много сложно да се направят тези доказателства елементарни. Казано накратко, ние не ги разбираме, въпреки че можем да проследим изводите.

В доказателството на Карно това обстоятелство, че при прехода от една температура към друга не може да се извлече неограничено количество топлина, следва от друга аксиома: ако всичко става при една температура, топлината не може да бъде превърната в работа посредством цикличен процес. Затова първата ни работа е да се опитаме да разберем, дори само чрез един елементарен пример, защо е вярно това по-просто твърдение.

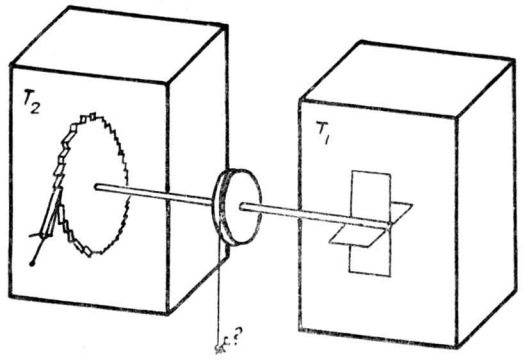
Да се опитаме да измислим такова устройство, че да се нарушава вторият закон на термодинамиката, т. е. да получаваме от топлинния резервоар работа, а да няма температурна разлика. Нека в съда да се намира газ при известна температура, а вътре да има вртележка (фиг. 46.1), при това ще смятаме, че $T_1 = T_2 = T$. От ударите на молекулите на газа вртележката ще се поклаща. На нас ни остава само да прибавим към другия край на оста колело, което може да се върти само в една посока — острозъбо колелце с палец. Палецът ще пресече опитите на вртележката да се завърта в едната посока, а ще разреши завъртането в другата. Колелцето бавно ще се завърта и може би ще ни се удаде да закачим на нишка една бълхичка, да я завържем за барабан, поставен на оста, и да повдигнем тази бълхичка.

Възможно ли е това? Съгласно хипотезата на Карно — не. Но на пръв поглед даже е много възможно (само ако сме разсъждавали вярно). Очевидно трябва да се погледне по-внимателно. И действително, ако се замислиш за работата на острозъбото колело с палеца, не всичко се оказва така просто.

Първо, въпреки че нашето идеализирано острозъбо колело е предълно просто, имаме още и палец, а към него трябва да има и пружинка. Прескачайки поредния зъб, палецът трябва да се върне в предишното положение, така че без пружинка не можем да минем.

Много е съществено и друго свойство на острозъбото колело и палеца (то не може да се покаже на схемата). Да предположим, че частите на нашето устройство са идеално еластични. Когато палецът прехвърли края на някой зъб и пружинката влезе в действие, той ще се удари в колелцето и ще започне да подскача. Ако в това време произлезе поредната флуктуация, вртележката може да се обърне и на другата страна, тъй като зъбът може да се

1. Как действува острозъбото колело
2. Острозъбото колело като машина
3. Обратимост в механиката
4. Необратимост
5. Порядък и ентропия



Фиг. 46.1. Машина, съставена от острозъбо колело и палец

плъзне под палеца, когато той е вдигнат. Значи за необратимостта на вртележката е важно да има устройство, способно да умъртвява подскачанията на палеца. Но при това затихване енергията на палеца ще премине към острозъбото колело и ще вземе вида на топлинна енергия. Излиза, че по време на въртенето острозъбото колело ще се нагрява все по-силно. Нека за простота газът около него да отнася част от топлината. Във всеки случай заедно с острозъбото колело ще започне да се нагрява и самият газ. И какво, така ще продължава вечно? Не! Палецът и острозъбото колело, имайки някаква температура T, са подложени също и на броуновото движение. Това значи, че от време на време палецът ще се повдига случайно и ще преминава покрай зъба точно в този момент, когато броуновото движение на вртележката ще се опитва да я завърти назад. И колкото е по-топъл предметът, толкова по-често става това.

Ето защо нашият механизъм няма да се намира във вечно движение. Понякога от ударите по крилата на вртележката палецът се повдига и тя се завъртва. Но понякога, когато вртележката се стреми да се върне назад, палецът се оказва вече повдигнат (поради флуктуациите на движенията на този край на оста) и острозъбото колело действително се завъртва обратно. В резултат — чиста нула. И съвсем не е трудно да се покаже, че когато температурата в двата съда е еднаква, средно взето въртене няма да има. Разбира се, ще има много завъртвания в едната или другата посока, но това, което ние желаем — едностранно въртене, — няма да има.

Да разгледаме причината за това. За да се повдигне палецът до върха на зъба, трябва да се извърши работа против натягането на пружинката. Ще наречем тази работа ε. Нека θ да е ъгълът между зъбците. Шансът системата да натрупа достатъчно енергия ε, за да повдигне палеца до края на зъба, е $\exp(-\varepsilon/kT)$. Но вероятността палецът да се повдигне случайно също е $\exp(-\varepsilon/kT)$ Значи, колкото пъти палецът се повдигне случайно, позволявайки на острозъбото колело свободно да се завърти назад, толкова пъти енергията ще се окаже достатъчна, за да се завърти вртележката напред при притиснат палец. Ще се получи равновесие, а не въртене.

2. Острозъбото колело като машина

Да преминем по-нататък. Ще разгледаме друг пример: температурата на вртележката е T_1, а температурата на острозъбото колело — T_2. T_2 е по-малка от T_1. Тъй като острозъбото колело е студено и флуктуациите на палеца са сравнително редки, на него сега му е много трудно да добие енергия ε. Но поради това че вртележката е топла, тя често получава енергията ε и нашето устройство ще започне, както е и замислено, да се върти в една посока.

Да видим сега ще ни се удаде ли да повдигаме товари. Да привържем към барабана нишка и да окачим на нея товарче, подобно на нашата бълхичка. Нека L да бъде моментът, създаден от товара. Ако той не е много голям, нашата машина ще го повдигне, тъй като поради броуновите флуктуации завъртането в едната страна е по-вероятно, отколкото в другата. Да пресметнем какво тегло можем да повдигнем, колко бързо ще се повдига то и т. н.

Отначало да разгледаме движението напред, за което е и предназначено острозъбото колело. Колко енергия трябва да се вземе от вртележката, за да се придвижим дори на една крачка? За да се повдигне палецът, е необходима енергия ε. За да се завърти острозъбото колело на ъгъл θ срещу момента L, е необходима енергия $L\theta$. Трябва само да се вземе енергия $\varepsilon+L\theta$. Вероятността тя да бъде получена е равна на $\exp[-(\varepsilon+L\theta)/kT_1]$. В действителност работата не е само в тази енергия, а в това, колко пъти в секунда тя ще се окаже на наше разположение. Вероятността

в секунда е само пропорционална на $\exp[-(\varepsilon+L\theta)/kT_1]$. Да означим коефициента на пропорционалност с $1/\tau$ (той отпада в края на извеждането). След всяка стъпка напред извършената работа над товара е $L\theta$. Енергията, взета от вертележката, е равна на $\varepsilon+L\theta$. С енергията ε се намотава нишката, а след това следва щрак, щрак, клингенклангенклунген . . . и енергията преминава в топлина. Цялата заета енергия отива за това да повдигне бълхичката и палеца, който след това пада и отдава топлината на другата страна (на острозъбото колело).

Да разгледаме сега случая на обратното въртене. Какво става тук? За да може острозъбото колело да се завърти назад, трябва да се снабди палеца с такава енергия, че да има сили да се повдигне и да пропусне острозъбото колело. Тази енергия, както и по-рано, е равна на ε. Вероятността (пресметната за секунда) палецът да се издигне на необходимата височина сега е равна на $(1/\tau)\exp(-\varepsilon/kT_2)$. (Коефициентът на пропорционалност е същият, но в показателя стои kT_2, защото температурата е друга.) Когато се случи това, т. е. острозъбото колело се промъква назад, работата вече се освобождава (освободил се е един зъб, а заедно с него и работата $L\theta$). Енергията, взета от системата на острозъбо колело — палец, е ε, а енергията, предадена на газа на другия край на оста при температура T_1, е $L\theta+\varepsilon$. Това също е лесно да се разбере. Да предположим, че палецът се е повдигнал от само себе си за сметка на флуктуацията. Когато той падне и пружинката го удари в зъба, възниква сила, която се стреми да обърне назад острозъбото колело, нали плоскостта, в която се е ударил палецът, е наклонена. Тази сила произвежда работа. Същото може да се каже и за теглото на товарчето. Двете сили се сумират и цялата бавно освобождавана енергия се появява във вид на топлина от тази страна, където е вертележката. (Разбира се, така трябва и да бъде по закона за запазването на енергията, но ние сме длъжни внимателно да обмислим всичко изцяло!)

Забелязваме, че всички тези енергии са точно същите, както и по-рано, само преместени. И така в зависимост от това, кое от отношенията е по-голямо, товарчето или бавно се повдига, или бавно се спуска. Разбира се, то непрестанно се движи насам-натам, поклаща се, но ние говорим за усредненото поведение.

Ще предположим, че при определено тегло вероятностите ще се окажат равни. Тогава ще окачим към нишката безкрайно леко товарче. Целият товар бавно ще тръгне надолу, машината ще извършва работа, енергията ще се изземва от острозъбото колело и ще се препраща на вертележката. Ако махнем част от товара, неравновесието ще се пренесе на другата страна. Теглото ще се повдига, топлината ще се отнема от вертележката и ще се предава на зъбното колело. Ние попадаме в условията на обратимия цикъл на Карно благодарение на това, че товарът е избран именно така, че двете вероятности да бъдат равни. Това условие е следното: $(\varepsilon+L\theta)/T_1=\varepsilon/T_2$. Нека машината бавно тегли товара нагоре. Енергията Q_1 се отнема от крилата на вертележката, а енергията Q_2 се доставя на зъбното колело и тези енергии се намират в отношение $(\varepsilon+L\theta)/\varepsilon$. Когато спускаме товара, отново $Q_1/Q_2=(\varepsilon+L\theta)/\varepsilon$.

И така (табл. 46.1) имаме

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{T_1}{T_2}\ .$$

По-нататък получената работа се отнася към енергията, взета от вертележката, както $L\theta$ към $L\theta+\varepsilon$, т. е. както $(T_1-T_2)/T_1$. Ние виждаме, че нашето устройство, като работи обратимо, по никакъв начин не може да изсмуче повече работа, отколкото позволява това отношение. Това е изводът, който очаквахме въз основа на доказателствата на Карно, а едновременно и главният резултат на тази лекция.

Обаче ние можем да използуваме нашето устройство, за да разберем още някои явления, даже неравновесни, лежащи извън областта на приложение на термодинамиката.

Таблица 46.1

Оперативна справка за действията на остроъбото колело и палеца

Напред: Необходима енергия $\varepsilon = L\theta$ (от въртележката); вероятността за това е равна на

$$\frac{1}{\tau} \exp\left[-(L\theta+\varepsilon)/kT_1\right]$$

От въртележката е отнета $L\theta+\varepsilon$
Ще се извърши работа $L\theta$
Към остроъбото колело ще премине ε

Назад: Необходимата енергия ε (на палеца); вероятността за това е равна на

$$\frac{1}{\tau} \exp\left(-\varepsilon/kT_2\right)$$

От остроъбото колело е отнета ε
Освободила се е работа $L\theta$
На въртележката ще се отдаде $\varepsilon+L\theta$

} същите като по-горе, но с обратен знак

Ако системата е обратима, вероятностите са равни, т. е.

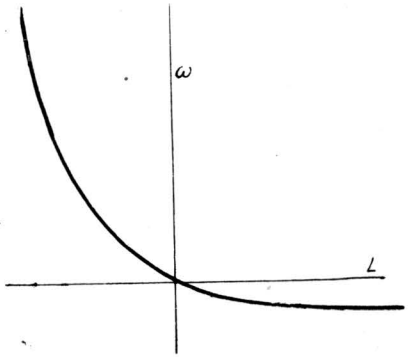
$$\frac{\varepsilon+L\theta}{T_1} = \frac{\varepsilon}{T_2}$$

$$\frac{\text{Топлината към остроъбото колело}}{\text{Топлината от въртележката}} = \frac{\varepsilon}{L\theta+\varepsilon}$$

от тук $\quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$.

Нека сега да сметнем ***колко бързо*** ще се върти нашият едностранен механизъм, ако всички негови части са еднакво нагрети, а към барабана е окачено товарче. Ако подръпнем твърде силно, могат да произлязат всякакви неприятности. Палецът ще се плъзне по остроъбото колело, пружинката ще се скъса и още нещо ще се случи. Но да предположим, че теглим така внимателно, че всичко работи гладко. При тези условия е верен горният анализ на вероятностите за превъртането на остроъбото колело напред или назад и трябва само да се отчете равенството на температурите. С всеки скок оста се завърта на ъгъл θ, така че ъгловата скорост е равна на θ, умножен по вероятността за един от тези скокове в секунда. Оста се завърта напред с вероятност $(1/\tau)\exp\left[-(\varepsilon+L\theta)/kT\right]$, а назад — с $(1/\tau)\exp\left(-\varepsilon/kT\right)$. Ъгловата скорост е равна на

$$\omega = \frac{\theta}{\tau}\left[e^{-(\varepsilon+L\theta)/kT} - e^{-\varepsilon/kT}\right] = \frac{\theta}{\tau} e^{-\varepsilon/kT}\left(e^{-L\theta/kT} - 1\right). \qquad (46.1)$$



Фиг. 46.2. Ъгловата скорост на остроъбото колело като функция на момента на въртене

Графиката на зависимостта на ω от L е показана на фиг. 46.2. Ще видим, че когато L е положително, резултатът е един, а когато е отрицателно — съвсем друг. Ако L расте, като остава положително, което става, когато искаме да завъртим остроъбото колело назад, скоростта на въртене назад е близка до постоянна величина. А когато L стане отрицателно, ω наистина се „стреми напред", тъй като e има огромен степенен показател. По такъв начин ъгловата скорост, получена от действието на разни сили, е твърде несиметрична. Да се тръгне на една страна е лесно — ние получаваме голяма ъглова скорост от малка сила. Вървейки в обратна посока, ние можем да положим много усилия, а все пак оста ще се движи едва-едва.

Такова положение възниква в *електрическия изправител*. Вместо сила там има електрично поле, а вместо ъглова скорост — сила на тока. При изправителя напрежението също не е пропорционално на съпротивлението — наблюдава се същата асиметричност. Анализът, извършен от нас за механичния изправител, става и за електрическия. Видът на получената по-горе формула

е типичен за зависимостта на проводителната способност на изправителя от напрежението.

Да махнем сега всички товарчета и да се обърнем към първоначалния механизъм. Ако T_2 беше по-малка от T_1, острозъбото колело щеше да се върти напред. Това ще позярва всеки. Но което е трудно да се повярва изведнаж — това е обратното. Ако T_2 е по-голяма от T_1, острозъбото колело се върти назад. Динамичното острозъбо колело с излишък от топлина в него се върти назад, защото палецът му отскача. Ако палецът се намира в някой момент на наклонена плоскост, той тика тази плоскост към страната на подема. И това става през *цялото време,* нали ако се случи палецът да се повдигне достатъчно високо, за да прескочи покрай зъба, той ще се окаже на нова наклонена плоскост. С други думи, топлото острозъбо колело и палец са идеално приспособени за въртене в страна, обратна на тази, в която първоначално им беше предписано да се въртят.

Колкото и остроумно да сме конструирали „едностранен" механизъм, при равенство на температурите той няма да пожелае да се върти по-често на едната страна, отколкото на другата. Когато го наблюдаваме, той може да се върти било насам, било натам, но при продължителна работа той няма къде да отиде. Този факт, че не отива никъде, е всъщност фундаментален, дълбок принцип — на него почива цялата термодинамика.

3. Обратимост в механиката

Какъв е този дълбок принцип на механиката, който твърди, че при постоянство на температурата и достатъчно продължителна работа нашето устройство няма да тръгне нито назад, нито напред? Очевидно ние сме получили фундаментално потвърждение, че не може да се измисли машина, която, като бъде оставена сама на себе си в течение на дълго време, би се обърнала по-охотно на някоя определена страна. Да се опитаме да изясним как се извежда това от законите на механиката.

Законите на механиката действуват примерно така: силата е равна на масата по ускорението. Силата, действуваща на една частица, е сложна функция на положението на всички подобни частици. Случва се, че силите зависят и от скоростта, например при магнетизма, но не за тях става дума сега. Да вземем прост случай, да кажем притеглянето, когато силите се определят само от разположението на частиците. Да предположим, че сме решили нашата система уравнения и сме получили за всяка частица определена траектория $x(t)$. За много сложни системи и решенията са много сложни. С течение на времето е възможна появата на най-невероятни конфигурации. Ако измислим някакво, каквото ни хрумне, разположение на частиците и търпеливо почакаме, то това разположение непременно ще настъпи. Като следим решението в течение на дълго време, ние ще видим, че то като че ли опитва всичко, което е възможно. В най-простите устройства това не е задължително, но в повече или по-малко сложните системи с голям брой атоми става такова нещо.

Но решенията са способни и на повече. Решавайки уравненията на движението, можем да получим някаква функция, да кажем $t+t^2+t^3$. Ние твърдим, че едно друго решение ще бъде $-t+t^2-t^3$. С други думи, ако навсякъде в решението поставим $-t$ вместо t, ще получим още едно решение на същото уравнение. Това ще стане, защото при замяната на t с $-t$ в първоначалното диференциално уравнение нищо няма да се промени — в него присъствуват само вторите производни по времето. Значи, ако се наблюдава някакво движение, възможно е и точно противоположното движение. За наше учудване може да се окаже, че когато следим движението достатъчно дълго, то се извършва временно в едната посока и временно — в обратната. Едната посока с нищо не е по-привлекателна от другата. Затова е невъз-

можно да се направи машина, за която след дълга работа да се окаже, че едната посока е по-вероятна, отколкото другата, само ако машината е достатъчно сложна.

Наистина може да се изобрети машина, при която явно това твърдение не е вярно. Да вземем например колело, да го завъртим в празно пространство и то завинаги ще започне да се върти в едната посока. Затова има някои условия, като запазването на момента на въртене, поради които нашите разсъждения се нарушават. Но това означава само, че нашите доказателства трябва да се направят по-акуратно. Трябва например да се отчете, че моментът на въртенето се отнема от стените или от нещо друго така, че специалните закони за запазването престават да действуват. Тогава, ако системата е достатъчно сложна, нашето доказателство важи отново. То е основано на обратимостта на законите на механиката.

Отдавайки дължимото на историята, ние бихме желали да споменем устройството, изобретено от Максвел, който пръв е разработил динамичната теория на газовете. Той нарисувал такава картина. Нека да имаме два съда с газ при една и съща температура. Между съдовете се намира малък отвор. До него стои малко дяволче (разбира се, това може да бъде и уред). На отворчето има вратичка и дяволчето може да я отваря и затваря. То следи молекулите, долитащи отляво. Щом зебележи бърза молекула, то отваря вратичката. Види ли бавна — заключва вратичката. Може да го направим дяволче с висока квалификация, като му присадим на врата още един чифт очи, за да може да постъпва обратно с молекулите от другия съд — да пропуща наляво бавните, а бързите да не пропуща. Скоро левият съд ще изстине, а десният ще се нагрее. Пита се ще бъдат ли нарушени идеите на термодинамиката от съществуването на такова дяволче?

Оказва се, че ако дяволчето е с краен размер, самото то така ще се нагрее, че нищо няма да вижда. Като едно най-просто дяволче ще се яви например вратичка с пружинка. На бързата молекула ще ѝ стигнат силите, за да отвори вратичката и да прескочи, а на бавната — няма да ѝ стигнат и тя ще отскочи. Но това е отново познатата ни система остроъбо колело — палец, само че в друг вид. В края на краищата механизмът просто ще се нагрее. Дяволчето не може да не се нагрее, ако неговата топлоемност не е безкрайна. Във всеки случай в него има краен брой лостчета и колелца, така че то няма да може да се освободи от излишъка на топлина, който придобива, като наблюдава молекулите. Скоро то така ще започне да трепери от броуновото движение, че няма да може да каже що за молекули са това, приближават ли се, отдалечават ли се, с една дума, няма да работи.

4. Необратимост

Всички ли закони на физиката са обратими? Разбира се, не. Опитайте например от пържено яйце да направите пак сурово. Или пуснете филм в обратна посока — публиката веднага ще започне да се смее. Необратимостта — това е най-ярката черта на всички събития.

Откъде пък се появява тя? Нали я няма в законите на Нютон. Ако смятаме, че всяко явление може да бъде в крайна сметка обяснено със законите на физиката и ако също се окаже, че всички уравнения притежават фантастичното свойство да дават при $t \to -t$ друго решение, нали тогава всяко явление ще бъде обратимо. Но как се получава така, че в природата, в явленията от голям мащаб всичко е необратимо? Значи очевидно има някакви закони, някакви неизвестни на нас, но важни уравнения, може би в електричеството, а може би в неутрината физика, за които вече е *съществено* накъде тече времето.

Да разгледаме сега този въпрос. Един закон от този род вече знаем — той твърди, че ентропията само нараства. Когато едно

тяло е топло, а друго студено, топлината преминава от топлото към студеното. Това твърдение би ни послужило. Но би било добре да разберем и този закон от гледна точка на механиката. Вече ни се удаде да получим при помощта на чисто механични съображения всички следствия от постулата, че топлината не може да протича в обратна посока. Това ни помогна да разберем втория закон. Значи ние сме способни да получим необратимостта от обратимите уравнения. Но там *само* законите от механиката ли използувахме? Да се занимаем с това по-дълбоко.

Тъй като стана дума за ентропията, ще ни се наложи да намерим нейното микроскопично описание. Когато казваме, че в нещо (например в газ) се съдържа определено количество енергия, можем да се обърнем към микроскопичната картина на това явление и да кажем, че всеки атом има определена енергия. Пълната енергия е сумата от енергиите на атомите. По същия начин всеки атом има своя определена ентропия. Като сумираме, ще получим пълната ентропия. Всъщност не всичко тук е така гладко, но все пак нека да погледнем какво ще се получи.

Като пример нека да пресметнем разликата в ентропията на газа при една температура, но при различни обеми. В гл. 44 за изменението на ентропията ние получихме

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}.$$

В нашия случай енергията на газа преди и след разширението е една и съща, защото температурата не се е изменяла. Значи, за да се попълни работата, извършена от газа, трябва да му се даде някакво количество топлина. За малки изменения на обема

$$dQ = PdV.$$

Като поставим това в dQ, ще получим както в гл. 44

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} P \frac{dV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{NkT}{V} \frac{dV}{T} = Nk \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

При удвояване на обема например ентропията се изменя с $Nk \ln 2$.

Да разгледаме сега друг интересен пример. Нека имаме цилиндър с преграда по средата. От едната страна — неон („черните“ молекули), а от другата — аргон („белите“ молекули). Да махнем преградата и позволим на газовете да се смесят. Как ще се измени ентропията? Може да си представим, че вместо преграда между газовете стои бутало с отвори, през които преминават белите молекули и не преминават черните, а има и друго бутало с обратните свойства. Когато буталото се премества към основата на цилиндъра, лесно се разбира, че за всеки газ задачата се свежда към току-що решената. По такъв начин ентропията се мени с $Nk \ln 2$, а това значи, че ентропията на една молекула нараства с $k \ln 2$. Цифрата *2* се появи от това, че се увеличи два пъти обемът, падащ се на една молекула. Странно обстоятелство. В него се прояви не свойство на самата молекула, а на *свободното място* около нея. Излиза, че ентропията се увеличава, когато температурата и енергията не се менят, а се изменя само разпределението на молекулите.

Ние знаем, че стига само да премахнем преградата и газовете ще се смесят след известно време поради стълкновенията, трептенията, ударите на молекулите и т. н. Трябва само да махнем преградата и някоя бяла молекула ще започне да се приближава към черна, а черна — към бяла, те ще преминат една покрай друга и т. н. Постепенно някои от белите молекули ще проникнат случайно в обема, зает от черните, а черните — в областта на белите. След известно време се получава смес. Изобщо това е необратимият процес на реалния свят, той трябва да доведе до нарастване на ентропията.

Пред нас е прост пример на необратим процес, състоящ се от напълно обратими събития. Всеки път, когато произлиза стълкновение между две молекули, те се разлетяват в определени по-

соки. Ако се пусне в обратна посока филм, на който са заснети сблъскванията, на екрана няма да се появи нищо неправилно. Нали единият вид сблъскване е толкова вероятен, колкото и другият. Затова смесването е напълно обратимо и въпреки това то е необратимо. На всеки е известно, че като се вземе отделно черно и отделно бяло и се смесят, след няколко минути получаваме смес. Да почакаме още няколко минути — те няма да се отделят — сместа ще си остане смес. Значи има необратимост, основана на обратими ситуации. Но сега ни е ясна и *причината.* Ние започнахме с разположение, което е *подредено* в известен смисъл. В хаоса на сблъкновенията то стана неподредено. *Преходът от подредено разположение към безпорядъчно се явява източник на необратимостта.*

Разбира се, ако ние бихме заснели на филм това движение и бихме го пуснали след това в обратна посока, бихме видели как постепенно ще се установи порядък. Някой може да възрази: „Но това е против всички закони на физиката!“ Тогава ние бихме извъртели филма още веднаж и бихме прегледали всяко сблъскване. Те всички биха били безупречни, всяко би се подчинявало на законите на физиката. Разбира се, цялата работа е в това, че скоростите на всяка молекула биха били в точност издържани, така че, ако се проследи техният път обратно, ние ще се върнем към началните условия. Но такова положение е малко вероятно. Ако имаме работа не със специално приготвен газ, а просто с бели и черни молекули, никога няма да ни се удаде да ги върнем назад.

5. Порядък и ентропия

И така ние трябва сега да помислим за това, какво да разбираме под безпорядък и какво — под порядък. Работата не е в това, че порядъкът е приятен, а безпорядъкът неприятен. Нашите смесени и несмесени газове се отличават по следното. Нека сме разделили пространството на малки обемни елементи. По колко начина може да се разместят белите и черните молекули в обемните елементи така, че белите да се окажат на едната страна, а черните — на противоположната? И по колко начина може да ги разположим без това ограничение? Ясно е, че във втория случай начините са много повече. Ние измерваме „безпорядъка“ в нещо по броя на начините, по които може да бъде представено съдържанието му само ако всичко би изглеждало отвън без изменение. *Логаритъмът на броя на начините — това е ентропията.* В цилиндъра с разделените газове броят на начините е по-малък и ентропията е по-малка, т. е. „по-малко безпорядък“.

Като се ползуваме от това техническо определение на „безпорядъка“, може да се разбере нашето твърдение. Първо, ентропията се измерва с „безпорядъка“. Второ, Вселената винаги преминава от „порядък“ към „безпорядък“, затова ентропията винаги расте. Порядъкът не е порядък в този смисъл, че именно това разпределение на молекулите ни се харесва, смисълът е там, че броят на различните начини за разполагане на молекулите (само че отстрани разположенията да изглеждат еднакво) е относително ограничен. Когато въртяхме нашия филм за смесването на газовете в обратна посока, нямаше толкова много безпорядък. Всеки отделен атом имаше точно необходимите скорост и посока, за да се намери където трябва. Общо ентропията не беше висока, въпреки че това не беше забележимо.

А какво може да се каже за необратимостта на другите физически закони? Когато разглеждахме електричното поле на ускорения заряд, беше казано, че трябва да вземем забавящо поле. В момента t на разстояние r от заряда трябва да вземем поле, създадено от ускорението в момента $t-r/c$, а не в момента $t+r/c$. Затова законите на електричеството са на пръв поглед необратими. Заедно с това е странно, че тези закони следват от

уравненията на Максвел, които в действителност са обратими. Обаче може да се приведе доводът, че ако бихме се ползували само от изпреварващото поле, отговарящо на положението на нещата в момента $t+r/c$, и ако направим това съвсем последователно в напълно затворено пространство, всичко би станало точно така както при употребата на закъсняващите полета. По такъв начин тази привидна необратимост в теорията на електричеството (поне в затворено пространство) съвсем не се явява необратимост. Вие сте длъжни вече сами леко да чувствувате това. Вие знаете вече, че когато трептящ заряд създава поле, което се отразява от стените на облицовката, то в крайна сметка се установява равновесие, в което няма място за еднопосочност. Закъсняващите полета — това е само похват, удобен метод за решаване.

Доколкото ни е известно, всички основни закони на физиката подобно на уравненията на Нютон са обратими. Тогава откъде идва необратимостта? От превръщането на порядъка в безпорядък. Но това твърдение все пак не е ясно, докато не знаем откъде идва порядъкът. Защо положенията, в които се оказваме ежедневно, никога не са равновесни? Едно мислимо обяснение е такова. Да разгледаме отново нашия цилиндър със сместа от бели и черни молекули. Ако ги наблюдаваме достатъчно дълго, може да се окаже, че по чисто случайно, крайно невероятно, но все пак мислимо стечение на обстоятелствата белите молекули се разпределят главно по дъното, а черните — при похлупака. След това с течение на времето те отново ще започнат да се смесват.

Като че ли едно възможно обяснение за високата степен на подреденост на сегашния свят се крие в това, че на нас просто ни е провървяло. Вероятно някога веднаж във Вселената е станала флуктуация, всичко някак се е разделило, а сега отново се връща към предишното положение. Такава теория не е несиметрична. На въпроса как би могъл да изглежда разделеният газ малко по-рано или малко по-късно, тя ще отговори: и в двата случая бихме видели сиво петно, защото молекулите отново биха се смесили. Както и да тече времето, напред или назад, все едно, газът би се размесил. По такъв начин именно по тази теория необратимостта се явява една от случайностите на живота.

Лесно е да се покаже, че това не е така. Да предположим, че не наблюдаваме едновременно целия цилиндър, а само някаква негова част. Нека в даден момент да открием в тази част определена степен на порядък — в нея бялото и черното са разделени. Какво следва оттук за частите, които още не сме разглеждали? Ако смятаме, че порядъкът възниква от безпорядъка по пътя на флуктуацията, задължени сме да разгледаме най-вероятната флуктуация от тези, които са способни да въведат порядък в нашата част. Но при такава най-вероятна флуктуация останалата част на съда *съвсем не е длъжна* да се подреди, наопаки. Значи от хипотезата, че светът е флуктуация, следва, че когато погледнем част от света, невиждана преди от нас, трябва да открием в нея смес, безпорядък, за разлика от предишния известен свят. Ако целият наш порядък е флуктуация, изключение, ние не смеем да се надяваме на порядък, освен там, където той вече е открит.

Сега да предположим, че разделянето е произлязло от това, че в миналото Вселената е била действително подредена (но не поради флуктуация, а просто белите и черните са били първоначално обособени). Тогава тази теория ще предскаже, че и в други места трябва да има порядък не като случайност, а поради това че по-рано порядъкът е бил по-добър. Тогава може да се очаква, че ще открием порядък в местата, които още не сме видели.

Например астрономите досега не са наблюдавали всички звезди. Всяка нощ те насочват своите телескопи към нови звезди, които се държат така, както и старите. От това заключаваме, че Вселената не е флуктуация и че нашият порядък е спомен за

онези времена, когато всичко едва е започвало. Не казваме, че ни е ясна логиката на това. По някакви причини Вселената е имала някога много малка за своето енергосъдържание ентропия и оттогава ентропията е нараснала. Това е пътят по посока към бъдещето. В това е началото на всички необратимости. Именно това поражда процесите на растеж и разпад. Именно поради това ние си спомняме не бъдещето, а миналото, спомняме си събития, които са по-близо до този момент в историята на света, когато порядъкът е бил по-добър от сегашния. Именно поради това не сме способни да си спомним събития от това време, когато безпорядъкът е по-голям от сегашния — ние наричаме това време бъдеще.

Вече говорихме, че в чаша вино ще ви се открие цялата Вселена, стига да погледнем по-дълбоко в нея. Чаша вино — това е доста сложно нещо, там има и влага, и стъкло, и светлина, и още много други неща.

Прелестта на физиката е още и в това, че даже такива прости и идеализирани неща като остроъбото колело с палец действуват само поради това че и те са част от Вселената. Остроъбото колело с палеца работят в една посока само защото се намират в тесен контакт с останалата Вселена. Ако се поместят в съд и се изолират за известно време, колелцето ще престане да предпочита едната посока на въртене пред другата. Но по същата причина, по която ние, отваряйки прозорците, пускаме вътре светлината, поради която отиваме да се охладим на сянка и да се нагреем на слънце, по същата причина остроъбото колело с палеца се върти само в една посока. Еднопосочността е свързана някак с това, че остроъбото колело е част от нашата Вселена. Част от Вселената не само в този смисъл, че се подчинява на законите на Вселената, но и поради това че неговото едностранно поведение е свързано с едностранното поведение на цялата Вселена. То не може сега да бъде разбрано докрай — науката поразкри великата тайна на ранната история на света, която сега служи само за предмет на различни хипотези.

47

Звук. Вълново уравнение

1. Вълни

В тази глава ще обсъдим ново явление — *вълните*. За вълните във физиката се говори много и често и ние трябва да съсредоточим нашето внимание върху този въпрос не само поради това че имаме намерение да разглеждаме един частен пример на вълна — звука, но и поради това че вълновите процеси имат и други многобройни приложения във всички области на физиката.

Когато изучавахме хармоничния осцилатор, отбелязахме, че съществуват примери както на механически трептещи системи, така и на електрически. Вълните са тясно свързани със системите на трептене, обаче вълновото движение е не само трептене в дадено място, зависещо от времето, а и движение в пространството.

Всъщност ние вече изучавахме вълните. Когато говорихме за вълновите свойства на светлината, обръщахме особено внимание на пространствената интерференция на вълните с една и съща честота от различни източници, разположени в различни места. Съществуват още две важни явления, за които не споменахме и които са свойствени както на светлината (на електромагнитните вълни), така и на всяка друга форма на вълновото движение. Първото от тях е явлението *интерференция*, но вече не в пространството, а *във времето*. Когато слушаме звуци едновременно от два източника, при което техните честоти малко се различават, при нас пристигат ту гребените на двете вълни, ту гребенът на едната вълна и падината на другата (фиг. 47.1). Звукът ту се усилва, ту отслабва, възниква *биене* или, с други думи, става интерференция във времето. Второто явление — това е вълновото движение в затворен обем, когато вълните се отразяват ту от едната, ту от другата стена.

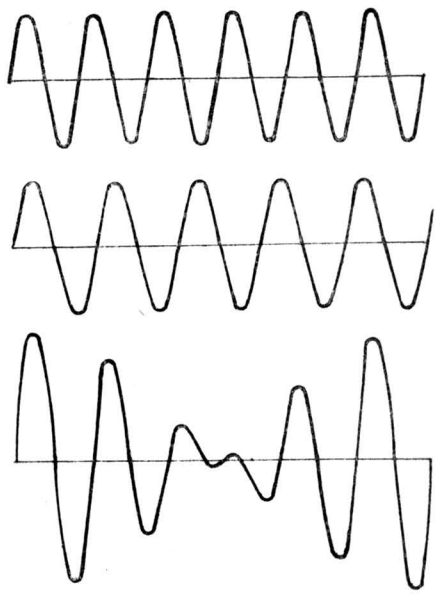
Разбира се, всички тези ефекти биха могли да се разгледат и чрез примера с електромагнитните вълни. Ние не направихме това по причина, че с един пример не бихме почувствували общия характер на явлението, свойствен на най-различни процеси. За да се подчертае общността на понятието вълни извън рамките на електродинамиката, ще разгледаме тук друг пример — звуковите вълни.

Има още един пример — морските вълни, които идват към брега. Освен това съществуват и два вида еластични вълни в твърдите тела: вълните на свиване (или надлъжни вълни), в които частиците на тялото трептят напред-назад в посоката на разпространението на вълната (звуковите трептения в газ са именно от този тип) и напречните вълни, когато частиците на тялото трептят перпендикулярно на посоката на движението на вълната. При земетресения в резултат на движение на участък в земната кора възникват еластични вълни от двата типа.

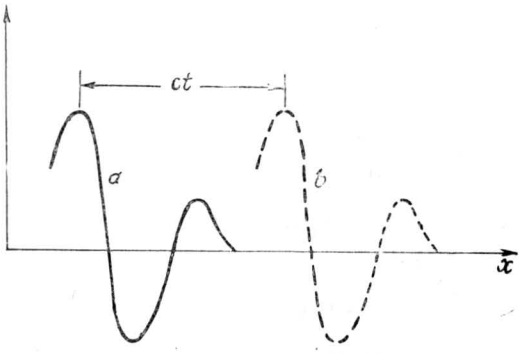
И накрая има още един тип вълни, който ни дава съвременната физика. Това са вълните, определящи амплитудата на вероятността за намиране на частица в дадено място — „вълни на материята“, за които вече говорихме. Тяхната честота е пропорционална на енергията, а вълновото число е пропорционално на импулса. Тези вълни се срещат в квантовата механика.

В тази глава ще разгледаме само такива вълни, чиято скорост не зависи от дължината на вълната. Пример за такава вълна е разпространението на светлината във вакуум. Скоростта на светлината в този случай е една и съща за радиовълните, за синята и зелената светлина и въобще за светлина с каквато и да

1. Вълни
2. Разпространение на звука
3. Вълново уравнение
4. Решения на вълновото уравнение
5. Скорост на звука



Фиг. 47.1. Интерференцията на звука във времето от два източника с малко различаващи се честоти довежда до биене



Фиг. 47.2. Примерно разпределение на електричното (b) поле в някой момент от времето (a) и електричното поле след интервал от време t

е дължина на вълната. Именно поради това, когато описвахме вълновите явления, отначало не забелязвахме самия факт на разпространението на вълните. Вместо това ние казвахме, че ако се пренесе заряд в някоя точка, електричното поле на разстояние x ще бъде пропорционално на ускорението на заряда, но не в момента от времето t, а в по-ранен момент $t=x/c$. Затова разпределението на електричното поле в пространството в някой момент от времето, представено на 47.2., след време t ще се придвижи на разстояние ct. Изразявайки се математически, може да се каже, че в разглежданията от нас едномерен случай електричното поле е функция на $x-ct$. Оттук се вижда, че при $t=0$ то се оказва функция само на x. Ако се вземе по-късен момент от времето и малко се увеличи x, ще получим същата големина на полето. Например, ако максимумът на полето възниква при $x=3$ и в момент от времето $t=0$, положението на максимума в момента от времето t се намира от равенството

$$x-ct=3, \text{ или } x=3+ct.$$

Виждаме, че такава функция отговаря на разпространението на вълна.

И така функцията $f(x-ct)$ описва вълна. Всичко казано можем да запишем накратко така:

$$f(x-ct)=f[x+\Delta x-c(t+\Delta t)],$$

ако $\Delta x=c\Delta t$. Разбира се, съществува още и друга възможност, когато източникът не излъчва вълни надясно, както е показано на фиг. 47.2, а наляво, така че вълните ще се движат в посока на отрицателните x. Тогава разпространението на вълните би се описвало от функцията $g(x+ct)$.

Може да се случи още в пространството да се движат едновременно няколко вълни и тогава електричното поле е сума от тези полета и те всички се разпространяват независимо. Това свойство на електричните полета може да се изрази така: нека на $f_1(x-ct)$ да отговаря на една вълна, а на $f_2(x-ct)$ — друга, тогава тяхната сума също описва някаква вълна. Това твърдение се нарича *принцип на суперпозицията*. Той е верен и за звуковите вълни.

Ние знаем добре, че звуците се възприемат в такава последователност, в каквато се създават от източника. А ако високите честоти се разпространяваха по-бързо, отколкото ниските, то вместо звуци на музика бихме слушали рязък и отривист шум. Точно по същия начин, ако червеният цвят се движеше по-бързо, отколкото синият, проблясването на бяла светлина би изглеждало отначало червено, после бяло и на края синьо. Ние знаем, че всъщност това не става така. И звукът, и светлината се движат във въздуха със скорост, почти не зависеща от честотата. Примери на вълново движение, където този принцип не се спазва, ще бъдат разгледани в гл. 48.

За светлината (електромагнитните вълни) ние получихме формула, определяща електричното поле в дадена точка, което възниква при ускорение на заряда. Като че ли сега ни остава само да определим по подобен начин някоя характеристика на въздуха, да кажем налягането на дадено разстояние от източника чрез движението на източника и да отчетем закъснението при разпространението на звука.

В случая на светлината такъв подход беше приемлив, тъй като всички наши знания се свеждаха до това, че зарядът в едно място действува на заряд в друго с някаква сила. Подробностите за разпространението на взаимодействието от една точка в друга бяха абсолютно несъществени. Но звукът, както е известно, се разпространява по въздуха от източника към ухото и е естествено да се запита на какво е равно налягането на въздуха

във всеки даден мемент. Освен това иска ни се да знаем как именно се движи въздухът.

В случая на електричеството ние можехме да повярваме в правилото, тъй като още не бяхме преминали законите на електричеството, но за звука това не е така. За нас е недостатъчно да се формулира закон, определящ разпространението на звуковото налягане във въздуха — този процес трябва да бъде обяснен въз основа на законите на механиката. Накратко, звукът е част от механиката и той трябва да бъде обяснен с помощта на законите на Нютон. Разпространението на звука от една точка в друга е просто следствие от механиката и свойствата на газовете, ако звукът се разпространява в газ, или от свойствата на течните и твърдите тела, ако звукът преминава през тези среди. По-късно ще изведем също свойствата на светлината и нейното вълново движение от законите на електродинамиката.

2. Разпространение на звука

Нека да изведем сега свойствата на разпространението на звука между източника и приемника, основавайки се на законите на Нютон, но без да отчитаме при това взаимодействието на звука с източника и приемника. Обикновено ние по-подробно се спирахме на резултата, а не на извода му. В тази глава ще използуваме противоположен подход. Тук главното в известен смисъл ще бъде само получаването на резултата. Методът на обяснение на новите явления с помощта на старите, чиито закони са вече известни, представлява от себе си като че ли най-великото изкуство на математическата физика. Математическата физика решава две проблеми: да се намери решение на определено уравнение и да се намери уравнението, което описва новото явление. Това, с което ще се занимаваме, се отнася точно към втория проблем.

Да разгледаме най-простия пример — разпространението на звука в едномерно пространство. За извода е необходимо да разберем отначало какво става в действителност. В основата на явлението лежи следният факт: когато едно тяло се премества във въздуха, възниква смущение, което някакси се разпространява във въздуха. На въпроса какво представлява това смущение, можем да отговорим, че това е такова движение на тялото, което предизвиква изменение на налягането. Разбира се, ако тялото се движи бавно, въздухът само ще го обтича, но нас ни интересува бързото движение, когато въздухът не успява да заобиколи тялото. При тези условия в процеса на движението въздухът се свива и възниква добавъчно налягане, тласкащо окръжаващите слоеве въздух. На свой ред тези слоеве се свиват, отново възниква добавъчно налягане и ето, започва да се разпространява вълна.

Да опишем този процес с езика на формулите. Преди всичко да решим какви променливи са ни нужни. В нашата задача трябва да знаем колко се е преместил въздухът, затова *отместването* на въздуха в звуковата вълна без съмнение ще бъде първата наша променлива. Като добавка би ни се искало да знаем как се изменя плътността на въздуха при преместването. *Налягането* на въздуха също се мени и това е още една интересна променлива. Освен това въздухът се движи с известна *скорост* и трябва да умеем да определяме скоростта на частиците на въздуха. Те имат още и *ускорение,* но като запишем всички тези променливи, веднага ще разберем, че и скоростта, и ускорението ще ни бъдат известни, ако е известно *отместването* на въздуха като функция на времето.

Както вече беше казано, ние ще разглеждаме вълната в едно измерение. Така можем да постъпим, ако се намираме достатъчно далеч от източника и така наречения *фронт на вълната* се отличава малко от плоскост. В този пример нашето доказателство ще бъде по-просто, доколкото може да се каже, че премества-

нето χ зависи само x и от t, а не от y и z. Затова поведението на въздуха се описва от функцията $\chi(x, t)$.

Доколко е пълно едно такова описание? Изглежда то е много непълно, защото не са ни известни подробностите за движението на молекулите на въздуха. Те се движат във всички посоки и този факт не се отразява от функцията $\chi(x, t)$. От гледна точка на кинетичната теория, ако в едно място се наблюдава по-голяма плътност на молекулите, а в съседното — по-малка, молекулите ще преминават от областта с по-голяма плътност в областта с по-малка плътност, така че да изравнят плътностите. Очевидно при това не стават никакви трептения и не възниква звук. За получаване на звукова вълна е необходимо молекулите, излитащи от областта с по-голяма плътност и налягане да предават импулс на други молекули, намиращи се в областта на разреждане. Звук се получава в този случай, когато размерите на областта на изменение на плътността и налягането са много по-големи от разстоянието, изминавано от молекулите до сблъскването им с други молекули. Това разстояние е дължината на свободния пробег и то трябва да бъде много по-малко от разстоянието между гребените и падините на налягането. В противен случай молекулите ще преминат от гребена в падината и вълната моментално ще се изравни.

Ние естествено искаме да опишем поведението на газа в мащаб, по-голям, отколкото дължината на свободния пробег, така че свойствата на газа да не се определят от поведението на отделните молекули. Например преместването е преместване на центъра на инерцията на малък обем газ, а налягането или плътността се отнасят към този обем. Ще означим налягането с P, а плътността с ρ, при което двете величини ще бъдат функция от x и t.

Трябва да се помни, че нашето описание е приближено и вярно само когато свойствата на газа не се изменят много бързо с разстоянието.

3. Вълново уравнение

И така физическите явления, които стават в звуковата вълна, имат следните три свойства:

I. Газът се движи и плътността му се мени.

II. При изменение на плътността се променя и налягането.

III. Неравномерното разпределение на налягането предизвиква движение на газа.

Да разгледаме отначало II-то свойство. За всеки газ, течност или твърдо тяло налягането се явява функция на плътността. До пристигането на звуковата вълна имахме равновесно състояние с налягане P_0 и плътност ρ_0. Налягането P зависи от плътността на средата $P=f(\rho)$, а в частност равновесното налягане $P_0=f(\rho_0)$. Отклоненията на големината на налягането от равновесното в звуковата вълна са твърде малки. Налягането се измерва удобно в *бари* (1 бар $=10^5$ N/m^2). В една стандартна атмосфера то е приблизително равно на 1 бар (1 атм $=1{,}0133$ бари). За звука обикновено се използува логаритмична скала за интензитета, тъй като, грубо казано, възприятието на ухото расте логаритмично. В тази децибелна скала нивото на звуковото налягане I е свързано с амплитудата на звуковото налягане:

$$I=20\log\left(\frac{P}{P_{\text{отн}}}\right)\text{dbar}, \qquad (47.1)$$

където налягането е отнесено към някакво стандартно налягане $P_{\text{отн.}}=2.10^{-10}$ бари.

Звуковото налягане $P=10^3 . P_{\text{отн}}=2.10^{-7}$ бари[1] съответствува

[1] При такъв избор на $P_{\text{отн}}$, P вече не е максималната амплитуда на звуковото налягане, а „средно квадратичното“ налягане, равно на максималното, разделено на $1/\sqrt{2}$.

на доста силен звук от 60 dbar. Виждаме, че налягането в звуковата вълна се изменя твърде малко в сравнение с равновесното или средното, равно на 1 *атм*. Преместванията и промените на плътността са също много малки. Обаче при взривовете измененията не са вече така малки, излишното звуково налягане може да превишава 1 *атм*. Такива големи промени на налягането довеждат до нови явления, които ще разгледаме по-късно. В звуковите вълни ниво на силата на звука, по-високо от 100 dbar, се среща рядко. Ниво на силата на звука от 120 dbar, предизвиква вече болка в ушите. Затова, като напишем за звуковата вълна

$$P=P_0+P_u, \quad \rho=\rho_0+\rho_u, \tag{47.2}$$

може да се смята, че изменението на налягането P_u е много малко в сравнение с P_0, а изменението на плътността ρ_u е много малко в сравнение с ρ_0. Тогава

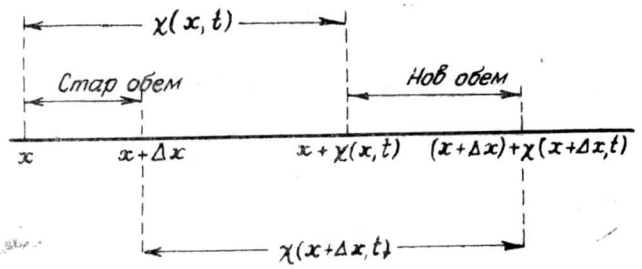
$$P_0+P_u=f(\rho_0+\rho_u)=f(\rho_0)+\rho_u f'(\rho_0), \tag{47.3}$$

където $P_0=f(\rho_0)$ и $f'(\rho_0)$ е производна от $f(\rho)$, взета при $\rho=\rho_0$. Второто равенство е възможно тук само поради това че ρ_u е много малко. По такъв начин намираме, че излишното налягане P_u е пропорционално на излишната плътност ρ_u. Коефициентът на пропорционалност се означава с $\varkappa$:

$$\text{(II)} \quad P_u=\varkappa\rho_u, \text{ където } \varkappa=f'(\rho_0)=\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_0. \tag{47.4}$$

Това е много просто съотношение и представлява точното съдържание на свойството II.

Да преминем сега към I свойство. Да предположим, че положението на даден елемент от обема на въздуха, несмутен от звукова вълна, е x, а в момента от времето t звукът го отмества на $\chi(x, t)$, така че неговото ново положение е $x+\chi(x, t)$, както е показано на фиг. 47.3. По-нататък положението на съседния елемент от обема е $x+\Delta x$ и неговото отместено положение е $x+\Delta x+\chi(x+\Delta x, t)$. Сега може да се намери изменението на плътността. Доколкото разглеждаме плоска вълна, удобно е да се вземе единична площ, перпендикулярна на оста x, т. е. на посоката на разпространение на вълната. Количеството въздух, падащо се на единица площ в интервала Δx е $\rho_0\Delta x$, където ρ_0 е несмутената или равновесната плътност на въздуха. Тази порция въздух, преместена от звуковата вълна, ще се намира сега между $x+\chi(x, t)$ и $x+\Delta x+\chi(x+\Delta x, t)$, при което количеството въздух



Фиг. 47.3. Преместването на въздуха в точката x е $\varkappa(x,t)$, а в точката $x+\Delta x$ е равно на $\varkappa(x+\Delta x,t)$
Първоначалният обем, който се пада на единица площ от плоска звукова вълна, е Δx, а крайният обем е равен на $\Delta x+\varkappa(x+\Delta x,t)-\varkappa(x,t)$

в този интервал е същото както в интервала Δx до идването на вълната. Ако с ρ означим новата плътност, то

$$\rho_0\Delta x=\rho[x+\Delta x+\chi(x+\Delta x, t)-x-\chi(x, t)]. \tag{47.5}$$

Тъй като Δx е малко, може да се напише $\chi(x+\Delta x, t)-\chi(x, t)=(\partial\chi/\partial x)\Delta x$. Тук вече се появява частна производна, защото χ зависи и от x, и от времето. Нашето уравнение приема вида

$$\rho_0\Delta x=\rho\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\Delta x+\Delta x\right), \tag{47.6}$$

или

$$\rho_0 = (\rho_0 + \rho_u)\frac{\partial x}{\partial x} + \rho_0 + \rho_u. \tag{47.7}$$

Но в звуковата вълна всички изменения са малки, така че ρ_u е малка, χ е малко и $\partial\chi/\partial x$ е също малко. Затова в уравнението, което току-що написахме:

$$\rho_u = -\rho_0 \frac{\partial x}{\partial x} - \rho_u \frac{\partial \chi}{\partial x}, \tag{47.8}$$

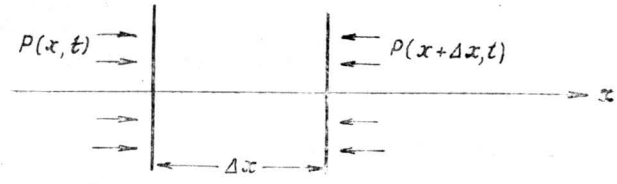
може да се пренебрегне $\rho_u(\partial\chi/\partial x)$ в сравнение с $\rho_0(\partial\chi/\partial x)$. Така ние идваме до съотношението, което се изискваше съгласно I свойство:

$$\text{(I)} \quad \rho_u = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x}. \tag{47.9}$$

Именно такова уравнение би могло да се очаква от чисто физически съображения. Ако преместването е различно за различни x, плътността ще се изменя. Знакът също е правилен: ако преместването χ расте заедно с x, така че въздухът се разширява, плътността трябва да се намалява.

Сега ни е нужно да намерим трето уравнение — уравнението на движението, произлязло от излишъка на налягане. Като знаем съотношението между силата и налягането, можем да получим уравнението на движението. Да вземем обем от въздуха с дебелина Δx и с единична площ на страната, перпендикулярна на x. Тогава масата на въздуха в този обем е $\rho_0\Delta x$, а ускорението му е $\partial^2\chi/\partial t^2$, така че за този слой масата, умножена по ускорението, е $\rho_0\Delta x(\partial^2\chi/\partial t^2)$. (Ако Δx е малко, няма значение къде ще се вземе ускорението — на края на слоя или някъде по средата.) Силата, която действува на единична площ от нашия слой, перпендикулярна на оста x, трябва да е равна на $\rho_0\Delta x(\partial^2\chi/\partial t^2)$. В точката x имаме сила $P(x, t)$ — действуваща на единица площ в посока $+x$, а в точка $x+\Delta x$ възниква сила в обратна посока, равна по големина на $P(x+\Delta x, t)$ (фиг. 47.4):

$$P(x, t) - P(x+\Delta x, t) = -\frac{\partial P}{\partial x}\Delta x = -\frac{\partial P_u}{\partial x}\Delta x. \tag{47.10}$$



Фиг. 47.4. Резултантната сила по оста x, която възниква за сметка на налягането върху единица площ, перпендикулярна на оста x, е $-(\partial P/\partial x)\Delta x$

Ние отбелязахме, че Δx е малко и че само излишното налягане P_u се мени в зависимост от x. И така съгласно III-то свойство получаваме

$$\text{(III)} \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\frac{\partial P_u}{\partial x}. \tag{47.11}$$

Сега вече има достатъчно уравнения, за да се свържат всички величини и да се премине към една променлива, да кажем x. P_u в (47.11) може да се изрази с помощта на (47.4):

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\varkappa \frac{\partial \rho_u}{\partial x}, \tag{47.12}$$

а след това да се изключи ρ_u с помощта на (I). Тогава ρ_0 ще се съкрати и ще остане

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \varkappa \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}. \tag{47.13}$$

Да означим $c_s^2 = \varkappa$, тогава може да се напише

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_s^2} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}. \tag{47.14}$$

Това е самото вълново уравнение, което описва разпространението на звука в среда.

4. Решения на вълновото уравнение

Да видим сега дали вълновото уравнение действително описва основните свойства на звуковите вълни в среда. Преди всичко ние искаме да установим, че звуковото трептене или смущение се движи с постоянна скорост. Освен това нужно ни е да докажем, че две различни трептения могат да преминават свободно едно през друго, т. е. принципът на суперпозицията. Искаме още да докажем, че звукът може да се разпространява и наляво, и надясно. Всички тези свойства трябва да се съдържат в нашето единствено уравнение.

По-рано отбелязахме, че всяко смущение, имащо вид на плоска вълна и движещо се с постоянна скорост, се записва във вида $f(x-vt)$. Да видим сега явява ли се $f(x-vt)$ решение на вълновото уравнение. Като изчислим $\partial\chi/\partial x$, получаваме производната на функцията $\partial\chi/\partial x = f'(x-vt)$. Като диференцираме още веднаж, намираме

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = f''(x-vt). \tag{47.15}$$

Като диференцираме тази функция на χ по t, получаваме стойността $-v$, умножено по производната, или $\partial\chi/\partial t = -vf'(x-vt)$. Втората производна по времето дава

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = v^2 f''(x-vt). \tag{47.16}$$

Очевидно е, че $f(x-vt)$ удовлетворява вълновото уравнение, ако v е равно на c_s.

По такъв начин получаваме от законите на механиката, че всяко звуково смущение се разпространява със скорост c_s и освен това

$$c_s = \varkappa^{1/2} = \left(\frac{dP}{d\varrho}\right)_0^{1/2}.$$

По такъв начин *ние свързахме скоростта на звуковите вълни със свойствата на средата.*

Лесно се вижда, че звуковата вълна може да се разпространява и в отрицателни посоки на x, т. е. звуково смущение от вида $\chi(x,t) = g(x+vt)$ също удовлетворява вълновото уравнение. Единствената разлика между тази вълна и онази, която се разпространява от ляво на дясно, се състои в знака на v, но знакът на $\partial^2\chi/\partial t^2$ не зависи от избора на $x+vt$ или $x-vt$, защото в тази производна влиза само v^2. Оттук следва, че решението на уравнението описва вълни, бягащи във всяка посока със скорост c_s.

Особен интерес представлява въпросът за суперпозицията на решенията. Да допуснем, че сме намерили едно решение, да кажем χ_1. Това значи, че втората производна на χ_1 по x е равна на втората производна на χ_1 по t, умножена по $1/c_s^2$. И нека да има второ решение χ_2, притежаващо същите свойства. Да съберем тези решения. Тогава се получава

$$\chi(x,t) = \chi_1(x,t) + \chi_2(x,t). \tag{47.17}$$

Сега искаме да докажем, че $\chi(x,t)$ също представлява някаква вълна, т. е. χ също удовлетворява вълновото уравнение. Това е много просто да се докаже, тъй като

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x^2} \tag{47.18}$$

и още

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\chi_1}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\chi_2}{\partial t^2}. \tag{47.19}$$

Оттук следва, че $\partial^2\chi/\partial x^2=(1/c_s^2)\,\partial^2\chi/\partial t^2$, така че верността на принципа на суперпозицията е проверена. Самото негово съществование е свързано с това, че вълновото уравнение е *линейно* по χ.

Сега би било естествено да се очаква, че плоска светлинна вълна, която се разпространява по оста x и е поляризирана така, че електричното поле е насочено по оста y, също удовлетворява вълновото уравнение

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \tag{47.20}$$

където c е скоростта на светлината. Вълновото уравнение за светлинната вълна е едно от следствията на уравненията на Максвел. Уравненията на електродинамиката водят до вълновото уравнение на светлината точно по такъв начин, както уравненията на механиката водят до вълновото уравнение на звука.

5. Скорост на звука

При извеждане вълновото уравнение на звука ние получихме *формула,* която свързва при нормално налягане скоростта на движението на вълната и относителното изменение на налягането с плътността:

$$c_s^2=\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_0. \tag{47.21}$$

За да се прецени скоростта на изменение на налягането, много важно е да се знае как при това се изменя температурата. Може да се очаква, че в местата на сгъстяване на звуковата вълна температурата ще се повиши, а в местата на разреждането — ще се понижи. Нютон пръв е изчислил скоростта на изменение на налягането с плътността, като при това предположил, че при това температурата не се променя. Той смятал, че топлината се предава от едно място на звуковата вълна до друго така бързо, че температурата не успява да се измени. Начинът на Нютон дава изотермичната скорост на звука, което е неправилно. Правилното пресмятане е било направено по-късно от Лаплас, който въпреки Нютон смятал, че налягането и температурата в звуковата вълна се изменят адиабатно. Потокът топлина от област на сгъстяване към област на разреждане е пренебрежимо малък само ако дължината на вълната е голяма в сравнение с дължината на свободния пробег. При тези условия нищожната загуба на топлина в звуковата вълна не влияе на скоростта на звука, въпреки че води към слабо поглъщане на звуковата енергия. Естествено ние можем да очакваме, че поглъщането на топлината ще се усили, когато дължината на вълната се доближи до дължината на свободния пробег, но такива вълни са с около един милион пъти помалка дължина на вълната на чувания звук.

И така за звука истинската скорост на изменение на налягането с плътността трябва да се пресмята без отчитане на отведената топлина. На това съответствува адиабатното изменение на налягането, за което намерихме, че $PV^\gamma=const$, където V е обемът. Тъй като плътността ρ е обратно пропорционална на обема, връзката между P и ρ за адиабатните процеси се дава със съотношението

$$P=const\,.\,\rho^\gamma, \tag{47.22}$$

откъдето получаваме $dP/d\rho=\gamma P/\rho$. Тогава за скоростта на звука се появява съотношението

$$c_s^2=\frac{\gamma P}{\rho} \tag{47.23}$$

Още може да се напише $c_s^2=\gamma PV/\rho V$ и да се използува съотношението $PV=NkT$. Освен това ние виждаме, че ρV е масата на газа, която може да се запише като Nm или μ, където m е масата на молекулата, а μ — молекулното тегло. По такъв начин намираме

$$c_s^2=\frac{\gamma kT}{m}=\frac{\gamma RT}{\mu}, \tag{47.24}$$

откъдето се вижда, че скоростта на звука зависи само от температурата на газа и не зависи от налягането или плътността. Ние вече отбелязахме, че

$$kT=\frac{1}{3}m\langle v^2\rangle, \tag{47.25}$$

където $\langle v^2\rangle$ е средната квадратична скорост на молекулите. Оттук следва, че $c_s^2=\gamma/3\langle v^2\rangle$, или

$$c_s=\left(\frac{\gamma^{1/2}}{3^{1/2}}\right)v_{\text{ср}}. \tag{47.26}$$

Това равенство означава, че скоростта на звука е средната скорост на молекулите на въздуха (по-точно, на корен квадратен от средната квадратична скорост), умножена по някакво число, грубо казано, по $1/(3)^{1/2}$. С други думи, тя е от същия порядък по стойност, както и скоростта на молекулите, но всъщност е малко по-малко от средната скорост на молекулите.

Изобщо ние бихме могли да очакваме това, защото такова смущение, като изменението на плътността, в крайна сметка се предава на движението на молекулите. Обаче подобен род съображения не ни подсказват точната стойност на скоростта. Нали може да се окаже, че звукът се пренася от най-бързите или най-бавните молекули. Разумно е и твърде утешително, че скоростта на звука се оказа равна на приблизително половината от средната скорост на молекулите.

48

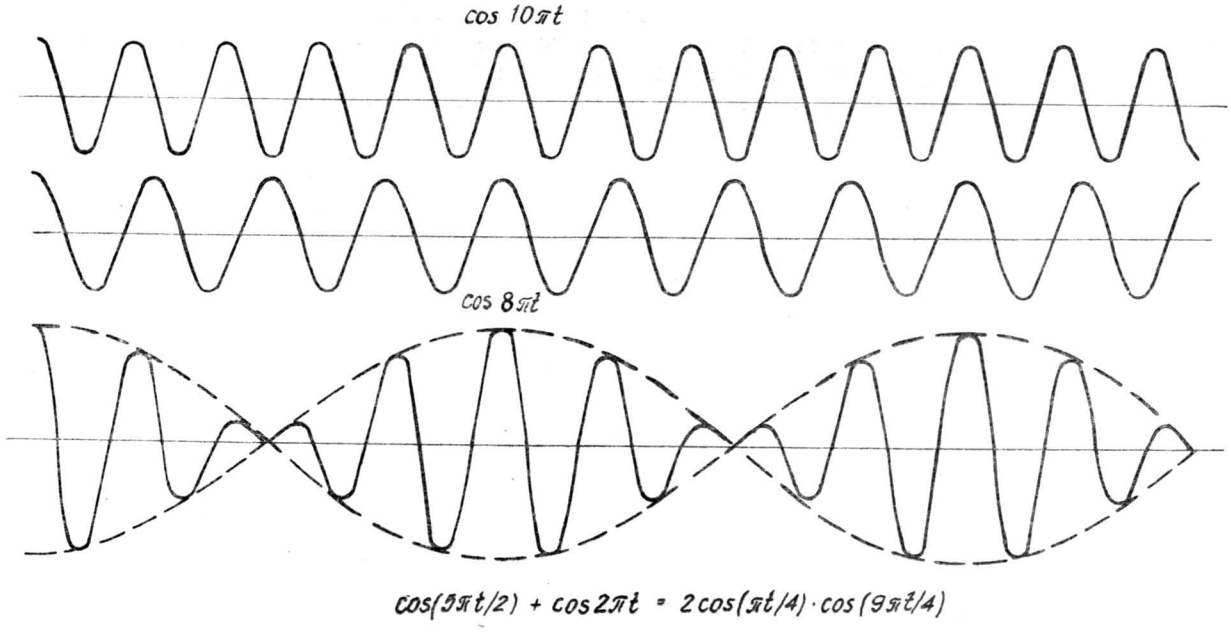
Биене

1. Сумиране на две вълни
2. Някои забележки за биенето и модулацията
3. Странични ивици
4. Локализиран вълнов пакет
5. Амплитуда на вероятността на частиците
6. Вълни в тримерното пространство
7. Собствени трептения

1. Сумиране на две вълни

Не много отдавна ние подробно обсъждахме свойствата на светлинните вълни и тяхната интерференция, т. е. ефекта от суперпозицията на две вълни от различни източници. Но при това се предполагаше, че честотите на източниците са еднакви. В тази глава ще се спрем на някои явления, възникващи при интерференция на два източника с *различни* честоти.

Не е трудно да се досетим какво ще стане тогава. Действувайки както и по-рано, нека предположим, че съществуват два еднакви осцилиращи източника с една и съща честота, при което техните фази са подбрани така, че в някаква точка P сигналите пристигат с еднакви фази. Ако това е светлина, в тази точка тя ще бъде много ярка, ако е звук, той ще бъде много силен, а ако са електрони, те ще са твърде много. От друга страна, ако идващите вълни се различават по фаза със 180°, то в точката P няма да има никакъв сигнал или пълната амплитуда ще има тук минимум. Да предположим сега, че някой върти ръчката „регулировка на фазата“ на единия от източниците и изменя фазовата разлика в точка P ту насам — ту натам и да кажем отначало



Фиг. 48.1 Суперпозиция на две косинусообразни вълни с отношение на честотите 8 : 10

Точното повторение на трептенията вътре във всяко биене не е типично за общия случай

я прави равна на нула, след това — равна на 180° и т. н. Разбира се, при това ще се мени и силата на идващия сигнал. Сега е ясно, че ако фазата на единия от източниците бавно, постоянно и равномерно се променя в сравнение с другия, като започне от нула и след това нарасне постепенно до 10°, 20°, 30°, 40° и т. н., то в точката P ще видим редица слаби и силни „пулсации“ или когато фазовата разлика премине през 360°, в амплитудата отново ще се появи максимум. Но твърдението, че един източник с постоянна скорост изменя своята фаза по отношение на другия, е равносилно на твърдението, че броят на

трептенията в една секунда на тези два източника е малко различен.

И така сега е известен отговорът: ако вземем два източника, чиито честоти са малко различни, в резултат на събирането се получават трептения с бавно пулсираща интензивност. С други думи, всичко казано тук действително има отношение към нашата работа.

Лесно е да се получи този резултат и математически. Да предположим например, че имаме две вълни и да забравим за минута за всички пространствени съотношения, а просто да видим какво пристига в точката P. Нека от единия източник да идва вълна $\cos \omega_1 t$, а от другия — вълна $\cos \omega_2 t$, при което двете честоти, ω_1 и ω_2, не са точно равни една на друга. Разбира се, техните амплитуди също могат да бъдат различни, но нека предположим отначало, че са равни. Общата задача ще разгледаме по-късно. При това пълната амплитуда в точката P ще бъде сумата от двата косинуса. Ако построим графика на зависимостта на амплитудата от времето, както това е показано на фиг. 48.1, ще се окаже, че когато гребените на двете вълни съвпадат, се получава по-голямо отклонение, когато съвпадат гребен и падина — практически нула, а когато гребените отново съвпаднат, отново се получава голяма вълна.

Математически на нас ни е нужно да вземем сумата от двата косинуса и някакси да я преправим. За това ще са нужни някои полезни съотношения между косинусите. Нека да ги получим. Вие, разбира се, знаете, че

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib} \tag{48.1}$$

и че реалната част на експонентата e^{ia} е равна на $\cos a$, а имагинерната част е равна на $\sin a$. Ако вземем реалната част на $\exp\,[-i(a+b)]$, ще получим $\cos(a+b)$, а за произведението

$$e^{ia} e^{ib} = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)$$

получаваме $\cos a \cos b - \sin a \sin b$ плюс някаква имагинерна добавка. Сега обаче ни е необходима само реалната част. По такъв начин

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \tag{48.2}$$

Ако сега променим знака на величината b, тъй като при това косинусът не си изменя знака, а синусът си сменя знака с обратен, ние получаваме аналогичен израз за косинуса на разликата

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \tag{48.3}$$

След събирането на тези две уравнения произведението на синусите ще се съкрати и намираме, че произведението на двата косинуса е равно на половината на косинуса на сумата плюс половината от косинуса на разликата

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b). \tag{48.4}$$

Сега този израз може да се обърне и да се получи формула за $\cos\alpha + \cos\beta$, ако само се положи $\alpha = a+b$, а $\beta = a-b$, т. е. $a = 1/2\,(\alpha+\beta)$, а $b = 1/2\,(\alpha-\beta)$:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta). \tag{48.5}$$

Но да се върнем към нашата проблема. Сумата от $\cos\omega_1 t$ и $\cos\omega_2 t$ е равна на

$$\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t = 2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)t\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)t. \tag{48.6}$$

Нека сега честотите да са приблизително еднакви, така че $1/2\,(\omega_1+\omega_2)$ да е равно на някаква средна честота, която повече или по-малко е равна на всяка от тях. Но разликата $\omega_1-\omega_2$ е *много по-малка*, отколкото ω_1 и ω_2, тъй като предположихме, че ω_1 и ω_2 са приблизително равни една на друга. Това означава,

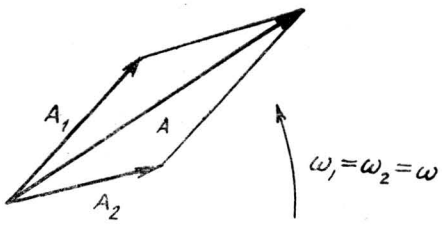
че резултатът от събирането може да се изтълкува така, като че ли е косинусообразна вълна с честота, повече или по-малко равна на първоначалните, но че нейният „размах“ се изменя бавно, пулсира с честота, равна на $1/2(\omega_1-\omega_2)$. Но това ли е тази честота, с която ние чуваме биенето? Уравнението (48.6) казва, че амплитудата се държи като $\cos 1/2(\omega_1-\omega_2)$, като се разбира, че високочестотните трептения са затворени между двете косинусоиди с противоположни знаци (пунктирната линия на фиг. 48.1). Въпреки че амплитудата действително се изменя с честота $1/2(\omega_1-\omega_2)$, ако става дума обаче за *интензитета* на вълната, ние трябва да си представяме два пъти по-голяма честота. Казано по друг начин, модулацията на амплитудата в смисъл на нейния интензитет става с честота $\omega_1-\omega_2$, въпреки че умножаваме по косинуса на половината честота.

Като се пренебрегнат тези малки усложнения, можем да заключим, че ако се сумират две вълни с честоти ω_1 и ω_2, ще получим вълна с честота, равна на средната честота $1/2(\omega_1+\omega_2)$, чиято „сила“ осцилира с честота $\omega_1-\omega_2$.

Ако амплитудите на двете вълни са различни, то, разбира се, може да се повторят всички пресмятания отново, като се умножат предварително косинусите с различни амплитуди A_1 и A_2 и се извършат маса математически изчисления, преобразувания и т. н. с използването на уравнения, подобни на (48.2) — (48.5). Обаче има и друг, по-лек път за провеждане на същия анализ. Известно е например, че много по-лесно се работи с експоненти, отколкото със синуси и косинуси, затова $A_1\cos\omega_1 t$ може да се представи като реална част на $A_1\exp(i\omega_1 t)$. По подобен начин втората вълна ще бъде реалната част на $A_2\exp(i\omega_2 t)$. След събирането на тези експоненти $A_1\exp(i\omega_1 t)+A_2\exp(i\omega_2 t)$ и отделянето в качеството на множител на експонентата със средна честота ще получим

$$A_1e^{i\omega_1 t}+A_2e^{i\omega_2 t}=e^{\frac{i}{2}(\omega_1+\omega_2)t}\left[A_1e^{\frac{i}{2}(\omega_1-\omega_2)t}+A_2e^{-\frac{i}{2}(\omega_1-\omega_2)t}\right], \quad (48.7)$$

т. е. оказва се отново, че високочестотната вълна се модулира с малка честота.



Фиг. 48.2. Резултат от събирането на два комплексни вектора с равни честоти

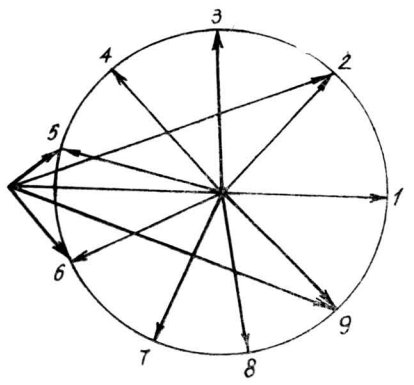
2. Някои забележки за биенето и модулацията

Да предположим сега, че ни интересува интензитетът на вълната, която се описва от уравнението (48.7). За да го намерим, трябва да вземем квадрата от абсолютната стойност било на дясната, било на лявата част на това уравнение. Нека вземем лявата част. Тогава интензитетът ще бъде равен на

$$I=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\omega_1-\omega_2)t. \quad (48.8)$$

Виждате ли, интензитетът нараства и пада с честотата $\omega_1-\omega_2$, като се мени в границите $(A_1+A_2)^2$ и $(A_1-A_2)^2$. Ако $A_1\neq A_2$, минималният интензитет не е равен на нула.

Същите резултати могат да се получат и по друг път — с помощта на схеми, подобни на фиг. 48.2. Да изобразим една от вълните във вид на вектор с дължина A_1 в комлексната равнина, който се върти с ъглова скорост ω_1. Втората вълна да изобразим с друг вектор, чиято дължина е A_2, а ъгловата скорост на въртенето е ω_2. Ако тези честоти са точно равни помежду си, ще получим въртящ се вектор, чиято дължина през цялото време е постоянна. Така че интензитетът в този случай ще бъде през цялото време постоянна, фиксирана величина. Ако обаче честотите малко се отличават една от друга, тези два вектора ще се въртят с различни скорости.



Фиг. 48.3. Резултат от събирането на два комплексни вектора с различни честоти във въртяща се координатна система на първия вектор.

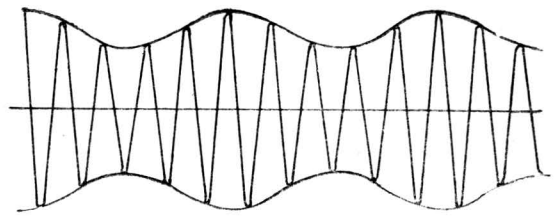
Показани са девет последователни положения на бавно въртящ се вектор

На фиг. 48.3 е показано как изглежда цялата картина „от гледна точка“ на вектора $A_1\exp(i\omega_1 t)$. Виждаме, че векторът A_2 бавно се „отделя“ от вектора A_1, така че амплитудата, получена при събирането на тези два вектора, отначало е голяма, а после,

когато вторият вектор съвсем се „отдели“ на другата страна, т. е. когато ъгълът между тях стане 180°, тя ще бъде особено малка и т. н. Векторът се върти, амплитудата на сумата на векторите става ту по-голяма, ту по-малка, а интензитетът пулсира. Идеята е сравнително проста и тя може да се реализира по много различни начини. Лесно е да се наблюдава този ефект експериментално. Може например да се поставят два високоговорителя, всеки от които е свързан със собствен генератор на трептения и може да дава свой собствен тон. По такъв начин ние приемаме един сигнал от първия източник, а друг сигнал от втория. Ако честотата на тези сигнали е точно равна, в резултат във всяка точка на пространството ще се получи ефект с определена сила. Но ако генераторите се разстроят малко, ние ще чуем някакво изменение на интензитета. Колкото повече разстройваме генераторите, толкова по-бързи ще бъдат измененията на силата на звука. За ухото обаче става трудно да следи изменения, чиято скорост надминава 10 трептения в секунда или нещо около това.

Този ефект може да се наблюдава и на осцилограф, който просто показва сумата на токовете на два генератора. Ако честотата на пулсациите е сравнително малка, то просто ще видим как на екрана пред нас ще преминат синусоидални вълни, чиято амплитуда пулсира, но ако се направят пулсациите по-бързи, ще видим нещо подобно на това, което е показано на фиг. 48.1. С увеличението на разликата между честотите „върховете“ се доближават все повече и повече. Ако амплитудите не са равни една на друга, ако направим единия сигнал по-слаб от другия, образува се вълна, чиято амплитуда, както се и очаква, никога не става равна на нула. Всичко става така, както е необходимо, независимо от това електричество ли е или звук.

Но възможно е и обратното явление! При радиопредаването използуват така наречената *амплитудна модулация* (АМ). Ето как става това. Радиопредавателят възбужда електрически колебания с твърде голяма честота. За радиоразпръскване например се използува честота от 800 kH_z. Ако е включен този *носещ сигнал*, предавателят ще излъчва вълни с честота 800 000 трептения в секунда, при което амплитудата им е постоянна. Информацията (често пъти съвършено безполезна, като тази например каква марка автомобили трябва да си купите) се предава по следния начин: когато някой говори пред микрофона, амплитудата на носещия сигнал се изменя „в крак“ с трептенията на звука, постъпващи в микрофона.



Фиг. 48.4. Модулация на носещата вълна

На тази схема отношението $\omega_c/\omega_m=5$. В истинската радиовълна $\omega_c/\omega_m\approx100$

Да вземем най-простия от гледна точка на математиката случай, когато певицата взима безупречна нота с безупречно синусоидално трептене на гласовите връзки, при което се получава сигнал, чиято сила се мени, както е показано на фиг. 48.4. След това измененията на звуковата честота се приемат от приемника: избавяме се от носещата вълна и гледаме просто „обвивката“, която представлява от себе си трептенията на гласовите връзки или звука на гласа на певицата. Високоговорителят пък произвежда трептения във въздуха със същата честота и по принцип слушателят не може да открие разлика между истинския глас на певицата и предаването, чуто по радиото. В действителност поради някои изкривявания и други най-фини ефекти все пак можем да определим радио ли слушаме или „живия“ глас на певицата. Иначе всичко става така, както го описахме.

3. Странични ивици

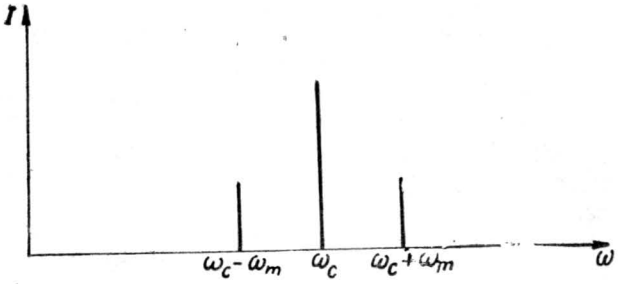
Описаната по-горе модулирана вълна може да се запише математически във вида

$$S=(1+b\cos\omega_m t)\cos\omega_c t, \qquad (48.9)$$

където ω_c е носещата честота, а ω_m — честотата на звука, който чуваме. Като се използува косинусовата теорема или свойствата на експоненциалната функция $\exp(i\theta)$ (в това няма никаква разлика, но е по-лесно да се работи с експонентата), получаваме

$$S=\cos\omega_c t+\frac{1}{2}b\cos(\omega_c+\omega_m)t+\frac{1}{2}b\cos(\omega_c-\omega_m)t. \qquad (48.10)$$

По такъв начин от друга гледна точка може да се каже, че изходящата вълна е получена от суперпозицията на три вълни: обикновена вълна с честота ω_c, т. е. носещата честота и след



Фиг. 48.5 Спектър на честотите на носещата вълна ω_c, модулирана от една косинусова вълна ω_m.

това две нови вълни с две различни честоти. Едната от тях е равна на сумата от носещата и модулиращата честота, а другата — на разликата. Ако се построи нещо като графика на зависимостта на интензитета на излъчването на генератора от честотата, естествено отначало ще открием голям интензитет при носеща честота ω_c, но щом певицата започне да пее, неочаквано откриваме интензитет, пропорционален на силата на гласа на певицата b^2 при честотите $\omega_c+\omega_m$ и $\omega_c-\omega_m$, както е показано на фиг. 48.5. Те се наричат *странични ивици*. Ако от предавателя излиза модулиран сигнал, възникват странични ивици. Ако в едно и също време се предават две ноти, да кажем, с честоти ω_m и ω_m', например свирят два инструмента или някаква друга усложнена вълна, тогава от математиката е ясно, че се получават две нови вълни, съответни на честотите $\omega_m\pm\omega_m'$.

И така ако става някаква сложна модулация, която може да се представи във вид на сума от много косинуси[1] оказва се, че предавателят в действителност работи в цялата област на честотите, а именно в областта на носещата честота плюс-минус максималната честота, която се съдържа в модулиращия сигнал.

Въпреки че отначало бихме могли да повярваме, че радиопредавателят работи само на номинална носеща честота, тъй като в него се намира голям свръхстабилен кристален осцилатор и всичко е подбрано така, че честотата да бъде равна точно на 800 Hz, в този момент, когато *дикторът* обявява, че станцията работи на честота 800 Hz, той по този начин модулира тази честота и предаването вече не върви точно на нея. Да предположим, че усилвателите са устроени така, че могат да предават широка ивица от честоти в област, възприемаема за ухото (ухото може да чува честоти чак до 20 000 Hz, но обикновено радиопредавателите и радиостанциите работят под 10 000 Hz и по радиото не чуваме по-високи честоти). Така че гласът на диктора, обявяващ нещо по радиото, може да съдържа честоти до 10 000 Hz, а

[1] Тук следва да се направи малка забележка: в какви случаи кривата може да се представи във вид на сума от множество косинуси? *Отговор*: Почти винаги с изключение на малък брой случаи, които могат да се присъянят наистина само на математик. Разбира се, във всяка точка кривата трябва да има само едно значение и не трябва да бъде безумна крива, скачаща до безкрайност в продължение на безкрайно малък интервал от време или нещо от този род. Обаче ако се отдалечим от тези ограничения, всяка разумна крива (в частност и тази, която се получава при трептенето на гласните струни на певицата) винаги може да бъде представена във вид на сума от косинусоидални вълни.

предавателят излъчва честоти в областта от 790 до 810 kHz. Ако при това, да кажем, на честота 795 kHz работи още една радиостанция, възникват големи смущения. Ако направим нашия приемник толкова чувствителен, че да приема само честота 800 kHz и да не обхваща по 10 kHz от двете страни, няма да чуем какво е казал дикторът, нали информацията се предава именно на страничните честоти! Затова е много важно да са разделени станциите с някаква област на честоти и техните странични ивици да не се препокриват, а приемникът не бива да бъде толкова селективен, че да не позволява да се приемат страничните честоти заедно с номиналната честота. Но тази проблема не предизвиква големи затруднения при радиопредаванията. Ние чуваме в областта на ± 20 kHz, а обикновено радиопредаването се води в областта от 500 до 1500 kHz, така че трябва да има достатъчно места за много станции.

Проблемата на телевизията е много по-трудна. Когато електронният лъч бяга по екрана на телевизионната тръба, той създава множество тъмни и светли точки. Тези светли и тъмни точки са и „сигналите". Обикновено, за да се „покаже" целият кадър, трябва лъчът да пробяга за една тридесета част от секундата 500 реда. Нека разделителната способност по хоризонталата и вертикалата да е повече или по-малко еднаква, т. е. на милиметър от всеки ред се падат точно толкова точки, колкото реда се падат на милиметър височина. Необходимо е да можем да различаваме последователността светло—тъмно, светло—тъмно, светло—тъмно в протежение на 500 линии. За да може да се направи това с помощта на косинусообразна вълна, изисква се дължината на вълната, т. е. разстоянието от максимума до минимума, да съответствува на дължината на 1/250 част от екрана. По такъв начин се получава $250 \times 500 \times 30$ „единички информация" в секунда, затова най-високата честота, която трябва да се предаде, се оказва приблизително равна на 4 MHz. Всъщност за да се отделят телевизионните станции една от друга, трябва да използуваме малко по-голяма ширина — около 6 MHz. Част от нея се използува за предаването на звуковия съпровод и друга информация. По такъв начин телевизионният канал има ширина 6 MHz. Разбира се, невъзможно е да се модулира с честота, превишаваща честотата на носещата вълна, затова телевизионните предавания не могат да се водят на честота, например 800 kHz.

Във всеки случай телевизионният обхват започва от честотата 54 MHz. Първият телевизионен канал в САЩ работи в ивицата от 54 до 60 MHz, т. е. има ширина 6 MHz[1]. Чакайте, можете да кажете вие, нали току-що доказахме, че страничните ивици трябва да бъдат от двете страни и затова ширината трябва да бъде два пъти по-голяма. Оказва се, че радиоинженерите са много хитри хора. Ако при анализа на модулиращия сигнал се използува не само косинус, а косинус и синус, за да се отчете фазовата разлика, между високочестотната и нискочестотната странични ивици ще се открие наличие на определено постоянно съотношение. С това искаме да кажем, че втората странична ивица не съдържа никаква нова информация в сравнение с първата, така че едната от тях може напълно да се изхвърли. Приемникът е устроен по такъв начин, че загубената информация се възстановява от носещата честота и едната странична ивица. Предаването с помощта на една странична честота — това е един много интересен метод за намаляване ширината на ивицата, необходима за предаването на информацията.

4. Локализиран вълнов пакет

Следващият въпрос, който искаме да обсъдим, това е интерференцията на вълните както в пространството, така и във

[1] В България образът има 625 реда и малко по-голяма ширина на каналите —Заб. на ред.

времето. Да предположим, че в пространството се разпространяват две вълни. Вие, разбира се, знаете, че разпространението на вълна в пространството, например звукова, може да се опише с помощта на експонентата $\exp[i(\omega t-kx)]$. Такава експонента удовлетворява вълновото уравнение, при условие че $\omega^2=\kappa^2c^2$, където c е скоростта на разпространението на вълната. В този случай експонентата може да се напише във вида $\exp[i\kappa(x-ct)]$, което се явява частен случай от общото решение $f(x-ct)$. Такава експонента трябва да описва вълна, разпространяваща се със скорост ω/κ, равна на c и затова тук всичко е наред.

Сега да съберем две такива вълни. Нека първата вълна да се разпространява с една честота, а втората — с някаква друга. Случая на нееднакви амплитуди разгледайте самостоятелно, въпреки че тук няма съществено различие. По такъв начин искаме да съберем $\exp[i(\omega_1t-\kappa_1x)]+\exp[i(\omega_2t-\kappa_2x)]$. Това може да стане с помощта на математика, аналогична на тази, която използувахме при събирането на два сигнала. Ако скоростите c на двете вълни са еднакви, това се прави много лесно, само че вместо t имаме $t'=t-x/c$. Ще се получи същото, което неотдавна направихме:

$$e^{i\omega_1\left(t-\frac{x}{c}\right)}+e^{i\omega_2\left(t-\frac{x}{c}\right)}=e^{i\omega_1t'}+e^{i\omega_2t'}. \tag{48.11}$$

При това, разбира се, получаваме точно същите модулации, как то и по-рано, които обаче се движат заедно с вълната. С други думи, ако се съберат две вълни, които не само осцилират, но се и преместват в пространството, получената вълна също ще се движи със същата скорост.

Би ни се искало да обобщим това за случая на вълни, при които отношението между честотата и вълновото число κ не е така просто, например разпространение на вълни в среда с някакъв показател на пречупване. В гл. 31 ние вече изучихме показателя на пречупване n и изяснихме, че той е свързан с вълновото число по следния начин: $k=n\omega/c$. В качеството на интересен пример намерихме показателя на пречупване n за рентгеновите лъчи:

$$n=1-\frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0m\omega^2}. \tag{48.12}$$

Всъщност в гл. 31 получавахме и по-сложни формули, обаче тази с нищо не е по-лоша, така че защо да не я вземем като пример.

Известно ни е, че даже в случай, когато ω и k не са пропорционални една на друга, все пак отношението ω/k ще бъде скоростта на разпространението на дадена честота и дадено вълново число. Това отношение се нарича *фазова скорост*, т. е. скоростта, с която се движи фазата или възелът на отделната вълна:

$$v_{фаз}=\frac{\omega}{k}. \tag{48.13}$$

Интересно е например, че за случая на разпространение на рентгеновите лъчи в стъкло тази фазова скорост е по-голяма от скоростта на светлината във вакуум (тъй като n, съгласно (48.12), е по-малък от единица), а това е малко неприятно, нали ние не мислим, че могат да се изпращат сигнали по-бързо от скоростта на светлината!

Да обсъдим сега интерференцията на две вълни, при които значенията на ω и k са свързани с някаква определена зависимост. Например написаната по-рано формула за показателя n казва, че k е известна определена функция на честотата ω. За по-голяма определеност нека да напишем формулата на зависимостта между k и ω в дадената частна задача:

$$k=\frac{\omega}{c}-\frac{a}{\omega c}, \tag{48.14}$$

където $a=N q_e^2/2\varepsilon_0 m$ е константа. Във всеки случай ние искаме да съберем такива две вълни, при които за всяка честота съществува определено вълново число.

Нека да направим това точно така, както и при получаването на уравнението (48.7):

$$e^{i(\omega_1 t-k_1 x)}+e^{i(\omega_2 t-k_2 x)}=e^{i/2[(\omega_1+\omega_2)t-(k_1+k_2)x]}\times$$
$$\times\{e^{i/2[(\omega_1-\omega_2)t-(k_1-k_2)x]}+e^{-i/2[(\omega_1-\omega_2)t-(k_1-k_2)x]}\}. \quad (48.15)$$

По такъв начин отново се получава модулирана вълна, разпространяваща се със средна честота и със средно вълново число, обаче нейната сила се изменя в съответствие с израз, зависещ от разликата на честотите и разликата на вълновите числа.

Да разгледаме сега случай, когато разликата между двете вълни е относително малка. Да предположим, че събираме две вълни с приблизително равни честоти, при това $(\omega_1+\omega_2)/2$ е практически равно на всяка от честотите ω. Същото може да се каже и за $(k_1+k_2)/2$. По такъв начин скоростта на вълната, на бързите осцилации, на възлите действително остава равна на ω/k. Но вижте, скоростта на разпространение на модулацията не е същата! Как трябва да се измени x, за да се балансира някаква величина на времето t? Скоростта на модулиращите вълни е равна на

$$v_M=\frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2}. \quad (48.16)$$

Скоростта на движението на модулацията понякога наричат *групова скорост*. Ако вземем случая на относително малка разлика между честотите и съответно относително малка разлика между вълновите числа, то този израз при граничен преход става

$$v_{\text{гр}}=\frac{d\omega}{dk}. \quad (48.17)$$

С други думи, колкото е по-бавна модулацията, толкова са по-бавни и биенията и което е най-удивителното, съществува определена скорост на тяхното разпространение, която не е равна на фазовата скорост на вълната.

Груповата скорост е равна на производната на ω по k, а фазовата скорост е равна на отношението ω/k.

Да видим може ли да се разбере защо става така. Да разгледаме две вълни с малко различаващи се дължини на вълните, както това е показано на фиг. 48.1. Те ту съвпадат по фаза, ту се различават, ту съвпадат отново и т. н. Обаче сега тези вълни в действителност представляват вълни в пространството, които се разпространяват с малко различаващи се скорости. Но тъй като фазовата скорост, скоростта на възлите на тези две вълни не е точно еднаква, то става нещо ново. Да предположим, че вървим заедно с едната вълна и наблюдаваме другата. Ако те се движеха с еднаква скорост, втората вълна би оставала спрямо нас там, където е била от самото начало, тъй като ние се движим на гребена на едната вълна и виждаме втората точно до себе си. Обаче в действителност скоростите не са равни. Честотите малко се различават една от друга и затова малко се различават и скоростите. Поради тази неголяма разлика в скоростите другата вълна или бавно ни изпреварва, или изостава. Какво става с течение на времето с възела? Ако едва-едва придвижим едната от вълните, възелът ще отиде на значително разстояние напред (или назад), т. е. сумата на тези две вълни има някаква обвиваща, която заедно с разпространението на вълните пълзи по тях с друга скорост. *Груповата скорост* се явява тази скорост, с която се предават модулиращите сигнали.

Ако изпратим сигнал, т. е. направим някакви изменения на вълната, които могат да бъдат чути и разшифровани от някого, това се явява своего рода модулация, но тази модулация, при условие че е относително бавна, ще се разпространява с групова скорост (бързите модулации се анализират значително по-трудно).

Сега можем да покажем (най-после!), че скоростта на разпространение на рентгеновите лъчи в парченце въглен например не е по-голяма от скоростта на светлината, въпреки че фазовата скорост е по-голяма от скоростта на светлината. За да се направи това, трябва да се намери отношението $d\omega/dk$, което ще пресметнем чрез диференцирането на формулата (48.14): $dk/d\omega = 1/c + a^2/\omega^2 c$. А груповата скорост е равна на обратната величина, т. е

$$v_{\text{гр}} = \frac{c}{1+\frac{a}{\omega^2}}, \tag{48.18}$$

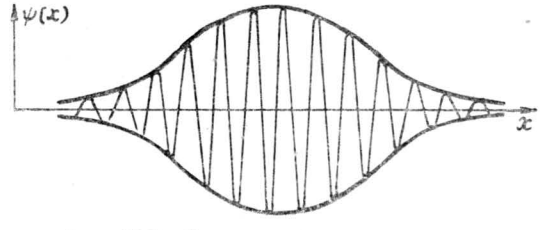
което е по-малко от c! По такъв начин въпреки че фазите могат да бягат по-бързо от скоростта на светлината, модулиращите сигнали се движат по-бавно и в това се състои решението на привидния парадокс! Разбира се, в най-простия случай $\omega = kc$ груповата скорост $d\omega/dk$ е равна също на c, т. е. когато всички фази се движат с еднаква скорост, естествено и груповата скорост ще бъде същата.

5. Амплитуда на вероятността на частиците

Да разгледаме още един необикновено интересен пример на фазовата скорост. Той се отнася към областта на квантовата механика. Известно е, че амплитудата на вероятността да се намери частицата в дадено място се изменя при известни обстоятелства в пространството и времето (нека да вземем едно измерение) по следния начин:

$$\psi = Ae^{i(\omega t - kx)}, \tag{48.19}$$

където ω е честотата, свързана с класическата енергия $E = \hbar\omega$, а k е вълновото число, което е свързано с импулса чрез съотношението $p = \hbar k$. Ние казваме, че частицата има определен импулс p, ако вълновото число е точно равно на k, т. е. ако пробягва идеална вълна, навсякъде с еднаква амплитуда. Изразът (48.19) дава амплитудата на вероятността, но ако вземем квадрата на абсолютната стойност, ще получим относителната вероятност за откриване на частицата като функция на положението и времето. В дадения случай тя е равна на константа, което означава вероятност да се открие частицата на кое и да е място. Да разгледаме сега случая, когато е известно, че да се открие частицата в някакво място е по-вероятно, отколкото на други места. Подобна картина ние описваме с вълна, която има максимум в дадено място и с отдалечаването встрани спада до нула (фиг. 48.6).



Фиг. 48.6. Локализиран вълнов пакет

(Това не е същото, което е изобразено на фиг. 48.1, където вълната има цял ред максимуми, но с тях можем да се оправим напълно, като съберем няколко вълни с приблизително еднакви стойности на ω и k. По такъв начин можем да се избавим от всички максимуми, освен от един.)

При тези обстоятелства, тъй като квадратът на израза (48.19) представлява вероятността да се намери частицата на някое място, ние знаем, че в даден момент има повече шанс да намерим частицата близо до центъра на „камбаната“, където амплитудата е максимална. Ако се почака малко, вълната ще се придвижи и след изтичането на известен интервал от време „камба-

ната“ ще премине на някое друго място. Като знаем, че отначало частицата е била разположена някъде, ние бихме очаквали съгласно класическата механика, тя да бъде някъде и по-късно, нали в края на краищата тя има *скорост* и импулс. При това квантовата теория дава в известни граници правилни класически съотношения между енергията, импулса и скоростта, само ако груповата скорост — скоростта на модулацията, е равна на скоростта на класическата частица със същия импулс.

Сега трябва да се покаже, така ли е това всъщност или не. Съгласно класическата теория енергията е свързана със скоростта чрез следното уравнение

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{48.20}$$

Точно по същия начин импулсът е равен на

$$p=\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{48.21}$$

Като следствие оттук след изключването на v се получава

$$E^2-p^2c^2=m^2c^4,$$

т. е. $p_\mu p_\mu=m^2$. Това е най-големият резултат на четириизмеримостта (за която ние вече говорихме много пъти), който установява връзка между енергията и импулса в класическата теория. Сега тъй като възнамеряваме да заменим E и p с ω и k с помощта на полагането $E=\hbar\omega$ и $p=\hbar k$, този резултат означава, че в квантовата механика трябва да съществува връзката

$$\frac{\hbar^2\omega^2}{c^2}-\hbar^2k^2=m^2c^2. \tag{48.22}$$

По такъв начин възникна връзката между честотата и вълновото число на квантово-механичната амплитуда, която описва частица с маса m. От това уравнение може да се получи

$$\omega=c\sqrt{k^2+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}},$$

т. е. фазовата скорост ω/k отново е по-голяма от скоростта на светлината!

Да разгледаме сега груповата скорост. Тя трябва да бъде равна на скоростта, с която се движи модулацията, т. е. $d\omega/dk$. За да я намерим, трябва да диференцираме квадратния корен, а това е проста работа. Производната е равна на

$$\frac{d\omega}{dk}=\frac{kc}{\sqrt{k^2+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}}}.$$

Но влизащият тук квадратен корен е просто ω/c, така че формулата може да се запише във вида $d\omega/dk=c^2k/\omega$. По-нататък тъй като k/ω е равно на p/E, то

$$v_{\text{гр}}=\frac{c^2p}{E}.$$

Но съгласно с (48.20) и (48.21), c^2p/E е равно на v — скоростта на частицата в класическата механика. По такъв начин се вижда, че като вземем под внимание основните квантовомеханични съотношения $E=\hbar\omega$ и $p=\hbar k$, определящи ω и k чрез класическите величини E и p, и даващи само уравнението $\omega^2-k^2c^2=m^2c^4/\hbar^2$, сега могат да се разберат също съотношенията (48.20) и (48.21), които свързват E и p със скоростта. Разбира се, груповата скорост трябва да бъде скоростта на частиците, ако тази интерпретация въобще има някакъв смисъл. Нека, както предполагахме, в даден момент частицата да се намира на едно място, а след това, да кажем след 10 минути — на друго. Тогава съгласно квантовата механика разстоянието, преминато от „камбаната“, разделено на интервала от време, трябва да бъде равно на класическата скорост на частицата.

6. Вълни в тримерното пространство

Ние завършваме нашето обсъждане на вълните с някои общи бележки за вълновото уравнение. Тези бележки са призвани да ни дадат картината на това, с което ни предстои да се занимаем в бъдеще, и съвсем не претендират, че вие ще ги разберете изведнаж. Те по-скоро трябва да покажат как ще изглеждат всички тези неща, когато вие малко повече се запознаете с вълните. Ние вече записахме уравнението за разпространението на звука в едно измерение:

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}.$$

Тук c е скоростта на това, което ние нарекохме вълни. Ако става дума за звук, то това е скоростта на звука, ако за светлина — това е скоростта на светлината. Ние показахме, че в звуковата вълна преместването на частиците трябва да се разпространява с някаква скорост. Но излишното налягане, както и излишната плътност също се разпространяват с някаква скорост. По такъв начин може да се очаква, че и налягането ще удовлетворява същото уравнение. Така е и всъщност, обаче докажете това самостоятелно. *Указание:* ρ_u е пропорционално на скоростта на изменение χ с разстоянието x. Следователно като се диференцира вълновото уравнение по x, незабавно ще открием, че $\partial\chi/\partial x$ удовлетворява същото уравнение. С други думи, ρ_u удовлетворява същото уравнение. Но P_u е пропорционално на ρ_u, затова и P_u удовлетворява същото уравнение. По такъв начин и налягането, и преместването се описват от това уравнение.

Обикновено вълновото уравнение за звука се записва чрез налягането, а не чрез преместването. Това е по-просто, защото налягането е скалар и няма никаква посока. Но преместването е вектор и затова е по-добре да имаме работа с налягането.

Следващият въпрос, който ни предстои да обсъдим, се отнася до вълновото уравнение в тримерното пространство. Ние знаем, че звуковата вълна в едномерното пространство се описва от решението $\exp[i(\omega t-kx)]$, където $\omega=kc_s$. Освен това известно ни е, че в три измерения вълната се описва от израза $\exp[i(\omega t-k_x x-k_y y-k_z z)]$ и в този случай $\omega^2=k^2c_s^2$ (съкратен запис на $(k_x^2+k_y^2+k_z^2)\cdot c_s^2$). Сега ние просто искаме да отгатнем вида на вълновото уравнение в тримерното пространство. Естествено в случая на звука това уравнение може да се получи с помощта на същите динамични съображения, но вече в тримерното пространство. Обаче ние няма сега да правим това, а просто ще напишем отговора: уравнението за налягането или за преместването (или за нещо друго) има вида

$$\frac{\partial^2 P_u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P_u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P_u}{\partial z^2}=\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 P_u}{\partial t^2}. \tag{48.23}$$

Правилността на това уравнение може да бъде проверена лесно с поставянето в него на функцията $\exp[i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]$. Ясно е, че при всяко диференциране по x ще става умножение по $-ik_x$. Ако диференцираме два пъти, това е еквивалентно на умножение по $-k_x^2$, така че за такава вълна първият член ще се получи равен на $-k_x^2 P_u$. Точно по същия начин вторият член ще се окаже равен на $-k_y^2 P_u$, а третият — на $-k_z^2 P_u$. От дясната страна ще получим $-\omega^2/c_s^2 P_u$. Ако изнесем пред скоба P_u и изменим знаците на всички членове, ще видим, че между k и ω веднага ще се получи желаното съотношение.

Връщайки се назад, ние трябва да стигнем до основното уравнение, което съответствува на дисперсионното съотношение (48.22) за квантовомеханичната вълна. Ако φ е амплитудата за намирането на една частица в момента t, в точка с координати x,

y и z, то основното уравнение на квантовата механика за свободна частица има вида

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{m^2c^2}{h^2}\varphi. \tag{48.24}$$

Преди всичко ще отбележим, че релативистичният характер на това уравнение се гарантира от появата на координатите x, y и z и времето t в такава удачна комбинация, че тя автоматически отчита принципа на относителността. Освен това уравнението е вълново. Ако в него поставим плоска вълна, то като следствие получаваме равенството $-k^2+\omega^2/c^2=m^2c^2/h^2$, което трябва да се изпълнява в квантовата механика. В това вълново уравнение се съдържа още едно основно нещо: всяка суперпозиция на вълни ще бъде също негово решение. По такъв начин това уравнение се опира на цялата квантова механика и на цялата теория на относителността, която вече обсъждахме с вас, поне когато имахме работа с една частица в празно пространство без всякакви потенциали и действуващи на нея сили!

7. Собствени трептения

Да се върнем сега към други много любопитни примери на биене, които малко се различават от това, което сме разглеждали досега. Представете си две еднакви махала, които са свързани помежду си със слаба пружинка. Техните дължини трябва да бъдат еднакви с възможно по-голяма точност. Ако дръпнем едното махало и го пуснем, то ще се люлее напред-назад и ще тегли ту назад, ту напред свързващата пружинка, т. е. ще се получи устройство, което създава сила със собствената честота на второто махало. От познатата ни теория на резонанса може да се заключи, че ако към някакъв предмет се прилага сила с подходяща честота, тя ще движи този предмет. По такъв начин е ясно, че едното махало, движейки се напред и назад, ще разклаща второто. Обаче при тези условия става някакво ново явление, свързано с това, че енергията на системата е крайна. Първото махало постепенно изразходва своята енергия, създавайки движение на другото махало, и в края на краищата напълно отдава своята енергия и спира. Цялата енергия сега ще бъде съсредоточена във второто махало. Но ще измине малко време и всичко ще протече обратно: енергията от второто махало ще се прехвърли назад в първото махало. Това е много интересно и занимателно явление. Ние казахме, че то е свързано с теорията на биенето и сега трябва да покажем как може да се разбере това явление от гледна точка на тази теория.

Обърнете внимание, че движението на всяко от двете махала — това са трептения с циклично изменяща се амплитуда. Затова движението на едното от махалата може да се разглежда от различни гледни точки и по-специално — като сума на две едновременни трептения с малко различаващи се честоти. По такъв начин би било възможно да се открият в тази система две други движения и да се твърди, че тъй като нашата система безусловно е линейна, то ние виждаме суперпозицията на тези две решения. Действително е лесно да се намерят два начина да се пусне нашата система така, че всяка от тях да даде като резултат идеално, абсолютно периодично трептене с една честота. Движението, с което започнахме, не е строго периодично, то не продължава през цялото време (едното махало постепенно предава своята енергия на другото и променя амплитудата си), но има начини така да се започне движението, че да не станат никакви подобни изменения. Щом ви стане ясно що за начини са това, веднага ще разберете защо става така. Например ако пуснем двете махала едновременно, то тъй като тяхната дължина е еднаква в този случай пружинката ще бездействува, двете махала ще продължават да се люлеят през цялото време заедно. (Разбира се, ако няма триене и всичко е добре нагласено.) От друга страна, съществува още една

възможност да се създаде строго периодично движение, което също има определена честота, когато махалата, дръпнати в началото в противоположни посоки на точно равни разстояния, се движат в противни посоки. Не е трудно да се съобрази, че пружинката малко увеличава „възстановяващата сила", която възниква от действието на силата на тежестта, и системата ще трепти с малко по-голяма честота, отколкото в първия случай — това е всичко. Защо с по-голяма? Поради това че пружинката тегли, като помага на силата на тежестта и това прави системата „по-твърда", така че честотата на подобно трептене е малко по-голяма.

И така в нашата система могат да се създадат трептения с постоянна амплитуда по два начина: или двете махала да се люлеят през цялото време с еднаква честота, или да се люлеят в противоположни посоки с малко по-голяма честота.

В действителност движението на системата, доколкото тя е линейна, може да се представи във вид на суперпозиция на тези два начина. (Ще напомним, че предмет на тази глава се явяват ефектите на сумиране на две движения с различни честоти.) Нека да помислим какво ще стане, ако съберем двете решения. Ако в момента $t=0$ се пуснат тези две движения (при това с еднакви амплитуди и фази), сумата на двете движения ще означава, че едното махало, на което по някакъв начин е въздействувало първото движение и по противоположен начин — второто, трябва да си остава на място, докато другото махало, люлейки се еднакво при двата начина на задвижване, ще се люлее с удвоена амплитуда. Обаче с течение на времето тези две основни *движения,* които съществуват независимо едно от друго, бавно се отместват по фаза едно спрямо друго. Това означава, че след достатъчно голям интервал от време, такъв, че в първото движение са да кажем, станали 900,5 колебания, а във второто — само 900, относителната фаза ще стане точно обратна на това, което е било в началото. Казано по друг начин, махалото, имащо в началото по-голяма амплитуда, ще спре, когато неподвижното в началото махало започне да се люлее с всичка сила!

И така виждаме, че такова сложно движение може да се разглежда в рамките на идеите на резонанса, когато енергията от едното махало преминава към другото или като суперпозиция на две движения с постоянна амплитуда и различни честоти.

49

Собствени трептения

1. Отражение на вълните

В тази глава ще разгледаме редица забележителни явления, които възникват в резултат на „затварянето“ на вълната в някаква ограничена област. Отначало трябва да установим няколко частни факта, отнасящи се например към трептенето на струната, а след това, като обобщим тези факти, ние очевидно ще стигнем до най-дълбок принцип на математическата физика.

Пръв пример на вълни в ограничено пространство — това са вълните в пространството, ограничено от едната страна. Нека да вземем простия случай на едномерна вълна върху струна. Би могло да се разгледа плоска звукова вълна в пространство, ограничено от едната страна със стена или каквито и да са примери от същия характер, но за сегашните ни цели е напълно достатъчна простата струна. Да предположим, че единият край на струната е прикрепен, хванат е например в „абсолютно твърда“ стена. Това може да се опише математически, като се укаже, че преместването на струната y в точката $x=0$ трябва да бъде равно на нула или краят на струната не може да се движи. По-нататък ако в това не беше участвувала стената, както знаем, общото решение, описващо движението на струната, би могло да се представи във вид на сума от две функции $F(x-ct)$ и $G(x+ct)$, при което първата описва вълната, бягаща по струната в едната посока, а втората — в обратната, така че

$$y=F(x-ct)+G(x+ct) \tag{49.1}$$

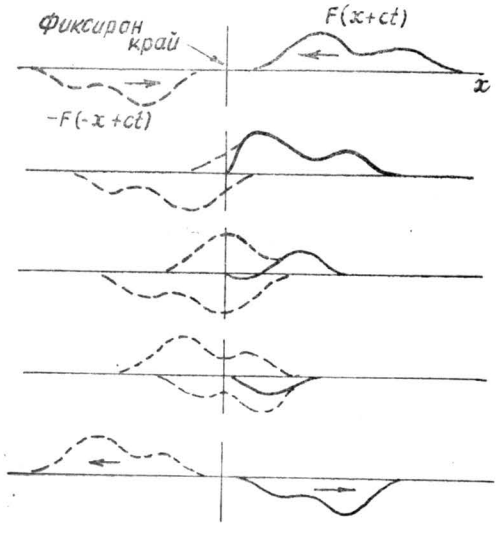
ще бъде общото решение за всяка струна. Освен това на нас ни е нужно още да удовлетворим условието за неподвижност на единия край. Ако в уравнението (49.1) положим $x=0$ и видим какви ще бъдат y във всеки момент t, ще получим $y=F(-ct)+G(+ct)$. Но тази сума трябва да бъде равна на нула във всеки момент от времето, а това означава, че функцията $G(+ct)$ трябва да бъде равна на $-F(-ct)$. С други думи, функцията G от някаква величина трябва да бъде равна на функцията $-F$ от същата величина със знак минус. Като поставим отново получения резултат в уравнението (49.1), намираме решението на поставената задача:

$$y=F(x-ct)-F(-x-ct). \tag{49.2}$$

Ясно е, че този израз дава винаги $y=0$, ако положим $x=0$.

На фиг. 49.1 е представена вълна, вървяща в отрицателно x — посока близо до точката $x=0$ и хипотетична вълна, вървяща в противоположна посока с обратен знак от другата страна на началото на координатите. Аз казах „хипотетична“, защото, разбира се, от другата страна няма никаква трептяща струна. Истинското движение на струната трябва да се разглежда като сума на тези две вълни в областта на положителните x. Като достигнат началото на координатите, те напълно се унищожават в точката $x=0$, а след това втората (отразената) вълна, вървяща, разбира се, в обратна посока, ще се окаже единствената вълна в областта на положителните x. Тези резултати са еквивалентни на следното твърдение: вълната, достигнала закачения край на струната, се отразява от него с промяна на знака. Такова отражение винаги може да се разбере, ако си го представим като нещо, което е дошло до края на струната и след това излита от стената „нагоре с краката“. Казано накратко, ако предположим, че струната е

1. Отражение на вълните
2. Вълни в ограничено пространство и собствени честоти
3. Двумерни собствени трептения
4. Свързани махала
5. Линейни системи



Фиг. 49.1. Отразяването от стена като суперпозиция на две бягащи вълни

безкрайна и че където и да се намира вълната, бягаща в едната посока, винаги съществува симетрична на нея относно точката $x=0$ друга вълна, бягаща в обратна посока, то в самата точка $x=0$ няма да има никакво преместване и затова е безразлично дали ще бъде закачена струната на това място или не.

Следващият наш пример — това е отражение на периодична вълна. Да предположим, че вълната, описвана от функцията $F(x-ct)$, представлява синусоидална вълна, която след това се отразява. Тогава отразената вълна $-F(-x-ct)$ също ще бъде синусоидална вълна със същата честота, но ще върви в противна посока. Това положение се описва по-просто с помощта на комплексните функции

$$F(x-ct)=e^{i\omega(t-x/c)} \text{ и } F(-x-ct)=e^{i\omega(t+x/c)}.$$

Не е трудно да се убедим, че ако ги поставим в израза (49.2) и положим $x=0$, то във всеки момент от времето t преместването ще бъде равно на нула и следователно необходимото условие ще се окаже изпълнено. Като използуваме сега свойствата на експонентата, можем да запишем резултата в по-прост вид:

$$y=e^{i\omega t}\left(e^{-i\omega x/c}-e^{i\omega x/c}\right)=-2ie^{\omega t}\sin\frac{\omega x}{c}. \tag{49.3}$$

Получихме нещо ново и интересно. От това решение е ясно че ако погледнем коя да е точка x от нашата струна, ще видим че тя осцилира с честота ω. Никак не е важно къде се намира тази точка, все едно честотата ще бъде същата! Обаче върху струната има такива места (където $\sin(\omega x/c)=0$), които изобщо не се преместват. Нещо повече, ако в даден момент от времето t се направи моментална снимка на трептящата струна, на фотографията ще се получи синусоидална вълна, но големината на нейната амплитуда ще зависи от времето t. От израза (49.3) може да се види, че дължината на един период на синусоидалната вълна е равна на дължината на коя и да е от вълните:

$$\lambda=\frac{2\pi c}{\omega}. \tag{49.4}$$

Неподвижните точки удовлетворяват условието $\sin(\omega x/c)=0$, което означава, че $\omega x/c=0,\ \pi,\ 2\pi,\ \ldots,n\pi,\ \ldots$. Тези точки се наричат *възли*. Всяка точка между два съседни възела се движи синусоидално нагоре и надолу, но начинът ѝ на движение си остава фиксиран в пространството. Това е основната характеристика на това, което се нарича *собствено трептене, хармонична* или *мод*. Ако движението притежава свойството всяка точка от предмета да се движи строго синусоидално и всички точки да се движат с еднаква честота (едните може би повече, а другите — по-малко), то ние имаме работа със собствено трептене.

2. Вълни в ограничено пространство и собствени честоти

Да преминем към обсъждането на следващата интересна задача. Какво ще стане, ако струната се закрепи в двата края, да кажем, в точките $x=0$ и $x=L$? Нека започнем с идеите на отражението на вълната с някоя гърбица, движеща се в една посока. С течение на времето тази гърбица ще дойде до единия край на струната и в края на краищата ще се превърне в малко сплескване, тъй като тук тя се сблъсква с обърнатата, насрещна гърбица, идваща от другата страна. Накрая първата гърбица съвсем ще изчезне, а в обратна посока ще побегне друга „насрещна“ гърбица и целият процес ще се повтори вече на другия край. Както виждате, задачата се решава съвсем просто, впрочем тук възниква интересният въпрос: може ли в този случай да се получи синусоидална вълна (току-що описаното решение е *периодично*, но, разбира се, *несинусоидално* периодично). Нека да се опитаме да „вмъкнем“ в нашата струна

синусоидално периодична вълна. Ако единият край на струната е закрепен, ние знаем, че трябва да се получи нещо подобно на нашето предишно решение (49.3). Но същото трябва да се получи и в другия край, нали той също е закрепен. Затова единствената възможност да се получи периодично синусоидално движение е да се вземе вълна, която точно се помества в дължината на струната. В противен случай не ще получим собствена честота, с която струната би продължила своите трептения. Накратко, ако по струната се пусне синусоидална вълна, която точно се помества в нейната дължина, тя ще запази своята идеално-синусоидална форма и ще трепти хармонично с някаква честота.

Можем да дадем математически формата на вълната във вид на функцията $\sin kx$, където $k=\omega/c$, както и в уравненията (49.3) и (49.4). Тази функция се превръща в нула при $x=0$, обаче това условие трябва да се изпълни и на другия край на струната. Работата е там, че вече k няма да бъде произволно както в случая на полуограничена струна. Двата края могат да бъдат закрепени при едно единствено условие, че $\sin kL=0$. Но за да бъде синусът равен на нула, неговият ъгъл трябва да бъде кратен на цяло число π—$0, \pi, 2\pi$ и т. н. Затова уравнението

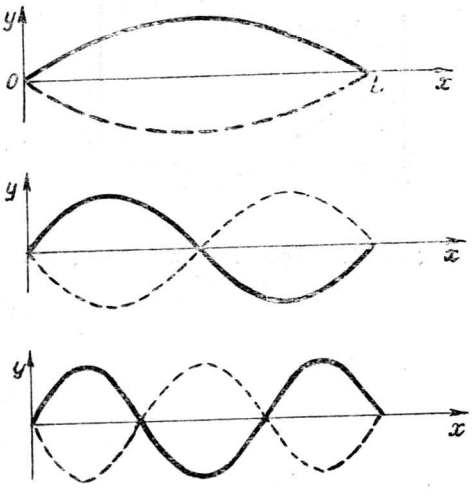
$$kL=n\pi \tag{49.5}$$

в зависимост от цялото число, което ще поставим в него, ще даде пълен набор от различни числа k. При това на всяко число k съответствува честота ω, която по формулата (49.3) е просто равна на

$$\omega=kc=\frac{n\pi c}{L}. \tag{49.6}$$

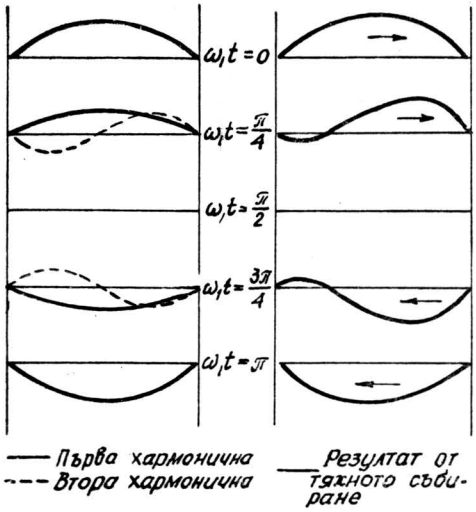
И така ние намерихме, че синусоидалните трептения на струната могат да стават *само с някакви определени честоти*. Това е най-важната характеристика на вълните в ограничено пространство. Колкото и сложна да бъде системата, винаги се оказва, че в нея може да има чисто синусоидални трептения, но честотата им се определя от свойствата на дадената система и естеството на нейните граници. В случая на струна са възможни множество различни честоти, на всяка от които съответствува определено собствено трептене — движение, повтарящо синусоидално само себе си.

На фиг. 49.2 са показани първите три собствени хармонични на нашата струна. Дължината на вълната λ на първата от тях е равна на $2L$. В това ще се убедим лесно, като продължим вълната до точката $x=2L$ и получим пълния период на синусоидалната вълна. Ъгловата честота ω е равна в общия случай на $2\pi c$, разделено на дължината на вълната λ, а тъй като сега имаме $\lambda=2L$, честотата ще бъде равна на $\pi c/L$, което се съгласува с формулата (49.6) при $n=1$. Да означим тази честота с ω_1. Следващата собствена хармонична напомня панделка с два клупа и възел по средата. Нейната дължина е просто равна на L. Съответната величина k, а следователно и честотата ω, трябва да бъдат два пъти по-големи, т. е. честотата да е равна на $2\omega_1$. Честотата на третата собствена хармонична се оказва равна на $3\omega_1$, и т. н. По такъв начин различните собствени хармонични са кратни на цяло число от най-ниската честота ω_1, т. е. ω_1, $2\omega_1$, $3\omega_1$ и т. н. Да се върнем сега към общото движение на струната. Оказва се, че всяко възможно движение може да се разглежда като едновременно действие на известен брой собствени трептения. Всъщност за описване на най-общото движение трябва да бъдат възбудени едновременно безкраен брой собствени хармонични. За да се получи известна представа какво става при такова сумиране, нека видим какво се получава при едновременното трептене на двете първи собствени хармонични. Нека първата от тях трепти така, както е показано в ред схематични чертежи на фиг. 49.3, където са изобразени отклоненията на струната през равни интервали от време в продължение на един полуперио̀д на най-ниската честота.



Фиг. 49.2. Първите три хармонични на трептяща струна

Да предположим сега, че едновременно с първата собствена хармонична работи и втората. Последователните положения на струната при възбуждането на тази собствена хармонична са показани също на фиг. 49.3 с пунктирана линия. По отношение на първата хармонична те са отместени по фаза на 90°. Това означава, че в началния момент не е имало никакво отклонение, но скоростите на двете половинки на струната са насочени в противоположни посоки. Да си спомним сега общия принцип на линейните системи: ако се вземат две кои да са решения, тяхната сума също ще бъде решение. Затова преместванията, получени от сумирането на двете решения, показани на фиг. 49.3, ще бъдат третото възможно решение. На тази фигура е показан и резултатът от събирането, който започва да напомня гърбицата, пробягваща назад и напред по струната от единия край до другия, въпреки че с помощта само на две собствени хармонични не може да се построи достатъчно добре картина на такова движение, нужни са много повече. Този резултат представлява всъщност частен случай от основния принцип на линейните системи, който гласи:



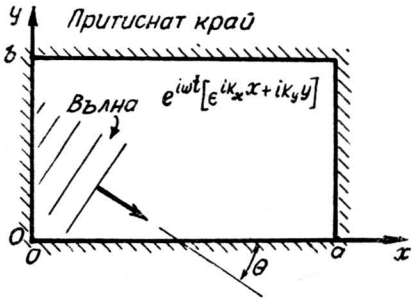
Фиг. 49.3 Две хармонични, които напомнят при събиране бягаща вълна

Всяко движение може да се разглежда като съставено от различни собствени хармонични, взети със съответните амплитуди и фази.

Значението на този общ принцип е обусловено от факта, че всяко собствено трептене е много просто нещо — това е просто синусоидално движение във времето. Наистина, даже общото движение на струната още не е най-сложното нещо. Съществува къде по-сложно движение, такова да кажем, като вибрациите на крилата на самолетите. При това даже при самолетните крила може да се открият някои собствени въртения с определени честоти. А щом това е така, пълното движение може да се разглежда като суперпозиция на хармонични трептения (с изключение на тези случаи, когато вибрацията е толкова голяма, че системата вече не може да се разглежда като линейна).

3. Двумерни собствени трептения

Сега ще преминем към разглеждане на твърде интересното поведение на собствените хармонични в двумерните трептения. Досега говорехме само за едномерни трептения: опъната струна или звукови вълни в тръба. В края на краищата ние трябва да се доберем до трите измерения, но отначало нека се спрем на по-лекия етап — етапа на двумерните трептения. Да вземем за по-голяма определеност правоъгълен гумен барабан, чиято мембрана е закрепена по края така, че в правоъгълния край на барабана тя не може да се премества. Нека размерите на правоъгълника са a и b, както е показано на фиг. 49.4. Преди всичко какви са характеристиките на възможното движение? Може да започнем с това, с което започнахме, когато разглеждахме примера със струната. Ако нямаше никакво закрепване, би могло да се очаква появяването на вълни, бягащи в някаква посока, например синусоидална вълна, описвана от функцията $\exp(i\omega t)\exp[-i(k_x x)+i(k_y y)]$, чиято посока на движение зависи от относителната стойност на числата k_x и k_y. А как сега да се направи възел на оста x, т. е. при $y=0$? Като използуваме същата идея както при едномерната струна, можем да добавим вълна, която се описва от комплексната функция — $\exp(i\omega t)\exp[-i(k_x x)-i(k_y y)]$.



Фиг. 49.4 Трептене на правоъгълна пластинка

Суперпозицията на тези вълни дава в резултат нулево преместване при $y=0$, независимо какви ще бъдат значенията на x и t. (Въпреки че тези функции ще бъдат определени и за отрицателните стойности на y — там където няма никакъв барабан и няма какво да трепти, но и на това може да не се обръща никакво внимание. Нали на нас ни се искаше да премахнем преместването при $y=0$ и ние го направихме.) В този случай втората функция може да се разглежда като отразена вълна.

Обаче на нас ни е необходимо да получим възел не само на

линията $y=0$, но и на линията $y=b$. Как да направим това? Решението на тази задача е свързано с някои неща, с които ние се занимавахме при изучаването на отражението на светлина от кристал. Вълните, които се гасят една друга при $y=0$, могат да направят същото и при $y=b$ само когато $2b\sin\theta$ е равно на цяло число дължини на вълните λ (θ е ъгълът, показан на фиг. 49.4):

$$m\lambda=2b\sin\theta, \qquad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{49.7}$$

Точно по такъв начин, т. е. чрез събиране на още две функции $[-\exp(i\omega t)]\exp[i(k_x x)+i(k_y y)]$ и $[+\exp(i\omega t)]\exp[i(k_x x)-i(k_y y)]$, всяка от които представлява отражение на другата от линията $x=0$, може да се направи възел и на оста y. Условието за това, линията $x=a$ също да бъде възлова, се получава така, както и условието при $y=b$, т. е. $2a\cos\theta$ трябва да бъде равно на цяло число дължини на вълни:

$$n\lambda=2a\cos\theta. \tag{49.8}$$

Тогава окончателният резултат е такъв: вълните „затворени" в съда имат вид на стояща вълна, т. е. образуват някакви определени собствени хармонични.

По такъв начин ако искаме да имаме работа със собствените хармонични, трябва да удовлетворим двете написани по-горе условия. За начало нека намерим дължината на вълната. Като изключим от уравненията (49.7) и (49.8) ъгъла θ, дължината на вълната може да се изрази чрез a, b, n и m. Най-лесно е това да се направи така: отначало да се разделят двете части на уравненията съответно на $2b$ и $2a$, а след това да се повдигнат на квадрат и да се съберат. В резултат ще получим уравнението

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1=\left(\frac{n\lambda}{2a}\right)^2+\left(\frac{m\lambda}{2b}\right)^2,$$

което се решава лесно относно λ:

$$\frac{1}{\lambda^2}=\frac{n^2}{4a^2}+\frac{m^2}{4b^2}. \tag{49.9}$$

И така ние определихме дължината на вълната чрез две цели числа, а чрез нея веднага получаваме честотата ω или, както е известно, честотата е равна на $2\pi c$, разделена на дължината на вълната.

Този резултат е толкова важен и интересен, че сега е необходимо да го получим строго математически без използуването на аналогиите с отражението. Нека си представим трептенето във вид на суперпозиция на четири вълни, подбрани така, че четирите линии $x=0$, $x=a$, $y=0$ и $y=b$ да бъдат възлови. Ще изискваме още всички вълни да имат еднаква честота, т. е. резултантното движение да представлява собствено трептене. От главата за отражение на светлината вече знаем, че функцията $\exp(i\omega t)\exp[-i(k_x x)+i(k_y y)]$ описва вълна, вървяща в показаната на фиг. 49.4 посока. Както и преди остава вярно уравнението (49.6), т. е. $k=\omega/c$, с тази разлика, че сега

$$k^2=k_x^2+k_y^2. \tag{49.10}$$

От фигурата е ясно, че $k_x=k\cos\theta$, а $k_y=k\sin\theta$.

По такъв начин нашият израз за преместването на правоъгълната мембрана на барабана (ще наречем това преместване φ) ще се запише във вида

$$\varphi=e^{i\omega t}\left[e^{-i(k_x x-k_y y)}-e^{i(k_x x+k_y y)}-e^{-i(k_x x+k_y y)}+e^{i(k_x x-k_y y)}\right]. \tag{49.11а}$$

Въпреки че това изглежда доста непрегледно, всъщност сумата от тези експоненти не е така претрупана. Тях може да ги превърнем в синуси, така че преместването, както се оказва, да приеме вида

$$\varphi=(-4\sin k_x x\sin k_y y)(e^{i\omega t}). \tag{49.11б}$$

С други думи, получиха се познатите синусоидални трептения, чиято форма е също синусоидална както по посока на оста x така и по посока на оста y. Граничните условия $x=0$ и $y=0$ се удовлетворяват автоматически. Освен това ние искаме φ да става нула при $x=a$ и $y=b$. Затова трябва да наложим две допълнителни условия, а именно $k_x a$ и $k_x b$ трябва да бъдат равни на цяло число π (тези цели числа могат да бъдат различни за $k_x a$ и $k_y b$!). Но както видяхме, тъй като $k_x = k\cos\theta$ и $k_y = k\sin\theta$, то оттук се получават уравненията (49.7) и 49.8), а от тях следва и крайният резултат (49.9).

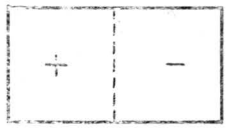
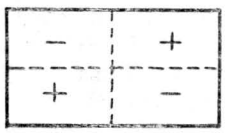
Да вземем сега за пример правоъгълник, чиято ширина е два пъти по-голяма от височината. Ако положим $a=2b$ и използуваме уравненията (49.4) и (49.9), могат да се пресметнат честотите на всички хармонични:

$$\omega^2 = \left(\frac{nc}{b}\right)^2 \frac{n^2+m^2}{4}. \qquad (49.12)$$

В табл. 49.1 са изброени няколко прости хармонични и е показана качествено тяхната форма.

Таблица 49,1

Прости хармонични и тяхната форма

Форма на собствени хармонични	m	n	$(\omega/\omega_0)^2$	ω/ω_0
	1	1	1,25	1,12
	1	2	2,00	1,41
	1	3	3,25	1,80
	2	1	4,25	2,06
	2	2	5,00	2,24

Трябва да се отбележи най-важната особеност на този частен случай — честотите не са кратни нито една на друга, нито на някакво друго число. Представата за това, че собствените честоти са хармонично свързани една с друга не е вярна в общия случай. Тя, не е вярна нито за измерителна система по-голяма от единица, нито даже за едномерна система, по-сложна, отколкото еднородната и равномерно опъната струна. Като най-прост пример може да послужи окачена верижка, чийто опън горе е по-малък, отколкото долу. Ако в такава верижка се възбудят хармонични трептения, ще възникнат собствени хармонични с различни честоти, обаче те няма да бъдат просто кратни на някакво число, а и самата форма на хармоничните няма вече да бъде синусоидална.

Още по-чудновати се оказват хармоничните на по-сложните системи. Човешката уста например представлява една кухина, разположена над гласните струни. Чрез движение на езика или устните може да се направи тръба било с отворен край, било със

закрит край, като при това диаметрите и формата на тази тръба да бъдат различни. Изобщо това е страшно сложен резонатор, но при това все пак резонатор. С помощта на гласните връзки при разговор ние създаваме някакъв тон. Този тон е много сложен, в него влизат множество звуци, а благодарение на различните резонансни честоти кухината на устата още повече го модифицира. Например певецът може да пее различни гласни: „а“, „о“, „у“ и още други със същата височина, но те ще звучат различно, или различните хармонични ще резонират различно в тази кухина. Огромната роля на резонансните честоти на кухината в образуването на звуците на гласа може да се демонстрират с много прост опит. Както е известно, скоростта на звука е обратно пропорционална на квадратния корен от плътността, затова за различни гозове тя е различна. Ако вместо въздух използуваме хелий, чиято плътност е по-малка, скоростта на звука ще се окаже по-голяма в него и всички резонансни честоти на кухината ще бъдат по-големи. Следователно ако бихме могли да напълним нашите дробове с хелий, преди да започнем да говорим, въпреки че нашите гласни струни както по-рано ще трептят със същата честота, характерът на гласа ни ще се изменя рязко.

4. Свързани махала

Накрая трябва да се подчертае, че хармонични възникват не само в сложни непрекъснати системи, но и в много прости механични системи. Като хубав пример за това може да послужи разглежданата в предишната глава система на две свързани махала. Там показахме, че общото движение на тази система може да се разглежда като суперпозиция на два типа хармонични движения с различни честоти, така че даже такава система може да се разглежда от гледна точка на собствените хармонични. В струната се възбуждат безброй собствени хармонични, в двумерна плоскост също ги има безкрайно много. В известен смисъл тук се получава даже двойна безкрайност (ако ние само знаехме как да работим с безкрайности). Но в просто механично устройство, имащо само две степени на свобода и изискващо за описанието си само две променливи, се възбуждат само две хармонични.

Да се опитаме да намерим математически тези две хармонични за случая, когато дължините на махалата са еднакви. Нека отклонението на едното махало да бъде x, на другото — y, както е показано на фиг. 49.5. При отсъствие на пружина силата на тежестта, действуваща на първото махало, е пропорционална на неговото отклонение. Ако тук нямаше пружина, за едното махало би се появила някаква собствена честота ω_0, а уравнението на движението в този случай би приело вида

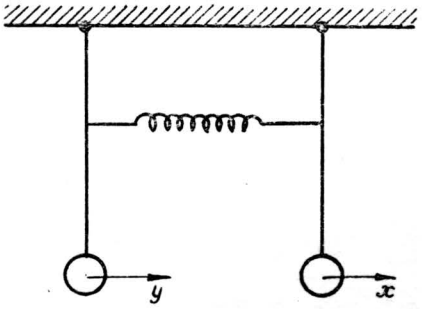
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x. \qquad (49.13)$$

При отсъствие на пружина второто махало би се люляло точно така, както и първото. Обаче при наличие на пружина в допълнение към възстановяващата сила, възникваща в резултат на гравитацията, се появява още и добавъчна сила от пружината, която се стреми да „събере“ махалата. Тази сила зависи от превишението на отклонението x над отклонението y и е пропорционална на тяхната разлика, т. е. тя е равна на някаква константа, зависеща само от геометрията, умножена по $(x-y)$. Същата сила, но в обратна посока, действува на второто махало. Затова уравненията на движението, които трябва да решим, ще бъдат следните:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - k(x-y),$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -m\omega_0^2 y - k(y-x). \qquad (49.14)$$

За да се намери движение, при което двете махала се люлеят с еднаква честота, трябва да определим колко се отклонява всяко



Фиг. 49.5 Две свързани махала.

от тях. С други думи, махалото А и махалото В ще се люлеят с еднаква честота и с някакви амплитуди A и B, чието отношение е фиксирано. Нека да проверим доколко подхожда такова решение:

$$x = Ae^{i\omega t}, \qquad y = Be^{i\omega t}. \tag{49.15}$$

Ако го поставим в уравнение (49.14) и съберем подобните членове, ще получим

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right) A = -\frac{k}{m} B,$$

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right) B = -\frac{k}{m} A. \tag{49.16}$$

При извода на тези уравнения ние съкратихме общия множител $e^{i\omega t}$ и разделихме всичко на m.

Сега виждаме, че се получиха като че ли две уравнения за две неизвестни. Обаче всъщност тук няма две неизвестни или общите мащаби на движението не могат да се намерят от тези уравнения. Те могат да ни дадат само отношението на A към B, *при което двете уравнения трябва да дадат еднаква стойност*. Изискването за съгласуваност на уравненията едно с друго налага изискване към честотата: тя трябва да бъде някаква много специална.

Но да се намери честотата в този частен случай е съвсем лесно. Ако се умножат двете уравнения, получаваме

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right)^2 AB = \left(\frac{k}{m}\right)^2 B \tag{49.17}$$

От двете страни може да се съкрати произведението AB с изключение на тези случаи, когато или A, или B са равни на нула, което значи отсъствие на движение изобщо. Но ако има движение и другите множители трябва да са равни помежду си, което води към квадратно уравнение. В резултат се получават две възможни честоти:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \quad \text{и} \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{2k}{m}. \tag{49.18}$$

Нещо повече, ако поставим тези стойности на честотите отново в уравнението (49.16), за първата честота получаваме $A = B$, т. е. пружината въобще няма да се разтяга и двете махала ще се люлеят с честота ω_0 като че ли пружината въобще я няма. В другото решение, когато $A = -B$, пружината увеличава възстановяващата сила и честотата нараства. По-интересен е случаят, когато махалата имат различни дължини. Препоръчваме в качеството на упражнение читателят сам да проведе анализа на този случай, който е много подобен на това, което ние проведохме неотдавна.

5. Линейни системи

Нека сега направим равносметка на разгледаните по-горе идеи, които очевидно се явяват аспекти на най-общия и удивителен принцип на математическата физика. Ако имаме линейна система, чиито характеристики не зависят от времето, нейното движение, общо казано, не е задължено да бъде особено просто. Всъщност то може да бъде извънредно сложно, обаче съществуват такива особени движения (обикновено те са цял ред), при които формата на трептенето зависи синусоидално от времето. За трептящите системи, за които сега ставаше дума, ние обикновено получавахме мнима експонента, но вместо да кажа „експоненциално“, аз предпочетох да кажа „синусоидално“. Обаче ако се стремим към по-голяма общност, трябва да говорим за някакви особени движения, с много специална форма, които се изменят експоненциално с времето. Най-общото движение на системите винаги може да се представи във вид на суперпозиция на движенията, включващи всяка от различните експоненти.

Има смисъл да се подчертае още веднаж специално за случая на синусоидално движение, че линейната система не е обезателно длъжна да се движи чисто синусоидално, т. е. с една определена честота, но както и да се движи, това движение може да се представи във вид на суперпозиция на чисто синусоидални трептения. Честотата на всяко от тези трептения, както и формата на вълната зависят от свойствата на системата. Общото движение на коя да е такава система се характеризира с определянето на амплитудата и фазата на всяка от хармоничните при тяхното събиране. Това може да се каже и по друг начин: трептенето на всяка линейна система е еквивалентно на набор от хармонично независими осцилатори, чиито честоти съответствуват на честотите на собствените хармонични на дадената система.

Ще завършим тази глава със забележката за връзката на хармоничните с квантовата механика. Като трептящи обекти и величини, които се изменят с времето, в квантовата механика се явяват амплитудите на вероятността, които определят вероятността за откриването на електрон или система от електрони на дадено място. Тази амплитуда може да се изменя в пространството и времето и да удовлетворява линейно уравнение. Но при прехода към квантовата механика става преименуване. Това, което ние наричахме честота на амплитудата на вероятността, преминава в енергия в нейния класически смисъл. Затова установеният по-горе принцип може да се преведе на езика на квантовата механика, като се замени думата *честота* с думата *енергия*. Ще се получи например следното: квантовомеханична система (например атом) не притежава обезателно определена енергия, точно така, както и проста механична система няма обезателно определена честота, но каквото и да бъде поведението на системата, то винаги може да се представи във вид на суперпозиция на състояния с определена енергия. Енергията на всяко състояние, както и формата на амплитудата, която дава вероятността за намиране на частицата в различни места, се определя от свойствата на атома. Общото движение може да бъде описано със задаване на амплитудите на всяко от различните енергетични състояния. Именно тук се крие причината за възникване на енергетични нива в квантовата механика. Тъй като квантовата механика описва всичко във вид на вълни, при известни обстоятелства, когато електронът не притежава достатъчно енергия, за да се откъсне безвъзвратно от протона, той представлява просто *вълна в ограничено пространство*. Затова, както и при ограничената струна, при решаването на вълновото уравнение в квантовата механика възникват определени дискретни честоти. В квантовомеханична интерпретация това ще бъдат определени *енергии*. Следователно следствие на това, че квантовомеханичната система се описва с помощта на вълни, може да има определени състояния с фиксирана енергия. Като пример могат да послужат дискретните енергетични нива на атомите.

50

Хармонични

1. Музикални звуци
2. Ред на Фурие
3. Качество и хармония
4. Коефициенти на Фурие
5. Теорема за енергията
6. Нелинейна реакция

1. Музикални звуци

Казват, че Питагор пръв открил интересния факт, че едновременното звучене на две еднакви струни с различна дължина е по-приятно за слуха, *ако* дължините на тези струни се отнасят една към друга както малки цели числа. Ако дължините на струните се отнасят както 1:2 — това е музикална октава, ако те се отнасят както 2:3 — това съответствува на интервала между нотите до и сол и се нарича квинта. Тези интервали се смятат за „приятно“ звучащи акорди. Това откритие направило на Питагор такова впечатление, че въз основа на него той създал школата на „питагорейците“ (така ги наричали), които мистично вярвали във великата сила на числата. Те предполагали, че нещо подобно ще се открие и по отношение на планетите или „сферите“. Понякога може да се чуе изразът „музика на сферите“. Смисълът му е в това, че се е предполагало съществуването в природата на числена връзка между орбитите на планетите или между други неща. Това се смята за нещо като суеверие на древните гърци. Но много ли е далеч от това днешният научен интерес към количествените съотношения? Откритието на Питагор, освен геометрия, е било първият пример за установяване на числени връзки в природата. Наистина, изглежда е било много чудно да се открие неочаквано, че в природата има такива *факти*, които се описват от прости числени съотношения. Обикновеното измерване на дължини позволява да се предскаже това, което на пръв поглед изглежда, че няма никакво отношение към геометрията — създаването на „приятни“ звуци. Това откритие довело до мисълта, че аритметиката и математичният анализ очевидно могат да служат като добро средство за разбирането на природата. Резултатите от съвременната наука напълно потвърждават тази гледна точка.

Питагор е направил своето откритие само с помощта на опитни наблюдения. Обаче очевидно не му е било ясно цялото значение на това откритие. А ако това беше станало, развитието на физиката би започнало много по-рано. (Впрочем винаги е по-лесно да се разсъждава за това, какво е направил някой някога си и какво на негово място би *трябвало* да се направи!)

Може да се отбележи още една трета страна на това интересно откритие, отнасящо се до двете ноти, които звучат *приятно* за слуха. Но далеч ли сме ние от Питагор в разбирането на това *защо* само някои звуци са приятни за слуха? Очевидно общата теория на естетиката не се е придвижила много от времето на Питагор. И така само това откритие на гърците има три аспекта: експеримент, математически съотношения и естетика. Досега физиците са се добрали до успех само в първите две. В тази глава ние ще разкажем за съвременното разбиране на откритието на Питагор.

Всред звуците, които чуваме, има такъв вид, който се нарича *шум*. На него съответствуват някакви неравномерни трептения на тъпанчето на ухото, предизвикани от неравномерни трептения на намиращите се в близост обекти. Ако се начертае диаграма на зависимостта на налягането на въздуха върху тъпанчето (а следователно и на негóвото преместване) от времето, то графиката, съответствуваща на шума, ще изглежда така, както е изобразено на фиг. 50.1,а. (Такъв шум може например да се предизвика с тропане на крака.) А *музикалният* звук има друг характер. Музиката се характеризира с наличие на повече или по-малко

дълги тонове или музикални „ноти“. (Впрочем музикалните инструменти също могат да произвеждат шум.)

Тонът може да трае сравнително кратко, например когато ударим по клавиш на пиано, или неопределено дълго, когато, да кажем, флейтист изсвири дълга нота.

В какво се състои особеността на музикалната нота от гледна точка на налягането на въздуха? Музикалният звук се отличава от шума по това, че неговата графика е периодична. Нека дори формата на трептенето на налягането на въздуха с времето да бъде някаква неправилна, но тя трябва да се повтаря отново и отново. Пример за зависимостта на налягането от времето за музикален звук е показан на приведената по-горе фиг. 50.1,б.

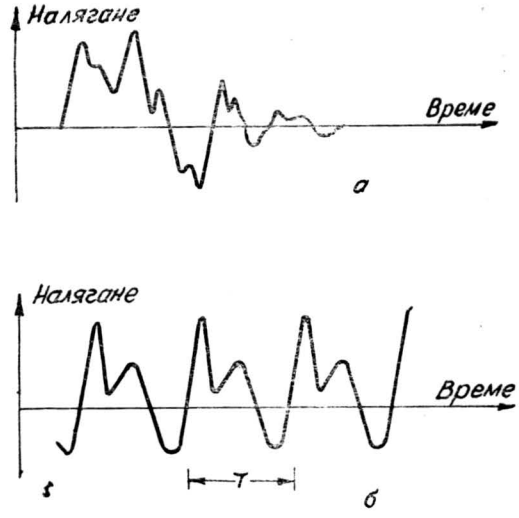
Обикновено когато говорят за музикален тон, музикантите определят три негови характеристики: сила, височина и „качество“. Както е известно, „силата“ се определя от големината на изменението на налягането. На „височината“ съответствува периодът от време на повторение на основната форма на налягането („ниските“ ноти имат по-дълъг период от „високите“). А под „качество“ на тона се разбира разликата, която можем да доловим между две ноти с еднаква сила и височина. Ние прекрасно различаваме звученето на обоя, цигулката или сопраното даже ако височината на издаваните от тях звуци изглежда еднаква. Тук вече става дума за структурата на периодично повтарящи се форми.

Нека да разгледаме накратко звука, произведен от вибрираща струна.

Ако дръпнем струната, а след това я отпуснем, следващото движение ще се определя от вълните, които сме възбуди. Както знаете, тези вълни ще потеглят по струната в двете посоки, а след това ще се отразят от нейните краища. Така те ще бягат напред и назад доста дълго време. Колкото и сложни да са тези вълни, те ще се повтарят периодично отново и отново.

Периодът на тези повторения е просто равен на времето T, което е необходимо на вълната, за да пробяга два пъти цялата дължина на струната. Нали точно това е времето, необходимо на всяка вълна, като се отрази от всеки край да се върне в първоначалното положение и да продължи движението си в началната посока. Времето, необходимо на вълната да достигне до края на струната във всяка посока, е еднакво. Всяка точка на струната след цял период се връща в своето изходно положение, след това отново се отклонява от него и отново след един период се връща и т. н.

Звукът, който възниква при това, трябва да повтаря същите трептения. Ето защо, като дръпнем струната, получаваме музикален звук.



Фиг. 50.1. Налягането като функция на времето
а—за шума; б—за музикален звук

2. Ред на Фурие

В предишната глава се запознахме с трептяща система от друга гледна точка. Видяхме, че в струната възникват различни собствени хармонични и че всяко частно трептене, което можем да получим от началните условия, може да се разглежда като съставена в съответните пропорции комбинация от няколко едновременно осцилиращи собствени хармонични. Ние намерихме за струната, че собствените хармонични имат честоти ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$... Затова най-общото движение на струната се сумира от синусоидални трептения с основната честота ω_0 след това втората хармонична с $2\omega_0$, след това третата хармонична с $3\omega_0$ и т. н. Основната хармонична се повтаря след всеки период $T_1=2\pi/\omega_0$, втората хармонична — след всеки период $T_2=2\pi/2\omega_0$. Тя се повтаря *също* и след всеки период $T_1=2T_2$, т. е. след *два* свои периода. Точно по същия начин след периода T_1 се повтаря и третата хармонична. В този интервал се поместват три нейни периода. И ние отново разбираме защо дръпнатата струна напълно повтаря формата на своето движение след период T_1. Така се получава музикалният звук.

Досега говорихме за движението на струната. Обаче *звукът*, който представлява движение на въздуха, предизвикано от движението на струната, трябва също да се състои от тези хармонични, въпреки че не можем да говорим вече за собствени хармонични на въздуха. При това относителната сила на различните хармонични във въздуха може да бъде съвсем различна спрямо тази на струната, особено ако струната е „свързана“ с въздуха посредством „звучаща дъска“. Различните хармонични са свързани с въздуха по различен начин.

Ако за музикалния тон функцията $f(t)$ представлява налягането на въздуха в зависимост от времето (да кажем такава, каквато е на фиг. 50.1,б), може да се очаква, че $f(t)$ се записва във вид на сума на известен брой прости хармонични функции от времето (подобни на $\cos \omega t$) за всяка от различните хармонични честоти. Ако периодът на трептене е равен на T, основната ъглова честота ще бъде $\omega = 2\pi/T$, а следващите хармонични ще бъдат 2ω, 3ω и т. н.

Тук се появява малко усложнение. Ние нямаме право да очакваме, че задължително за всяка честота началните фази ще бъдат равни една на друга. Затова трябва да се използуват функции от вида $\cos(\omega t + \varphi)$. По-просто е, обаче, вместо това да се използува за *всяка* честота както синус, така и косинус. Ще припомним, че

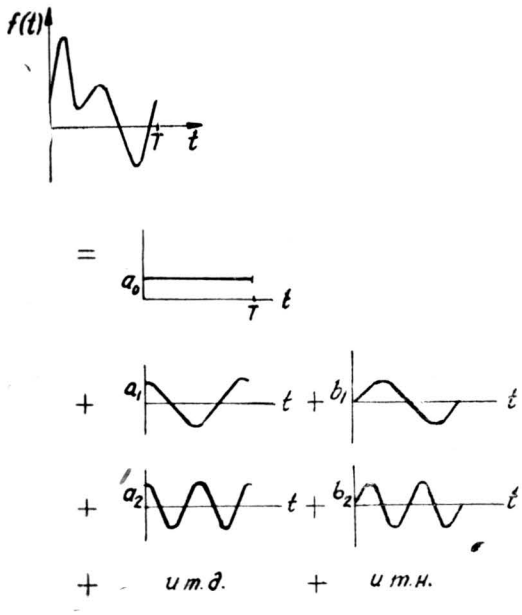
$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos\varphi \cos\omega t - \sin\varphi \sin\omega t, \qquad (50.1$$

а тъй като φ е константа, то всички синусоидални трептения с честота ω могат да бъдат записани във вид на сума от членове, в единия от които влиза $\sin \omega t$, а в другия — $\cos \omega t$.

И така идваме до заключението, че всяка периодична функция $f(t)$ с период T може да бъде математически записана във вида

$$\begin{aligned} f(t) = {} & a_0 + \\ & + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + \\ & + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \\ & + a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \\ & + \ldots \qquad + \ldots \qquad , \end{aligned} \qquad (50.2)$$

където $\omega = 2\pi/T$, а a и b са числови константи, показващи с каква тежест влиза всяка компонента на трептенето в общото трептене $f(t)$. За по-голяма общност ние добавихме в нашата формула член с нулева честота a_0, въпреки че обикновено за музикалните тонове той е равен на нула. Това е просто отместване на средната стойност на звуковото налягане (т. е. отместване на „нулевото“ ниво). С този си член нашата формула е вярна за всеки случай. Уравнението (50.2) е показано схематично на фиг. 50.2. Амплитудите на хармоничните функции a_n и b_n се подбират по специално правило. На фигурата те са показани само схематично без съблюдаване на мащаба. (Редът (50.2) се нарича *ред на Фурие* за функцията $f(t)$.)



Фиг. 50.2. Всяка периодична функция $f(t)$ е равна на сумата от простите хармонични функции

Казахме, че *всяка* периодична функция може да се напише в този вид. Трябва да се внесе малка поправка и да се подчертае, че в такъв ред може да се разложи всяка звукова вълна или всяка функция, с която се срещаме във физиката. Разбира се, математиците могат да измислят такава функция, че да не можем да я съставим от прости хармонични (например функция, която „завива“ назад, така че за някои стойности на t тя има две значения!). Не си струва обаче да се безпокоим за такива функции.

3. Качество и хармония

Сега вече можем да опишем от какво се определя „качеството“ на музикалния тон. То се определя от относителното количество на различните хармонични, т. е. от относителните стойности на a и b. Тон, който съдържа само първата хармонична,

се нарича „чист“, а тон с няколко силни хармонични се нарича „богат“. Цигулката дава хармонични в едно съотношение, а обоят — в друго.

Може да се „направят“ различни музикални тонове, като се свържат към високоговорител няколко „осцилатори“. (Осцилаторът обикновено дава приблизително чисти, прости, хармонични трептения.) За честоти на осцилаторите да изберем ω, 2ω, 3ω и т. н. Като направим към всеки осцилатор регулатор на силата, става възможно да се смесват хармоничните във всяка желана пропорция и по този начин да се създават звуци с различно качество. Така например работи електрическият орган. Клавишите избират честотата на основния осцилатор, а педалите контролират относителната пропорция на различните хармонични. С помощта на тези регулатори може да се застави органът да звучи, като флейта, обой или цигулка.

Интересно е, че за получаването на такъв „изкуствен“ звук съвсем не е необходимо да се разделят осцилаторите на „синусови“ и „косинусови“. За всяка честота ни е необходим само един осцилатор. Нашето ухо не е много чувствително към относителната фаза на хармоничните. То възприема „синусовата“ и „косинусовата“ части на честотата *изцяло*. Затова нашият анализ е по-точен, отколкото е необходимо за обяснение на *субективната* страна на музиката. Обаче реакцията на микрофона или на някой друг физически инструмент все пак зависи от фазата и нашият пълен анализ е просто необходим за такива случаи.

„Качеството“ на разговорната реч се определя от гласните звуци. Формата на устата определя честотата на собствените хармонични трептения на звука в нея. Някои от тези хармонични се възбуждат от звуковите вълни на гласните струни. По такъв начин става усилване на едни хармонични в сравнение с други. Когато изменяме формата на устата си, ние даваме преимущество на някои хармонични честоти над други. Благодарение на този ефект например съществува разлика между звука „о-о-о“ и звука „а-а-а“.

На всички е известно, че всеки гласен звук, да кажем „о-о-о“, когато говорим или пеем, винаги е подобен сам на себе си, както при високи, така и при ниски честоти. От описания от нас механизъм бихме очаквали, когато отваряме уста и произнасяме звука „а-а-а“, да отделяме някакви *определени* честоти, които *не трябва* да се изменят при повишаването на гласа. По такъв начин с промяната на височината отношението на важните хармонични към основния тон, т. е. това, което ние наричаме „качество“, трябва някак да се изменя. Очевидно механизмът, с чиято помощ познаваме звуците на говора, не е основан на съотношението между различните хармонични.

Какво може да се каже сега за откритието на Питагор? Разбираме, че основните честоти на двете струни, чиито дължини се отнасят както 2:3, ще се отнасят както 3:2. Но защо те заедно звучат „приятно“? Очевидно отговорът трябва да се търси в честотата на хармоничните. Втората хармонична на късата струна ще има *същата* честота, както и третата хармонична на дългата струна. (Лесно е да се покаже или просто да се повярва, че дърпайки струната, ние възбуждаме няколко силни ниски хармонични.)

Очевидно вярно е следното правило: нотите звучат хармонично, когато имат хармонични с еднаква честота. Нотите дисонират, ако техните *висши* хармонични имат честоти, близки една до друга, но достатъчно различаващи се, за да възникнат бързи биения между тях. Защо обаче биенията звучат неприятно и защо унисонът на висшите хармонични звучи приятно, ние не можем нито да определим, нито да опишем. Като изхождаме от нашите знания, не можем да кажем кое трябва *да звучи* приятно, както не знаем какво трябва да мирише *приятно*. С други думи, нашето разбиране на това явление не отива по-далеч от простото твърдение, че когато нотите звучат в унисон, е приятно. Но от това не можем нищо да изведем освен свойството хармония в музиката.

Хармоничните съотношения, които току-що описахме, се проверяват лесно, като се направи един прост опит с пиано. Нека да означим три последователни ноти до в средата на клавиатурата с до, до′ и до″, а трите последователни ноти сол, разположени непосредствено над тях — със сол, сол′ и сол″. При това основните хармонични ще имат следните относителни честоти:

До —2	Сол —3
До′ —4	Сол′ —6
До″ —8	Сол″ —12.

Ето как могат да се демонстрират тези хармонични съотношения. Нека да натиснем *бавно* клавиша до′ така, че той да не прозвучи, но да се е повдигнал демпферът. Ако сега натиснем до *заедно* с основната хармонична, ще бъде възбудена и втората хармонична, която ще възбуди основната хармонична на струната до′. Ако отпуснем клавиша до (оставяйки натиснат клавиша до′), демпферът ще заглуши струната до и ще можем да чуем как замира тихият звук на струната до′. Точно по същия начин третата хармонична на до може да предизвика звучене на струната сол′ или шестата хармонична на до (която звучи много потихо) може да предизвика трептене на основната хармонична на струната сол″.

Ще се получи съвсем друг резултат, ако ние отначало тихичко натиснем струната сол, а след това ударим по клавиша до′. Третата хармонична на до′ ще съответствува на четвъртата хармонична на сол, така че ще бъде възбудена *само* четвъртата хармонична на сол. Ние можем да чуем (ако слушаме много внимателно) звука сол″, който е две октави по-висок, отколкото сол, който натиснахме. Може да се измислят много комбинации на тази игра.

Ще отбележим междувременно, че мажорната тоналност може да се определи просто чрез условието, че всеки от трите мажорни акорда (фа-ла-до), (до-ми-сол) и (сол-си бемол-ре) представляват последователност от тонове със съотношения на честотите (4:5:6). Тези отношения и фактът, че в октавата (до-до′, сол-сол′ и т. н.) честотите се отнасят както 1:2, определят в идеалния случай целия строй, който се нарича „натурален или питагорийски строй“. Но обикновено клавишните инструменти от типа на пианото не се настройват така, а се прави малко „нагласяване“, така че за всички възможни начални тонове отношението на честотите е само *приблизително* вярно. При такъв строй, наречен „темперирам“, октавата (за която както преди отношението на честотите е равно на 1:2) се дели на 12 равни интервала, така че отношението на честотите за всеки интервал е равно на $2^{1/12}$. За квинтата отношението на честотите ще бъде вече не 3/2, а $2^{7/12}=1{,}499$, но за болшинството хора то е достатъчно близко до 3/2[1].

---

[1] В основата да делението на октавата на дванадесет степени лежи откритието на Питагор. Той взимал струна, притискал я по средата и получавал звук с една октава по-висок, отколкото звука на непритиснатата струна. След това отново притискал половината струна по средата и получавал звук, по-висок с още една октава и т. н. Точно по същия начин, като притискал последователно струната на 1/3 от дължината ѝ, той всеки път получавал звук, по-висок с квинта. И се оказало, че 12 квинти почти точно се побират в интервал от 7 октави [т. е. $2^7 \approx (3/2)^{12}$]. Ако сега от всяка квинта развием цял брой октави нагоре и надолу, то всяка първоначална октава ще се раздели на 12 части Така е възникнал питагорийският строй. Бедата обаче е в това, че 12 квинти са само *приблизително* равни на 7 октави, затова в различни места на диапазона „стъпалцата“ се получавали нееднакви. При развитието на мелодията тези неточности са се натрупвали и са възникнали противни на ухото интервали, така наречените „вълци“, които страшно досаждали на музикантите. Понякога се стигало до куриози. Разказват, че известният композитор Жак Рамо съумявал така ловко да извлича от органа „вълчи“ звуци, че веднаж, като искал да се откаже от длъжността на църковен органист, той довел до ужас светите отци със „свиренето“ си и ги убедил в своята „неталантливост“. Много сили са изхабени за прогонването на „вълците“. С това специално са се занимавали такива умове като Кеплер и Ойлер. Обаче това се удало не на физик и не на математик, а на органиста Андрей Веркмайстер. Решението му е гениално просто: той се отказал от чистите квинти, като ги съкратил дотолкова, че една дузина поместил в 7 октави и

И така установихме правилата на благозвучието чрез съвпадането на хармоничните. Може би това съвпадение се явява *причината* за благозвучието? Някой твърдеше, че два абсолютно *чисти* тона, т. е. грижливо очистени от висши хармонични, не дават усещане за благозвучие или неблагозвучие (дисонанс), когато техните честоти са равни или приблизително равни на очакваното отношение. (Това е много сложен опит, тъй като е много трудно да се изготвят чисти тонове по причини, които ще видим по-нататък.) Ние не можем да кажем с увереност дали ухото сравнява хармоничните или се занимава с аритметика, когато решаваме, че звукът ни харесва.

4. Коефициенти на Фурие

Да се върнем сега към твърдението, че всяка нота, т. е. всяко *периодично* трептене може да се представи във вид на подходяща комбинация от хармонични. Би ни се искало да знаем как може да се намери необходимото участие на всяка хармонична. Разбира се, ако са *дадени* всичките коефициенти a, b, като ползуваме формулата (50.2), лесно ще пресметнем функцията $f(t)$. Сега въпросът се състои в това, как могат да се намерят коефициентите при различните хармонични, ако ни е дадена функцията $f(t)$? (Не е трудно да се изпече сладкиш, ако се знае рецептата, но как да се напише рецептата, ако имаме готов сладкиш?)

Фурие открил, че всъщност това не е много трудно да се направи. Наистина не е трудно да се намери членът a_0. Ние казахме, че той е равен на средната стойност на $f(t)$ в продължение на един период (от $t=0$ до $t=T$). Лесно се вижда, че това е действително така. Средната стойност на синуса или косинуса за един период е равна на нула. За два, три или друго цяло число периоди тя също е равна на нула По такъв начин средната стойност на всички членове от дясната страна на (50.2) с изключение само на a_0 е равна на нула. (Ще припомним, че ние сме задължени да изберем $\omega = 2\pi/T$.)

По-нататък понеже средната стойност на сумата е равна на сумата от средните стойности, то средната стойност на $f(t)$ ще бъде просто равна на средната a_0. Но нали a_0 е просто *константа* и нейната средна стойност е равна на самата нея. Като си спомним определението за средна стойност, получаваме

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dT. \tag{50.3}$$

Не е много по-трудно да се намерят останалите коефициенти. За да направим това, ще използуваме един трик, открит от самия Фурие. Да предположим, че сме умножили двете страни на уравнението (50.2) с някаква хармонична функция, да кажем по $\cos 7\,\omega t$. При това се получава

$$\begin{aligned} f(t)\,\cos 7\,\omega t = {} & a_0 \cos 7\,\omega t + \\ & + a_1 \cos \omega t \cos 7\,\omega t + b_1 \sin \omega t \cos 7\,\omega t + \\ & + a_2 \cos 2\,\omega t \cos 7\,\omega t + b_2 \sin 2\,\omega t \cos 7\,\omega t + \\ & + \ldots \qquad\qquad + \ldots \\ & + a_7 \cos 7\,\omega t \cos 7\,\omega t + b_2 \sin 7\,\omega t \cos 7\,\omega t + \\ & + \ldots \qquad\qquad + \ldots \qquad\qquad . \end{aligned} \tag{50.4}$$

А сега да усредним двете страни на равенството. Средното от члена $a_0 \cos 7\,\omega t$ по периода T е пропорционално на средното от косинуса по седемте негови периоди. Но последното е просто равно на нула. Средното на *почти всички* останали членове *също*

несъвместимото се съвместило, а „вълците“ изчезнали. Така е възникнал съвременният темперирaн строй.

ще бъде равно на нула. Действително нека разгледаме члена с a_1. Знаем, че в общия случай

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\cos(A+B) + \frac{1}{2}\cos(A-B), \tag{50.5}$$

така че членът с a_1 е равен на

$$\frac{1}{2} a_1 (\cos 8\,\omega t + \cos 6\,\omega t). \tag{50.6}$$

По такъв начин се получават два косинуса: един с осем пълни периода, а друг — с шест. *Те и двата са равни на нула.* Затова средната стойност на този член е равна на нула.

За члена с a_2 получаваме $\cos 9\,\omega t$ и $\cos 5\,\omega t$, всеки от които при усредняването ще се превърне в нула. За члена с a_9 ще се получи $\cos 16\,\omega t$ и $\cos(-2\,\omega t)$. Но $\cos(-2\,\omega t)$ — това е същото като $\cos(2\,\omega t)$, така че отново двата члена ще дадат при усредняването нула. Ясно е, че *всички* събираеми с косинуси, с *изключение* на един, ще дадат нула при усредняването. Това единствено събираемо ще бъде членът с a_7. За него получаваме

$$\frac{1}{2} a_7 (\cos 14\,\omega t + \cos 0). \tag{50.7}$$

Косинус от нула е равен на единица, а средното от него, разбира се, също е равна на единица. И така ние получихме, че средното от всички членове с косинуси в уравнението (50.4) е равно на $^1/_2\, a_7$.

Още по-лесно е да се разправим със синусите. Като ги умножаваме по косинус от типа $\cos n\omega t$, може да се покаже, че те *всички* се превръщат в нула при усредняването.

Виждаме, че начинът, измислен от Фурие, действува като своеобразно сито. Когато умножаваме по $\cos 7\,\omega t$ и усредним, всички членове освен a_7 се отсяват и в резултат остава

$$\text{Средното } [f(t)\cos 7\,\omega t] = \frac{a_7}{2} \tag{50.8}$$

или

$$a_7 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos 7\,\omega t\,dt. \tag{50.9}$$

Нека читателят сам докаже, че коефициентите b_7 например се намират с помощта на умножението на (50.2) по $\sin 7\,\omega t$ и усредняване на двете страни. Резултатът е такъв:

$$b_7 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin 7\,\omega t\,dt. \tag{50.10}$$

Но това, което е вярно за 7, очевидно е вярно и за всяко друго цяло число. Сега ще запишем резултата от нашето доказателство в следната по-елегантна математическа форма. Ако m и n са цели, различни от нула числа и ако $\omega = 2\pi/T$, то

$$\text{I.}\quad \int_0^T \sin n\,\omega t \cos m\,\omega t\,dt = 0 \tag{50.11}$$

$$\text{II.}\quad \int_0^T \cos n\,\omega t \cos m\,\omega t\,dt = \begin{cases} 0, & \text{ако } n \neq m, \\ \frac{T}{2}, & \text{ако } n = m. \end{cases}$$

$$\text{III.}\quad \int_0^T \sin n\,\omega t \sin m\,\omega t\,dt = \tag{50.12}$$

$$\text{IV.}\quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\,\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\,\omega t. \tag{50.13}$$

$$V.\quad a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt. \tag{50.14}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt. \tag{50.15}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt. \tag{50.16}$$

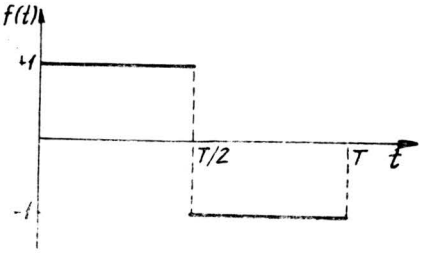
В предишните глави беше удобно за описание на простото хармонично движение да използуваме експоненциалната функция. Вместо $\cos\omega t$ ние използувахме $R_e\exp(i\omega t)$ — реалната част на експоненциалната функция. В тази глава използувахме синус и косинус, защото с тях, както се вижда, малко по-просто се извършва доказателството. Обаче нашият краен резултат — уравнението (50.13), може да се запише в по-събран вид:

$$f(t)=R_e\sum_{n=0}^{\infty}\hat{a}_n e^{in\omega t}, \tag{50.17}$$

където $\hat{a}_n$ е комплексното число a_n-ib_n ($c\ b_0=0$). Ако навсякъде използуваме едни и същи означения, то трябва да напишем

$$\hat{a}_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ e^{-in\omega t}\,dt\quad (n\geqslant 1). \tag{50.18}$$

И така сега можем да разлагаме периодичната вълна на нейните хармонични компоненти. Тази процедура се нарича *разлагане на Фурие*, а отделните членове се наричат *Фурие-компоненти*. Ние обаче досега не сме показали, че като определим всички Фурие-компоненти и след това ги съберем, действително ще се върнем към нашата функция $f(t)$. Математиците са доказали, че за широк клас от функции (в същност за всички функции, интересни за физиците), които може да се интегрират, ние отново получаваме $f(t)$. Но има едно малко изключение. Ако функцията $f(t)$ е прекъсната, т. е. ако тя неочаквано скача от една стойност на друга, сумата на Фурие за такава функция дава в точката на прекъсването стойност, лежаща между най-високата и най-ниската стойност. По такъв начин, ако имаме странната функция $f(t)=0$ за $0\leqslant t<t_0$ и $f(t)=1$ за $t_0\leqslant t\leqslant T$, нейната сума на Фурие ще ни даде навсякъде правилната стойност, с *изключение на точката* t_0, където вместо единица ще се получи $^1/_2$. Във всеки случай физически дори не трябва да се иска функцията да бъде навсякъде нула *чак до точката* t_0, а в самата нея изведнъж да стане равна на единица. Може би трябва специално за физиците да се издаде такъв „указ“, че всяка прекъсната функция (която може да бъде опростяване на *истинска* физическа функция) да приема в точката на прекъсването средната стойност. Тогава всяка такава функция, с всеки краен брой „стъпалца“, както и всички други интересни за физиката функции, ще се описват правилно от реда на Фурие.



Фиг. 50.3 Стъпалообразна функция
$f(t)=+1$ за $0<t>T/2$
$f(t)=-1$ за $T/2<t<T$

В качеството на упражнение предлагаме на читателя да намери реда на Фурие за функцията, показана на фиг. 50.3. Тъй като тази функция не може да се запише в точен алгебричен вид, то да се пресметне по обичайния начин интеграла от 0 до T, е невъзможно. Обаче ако го разделим на две части, в интервала от 0 до $T/2$ (в който функцията $f(t)=1$) и в интервала от $T/2$ до T (в който $f(t)=-1$), то той се пресмята лесно. В резултат трябва да се получи

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots\right), \tag{50.19}$$

където $\omega=2\pi/T$. Оказва се по такъв начин, че за нашата стъпаловидна вълна (със специално избрана фаза) ще има само не-

четни хармонични, при което техните амплитуди са обратно пропорционални на честотите.

Нека да проверим, че за някоя стойност на t резултатът на (50.19) ще бъде действително отново $f(t)$. Да вземем $t=T/4$ или $\omega t=\pi/2$. Тогава

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2}+\cdots\right), \tag{50.20}$$

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right). \tag{50.21}$$

Сумата на този ред[1] е равна на $\pi/4$ и, както се вижда, $f(t)=1$.

5. Теорема за енергията

Енергията на вълната е пропорционална на квадрата на нейната амплитуда. За сложна вълна енергията за един период е пропорционална на $\int_0^T f^2(t)\,dt$. Тази енергия може да се свърже с коефициентите на Фурие. Да напишем

$$\int_0^T f^2(t)\,dt=\int_0^T\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega t+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\omega t\right]^2 dt. \tag{50.22}$$

След повдигането на квадрат в дясната част ще получим сума от всевъзможни взаимно кръстосани членове от типа $a_5\cos 5\omega t\, b_7\cos 7\omega t$. Обаче по-горе показахме [уравнения (50.11) и (50.12), че интегралите от всички такива членове за един период са равни на нула, така че ще останат само квадратните членове, подобни на $a_5^2\cos^2 5\omega t$. Интегралът от всеки квадрат за косинус или синус за един период е равен на $T/2$, така че получаваме

$$\int_0^T f^2(t)\,dt=T a_0^2+\frac{T}{2}\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+b_1^2+b_2^2+\cdots\right)=$$

$$=Ta_0^2+\frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2). \tag{50.23}$$

Това уравнение е наречено „теорема за енергията“, която гласи, че пълната енергия на вълната е просто равна на сумата от енергиите на всички Фурие-компоненти. Например като приложим тази теорема към реда (50.19), получаваме

$$T=\frac{T}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right),$$

доколкото $[f(t)]^2=1$. По такъв начин ние разбрахме, че сумата от квадратите на обратните нечетни числа е равна на $\pi^2/8$. Точно по същия начин, като напишем отначало реда на Фурие за функцията и използуваме теоремата за енергията, може да се докаже резултатът, който ще ни потрябва в гл. 45, т. е., че $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$ е равно на $\pi^4/90$.

---

[1] Тя може да се изчисли по следния начин. Да отбележим първо, че $\int_0^x dx\,(1+x^2)=\operatorname{arc\,tg} x$. Второ, като разложим подинтегралния израз в ред, ще получим $1/(1+x^2)=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$. Като интегрираме след това почленно този ред (от нула до x), получаваме $\operatorname{arc\,tg} x=1-x^3/3+x^5/5-x^7/7+\cdots$, а полагайки $x=1$, ще докажем използувания резултат, понеже $\operatorname{arc\,tg} 1=\pi/4$.

6. Нелинейна реакция

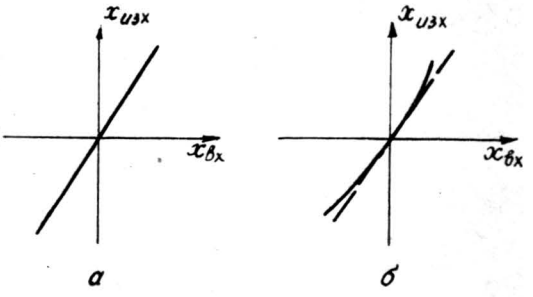
Накрая в теорията на хармоничните има едно много важно явление, което трябва да се отбележи, като се отчете неговата практическа важност, но това вече се отнася до областта на нелинейните ефекти. Във всички разглеждани досега от нас системи се предполагаше, че те са линейни. Реакцията на действието на силата, например преместване или ускорение, беше винаги пропорционална на силите. Токовете в електрическата верига също бяха пропорционални на напрежението и т. н. Сега искаме да разгледаме случай, когато отсъствува строга пропорционалност. Да си представим за минута устройство, чиято реакция $x_{\text{изход}} \equiv x_{\text{изх}}$ в момента t се определя от външното въздействие $x_{\text{вход}} \equiv x_{\text{вх}}$ в същия момент t. Например $x_{\text{вх}}$ може да бъде сила, а $x_{\text{изх}}$ — преместване или $x_{\text{вх}}$ — ток, а $x_{\text{изх}}$ — напрежение. Ако устройството беше линейно, бихме получили

$$x_{\text{изх}}(t) = K x_{\text{вх}}(t), \tag{50.24}$$

където K е константа, независеща нито от t, нито от $x_{\text{вх}}$. Да предположим обаче, че устройството е само приблизително линейно, т. е. всъщност трябва да напишем

$$x_{\text{изх}}(t) = K[x_{\text{вх}}(t) + \varepsilon x_{\text{вх}}^2(t)], \tag{50.25}$$

където ε е малко в сравнение с единицата. Такива линейна и нелинейна реакции са показани на фиг. 50.4.



Фиг. 50.4 Реакции
а-линейна, $x_{\text{изх}} = kx_{\text{вх}}$; б-нелинейна, $x_{\text{изх}} = k(x_{\text{вх}} + \varepsilon x_{\text{вх}}^2)$.

Нелинейната реакция води към някои важни практически следствия. Някои от тях сега ще обсъдим. Отначало да видим, какво ще се получи, ако през подобно устройство пуснем „чист“ тон. Нека $x_{вх} = \cos \omega t$. Ако построим график на зависимостта на $x_{изх}$ от времето, то ще се получи плътната крива на фиг. 50.5. За сравнение там е прокарана и пунктирна крива, представляваща реакцията на линейната система. Виждаме, че на изхода се получава вече не косинусообразна функция. Тя е по-остра във върха и по-плоска в основата. Затова казваме, че изходният сигнал е *изкривен*. Обаче както е известно, такава вълна няма да бъде вече чист тон, а ще придобие някакви висши хармонични. Тези хармонични могат да се намерят. Като поставим $x_{\text{вх}} = \cos \omega t$ в уравнението (50.25), получаваме



Фиг. 50.5. Ресакция на нелинейно устройство прямо входящ сигнал
$\cos \omega t$. За сравнение е показана и линейната реакция.

$$x_{\text{изх}} = k(\cos \omega t + \varepsilon \cos^2 \omega t). \tag{50.26}$$

Като използуваме равенството $\cos^2 \theta = {}^1/_2 (1 + \cos 2\theta)$, намираме

$$x_{\text{изх}} = K\left(\cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cos 2\omega t\right). \tag{50.27}$$

По такъв начин в изходящата вълна има не само основната компонента, която беше и във входящата, но и някаква част от втората хармонична. Освен това в изходящата вълна се е появил и постоянният член $K(\varepsilon/2)$, който съответствува на отместването на средната стойност, показано на фиг. 50.5. Ефектът на поява на отместване на средната стойност се нарича *изправяне*.

Нелинейното устройство ще изправя и ще дава на изхода висши хармонични. Въпреки че предположената от нас нелинейност добавя само втора хармонична, нелинейност от по-висок порядък, например $x_{\text{вх}}^2$, или $x_{\text{вх}}^4$, ще дава вече по-високи хармонични.

Друг резултат на нелинейната реакция се явява *модулацията*. Ако входящата функция съдържа два (или повече) чисти тона, на изхода ще се получат не само техните хармонични, но и други честотни компоненти. Нека $x_{\text{вх}} = A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t$, при което ω_1 и ω_2 не се намират в рационално отношение една към друга. Тогава в допълнение на линейния член (равен на произведението от K по входящата вълна) ще получим на изхода

$$x_{\text{изх}} = K\varepsilon(A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t)^2, \tag{50.28}$$

$$x_{\text{изх}} = K\varepsilon(A^2 \cos^2 \omega_1 t + B^2 \cos^2 \omega_2 t + 2AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t). \tag{50.29}$$

Първите два члена в скобите на уравнението (50.29) са стари познати. Те дават нулевата и втората хармонична, но последният член — това е нещо ново.

Този нов „кръстосан“ член $AB\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t$ може да се разглежда от две страни. Първо, ако двете честоти се различават много една от друга (например ω_1 е много по-голяма от ω_2), можем да смятаме, че кръстосаният член представлява косинусообразни трептения с променлива амплитуда. Аз имам предвид такова записване:

$$AB\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t = C(t)\cos\omega_1 t, \tag{50.30}$$

където

$$C(t) = AB\cos\omega_2 t \tag{50.31}$$

Ние казваме, че амплитудата на колебанието $\cos\omega_1$ *се модулира* с честотата ω_2.

Второ, същият кръстосан член може да се разглежда от друга гледна точка:

$$AB\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t = \frac{AB}{2}[\cos(\omega_1-\omega_2)t+\cos(\omega_1+\omega_2)t], \tag{50.32}$$

т. е. може да се каже, че възникват две *нови* компоненти, едната от които е равна на *сумата* на честотите $\omega_1+\omega_2$, а другата — на *разликата* $\omega_1-\omega_2$

По такъв начин съществуват два различни, но еквивалентни начина за тълкуване на едно и също явление. В граничния случай $\omega_1 \gg \omega_2$ тези две различни гледни точки могат да се свържат със забележка, че тъй като $(\omega_1+\omega_2)$ и $(\omega_1-\omega_2)$ са близки една до друга, между тях трябва да се наблюдават биения. Но тези биения дават в резултат *модулация* на амплитудата на трептенията със *средна* честота ω_1, половина от разликата на честотите $2\omega_2$. Сега вие виждате защо тези две описания са еквивалентни.

И така ние открихме, че нелинейната реакция дава няколко ефекта: изправяне, възникване на хармонични и модулация, т. е. възникване на компоненти със сумата и разликата на честотите.

Обърнете внимание, че всички тези ефекти са пропорционални не само на коефициента на нелинейност ε, но и на произведението на амплитудите: било A^2, било B^2, било AB. Затова очакваме, че те ще бъдат по-важни за *силните* сигнали, отколкото за слабите.

Описаните от нас ефекти намират множество практически приложения. Най-напред що се касае до звука, както се предполага, нашето ухо е нелинеен апарат. Такава представа възниква от факта, че даже когато звукът съдържа само чисти тонове, при голяма сила възниква усещането, че *чуваме* висши хармонични, а също сумата и разликата на честотите.

Апаратите, които обикновено се използуват в звукопроизвеждащите устройства — усилватели, високоговорители и т. н. — винаги имат някакви нелинейности. Те изкривяват звука, като пораждат хармонични, които ги е нямало в началото. Тези нови хармонични се възприемат от ухото и без съмнение са нежелателни. Именно по тази причина високочестотната апаратура трябва да бъде колкото може „по-линейна“. (Защо нелинейността на нашето собствено *ухо не е* „неприятна“, а откъде знаем, че нелинейността „лежи“ във *високоговорителя*, а не в нашето *ухо* — не е ясно!)

Обаче в някои случаи нелинейността е съвършено *необходима* и в някои части на радиопредаващите и приемащи устройства тя умишлено се прави по-голяма. При радиопредавания с помощта на амплитудна модулация сигналите от „гласа“ (с честота от порядък на няколко килохерца) се комбинират с „носещия сигнал“ (с честота от порядък на няколко мегахерца) в нелинейната верига, която се нарича *модулатор*. При това се получават модулирани трептения, които след това се излъчват в ефира. В приемника сигналът отново попада в нелинеен контур, който съ-

бира и изважда честотите на модулирания сигнал, като отделя отново звуковия сигнал.

Когато разглеждахме въпроса за преминаването на светлината през веществото, предполагахме, че принудените трептения на зарядите са пропорционални на електричното поле на светлината, т. е. ние взехме линейна реакция. Това е действително много добро приближение. Едва в последните няколко години бяха построени източници на светлина (лазери), които дават интензивност, достатъчна, за да се наблюдават нелинейни ефекти. Сега може да се създават хармонични на светлинните честоти. Ако се пропусне през стъкло силна червена светлина, тя ще излезе оттам с малка добавка от втора хармонична — син цвят!

51

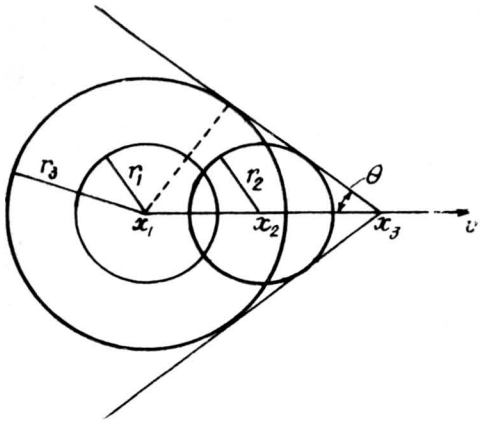
Вълни

1. Вълна от движещ се предмет
2. Ударни вълни
3. Вълни в твърдо тяло
4. Повърхностни вълни

1. Вълна от движещ се предмет

Завършихме количествения анализ на вълните, но ще посветим още една допълнителна глава на някои качествени оценки на различни явления, свързани с вълните. Те са много сложни за подробен анализ. С вълни вече се занимаваме в продължение на няколко глави, затова по-вярно би било да наречем предмета на настоящата глава „някои от по-сложните явления, свързани с вълните".

Пръв обект на нашето обсъждане ще бъде ефектът, предизвикан от източник на вълни, който се движи със скорост, превишаваща скоростта на разпространение на вълните, т. е. по-бързо от тяхната фазова скорост. Да разгледаме отначало вълни, които подобно на звука или светлината имат определена постоянна скорост. Ако източникът на звука се движи със свръхзвукова скорост, ще стане нещо, подобно на следното. Нека в даден момент източник, намиращ се в точка x_1, да поражда звукова вълна (фиг. 51.1), тогава в следващия момент източникът ще се премести в точка x_2, а вълната от точка x_1 ще се разпространи на радиус r_1, който е по-малък от разстоянието, изминато от източника. Разбира се, от точката x_2 ще тръгне друга вълна. Когато източникът се премести още по-далеч, в точка x_3 и оттук също тръгне вълна, то вълната от точката x_2 ще се разпространи на радиус r_2, а вълната от точката x_1 — на радиус r_3. Разбира се, всичко това става непрекъснато, а не на някакви етапи и затова се получава цял ред такива вълнови пръстени с обща допирателна линия, минаваща през центъра на източника. Виждаме, че вместо да поражда сферични вълни, както би станало, ако беше неподвижен, източникът поражда фронт, който образува конус в тримерното пространство или две пресичащи се прави в двумерното. Ъгълът между тези две прави се намира лесно от фигурата. За дадения интервал от време източникът изминава разстояние, пропорционално на неговата скорост v, да кажем $x_3 - x_1$. В това време фронтът на вълната се разпространява на разстояние r_3, пропорционално на c_w — скоростта на вълната. Поради това е ясно, че синусът на ъгъла на полуотвора е равен на отношението на скоростта на вълната към скоростта на източника, а това може да бъде само тогава, когато C_w е по- малко от v, или скоростта на обекта е по-голяма от скоростта на вълната:

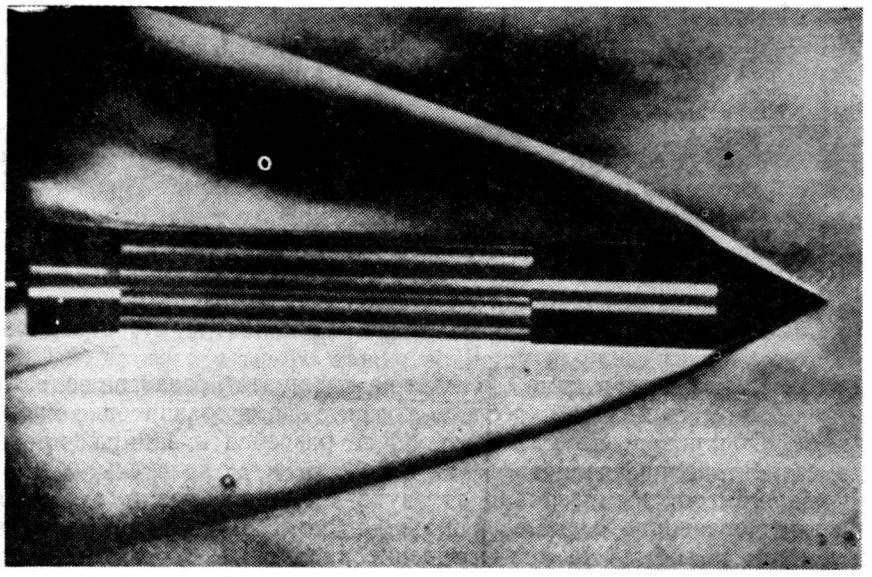


Фиг. 51.1. Фронт на ударна вълна, който образува конус с връх в източника и ъгъл на полуразтвора $\theta = \arcsin(cw/v)$.

$$\sin\theta = \frac{c_w}{v} \cdot \qquad (51.1)$$

Интересно е, че движещият се предмет съвсем не е длъжен да бъде източник на звук. Оказва се, че когато предметът се движи по-бързо от скоростта на звука, самият той *произвежда* звук. Затова съвсем не му е нужно да вибрира. Всеки предмет, който се движи в дадена среда по-бързо, отколкото тази среда пренася вълните, автоматично ще поражда вълни просто благодарение на своето движение. Това е по-лесно да се разбере за случая на звука, но същото става и със светлината. Отначало може да ни се струва, че нищо не може да се движи по-бързо от скоростта на светлината. Обаче фазовата скорост на светлината в стъкло например е по-малка, отколкото във вакуум, а през парче стъкло може да се пусне такава частица, чиято скорост да бъде твърде близка до скоростта на светлината във вакуум, тъй като фазовата скорост на светлината в стъкло може да бъде равна само на 2/3 от нея. Частица, която лети по-бързо от светлината в дадена среда, поражда конична светлинна

вълна с връх в източника подобно на вълните, предизвикани от лодка (тези вълни са от едно и също естество). Като се измери ъгълът при върха на конуса, може да се определи скоростта на частицата. Това се използува във физиката на измерване скоростта на частици като един от методите за определяне на тяхната енергия при високоенергетични изследвания. Единственото, което



Фиг. 51.2. Ударна вълна в газ, предизвикана от снаряд, който се движи по-бързо от звука

се налага да се измери, това е посоката на излъчване на светлината.

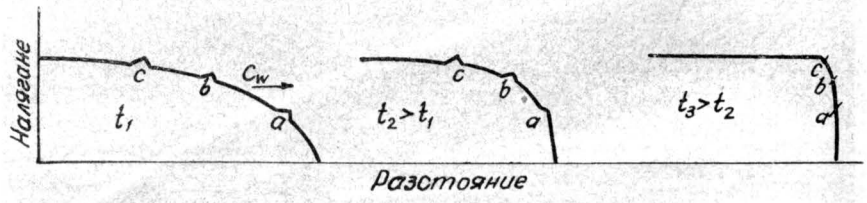
Такова излъчване се нарича излъчване на Черенков, който пръв го е наблюдавал. Тамм и Франк изясниха теоретично колко интензивно трябва да бъде то. За тази работа през 1958 г. съвместно им бе присъдена Нобелова премия.

Подобно явление за случая на звука е показано тук на фиг. 51.2. Това е фотография на обект, който се движи през газ със скорост, превишаваща скоростта на звука. Изменението на налягането води към изменение в коефициента на пречупването, затова границата на вълните може да стане видима с помощта на специална оптическа система. И така предмет, който се движи по-бързо от скоростта на звука, действително създава конична вълна. Обаче при по-внимателно разглеждане се оказва, че всъщност границата е изкривена. В приближение това е действително права линия, но близо до върха тя е изкривена и сега ще обсъдим как се получава това. Това ни води непосредствено към втората тема на дадената глава.

2. Ударни вълни

Много често скоростта на вълната зависи от нейната амплитуда и в случая на звука тази зависимост възниква по следния начин. Движещият се във въздуха предмет трябва да го отмества от пътя си, като при това предизвиква смущение във вид на някаква стъпаловидна функция на налягането, при което налягането зад вълновия фронт се оказва по-голямо, отколкото в несмутената област, т. е. в областта, където вълната (която се разпространява с нормална скорост) още не е стигнала. Зад вълновия фронт въздухът се оказва адиабатно свит, затова температурата му ще бъде по-висока, отколкото пред фронта. Но скоростта на звука се покачва заедно с температурата и затова в областта зад скока тя се оказва по-голяма, отколкото скоростта на звука преди него.

Това означава, че всяко друго смущение зад скока, предизвикано например от постоянния натиск на тялото или нещо друго, ще се движи по-бързо, отколкото самият фронт, или с увеличението на налягането се увеличава скоростта. Тази картина е показана на фиг. 51.3, при което за по-голяма нагледност допълнителните смущения са взети във вид на малки гърбички. Виждаме, че областите на високото налягане с течение на времето „догонват“ фронта на вълната, докато в края на краищата вълната на налягането се превърне във вълна със стръмен фронт. Ако силата

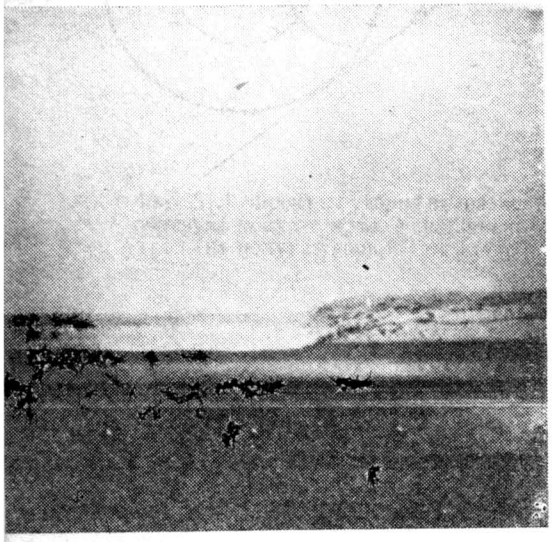


Фиг. 51.3. „Моментални снимки“ на ударния фронт в последователни моменти от времето

на вълната е много голяма, „в края на краищата“ означава веднага. Ако вълната е достатъчно слаба, това ще заема сравнително много време. Обикновено звукът по-скоро се разсейва и замира, преди да стане това превръщане.

Налягането, предизвикано от звука на нашия говор, е твърде малко в сравнение с атмосферното — само една милионна част или нещо подобно. Но при изменение на налягането със стойност от порядъка на 1 атм. скоростта на вълната се увеличава примерно с 20% и „заострянето“ на фронта на вълната става съответно по-бързо. Очевидно в природата нищо не протича безкрайно бързо и това, което наричаме „стръмен“ фронт, всъщност има все пак някаква малка ширина, той не е безкрайно стръмен. Разстоянието, на което става всичко това, е от порядъка на средната дължина на свободния пробег на молекулата, но на такива разстояния вълновото уравнение става невярно, нали при неговото извеждане не отчитаме молекулярната структура на газа.

Да се върнем отново към фиг. 51.2. Виждаме, че кривината се обяснява лесно, ако се разбере, че налягането близо до върха е по-голямо, отколкото далеч от него, затова и ъгълът Q тук е по-голям. По такъв начин кривината е възникнала следствие зависимостта на скоростта от силата на вълната. Например вълната от взрива на атомна бомба се движи много по-бързо от звука в течение на известно време, докато не отиде достатъчно далеч и в резултат на разминаването не бъде отслабена в такава степен, че падът на налягането да стане малък по отношение на атмосферния. При това скоростта на фронта се приближава към скоростта на звука в газа, в който той се разпространява. (Скоростта на ударната вълна се оказва винаги по-голяма от скоростта на звука в газа пред нея и по-малка от скоростта на звука в газа зад нея. По такъв начин импулсите, идващи отзад, ще догонват фронта, но самият той ще се движи в средата по-бързо, отколкото е нормалната скорост на звуковия сигнал. Затова никой не може да предскаже само по звука появата на ударната вълна докато не стане много късно. Разбира се, светлината от взрива на бомбата се вижда по-рано, но да се предугади идването на ударната вълна е невъзможно, преди нея няма никакъв звуков сигнал.)



Фиг. 51.4. Падане на водата и водовъртежи

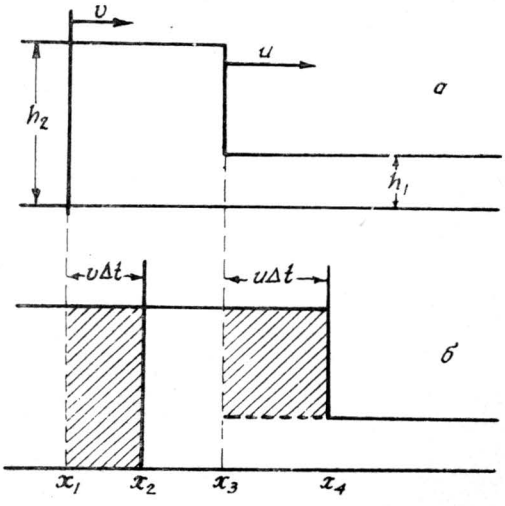
Натрупването на вълни е много интересно явление и неговата причина се състои основно в това, че след преминаването на едната вълна скоростта на следващата след нея вълна трябва да нарасне.

Да разгледаме още един пример на същото явление. Представете си дълъг канал с крайна ширина и дълбочина, напълнен с вода. Ако по канала с достатъчна бързина движим бутало, водата пред него ще се събира като сняг пред снегочистачка. Сега си представете положение, подобно на изобразеното на фиг. 51.4,

когато някъде в канала изведнъж изникне праг с височина, равна на нивото на водата. Може да се покаже, че дългите вълни в канала вървят по-бързо в дълбоката вода, отколкото в плитката. Затова всеки нов тласък или някакви други неравномерности в енергията, постъпваща от буталото, ще побягнат напред и ще се съберат върху фронта на вълната. Теоретично ние отново трябва да получим в края на краищата стръмен фронт. Обаче (вж. фиг. 51.4) тук възникват някои усложнения. Вие виждате вълната, вървяща отгоре по канала, при което буталото се намира някъде далеч от дясната страна на канала. Отначало може да ни се струва, че това е добра вълна, каквато трябва и да се очаква, но по-нататък тя става все по-остра и по-остра, докато стане това, което е показано на фигурата. Водата на повърхността започва да се вълнува силно и да прелива надолу, но което е най-съществено, както преди нейният край си остава стръмен и пред него няма никакво смущение.

В действителност водната вълна е много по-сложно нещо, отколкото звукът. Обаче за илюстрация ще се опитаме да анализираме скоростта на така наречения висок прилив в канала. Работата не е там, че това е много важно за нашите цели (тук няма да има никакво обобщение), това е само илюстрация как законите на механиката, които ние добре знаем, са способни да обяснят подобно явление.

Представете си за минута, че повърхността на водата има такъв вид, какъвто е изобразен на фиг. 51.5а и че на горното ниво h_2 тя се движи със скорост v, а фронт със скорост u се надига над несмутената повърхност, чиято височина е h_1. Ние искаме да определим скоростта, с която се движи фронтът. За интервала от време Δt вертикалната плоскост, преминаваща отначало през точка x_1, ще се придвижи на разстояние $v\Delta t$, т. е. от x_1 до x_2, а фронтът на вълната ще измине разстоянието $u\Delta t$.



Фиг. 51.5. Два разреза на висок прилив в канал

Разрезът б е направен след интервал от време Δt по-късно от разреза а.

Сега да приложим законите за запазването на веществото и импулса. Отначало да вземем първия от тях. Виждаме, че на единица ширина на канала количеството вещество $h_2v\Delta t$, преминало през точката x_1 (защрихованата област на фиг. 51.5, б), се компенсира от другата защрихована област, представляваща количеството вещество $(h_2-h_1)\,u\Delta t$. Като разделим на Δt, ще получим $vh_2=u(h_2-h_1)$. Но това още не е достатъчно, тъй като, въпреки че са ни известни h_1 и h_2, ние още не знаем нито u, нито v, а искаме да намерим тези две величини.

Следваща стъпка ще бъде използването на закона за запазването на импулса. Ние още не сме засягали въпросите за налягането във водата и други от хидродинамиката, но и така е ясно, че налягането във водата на някаква дълбочина трябва да бъде достатъчно, за да поддържа стълба вода над тази дълбочина. Следователно налягането на водата е равно на произведението от плътността ρ по g и по дълбочината. Тъй като налягането на водата нараства линейно с дълбочината, средното налягане върху плоскост, минаваща например през точката x_1, ще бъде равно на $1/2\ \rho g h_2$, което също представлява средната сила на единица ширина и на единица дължина, която тласка плоскостта към точката x_2. За да се получи пълната сила, действуваща върху водата отляво, трябва да умножим още веднаж по h_2. От друга страна, налягането отдясно на разглежданата област дава противоположно насочена сила, която по същите причини е равна на $1/2\rho g h_1^2$. Сега трябва да приравним тези сили към скоростта на изменението на импулса. По такъв начин трябва да изясним колко е по-голям импулсът в случая, изобразен на фиг. 51.5, б, в сравнение с този, показан на фиг. 51.5, а.

Виждаме, че допълнителната маса, която е придобила скорост v, е равна просто на $\rho h_2u\Delta t-\rho h_2v\Delta t$ (на единица ширина), а нейното умножаване по v дава допълнителния импулс, който трябва да бъде приравнен към импулса на силата $F\Delta t$:

$$(\rho h_2u\Delta t-\rho h_2v\Delta t)v=\left(\frac{1}{2}\,\rho g h_2^2-\frac{1}{2}\,\rho g h_1^2\right)\Delta t\,.$$

Като изключим от това уравнение v с поставянето на $vh_2 = u(h_2 - h_1)$ и като го опростим, получаваме окончателно $u^2 = gh_2(h_1 + h_2)/2h_1$.

Ако разликата във височините е много малка, така че h_1 и h_2 са приблизително равни, то скоростта ще бъде равна на $\sqrt{gh}$. Както ще видим по-късно, това е вярно само при условие че дължината на вълната е много по-голяма от дълбочината на канала.

Може да се постъпи аналогично и за ударните вълни, само че сега трябва да се добави уравнението за запазването на вътрешната енергия, защото ударната вълна е необратимо явление. Действително, ако законът за запазване на енергията се провери в задачата за високата приливна вълна, ще видим, че той не се спазва. Когато разликата във височините е малка, енергията почти се запазва, но щом разликата във височините стане по-забележима, възникват големи загуби. Това се проявява в падането на водата и във водовъртежите, показани на фиг. 51.4.

От гледна точка на адиабатния процес в ударната вълна също произлиза аналогична загуба на енергия. Енергията в звуковата вълна зад ударния фронт се изразходва за нагряване на газа, което съответствува на клокочене на водата при високия прилив. Оказва се, че трябва да се решат три уравнения, за да се опише всичко това в случая на звука, при което трябва да се отчете, че температурата зад ударната вълна и пред нея, както видяхме, не е еднаква.

Ако се опитаме да пуснем високия прилив в обратна посока ($h_2 < h_1$), то ще се окаже, че загубата на енергия е отрицателна. Но доколкото енергия няма откъде да се вземе, високият прилив не може да поддържа сам себе си — той не е стабилен. Ако опитаме да създадем вълна от такъв вид, по-нататък тя ще става все по-плоска и по-плоска, нали зависимостта на скоростта от височината, която по-рано даваше стръмен фронт, ще работи в нашия случай в обратна посока.

3. Вълни в твърдо тяло

Следващият тип вълни, за които трябва да поговорим — това са вълните в твърдо тяло. Вече разгледахме звуковите вълни в течност и газ, а между тях и звуковите вълни в твърдо тяло има непосредствена аналогия. Ако блъснем рязко едно твърдо тяло, то ще се свие. То се съпротивлява на свиването и в него възникват вълни, аналогични на звуковите. Обаче в твърдото тяло може да има и вълни от друг вид, каквито няма в течността. Ако възбудим в твърдо тяло трептения с помощта на страничен натиск (това се нарича преместване), тялото се стреми да се върне в началното положение. Именно с това по определение твърдото тяло се отличава от течното. Ако изкривим течност и я подържим малко така, че да се успокои, а след това я отпуснем, тя ще остане в това състояние, но ако вземем твърдо тяло, подобно на трептящо парче желе, натиснем го и го отпуснем, то отново ще се върне назад. В тялото възниква вълна на преместването, която ще се разпространи така, както и вълната на свиването. Във всички случаи скоростта на тези вълни е по-малка от скоростта на надлъжните вълни. В известно отношение вълните на преместването напомнят повече светлинни вълни, понеже тук също имаме работа с поляризация. При звука няма никаква поляризация, това е просто вълна на свиване, а светлинните трептения имат характерна ориентация, перпендикулярна на посоката на разпространението им.

И така в твърдо тяло може да има вълни от двата вида. Първо, там се разпространяват вълни на свиване, аналогични на звука във въздуха, и второ, вълни на преместване. Ако нашето твърдо тяло не е кристал, вълната на преместването може да бъде поляризирана във всяка посока. (Разбира се, всички твърди тела са кристали, но ако вземем парченце, състоящо се от микрокристали с всякакви ориентации, то кристалната анизотропия ще се усредни.)

Има още един интересен въпрос, отнасящ се до звуковите вълни. Какво ще се получи, ако дължината на вълната в твърдото тяло става все по-малка и по-малка? Докога може да продължава това? Ясно е, че тя не може да става по-малка от разстоянието между атомите или ако под вълна разбираме такова явление, когато едната точка отива надолу, а следващата нагоре и т. н., то най-късата възможна дължина на вълната при това е очевидно равна на междуатомното разстояние. Известно ви е, че трептенията могат да бъдат както надлъжни, така и напречни, дълговълнови и късовълнови. Ако разглеждаме дължини на вълни, сравними с междуатомното разстояние, то вече скоростта няма да бъде постоянна, ще възникне дисперсионен ефект, когато скоростта става зависима от вълновото число. А висшата хармонична на напречните вълни все пак трябва да се характеризира с това, че всеки два съседни атома правят нещо противоположно един на друг.

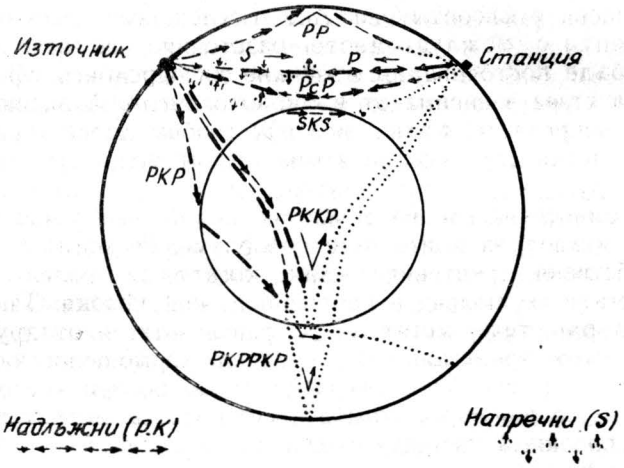
От атомистична гледна точка тук положението напомня двете свързани махала, за които вече говорихме. Те могат да имат два вида собствени трептения: едни, когато се люлеят заедно, и други, когато се люлеят в противоположни посоки. Така че вълните в твърдо тяло могат да се разглеждат и от друга гледна точка — като трептения на свързани хармонични осцилатори, подобни на огромен брой свързани махалца, при което висшата хармонична се получава, когато махалцата се люлеят в противоположни посоки, а нисшите — при други съотношения на фазите.

Тези най-къси вълни са толкова малки, че обикновено не могат да се получат технически. Обаче те са много интересни, тъй като свойствата на тези къси звукови вълни ни помагат да обясним в термодинамичната теория на твърдото тяло неговите топлинни свойства и в частност — специфичната топлоемност. Преходът към пределно къси звукови вълни означава преход към индивидуалното движение на атомите. Това в крайна сметка е едно и също.

Много интересен пример на звукови вълни в твърдо тяло се явяват вълните, които вървят по земното кълбо, както надлъжни, така и напречни. Въпреки че не известно защо, но вътре в Земята от време на време стават земетресения. Едни скали се преместват спрямо други и това движение е твърде сходно с много нисък звук. От такъв източник излизат и пътешествуват по цялата Земя вълни, подобни на звуковите, и въпреки че тяхната дължина е значително по-голяма от тази на обикновените звукови вълни, все пак това са звукови вълни. Нашата Земя не е еднородна. Наляганието, плътността, свиваемостта и т. н. се изменят с дълбочината, а поради това се изменя и скоростта. Възниква нещо подобно на показател на пречупване и вълните вървят не по прав път, а по някаква крива. Картината се усложнява още и от това, че надлъжните и напречни вълни се разпространяват с различна скорост, а затова и решенията за тях ще бъдат различни. Ако на някое място поставим сеизмограф и наблюдаваме как подскача неговият самописец, след като някъде е станало земетресение, ще видим не само някакви просто неправилни скокове. Ще видим как отначало самописецът ще започне да подскача, после ще се успокои, след това отново ще започне да подскача. По-конкретните подробности на станалото зависят от положението на сеизмографа. Ако той е разположен достатъчно близо до мястото на земетресението, отначало ще приемем надлъжните вълни от смущението, а после, едва след няколко секунди — напречните, понеже те вървят по-бавно. Като се измери разликата от време между техните пристигания, може да се каже колко далече е станало земетресението, разбира се, ако достатъчно добре знаем скоростта и състава на вътрешните области.

На фиг. 51.6 е показан пример за поведението на различни видове вълни в Земята. Двата вида вълни са означени с различни знаци. Ако на някое място (ще го наречем „източник") е станало земетресение, напречните и надлъжни вълни, вървящи по прав път, ще дойдат до станцията в различни моменти от

времето. Освен това ще възникнат отражения от границите на неоднородностите, които в резултат ще дадат други пътища и времена. Подобни изследвания са показали, че в Земята има някакво ядро, което не пропуска напречни вълни. Обаче даже ако станцията е разположена диаметрално противоположно на източника, напречни вълни все пак идват, но с неправилна фаза. Това става, понеже напречните вълни, които падат под наклон към повърхността, разделяща две вещества, винаги раждат две нови



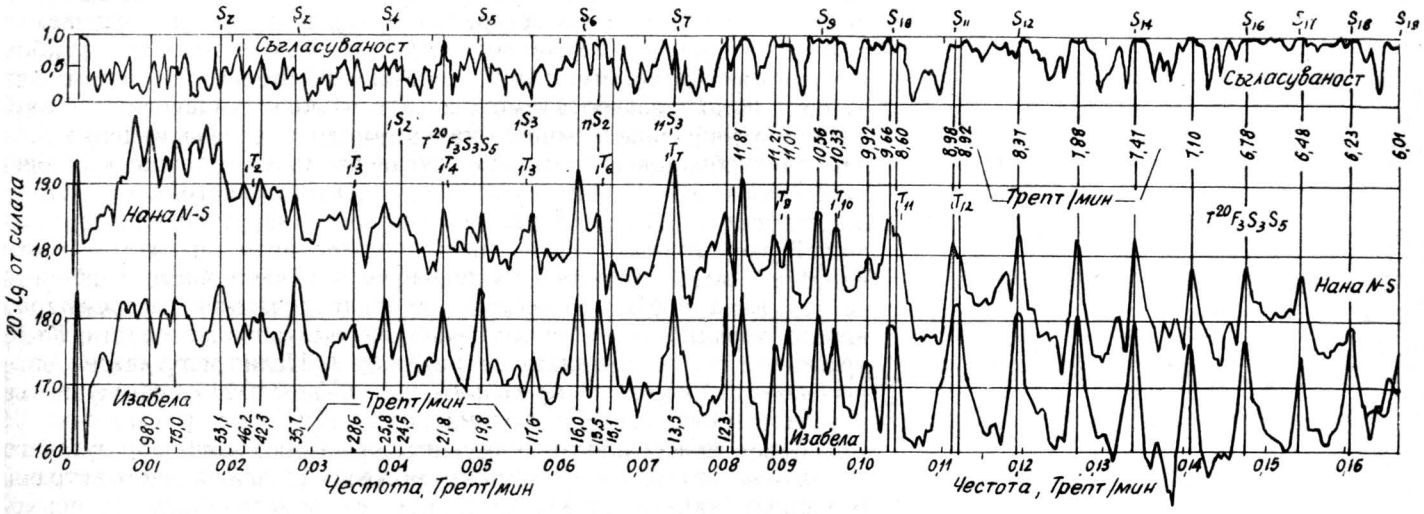
Фиг. 51.6. Схема на земното кълбо
Показан е пътят на надлъжните и напречните звукови вълни

вълни: напречна и надлъжна. Но в ядрото на Земята напречните вълни не се разпространяват (поне това не е открито за тях, за разлика от надлъжните вълни). Тогава на границата на ядрото възникват отново двата вида вълни и попадат в станцията.

Именно по поведението на вълните, предизвикани от земетресения, било открито, че напречните вълни не могат да се разпространяват в някаква сфера вътре в Земята. Това означава, че центърът на Земята е течен в този смисъл, че той не провежда напречни вълни. Изучаването на земетресенията е единственият източник на нашите сведения за вътрешния строеж на Земята. По такъв начин в резултат на голям брой наблюдения от различни станции по време на много земетресения са били изяснени всички подробности. Всичко е известно: скорости, криви и т. н. Ние знаем скоростта на различни видове вълни на всяка дълбочина. А като знаем това, можем следователно да изясним какви са собствените хармонични на Земята, тъй като ни е известна скоростта на разпространение на звуковите вълни, с други думи, известни са еластичните свойства на всяка дълбочина. Да предположим, че сме сплескали земния елипсоид и след това сме го отпуснали. Задачата за определяне на периода и формата на свободните трептения просто се свежда до въпроса за суперпозицията на вълните, които вървят по елипсоида. Вече изяснихме, че при подобно смущение възникват множество хармонични, като се започне от най-ниската, която е елипсоидална за Земята и се стигне до по-високите и по-сложните.

Чилийското земетресение през 1960 г. направи такъв „шум", че неговото ехо обиколи много пъти Земята. Точно по това време бяха направени и нови високочувствителни сеизмографи, с чиято помощ се определиха основните хармонични на Земята и се сравниха с данните, пресметнати чрез теорията на звука по известни скорости, намерени от други независими земетресения. Резултатът от този опит е показан на фиг. 51.7, където е начертана силата на сигнала в зависимост от неговата честота (*анализ на Фурие*). Забележете, че едни от приеманите честоти се оказват по-силни от другите — наблюдават се много отчетливи максимуми. Това са всъщност собствените честоти на Земята, доколкото те се явяват честоти на нейните трептения.

С други думи, щом цялото движение на Земята се свежда към суперпозиция на много различни хармонични, то може да се надяваме, че записът на нередовните тласъци на коя и да е етанция ще дава една и съща суперпозиция на много честоти. Ако това се анализира в честотни термини, ще можем да определим характеристичните честоти на Земята. Тънките вертикални линии на чертежа изобразяват пресметнатите честоти и виждаме



Фиг. 51.7. Зависимост на силата от честотата, зарегистрирана от сеизмограф в градовете Нана (Перу) и Изабела (Калифорния)
Съгласуваността (или кохерентността) означава степента на свързаност на сигналите, които са регистрирани от станции

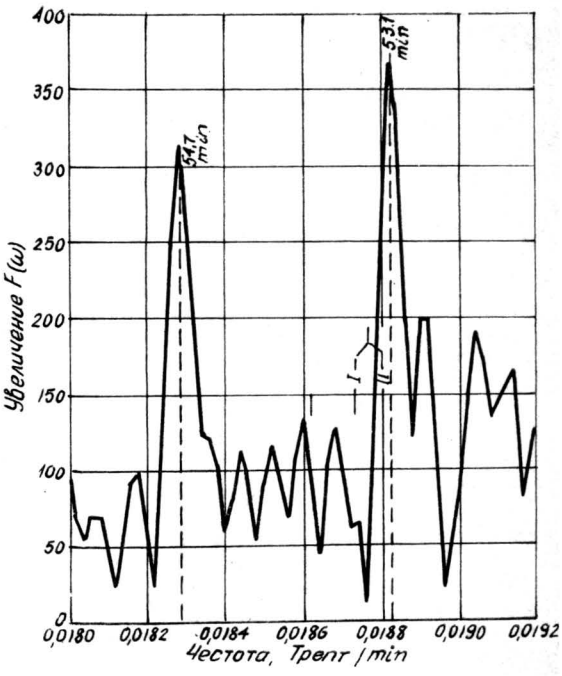
забележителното съвпадение, което ни убеждава, че теорията за звука е напълно приложима вътре в Земята.

Един много интересен факт се открива на фиг. 51.8, където са представени много точни измервания (с още по-добра разделителна способност) на нисшата синусоидална хармонична. Забележете, че тук има не един, а два малко различаващи се максимума. Първият е с период 54,7 min, а вторият — с 53,1 min. Природата на тези два максимума не е била известна, когато са били открити, въпреки че досега тя би могла да бъде открита. Съществуват поне две правдоподобни обяснения. Едното от тях е, че е възможна асиметрия в разпределението на веществото на Земята, която може да даде два подобни максимума. Другото още по-интересно обяснение се състои в следното. Представете си вълни, които вървят от източника около Земята в две посоки. Ако в уравненията на движението отчетем въртенето на Земята, което при анализа обикновено сме пренебрегвали, то скоростите на тези вълни ще се окажат различни. Поради действието на кориолисовата сила движението във въртяща се система се изменя и това може да предизвика наблюдаваното разцепване.

Накратко за метода на получаване на тези криви. На сеизмографа записваме не зависимостта на амплитудата от честотата, а преместването като функция на времето, при това винаги в някаква много неправилна и причудлива форма.

Вече знаем какво да направим, за да намерим от нея частта на различните синусообразни вълни за всички честоти. Фокусът се състои в умножение на получените данни по синусообразната вълна с дадена честота и интегриране, т. е. усредняване. При това усредняване изчезват всички други честоти.

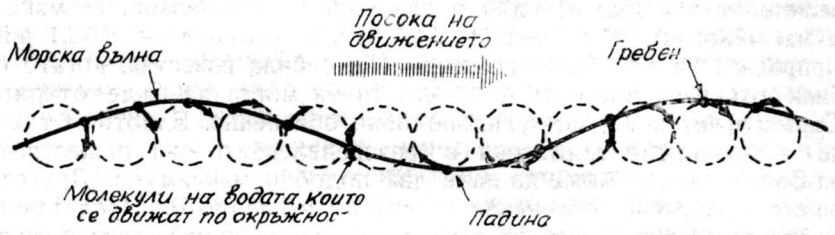
По такъв начин на фигурите са показани фактически графики на интегралите от произведенията на получените данни по синусообразните вълни с различен брой периоди в минута.



Фиг. 51.8. Фурие-анализ на записа на високочувствителния сеизмограф на станцията в Изабела
Добре се вижда спектралният дублет

4. Повърхностни вълни

Следващият интересен тип вълни, които без съмнение всеки е виждал и които служат обикновено в елементарните курсове като пример на вълни, това са вълните на повърхността на водата. Вие скоро ще се убедите, че трудно може да се измисли по-неудачен пример, тъй като те никак не приличат нито на звук, нито на светлина. Тук са събрани всички възможни трудности, които могат де се срещнат във вълните. Да започнем с дългите вълни в дълбока вода. Ако океанът е безкрайно дълбок и на повърхността му станат някакви смущения, ще се породят вълни. Общо казано, възможни са всякакви смущения, но синусоидално движение с много малка амплитуда дава вълни, които напомнят обикновените гладки океански вълни, идващи към брега. Разбира се, средно водата си остава на място, а се движат самите вълни. Що за движение е това — напречно или надлъжно? То не може да бъде нито едното, нито другото — нито напречно, нито надлъжно. Въпреки че в дадено място гърбиците се редуват с падове, то не може да бъде движение нагоре-надолу просто поради закона за запазване количеството на водата. Къде трябва да се дене водата от падината? Нали практически тя е несвиваема. Скоростта на вълните на свиването, т. е. на звука във водата е много пъти по-голяма, сега нея не я разглеждаме. И така сега за нас водата е несвиваема, затова при образуването на падина водата от това място може да се движи само встрани. Всъщност така и става: частиците на водата близо до повърхността ще се движат приблизително по окръжност. Някой път, когато се излежавате върху водата на гумения си дюшек и дойде такава плоска вълна, погледнете околните предмети и ще видите, че те се движат по окръжности. Така се получава неочаквана картина — имаме работа със смес от напречни и надлъжни вълни. С нарастване на дълбочината кръговете се намаляват докато на достатъчна дълбочина нищо не остане от тях (фиг. 51.9).



Фиг. 51.9. Вълните в дълбока вода се образуват от частици, които се движат по окръжности

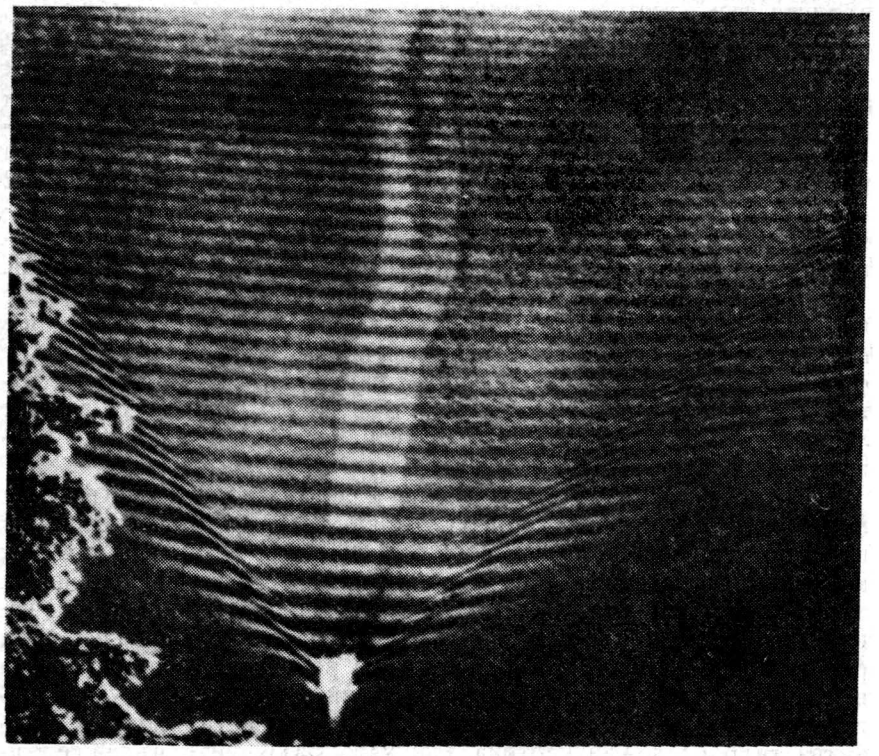
Обърнете внимание на систематичното отместване на фазата от една окръжност към друга. Как при това може да се движи плаващ предмет?

Много е интересно да се определи скоростта на такива вълни. Това трябва да бъде някаква комбинация от плътността на водата, ускорението на силата на тежестта, която в дадения случай се явява възстановяваща сила, и евентуално дължината на вълната и дълбочината. Ако разгледаме случая на безкрайна дълбочина, скоростта няма повече да зависи от нея. Но каквато и формула за фазовата скорост да сме взели, тя трябва да съдържа тези величини в такава комбинация, че да дава правилно измерението. Като опитаме много различни начини, ще намерим, че само една комбинация между g и λ може да ни даде измерението на скоростта, а именно $\sqrt{g\lambda}$, която съвсем не включва плътността. Всъщност тази формула за фазовата скорост не е съвсем точна и пълният анализ на динамиката, в който няма да навлизаме, показва, че действително всичко ще стане така, както е според нас, с изключение на $\sqrt{2\pi}$, т. е.

$$v_{\text{фаз}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad \text{(за вълните на „тежестта“).}$$

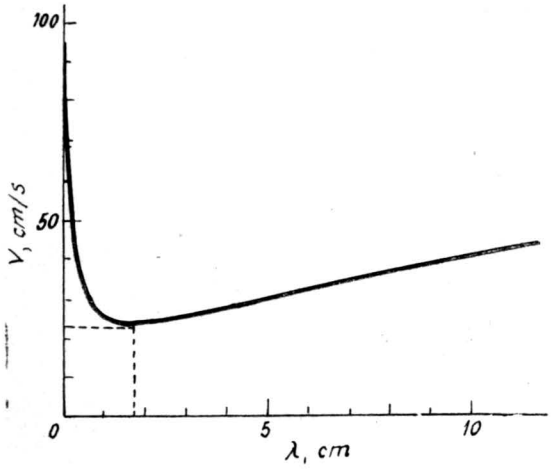
Интересно е, че дългите вълни бягат по-бързо от късите. Така че когато някоя минаваща в далечината моторна лодка създава вълни, то след известно време те ще достигнат брега, но отначало това ще бъдат редки плясъци, доколкото първи ще пристигнат дългите вълни. След това идващите вълни стават все по-къси и по-къси, тъй като скоростта пада с квадратния корен от дължината на вълната.

Това не е вярно — може да възрази някой — нали, за да кажем това, трябва да разгледаме *„груповата скорост"*. Така е, разбира се. Формулата за фазовата скорост не ни казва кой пристига пръв. За това може да разкаже само груповата скорост. Така че трябва да получим груповата скорост и тогава ще можем да покажем, че тя е равна на половината от фазовата скорост. Затова трябва само да си спомним, че фазовата скорост се държи като квадратен корен от дължината на вълната. Също така, т. е. като квадратен корен от дължината на вълната, се държи и груповата скорост. Но как може груповата скорост да бъде два пъти по-малка от фазовата? Погледнете група вълни, предизвикани от минаваща лодка и проследете някой определен гребен. Ще откриете, че той бяга заедно с групата, но постепенно става все по-малък и по-малък, а като дойде до предния фронт, съвсем замира. Но по тайнствен и непостижим начин вместо него от задния фронт се надига слабичка вълна и става все по-силна и по-силна. Накратко, по групата се движат вълни, докато самата група се движи два пъти по-бавно от тях.



Фиг. 51.10. Следата на отминала моторна лодка

Доколкото груповата и фазовата скорост не са равни една на друга, вълните, предизвикани от движещ се обект, също ще бъдат не просто конични, а много по-сложни и интересни. Това вие можете да видите на фиг. 51.10, където са показани вълни, предизвикани от движеща се по водата лодка. Забележете, че те съвсем не приличат на онова, което получавахме за звука (когато скоростта не зависеше от дължината на вълната), където фронтът на вълната просто се разпространяваше встрани като конус. Вместо него ние получихме вълни зад движещия се обект, чийто фронт е перпендикулярен на неговото движение и още



Фиг. 51.11. Графика на зависимостта на фазовата скорост от дължината на вълната за водата

движещи се отстрани под други ъгли малки вълни. Цялата та картина на движение на вълни може да се пресъздаде мно красиво, като знаем само, че фазовата скорост е пропорционал на квадратния корен от дължината на вълната. Целият фок е в това, че картината на вълните е стационарна относно ло ката (която се движи с постоянна скорост), всички други видо вълни ще изостанат от нея.

Досега разглеждахме дълги вълни, за които възстановяващат сила беше силата на тежестта. Но когато вълните станат мно къси, оказва се, че основната възстановяваща сила е капилярнот притегляне, т. е. енергията на повърхностното напрежение. З вълните на повърхностното напрежение фазовата скорост е равн на

$$v_{\text{фаз}} = \sqrt{\frac{2\pi T}{\lambda \rho}} \quad \text{(за най-малките вълнички)},$$

където T е повърхностното напрежение, а ρ — плътността. Ту всичко е обратно, колкото вълната е по-къса, толкова *по-голяма* се оказва фазовата скорост. Ако пък действуват и силата на тежестта, и капилярната сила (както обикновено), получавам комбинацията

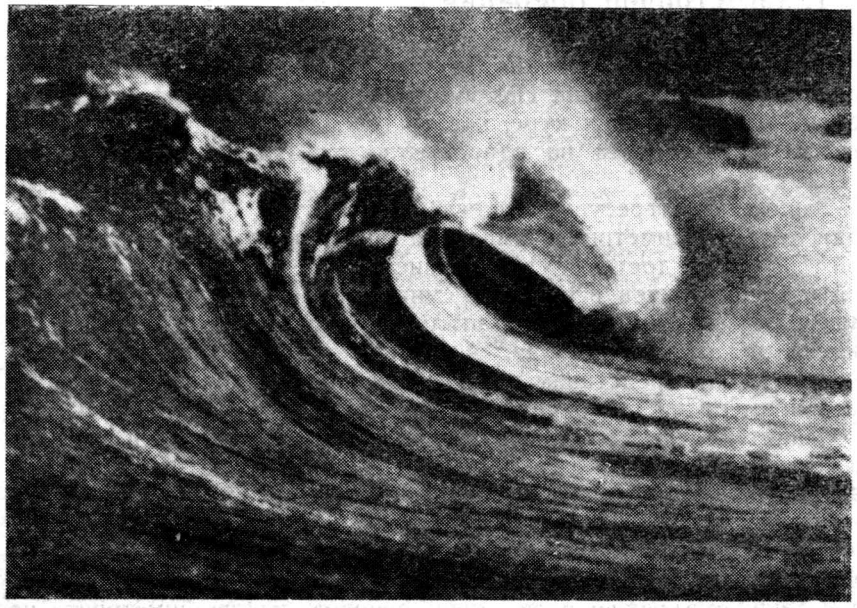
$$v_{\text{фаз}} = \sqrt{\frac{Tk}{\rho} + \frac{g}{k}},$$

където $k = 2\pi/\lambda$ е вълновото число. Както виждате скоростта на вълните във водата е действително много *сложно* нещо. На фиг 51.11 е показана фазовата скорост като функция на дължината на вълната. Тя е голяма за много късите вълни, голяма е и за много дългите вълни, но между тях съществува някаква минимална скорост на разпространението. Като се излезе от тази формула, може да се изчисли и груповата скорост. Тя се оказва равна на 3/2 от фазовата скорост за по-малките вълнички и на 1/2 от фазовата скорост за вълните на „тежестта". Наляво от минимума груповата скорост е по-голяма от фазовата, а надясно — по-малка. С този факт са свързани няколко интересни явления. Тъй като груповата скорост се увеличава бързо с намалението на дължината на вълната, ако създадем някакви смущения, ще възникнат вълни със съответна дължина, които ще се движат с минимална скорост, а пред тях с по-голяма скорост ще побягнат къси и много дълги вълни. Във всеки водоем се виждат лесно много къси вълни, но е по-трудно да се наблюдават дългите вълни.

По такъв начин се убедихме, че малката вълничка на водната повърхност, която се използува така често за илюстрация на прости вълни, всъщност е много по-сложна и интересна, при нея няма рязък вълнов фронт както при простите вълни, подобни на звука или светлината. Основната вълна, която се придвижва напред, се състои от малки вълнички. Благодарение на дисперсията рязкото смущение на повърхността на водата не води до рязка вълна. Първи вървят дребните вълни. Във всеки случай, когато по вода се движи някакъв обект с известна скорост, възниква твърде сложна картина, тъй като различните вълни се движат с различни скорости. Като се вземе едно корито с вода, може да се покаже лесно, че най-бързи ще бъдат дребните капилярни вълни, а зад тях вече вървят по-едрите. Освен това, като се наклони коритото, може да се види, че там, където дълбочината е по-малка, по-малка е и скоростта. Ако вълната върви под някакъв ъгъл спрямо линията на максималния наклон, тя ще завие към страната на тази линия. По такъв начин могат да се покажат много неща и да се дойде до заключението, че водните вълни са много по-сложно нещо, отколкото вълните във въздуха.

Скоростта на дългите вълни с кръгово движение на водата се намалява на плитките места и се увеличава на дълбоките. По такъв начин, когато вълната идва към брега, където дълбочината

е по-малка, тя се забавя. Но там, където водата е по-дълбока, вълната се движи по-бързо, така че отново се сблъскваме с механизма на ударната вълна. Този път понеже вълната не е така проста, нейният ударен фронт е много по-изкривен. Вълната се „прегъва през себе си“ по най-обикновен за нас начин (фиг. 51.12). Точно това виждаме, когато вълната връхлита върху брега, в нея се проявяват всички присъщи на природата трудности. На никой досега не се е удало да изчисли формата на вълната в



Фиг. 51.12. Морска вълна

момента, когато тя се разбива. Много е лесно да се направи това, когато вълните са малки, но когато станат големи, всичко става много сложно.

Интересно свойство на капилярните вълни може да се наблюдава при смущение на повърхността от движещ се обект. От гледна точка на самия обект водата тече покрай него и вълните, които в крайна сметка остават с него, винаги са вълни, които имат точно необходимата скорост, за да останат върху водата заедно с него. По същия начин, ако го поставим в един поток, който да го обтича, картината на вълните ще се окаже стационарна и с точно необходимата дължина на вълната, за да се движи със същата скорост, както и водата. Но ако груповата скорост е по-малка от фазовата, смущението върви по потока назад, понеже груповата скорост е недостатъчна, за да догони потока. Ако груповата скорост е по-голяма от фазовата, вълновата картина ще се появи пред обекта. Ако се следи внимателно плаващият в потока предмет, пред него може да се забележат малки вълнички, а зад него — дълги вълни.

Други интересни явления от подобен род може да се наблюдават в изливаща се течност. Например ако се излива бързо мляко от бутилка, може да се забележи, че струята на млякото се пресича от много пресичащи се линии. Тези вълни са предизвикани от смущения в краищата на бутилката. Те твърде много приличат на вълни, предизвикани от обект, плаващ по потока. Но сега този ефект възниква от двете страни, затова се получава картина на пресичащи се линии.

И така запознахме се с някои интересни свойства на вълните с различните усложнения, които зависят от фазовата скорост и дължината на вълната, а също и от зависимостта на скоростта на вълната от дълбочината и т. н. Всичко това води до твърде сложни и затова интересни природни явления.

52

Симетрия на законите на физиката

1. Симетрични операции
2. Симетрия в пространството и времето
3. Симетрията и законите за запазването
4. Огледално отражение
5. Полярен и аксиален вектор
6. Коя ръка е дясна?
7. Четността не се запазва!
8. Антивещество
9. Нарушената симетрия

1. Симетрични операции

В тази глава ще говорим за това, което наричаме *симетрия на физическите закони.* Подобни симетрии вече обсъждахме на редица места в нашия курс, когато говорихме за векторния анализ (гл. 11), теорията на относителността (гл. 16) и въртенията (гл. 20).

Защо ни интересува толкова симетрията? Преди всичко поради това, че симетрията импонира на нашия ум, така е устроен той. На всеки доставя удоволствие да се любува на предмет, който е симетричен в някакъв смисъл. Любопитно е, че окръжаващият ни свят е буквално запълнен със симетрични обекти, създадени от самата природа. А най-симетричният предмет, който можем да си представим, това е сферата и природата ни дава маса примери на сферични тела: звезди, планети, капчици вода в облаците и т. н. А колко различни, понякога чудновати примери на симетрия намираме в кристалите на скалите! Тяхното изучаване ни позволява да надзърнем вътре във веществото и да получим важни сведения за структурата на твърдото тяло. Обкръжаващият ни свят на растенията и животните е препълнен със симетрия, въпреки че симетрията на цветето или пеперудата не е така съвършена и не така основна както симетрията на кристала.

Но все пак темата на тази глава не е симетрията на *предметите,* а много по-удивителната симетрия на Вселената — симетрията на тези *основни закони,* които управляват всички процеси във физическия свят.

Обаче *какво е това* симетрия? По какъв начин един физически *закон* може да бъде „симетричен"? Проблемата за определението на симетрията е един от основните. Вече говорихме за едно много хубаво определение, което е било дадено от Вейл. Същността му е в това, че един обект се смята симетричен, ако с него може да се направи нещо такова, след което той да изглежда точно така, както и преди. Например една ваза е симетрична, когато след като се отрази в огледалото или бъде завъртяна около своята ос, изглежда точно така, както и преди завъртането или отражението. Въпросът, който искаме да разгледаме тук, е какво може да се направи с физическо явление или ситуация, възникнала при опит, за да се получи същият резултат. Списъкът на операциите на симетрията, в резултат на които различни физически явления остават неизменни, е приведен в таблица 52.1,

Таблица 52.1

Операции на симетрията

Пренос в пространството
Преместване във времето
Завъртане на определен ъгъл
Движение по права с постоянна скорост (Лоренцова трансформация)
Смяна на посоката на времето
Отражение на пространството
Преместване на еднакви атоми или еднакви частици
Изменение на квантовомеханичната фаза
Замяна на веществото с антивещество (спрягане на зарядите).

2. Симетрия в пространството и времето

Най-простото, което можем да се опитаме да направим, това е да пренесем (да транслираме) различни явления в пространството. Ако направим някакъв опит на някое място и след това построим същото устройство (или просто пренесем старото) на друго място и повторим нашия опит, всичко трябва да се повтори, при това в същата последователност. Разбира се, всички подробности на околната среда и условията на работата, съществени за нашия опит, трябва да бъдат на новото място същите, както и преди, т. е. трябва да бъдат пренесени с нашата апаратура. По въпроса кое е съществено и кое не, вече говорихме и няма повече да се спираме на това.

Доколкото днес ни е известно, *преместването във времето* също не трябва да променя физическите закони. (Впрочем за всичко, което се съдържа в тази глава, може да се каже: *доколкото на нас днес ни е известно!*) Това означава, че ако направим някакво устройство и го пуснем в някакъв момент от времето, да кажем във вторник в 10 часа сутринта, а след това построим второ, точно същото устройство и го пуснем при същите условия, но точно три дена по-късно, това второ устройство ще работи точно като първото, т. е. ще повтаря същите действия, в същата последователност и със същото времетраене. Разбира се, пак се подразбира, че съществените свойства на околната среда се изменят с времето точно така, както и преди.

Необходимо е да се обърне внимание и на разликата, която се внася от географията, понеже заедно с изменението на положението си върху Земята някои характеристики могат също да се изменят. Ако някъде измерим магнитното поле, а след това заедно с цялата апаратура се прехвърлим в някое друго място, то приборите могат и да не работят по същия начин както по-рано, понеже магнитното поле в тези различни райони може да бъде различно. Обаче в този случай можем да стоварим цялата отговорност за разликата върху магнитното поле на Земята. Но ако си представим, че придвижваме апаратурата заедно с цялото земно кълбо, разбира се, никаква разлика не трябва да има.

Едно друго свойство, което обсъдихме подробно, беше въртенето в пространството. Ако завъртим апаратурата на някакъв ъгъл, тя ще работи точно така, както и по-рано, но, разбира се, при обезателното условие, че заедно с нея ще завъртим и цялата съществена за работата на апаратурата околна среда. Глава 11 беше посветена на проблемата за симетрията при въртене в пространството. Там вие се запознахте и с *векторния анализ* — математическия апарат, който най-пълно и изящно отчита симетрията на въртене.

Като се изкачихме на едно стъпало, по-високо в изучаването на природата, ние се запознахме с по-сложна симетрия — симетрията при равномерно и праволинейно движение. Това е наистина забележително нещо. Ако натоварим нашето работно устройство на камион (разбира се, с цялата съществена околна среда) и потеглим с постоянна скорост по прав път, явленията, които стават в движещата се машина, ще протичат точно така както, ако би стоял на място, т. е. всички закони на физиката си остават същите.

Даже ни е известно как се изразява математически тази симетрия: всички математически уравнения трябва да останат неизменни при *Лоренцовите трансформации*. Между другото именно изучаването на проблемите на теорията на относителността заостри вниманието на физиците върху симетрията на физическите закони.

Обаче всички споменати видове симетрии имат геометрична природа, при което в известен смисъл се потвърждава еквивалентността на пространството и времето. Съществуват обаче и симетрии от съвсем друг вид. Например може да се замени един атом с друг от същия вид или (в по-друга постановка) съществуват атоми от един и същи вид, т. е. съществуват такива групи атоми, в които

ако разменим кои да са два от тях, нищо няма да се промени. Това, което може да направи един атом кислород от даден вид, е способен да направи и втори.

„Каква глупост — може да възрази някой скептик, — нали това е просто *определението* какво са атоми от един и същи вид!“ Съгласен съм, това може да бъде просто определение, но цялата работа е там, че преди опита на нас не ни е известно съществуват ли в природата атоми „от един и същи вид“, а експерименталният *факт* се състои в това, че такива атоми има много, твърде много, така че нашето твърдение все пак нещо значи. В този смисъл са еднакви и така наречените елементарни частици, от които са направени атомите: еднакви са всички протони, еднакви са всички положителни π-мезони и т. н.

След този дълъг списък на всичко, което може да се направи, без да се изменят при това явленията, може да се създаде впечатление, че практически е позволено да се прави каквото ни е угодно. Съвсем не. Ето един пример просто, за да покажем разликата. Да допуснем, че ни интересува въпроса: „Не остават ли законите на физиката същите при промяна на мащаба?“ Нека сте построили някаква машина, а след това — точното ѝ копие, увеличено, да кажем, пет пъти. Ще работи ли копието по същия начин? Не, няма! Например дължината на вълната на светлината, изпускана от атомите на калция, които се намират вътре в съда, няма да бъде пет пъти по-голяма от дължината на вълната, излъчена от атомен газ на калций, който е пет пъти повече, а ще бъде точно същата. Така че ще се измени отношението на дължината на вълната към размера на излъчвателя.

Да вземем друг пример. От време на време във вестниците вие виждате модели на знаменити катедрали, направени от кибритени клечки — удивително произведение на изкуството, по-удивително и потресаващо от самата катедрала. А представете си, че такава дървена катедрала е построена в действителност в натурален размер. Вие чувствате какво ще стане! Тя няма да стои, ще рухне, понеже такива увеличени модели от клечки не са достатъчно здрави. „Правилно — може да каже някой от вас, — но нали съществува и външно влияние, което трябва също да се измени в съответните пропорции!“ Вие имате предвид способността на предметите да противостоят на силата на тежестта? Добре. Отначало, когато взехме модела на катедралата, направен от истински кибритени клечки, и истинската Земя, всичко беше отлично и устойчиво. Но после, като увеличим катедралата, трябва да увеличим и Земята, а това ще бъде още по-лошо за катедралата, нали силата на тежестта ще стане още по-голяма!

Сега, разбира се, вие схващате, че в основата на зависимостта на явленията от размерите лежи атомната природа на строежа на веществото. Ако беше ни се удало да построим апаратура, която би била така малка, че би съдържала всичко пет атома, то такова нещо не би могло произволно да се увеличава или намалява. Нали размерът на отделния атом не е произволен, той е напълно определен.

Този факт, че законите на физиката не остават същите при изменение на мащаба, е открит още от Галилей. Той разбрал, че якостта на материалите се изменя не право пропорционално на техните размери и показал това свойство с пример, много приличащ на нашата катедрала от кибритени клечки. Той рисувал два скелета на кучета, единия от тях обикновен, в пропорция, необходима за поддържане на теглото му, а втория — като необходим за някакво въображаемо „суперкуче“, което е десет или може би хиляда пъти по-голямо от обикновеното. Получило се нещо грамадно и внушително със съвършено други пропорции. Не е известно дали тези съображения са довели Галилей до заключението за това, че законите на природата трябва да имат определен мащаб, ясно е само едно, че той бил толкова потресен от своето откритие, че го сметнал за толкова важно, колкото и откриването на законите на движението. Затова именно Галилей

публикувал тези два закона в един и същи том под заглавието „За двете нови науки".

Друг добре известен пример за несиметрията на законите — това е въртенето. В система, която се върти с постоянна ъглова скорост, законите на физиката ще изглеждат съвсем другояче, отколкото в покой. Ако проведем някакъв опит, а след това натоварим цялата апаратура в космически кораб и го накараме да се върти в междупланетното пространство с постоянна ъглова скорост, то поради наличието на центробежни и кориолисови сили апаратурата вече няма да работи така, както по-рано. В същност нали за въртенето на Земята узнаваме, като наблюдаваме само люлеенето на махалото (така нареченото „махало на Фуко"). Съвсем не ни е необходимо да „погледнем навън", т. е. да гледаме например звездите.

В нашия списък следва една твърде интересна симетрия. Това *е обръщане на времето.* На пръв поглед изглежда, че това не е вярно, че физическите закони не могат да се обърнат. Нали на всички е ясно, че в нашия обикновен мащаб явленията са необратими.

„Пълзи по хартията перото,
след написания стих — нов стих ..."

Доколкото сега ни е известно, причина за тази необратимост се явява огромният брой частици, които взимат участие в обикновените процеси. Но ако бихме гледали отделни молекули, не бихме могли да кажем напред ли работи цялата машина или назад. Ще поясним какво имаме предвид. Да построим такъв уред, в който ни е известно какво прави всеки атом (можем да наблюдаваме всеки техен ход). Да построим сега втори, точно като първия, но да го пуснем в обратна посока, т. е. да го спрем в крайно положение и да обърнем всички скорости. След това ще видим *точно същото движение,* само че всичко ще стане в *обратна последователност.* Да вземем друг пример. Да предположим, че сме заснели на филм някакъв процес, който става с веществото, и сме го пуснали отзад напред. Тогава никой физик не би могъл да каже: „Това противоречи на физическите закони, става нещо не както трябва." Ако не се виждат подробностите, всичко става съвършено ясно. Например когато едно яйце падне на тротоара и се разбие, вие веднага ще кажете: „Този процес е необратим, ако го заснемем на филм и го пуснем обратно, яйцето само ще се събере в черупката, която ще се слепи отново, а това е безсмислица!" Но ако ние виждаме отделните атоми, всичко ще ни изглежда напълно обратимо. Разбира се, да се открие тази симетрия беше много по-трудно, отколкото другите, но все пак това, че основните закони на физиката, които управляват атомите и молекулите, са обратими във времето, очевидно е вярно.

3. Симетрията и законите за запазването

Даже на това ниво симетриите на физическите закони са много увлекателни, но се оказва, че те са много по-интересни и удивителни при прехода към квантовата механика. Фактът, чиято причина не мога да ви обясня при вашия запас от знания, но който до ден днешен разтърсва повечето физици със своята красота и дълбочина, се състои в следното: в квантовата механика *на всяка от симетриите съответствува закон за запазване* — съществува напълно определена връзка между законите за запазването и симетриите на физическите закони. Засега можем само да констатираме това, без да се опитваме да се впускаме в обяснения.

Оказва се например, че симетрията на законите на физиката по отношение на преноса в пространството заедно с принципите на квантовата механика представлява *запазване на импулса.*

Това, че законите са симетрични при преместване във времето, означава в квантовата механика *запазване на енергията.*

Неизменността (инвариантността) при завъртането на определен ъгъл в пространството съответствува на *запазването на момента на количеството на движението*. Всред най-мъдрите и удивителни неща във физиката едни от най- интересните и красивите са тези връзки.

Освен това в квантовата механика се появяват няколко симетрии, които за нещастие нямат класически аналог, те не могат да се опишат с методите на класическата физика. Ето една от тях. Ако ψ е амплитудата на някой процес или на нещо друго, то както знаем, квадратът от нейната абсолютна стойност ще бъде вероятността на този процес. Нека сега някой да е направил своите изчисления, като е използувал не ψ, а ψ', която се различава от ψ само по фаза, т. е. предишната ψ се умножава по exp $(i\Delta)$, където Δ е някаква константа. Тогава квадратът от абсолютната стойност на ψ', която ще бъде също вероятност на събитието, е равен на квадрата на абсолютната стойност на ψ:

$$\psi' = \psi e^{i\Delta}, \quad |\psi'|^2 = |\psi|^2. \tag{52.1}$$

Следователно физическите закони не се изменят от това, че сме преместили фазата на вълновата функция на известна произволна константа. Това е още една симетрия. Природата на физическите закони е такава, че отместването на квантовомеханичната фаза не ги изменя. В началото на този параграф казахме, че в квантовата механика на всяка симетрия съответствува закон за запазване. И ето оказва се, че законът за запазването, свързан с квантовомеханичната фаза, не е нищо друго освен *законът за запазването на електрическия заряд*. С една дума, това е най-удивителното нещо!

4. Огледално отражение

Да преминем към следващия въпрос, който ще ни занимава до края на главата — това е симетрията при *отразяването в пространството*. Проблемът се заключава в следното: симетрични ли са физическите закони при отражението? Той може да се формулира и по друг начин. Да предположим, че сме построили някакво устройство, например часовник с множество колелца, стрелки и т. н. Той върви, а вътре в него има устройство за настройка. Да погледнем часовника в огледало. Работата не е в това, как ще изглежда в огледалото. Не, нека да *построим* друг часовник, точно същият като първия, отразен в огледалото. Там, където в първия има винт с дясна резба, ще поставим винт с лява резба, там, където на циферблата стои цифрата „XII“, на втория часовник ще нарисуваме „IIX“, всяка спирална пружина ще бъде завита на една страна в първия и в обратната в отразения от огледалото. Когато всичко бъде завършено, ще се получат два часовника, всеки от които ще бъде точно огледално отражение на другия, въпреки че, забележете, и единият и другият са истински материални физически обекти. Възниква въпросът: а какво ще стане, ако и единият, и другият бъдат пуснати при еднакви условия, ако техните пружини са навити еднакво силно, ще вървят ли и ще тик-такат ли като точно огледално отражение? (Това е чисто физически, а съвсем не философски въпрос. Нашата интуиция и нашето знание на физическите закони ни подсказват, че това *ще бъде*.

Ние подозираме в този случай, че отражението ще бъде поне една от симетриите на физическите закони, т. е. ако се замени „дясно“ с „ляво“, а всичко друго си остане същото, то при това няма да можем да открием никаква разлика. Да предположим за минутка, че всичко това е вярно. Тогава посредством никакви физически явления не може да се различи къде е „дясно“ и къде „ляво“, точно така, както, да кажем, с никакъв физически опит не може да се открие абсолютната скорост на движението. По такъв начин е невъзможно с помощта на някакви опити да определим абсолютно какво разбираме под „дясно“ като противопо-

ложност на „лявото“, тъй като всички физически закони трябва да бъдат симетрични.

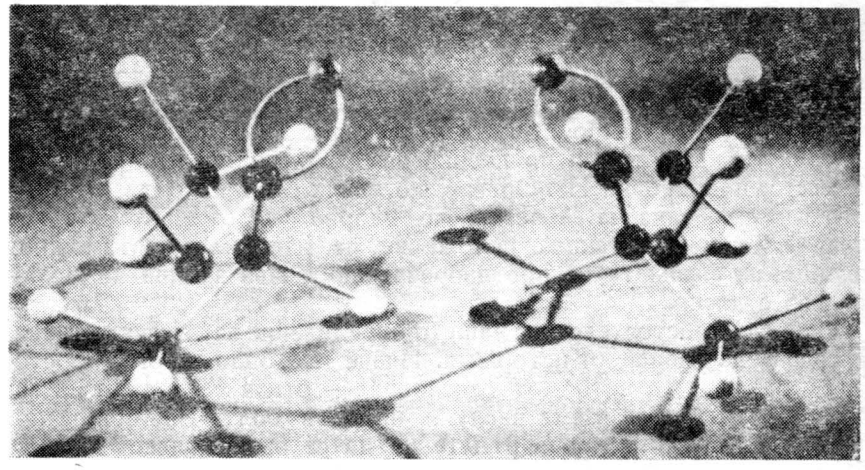
Разбира се, нашият свят *не е длъжен* да бъде симетричен. Ако вземем например това, което наричаме „география“, тук напълно може да се определи къде е дясната страна. Нека се намираме в Ню Орлеан и гледаме в посока към Чикаго. Тогава Флорида ще бъде надясно от нас (разбира се, ако стоим върху Земята на крака). Така че в географията може да се определи къде е „дясно“ и къде е „ляво“. Реалното положение във всяка система не трябва да има тази симетрия, за която става дума, въпросът е в това — симетрични ли са *законите*? С други думи, *противоречи ли на физическите закони* наличието на подобно на Земята кълбо с „лявоориентирана повърхност“ и човек, подобен на нас, гледащ по посока на град, подобен на Чикаго, от място, подобно на Ню-Орлеан, но всичко останало да е обърнато наопаки, така че за него вече Флорида да бъде от другата страна? Ясно е, че такова положение не изглежда невъзможно, законите на физиката не противоречат на такава замяна на всичко ляво с дясно.

Още едно обстоятелство: нашето определение за „дясна“ страна не трябва да зависи от историята. Иначе би било много просто да се различи „лявото“ от „дясното“ — отива се в магазин за резервни части и се взема наслуки някакъв болт. Най-общо казано, не е задължително в ръцете ни да се озове „десен болт“, но все пак е по-вероятно той да бъде десен, а не ляв. Но това е въпрос на история или условност, или общо положение на нещата, а не на основни закони. Нали някой може да започне да произвежда болтове с лява резба.

И така трябва да потърсим някакви други явления, където „дясното“ би влизало по-основно. Да разгледаме следната възможност. Известно е, че поляризираната светлина, като се пропусне през захарен разтвор, завърта плоскостта си на поляризация. Както видяхме в гл. 33, плоскостта на поляризация при определена концентрация на захарта се завърта надясно. Като че ли сме намерили начин за определянето на „дясната страна“, защото като разтворим във вода известно количество захар, можем да завъртим плоскостта на поляризацията надясно. Но захар се получава от живите организми, а ако я направим изкуствена, ще открием, че тя *не завърта* плоскостта на поляризацията. Ако в тази изкуствена захар, която не завърта плоскостта на поляризацията, пуснем бактерии (те ще изядат известно количество захар) и след това ги филтруваме, ще открием, че макар захарта да е останала (почти половината от първоначалното количество), тя завърта плоскостта на поляризацията, но вече в *другата посока*! Този факт изглежда много обезкуражителен, но той може лесно да бъде обяснен.

Ще приведем друг пример. Едно от веществата, общо за всички живи същества, основата на живота е белтъкът (протеинът). Белтъкът се състои от аминокиселинни вериги. На фиг. 52.1 е показан модел на аминокиселина, отделена от белтък. Тази киселина е наречена аланин и на фиг. 52.1 (*ляво*) е показано разположението на атомите в молекулата на аланина, отделен от белтъка на живи същества. Ако се опитаме да създадем аланин от въглероден двуокис, етан и амоняк (което всъщност *може* да се направи — това не е толкова сложна молекула), ще открием, че са се получили не само такива молекули, но и други, подобни на показаната на фиг. 52.1 (*дясно*) и при това в равни количества! Първите молекули, тези, които са произлезли от живи същества, се наричат *L-аланин*. Другите, еднакви с тях химически, в смисъл че се състоят от същите атоми, със същите връзки между тях, образуват „дясноориентирани“ молекули, които за разлика от „лявоориентираните“ молекули на *L*-аланина се наричат *D-аланин*. Интересно е, че ако приготвим аланин в лаборатория от прости газове, ще се получи смес на двата вида в равни количества. Обаче животът използува само *L*-аланина. (Разбира се, не без изключения. Тук-таме в живите същества се среща и

D-аланин, обаче тези случаи са много редки. Във всички белтъци влиза изключително *L*-аланин.) Ако приготвим двата вида и с тази смес храним животни, които обичат да я „ядат“ (т. е. да усвояват аланина), ще се окаже, че те не могат да използуват *D*-аланина, а ще „изядат“ само *L*-аланина. В резултат ще се получи същото както със захарта, след като бактериите „изядат“ захарта, която им харесва, ще остане само „неистинският“ вид.



Фиг. 52.1. Модели на мулекулите на аланина
Отляво — *L* -аланин; отдясно — *D* -аланин

(Ляво ориентираната захар също е сладка, но все пак не е такава, каквато е истинската — „дясноориентираната“.)

И така явленията на живота като че ли позволяват да се различи „лявата“ посока от „дясната“, доколкото две молекули се различават химически помежду си. И все пак — не, не могат! Докато се занимавахме с физически измервания, подобни на определянето на енергията или скоростта на химическите реакции и т. н., тези два вида се държаха по съвсем еднакъв начин, ако, разбира се, всичко останало беше също огледално отразено. Едните молекули завъртат светлината надясно, а другите след преминаване през същото количество разтвор — наляво, точно на същата стойност. По такъв начин от гледна точка на физиката може да се използува всяка от двете аминокиселини. Доколкото ние днес разбираме основата на нещата, още в уравнението на Шрьодингер е заложено, че двете молекули трябва да се държат точно по еднакъв начин, въпреки че там, където в едната е дясно в другата е ляво. Но при това в природата всичко е устроено го един начин!

Както се предполага, причината за това се състои в следното. Представете си например, че в един прекрасен миг са възникнали такива условия, че всички белтъци в някои същества съдържат само лявоориентирани аминокиселини. Би се стигнало до това, всичко на света да стане „асиметрично“, „асиметрирали“ са се всички вещества в живите клетки, всички ферменти — всичко е станало несиметрично. Когато храносмилателните ферменти са се опитали да сменят химията на своята храна с друга, то единият вид им е „подхождал“, а другият — не (съвсем като обувката на Пепеляшка с тази разлика, че ние я мерим на „левия крак“). Доколкото сега ни е известно, по принцип е възможно да се създаде такава жаба, в която например всяка молекула ще се окаже „обърната“, т. е. да се създаде точно огледално копие на истинската жаба, така да се каже „лявоориентирана“ жаба. Известно време тази „лявоориентирана“ жаба би се чувствувала съвсем нормално, но не би могла да си намери храна, ако би глътнала муха, то нейните ферменти не биха били способни да я смелят. Нали мухата е истинска, с дясноориентирана аминокиселина (разбира се, ако не развъдим „лявоориентирани мухи“ специално за нашата жаба). И така доколкото сега ни е известно,

ако ние бихме „обърнали“ всички химически и жизнени процеси, те биха протичали точно така, както и сега.

Ако животът е изцяло физико-химично явление, то фактът на „ориентацията“ на всички белтъци само в една посока може да се разбере само от такава гледна точка, че в самото начало съвсем случайно е победил някакъв вид молекули. Някъде органичната молекула се е „асиметрирала“ и дясната посока се оказала избрана. Някакъв случай в историята е създал едностранно положение, а оттогава насам „асиметрията“ се е разраствала все повече и повече. Но веднаж възникнало положението, което наблюдаваме сега, ще продължава вечно. Всички ферменти смилат и приготвят само „дясноориентирани“ вещества. Когато в листата на растенията влязат въглеродуокисен газ, водна пара и други вещества, то ферментите, които правят от тях захар, я правят дясноориентирана, защото те самите са дясноориентирани. Ако пък по-късно се появи някакъв нов сорт вируси или някакви други живи същества, то те биха могли да преживеят само ако биха се оказали способни да се хранят с вече съществуващите органични вещества А следователно и самите те трябва да бъдат от същия вид.

За дясноориентираните молекули не съществува закон за запазването на техния брой. Животът може само да го увеличава. По такъв начин предположението се състои в това, че явленията на живота не ни говорят за отсъствие на симетрия във физическите закони, а обратното — за универсалността на природата и общността на началото на всички живи създания на Земята в описания по-горе смисъл.

5. Полярен и аксиален вектор

Да преминем по-нататък. Видяхме, че във физиката съществуват маса правила за приложението на правилото на лявата или дясната ръка. Всъщност, когато изучавахме векторния анализ, тогава узнахме за правилото на дясната ръка, което трябва да използуваме, за да получим правилно момента на количеството на движението, момента на силата, магнитното поле и т. н. Например силата, действуваща на заряд в магнитно поле, е равна на $\mathbf{F}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Но представете си положението, че знаем $\mathbf{F}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$. Как да разберем от това къде е дясната ни страна? Ако се върнем назад и погледнем откъде произлязоха векторите, ще видим, че правилото на дясната ръка е просто уговорка, своего рода трик. В самото начало такива величини, като ъгловата скорост и момента на количеството на движение, и други подобни на тях, изобщо не са били истински вектори. Всички те са свързани по някакъв начин с определени плоскости и само благодарение на това, че нашето пространство е тримерно, тези величини могат да да се свържат с посока, перпендикулярна на дадената равнина. От дези две възможни посоки ние избрахме дясната.

Представете си, че някакво хитро дяволче, като решило да се подиграе с физиците, се е промъкнало във всички лаборатории и навсякъде е заменило сумата „дясно“ с „ляво“. И в резултат там, където беше написано правилото за дясната ръка, бихме били принудени да се ползуваме от правило за лявата ръка. Какво пък, физиците просто не биха го забелязали, понеже това не би довело до каквото и да е изменение на физическите закони, ако, разбира се, те са симетрични.



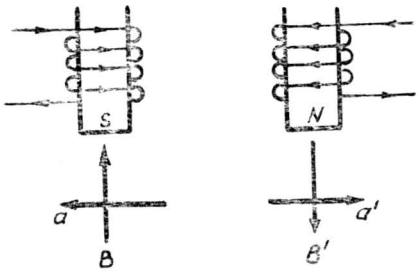
Фиг. 52.2. Отрязък от пространството и неговото огледално отражение

Ще покажем това с един пример. Вие знаете, че съществуват два вида вектори. Обикновено съществуват „истински“ вектори, подобни например на отрязъка от разстоянието Δr в пространството. Нека в нашата апаратура нещо се намира „тук“, а нещо друго — „там“, тогава същите тези „нещо“ ще ги има и в огледалния образ на апаратурата. Ако и в двата случая прекараме вектори от „тук“ до „там“, то единият вектор ще бъде отражение на другия (фиг. 52.2), при което посоката на стрелката на



Фиг. 52.3. Въртящо се колело и неговото огледално отражение

Забележете, че посоката на „вектора“ на ъгловата скорост не се изменя



Фиг. 52.4. Електромагнит и неговото огледално отражение

вектора, точно така, както и цялото пространство, ще се преобърне изцяло наопаки. Такива вектори наричаме полярни.

Но вторият вид вектори, свързани с въртенето, имат съвсем друго естество. Представете си нещо, което се върти в тримерното пространство (фиг. 52.3). Ако го гледаме в огледало, въртенето ще става така, както е показано на фигурата, т. е. като огледално изображение на първоначалното въртене. Сега да се уговорим да представяме огледалното въртене с помощта на същото правило. В резултат ще получим вектор, който за разлика от полярния, няма да се изменя при отражение и се оказва обърнат относно полярния вектор и геометрията на цялото пространство. Такъв вектор наричаме аксиален.

Ако физическият закон за симетрията при отражението е правилен, уравненията трябва да бъдат построени така, че при промяна на знака на всеки аксиален вектор и всяко векторно произведение (което съответствува на отражението) да не стане нищо ново. Например когато пишем формулата за момента на количеството на движението $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$, тук всичко е наред, защото при прехода към лява координатна система променяме знака на $\mathbf{L}$, а знакът на $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ не се изменят. Освен това, ще се измени и векторното произведение, тъй като трябва да заменим правилото на дясната ръка с правилото на лявата ръка. Да вземем друг пример. Известно е, че силата, която действува на заряд в магнитно поле, е равна на $\mathbf{F}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, но ако преминем от дясна система в лява, то както е известно, понеже $\mathbf{F}$ и $\mathbf{v}$ са полярни вектори, изменението на знака поради наличието на векторно произведение трябва да се компенсира от изменението на знака на $\mathbf{B}$, а това означава, че $\mathbf{B}$ трябва да бъде аксиален вектор. С други думи, при такова отражение $\mathbf{B}$ трябва да преминава в $-\mathbf{B}$. По такъв начин, ако изменяме левите координати на десни, еднозременно трябва да променим и северния полюс на магнита с южен.

Да видим как става всичко това чрез един пример. Нека да имаме два магнита, подобни на изобразените на фиг. 52.4. Единият от магнитите изглежда точно като огледалното отражение на другия, т. е. неговите намотки са навити в обратната посока и всичко, което става в бобината, трябва да бъде точно обърнато в обратна посока. Токът тече, както е показано на фигурата. Сега от законите на магнетизма (които вие още официално не знаете, но очевидно помните от гимназиалния курс) ще се получи, че магнитното поле е насочено така, както е показано на фигурата. Там, където при първия магнит е южен полюс, в другия магнит ще бъде северен, нали в него токът тече в обратна посока, а магнитното поле е обърнато. По такъв начин излиза, че при прехода от дясна система в лява трябва действително да заменим северния полюс с южен!

Но северен и южен полюс — това е просто уговорка и тяхната смяна не означава нищо. Нека да видим самото *явление*. Да предположим, че електронът се движи през магнитното поле по посока от нас, перпендикулярно към равнината на страницата. Тогава, ако се възползуваме от формулата за силата $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ (не забравяйте, че електронът е отрицателен!), ще получим, че в съответствие с този физически закон електронът трябва да се отклони в дадена посока. И така явлението се състои в следното. Ако в бобината тече ток в определена посока, електронът някак си се отклонява. Ето това е физиката и не е важно как ще наричаме всичко по пътя.

А сега да направим този опит с огледално отразения магнит. Да изпратим електрона в съответната посока. Сега на него ще му действува обратната сила. Като я пресметнем по същите правила, ще получим правилния резултат — съответното *движение* ще бъде огледално отражение на предишното!

6. Коя ръка е дясна?

Работата е там, че съществува един интересен факт: във всяко явление правилото за дясната ръка се среща два или въобще четен брой пъти и в резултат всяко явление винаги изглежда симетрично. Накратко казано, щом не можем да различим северния полюс от южния, няма да можем да различим и дясната страна от лявата. Може да изглежда, че е много просто да се определи къде се намира северният полюс на магнита. Северният край на магнитната стрелка ще бъде този, който ще показва на север. Но отново това е локално свойство, свързано с географията на Земята, еднакво с указанието къде се намира Чикаго и поради това не влиза в сметката. Ако сте виждали стрелка на компас, вероятно сте забелязали, че нейният северен край е оцветен с нещо като син цвят. Но това вече е дело на човека, който е боядисвал стрелката. Така че всичко това са условни критерии.

Виж, ако магнитът обладаваше свойството, като го погледнем внимателно да открием, че на неговия северен полюс расте брада, каквато няма на южния — това би било общо правило, т. е. би съществувал някакъв единен начин, който позволява да се различи северният полюс на магнита от южния. *Това би било краят на симетрията при отражението.*

За да стане по-ясен целият проблем, представете си, че разговаряте по радиото с някакво същество, което се намира много далече от нас. Ние не можем да му изпратим някакъв образец, за да го види. Например ако бихме могли да му изпратим сноп светлинни лъчи, то бихме могли да му изпратим дясно кръгово поляризирана светлина и бихме казали: „Обърнете внимание на посоката на въртене на поляризацията на този вид светлина, ние я наричаме дясна.“ Но ние не можем да му изпратим нищо подобно, а можем само да говорим с него. Нашият събеседник се намира много, много далече, в някакъв неизвестен свят и не може да види това, което виждаме ние. Ние не можем да кажем: „Погледни към Голямата мечка. Виж как са разположени нейните звезди. Под дясна страна разбираме . . . “ Ние можем само да говорим с него по радиото.

Да предположим, че ни се прииска да му разкажем за себе си. Е най-добре е да се започне с числата: „Тик, тик-*две*, тик, тик, тик-*три* . . .“, така че постепенно той ще научи тези две думи, а след това и повече. След известно време вие дотолкова ще се запознаете с него, че той ще ви попита: „Виж какво, приятелю, как изглеждаш?“ Вие ще започнете да се описвате и първата ви работа е да кажете: „Моят ръст е един метър и 75.“ „Чакай — ще каже той, — какво е това метър?“ Може ли да му се обясни какво е това метър? Разбира се, може! Вие ще кажете: „На тебе ти е известен диаметърът на атома на водорода, та ето моят ръст е 17 000 000 000 диаметра на атома на водорода!“ Това е възможно, нали физическите закони са инвариантни относно измененията на мащаба и поради това *можем* да определяме абсолютната дължина. И така определихме размера на нашето тяло. Може да се опише и общата форма на тялото, да се разкаже, че имаме крайници с пет израстъка на краищата и т. н. Без особени трудности той ще разбере от нашето описание как изглеждаме. Той даже може да си изгради нашия модел и като го погледне да каже: „Е, е, . . . да. Ти, приятелю, не изглеждаш съвсем зле. Но какво има вътре в теб?“ И ние ще започнем да му описваме нашите вътрешни органи, ще дойдем до сърцето, ще му опишем изчерпателно неговата форма и ще кажем: „Сложи го в лявата част на гърдите.“ „Къде, къде? В лявата част? А какво е това?“ — ще се удиви той. И ето как да му се опише в коя страна се намира сърцето, ако той не може да види това, което виждаме ние и никога не е получавал от нас нещо, което да му позволи да разбере къде собствено е лявата му страна. Може ли да се направи това?

7. Четността не се запазва

Оказва се, че законите на привличането, законите на електричеството и магнетизма, законите на ядрените сили — всички се подчиняват на законите на симетрията при отражение, така че нито тези закони, нито полученото от тях не може да ни помогне. Обаче в природата беше открито явление, което може да става с много частици и то се нарича *бета-разпад* или *слаб разпад*. Един от видовете слаб разпад, свързан с частиците и открит през 1954 г., зададе на физиците труден ребус. Има такава заредена частица, която се разпада на три π-мезона, както е показа-



Фиг. 52.5. Схематична диаграма на разпадите на τ-и θ-мезоните

но това схематично на фиг. 52.5. Временно наричаха тази частица τ-мезон. На същата фигура е показана и друга частица, която се разпада на *два* π-мезона. Съгласно закона за запазването на заряда единият трябва да бъде неутрален. Тази частица беше наречена θ-мезон. И така имаме τ-мезон, който се разпада на три π-мезона, и θ-мезон, който се разпада на два π-мезона. Скоро обаче се откри, че масите на τ и θ са почти еднакви, по-точно в рамките на експерименталните грешки те просто са равни. Освен това, където и да се появят, те винаги се раждат в една и съща пропорция, да кажем 14% τ-частици и 86% θ-частици.

Който е по-досетлив, веднага ще разбере, че имаме работа с една и съща частица, т. е. че не се раждат две частици, а само една, която може да се разпада по два различни начина. Затова ние получавахме един и същ процент на раждането (нали това е просто процент, който отразява начините, по които тя се разпада).

Обаче квантовата механика позволява да се докаже, като се излезе от принципа за симетрията при отражението (сега аз за съжаление не мога да ви обясня как се прави това), че е съвършено невъзможно тези два начина на разпад да принадлежат на една и съща частица — една частица *не може* по никакъв начин да се разпадне по два различни начина. Законът за запазването, съответстващ на принципа на симетрията при отражение, няма аналог в класическата физика и този специфичен закон за запазването в квантовата механика беше наречен закон за *запазването на четността*. По такъв начин вследствие на закона за запазването на четността или по-точно от симетрията на квантово-механичните уравнения на слабия разпад относно отражението се получи, че една и съща частица не може да се разпада по два начина, така че тук ние се срещаме с някакво удивително съвпадение на масите, времената на живот и т. н. Но колкото повече се изучаваше това явление, толкова по-удивително ставаше съвпадението и постепенно растеше съмнението за несправедливостта на основния закон за симетрията на природата относно отражението.

Това привидно нарушение подбуди физиците Ли и Янг да предложат поставянето на други опити и проверката на това ще се изпълнява ли законът за запазване на четността и при други сродни разпади. Първият такъв опит беше изпълнен от Ву в Колумбийския университет. Той се състоеше в следното. Оказва се, че за кобалта, който се явява добър магнетик, съществува изотоп, който се разпада, като изпуска електрони. Ако го поставим в много силно магнитно поле при много ниска температура, така че топлинните трептения да не отместват много силно атомните „магнитчета“, тогава те всички ще се строят по посока на

магнитното поле. По такъв начин всички атоми на кобалта се „строяват“ по еднакъв начин в това силно магнитно поле. След това те се разпадат, изпускат електрони и се оказва, че когато атомите се „строяват“ в магнитно поле с вектор B, насочен нагоре, то повечето електрони летят надолу.

За този, който не е много „на ти“ със света на физиката, тази забележка говори малко, обаче този, когото вълнуват тайните на природата, ще види, че това е най-удивителното откритие на нашето време. Ако атомите на кобалта се поставят в много силно магнитно поле, то излетелите електрони летят по-охотно надолу, отколкото нагоре. Затова ако отразим този опит в огледало така, че атомите на кобалта да са „строени“ обратно, т. е. нагоре, то те биха изпускали своите електрони *нагоре,* а не *надолу и симетрията би изчезнала. Ето на магнита му поникна брада!*

Сега ние знаем, че южният полюс на магнита е този, от чиято страна летят електроните на β-разпада. По такъв начин физически е възможно да се различи северният полюс от южния.

След това бяха направени много други опити: разпад на π-мезон на μ и ν, разпад на μ-мезон на електрон и две неутрино, разпад на Λ-частица на протон и π-мезон, разпад на Σ-частица и много други разпади. И почти във всички тези случаи, където това можеше да се очаква, беше открито *отсъствието* на принципа на огледалната симетрия! Един от основните закони на физиката — законът за симетрията при отражението — се оказа погрешен на това ниво.

Накратко сега вече ние бихме могли да обясним на нашия космически приятел къде е разположено сърцето ни. „Виж какво — бихме му казали, — направи си магнит, намотай на него жица и пусни по нея ток. След това вземи парченце кобалт и го охлади до ниска температура. Разположи цялото устройство така, че изпуснатите електрони да летят от краката към главата, тогава посоката на тока в бобината ще ти покаже коя страна ние наричаме дясна и коя — лява: токът влиза от дясната страна и излиза от лявата.“ И така с помощта на опит от този род може да се определи къде е дясната и къде лявата страна.

Бяха предсказани много други свойства. Оказа се например, че спинът, т. е. ъгловият момент или моментът на количеството на движението на ядрото на кобалта, е равен преди разпада на пет единици $\hbar$, а след разпада — на четири. Половината от този момент на количеството на движението отнася електронът, а половината неутриното. Сега е лесно да се съобрази, че моментът на количеството на движение, отнесен от електрона, трябва да бъде насочен по траекторията му, както и моментът на количеството на движението на неутриното. Като че ли електронът се върти от дясно на ляво — това също беше проверено. Това беше направено точно тук в нашия институт. Бем и Вапстра, които направиха опита, установиха, че електронът действително се върти наляво. (Имаше и други опити, които дадоха противоположния ефект, но те се оказаха погрешни.)

Следващата задача беше да се намери правилото за нарушаване на закона за запазване на четността. Има ли някакво правило, което да ни каже, колко голямо трябва да бъде това нарушение? То се оказа следното: нарушение става само в много бавните реакции, наречени слаби разпади и ако то е станало, частицата, която отнася спин, такива като електрон или неутрино, ще излитат, въртейки се предимно наляво. Това е като че ли „правило на асиметрията“, то свързва полярния вектор на скоростта и аксиалния вектор на момента на количеството на движението и казва, че на момента на количеството на движението е по-присъща посока, обратна на вектора на скоростта, отколкото по него.

Такова е правилото, но ние не разбираме още много добре всичките негови „защо“ и „затова“. *Защо* е вярно именно това правило, в какво се крие неговата основна причина и как то е свързано с другите явления? Сега сме така потресени от самия

факт за асиметрията на света, че още не можем да се оправим и да разберем, как ще се отрази това на всички останали правила. Още повече, че тази проблема е интересна, и, уви, досега нерешена. Затова сега е време да се обсъдят някои въпроси, свързани с това правило.

8. Антивещество

Когато изчезва една от симетриите, първата работа е незабавно да се обърнем към списъка на известните или предполагаеми симетрии и да видим не може ли да се наруши още някоя от тях. Ние не споменахме една операция от нашия списък, а на първо място към нея се отнася нашият въпрос — това е отношението между веществото и антивеществото. Дирак предсказа, че в допълнение към електроните на този свят трябва да съществуват и други частици, наречени позитрони (открити от Андерсон в КАЛТЕХ), и те са тясно свързани с електроните. Всички свойства на тези две частици се подчиняват на определени правила за съответствие: равни са енергиите им, равни са масите, зарядите им са противоположни, но най-важното е, че когато се сблъскат, те могат взаимно да се унищожат (да анихилират), като превърнат цялата своя маса в енергия, например γ-излъчване. Позитронът се нарича *античастица* на електрона и тези свойства се явяват основни свойства на частицата и нейната античастица. От разсъжденията на Дирак беше ясно, че всички останали частици трябва да имат свои съответни античастици. Например наред с протона трябва да съществува и антипротон, който сега се означава със символа $\bar{p}$. Той трябва да има отрицателен електрически заряд, равна на протона маса и т. н. Обаче най-важното свойство се явява това, че когато протон и антипротон се сблъскат, те могат да се унищожат един друг. Аз особено подчертавам това, защото хората обикновено се удивляват, когато кажеш, че наред с неутрона съществува и антинеутрон и казват: „Как антинеутронът *може* да има противоположен заряд, нали той е неутрален?“ Представката „анти“ не означава просто противоположен заряд, частицата се характеризира с цял набор от свойства, много от които стават противоположни. Антинеутронът може да се отличава от неутрона по следния начин: ако се поставят два неутрона един до друг, те така ще си останат два неутрона, но ако поставим заедно неутрон и антинеутрон, те ще се унищожат взаимно, при което ще отделят голямо количество енергия във вид на разни π-мезони, γ-кванти и т. н.

По-нататък, ако имаме антипротони, антинеутрони и позитрони[1], по принцип от тях могат да се направят антиатоми. Това не е направено още, но по принцип е напълно възможно. Например в атома на водорода, в центъра, е разположен един протон, около който се върти един електрон. Представете си сега, че сме направили антипротон и сме пуснали около него позитрон. Ще се върти ли той? Но преди всичко антипротонът е зареден отрицателно, а позитронът — положително, така че те ще се привличат със съответната сила и доколкото масите им са еднакви с тези на протона и електрона, то и всичко останало ще бъде еднакво. В това се състои и един от принципите на симетрията във физиката: очевидно уравненията ни говорят, че ако направим един часовник от вещество, а друг, точно същият — от антивещество, то те ще вървят съвършено еднакво. (Разбира се, ако поставим тези часовници един до друг, те ще се унищожат взаимно, но това е съвсем друга работа.)

Тогава веднага възниква въпрос. Двата часовника могат да се направят от вещество, при това единият от „дясноориентирано“, а другият от „лявоориентирано“. Може да кажем, да се направят не прости часовници, а такива с кобалт, магнити и детектори,

[1] Сега вече се правят още два антиизотопа на водорода: антидеутрон и антитритий — *заб. на ред.*

които да регистрират и броя електрони на β-разпада. Всеки път, когато се регистрира електрон, секундната стрелка леко се придвижва. Но тогава огледално отразеният часовник, в който идват по-малко електрони, няма да върви със същата скорост. И така сега ни е ясно, че е възможно да се построи такава двойка часовници, че дясноориентираните да не се съгласуват с лявоориентираните. Да направим часовник от вещество и да го наречем стандартен или дясноориентиран и да направим часовник също от вещество и да го наречем лявоориентиран. Току-що установихме, че, общо казано, тези два часовника *няма* да вървят еднакво, а преди това изключително откритие във физиката се смяташе, че ще вървят. Освен това по-нататък предполагахме, че веществото и антивеществото са еквивалентни, т. е. ако бяхме направили часовник от антивещество също дясноориентиран, със същата форма, той би вървял точно така, както и дясноориентираният часовник от вещество, а ако бихме направили същия лявоориентиран часовник, и той би вървял точно по същия начин. С други думи, първоначално предполагахме, че *всички четири* часовника трябва да работят съвършено еднакво. Но сега знаем, че дясноориентираните и лявоориентираните часовници от вещество не са еднакви. А следователно дясно и лявоориентираните часовници от антивещество очевидно също няма да са еднакви.

Сега възниква следният въпрос: има ли два часовника, които да вървят еднакво? Иначе казано, държи ли се дясноориентираното вещество така както дясноориентираното антивещество? Или дясноориентираното вещество се държи както лявоориентираното антивещество? Опитите с β-разпад, но не с електронен, а с позитронен β-разпад, показват, че тази връзка е такава: „дясното“ вещество се държи точно така, както „лявото“ антивещество.

И така в крайна сметка дясно-лявата симетрия все пак е реабилитирана! Ако направим лявоориентиран часовник, но го направим от съвършено друг материал — от антивещество, а не от вещество, то той ще върви точно по същия начин. В крайна сметка стана следното: вместо две независими правила в нашия списък за симетриите получихме едно ново комбинирано правило, което гласи, че дясноориентираното вещество е симетрично с лявоориентираното антивещество.

По такъв начин ако нашият приятел от Космоса е направен от антивещество и ние му дадем указания как да си направи нашия „дясноориентиран“ модел, то, разбира се, той ще направи всичко наопаки. Какво би станало, ако след дълги преговори бихме се научили един друг да строим космически кораби и бихме се уговорили за среща някъде в космическото пространство по средата на пътя между нас и тях? Разбира се, предварително бихме си разказали един на друг за своите обичаи и т. н., и ето накрая вие бързате насреща му, за да му стиснете ръката. Но бъдете внимателни! Ако той ви протегне лявата си ръка — пазете се![1]

9. Нарушената симетрия

А какво да правим със законите, които само *приблизително* са симетрични? Най-удивителното тук е това, че в широката област на най-важните явления — ядрените сили, електромагнитните явления и даже някои слаби взаимодействия от типа на гравитацията, с една дума, всички закони в най-широката област на

[1] Авторът ненапразно предупреждава, че за цялото съдържание на тази глава може да се каже: „доколкото днес на нас ни е известно“. Нали това вече е „предният край“ на физиката, където са възможни всякакви изменения. Така и излезе. Съвсем неотдавна беше установено, че симетрията между дясното вещество и лявото антивещество не съществува винаги. Комбинираната симетрия също се оказа приблизителна. Ние още не знаем как и защо става това, засега строим само хипотези, но е напълно възможно, когато работата дойде до среща с нашия приятел от другия свят, ние предварително да можем да изясним от вещество ли е направен като нас или от антивещество.

физиката се оказват симетрични. Но, от друга страна, изведнаж изплува някакво мъничко явление и казва: „Не, не всичко на света е симетрично!“ Но как е станало така, че природата е почти симетрична, а не абсолютно симетрична? Какво да правим с нея? Преди всичко нека все пак да погледнем няма ли някои други примери от подобен род? Да, такива примери има и даже не един. Например ядрените части на силите между протон и протон, между протон и неутрон или неутрон и неутрон са точно равни една на друга. Това е някаква нова симетрия, симетрия на ядрените сили — протонът и неутронът напълно могат да се заместят един друг в ядрените взаимодействия. Но очевидно тя не е обща симетрия, нали между два неутрона не съществува електрическо отблъскване както между два протона. Затова ние не можем *винаги* да заместваме протона с неутрон, изобщо това не е вярно, въпреки че се явява добро приближение. Защо *добро?* Защото ядрените сили са много по-големи от електрическите. Така че това също е „почти симетрия“. И така подобни примери все пак има и в други области.

На нас винаги ни се иска да разглеждаме симетрията като някакъв вид съвършенство. Това напомня за старата идея на гърците за съвършенството на кръговете. На тях им е било дори страшно да си представят, че планетарните орбити не са кръгове, а само почти кръгове. Но между кръг и почти кръг разликата не е малка, а ако се говори за начин на мислене, то това изменение е просто огромно. Съвършенството и симетрията на кръга изчезват, щом малко го изкривим. Деформирайте малко един кръг и това ще бъде краят на неговата симетрия и съвършенство. Пита се защо орбитите са само *почти* кръгове? Това е далеч потруден въпрос. Изобщо истинското движение на планетите трябва да става по елипси, но в течение на вековете благодарение на приливните сили те почти са се превърнали в окръжности. Но навсякъде ли има подобен проблем? Ако пътищата на планетите бяха действително окръжности, не биха били необходими обстойни обяснения — те са прости. Но доколкото тези пътища са почти кръгови, необходимо е още твърде много, за да се обяснят. Резултатът се превръща в голям динамичен проблем и сега трябва да обясним, като привлечем приливните сили или нещо друго' защо те са приблизително симетрични.

И така нашата цел е да разберем откъде се появи симетрията. Защо природата е така близо до симетрията? По този въпрос никой няма разумен отговор. Единственото, което мога да ви предложа, е едно старо японско предание. В японския град Нико има една врата, която японците наричат най-красивата врата в страната. Тя била построена през периода на голямото влияние на китайското изкуство.[1] Това е необикновено сложна врата с множество фронтони, изумителна резба и голям брой колони, в основата на които са изрязани глави на дракони, божества и т. н. Но като се вгледаш, може да забележиш, че сред сложната и изкусна рисунка на едната от колоните някои от нейните дребни детайли са изрязани с краката нагоре. В останалото рисунката е напълно симетрична. Пита се за какво е било нужно всичко това? Както казва преданието, това е било направено, за да не заподозрат боговете човека в съвършенство. Грешката е била направена умишлено, за да не се предизвика завистта и гневът на боговете.

Ние можем изобщо да подхванем тази мисъл и да кажем, че истинското обяснение за приблизителната симетрия на света се състои в следното: боговете са сътворили своите закони само приблизително симетрични, за да не им завиждаме на тяхното съвършенство!

[1] Построил я е архитектът и резбарят Цингору в средата на XVII век — Заб. на ред.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЯ

НЯКОИ КОНСТАНТИ

Число на Авогадро	$N=6{,}0249 \cdot 10^{23}$ молекули/g-мол
Скорост на светлината	$c=2{,}99793 \cdot 10^{10}$ cm/s
Заряд на електрона	$e=4{,}80286$ ел. стат. ед. $=1{,}6021 \cdot 10^{-9}$ кулона
Константа на Планк	$\hbar=6{,}5817 \cdot 10^{-22}$ MeV. s $=1{,}054 \cdot 10^{-27}$ ерг.сек
Маса на електрона	$m_e=0{,}511006$ MeV.
Маса на протона	$M=1836{,}12\ m_e$
1 кюри	$3{,}7 \cdot 10^{10}$ разпада в секунда
1 година	$3{,}1536 \cdot 10^7$ s ($\approx \pi \cdot 10^7$ s)
Ускорение на силата на тежестта	980,67 cm/s^2
1 атмосфера	1033,2 g/cm^2

Към глава 5.4 **Таблица на времената**

Години	Секунди		Период на полуразпадане
		?????	
	10^{18}	Възраст на Вселената	
10^9		Възраст на Земята	U^{238}
	10^{15}		
10^6		Първия човек	
10^3	10^{12}	Възрастта на пирамидите	R_a^{226}
		Възраст на САЩ	
1	10^9	Човешки живот	H^3
	10^6	Денонощие	
	10^3	Светлината изминава разстоянието от Слънцето до Земята	Неутрон
	1	Един удар на сърцето	
	10^{-3}	Период на звуковата вълна	
	10^{-6}	Период на радиовълните	μ-мезон
			$\pi\pm$-мезон
	10^{-9}	Светлината изминава разстояние 1 m	
	10^{-12}	Период на въртене на молекулите	
	10^{-15}	Период на атомните трептения	π°-мезон
	10^{-18}	Светлината преминава през атома	
	10^{-21}	Период на трептенията на ядрото	Странни частици
	10^{-23}	Светлината преминава през ядрото	
		????	

Към глава 5.7 **Таблица на разстоянията**

Светлинни години	Метри	
		????
	10^{27}	
10^9		Размери на Вселената
	10^{24}	
10^6		До най-близката съседна Галактика
	10^{21}	
10^3		До центъра на нашата Галактика
	10^{18}	
1		До най-близката звезда
	10^{15}	
		Радиус на орбита на Плутон
	10^{12}	
		До Слънцето
	10^9	
		До Луната
	10^6	
		Височина на изкуствен спътник
	10^3	
		Височина на телевизионна кула
	1	Ръст на дете
	10^{-9}	
		Частица сол
	10^{-6}	
		Размер на вируса
	10^{-9}	
		Радиус на атома
	10^{-12}	
	10^{-15}	Радиус на ядрото
		????

ЕЛЕМЕНТАРНИ ЧАСТИЦИ, ТЕХНИТЕ МАСИ И ВРЕМЕНА НА ЖИВОТ (ДАННИ 1965 г.)

	Символ	Маса, MeV	Време на живот, s
	γ	0	
ЛЕПТОНИ			
Неутрино и антинеутрино	ν_e, $\tilde{\nu}_e$	0	Стабилни
	ν_μ, $\tilde{\nu}_\mu$	0	
Електрон	$e+$, $e-$	0,511006 ±0,000002	
Мюон	$\mu+$, $\mu-$	105,659 ±0,002	$2{,}2 \cdot 10^{-6}$
МЕЗОНИ			
Пион	$\pi+$, $\pi-$	139,580 ±0,05	$2{,}55 \cdot 10^{-8}$
		134,974 ±0,05	$1{,}80 \cdot 10^{-16}$
Каон	$K+$, $K-$	493,78 ±0,17	$1{,}88 \cdot 10^{-10}$
	K_1^0	497,87 ±0,22	$0{,}92 \cdot 10^{-10}$
	K_2^0		$5{,}77 \cdot 10^{-8}$
БАРИОНИ			
Нуклони и антинуклони	p, $\bar{p}$	938,256 ±0,005	Стабилни
	n, $\bar{n}$	939,550 ±0,005	$1{,}01 \cdot 10^{-3}$
Хиперони и антихиперони	Λ, $\bar{\Lambda}$	1115,41 ±0,12	$2{,}61 \cdot 10^{-10}$
	$\Sigma+$, $\bar{\Sigma}+$	1189,39 ±0,14	$0{,}81 \cdot 10^{-10}$
	Σ^0, $\bar{\Sigma}^0$	1192,3 ±0,2	$< 10^{-14}$
	$\Sigma-$, $\bar{\Sigma}-$	1197,20 ±0,14	$1{,}65 \cdot 10^{-10}$
	Ξ^0, $\bar{\Xi}^0$	1314,3 ±1,0	$3{,}1 \cdot 10^{-10}$
	Ξ^-, $\bar{\Xi}-$	1320,8 ±0,2	$1{,}75 \cdot 10^{-10}$
	Ω^-, $\bar{\Omega}-$	1670 ±3	$0{,}7 \cdot 10^{-10}$

ФАЙНМАНОВИ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКА

Автори *Р. ФАЙНМАН*
Р. ЛЕЙТОН
М. СЕНДС

Преводачи *ИВАН ЕМАНУИЛОВ*
МАРЧО КРАЕВ
ИВАН ЛАЛОВ
ДИМИТЪР ТРИФОНОВ
ДОЧО ФАКИРОВ

Редактор *М. ПАЛИКАРСКА*
Худ. на корицата *ИВ. МАРКОВ*
Худ.-редактор *М. ГЕДОВА*

Техн. редактор *М. БУДИНОВА*
Калиграф *Б. КЕСЯКОВ*
Коректори *Л. РАДЕНКОВА и Л. АНДРЕЕВА*

* * *

Дадена за печат на 30 VI. 1969 г.
Излязла от печат на
Л. Г. III/6 Формат 59×84/8
Печатни коли 76 и 4 стр. I издание
Тираж 5110 Цена 4,63 лв. Поръчка № 518

* * *

Печатница „Георги Димитров“ — София
Държавно издателство „Народна просвета“ — София

Печатни грешки

Стр.	Ред.	Напечатано	Да се чете	По вина на
31	21 отдолу	вълни	вълни ;	печатницата
34	20 отдолу	частицата;	частицата	печатницата
35	17 отдолу	в сравнение	в сравнение с	печатницата
40	17 отгоре	на което става	което става, на	печатницата
64	под фиг. 5, 4	циркулацията	триангулацията	печатницата
70	на фиг. 61	O, P	T, E	редактора
134	6 отгоре	да не се	чете редът	печатницата
210	10 отгоре	n_i	m_i	печатницата
138	3 отгоре	1. Какво	1. Какво е сила	печатницата
211	1, 9 отдолу	w	ω	печатницата
226	13 отдолу	w_2	ω_2	печатницата
228	1 отгоре	ω^r	ωr	печатницата
326	под фиг.	0.4	30.4	печатницата
364	5 отдолу	$z=z$	$z=z_1$	печатницата
365	под фиг.	в на	вълна	печатницата
367	15 отгоре	изчистим	изчислим	редактора
367	21 отгоре	са	за	коректора
370	25 отдолу	$e_{R'}$	$e_{R'}$	редактора
387	12 отгоре	на тях	от тях	редактора
397	под фиг.	Мерни	Нервни	печатницата
404	под фиг.	фасетни	фацетни	редактора
411	2 отдолу	у	с	печатницата
411	22 отдолу	ма	на	печатницата
411	23 отдолу	дозъкът	мозъкът	печатницата
434	26 отгоре	E_1	E_0	редактора
434	19 отдолу	$Рмц$	$Рцц$	печатницата
445	25 отгоре	$\frac{m_1 v^2}{2}$	$\underline{m_1 v_1^2}$	печатницата
457	25 отгоре	$u>0$	$n>0$	коректора
458	формула (40.5)	$\int_{\infty}^{\infty}$	$\int_{-\infty}^{\infty}$	печатницата
463	17 отгоре	като	както	коректора
576	4 отдолу	$\int_0^x dx\,(1+x^2)$	$\int_0^x dx/(1+x^2)$	коректора
577	под фигурата	Ресакция	Реакция	печатницата
577	11 отдолу	x_{bx}^2	x_{bx}^3	редактора
582	23 отдолу	разминаването	размиването	коректора