УПРАЖНЕНИЕ ПРОВЕРКА НА ВАЛИДНОСТТА НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЯТА НА ПОАСОН И ГАУС ПРИ РАДИОАКТИВНО РАЗПАДАНЕ

Цел на упражнението е да се сравни експериментално измереното разпределение на честотата на регистриране на даден брой импулси от радиоактивен източник за определен интервал време с теоретично очакваното вероятностно разпределение на Поасон, валидно за малък среден брой регистрирани импулси, или на Гаус, което е в сила за голям среден брой импулси.

Теоретични бележки

Случайни събития, случайни величини и техните разпределения

Събития, чиито резултат (изход) не може да бъде достоверно предсказан, са *случайни* събития. Когато на възможните резултати от дадено събитие могат да се съпоставят числа, то с това събитие можем да свържем числова *случайна величина*.

Множеството от всички възможни стойности x_1, x_2, x_3,..., които може да има случайната величина X, се нарича *генерална съвкупност*. Генералната съвкупност може да е непрекъснато или дискретно множество, като последното може да има краен или безкраен брой елементи. В серия от краен брой опити, обаче, получаваме само крайно множество K от стойности на величината: k_1, k_2, k_3,..., k_n, които наричаме *извадка*.

Случайната величина може да се характеризира с *функция на разпределение* и при определени условия с *плътност на функцията на разпределение*. Последната често за по-кратко се нарича *разпределение на случайната величина*[1]. Посредством функцията на разпределение на отделните стойности на случайната величина се съпоставят неотрицателни числа, които наричаме *вероятности* за появяване на съответните стойности. Вероятността е математическа абстракция на опитно наблюдаваната *честота* на повторение на едни и същи изходи при многократно реализиране на едно и също случайно събитие. Ще означаваме разпределението на случайната величина X с $P(x)$.

Често ще ни интересуват т. нар. *моменти на разпределението: средна стойност*, *средно-квадратично отклонение*, *асиметрия* и т. н. Ако е познато разпределението на случайната величина, тези моменти могат по принцип да бъдат изчислени. Изчислените по този начин стойности на моментите ще наричаме *истински*[2]. Когато имаме на разположение извадка от краен брой стойности, можем да получим само *статистическа оценка* на даден момент на разпределението. Важно изискване към оценката е тя да е *сходяща*, т.е. при $n \to \infty$ да клони към

[1] Често се използва и названието *закон за разпределение на случайната величина*.
[2] В условен смисъл, разбира се.

определена стойност и *неотместена*, т.е. тази стойност да е стойността на съответния момент.

Математическо очакване

Първият момент на функцията на разпределение се нарича *математическо очакване* $M(X)$. Истинската му стойност за дискретна величина е

(1) $$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(x_i) \ ,$$

където $P(x_i)$ е вероятността случайната величина да вземе стойност x_i. Оценката на математическото очакване, получена от извадка от n опита (измервания) обикновено се нарича *средна стойност*:

(2) $$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} k_j \ .$$

Важно качество на средната стойност е, че сумата на всички отклонения от нея е равна на нула:

(3) $$\sum_{j=1}^{n}(k_j - \overline{x}) = 0 \ .$$

Това свойство може да се използва за контрол на грешки при пресмятането на средната стойност.

Дисперсия и средно-квадратично отклонение

Вторият (централен) момент на функцията на разпределение се нарича *дисперсия* $D(X)$:

(4) $$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i)(x_i - M(X))^2 \ ,$$

а оценката ѝ е

(5) $$D(K) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(k_i - \overline{x})^2 \ .$$

Появяването на коефициента $1/(n-1)$ вместо $1/n$ се дължи на факта, че между n-те случайни величини $(k_j - \overline{x})$ съществува връзката (I.3), така че в действителност броят на независимите случайни величини не е n, а $n-1$.

Величината *средно-квадратично отклонение*

(6) $$\sigma = \sqrt{D(X)} \ \text{ или } \ \sigma = \sqrt{D(K)}$$

е най-удобната мярка за характеризиране на неопределеността (точността) на едно измерване.

Случайни величини при радиоактивното разпадане

Многобройните експериментални изследвания са показали, че всяко радиоактивно ядро се разпада в случаен момент от време, независимо от останалите ядра и изобщо от външните условия. Нека разгледаме образец с N радиоактивни ядра и нека ни интересува броят ядра, които ще се разпаднат за определен интервал от време t. Този брой очевидно е случайна величина. Нека обозначим вероятността едно ядро да се разпадне за времето t с θ. Следователно вероятността то да не се разпадне е $(1-\theta)$. Каква е вероятността $P(x)$ в интервала от време t да се разпаднат точно x ядра? След като разпадането (или неразпадането) на едно ядро е независим процес, то тази вероятност е равна на произведението от вероятността $x\theta$ да се разпаднат x ядра, вероятността $(N-x)(1-\theta)$ останалите ($N-x$) ядра да не се разпаднат и броя комбинации, с които може да се изберат x ядра от N налични, т.е.:

(7) $$P(x)=\frac{N!}{x!(N-x)!}\theta^{x}(1-\theta)^{(N-x)}.$$

Формула (7) представлява т. нар. *биномно разпределение*. За съжаление, в случая на радиоактивно разпадане то не е удобно за работа, тъй като обикновено броят на радиоактивните ядра в един източник е много голям (10^{20} и повече) и изчисляването на факториалите е трудоемко. Поради това се прави математично приближение без въвеждане на нови физични идеи. Когато броят на радиоактивните ядра N клони към безкрайност, вероятността за разпадането на едно ядро за избрания интервал време - към нула, а средният брой на разпаданията $\mu = N.\theta$ остава краен и постоянен, биномното разпределение клони към Поасоновото разпределение

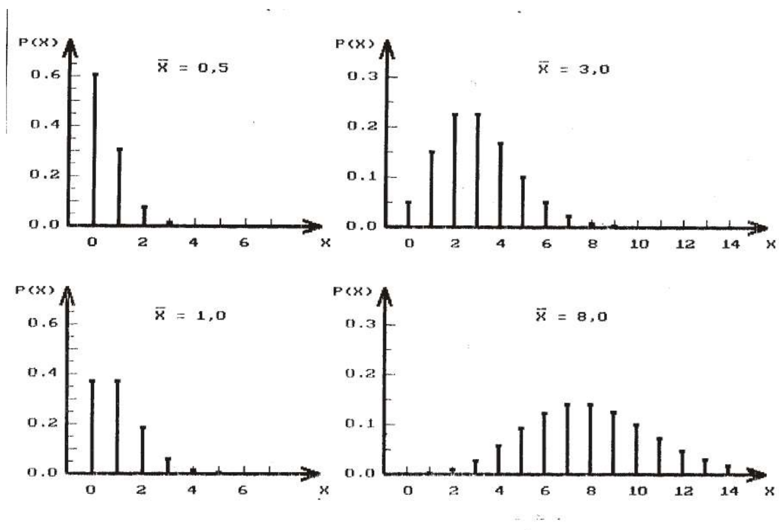
(8) $$P(x)=\frac{\mu^{x}}{x!}e^{-\mu}.$$

Последното е дискретно, дефинирано е само за цели неотрицателни стойности на x и зависи от един реален параметър μ. Математическото очакване и дисперсията на разпределението са равни на този параметър:

(9) $$M(X)=D(X)=\mu .$$

Поасоновото разпределение дава вероятността в един източник за време t да се разпаднат 0, 1, 2 и т. н. ядра при среден брой разпаднали се ядра μ. Изложените по-горе разсъждения могат да бъдат направени и в случая, когато регистрираме с брояч частици, възникнали при радиоактивно разпадане. Броят регистрирани импулси за интервал време *t* има Поасоново разпределение[3].

Примери за Поасоново разпределение при различни средни стойности $\bar{x} = \mu$ са показани на фиг. I.1.



Фиг. I.1. Поасоново разпределение при различни средни стойности

При малки стойности на μ Поасоновото разпределение е силно несиметрично, но при по-големи стойности (μ > 20) то става симетрично, а вероятността за регистриране на точно определен брой импулси - много малка. В случай на голям среден брой $\bar{x}$, т.е. голямо μ е удобно да се премине към непрекъснато разпределение, т. е. да се търси вероятността измереният брой импулси да е в някакъв интервал.

При $\mu \to \infty$ Поасоновото разпределение преминава в еднопараметрично Гаусово разпределение:

(10) $$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp\left\{-\frac{(\mu - x)^2}{2\mu}\right\} ,$$

при което дисперсията е равна на математическото очакване на измерваната величина:

(11) $$D(X) = M(X) = \mu .$$

[3] Този резултат е валиден и когато източникът на частици е със строго постоянна интензивност (т.е. не е радиоактивен препарат), но процесите на регистрация на частиците имат случаен, статистически характер.

Гаусовото разпределение има много важно значение за оценката на неопределеностите и при всички други измервания, напр. на дължини, време и пр., при които точността на измерването зависи от използвания метод или уред. По принцип то е двупараметрично разпределение, зависещо от реалните параметри μ и σ:

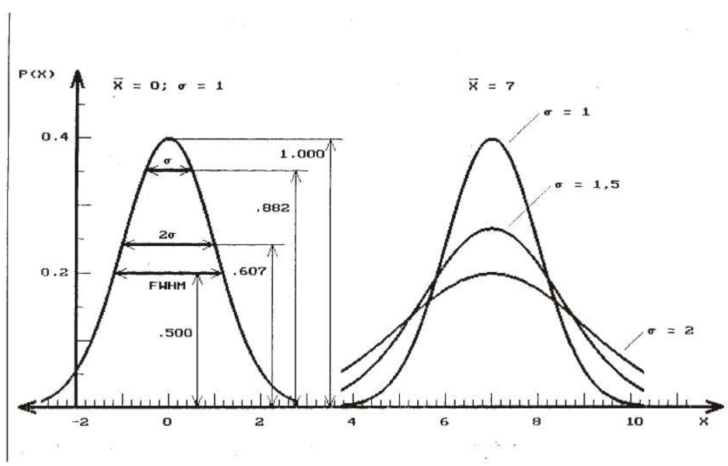
(12) $$P(x \mid \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\},$$

при което

(13) $$M(X) = \mu \quad \text{и} \quad D(X) = \sigma^2.$$

Връзката (11) е в сила само когато Гаусовото разпределение е получено като гранична стойност на Поасоновото разпределение при $\mu \to \infty$.

Примери на Гаусово разпределение с различни средни стойности и дисперсии (средно-квадратични отклонения) са показани на фиг. I.2.



Фиг. I.2. Гаусово разпределение с различни средни стойности

Гаусовото разпределение е непрекъснато, докато регистрираният брой импулси е дискретна величина. Когато обаче този брой е голям можем да считаме, че имаме приблизително непрекъсната случайна величина. За такива величини познаването на тяхното разпределение ни дава възможност да намерим вероятността $P(x)dx$ за попадане на резултата от конкретно измерване в интервала $(x, x+dx)$.

Опитна постановка

Радиоактивен препарат – източник на β- или γ-лъчи; детектор за съответното лъчение и захранващата го апаратура, регистрираща електроника, вкл. преброител с таймер.

Изпълнение на упражнението

1. Проверка на валидността на разпределението на Поасон.

Апаратурата се настройва така, че за подходящо време, напр. 4 s, да отчита средно между 5 и 15 импулса. Прави се серия от n измервания (n ~ 300). Удобно е по време на измерванията резултатите да се представят в таблица, в първата колонка на която са числата x_i = 0, 1, 2,... до максималния брой регистрирани импулси. Във втората колонка се поставя чертичка всеки път, когато в даденото измерване се регистрират x_i импулса. След завършване на всички измервания в третата колонка се поставя броят n_i попадения за даденото x_i, в четвъртата – произведението $x_i n_i$, а в петата – експерименталната честота за появяване на x_i импулса в нашата серия $f_{експ}(x_i) = n_i/n$. Четвъртата колонка е помощна за определяне на средния брой импулси за серията

(14) $$\bar{x} = \sum n_i x_i / n \ .$$

Тази формула следва непосредствено (2). Разбира се, може направо да се използва и израза (2). С така изчислената средна стойност от (8) изчисляваме вероятността $P_{теор}(x_i)$ за регистриране на x_i импулса, като вместо μ използваме неговата оценка $\bar{x}$.

Теоретичната вероятност и експерименталната честота се представят графично във вид на хистограма в зависимост от x_i и непосредствено се проверява дали има съществена разлика между двете разпределения.

Строго погледнато, думата „непосредствено” в горното изречение не означава нищо, докато не укажем *процедура*, чрез която ще сравняваме двете разпределения, т.е. как да проверим нашата *хипотеза*, че получените от нас експериментални честоти се описват от вероятности със съответните разпределения. Задачата е частен случай на по-общия проблем за проверка на хипотези. На по-любознателните предлагаме да използват една широко използвана статистическа процедура, изложена в *Приложението*.

2. Проверка на валидността на разпределението на Гаус.

Апаратурата се пренастройва така, че да регистрира сравнително голям брой импулси за зададеното време, напр. повече от 200. Прави се отново серия от n измервания ($n \sim 300$). Интервалът между най-малката и най-голямата стойност се разделя на подходящ брой (10 – 15) подинтервала с еднаква ширина Δx и се определя броят измервания n_i, попадащи във всеки подинтервал.

Резултатите се представят в таблица, подобна на тази от Задача 1, но без втората колонка, а средният брой импулси се определя директно от (2). След това за всеки подинтервал от (10) изчисляваме вероятността

$$P_{\text{теор}}(x_i) = P(x_i)\Delta x \qquad (15)$$

за регистриране на x_i импулса,като x_i е стойността на случайната величина в средата на подинтервала с номер i, а Δx е неговата ширината (една и съща за всички подинтервали). $P(x_i)$ изчисляваме като отново вместо неизвестния параметър μ използваме неговата оценка $\bar{x}$. Експерименталната честота е, както обикновено, $f_{\text{експ}}(x_i) = n_i/n$.

Експерименталната честота и теоретичната вероятност, както и в Задача 1, се представят на графика чрез хистограма и се прави сравнение между тях. Отново е желателно сравнението да се направи по процедурата, изложена в *Приложението*.

На базата на извършеното сравняване в двете задачи се прави извод и предположения за причините за несъответствие, ако се наблюдава такова.

Приложение. Процедура за оценка на хипотези с използване на критерия χ^2

В конкретния случай нашата хипотеза е, че получените честоти n_i/n се описват от разпределенията (8) за Задача 1 или (10) за Задача 2 с $\mu = \bar{x}$. Тъй като става въпрос за случайни величини и краен брой измервания, то всяка оценка ще има *вероятностен* или *статистически* характер. За да получим такава оценка е необходимо да укажем *процедура*, по която от данните да конструираме *критерии* за оценка[4] на нашата хипотеза. Обикновено това е *реално число*, което има определен вероятностен смисъл. Има различни критерии за оценка, които се използват в зависимост от целите ни. Ние ще приложим тук критерия χ^2.

Числото χ^2 в нашия случай се пресмята по следния начин:

[4] Този критерии понякога наричат *тестова статистика*.

(16) $$\chi^2(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(n_i/n - P(x_i) \right)^2}{\sigma_i^2} \quad ,$$

където *n* е броят на подинтервалите. Числата σ_i имат смисъл на неопределеност на броя попадения във всеки подинтервал. В нашия случай $\sigma_i^2 = n_i$. χ^2 е случайна величина, защото се пресмята от случайните величини n_i . Тя има разпределение, което носи нейното название: *χ^2–разпределение.* Математическото му очакване е *n*, а дисперсията е *2n*. При големи *n* χ^2–разпределението клони към Гаусово разпределение с $\mu = n$ и $\sigma^2 = 2n$. Числото *n* се нарича брой на степените на свобода на величината χ^2. Строго погледнато, конструираната чрез (16) величина има *n–1* степени на свобода, защото при пресмятането на $P(x_i)$ използваме $\bar{x}$, а не (неизвестното) μ.

Нека χ^2 за нашата серия измервания, пресметнато от (16), е χ_0^2. Сега трябва да пресметнем съответстващото му *ниво на достоверност (confidence level, CL),* което е (случайно) число с равномерно разпределение между 0 и 1. То се пресмята като интеграл от χ^2–разпределението – което в нашия случай за простота ще апроксимираме с Гаусово разпределение с $\mu = n - 1$ и $\sigma = \sqrt{2(n-1)}$, по следния начин:

(17) $$CL(\chi_0^2) = (\int_{-\infty}^{\chi_0^2} dx P(x \mid n-1, \sqrt{2(n-1)}) \; .$$

Ако в () направим смяната на променливите $z=(x-\mu)/\sigma$, то интегралът се превръща в нормиран Гаусов интеграл $\Phi(z_0)$ или *нормирана Гаусова функция на разпределение*. Последната от своя страна се изразява чрез *функцията на грешките* $\boldsymbol{erf}(z_0)$

(18) $$erf(z_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z_0} dz \exp(-z^2) \, ,$$

по следния начин:

(19) $$\Phi(z_0) = \frac{1}{2}(1 + erf(\frac{z_0}{\sqrt{2}})) \; .$$

Функцията на грешките е табулирана в справочници, а има и множество стандартни програми (дори в някои джобни калкулатори) за пресмятането й.

Нека от (17) сме получили, да кажем, 0.92. Какво означава това? Това означава[5], че ако хипотезата ни не е правилна и направим голям брой серии от

[5] Тук терминологията е доста заплетена. При т.нар. *вероятностен подход (*противопоставян на *Бейсовския (Bayesian) подход)* статистическите твърдения при проверка на хипотези се правят за

измервания, подобни на серията, която разглеждаме, то най-малко в 8% от случаите ще получим $\chi^2 > \chi_0^2$. С други думи, при стойност на $CL(\chi_0^2) = 92\%$ шансът да приемем хипотезата си, ако тя е неправилна, е 8%. Добре тогава, правилна ли е хипотезата ни или не? На този въпрос може да се даде само вероятностен отговор, който гласи: „Вероятността да приемем хипотезата си, ако тя е неправилна, е най-много 8%".

Обикновено при проверка на дадена хипотеза *предварително* се избира ниво на достоверност. Ако пресметнатата от (17) стойност е по-малка, то считаме, че *отрицателната* хипотеза е неправилна[6]. Често срещащи се избори са 68%, 90%, 95%, 99%. Ако сме избрали 90%, то в горния пример хипотезата ни е правилна, ако обаче сме избрали 95%, то тогава сме длъжни да я отхвърлим. При съобщаването на резултати от физически измервания е коректно да се привеждат стойностите на *броя степени на свобода,* χ_0^2 и $CL(\chi_0^2)$, а читателят сам ще направи заключенията си[7].

вероятността $p = 1 - CL$, да отхвърлим *отрицателната хипотеза*, т.е. че данните *не се описват* от нашия модел, при условие, че същата тази отрицателна хипотеза е вярната.

[6] В простия случай на проверка на хипотеза без свободни параметри това твърдение е еквивалентно на твърдението, че *положителната* хипотеза е правилна.

[7] ако разбира за какво става въпрос…