УНИВЕРСИТЕТ “ПРОФ. Д-Р АСЕН ЗЛАТАРОВ” - БУРГАС
ФАКУЛТЕТ ПО ПРИРОДНИ НАУКИ

Катедра „Математика и физика”

ВИСША МАТЕМАТИКА
II ЧАСТ

МЕТОДИЧЕСКО РЪКОВОДСТВО
ЗА РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ

Автор: доц. д-р Галина Панайотова
ст. ас. Милена Искрова

Бургас
2009

СЪДЪРЖАНИЕ

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ

ЧИСЛОВИ РЕДИЦИ.

О. Казваме, че е зададена една числова редица, ако на всяко цяло положително число n е съпоставено едно число a_n.

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

a_n – наричаме общ член на редицата.

О. Числото a наричаме граница на редицата $\{ a_n \}$, ако за всяко положително число ε, същесрвува такъв номер N, че при $n > N$ да е изпълнено $|a_n - a| < \varepsilon$.

Означаваме: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Теореми за граници на редици:

T1 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$; T2 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n.b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n.\lim\limits_{n\to\infty} b_n$; T3 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Основни граници: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

ЗАДАЧИ

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2-2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}} = 1$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.e = e^2$.
3. Първото и второто число в редица са равни на 1, а всяко следващо се получава като сума от предходните две. Кое число стои на 5 място?
   а) 2; б) 3; в) 5; г) 8. Отг. б)
4. Кое число трябва да се постави вместо знака “*” в редицата?
   7, 17, 37, *, 157
   а) 110; б) 77; в) 33; г) 47. Отг. б)
5. Да се напишат първите няколко члена на числовата редица зададена чрез:
   а) $a_n = 3$, $a_n = 2a_{n-1} + 3$; Отг. 3, 9, 21, 45, ...
   б) $a_n = 10$, $a_n = 2^n - a_{n-1}$. Отг.10, -6, 14, 2, ...
6. Да се намерят границите на редиците с общ член:
   а) $a_n = \frac{n+5}{n+4}$; б) $a_n = \frac{3n+2}{n-3}$; в) $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$; г) $a_n = \frac{5n+1}{2n+4}$.
   Отг. а) 1; б) 3; в) 0,5; г) 2,5.
7. Да се намерят границите:
   а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n}$.
   Отг. а) e^{-1}; б) 1; в) e^5.

ФУНКЦИЯ НА ЕДНА ПРОМЕНЛИВА
ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЯ

О. Казваме, че е зададена една функция, ако на всеки елемент x от едно множество D е съпоставен елемент y от множество N.
Означаваме: $y = f(x)$.
D наричаме дефиниционно множество; x - аргумент; y - функция; N – множество от функционални стойности.
Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в D. $f(x)$ е четна в D , ако $f(x) = f(-x)$; $f(x)$ е нечетна в D , ако $f(-x) = - f(x)$;;
О. Числото a се нарича граница на функцията $y = f(x)$ за $x \to x_0$, ако за всяко положително число ε, съществува положително число δ , такова че за всяко $x \in D, x \neq x_0$, за което $|x - x_0| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - a| < \varepsilon$.
Означаваме: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.
Теореми за граници на функции:
Т1 $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$; Т2 $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x).g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x).\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

$$\text{Т3} \quad \lim_{x \to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

Лява и дясна граница: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = a$; $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = a$

Основни граници:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0; \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty; \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty;$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

ЗАДАЧИ:

Да се определят дефиниционните множества на функциите:

1. $y = 2x^4 + 3x^2 + 5x - 1$; 2. $y = (x - 2)^3 + 5$;
3. $y = \dfrac{3x}{x^2 + 6x + 5}$; 4. $y = \dfrac{x^2}{x^4 + 3x^2 + 2}$;
5. $y = \sqrt{x^2 - 8x + 15}$; 6. $y = \sqrt{4 - x^2}$;
7. $y = \ln(x - 1)$; 8. $y = \dfrac{x}{\ln x - 1}$;
9. $y = \arcsin(x - 3)$; 10. $y = arctg(2x^3 - x^2 + 1)$.

Отг. 1. $(-\infty, \infty)$; 2. $(-\infty, \infty)$;
3. Решение: $x^2 + 6x + 5 \neq 0 \to x \neq -5; x \neq -1$. ДМ е $(-\infty, -5) \cup (-1, \infty)$;
4. $(-\infty, \infty)$; 5. $(-\infty, 3) \cup (5, \infty)$;
6. Решение: $4 - x^2 \geq 0 \to x \in (-2, 2)$;
7. Решение: $x - 1 > 0$; $x > 1$. ДМ е $(1, \infty)$;
8. Решение: $\ln x - 1 \neq 0 \cup x > 0 \Leftrightarrow x \neq e \cup x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, e) \cup (e, \infty)$.

9. Решение: -1 $\le x - 3 \le 1$; $x \in$ [-4, -2]; 10. $(-\infty, \infty)$.

Да се намерят стойностите на функцията $y = f(x)$ за дадените стойности на променливата:

11. $y = x^4 - 2x^3 + x + 4$ за $x = 1$ и $x = -2$;
12. $y = \sqrt{3x^2 + 2x - 1}$ за $x = 1/3$ и $x = -1/2$;
13. $y = \ln\dfrac{x+4}{2x-1}$ за $x = 1$ и $x = 0$;
14. $y = e^{x^2-4}$ за $x = -3$ и $x = 2$;
15. $y = arctg(x^2 - 2x + 1)$ за $x = 1$ и $x = 0$.

Отг. 11. Решение: $f(1) = 1^4 - 2.1^3 + 1 + 4 = 4$; $f(-2) = (-2)^4 - 2.(-2)^3 + (-2) + 4 = 34$;
12. 0; не е дефинирана при x = -1/2; 13. ln5; не е дефинирана при $x = 0$;
14. e^5; e^0=1; 15. 0; п/4.

Да се изследва четността на функциите:

16. $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 1$; 17. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 3x^2 + 2}$; 18. $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x^2}$.

Отг. 16. Решение: $f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^2 - 1 = 2x^4 + 3x^2 - 1 = f(x)$; четна
17.четна; 18. нечетна.

Да се намерят границите:

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+2x^2+3x}{x^2+4x}\left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x^3+2x+3)}{x(x+4)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2x+3}{x+4} = \dfrac{0^3+2.0+3}{0+4} = \dfrac{3}{4}$.

19. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-12x+20}\left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-10)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x-10} = -\dfrac{1}{8}$.

20. $$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}.\frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 5}\frac{(x^2-25).(2+\sqrt{x-1})}{4-(\sqrt{x-1})^2} =$$
$$\lim_{x\to 5}\frac{(x-5).(x+5).(2+\sqrt{x-1})}{5-x} = \lim_{x\to 5}(x+5).(2+\sqrt{x-1}) = -40.$$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{1}{\cos x}\right) = 1.\dfrac{1}{1} = 1$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{ax} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right)^a = e^a$.

24. $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}}\dfrac{x}{x-4} = +\infty$ 25. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} arctg\dfrac{1}{x-1} = \lim\limits_{z\to -\infty} arctgz = -\dfrac{\pi}{2}$.

26. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$; 27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+x^3}{x^4-2x^3}$; 28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$;

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$; 31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$;

32. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{x+2}{x^2-4}$; 33. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} arctg\dfrac{1}{x-1}$; 34. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x+3}$.

Отговори: 26. 0; 27. $-\dfrac{1}{2}$; 28. $\dfrac{1}{2}$; 29. 1; 30. e; 31. $\dfrac{5}{3}$; 32. ∞; 33. $\dfrac{\pi}{2}$; 34. 0.

ТЕСТ

Намерете:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x-2}$. а) 0; б) 1; в) 2; г) 3.
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x-1}$. а) 0; б) 1; в) 2; г) 3.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$. а) 8; б) 1; в) 2; г) 4.
4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x}$. а) 8; б) 1; в) 2; г) 4.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-2x}{7x^3-x}$. а) 0; б) 1; в) 2; г) 3.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-x}{8x^3-x}$. а) 0; б) 1; в) 2; г) 3.
7. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$. а) 12; б) 1; в) 3; г) 4.
8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$. а) 3; б) 1; в) 4; г) 6.

Отг. 1в; 2б; 3в; 4в; 5в; 6б; 7г; 8а.

НЕПРЕКЪСНАТОСТ НА ФУНКЦИЯ

О. Функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0, ако удовлетворява условията:

- $f(x)$ е дефинирана за $x = x_0$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ съществува, т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

ЗАДАЧИ:

Изследвайте за непрекъснатост и намерете точките на прекъсване на функциите:

1. $$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{при} \quad -\infty < x < -1; \\ \dfrac{1}{x} & \text{при} \quad -1 < x < 1; \\ x & \text{при} \quad 1 < x < \infty. \end{cases}$$

Решение: Функцията не е дефинирана при $x = 0$. Следователно в тази точка тя е прекъсната. Да изследваме характера на прекъснатостта в тази точка.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty; \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty;$$

Точки на прекъсване в случая, могат да се окажат и тези, в които се сменя израза, чрез който функцията се представя, а именно точките x = -1 и x = 1.

При x = -1 имаме

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{1}{x} = -1; \qquad \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} 2x^2 = 2;$$

Лявата и дясната граници съществуват, хо хе са равни и следователно x = -1 е точка на прекъсване.

При x = 1 имаме

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x = 1; \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x} = 1; \quad f(1) = 1.$$

Функцията $f(x)$ удовлетворява и трите условия за непрекъснатост при x = 1 , следователно е непрекъсната в тази точка.

2. $y = \dfrac{1}{x-2}$; 3. $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 & \text{при} \quad x \le 2; \\ x & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$ 4. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{при} \quad x \ge 0; \\ x^2 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$

Отговори:

2. x = 2 – точка на прекъсване; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} y = -\infty;$ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} y = +\infty;$

3. x = 2 – точка на прекъсване; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} y = -2;$ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} y = +2;$

4. x = 0 – точка на прекъсване; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} y = 0;$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y = 1;$

ПРОИЗВОДНА И ДИФЕРЕНЦИАЛ НА ФУНКЦИЯ

Таблица на производните

Елементарни функции	Сложни функции
1. $c' = 0$	
2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}; \quad x' = 1$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; \quad (x^2)' = 2x; \quad (\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}u''$; $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}u'; \quad (u^2)' = 2uu'; \quad (\sqrt{u}) = \frac{1}{2\sqrt{u}}u'$
3. $(a^x)' = a^x \ln a; \quad e^{x'} = e^x$	$(a^u)' = a^u \ln a.u'; \quad e^{u'} = e^u u'$
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u}u'$
5. $(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u.u'$
6. $(co\,s\,x)' = -\sin x$	$(co\,s\,u)' = -\sin u.u'$
7. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u}u'$
8. $(cotgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot gu)' = -\frac{1}{\sin^2 u}u'$
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
11. $(\mathrm{arc}\,tgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arc}\,tgu)' = \frac{1}{1+u^2}u'$
12. $(\mathrm{arc}\,cotgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arc}\cot gu)' = -\frac{1}{1+u^2}u'$

Правила за диференциране:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(uv)' = u'v + uv'; \quad (cu)' = c.u', \quad c = conct$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \quad \left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}; \quad \left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}, \quad c = const.$

Диференциал dy на функцията $y = f(x)$

$$dy = f'(x).dx$$

Геометричен смисъл на производната: Нека $f(x)$ е дефинирана в D. $f'(x_0) = k$ за $x = x_0 \in D$, където $k = tg\alpha$, α - ъгълът между допирателната на графиката в точката $M(x_0,y_0)$ и положителната посока на оста Ox.

ЗАДАЧИ

Да се намерят първите производни на функциите.

1. $y = x^3 + x^2 + 2x + 3; \quad y' = (x^3)' + (x^2)' + (2x)' + (3)' = 3x^2 + 2x + 2$.

2. $y = x^2 - 2\arcsin x; \quad y' = (x^2)' - (2\arcsin x)' = 2x - \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. $y = x.\ln x; \quad y' = (x)'.\ln x + x.(\ln x)' = 1.\ln x + x.\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

4. $y = (1+x^2)arctgx;$

$y' = (1+x^2)'arctgx + (1+x^2)(arctgx)' = 2x.arctgx + (1+x^2).\dfrac{1}{1+x^2} = 2x.arctgx + 1.$

5. $y = \dfrac{x-2}{x+3};$

$y' = \dfrac{(x-2)'(x+3) - (x-2)(x+3)'}{(x+3)^2} = \dfrac{1.(x+3) - (x-2).1}{(x+3)^2} = \dfrac{x+3-x+2}{(x+3)^2} = \dfrac{5}{(x+3)^2}.$

6. $y = \dfrac{e^x}{x}, x \neq 0;$

$y' = \dfrac{(e^x)'.x - e^x.(x)'}{x^2} = \dfrac{e^x.x - e^x}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}.$

7. $y = 4e^x - 3;$ Отг. $y' = 4e^x$.

8. $y = (x^2 - 2x + 2)e^x;$ Отг. $y' = x^2 e^x$.

9. $y = \dfrac{x^2}{\ln x};$ Отг. $y' = \dfrac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$.

10. $y = \dfrac{1}{\sin x};$ Отг. $y' = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$.

Да се намерят първите производни на сложните функции.

11. $y = \dfrac{1}{3}.\ln x^3; \quad y' = \dfrac{1}{3}.(\ln x^3)' = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{x^3}(x^3)' = \dfrac{1}{3x^3}3x^2 = \dfrac{1}{x}$.

12. $y = \sqrt{1-x^2}; \quad y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)' = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. $y = (2x-5)^6; \quad y' = 6(2x-5)^{6-1}(2x-5)' = 12(2x-5)^5$.

14. $y = e^{x^2-3}; \quad y' = e^{x^2-3}.(x^2-3)' = 2xe^{x^2-3}$.

15. $y = \sin 3x; \quad y' = \cos 3x.(3x)' = 3\cos 3x$.

16. $y = \ln\sin x - 3;$ Отг. $y' = \cot gx$.

17. $y = \cos\dfrac{3}{x};$ Отг. $y' = \dfrac{3}{x^2}\sin\dfrac{3}{x}$.

18. $y = e^{-x};$ Отг. $y' = -e^{-x}$.

19. $y = e^x(\sin 3x - 3\cos 3x);$ Отг. $y' = 10e^x.\sin 3x$.

20. $y = \dfrac{1}{2}tg^2 x + \ln\cos x; \quad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = ?$ Отг. $y' = tg^3 x; \quad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

21. $y = -\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x} + \dfrac{1}{2}\ln tg\dfrac{x}{2};$ Отг. $y' = \dfrac{1}{\sin^3 x}$.

Да се намери ъгловият коефициент на допирателната към графиката на функцията $y = f(x)$ в точка x_0.

22. $y = (x-9).e^x, \quad x_0 = 0;$

23. $y = \ln(x^2 + 2x - 3), \quad x_0 = -4;$

24 $y = \sqrt{1-x^2}, \quad x_0 = 0;$

25. $y = 3x^2 - 4x + 2, \quad x_0 = 2/3$.

Отг. 22. -8; 23. -6/5; 24. 0; 25. 0.

Да се намерят производните от по-висок ред на функциите:

26. $y = x^4 + 2x^2 + 1; \quad y''' = ?$

$y' = (x^4 + 2x^2 + 1)' = 4x^3 + 4x; \quad y'' = (4x^3 + 4x)' = 12x^2 + 4; \quad y''' = (12x^2 + 4)' = 24x.$

27. $y = \cos^2 x; \quad y''(0) = ?$

$y' = (\cos^2 x)' = -2.\cos x.\sin x = -\sin 2x; \quad y'' = (-\sin 2x)' = -\cos 2x.(2x)' = -2\cos 2x;$

$y''(0) = -2.\cos 0 = -2.$

28. $y = \ln x; \quad y'' = ?$ Отг. $y'' = -\dfrac{1}{x^2}.$

29. $y = x^4 - 2x; \quad y^{(5)} = ?$ Отг. $y^{(5)} = 0.$

30. $y = x.e^x; \quad y''' = ?$ Отг. $y''' = e^x(x+3).$

31. $y = \dfrac{1}{x+1}; \quad y'' = ?$ Отг. $y'' = \dfrac{2}{(x+1)^3}.$

Да се намерят диференциалите на функциите:

32. $y = x^2 + 3x; \quad y' = 2x + 3; \quad dy = (2x+3)dx.$

33. $y = x^3 e^x; \quad y' = x^3 + 3x^2; \quad dy = (x^3 + 3x^2)dx.$

34. $y = \sqrt{\sin x};$ Отг. $dy = \dfrac{\cos x dx}{2\sqrt{\sin x}}.$

35. $y = arctgx^2;$ Отг. $dy = \dfrac{2xdx}{1+x^4}.$

ТЕСТ

1. Първата производна на функцията $y = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$ е равна на:

   а) $y = \dfrac{x^2}{4-x^2}$; б) $y = \dfrac{8x}{(4-x^2)^2}$; в) $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$; г) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$.

2. Първата производна на функцията $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ е равна на:

   а) $y = \dfrac{x^2}{4-x^2}$; б) $y = \dfrac{8x}{(4-x^2)^2}$; в) $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$; г) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$.

3. Втората производна на функцията $y = \cos 5x$ е равна на:

   а) $\sin 5x$; б) $-25\cos 5x$; в) $25\sin 5x$ г) $5\sin x$.

4. Втората производна на функцията $y = x - \sin 5x$ е равна на:

   а) $\sin 5x$; б) $-25\cos 5x$; в) $25\sin 5x$ г) $5\sin x$.

5. Стойността на производната на функцията $y = \sin\sqrt{2x}$ в точката $x = \dfrac{\pi^2}{2}$ е равна на: а) $-\dfrac{4}{\pi}$; б) $-\dfrac{2}{\pi}$; в) $-\dfrac{1}{\pi}$; г) $\dfrac{1}{\pi}$.

Отговори: 1б; 2г; 3б; 4в; 5в.

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ПРОИЗВОДНИТЕ

ПРАВИЛО НА ЛОПИТАЛ

Т. (Лопитал) Ако функциите *f(x)* и *g(x)* са диференцируеми в околност D на точката *a* и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (или ∞), а границата $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ съществува, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, $g'(x) \neq 0, \forall x \in D$.

Да се намерят границите:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\ln x}$.

Решение: Имаме 1-1 = 0 и ln1 = 0 т.е. неопределеност от вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Прилагаме теоремата на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to 1}\frac{-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}(-x) = -1.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$;

Решение: Имаме неопределеност от вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Прилагаме теоремата на Лопитал трикратно.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{\sin x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{tg^2 x}$; 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x - \sin 2x}{x - x\cos x}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - e^x}{x}$; 7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln(2-x)}$; 8. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{x+3}$;

Решение: Имаме неопределеност от вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, прилагаме теоремата на Лопитал и получаваме $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x+3)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0.$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\ln x}{x}$; 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x-1}{\ln x}$; 11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln x}$;

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 x}$; 13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x-1)}{\ln(e^x - e)}$; 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln x}$;

Отг. 3. 1; 4. 1; 5. $\dfrac{1}{8}$; 6. -1; 7. -1; 9. 0;

10. ∞; 11. ∞; 12. $\dfrac{9}{2}$; 13. 1; 14. ∞

АСИМПТОТИ

Наклонени: $y = kx + n$, $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$.

Частен случай: При $k = 0$ получаваме хоризонтална асимптота: $y = n$.

Вертикални: $x = a$, ако $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$

1. Намерете асимптотите на функцията $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Решение: При $x = 1$ и $x = -1$ функцията не е дефинирана. Проверяваме дали правите $x = 1$ и $x = -1$ са вертикални асимптоти.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \frac{1^3}{1+1} . \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2} .(-\infty) = -\infty .$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \frac{(-1)^3}{-1-1} . \lim_{x\to -1+0} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} .(+\infty) = +\infty .$$

Следователно правите $x = 1$ и $x = -1$ са вертикални асимптоти.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2-1)} = 1 .$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3}{x^2-1} - 1.x \right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0 .$$

Следователно правата $y = x$ е наклонена асимптота.

Да се определят асимптотите на функцията $y = f(x)$:

2. $y = x^3 - 3x + 2$;

3. $y = \dfrac{x+2}{x-7}$;

4. $y = \dfrac{3x^2+2}{x^2+1}$;

5. $y = x.e^x$;

6. $y = \dfrac{1}{1-x^2}$;

7. $y = x + \dfrac{1}{x^2}$.

Отговори:

2. няма асимптоти;

3. $x = 7$, $y = 1$;

4. $y = 3$;

5. $y = 0$ (при $x \to -\infty$);

6. $x = 1$, $x = -1$;

7. $x = 0$, $y = x$.

ФОРМУЛИ НА ТЕЙЛОР И МАКЛОРЕН

Формула на Тейлор за разлагане на функцията *f(x)* в точката x_0

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n,$$

където R_n наричаме остатъчен член и може да се запише по различен начин. Записът $R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, където $\overline{x}$ е между x и x_0 се нарича форма на Лагранж.

При $x_0=0$ се получава формулата на Маклорен за разлагане на функцията *f(x)* в точката 0.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n;\qquad R_n=\frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}x^{n+1},\ \overline{x}\in(0;x)$$

ЗАДАЧИ:

Да се разложат по формулата на Маклорен следните функции:

1. $y=e^x$;

Решение: Намираме производните на разглежданата функция и изчисляваме стойностите им в точката $x = 0$. Тъй като $y=y'=y''=...=y^{(n)}=e^x$, то $y(0)=y'(0)=y''(0)=...=y^{(n)}(0)=e^0=1$. По формулата на Маклорен получаваме разлагането:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x),\qquad \text{където } R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.e^{\theta x},\quad (0<\theta<1).$$

Във всеки интервал [-r,r] (r>0) поради $\left|e^{\theta x}\right|<e^r$ получаваме следната оценка за остатъчния член

$$\left|R_{n+1}(x)\right|=\frac{\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!}.\left|e^{\theta x}\right|<\frac{r^{n+1}}{(n+1)!};\quad R_{n+1}\to 0,\quad при\quad n\to\infty.$$

Ако $x = 1$, то можем да пресметнем приблизително числото e с предварително избрана точност. При $n = 4$ имаме:

$$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\approx 2,70.$$

Грешката, която допускаме при това приблизително пресмятане се определя от остатъчния член $R_5=\dfrac{e^\theta}{5!}<\dfrac{e}{120}<\dfrac{3}{120}=0,025.$

2. $y=\sin x$; 3. $y=\cos x$.

Отговори: 2. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+...+(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\dfrac{x^n}{n!}+...$

3. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+...+(-1)^{\frac{n}{2}}.\dfrac{x^n}{n!}+...$

Да се напишат първите 5 члена от разлагането на функцията $y = f(x)$ по формулата на Теилор в точката $x_0 = -1$.

4. $y=x^4+2x^3-x-4$; 5. $y=\sqrt[5]{x}$;

Отговори: 4. $y=(x+1)^4-2(x+1)^3+(x+1)-4$;

5. $y=\dfrac{21}{625}(x+1)^4+\dfrac{6}{125}(x+1)^3+\dfrac{2}{25}(x+1)^2+\dfrac{1}{5}(x+1)-1$;

УСЛОВИЯ ЗА МОНОТОННОСТ
на диференцируеми функции

Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана и диференцируема в интервала (a; b).

Ако $y' > 0$, то функцията е монотонно растяща в (a; b).

Ако $y' < 0$, то функцията е монотонно намаляваща в (a; b).

ЗАДАЧИ

Намерете интервалите, в които следните функции монотонно растат или намаляват:

1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$;

Решение: Функцията е дефинирана в $(-\infty, \infty)$. Намираме производната $y' = 6x^2 + 6x - 12$. Решаваме квадратните неравенства $y' > 0$ и $y' < 0$. Квадратното уравнение $6x^2 + 6x - 12 = 0$ има корени 1 и -2. Следователно функцията монотонно расте, когато $x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ и монотонно намалява когато $x \in (-2, 1)$.

2. $y = \ln(4 - x^2)$;

Решение: Функцията е дефинирана, когато $4 - x^2 > 0$,т.е. в интервала (-2, 2). Намираме производната

$$y' = -\frac{2x}{4 - x^2} = -\frac{2x}{(2 - x)(2 + x)}.$$

Разглеждаме стойностите на x само от дефиниционната област (-2, 2) на функцията. Когато $-2 < x < 0$, $y' > 0$ и следователно функцията монотонно расте в интервала (-2,0), а когато $0 < x < 2$, то $y' < 0$ - функцията монотонно намалява в интервала (0,2).

3. $y = x^2 - 2x$;
4. $y = x^3 + 3$;
5. $y = x - e^x$;
6. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}$;
7. $y = \dfrac{e^x}{x}$;
8. $y = x^2.e^{-x}$;
9. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$;
10. $y = \dfrac{x^2 + 1}{(x - 1)^2}$;
11. $y = \dfrac{x}{\ln x}$;
12. $y = x + \cos x$.

Отговори:

3. расте в $(1, \infty)$, намалява в $(-\infty, 1)$;
4. расте в $(-\infty, \infty)$;
5. расте в $(-\infty, 0)$, намалява в $(0, \infty)$;
6. расте в $(-\infty, \infty)$;
7. расте в $(1, \infty)$, намалява в $(-\infty, 0) \cup (0,1)$;
8. расте в (0, 2), намалява в $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$;
9. расте в $(-\infty, 0) \cup (0,\infty)$;
10. расте в (-1, 1), намалява в $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$;
11. расте в (e, ∞), намалява в $(0, 1) \cup (1, e)$;
12. расте $(-\infty, \infty)$;

Упътване: $y' = 1 - \sin x$

Функцията $y = \sin x$ приема стойности принадлежащи на интервала [-1, 1]. Следователно $1 - \sin x \le 0$ за всяко x.

ЕКСТРЕМУМИ
на диференцируеми функции

Необходими условия за съществуване на локален екстремум: Ако функцията *y = f(x)* в точката $x = x_0$ има локален екстремум, то производната на функцията в тази точка е равна на нула.

x_0 наричаме критична точка; $x_0 \in (a,b) \in D$

Достатъчни условия за екстремум:

Ако $f'(x_0) = 0$ и $f'(x) < 0$ при $x < x_0$, а $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то функцията има **min** (или ако $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$).

Ако $f'(x_0) = 0$ и $f'(x) > 0$ при $x < x_0$, а $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то функцията има **max** (или ако $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$).

ЗАДАЧИ:

Да се определят локалните екстремумите на функциите:

1. $y = arctgx$;

Решение: Функцията е дефинирана и непрекъсната в интервала (- ∞, ∞). Първата производна $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ не се анулира и $y' > 0$ за всяко x от интервала (- ∞, ∞). Следователно функцията няма екстремум и е монотонно растяща в (- ∞, ∞).

2. $y = -x^3 - 3x^2 + 24x + 20$;

Решение: Функцията е дефинирана и непрекъсната в интервала (- ∞, ∞). Първата производна е $y' = -3x^2 - 6x + 24$, която се анулира при $x = 2$ и $x = -4$. Намираме втората производна $y'' = -6x - 6$.

За $x = 2$, имаме $y''(2) = -6.2 - 6 = -18 < 0 \to \max$. $y_{\max} = -2^3 - 3.2^2 + 24.2 + 20 = 48$.

За $x = -4$, имаме
$y''(-4) = -6.(-4) - 6 = 18 > 0 \to \min$. $y_{\min} = -(-4)^3 - 3.(-4)^2 + 24.(-4) + 20 = -60$.

3. $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$;

Решение: Функцията е дефинирана и непрекъсната в интервала (- ∞, ∞). Първата производна е $y' = \dfrac{3x^2 + 6x - 9}{(x^2 + 3)^2}$, която се анулира когато $3x^2 + 6x - 9 = 0$, т.е. за $x = 1$ и $x = -3$. $y' < 0$ в интервала (-3,1) т.е. функцията намалява и $y' > 0$ в интервалите (- ∞, -3) и (1, ∞), т.е. функцията расте. Следователно екстремумите са $y_{\max}(-3) = 1{,}5$ и $y_{\min}(1) = -0{,}5$.

4. $y = x^2.e^{\frac{1}{x}}$;

Упътване: $D: x \neq 0$. Експоненциалната функция е навсякъде положителна и знакът на производната $y' = e^{\frac{1}{x}}.(2x - 1)$ се определя само от линейната функция.

Отг. $y_{\max}(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{e^2}{4}$.

5. $y = \sqrt{1 - x^2}$;

Упътване: $D: x \in [-1,1]$, $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, отг. $y_{\max}(0) = 1$.

6. $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$; 7. $y = x + \dfrac{1}{x}$; 8. $y = \dfrac{x^4+1}{x^2}$;

9. $y = x - e^x$; 10. $y = \dfrac{x}{\ln x}$; 11. $y = x\sqrt{2-x^2}$.

Отговори:

6. няма екстремум; 7. $y_{\max}(-1) = 0$, $y_{\min}(1) = 2$; 8. $y_{\min}(\pm 1) = 2$;

9. $y_{\max}(0) = -1$; 10. $y_{\min}(e) = e$; 11. $y_{\max}(1) = 1$, $y_{\min}(-1) = -1$.

Намерете абсолютните екстремуми в указаните интервали на следните функции:

Когато интервалът е затворен (крайните точки принадлежат на интервала) и се търси абсолютен екстремум, намерените по горните правила локални екстремуми се сравняват със стойностите в краищата на интервала.

12. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 7, \quad x \in [-3, 6]$

Решение: $y' = 6x^2 - 6x - 36$, която се анулира при x = - 2 и x = 3. Намираме втората производна $y'' = 12x - 6$. За x = - 2, имаме $y''(-2) = 12.(-2) - 6 = -30 < 0 \to \max$. $y_{\max}(-2) = 36$. За x = 3, имаме $y''(3) = 12.3 - 6 = 30 > 0 \to \min$. $y_{\min}(3) = -89$. Стойностите в краищата на дадения интервал са $y(-3) = 19$ и $y(6) = 100$. Така най-малката стойност на функцията е $y_{\min}(3) = -89$, а най-голямата е в края на интервала $y(6) = 100$.

13. $y = x^4 - 8x^2 + 3, \quad x \in [-1, 2]$; 14. $y = x - 2\sqrt{x}, \quad x \in [0, 4]$

15. $y = x - 2\ln x, \quad x \in [1, e]$

Отговори: 13. $y(2) = -13$, $y(0) = 3$; 14. $y(1) = -1$, $y(0) = y(4) = 0$.
15. $y(1) = 1$, $y(2) = 2 - 2\ln 2$.

Изследвайте за монотонност и локални екстремуми функциите:

16. $y = x^3 - 3x + 4$; 17. $y = 2x^3 + 3x = 12x + 1$;

18. $y = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$; 19. $y = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$;

20. $y = \dfrac{-x^2}{x + 2}$; 21. $y = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$;

22. $y = \dfrac{e^x}{x - 3}$; 23. $y = x^2.e^{-x}$.

Отговори:

16. $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ мотонно расте; $x \in (-1, 1)$ мотонно намалява; $y_{\max}(-1) = 6$; $y_{\min}(1) = 2$;

17. $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ мотонно расте; $x \in (-2, 1)$ мотонно намалява; $y_{\max}(-2) = 21$; $y_{\min}(1) = -6$;

18. $D: x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$; $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ мотонно расте; $x \in (-1, 1) \cup (1, 3)$ мотонно намалява; $y_{\max}(-1) = 0$; $y_{\min}(3) = 8$;

19. $D: x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$; $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ мотонно расте; $x \in (1, 2) \cup (2, 3)$ мотонно намалява; $y_{\max}(1) = 2$; $y_{\min}(3) = 6$;

20. $D: x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$; $x \in (-4, -2) \cup (-2, 0)$ мотонно расте; $x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ мотонно намалява; $y_{\max}(0) = 0$; $y_{\min}(-4) = 8$;

21. $D: x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, $y' > 0$ за $x \in D$, мотонно растяща в дефиниционната си област, няма екстремуми.

22. $D: x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$; $x \in (4, +\infty)$ мотонно расте; $x \in (-\infty, 3) \cup (3, 4)$ мотонно намалява; $y_{\min}(4) = e^4$;

23. $D: x \in (-\infty, \infty)$; $x \in (0, 2)$ мотонно расте; $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ мотонно намалява; $y_{\max}(2) = \dfrac{4}{e^2}$; $y_{\min}(0) = 1$.

Т Е С Т

1. Произведението от екстремумите на функцията $y = \dfrac{x^2 + 16}{x}$ е:

   а) -4; б) -64; в) -8; г) -36.

2. Най-малката стойност на функцията $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ в интервала $[-2; 3]$ е:

   а) -23; б) -19; в) -2; г) -1.

3. Най-голямата стойност на функцията $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ в интервала $[0; 3]$ е:

   а) -23; б) -19; в) -2; г) 0.

4. Да се определят стойностите на реалния параметър *m*, за които функцията $y = \dfrac{x + m}{1 - x}$ е растяща в дефиниционната си област.

   а) m > -1; б) m > 1; в) m > -2; г) m < 0.

5. За функцията $f(x) = 2\sin x - 2\cos 2x$ стойността на $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ е:

   а) $\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{2}$; в) $2 + \sqrt{2}$; г) $4 + \sqrt{2}$.

6. Ако $f(x) = \cos^2 x$ да се пресметне $f'\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

   а) $\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-\dfrac{1}{2}$; г) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

7. Ако $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$, то решенията на неравенството $f'(x) - f''(x) - x - 2 < 0$ са:

   а) $(-2; 1)$; б) $(-2; 3)$; в) $(-1; 2)$; г) $(-1; 3)$.

Отговори: 1б; 2б; 3г; 4а; 5г; 6в; 7в.

ИЗПЪКНАЛОСТ, ВДЛЪБНАТОСТ И ИНФЛЕКСНИ ТОЧКИ
на диференцируеми функции

Условия за изпъкналост и вдлъбнатост - Ако за всяка точка на даден интервал (a,b) втората производна на функциата съществува и е отрицателна, т.е. $f''(x) < 0$,то функцията $y = f(x)$ е вдлъбната в този интервал и обратно, и ако $f''(x) > 0$ за всяка точка от даден интервал (b,c), то функцията е изпъкнала в интервала (b,c) и обратно.
Инфлексна точка - Точка M от графиката на функцията, в която изпъкналостта се сменя с вдлъбнатост или обратно се нарича инфлексна точка.

ЗАДАЧИ:

Намерете интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост и инфлексните точки на следните функции:

1. $y = x^3 + 3x + 3$;

Решение: D: (- ∞, ∞). Намираме първата и втората производна:

$$y' = 3x^2 + 3, \quad y'' = 6x.$$

Намираме стойността на x , при която $y'' = 0$, като положим $6x = 0$ или $x = 0$.
Ако $x \in (-\infty, 0)$, то $y'' < 0$ и следователно графиката на функцията е вдлъбната в този интервал. Ако $x \in (0, \infty)$, то $y'' > 0$ и следователно графиката на функцията е изпъкнала. В точката $x = 0$ втората производна сменя знака си и следователно $M(0,0)$ е инфлексна точка.

2. $y = (x^2 + 1).e^x$;

Решение: D: (- ∞, ∞). Намираме първата и втората производна:

$$y' = 2x.e^x + (x^2 + 1)e^x = (x+1)^2 e^x,$$

$$y'' = 2(x+1).e^x + (x+1)^2 e^x = (x+1)(x+3)e^x.$$

Намираме стойността на x,при която $y'' = 0$, $e^x \neq 0, \Rightarrow (x+1)(x+3) = 0$ или x = -1 и x = -3.
Ако $x \in (-3, -1)$, то $y'' < 0$ и следователно графиката на функцията е вдлъбната в този интервал. Ако $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$, то $y'' > 0$ и следователно графиката на функцията е изпъкнала. При x = -1 и x = -3 втората производна сменя знака си и следователно $M_1(-3, \frac{10}{e^3})$ и $M_2(-1, \frac{2}{e})$ са инфлексни точки.

3. $y = x^4 - 6x^2 + 5$;
4. $y = \sqrt[3]{x}$;
5. $y = \ln(1 + x^2)$;
6. $y = \frac{1}{(x+1)^3}$.

Отговори:
3. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ -изпъкнала; (-1,1) – вдлъбната; M_1(-1,0) и M_2(1,0) – инфлексни точки.
4. $(-\infty, 0)$ - изпъкнала; $(0, \infty)$ - вдлъбната; M(0,0) – инфлексна точка.
5. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ -изпъкнала; (-1,1) – вдлъбната; M_1(-1, ln2) и M_2(1,ln2) – инфлексни точки.
6. $(-\infty, -1)$ - вдлъбната; $(-1, \infty)$ -изпъкнала; няма инфлексна точка,защото x = -1 не е от дефиниционната област на функцията.

ИЗСЛЕДВАНЕ НА ФУНКЦИЯ

Изследването на функцията *y = f(x)* и построяване на графиката може да се направи по следния общ план:

- Определя се дефиниционната област;
- Определя се дали функцията е четна, нечетна и периодична;
- Намират се границите на функцията, когато аргумента *x* клони към краищата на интервалите, в които функцията е дефинирана;
- Намират се асимптотите;
- Намират се интервалите на растене и намаляване на функцията и нейните екстремуми;
- Намират се интервалите на изпъкналост, вдлъбнатост и инфлексните точки;
- Систематизират се резултатите от изследването и се построява графиката на функцията. Могат да се използват готови софтуерни продукти за построяване на графиката, като МАТЕМАТИКА , MAPLE, DERIVE и др.

ЗАДАЧИ

1. $y = x^3 - 3x^2 + 4$;

Решение:

- Функцията е дефинирана и непрекъсната (- ∞, ∞).
- Нито четна, нито нечетна.
- Намираме границите на функцията в краищата на дефиниционния

интервал. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (x^3 - 3x^2 + 4) = \pm\infty$

- Няма асимптоти.
- Намираме $y' = 3x^2 - 6x$.

Решаваме квадратните неравенства $y' > 0$ и $y' < 0$. Квадратното уравнение $3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0$ има корени 0 и 2. Следователно функцията расте, когато $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ и намалява когато $x \in (0, 2)$.

- Намираме втората производна $y'' = 6x - 6$.

За $x = 0$, имаме $y''(0) = 6.0 - 6 = -6 < 0 \to \max$. $y_{\max} = 0^3 - 3.0^2 + 4 = 4.$

За $x = 2$, имаме $y''(2) = 6.(2) - 6 = 6 > 0 \to \min$. $y_{\min} = (2)^3 - 3.(2)^2 + 4 = 0.$

- Намираме стойността на *x*, при която $y'' = 0$, като положим $6x$-6 = 0, т.е. $x = 1$

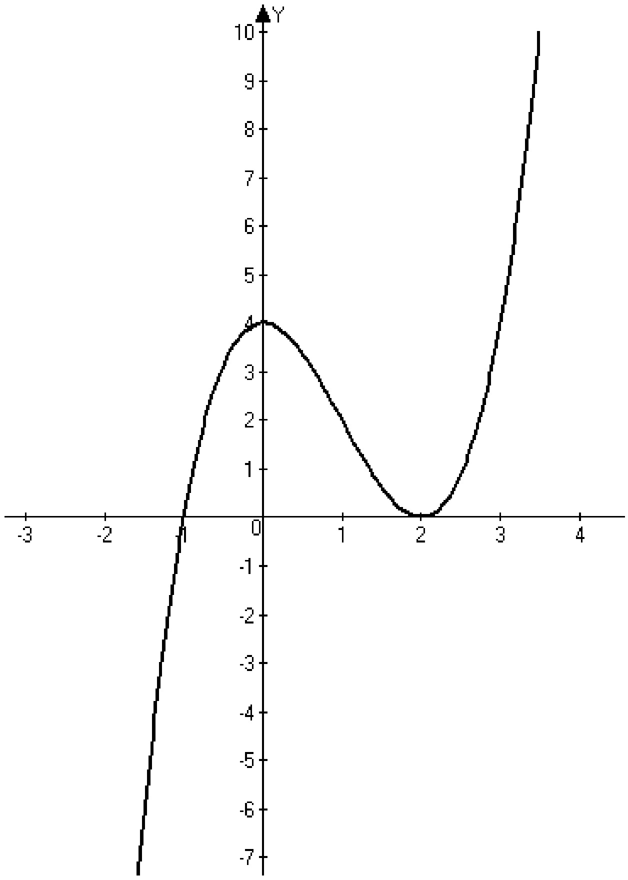
Ако $x \in (-\infty, 1)$, то $y'' < 0$ и следователно графиката на функцията е вдлъбната в този интервал. Ако $x \in (1, \infty)$, то $y'' > 0$ и следователно графиката на функцията е изпъкнала. В точката $x = 1$ втората производна сменя знака си и следователно $M(1,2)$ е инфлексна точка.

- Графиката на функцията е дадена на чертеж 1.

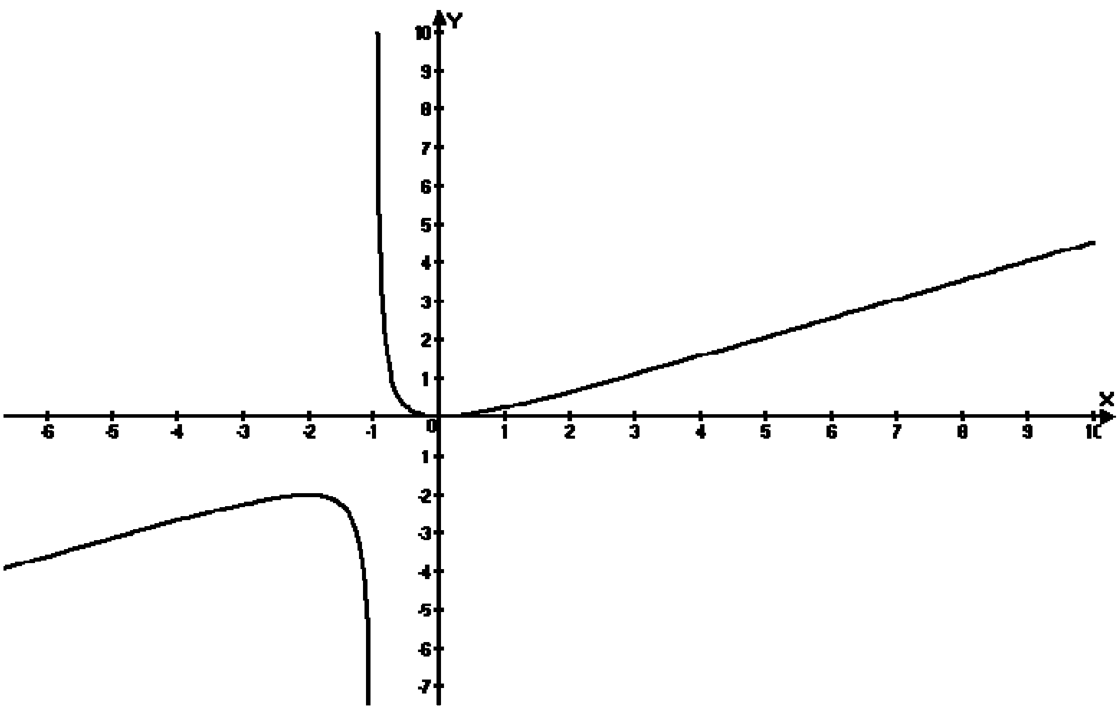
2. $y = \dfrac{x^2}{2x + 2}$;

Решение:

- Функцията е дефинирана при $x \neq -1$, т.е. в интервалите (- ∞-1) и (-1, ∞).
- Нито четна, нито нечетна.
- Намираме границите на функцията в краищата на дефиниционните интервали


Y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-3
-2
-1
1
2
3
4

Черт. 1


Y
X
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Черт. 2

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(2+\frac{2}{x})}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{2+\frac{2}{x}}=\pm\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{x^2}{2x+2}=+\infty;\qquad \lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{x^2}{2x+2}=-\infty;$$

- Намираме асимптотите: $x = -1$ е вертикална асимптота.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(2x+2)}=\frac{1}{2}.$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}[\frac{x^2}{2x+2}-\frac{1}{2}x]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{2x+2}=-\frac{1}{2}.$$

Правата $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ е наклонена асимптота.

- Намираме $y'=\frac{2x^2+4x}{(2x+2)^2}$.

Решаваме квадратните неравенства $y'>0$ и $y'<0$. $y'=0$, когато $2x^2+4x=2x(x+2)=0$, т.е. $x = 0$ и $x = -2$. Следователно функцията расте, когато $x\in(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$ и намалява когато $x\in(-2,0)$.

- Намираме втората производна $y''=\frac{2x+2}{(x+1)^4}$.

За $x = -2$, имаме $y''(0)=\frac{-2}{(-2+1)^4}=-2<0\to\max$. $y_{\max}=\frac{(-2)^2}{2.(-2)+2}=-2$

За $x = 0$, имаме $y''(0)=\frac{2}{(0+1)^4}=2>0\to\min$. $y_{\min}=\frac{0}{0+2}=0.$

- Намираме стойността на x, при която $y''=0$, т.е. $2x + 2 = 0$ или $x = -1$

Ако $x\in(-\infty,-1)$, то $y''<0$ и следователно графиката на функцията е вдлъбната в този интервал. Ако $x\in(-1,\infty)$, то $y''>0$ и следователно графиката на функцията е изпъкнала. $x = -1$ не принадлежи на дефиниционната област, следователно няма инфлексна точка.

- Графиката на функцията е дадена на чертеж 2

Да се изследват функциите и да се начертаят графиките им:

3. $y=\frac{x^2+2x}{2x^2+1}$; 4. $y=-\frac{1}{4}x^3+3x+4$; 5. $y=-x^4+4x^2-3$;

6. $y=x.e^{\frac{1}{x}}$; 7. $y=\frac{x}{1+x^2}$; 8. $y=\ln(x^2+1)$.

И Н Т Е Г Р А Л Н О   С М Я Т А Н Е

НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

О. $\int f(x)dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

$f(x)$-подинтегрална функция; $F(x)$- примитивна функция

Таблица на неопределените интеграли

1. $\int 0dx = C$	7. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C$
2. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$ $\int 1dx = x + C, \quad \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C, \quad \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$	8. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C$
3. $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	9. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$ $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx = \arcsin x + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\int e^x dx = e^x + C$	10. $\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$ $\int \frac{1}{1 + x^2}dx = arctgx + C$
5. $\int \sin xdx = -\cos x + C$	11. $\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$ $\int \frac{1}{x^2 - 1}dx = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert + C$
6. $\int \cos xdx = \sin x + C$	12. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right\rvert + C$

Свойства:

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \quad a = const.$	3. $\int df(x) = f(x) + C$
2. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	4. $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$

НЕПОСРЕДСТВЕНО ИНТЕГРИРАНЕ

ЗАДАЧИ

1. $\int 2xdx = x^2 + c \Leftrightarrow F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$

2. $\int \left(5x^4 - 3x^2 + 2x\right) dx = \int 5x^4 dx - \int 3x^2 dx + \int 2xdx = 5\int x^4 dx - 3\int x^2 dx + 2\int xdx =$
$= 5.\frac{x^{4+1}}{4+1} - 3.\frac{x^{2+1}}{2+1} + 2.\frac{x^2}{2} = x^5 - x^3 + x^2 + C$

3. $\int x(2x-5)dx = \int (2x^2 - 5x)dx = 2\int x^2 dx - 5\int xdx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + c$

4. $\int (3 - x^2)^2 dx$ Отг.: $9x - 2x^3 + \frac{x^5}{5} + c$

5. $\int \frac{2x^3 + 1}{x^2} dx = \int \left(\frac{2x^3}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) dx = 2\int xdx + \int \frac{1}{x^2} dx = x^2 - \frac{1}{x} + c$

6. $\int \frac{3x^4 - 10x^2 + 5x + 1}{x^2} dx$ Отг.: $x^3 - 10x + 5\ln|x| - \frac{1}{x} + c$

7. $\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} = -\frac{1}{3x^3} + c$

8. $\int \sqrt[5]{x^4} dx$ Отг.: $\frac{5}{9} x\sqrt[5]{x^4} + c$

9. $\int 5\sqrt{x}dx = 5\int x^{\frac{1}{2}} dx = 5.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = 5.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{3}\sqrt{x^3} + c$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$

11. $\int \left(4\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx$ Отг.: $3\sqrt[3]{x^4} + 3\sqrt[3]{x} + c$

12. $\int \frac{\sqrt[3]{x} + x^2 - x\sqrt{x}}{x} dx$ Отг.: $3\sqrt[3]{x} + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

13. $\int (3.2^x - \cos x) dx$ Отг.: $\frac{3.2^x}{\ln 2} - \sin x + c$

14. $\int \frac{xe^x - 3}{x} dx$ Отг.: $e^x - 3\ln|x| + c$

15. $\int \frac{2x\sin^2 x + 1}{\sin^2 x} dx$ Отг.: $-\cot gx + x^2 + c$

16. $\int \left(2e^x + \frac{1}{1+x^2}\right) dx = 2\int e^x dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = 2e^x + arctgx + c$

17. $\int \frac{\cos^2 x - \sin x \cos^2 x + 1}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = x + \cos x + tgx + c$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$ Отг.: $\arcsin \frac{x}{5} + c$

19. $\int \frac{dx}{16 + x^2}$ Отг.: $\frac{1}{4} arctg \frac{x}{4} + c$;Упътване: $r = \left(\sqrt{r} \right)^2$

20. $\int \left(\frac{3}{x^2 + 9} - \frac{6}{x^2 - 9} \right) dx$ Отг.: $arctg \frac{x}{3} - \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + c$

21. $\int \frac{dx}{x^2 + 2}$ Отг.: $\frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + c$; Упътване: $2 = \left(\sqrt{2} \right)^2$

22. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{3}{\sqrt{4 + x^2}} \right) dx$ Отг.: $2 \arcsin \frac{x}{2} + 3 \ln \left| x + \sqrt{4 + x^2} \right| + c$

23. $\int \frac{dx}{3x^2 + 4}$ Отг.: $\frac{\sqrt{3}}{6} arctg \frac{\sqrt{3} x}{2} + c$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}}$ Отг.: $\ln \left| x + \sqrt{x^2 + 3} \right| + c$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 4}}$ Отг.: $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - \frac{4}{3}} \right| + c$

26. $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = x - arctgx + c$

27. $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 4} dx$ Отг.: $x - \frac{1}{2} arctg \frac{x}{2} + c$

28. $\int \frac{x^2 + 5}{x^2 - 4} dx$ Отг.: $x + \frac{9}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c$

29. $\int \frac{4dx}{x^2 \left(x^2 + 4 \right)}$ Отг.: $-\frac{1}{x} - \frac{1}{2} arctg \frac{x}{2} + c$

30. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ Отг.: $tgx - \cot gx + c$; Упътване: $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

31.

$\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx =$

$tgx - x + c$;

32. $\int \cot g^2 x dx$ Отг.: $\cot gx - x + c$

Внасяне под знака на диференциала

Ако $\int f(x)dx = F(x)+c \Rightarrow \int f(u)du = F(u)+c, \quad u=\varphi(x)$

Внасяне на константа

1) $dx = d(x+b), b = const.$; 2) $dx = \frac{1}{a}d(ax), a = const$; 3) $dx = \frac{1}{a}d(ax+b), a,b - const$

ЗАДАЧИ

1) $\int (x+6)^{10}dx = \int (x+6)^{10}d(x+6) = \frac{(x+6)^{11}}{11}+c$;

2) $\int \sin(x+3)dx = \int \sin(x+3)d(x+3) = -\cos(x+3)+c$

3) $\int \frac{dx}{(x-8)^2} = \int \frac{d(x-8)}{(x-8)^2} = -\frac{1}{x-8}+c$;

4) $\int \sqrt[3]{x-4}dx$ Отг. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x-4)^4}+c$

5) $\int \frac{dx}{x+5}$ Отг. $\ln|x+5|+c$;

6)
$$\int \frac{x}{x+2}dx = \int \frac{x+2-2}{x+2}dx = \int\left(\frac{x+2}{x+2}-\frac{2}{x+2}\right)dx = \int dx - 2\int \frac{1}{x+2}d(x+2) = x-2\ln|x+2|+c$$

7) $\int \frac{2x+3}{x+3}dx$ Отг. $2x-3\ln|x+3|+c$;

8) $\int \cos 4x dx = \frac{1}{4}\int \cos 4x d4x = \frac{1}{4}\sin 4x + c$

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$ Отг. $-\frac{1}{3}\cot g3x+c$;

10) $\int 4e^{5x}dx$ Отг. $\frac{4}{5}e^{5x}+c$;

11) $\int (2e^{2x}+e^{-x})dx$ Отг. $e^{2x}-e^{-x}+c$; Упътване: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

12) $\int\left(3\cos 3x - \sin\frac{x}{3}\right)dx$ Отг. $\sin 3x + 3\cos\frac{x}{3}+c$;

13)
$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int 1dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \cos 2x d2x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

14) $\int \cos^2 3x dx$ Отг. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\sin 6x+c$; Упътване: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

15) $\int (5x+6)^7 dx$ Отг. $\frac{(5x+6)^8}{40}+c$

16) $\int e^{3x+2}dx$ Отг. $\frac{1}{3}e^{3x+2}+c$;

17) $\int \frac{dx}{(1+5x)^2}$ Отг. $-\frac{1}{5(1+5x)}+c$

Внасяне на функция под знака на диференциала – като интеграл $f'(x)dx = df(x)$

$xdx = d\frac{x^2}{2}$; $e^x dx = de^x$; $\sin xdx = d(-\cos x) = -d\cos x$;

$x^2 dx = d\frac{x^3}{3}$; $\frac{1}{x}dx = d\ln x$; $\cos xdx = d\sin x$

$\frac{1}{\cos^2 x}dx = dtgx$; $\frac{1}{\sin^2 x}dx = d(-\cot gx)$; $\frac{1}{1+x^2}dx = darctgx$;

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d\arcsin x$

18) $\int \frac{xdx}{x^2+4} = \int \frac{1}{x^2+4}d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+4}d(x^2+4) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+c$;

19) $\int \frac{3x+1}{x^2+9}dx$ Отг. $\frac{3}{2}\ln\left(x^2+9\right)+\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}+c$

20) $\int \frac{xdx}{4x^2+1}$ Отг. $\frac{1}{8}\ln\left(4x^2+1\right)+c$;

21) $\int xe^{-x^2}dx$ Отг. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c$;

22) $\int \frac{xdx}{\sqrt{16-x^2}}$ Отг. $-\sqrt{16-x^2}+c$

23) $\int \frac{x-1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ Отг. $-\sqrt{4-x^2}-\arcsin\frac{x}{2}+c$;

24) $\int x^2 e^{x^3+1}dx$ Отг. $\frac{1}{3}e^{x^3+1}+c$

25) $\int x^3\left(2x^4+1\right)dx$ Отг. $\frac{1}{48}\left(2x^4+1\right)^6+c$;

26) $\int \left(x^3+x\right)^5\left(3x^2+1\right)dx$ Отг. $\frac{1}{6}\left(x^3+x\right)^6+c$

27) $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx$ Отг. $-\sin\frac{1}{x}+c$;

28) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}dx$ Отг. $\ln\left|x^2+3x+1\right|+c$

29) $\int \frac{e^{\frac{3}{x}}}{x^2}dx$ Отг. $e-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{x}}+c$;

30) $\int \frac{e^x dx}{e^x+1} = \int \frac{1}{e^x+1}d(e^x+1) = \ln\left(e^x+1\right)+c$;

31) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$ Отг. $arctg\left(e^x\right)+c$;

32) $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x}+1}$ Отг. $\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)+c$

33) $\int e^{\sin x}\cos x dx$ Отг. $e^{\sin x}+c$;

34) $\int \sin^5 x\cos x dx$ Отг. $\frac{\sin^6 x}{6}+c$

35) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$ Отг. $-\frac{1}{a\sin^2 x}+c$;

36) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$ Отг. $arctg(\sin x)+c$

37) $\int \left(\sin^3 x-2\sin x\right)\cos x dx$ Отг. $\frac{\sin^4 x}{4}-\sin^2 x+c$;

38) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx$ Отг. $\frac{1}{2}\ln(1+\sin^2 x)+c$

39) $\int \cot gx dx=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\int \frac{1}{\sin x}d\sin x=\ln\left|\sin x\right|+c$;

40) $\int tgx dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=\int \frac{1}{\cos x}d(-cosx)=-\ln\left|\cos x\right|+c$;

41) $\int \sin^3 x dx$ Отг. $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+c$

42) $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$ Отг. $\frac{\ln^4 x}{4}+c$;

43) $\int \frac{1+\ln x}{x}dx$ Отг. $\ln x+\frac{\ln^2 x}{2}+c$;

44) $\int \frac{dx}{x\ln x}=\int \frac{1}{x}.\frac{1}{\ln x}dx=\int \frac{1}{\ln x}d\ln x=\ln\left|\ln x\right|+c$

45) $\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx$ Отг. $\frac{arctg^3 x}{3}+c$;

46) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+tgx}}$ Отг. $2\sqrt{1+tgx}+c$

47) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ Отг. $2arctg\sqrt{x}+c$;

48) $\int \frac{x^2 dx}{x-1}$ Отг. $\frac{x^2}{2}+x+\ln\left|x-1\right|+c$

49) $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$ Отг. $\frac{x^3}{3}-x+arctgx+c$;

50) $\int \frac{dx}{x(x-1)}$ Отг. $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+c$

51) $\int \frac{dx}{x+x^3}$ Отг. $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+c$

ИНТЕГРИРАНЕ ПО ЧАСТИ

Най-често се използват следните случаи:

I. При интегриране на произведение на полином *R(x)*и тригонометрична функция *sinx* или *cosx*, или показателна функция, за *u* се полага *R(x)* .

II. При интегриране на произведение от полином *R(x)* и обратни тригонометрични функции или lnx, за *u* се полага обратната тригонометрична функция или lnx.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$I.\quad \int R(x)\left\{\begin{matrix} a^x \\ e^{\alpha x} \\ \sin\alpha x \\ \cos\alpha x \\ \frac{1}{\cos^2 x} \\ \frac{1}{\sin^2 x}\end{matrix}\right\}dx \qquad\qquad II.\quad \int R(x)\left\{\begin{matrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ arctgx \\ arc\cot gx \\ \sqrt{a^2-x^2}\end{matrix}\right\}dx$$

1. $\int \ln xdx = x.\ln x-\int xd\ln x = x.\ln x-\int x.\frac{1}{x}dx = x.\ln x-\int dx = x\ln x - x + c$;

2. $\int arctgxdx = xarctgx-\int xdarctgx = xarctgx-\int x.\frac{1}{1+x^2}dx = xarctgx-\int\frac{1}{1+x^2}d\frac{x^2}{2} =$

$= xarctgx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}d(x^2+1) = xarctgx-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c$;

3. $\int \arcsin xdx$ Отг. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c$;

4. $\int xe^x dx = \int xde^x = x.e^x-\int e^x dx = xe^x - e^x + c$;

5. $\int x.\cos xdx = \int xd\sin x = x\sin x-\int\sin xdx = x\sin x + cosx + c$;

6. $\int x\sin xdx = \int xd(-\cos x) = -x\cos x+\int\cos xdx = x\sin x+\cos x + c$;

7. $\int x\sin 2xdx = \frac{1}{2}\int xd(-\cos 2x) = -\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx = -\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2xd2x =$

$=. \frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x + c$;

8. $\int (x-1)e^x dx = \int (x-1)de^x = (x-1)e^x-\int e^x d(x-1) = (x-1)e^x-\int e^x dx = (x-1)e^x - e^x + c$;

9. $\int xe^{2x}dx$ Отг. $\frac{2x-1}{4}e^{2x}+c$;

10. $\int x\cos\frac{x}{3}dx$ Отг. $3x\sin\frac{x}{3}+9\cos\frac{x}{3}+c$;

11. $\int (x+2)\cos x dx$ Отг. $(x+2)\sin x+\cos x+c$;

12. $\int xe^{-x}dx$ Отг. $c-e^{-x}(x+1)$;

13. $\int (x+1)\sin x dx$ Отг. $-(x+1)\cos x+\sin x+c$;

14. $\int (2x+1)e^{\frac{x}{2}}dx$ Отг. $(4x-6)e^{\frac{x}{2}}+c$;

15. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx=\int \frac{1}{\cos^2 x}xdx=\int xdtgx=xtgx+\int tgxdx=xtgx-\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=xtgx-\int \frac{1}{\cos x}d(-\cos x)=$
$=xtgx+\ln|\cos x|+c$

16. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$ Отг. $x\cot gx+\ln|\sin x|+c$;

17. $\int x^2\ln xdx=\int \ln xd\frac{x^3}{3}=\frac{x^3}{3}\ln x-\int \frac{x^3}{3}d\ln x=\frac{x^3}{3}\ln x-\int \frac{x^3}{3}.\frac{1}{x}dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=$
$=.\ \frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+c$;

18. $\int x^5\ln xdx$ Отг. $\frac{1}{6}x^6\ln x-\frac{1}{36}x^6+c$;

19. $\int x^7\ln xdx$ Отг. $\frac{1}{8}x^8\ln x-\frac{1}{64}x^8+c$;

20. $\int \ln(x+1)dx=x.\ln(x+1)-\int xd\ln(x+1)=x.\ln(x+1)-\int x.\frac{1}{x+1}dx=x.\ln(x+1)-\int \frac{x+1-1}{x+1}dx=$
$=x.\ln(x+1)-\int \frac{x+1}{x+1}dx+\int \frac{1}{x+1}d(x+1)=(x+1)\ln(x+1)-x+c$;

21. $\int x\ln(x-1)dx$ Отг. $\frac{x^2-1}{2}\ln(x-1)-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+c$;

22. $\int xarctgxdx$ Отг. $\frac{x^2+1}{2}arctgx-\frac{x}{2}+c$;

23. $\int x^2\cos xdx$ Отг. $(x^2-2)\sin x+2x\cos x+c$;

24. $\int (x^2+4x)\cos xdx$ Отг. $(x^2+4x-2)\sin x+(2x+4)\cos x+c$;

25. $\int x^2\sin 4xdx$ Отг. $\left(\frac{1}{32}-\frac{x^2}{4}\right)\cos 4x+\frac{x}{8}\sin 4x+c$;

26. $\int x^2e^xdx=\int x^2de^x=x^2e^x-\int e^xdx^2=x^2e^x-\int 2xe^xdx=x^2e^x-2\int xde^x=x^2e^x-2xe^x+\int e^xdx=$
$=\ (x^2-2x+2)e^x+c$;

27. $\int (x^2-2x)e^xdx$ Отг. $(x^2-4x+4)e^x+c$;

28. $\int (x^2-3)e^{2x}dx$ Отг. $\frac{x^2-3}{2}e^{2x}-\frac{x}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+c$

29. $\int \ln(x^2+1)dx$ Отг. $x\ln(x^2+1)-2x+2arctgx+c$;

30. $\int \frac{arctgx}{x^3}dx$ Отг. $\frac{1}{2}\left[\frac{arctgx}{x^2}+\frac{1}{x}+arctgx\right]+c$;

ИНТЕГРИРАНЕ ЧРЕЗ СУБСТИТУЦИЯ

СУБСТИТУЦИИ

S1. $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,$ полагаме $x=a\sin t,\quad t=\arcsin\frac{x}{a},\quad dx=a\cos tdt$;

S2. $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx,$ полагаме $x=atgt,\quad t=\mathrm{arc}\,tg\frac{x}{a},\quad dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt$;

S3. $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,$ полагаме $x=\frac{a}{\sin t},\quad t=\arcsin\frac{a}{x},\quad dx=-\frac{a\cos t}{\sin^2 t}$;

S4. $\int R\left(x,ax^2+bx+c\right)dx,$ полагаме $x=t-\frac{b}{2a},\quad t=x+\frac{b}{2a},\quad dx=dt$;

S5. $\int R(\sin x,\cos x)dx,$ полагаме $x=2arctgt,\quad t=tg\frac{x}{2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$;

S6. $\int R\left(x,\sqrt[n]{x},\sqrt[m]{x}\right)dx,$ полагаме $x=t^k,\quad k=HOK(n,m,...),\quad t=\sqrt[k]{x},\quad dx=k.t^{k-1}dt$;

.

ЗАДАЧИ

1. $\int\frac{dx}{x^2+6x+13}$

Решение: Прилагаме S4, пол. $x=t-\frac{6}{2}=t-3,\quad t=x+3,\quad dx=dt$

$$\int\frac{dx}{x^2+6x+13}=\int\frac{dt}{(t-3)^2+6(t-3)+13}=\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}=\frac{1}{2}arctg\frac{x+3}{2}+c;$$

2. $\int\frac{(4x-1)dx}{x^2-4x+5}$ Отг. $2\ln\left(x^2-4x+5\right)+7arctg(x-2)+c$

3. $\int\frac{dx}{9x^2-6x+1}$ Отг. $-\frac{1}{3(3x-1)}+c$;

4. $\int\frac{xdx}{x^2-2x+7}$ Отг. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+7\right|+\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{6}}+c$

5. $\int\frac{(3x-1)dx}{(x-2)(x+3)}$ Отг. $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x-6\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+c$

6. $\int\frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$ Отг. $2\sqrt{x^2-6x+10}-3\ln\left|x+3\sqrt{x^2-6x+10}\right|+c$

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$

Решение: Прилагаме S6, пол. $x=t^2,\quad t=\sqrt{x},\quad dx=2.tdt$;

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\int\frac{2tdt}{t(t+1)}=2\int\frac{dt}{t+1}=2\int\frac{d(t+1)}{t+1}=2\ln|t+1|=2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+c;$$

8. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Решение: Прилагаме S6, пол. $x = t^2$, $t = \sqrt{x}$, $dx = 2.tdt$;

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int \frac{tdt}{1+t} = 2\int \frac{t+1-1}{1+t}dt = 2\int \frac{t+1}{1+t}dt - 2\int \frac{1}{1+t}dt = 2t - 2\ln|1+t| =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + c$$

9. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$ Упътване: $t^2 = t^2 - 1 + 1,\quad t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$

Отг. $x - 2\sqrt{x} + 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + c$

10. $\int x\sqrt{x-3}dx$

Решение: Прилагаме S6, пол. $t = \sqrt{x-3}$, $x = t^2 + 3$, $dx = 2tdt$

$$\int x\sqrt{x-3}dx = \int (t^2+3)t.2tdt = 2\int (t^4+3t^2)dt = 2\int t^4 dt + 6\int t^2 dt = 2.\frac{t^5}{5} + 6.\frac{t^3}{3} =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5} + 2\sqrt{(x-3)^3} + c;$$

11. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$ Отг. $2\sqrt{x-1} - 2\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right) + c$

12. $\int \frac{x+4}{\sqrt{x-2}}dx$ Отг. $\frac{2}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3 + 12\sqrt{x-2} + c$;

13. $\int \frac{3xdx}{\sqrt{2x+1}}$ Отг. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2x+1}\right)^3 - \frac{3}{2}\sqrt{2x+1} + c$

14. $\int (x+1)\sqrt{1+3x}dx$ Отг. $\frac{2}{45}\left(\sqrt{1+3x}\right)^5 + \frac{4}{27}\left(\sqrt{1+3x}\right)^3 + c$;

15. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$ Отг. $\frac{2}{27}\left(\sqrt{1+3x}\right)^3 - \frac{2}{9}\sqrt{1+3x} + c$;

16. $\int \frac{3dx}{\sqrt[4]{5x-1}}$ Отг. $\frac{4}{5}\sqrt[4]{(5x-1)^3} + c$

17. $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+1}dx$

Решение: Прилагаме S6, $k = HOK(2,4) = 4$, $x = t^4$, $t = \sqrt[4]{x}$, $dx = 4.t^3dt$

$\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{t^4 = t}$, $\sqrt{x} = \sqrt{t^4} = t^2$.

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+1}dx = \int \frac{t}{t^2+1}.4t^3dt = 4\int \frac{t^4}{t^2+1}dt = 4\int \frac{(t^4-1)+1}{t^2+1}dt = 4\int \frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^2+1}dt + 4\int \frac{1}{t^2+1}dt =$$

$$= \frac{4}{3}t^3 - 4t + 4arctgt + c = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - 4\sqrt[4]{x} + 4arctg\sqrt[4]{x} + c.$$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})}$ Упътване: пол. $x = t^4$ Отг. $4\sqrt[4]{x} - 4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + c$;

19. $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})}$ Упътване: пол. $x = t^6$ Отг. $6\ln\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + c$;

20. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$ Отг. $6\sqrt[6]{x} - 6arctx\sqrt[6]{x} + c$;

21. $\int \frac{\left(1-\sqrt[6]{x}\right)^2 dx}{\sqrt[3]{x}}$ Отг. $x - \frac{12}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$

22. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - x}$ Упътване: $t^4 - 1 = \left(t^2 - 1\right)\left(t^2 + 1\right)$ Отг. $-2\sqrt[6]{x} - 6\sqrt{x} - 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} + 1}\right| + c$

23. $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}dx$ Отг. $\sqrt{2x} - \frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x)^5} + c$;

24. $\int \frac{3-\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt{x-2}}dx$ Отг. $6\sqrt{x-2} - \frac{6}{7}(x-2)\sqrt[6]{x-2} + c$

25. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ Отг. $-\cot g\left(\arcsin x\right) + c = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c$;

26. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$ Отг. $-\cot g\left(\arcsin\frac{x}{3}\right) - \arcsin\frac{x}{3} + c = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{3} + c$;

27. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Решение: Прилагаме S1, пол. $x = \sin t$, $t = \arcsin x$, $dx = \cos t dt$,

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t dt =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\int \cos 2t d2t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + c =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin\left(2\arcsin x\right) + c = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c$$

28. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ Отг. $2\arcsin\frac{x}{2} + \sin\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right) + c = \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2} + c$

29. $\int \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}dx$ Отг. $-\sqrt{16-x^2} + c$;

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$ Отг. $\sin\left(arctgx\right) + c = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + c$;

31. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x-x^2}}$ Упътване: пол. $x = 3\sin^2 t$

Отг. $-\frac{2}{3}\cot g\left(\arcsin\sqrt{x}\right) + c = -\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3x-x^2}}{x} + c$;

32. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ Упътване: пол. $x = \frac{1}{\sin t}$, Отг. $-\arcsin\frac{1}{x} + c$;

33. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

Упътване : Пол $tg\frac{x}{2} = t, x = 2arctgt, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ Отг. $\ln\left|tg\frac{x}{2} + 1\right| + c$;

34. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$ Отг. $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} tg \frac{x}{2}\right)+c$

ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$, $F'(x)=f(x)$ - формула на Нютон – Лайбниц

ЗАДАЧИ

1. $\int\limits_1^5 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^5 = \frac{5^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{124}{3}$;
2. $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_1^4 = 2\sqrt{4}-2\sqrt{1}=2$;
3. $\int\limits_0^2 \left(e^x+10\right)dx = \int\limits_0^2 e^x dx + \int\limits_0^2 10dx = e^x\Big|_0^2 + 10x\Big|_0^2 = e^2-e^0+10.2-10.0 = e^2+19$;
4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4}$;
5. $\int\limits_2^4 \frac{x+1}{x+2}dx$ Отг. $2-\ln 6+\ln 4$;
6. $\int\limits_{-2}^2 \frac{x^2dx}{x^2+4}$ Отг. $\pi-4$;
7. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{2x^2+1}$ Отг. $\frac{\ln 3}{4}$
8. $\int\limits_0^2 \frac{x+3}{x^2+4}dx$ Отг. $\frac{1}{2}(\ln 8-\ln 4)+\frac{3\pi}{8}$;
9. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$ Отг. $\frac{1}{4}$;
10. $\int\limits_1^e \frac{1-\ln x}{x}dx$ Отг. $\frac{1}{2}$
11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 xdx$ Отг. $\frac{\pi+2}{8}$;
12. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 xdx$ Отг. $\frac{\pi-2}{8}$;
13. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} 2\cos^2 x\sin xdx$ Отг. $\frac{7}{12}$;
14. $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ Отг. $\sqrt{2}-1$;

ИНТЕГРИРАНЕ ПО ЧАСТИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$$

15. $\int\limits_0^\pi x\sin xdx = \int\limits_0^\pi xd(-\cos x) = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int\limits_0^\pi cisxdx = -x\cos x\Big|_0^\pi + \sin x\Big|_0^\pi =$
$= -\pi\cos\pi + 0.\cos 0 + \sin\pi - \sin 0 = \pi$;
16. $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$ Отг. $1-\frac{2}{e}$;
17. $\int\limits_0^{2\pi} x\sin 2xdx$ Отг. $-\pi$;

18. $\int_0^1 (x-1)e^{-x}dx$ Отг. $-\dfrac{1}{e}$; 19. $\int_2^3 xe^{-2x}dx$ Отг. $\dfrac{1}{4}\left(5e^{-4}-7e^{-6}\right)$;

20. $\int_1^2 x\ln x dx = \int_1^2 \ln x d\dfrac{x^2}{2} = \dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \dfrac{x^2}{2}d\ln x = \dfrac{2^2}{2}\ln 2 - \dfrac{1^2}{2}\ln 1 - \dfrac{1}{2}\int_1^2 x^2.\dfrac{1}{x}dx =$

$= 2\ln 2 - \dfrac{1}{2}.\dfrac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \dfrac{3}{4}$.

21. $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$ Отг. $\pi^3 - 6\pi$; 22. $\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx$ Отг. 1 ;

23. $\int_1^e (\ln x + 1)dx$ Отг. e ; 24. $\int_0^2 2x\ln\left(x^2+4\right)dx$ Отг. $8\ln 8 - 4\ln 4 - 4$;

25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\sin x = x.\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \dfrac{\pi}{2}.\sin\dfrac{\pi}{2} - 0.\sin 0 + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2}+1$.

ИНТЕГРИРАНЕ ЧРЕЗ СУБСТИТУЦИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

Нека функцията *f(x)* е непрекъсната в интервала [*a,b*], а функцията $x=\varphi(t)$ притежава следните свойства:

- За всяко $t\in[\alpha,\beta]$, $x=\varphi(t)\in[a,b]$;
- $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;
- $\varphi(t)$ има непрекъсната производна в интервала $[\alpha,\beta]$,

Тогава $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

26. $\int_4^9 \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$.

Решение: Прилагаме S6, пол. $x=t^2$, $t=\sqrt{x}$, $dx=2.tdt$;

Нови граници: $\alpha=\sqrt{4}=2$; $\beta=\sqrt{9}=3$. Тогава

$\int_4^9 \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx = \int_2^3 \dfrac{t}{t-1}.2tdt = 2\int_2^3 \dfrac{t^2}{t-1}dt = 2\int_2^3 \dfrac{t^2-1+1}{t-1}dt = 2\int_2^3 \dfrac{t^2-1}{t-1}dt + 2\int_2^3 \dfrac{1}{t-1}dt = (t^2+2t+2\ln|t-1|)\Big|_2^3 =$

$= 7+\ln 4$.

27. $\int_0^1 \dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ Отг. $\dfrac{\pi}{2}$; 28. $\int_0^9 \dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}$ Отг. $6-2\ln 4$;

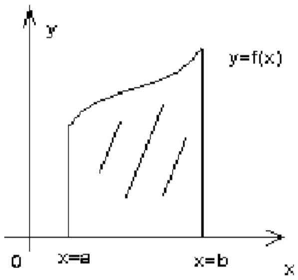
29. $\int_1^4 \dfrac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$ Отг. $2\ln 3 - 2\ln 2 - \dfrac{1}{3}$; 30. $\int_2^6 \sqrt{x-2}dx$ Отг. $\dfrac{16}{3}$;

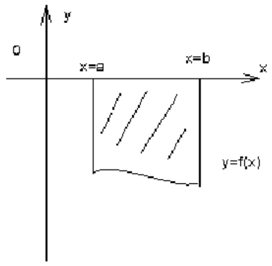
31. $\int_0^5 x\sqrt{x+4}dx$ Отг. $\dfrac{9}{2}$; 32. $\int_0^5 \dfrac{x}{\sqrt{1+3x}}dx$ Отг. 4 ;

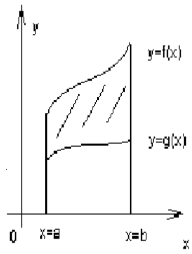
33. $\int_2^7 \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}dx$ Отг. $\dfrac{26}{3}$; 34. $\int_0^2 \dfrac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{(1+x)^3}}$ Отг. $\dfrac{\pi}{6}$;

35. $\int_0^2 \frac{xdx}{x^2-2x+2}$ Отг. $\frac{\pi}{2}$; 36. $\int_0^1 \frac{dx}{9x^2+6x+1}$ Отг. $\frac{1}{4}$;

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ ЗА ПРЕСМЯТАНЕ НА ЛИЦЕ НА РАВНИННА ФИГУРА





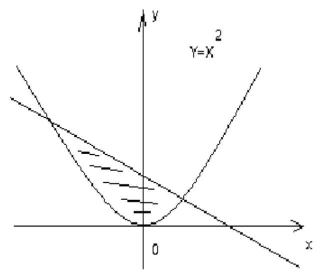


1) $f(x) \geq 0$ за $a \leq x \leq b$ 2) $f(x) \leq 0$ за $a \leq x \leq b$ 3) $f(x) \geq g(x)$ за $a \leq x \leq b$

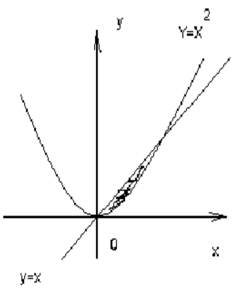
$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad S = -\int_a^b f(x)dx \qquad S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

ЗАДАЧИ

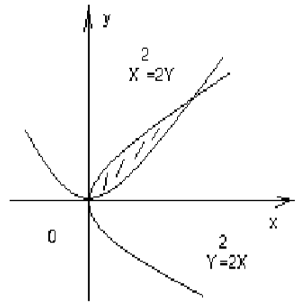
1. S=? $\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ Отг. $\frac{17}{6}$



2. S=? $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$ Отг. $\frac{1}{6}$



3. S=? $\begin{cases} y^2 = 2x \\ x^2 = 2y \end{cases}$ Отг. $\frac{1}{3}$;



4. S=? $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x = 1, x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

Отг. $\frac{32}{3}$;

5. S=? $\begin{cases} 2y = x^2 - 2 \\ y = 0 \end{cases}$;

Отг. $\frac{32}{3}$;

6. S=? $\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = 0 \end{cases}$

Отг. $\frac{32}{3}$;

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Панайотова, Ж.Димитрова, К.Коларов, Висша математика – първа част (методическо ръководство), ПБ на Университет"Проф. Д-р Ас.Златаров" Бургас, 2002г.
2. Иванка Стамова, Гани Стамов, Лекции по диференциално и интегрално смятане на функция на една реална променлива, Издателство:ИПК"Светлина"АД – Ямбол, ISBN – 10:954-9526-34-8 ,2008
3. С.Манолов, А.Петрова-Денева, А.Генов, Н.Шополов, Висша математика, част 2, Техника, София, 1977.
4. Стефан Грозев, Атанас Аврамов, Висша математика, „АБАГАР", Велико Търново, 2000, ISBN 954-427-416-2.