

УПРАЖНЕНИЕ СРАВНЯВАНЕ НА ЕКСПЕРИМЕНТАЛНАТА И ТЕОРЕТИЧНАТА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ ПРИ ИЗМЕРВАНЕ ИНТЕНЗИТЕТА НА РАДИОАКТИВЕН ИЗТОЧНИК И ОПРЕДЕЛЯНЕ ВРЕМЕТО НА ИЗМЕРВАНЕ

Цел на упражнението е да се провери работоспособността на броячната апаратура, като се сравнят експерименталната и теоретичната неопределености¹ при измерване интензитета на радиоактивен източник и да се определи необходимото време на измерване, при което ще се достигне предварително зададена неопределеност на скоростта на броене, като се отчита и влиянието на фона.

Теоретични бележки

Неопределености при ядрено-физичните измервания

Целта на всяко измерване е да се определи стойността на дадена физична величина. Нито едно измерване обаче не може да бъде абсолютно точно. Често разликата между измерената и истинската стойност се нарича *грешка*. За съжаление, понятието грешка и нейните компоненти: *случайна*, *статистическа*, *систематична*, *груба грешка* е обременено с неясноти и друг смисъл. Поради това е по-коректно вместо понятието грешка (error-англ., erreur-фр.) да се използва понятието неопределеност (uncertainty-англ., incertitude-фр.). Препоръчва се също да се използва терминът *оценяване на неопределеността* вместо *изчисляване*, тъй като изчисляването предполага получаване на точна стойност.

Неопределеностите могат да бъдат систематизирани като груби, систематични, случайни и статистически.

Грубите неопределености обикновено се дължат на използваните уреди за измерване като напр. електромагнитно смущение, лоши или замърсени контакти или изолатори, странични радиоактивни източници. Те могат да се дължат и на субективни причини като напр. неправилно отчитане или записване на показанията на уредите, логични неточности в програмното осигуряване, неправилно тълкуване на експерименталните данни. Грубите неопределености, от една страна, са много опасни, тъй като не подлежат на никакъв анализ и оценка. От друга страна обаче, те

¹ Тук условно наричаме *експериментални неопределености* средно-квадратичните отклонения, определяни непосредствено от данните, докато за оценяване на *теоретичните неопределености*

могат да бъдат сравнително лесно избегнати със старателно поддържане на апаратурата, прецизна проверка на използваните програми, добре планирано извеждане на информацията, нейното прегледно записване, разработването на *самопроверяващи* се схеми на изчисляване и т.н. Най-важното условие те да не се допуснат е внимателната работа на експериментатора.

Систематичните неопределености възникват непрекъснато при измерването, те са с еднаква големина и са постоянни по знак. Например, ако използваният таймер (часовник) изостава, се загубват импулси заради мъртвото време на апаратурата или се добавят импулси от съществуващ фон. По принцип систематичните неопределености могат да се отчетат и коригират, както се прави с фона и с мъртвото време. Когато е възможна корекция на систематичните неопределености, в оценката на неопределеността трябва да се оставят само тези нейни компоненти, които не подлежат на корекция.

Случайните и статистическите неопределености се дължат на случайни по големина и знак отклонения при всяко единично измерване. Строго погледнато, статистическите неопределености са частен случай на случайните и се използва еднакъв математичен апарат за техния анализ и оценка, но тук правим разлика между тях в зависимост от произхода им. Към статистическите неопределености причисляваме тези, които се дължат на вероятностния характер на радиоактивните превръщания или на взаимодействията на елементарните частици с веществото. Към случайните неопределености се включват само тези, които са свързани със стохастически процеси и ефекти в макросвета.

За ядрено-физичните измервания са характерни статистическите неопределености. В класическата физика се предполага, че измерваната величина има някаква точно определена стойност, но несъвършенството на измерителните прибори и наличието на малки различия в условията на самото измерване предизвикват случайните отклонения. При измерванията в квантовата физика флукутират самите измервани величини.

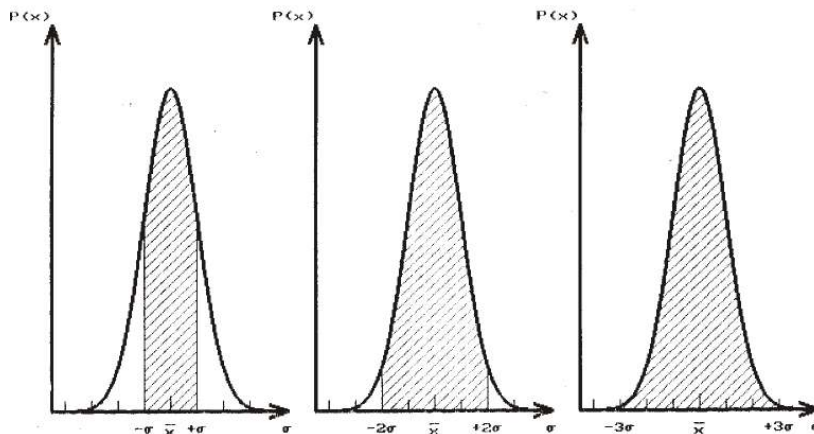
Величината *средно-квадратично отклонение* (Δ) е най-удобната мярка за характеризиране на неопределеността (точността) на едно измерване. Използват се

(*средно-квадратични отклонения*) се предполага Поасоново, респ. Гаусово разпределение на измерваната случайна величина.

два вида представяне на средно-квадратичните отклонения: *абсолютни* и *относителни*. Абсолютните средно-квадратични отклонения σ се изразяват в мерните единици на самата величина, напр. (10 ± 1) cm, (100 ± 2) имп/s. Относителните средно-квадратични отклонения се означават като $\eta = \sigma/A$, където A е стойността на измерваната величина. Те са безразмерни и обикновено се изразяват в проценти.

В упражнението ще измерваме броя импулси, регистрирани от броячната апаратура за определено време. Импулсите са предизвикани от попадането в детектора на елементарни частици (електрони, позитрони, гама-кванти и др.), получени в резултат на радиоактивно разпадане. Броят импулси, регистрирани за определено време е случайна величина, която има *Поасоново разпределение*. Някои елементарни сведения за случайните величини изобщо и за тези, които се появяват в ядрено-физичните измервания, са дадени в *Приложението*.

Ако се проведат голям брой измервания на една и съща величина, вероятността да се получи конкретна стойност се описва от Гаусова крива и експериментално могат да се намерят нейните параметри, използвайки (П2) и (П5). Ако измерваната величина е брой регистрирани импулси, може да се използва теоретичният резултат (П13). Важен за практиката въпрос е колко е средно-квадратичното отклонение, ако за време t сме преброили N импулса. Единственото, което можем да направим при наличието само на едно измерване е да се облекнем на факта, че броят регистрирани импулси има Поасоново, респ. Гаусово разпределение и да приемем, че средната стойност е N (виж П2), а съгласно (П13) средно-квадратично отклонение е $\sqrt{N}$. При многократно повтаряне на измерването в 68 % от случаите се получава резултат в границите от $N - \sqrt{N}$ до $N + \sqrt{N}$; а в 32 % - извън тези граници. Това е и препоръчваният начин за представяне на резултата: $A \pm \sigma$ с доверителен интервал 68 %. В някои случаи обаче е важно границите, в които може да се намира търсената стойност, да са по-сигурни. Тези граници могат да се дадат като $A \pm 2\sigma$ (доверителен интервал 95,5 %) или даже $A \pm 3\sigma$ (доверителен интервал 99,7 %). Но тогава трябва специално да се посочи използваният коефициент пред σ или доверителният интервал (защрихованите области на фиг. 1).



Фиг. 1 Доверителни интервали.

Разпространение на неопределеностите

В повечето случаи от регистрираният брой импулси N от този брой се изчислява друга величина, напр. скоростта на броене $I = N/t$. Като се използва свойството на дисперсията (П8), получаваме

$$(1) \quad \sigma^2(I) = D(I) = D\left(\frac{N}{t}\right) = \frac{1}{t^2} D(N) = \frac{N}{t^2} = \frac{I}{t}.$$

Друг пример е определянето на чистия брой импулси само от източника $N_{\text{и}}$. Той представлява разликата между броя импулси, дължащи се едновременно на източника и фона $N_{\text{и+ф}}$, и на импулсите, дължащи се само на фона $N_{\text{ф}}$, при едно и също време на измерване: $N_{\text{и}} = N_{\text{и+ф}} - N_{\text{ф}}$. В този случай може да се използва свойството на дисперсията (П7):

$$(2) \quad \sigma^2(N_{\text{и}}) = D(N_{\text{и}}) = D(N_{\text{и+ф}} - N_{\text{ф}}) = D(N_{\text{и+ф}}) + D(N_{\text{ф}}) = N_{\text{и+ф}} + N_{\text{ф}},$$

като се има предвид израза (П13).

В по-сложни случаи, особено когато търсеният резултат зависи от няколко независими измервания

$$(3) \quad y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

се използва известната от статистическата теорията формула за разпространение на неопределеностите:

$$(4) \quad \sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \sigma_{x_n}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 .$$

Прилагането на тази формула към някои прости и често срещани функционални зависимости води до изрази за неопределеностите, показани в табл. 1. Те могат да се използват и за решаване на по-сложни случаи, като процедурата за намиране на търсената зависимост се разделя на последователни операции, което обикновено е по-лесно от прякото прилагане на (4). Показаните в табл. 1 изрази обаче не трябва да се прилагат за зависещи една от друга компоненти A и B .

Таблица I.1. Средно-квадратични отклонения за някои често срещани функционални зависимости

Функционална връзка	Връзка между средно-квадратичните отклонения
$y = A + B$ $y = A - B$	$\sigma_y^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2$
$y = A \cdot B$	$(\sigma_y/y)^2 = (\sigma_A/A)^2 + (\sigma_B/B)^2$ $\sigma_y^2 = B^2 \sigma_A^2 + A^2 \sigma_B^2$
$y = A / B$	$(\sigma_y/y)^2 = (\sigma_A/A)^2 + (\sigma_B/B)^2$ $\sigma_y^2 = (\sigma_A/B)^2 + (A/B^2)^2 \sigma_B^2$
$y = A^n$	$\sigma_y/y = n \sigma_A/A$ $\sigma_y = n A^{n-1} \sigma_A$
$y = \sqrt{A}$	$\sigma_y^2 = \sigma_A^2 / (4A)$
$y = \ln A$	$\sigma_y = \sigma_A / A$
$y = \exp(A)$	$\sigma_y/y = \sigma_A$

Претеглено средно

Понякога се налага да се комбинират резултати от измервания, които имат различна точност (или неопределеност). В този случай чрез въвеждането на тегло във вида

$$(5) \quad w_i = 1/\sigma_i^2 ,$$

където σ_i е средно-квадратичното отклонение на i -тото измерване, може да се конструира *претеглена* неотместена оценка

$$(6) \quad \bar{x} = \frac{\sum w_i k_i}{\sum w_i},$$

която има дисперсия

$$(7) \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{\sum w_i}$$

по-малка от дисперсията на не претеглената оценка (П2).

Опитна постановка

Радиоактивен препарат – източник на β - или γ -лъчи; детектор за съответното лъчение и захранващата го апаратура, регистрираща електроника, вкл. преброител с таймер.

Изпълнение на упражнението

1. Да се включи и настрои апаратурата и да се направят 4 серии по 10 измервания за времена $t = 4, 10, 40$ и 100 s.
2. Данните за всяка серия да се представят в примерна таблица

$t = \dots$ s

n	k_i	$k_i - \bar{x}$	$(k_i - \bar{x})^2$
1			
...			
10			
	$\sum k_i$	$\sum (k_i - \bar{x})$	$\sum (k_i - \bar{x})^2$

² Съществува и по-лесен начин за изчисляване на сумата в сравнение със сумиране на квадратите от разликите. Използва се изразът

$$\sum_{i=1}^n (k_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n [k_i^2 - 2k_i \bar{x} + \bar{x}^2] = \sum_{i=1}^n k_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n k_i + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^n 1 = \sum_{i=1}^n k_i^2 - n\bar{x}^2.$$

3. За всяка серия измервания да се изчислят:

– средната стойност на измерения брой импулси (П2) и да се провери дали сумата на отклоненията от средната стойност е равна на нула – вж. (П3);

– оценката на дисперсията на измерения брой импулси $D_{\text{експ}}$ за всяка серия по формула (П5);

– теоретичната дисперсия на измерения брой импулси $D_{\text{теор}}$ по формула (П13);

– съответните абсолютни средно-квадратични отклонения $\sigma_{\text{теор}} = \sqrt{D_{\text{теор}}}$ и $\sigma_{\text{експ}} = \sqrt{D_{\text{експ}}}$ и относителните такива;

– експерименталните и теоретични дисперсии, средно-квадратични отклонения и относителните средно-квадратични отклонения на *средните стойности*, като се има предвид (П8);

– да се изчислят същите величини за средната скорост на броене $\bar{I} = \frac{\bar{x}}{t}$.

Получените резултати да се оформят в три таблици за трите случайни величини: измерения брой импулси, средната стойност от дадена серия на броя импулси и за средната скорост на броене. Примерният вид на таблиците е:

t	$\bar{x}$	I	D_e	D_T	σ_e	σ_T	η_e	η_T
4								
10								
40								
100								

Да се анализират получените резултати: дали са близки по стойност съответните теоретични и експериментални оценки и как се променят с увеличаване на времето на измерване.

Да се представи графично относителното експериментално средно-квадратично отклонение на средната скорост на броене за четирите серии в зависимост от времето на измерване и да се направи извод за наблюдаваната тенденция.

3. Да се измери чистата скорост на броење на радиоактивния източник с относително средно-квадратично отклонение $\eta = 0,01$ и $0,005^3$ (1 и 0,5 %), като се отчита влиянието на фона.

Когато радиоактивният източник е пред детектора, нека за време $t_{и+ф}$ се преброяват $N_{и+ф}$ импулса, част от които се дължат на измервания източник, а друга - на естествения радиационен фон и/или налични радионуклиди в лабораторията. За да се определят само импулсите от източника, той се отстранява и за време $t_{ф}$ се преброяват импулсите $N_{ф}$, дължащи се на фона. При условие че поставянето на източника не променя фона, което рядко е изпълнено и много трудно се проверява степента на нарушаването му, търсената скорост на броење $I_{и}$ е

$$(8) \quad I_{и} = I_{и+ф} - I_{ф} = \frac{N_{и+ф}}{t_{и+ф}} - \frac{N_{ф}}{t_{ф}}$$

със средно-квадратично отклонение $\sigma_{и}$, което, съгласно (1) и табл. 1 е:

$$(9) \quad \sigma_{и}^2 = \sigma_{и+ф}^2 + \sigma_{ф}^2 = \frac{I_{и+ф}}{t_{и+ф}} + \frac{I_{ф}}{t_{ф}}.$$

Задачата е да се намери колко минимално общо време на измерване

$$(10) \quad T = t_{и+ф} + t_{ф}$$

е необходимо, за да се определи скоростта на броење $I_{и}$ с предварително зададена относителна неопределеност

$$(11) \quad \eta = \frac{\sigma_{и}}{I_{и}}$$

и как оптимално трябва да се разпредели това време между измерването на източника и на фона.

Условието за минимална неопределеност е производната на $\sigma_{и}$ да бъде равна на нула. За удобство се диференцира по времето t израза (9):

$$(12) \quad d(\sigma_{и}^2) = -\frac{I_{и+ф}}{t_{и+ф}^2} dt_{и+ф} - \frac{I_{ф}}{t_{ф}^2} dt_{ф} = 0$$

Като се вземе предвид, че от (10) $dt_{и+ф} = -dt_{ф}$, за отношението на двете времена на измерване се получава

³ Ръководителят на практикума може да зададе и други стойности.

$$(13) \quad \frac{t_{и+ф}^2}{t_{ф}^2} = \frac{I_{и+ф}}{I_{ф}} = \kappa^2,$$

където κ е помощна величина. От този израз и от (10) получаваме

$$(14) \quad t_{и+ф} = \frac{\kappa T}{(\kappa + 1)} \quad \text{и} \quad t_{ф} = \frac{T}{(\kappa + 1)}.$$

Като се заместят тези стойности в (10) и се премине към относителната неопределеност, окончателното решение за T дава

$$(15) \quad T = \frac{\kappa + 1}{\kappa} \cdot \frac{I_{и+ф} + \kappa I_{ф}}{\eta^2 I_{и}^2}.$$

Задачата се изпълнява в следната последователност:

а) измерва се за сравнително кратко време (напр. 100 s) скоростта на броене в случаите на източник и фон ($I_{и+ф}$) и само на фон ($I_{ф}$) и се изчислява помощната величина κ ;

б) от (15) се определя необходимото общо време за достигане на зададената неопределеност, а от (14) – разпределението му;

в) задават се най-близките по-големи времена, които позволява уредът, и се провеждат измерванията с и без източник;

г) изчислява се скоростта на броене и нейната неопределеност.

Приложение. Случайни събития, случайни величини и техните разпределения

Събития, чиито резултат (изход) не може да бъде достоверно предсказан, са *случайни* събития. Когато на възможните резултати от дадено събитие могат да се съпоставят числа, то с това събитие можем да свържем числова *случайна величина*.

Множеството от всички възможни стойности $x_1, x_2, x_3, \dots$, които може да има случайната величина X , се нарича *генерална съвкупност*. Генералната съвкупност може да е непрекъснато или дискретно множество, като последното може да има краен или безкраен брой елементи. В серия от краен брой опити, обаче, получаваме само крайно множество K от стойности на величината: $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$, които наричаме *извадка*.

Случайната величина може да се характеризира с *функция на разпределение* и при определени условия с *плътност на функцията на разпределение*. Последната често за по-кратко се нарича *разпределение на случайната величина*⁴. Посредством функцията на разпределение на отделните стойности на случайната величина се съпоставят неотрицателни числа, които наричаме *вероятности* за появяване на съответните стойности. Вероятността е математическа абстракция на опитно наблюдаваната *честота* на повторение на едни и същи изходи при многократно реализиране на едно и също случайно събитие. Ще означаваме разпределението на случайната величина X с $P(x)$.

Често ще ни интересуват т. нар. *моменти на разпределението*: *средна стойност*, *средно-квадратично отклонение*, *асиметрия* и т. н. Ако е познато разпределението на случайната величина, тези моменти могат по принцип да бъдат изчислени. Изчислените по този начин стойности на моментите ще наричаме *истински*⁵. Когато имаме на разположение извадка от краен брой стойности, можем да получим само *статистическа оценка* на даден момент на разпределението. Важно изискване към оценката е тя да е *сходяща*, т.е. при $n \rightarrow \infty$ да клони към определена стойност и *неотместена*, т.е. тази стойност да е стойността на съответния момент.

Математическо очакване

Първият момент на функцията на разпределение се нарича *математическо очакване* $M(X)$. Истинската му стойност за дискретна величина е

$$(П1) \quad M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(x_i) ,$$

където $P(x_i)$ е вероятността случайната величина да вземе стойност x_i . Оценката на математическото очакване, получена от извадка от n опита (измервания) обикновено се нарича *средна стойност*:

$$(П2) \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n k_j .$$

⁴ Често се използва и названието *закон за разпределение на случайната величина*.

⁵ В условен смисъл, разбира се.

Важно качество на средната стойност е, че сумата на всички отклонения от нея е равна на нула:

$$(ПЗ) \quad \sum_{j=1}^n (k_j - \bar{x}) = 0 .$$

Това свойство може да се използва за контрол на грешки при пресмятането на средната стойност.

Дисперсия и средно-квадратично отклонение

Вторият (централен) момент на функцията на разпределение се нарича *дисперсия* $D(X)$:

$$(П4) \quad D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i)(x_i - M(X))^2 ,$$

а оценката ѝ е

$$(П5) \quad D(K) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (k_i - \bar{x})^2 .$$

Появяването на коефициента $1/(n-1)$ вместо $1/n$ се дължи на факта, че между n -те случайни величини $(k_j - \bar{x})$ съществува връзката (П2), така че в действителност броят на независимите случайни величини не е n , а $n-1$.

Величината *средно-квадратично отклонение*

$$(П6) \quad \sigma = \sqrt{D(X)} \text{ или } \sigma = \sqrt{D(K)}$$

е най-удобната мярка за характеризиране на неопределеността (точността) на едно измерване.

Дисперсията има следните важни свойства:

1. Дисперсията на сумата от n независими случайни величини X_i е равна на сумата от дисперсиите им:

$$(П7) \quad D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n D(x_i) ;$$

2. Дисперсията на произведение на случайната величина X с константа c е равна на дисперсията на величината, умножена с квадрата на константата:

$$(П8) \quad D(cX) = c^2 D(X) .$$

Тези свойства могат да се използват за определяне дисперсията на средната стойност, ако са известни дисперсиите на отделните измервания:

$$(П9) \quad D(\bar{x}) = \sigma^2(\bar{x}) = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{D(x)}{n}$$

Правим разлика между понятието *средно-квадратично отклонение на отделното измерване*, чиято опитно определена оценка се дава с изразите (П5) и (П6) и *средно-квадратично отклонение на средната стойност на извадката*, за която получената експериментално оценка е

$$(П10) \quad D(\bar{x}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

В първия случай става въпрос за оценка на средно-квадратичното отклонение, респ. дисперсията на *разпределението на измерваната случайна величина*. Във втория случай *случайната величина е оценката за средната стойност* (П2). Тя – независимо от разпределението на измерваната величина, има χ^2 -разпределение с математическо очакване, равно на математическото очакване на измерваната величина и дисперсия $D(\bar{X}) = \frac{1}{n} D(X)$. Оценка на тази дисперсия на базата на конкретната извадка от n измервания е изразът (П10). При големи n χ^2 -разпределението преминава в Гаусово със същото математическо очакване и дисперсия.

Случайни величини при радиоактивното разпадане

Многобройните експериментални изследвания са показали, че всяко радиоактивно ядро се разпада в случаен момент от време, независимо от останалите ядра и изобщо от външните условия. Нека разгледаме образец с N радиоактивни ядра и нека ни интересува броят ядра, които ще се разпаднат за определен интервал от време t . Този брой очевидно е случайна величина. Нека обозначим вероятността едно ядро да се разпадне за времето t с θ . Следователно вероятността то да не се разпадне е $(1 - \theta)$. Каква е вероятността $P(x)$ в интервала от време t да се разпаднат точно x ядра? След като разпадането (или неразпадането) на едно ядро е независим

процес, то тази вероятност е равна на произведението от вероятността $x\theta$ да се разпаднат x ядра, вероятността $(N-x)(1-\theta)$ останалите $(N-x)$ ядра да не се разпаднат и броя комбинации, с които може да се изберат x ядра от N налични, т.е.:

$$(П11) \quad P(x) = \frac{N!}{x!(N-x)!} \theta^x (1-\theta)^{(N-x)}.$$

Формула (П11) представлява т. нар. *биномно разпределение*. За съжаление, в случая на радиоактивно разпадане то не е удобно за работа, тъй като обикновено броят на радиоактивните ядра в един източник е много голям (10^{20} и повече) и изчисляването на факториалите е трудоемко. Поради това се прави математично приближение без въвеждане на нови физични идеи. Когато броят на радиоактивните ядра N клони към безкрайност, вероятността за разпадането на едно ядро за избрания интервал време - към нула, а средният брой на разпаданията $\mu = N\theta$ остава краен и постоянен, биомното разпределение клони към Поасоновото разпределение

$$(П12) \quad P(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}.$$

Последното е дискретно, дефинирано е само за цели неотрицателни стойности на x и зависи от един реален параметър μ . Математическото очакване и дисперсията на разпределението са равни на този параметър:

$$(П13) \quad M(X) = D(X) = \mu.$$

Поасоновото разпределение дава вероятността в един източник за време t да се разпаднат 0, 1, 2 и т. н. ядра при среден брой разпаднали се ядра μ . Изложените по-горе разсъждения могат да бъдат направени и в случая, когато регистрираме с брояч частици, възникнали при радиоактивно разпадане. Броят регистрирани импулси за интервал време t има Поасоново разпределение⁶.

При малки стойности на μ Поасоновото разпределение е силно несиметрично, но при по-големи стойности ($\mu > 20$) то става симетрично, а вероятността за регистриране на точно определен брой импулси - много малка. В случай на голям среден брой $\bar{x}$, т.е. голямо μ е удобно да се премине към непрекъснато разпределение, т. е. да се търси вероятността измереният брой импулси да е в някакъв интервал.

При $\mu \rightarrow \infty$ Поасоновото разпределение преминава в еднопараметрично Гаусово разпределение:

$$(П14) \quad P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp\left\{-\frac{(\mu-x)^2}{2\mu}\right\},$$

при което дисперсията е равна на математическото очакване на измерваната величина съгласно (П13).

Гаусовото разпределение има много важно значение за оценката на неопределеностите и при всички други измервания, напр. на дължини, време и пр., при които точността на измерването зависи от използвания метод или уред. По принцип то е двупараметрично разпределение, зависещо от реалните параметри μ и σ :

$$(П15) \quad P(x | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

при което

$$(П16) \quad M(X) = \mu \text{ и } D(X) = \sigma^2.$$

Връзката (П13) е в сила само когато Гаусовото разпределение е получено като гранична стойност на Поасоновото разпределение при $\mu \rightarrow \infty$.

Гаусовото разпределение е непрекъснато, докато регистрираният брой импулси е дискретна величина. Когато обаче този брой е голям можем да считаме, че имаме приблизително непрекъсната случайна величина. За такива величини познаването на тяхното разпределение ни дава възможност да намерим вероятността $P(x)dx$ за попадане на резултата от конкретно измерване в интервала $(x, x+dx)$.

⁶ Този резултат е валиден и когато източникът на частици е със строго постоянна интензивност (т.е. не е радиоактивен препарат), но процесите на регистрация на частиците имат случаен, статистически характер.