УНИВЕРСИТЕТ “ПРОФ. Д-Р АСЕН ЗЛАТАРОВ” - БУРГАС
ФАКУЛТЕТ ПО ПРИРОДНИ НАУКИ

Катедра „Математика и физика”

ВИСША МАТЕМАТИКА
I ЧАСТ

МЕТОДИЧЕСКО РЪКОВОДСТВО
ЗА РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ

Автор: доц. д-р Галина Панайотова

Бургас
2008

СЪДЪРЖАНИЕ

Л И Н Е Й Н А   А Л Г Е Б Р А

I. К О М П Л Е К С Н И   Ч И С Л А

О1.Числата от вида

$$z = x + iy,$$

където x и y са реални числа, а

$$i = \sqrt{-1}$$

е имагинерната единица, се наричат *комплексни числа*.
Числото **x** наричаме реална част на z, а **y** - имагинерна част на z. Комплексното число z е записано в *алгебричен вид*.

Комплексните числа от вида $x + i.0$ се отъждествяват с реалните числа x. Комплексните числа от вида $0 + iy = iy$ се наричат имагинерни.
Означаваме с $\overline{z} = x - iy$ *комплексно спрегнатото* число на $z = x + iy$.

В сила са свойствата

$$z + \overline{z} = 2x \quad \text{и} \quad z.\overline{z} = x^2 + y^2 .$$

Comment [G1]:

Нека $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + y_2$.

$z_1 = z_2$, когато $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Операции с комплексни числа в алгебричен вид:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \qquad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$$

$$z_1.z_2 = (x_1.x_2 - y_1.y_2) + i(x_1.y_2 + x_2.y_1).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

(при $z_2 \neq 0$).

Тригонометричен вид на комплексните числа.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

където

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Операции с комплексни числа в тригонометричен вид:

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Формули на Моавър

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

където $к = 1,2, \dots (n - 1)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Следствие: Ако a>0, то

$$\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$$

Задачи:

1. Извършете означените действия: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - 2i$: а) $z_1 + z_2$ б) $z_1 - z_2$ в) $z_1.z_2$ г) $(z_1)^2$

Решение:

а) $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 2i) = 7 + i$;

б) $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 - 2i) = -3 + 5i$;

в) $z_1.z_2 = (2 + 3i)(5 - 2i) = 10 - 4i + 15i - 6i^2 = 10 + 11i + 6 = 16 + 11i$;

г) $(z_1)^2 = (2 + 3i)^2 = 4 + 12i + (3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$.

2.Пресметнете:

а) $(3 + 2i) + (4 - i) - (1 + 7i)$; б) $(1 + i)(7 - i)$; в) $(1 + i)(1 - i)$; г) $(1 + i)^2$; д) $\frac{2+i}{i}$

е) $\frac{1+i}{1-i}$.

Решение:е)

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+1^2}{1-i^2} = \frac{1+2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$$

Отг. а) $6 - 6i$, б) $8 + 6i$, в) 2, г) $2i$, д) $-2i - 1$.

3. Намерете реалните числа x и y от равенството:

а) $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$; б) $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 7 - 8i$; в) $(1 + i)x + (3 + 5i)y = 1 + 3i$.

Отг. а) $x = -4/11$; $y = 5/11$; б) $x = 1$; $y = 2$; в) $x = -2$, $y = 1$.

4.Изчислете: а) i^3 ; б) i^4 ; в) i^{13} ; г) i^{102} .

Отг. а) $-i$; б) 1 ; в) i ; г) -1 .

5.Проверете тъждеството:

$x^4 + 4 = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)(x + 1 + i)$.

6.Решете уравненията:

а) $x^2 + 4 = 0$; б) $x^2 - 4x + 13 = 0$; в) $x^2 + 2x + 5 = 0$; г) $x^2 + 4x + 5 = 0$;
д) $x^2 - 3ix + 4 = 0$.

Отг. а) $2i$; $-2i$; б) $2 + 3i$; $2 - 3i$; в) $-1 + 2i$; $-1 - 2i$; г) $-2 + i$; $-2 - i$; д) $4i$; $-i$.

7.Изчислете:

а) $(1 + 2i)^6$; б) $(2 + i)^7 + (2 - i)^7$; в) $(1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5$.

Отг. а) $117 + 44i$; б) -556 ; в) $-76i$.

8.Преставете в тригонометричен вид числата:

а) $z_1 = 1 + i$; б) $z_2 = 1 - i$; в) $z_3 = 1$; г) $z_4 = 1 + i\sqrt{3}$.

Решение: в)

$$x = 1; y = 0; r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1; tg\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

Следователно $z_3 = \cos 0 + i\sin 0$.

Отг.

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}); \quad z_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}); \quad z_4 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}).$$

9. Пресметнете: а) $(1 - i)^8$; б) $(1 + i)^9$.

Отг. а) 16; б) $16 + 16i$.

10. Намерете алгебричния вид на числата .

а) $z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$; б) $z_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$.

Отг. а) $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $z_2 = -2i$.

11.Умножете комплексните числа:

а)

$$z_1 = 6(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}) \quad и \quad z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12});$$

б)

$$z_1 = 7(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}) \quad и \quad z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8});$$

Отг. а) $18i$, б) $-14i$.

12. Разделете комплексните числа:

а)

$$z_1 = 6(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}) \quad и \quad z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12});$$

б)

$$z_1 = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) \quad и \quad z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6});$$

Отг. а) $1 + i\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3} + i$.

13. Намерете всички стойности на $\sqrt{-8}$.

Решение: Намираме тригонометричният вид на числото $z = -8 + 0.i$.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = 8; tg\,\varphi = \frac{0}{-8} = 0 \Rightarrow \varphi = \pi$$

защото $-8<0$. Следователно $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$. Тогава

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8(\cos\pi + i\sin\pi)} = 2(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}, k = 0,,2.$$

Откъдето намираме при:

$$k = 0, z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 1 + i\sqrt{3};$$

$$k = 1, z_1 = 2(\cos\frac{\pi + 2.1.\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2.1.\pi}{3} = 2(-1 + i.0) = -2;$$

$$k = 2, z_2 = 2(\cos\frac{\pi + 2.2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2.2\pi}{3} = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - i\sqrt{3}.$$

II. П О Л И Н О М И

О1. Израз от вида

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

където $a_к$ са постоянни коефициенти и $a_n \neq 0$ се нарича *полином на x от n- та степен.*

1.Равенство на полиноми

Полиномът $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, е равен на полиномът $Q_m(x) = b_m x^m + \ldots + b_1x + b_0$, ако $n = m$ и $a_k = b_k$ (k = 1,2, …,n).

2. Деление на полиноми.

Ако $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ са полиноми съответно от степен n и m при $m \leq n$, то съществуват полиноми $q_{n-m}(x)$ и $r_s(x)$; $0 < s < m$, наречени съответно частно и остатък, така че

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = q_{n-m}(x) + \frac{r_s(x)}{Q_m(x)}$$

или

$$P_n(x) = Q_m(x).q_{n-m}(x) + r_s(x).$$

Делението на два полинома може да се извърши чрез:

1) *Метода на непосредствено деление* – аналогично на делението на многоцифрените числа;
2) *Метода на неопределените коефициенти*:
   а) освобождаваме се от знаменател;
   б) приравняваме коефициентите пред еднаквите степени на x на получените равни полиноми;
   в) от получената система от уравнения намираме неизвестните коефициенти на полиномите $q_{n-m}(x)$ и $r_s(x)$.

3. Стойност на полином. Правило на Хорнер за деление на полином с полином от вида x-α. Правило на Хорнер за пресмятане настойност на полинома.

О2.Числото $P_n(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n$ се нарича стойност на полинома $P_n(x)$ при $x = \alpha$.

Т1. Остатъкът от делението на полинома P(x) на полинома x-α е равен на стойността на полинома при $x = \alpha$.

Ако при делението на два полинома делителят има вида x-α , то делението се извършва по правилото на Хорнер,

	a_n	a_{n-1}	…	a_0
α	b_{n-1}	b_{n-2}	…	r

където $b_{n-1} = a_n$, $b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha\, b_{n-1}$, … , $r = a_0 + \alpha\, b_1$ са коефициентите на частното. Тогава $P_n(\alpha) = r$.

О3. Коренът α на уравнението $P(x) = 0$ се нарича *нула* на полинома $P(x)$.

О4. Реалното число α се нарича k-кратен корен на уравнението $P(x) = 0$, ако $P(x) = (x-\alpha)^k q(x)$, където частното $q(x)$ е полином от степен n-k и $q(\alpha) \neq 0$.

Полиномът $P_n(x)$ *се дели без остатък на* $x - \alpha$ тогава и само тогава, когато $x = \alpha$ е нула на полинома.

Т2. Всеки полином с реални или комплексни коефициенти от степен $n \geq 1$ има поне един комплексен корен.

Един полином от n–та степен има най-много n реални корени.

Т3. Всеки полином $P_n(x)$ с реални коефициенти може да се разложи на линейни множители:

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n),$$

където $x_1, x_2, \dots, x_n$ са нулите на $P_n(x)$.

Това представяне се нарича *каноничен вид* на полинома.

Ако p и q са взаимно прости числа и $x = p/q$ е нула на полинома $P_n(x)$, то q дели a_n и p дели a_0. При $a_n = 1$, $x = p$ е *цяла нула* на полинома.

ЗАДАЧИ

1. Определете степента на полиномите:

а) $P(x) = 2x^4 + 3x^2 - 7x - 2$; б) $Q(x) = x^7 - 2x + 3$; в) $R(x) = 12$.

Отг. а) 4, б) 7, в) 0.

2. Ако $P(x) = 3x^2 - 2x - 2$ и $Q(x) = -2x + 3$ намерете:

а) $P(x) + Q(x)$, б) $P(x) - Q(x)$, в) $P(x)Q(x)$.

Решение:

а) $P(x)+Q(x) = (3x^2 - 2x - 2) + (-2x + 3) = 3x^2 - 2x - 2 - 2x + 3 = 3x^2 - 4x + 1$,

б) $P(x)-Q(x) = (3x^2 - 2x - 2) - (-2x + 3) = 3x^2 - 2x - 2 + 2x - 3 = 3x^2 - 5$,

в) $P(x)Q(x) = (3x^2 - 2x - 2)(-2x + 3) = -6x^3 + 9x^2 + 4x^2 - 6x + 4x - 6 = -6x^3 + 13x^2 - 2x - 6$.

3. Извършете умножението на полиномите:

а) $(2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 1)$; б) $(x^3 + x^2 - x - 1)(x^2 - 2x - 1)$.

Отг. а) $2x^6 - 7x^5 + 6x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1$; б) $2x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x + 1$.

4. Да се определят константите a , b и c от равенството:

$$(x^2 - x - a)(bx + c) = x^3 + 3x^2 - 5x - 4$$

Решение: Разкриваме скобите в лявата страна на равенството и използваме условието за равенство на два полинома :

$$bx^3 + (c-b)x^2 + (ab-c)x - ac = x^3 + 3x^2 - 5x - 4.$$

Като приравним коефициентите пред равните степени на x получаваме системата:

$$\begin{aligned} b &= 1 \\ c - b &= 3 \\ ab - c &= -5 \\ ac &= -4 \end{aligned}$$

Решението на системата е $a = 1$, $b = 1$ и $c = 4$.

5. Да се определят константите A и B от равенството:

$$\frac{2x-5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}.$$

Отг. A = -1, B = 3.

6. Да се определят константите A , M и N от равенството:

$$\frac{3x^2 - x - 2}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx + N}{x^2+4}.$$

Отг. A = 1, M = 2 , N = 3.

7. Полиномът $P(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 3$ да се раздели на полинома $Q(x) = x^2 - 1$ по метода на неопределените коефициенти.

Решение: Използваме формулата: $P_n(x) = Q_m(x).q_{n-m}(x) + r_s(x)$, където: n=3, m=2, $q_{n-m}(x)$ и $r_s(x)$ са сьответно частното и остатька при делението на двата полинома и имат вида: $q_{n-m}(x) = ax + b$, $r_s(x) = cx + d$. Полуаваме:

$$2x^3 + x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 1)(ax + b) + cx + d$$
$$2x^3 + x^2 - 4x + 3 = ax^3 + bx^2 + (c-a)x + d - b$$

Приравняваме коефициентите пред равните степени на x и намираме: a=2, b=1, c=-2 , d=4 т.е. $q(x) = 2x + 1$, $r(x) = -2x + 4$.

8. Полиномьт $P(x) = 3x^4 - x^2 + 1$ да се раздели на полинома $Q(x) = x + 2$ по метода на неопределените коефициенти.

Отг. $q(x) = 3x^3 - 6x^2 + 11x - 22$; $r(x) = 45$.

9. Полиномьт $P(x) = 7x^3 - 2x^2 - 26x + 9$ да се раздели на полинома $Q(x) = x^2 - 4$ чрез алгоритьма за деление на полиноми.

Решение:

$$\begin{array}{rl} \underline{-} \; 7x^3 - 2x^2 - 26x + 9 & \;\underline{|\; x^2 - 4} \\ \underline{7x^3 - 28x} \qquad\quad & \; 7x - 2 = q(x) \\ -\; -2x^2 + 2x + 9 & \\ \underline{-2x^2 \qquad + 8} & \\ 2x + 1 = r(x). & \end{array}$$

10. Полиномьт $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 2$ да се раздели на полинома $Q(x) = x^2 + 2x + 3$ чрез алгоритьма за деление на полиноми.

Отг. $q(x) = 2x - 5$; $r(x) = 7x + 13$.

11. Полиномьт $P(x) = 2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 6x + 3$ да се раздели на полинома $Q(x) = x^3 - x - 1$ чрез алгоритьма за деление на полиноми.

Отг. $q(x) = 2x^2 - 3x - 3$; $r(x) = 0$.

12. При какви условия полиномьт $x^3 + px + q$ се дели на полинома $x^2 + mx - 1$ без остатък?

Отг. $p = -q^2 - 1$, $m = q$.

13. При какви условия полиномьт $x^4 + px^2 + q$ се дели на полинома $x^2 + mx + 1$ без остатък?

Отг. 1) $q = p - 1$, $m = 0$; 2) $q = 1$, $m^2 = 2 - p$.

14. По метода на Хорнер да се намерят частното и остатькьт на полинома $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ с полинома $x - 2$.

Решение:

	1	-2	3	-2	-1
2	1	0	3	4	7

Получаваме $q(x) = x^3 + 3x + 4$, $r = 7$.

15. По метода на Хорнер да се намерят частното и остатькьт при делението на полинома $x^5 - x^3 + x - 2$ с полинома $x - 1$.

Отг. $q(x) = x^4 + x^3 + 1$, $r = -1$.

16. По метода на Хорнер да се намери стойността на полинома P(x) за $x=\alpha$, ако:

а) $P(x) = 2x^4 - x^2 + 2x + 1$, $\alpha = -1$,

б) $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, $\alpha = 3$,

в) $P(x) = 2x^4 - 4x^3 - 10x^2 - 4x + 3$, $\alpha = -1$,

г) $P(x) = x^5 - 3x^3 + x + 3$, $\alpha = -2$, д) $P(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 6, \quad \alpha = -2$.

Упътване: Стойността на полинома $P(x)$ в α е равна на остатъка от делението на $P(x)$ с $(x - \alpha)$.

Отг. а) $P(-1) = 0$ следователно $x = -1$ е нула на полинома $P(x)$,

б) $P(3) = 98$, в) $P(-1) = 2$, г) $P(-2) = -7$, д) $P(-2) = 60$.

17. Проверете , че числата 1, 3 и -2 са нули на полинома $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

18. Проверете , че числото 1 е трикратна нула на полинома $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$ и напишете каноничния вид на $P(x)$.

Решение :

	1	-2	0	2	-1
1	1	-1	-1	1	0
1	1	0	-1	0	_
1	1	1	0	_	_
1	1	$2\neq0$	_	_	_

Отг. $P(x) = (x - 1)^3(x+ 1)$.

19. Определете кратността на корена $x = -2$ за полинома $P(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$.

Отг. 4 .

20. . Определете кратността на корена $x = 2$ за полинома $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

Отг. 3 .

21. Определете коефициента a , така че полиномът $P(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$ да има двукратен корен $x = -1$.

Отг. $a = -5$.

22. Да се намерят целите нули на полинома $P(x) = x^4 +2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$.

Решение : Целите нули на полинома търсим измежду делителите на свободният член (-6). Те са: ±1 , ±2 , ±3 , ±6. Чрез схемата на Хорнер проверяваме за всяко едно от тези числа да ли е нула на $P(x)$.

	1	2	-4	-5	-6
1	1	3	-1	-6	$-12\neq0$
-1	1	1	-5	0	$-6\neq0$
2	1	4	4	3	0
-2	1	2	0	$3\neq0$	_
3	1	7	25	$78\neq0$	_
-3	1	1	1	0	_
6	1	7	$43\neq0$	_	_
-6	1	-5	$31\neq0$	_	_

23. Да се намерят целите нули на полиномите :

а) $P(x) = x^4 - 6x^2 - 7x - 6$, б) $Q(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 40x + 48$.

Отг. а) –2; 3 , б) -2; 1; 3 .

24. Да се намери каноничният вид на полиномите:

а) $P(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 3$,

б) $Q(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$,

в) $R(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 10$,
г) $S(x) = x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 3x – 10$.
Отг. а) $P(x) = (x+1)^2(x-1)(x+3)$, б) $Q(x) = (x-3)(x+3)(x-1/2)$,
в) $R(x) = (x+2)(x-2+i)(x-2-i)$, г) $S(x) = (x-5)(x+2)(x-i)(x+i)$.

25. Да се напише полином от n-та степен, за който се знае, че $a_n = 1$ и :
а) $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $n = 4$;
б) $x_1 = x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = -3$, $n = 4$;
в) $x_1 = x_2 = -3$, $x_3 = x_4 = 2$, $x_5 = 3$, $n = 5$;
Отг. а) $x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 74x – 120$, б) $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 28x – 24$,в) $x^5 - x^4 - 17x^3 + 21x^2 + 72x – 108$.

26.Определете A и B така , че полиномът $Ax^4 + Bx^3 + 1$ да се дели на $(x – 1)^2$ без остатък .
Отг. $A = 3$, $B = - 4$.

27. Определете A и B така , че полиномът $Ax^{n+1} + Bx^n + 1$ да се дели на $(x – 1)^2$ без остатък .
Отг. $A = n$, $B = -(n+1)$.

28. Определете коефициентите на полинома $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ако е известно , че $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ и $f(-1) = -6$.
Отг. $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$, $d = 0$.

29. Сумата от коефициентите на полиномите f(x) и g(x) е съответно равна на m и n . Намерете сумата от коефициентите на полинома f(x)g(x).
Отг. mn .

30. При какви стойности на параметрите a, b, c, d полиномът $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + c$ е точен квадрат на $x^2 + dx - 2$.
Отг. $a = c = 4$, $b = 0$, $d = 2$.

31. При какви стойности на параметрите a и c нулите на полинома $f(x) = x^4 + 2x^3 - 21x^2 + ax + c$ образуват аритметична прогресия?
Отг. $a = -22$, $c = 40$.

32. Намерете константите a и c на полинома $f(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + ax + c$, ако числото 1-i е негова нула.
Отг. $a =0$, $c = 10$.

33. Дадени са полиномите: $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ и $g(x) = 2x^2 - 33$.
а) Да се намерят положителните цели корени на уравнението $f(x) – g(x) = x^3$.
б) Да се определят A, B и C така, че равенството

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3}$$

да е в сила за всички допустими стойности на x.
Отг. а) $x = 4$; б) $A = -31/4$, $B =47/16$, $C = -15/16$.

34.Разложете на множители уравнението $f(x) = 0$, ако:
а) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 25x + 30 = 0$;
б) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 = 0$;
в) $f(x) = x^6 - x^5 - 11x^4 + 13x^3 + 26x^2 - 20x - 24 = 0$;
г) $f(x) = x^4 - 1$.
Отг. а)$(x-1)(x+5)(x-6)=0$; б) $(x-1)^5 = 0$; в)$(x+1)^2(x-2)^2(x+3) = 0$; г)$(x-1)(x+1)(x-i)(x+i) = 0$.

III. Д Е Т Е Р М И Н А Н Т И

О1. *Детерминанта от втори ред* се нарича числото $a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$, което се записва по следния начин.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$

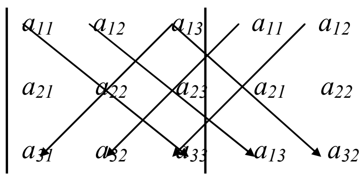
Числата a_{11}, a_{22}, a_{21}, a_{12} записани с двойни индекси ,отговарящи на реда и стълба, се наричат елементи на детерминантата от втори ред.

О2. *Детерминанта от трети ред* се нарича числото $a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32}$, което се означава така:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32}.$$

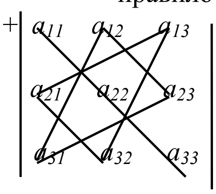
Правила за пресмятане на детерминанти от трети ред.

■ правило на Сарус

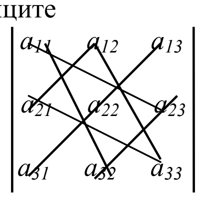


■ правило на триъгълниците

+



-



Поддетерминанта D_{ik} на елемента a_{ik} от детерминантата D се нарича детерминантата, получена от D чрез остраняване на i-тия ред и к-тия стълб.

Адюнгирано количество A_{ik} на елемента a_{ik} от D се определя чрез формулата

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}$$

Свойства на детерминантите:

1) Детерминантата не се променя при разменяне на редовете със съответните стълбове . Такава детерминанта се нарича транспонирана.

2) При размяна на местата на два реда (стълба) детерминантата променя само знака си.
3) Детерминанта с два еднакви реда (стълба) е равна на нула.
4) Общият множител на всички елементи от даден ред (стълб) може да се изнесе като множител пред детерминантата.
5) Детерминанта с нулев ред (стълб) е равна на нула;
6) Детерминанта с два пропорционални реда (стълба) е равна на нула.
7) Ако елементите на i-тия ред (стълб) на детерминантата са суми от две сьбираеми , то тя е равна на сума от две детерминанти, в които всички редове (стълбове) освен i-тия са същите като дадената, i-тият ред (стълб) на първата се състои от първите сьбираеми, а i-тия ред (стълб) на втората – от вторите сьбираеми.
8) Детерминантата не се променя,, ако към елементите на един ред (стълб), прибавим съответните елементи на друг ред (стълб) умножени с едно и също число.
9) Ако детерминантата има триъгълен вид, т.е. всички елементи под или над главния диагонал са равни на нула, то тя е равна на произведението на елементите по главния диагонал.
Пресмятането на детерминанта от n - ти ред може да се сведе до пресмятане на детерминаната от (n - 1) ред, като се използва формулата

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} .$$

Тази формула се нарича развитие на детерминантата по елементите на i - тия ред. Аналогично развитие може да се получи по елементите на кой да е стълб.

ЗАДАЧИ

1.Пресметнете детерминантите от втори ред:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$.

Решение: а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2.5 - 4.1 = 10 - 4 = 6$.

Отг. б) 23; в) 0; г) 1.

2.Пресметнете детерминантите от трети ред:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -6 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & -7 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -10 \\ -8 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 2 \\ 12 & 1 & 8 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение: а) Прилагаме правилото на Сарус за пресмятане на детерминанта от трети ред:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 1.(-1).0 + 2.1.2 + 3.0.1 - 3.(-1).2 - 1.1.1 - 2.0.0 = 9$$

Отг. а) 9 ; б) 1; в) 60 ; г) 0; д) -26 ; е) 0; ж) 47; з) 0.

3.Пресметнете:

а) $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin A & \sin B & \sin C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix}$.

Отг. а) $-2\,(a^3 - b^3)$; б) $\sin(A-B) + \sin(B-C) + \sin(C-A)$.

4. Решете уравненията:

а) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, б) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 2 & x+1 \end{vmatrix} = 0$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 \\ x^2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, г) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$.

Отг. а) 1 ; б) i ; -i ; в) 1 ; 2 ; г) -1 ; 1 ; 2 .

5.Пресметнете поддетерминантите D_{24} и D_{34} на детерминантата

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Решение: 1) Поддетерминантата D_{24} на елемента $a_{24} = -2$ се получава от дадената детерминанта като остраним втория ред и четвъртия стълб. Тогава получаваме

$$D_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 - 2 - 12 = -12$$

2)По аналогичен начин определяме и пресмятаме $D_{34} = -3$.

6.Пресметнете адюнгираните количества A_{32} и A_{33} съответно на елементите a_{32} и a_{33} на детерминантата

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение : 1) От определението за адюнгирано количество имаме $A_{32} = (-1)^{3+2} D_{32}$, където D_{32} е поддетерминантата на елемента a_{32}, която е равна на 3. Тогава получаваме:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 + 10 - 2 - 2) = -5 .$$

2) $A_{33} = -6$.

7.Пресметнете детерминантата от четвърти ред чрез развитие по елементите на четвърти ред .

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Решение : $D_4 = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44} =$

$$(-1)(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 0.A_{42} + 2.(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 0.A_{44} =$$

$= (-4 + 4 + 4 -1) - 2.(-1 -12 + 4) = 3 + 18 = 21$.

Пресметнете следните детерминанти като използвате свойствата им.

8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$;

9. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & x & 0 \\ 3 & 0 & 0 & z \\ 3 & y & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$;

11. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$;

12. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & -4 & -15 \end{vmatrix}$;

13. $\begin{vmatrix} x-1 & y & -z & 1 \\ 1-x & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-y & 2 & 2 \\ 0 & 0 & z-3 & z \end{vmatrix}$.

Отг. 8. 900 ; 9. 3xyz ; 10. 3 ; 11. -5 ; 12. -120 ; 13. $(x - 1)(y - 1)(3 - z)(z + 4)$.

Пресметнете детерминантите от n-ти ред.

14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ Отг. n!

15. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$ Отг. $b_1b_2\dots b_n$

16. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$ Отг. (n-1)!

17. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$ Отг. –2(n-2)!

18. Да се разложат на множители с реални коефициенти от първа и втора степен полиномите:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 & 6 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$.

Отг. а) (x-1)(x+2)(x-3); б) $(x+1)(x^2 + x + 1)$.

19. Пресметнете посочените детерминанти, като предварително преведете в триъгълен вид:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$;

Отг. а) 0; б) 6; в) 394.

20. Намерете коефициентите пред x^3 и x^4 във функцията

$$F(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

Отг. -1 и 2.

М А Т Р И Ц И

Правоъгълна таблица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

от m.n числа, разположени в m реда и n стълба, се нарича **матрица от тип (m x n).** Ако m = n , матрицата A се нарича **квадратна матрица от n - ти ред**. Числата a_{ij} (i = 1,2,…,m ; j=1,2,…n) се наричат елементи на матрицата.
Матрицата O от тип (m x n), всички елементи на която са нули, се нарича **нулева** матрица , а матрицата - A = ($-a_{ij}$) се нарича **противоположна** матрица на A = (a_{ij}) .

Квадратна матрица от n – ти ред , която има вида

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

се нарича **единична** матрица от n- ти ред.

Две матрици са равни точно когато са от един и същи тип и съответните им елементи са равни.Сума на две матрици A = (a_{ij}) и B = (b_{ij}) от един и същи тип (mxn) се нарича матрицата A + B = ($a_{ij} + b_{ij}$).

Произведение на матрицата A = (a_{ij}) с числото λ е матрицата λA = (λa_{ij})

Свойства:

1)A + B = B + A ; 2) A +O = A ;

3)(A + B) + C = A + (B + C) ; 4) A + (-A) = O ;

5) 1.A = A ; 6) (λ + μ)A = λA + μA ;

7)λ(A + B) = λA + λB ; 8) (λμ)A = λ(μA) .

Произведение на матриците $A = (a_{ij})$ от тип (mxp) и $B = (b_{ij})$ от тип (pxn) / в посочения ред/ се нарича матрицата $C = AB = (c_{ij})$ от тип (mxn) , елементите на която се получават по правилото:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}, \quad / \, i = 1,2,\dots m; \; j = 1,2,\dots n \, /$$

Ще отбележим, че произведението AB съществува само когато броят на стълбовете на матрицата A е равен на броят на редовете на матрицата B .

Детерминанта на квадратната матрица $A = (a_{ij})$ от n-ти ред се означава с det$A = | A |$.

Матрицата A се нарича неособена, ако $detA \neq 0$.

Обратна матрица A^{-1} на неособената матрица А се нарича матрицата, за която

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = E \ .$$

Всяка неособена матрица A има единствена обратна матрица A^{-1}, която може да се намери по формулата

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}\ A_{21} \ldots A_{n1} \\ A_{12}\ A_{22} \ldots A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}\ A_{2n} \ldots A_{nn} \end{pmatrix}.$$

kъдето елементите A_{ij} са адюнгираните количества на елементите a_{ij} на detA .

Ранг на матрица

Разглеждаме произволна матрица от тип (m x n). В матрицата произволно избираме *к* реда и *к* стълба. Елементите в които се пресичат избраните редове и стълбове образуват матрица от к-ти ред детерминантата на която наричаме **минор** от *к*-ти ред.

Определение: Най-високият ред на минор в матрицата *А* със стойност, различна от нула, се нарича **ранг на матрицата**.

Елементарни преобразувания

- разместване местата на два реда(стълба);
- умножение на ред (стълб) с число различно от нула;
- прибавяне на ред (стълб) към друг ред (стълб), умножен с число.

Елементарни преобразуванияне променят ранга на матрицата.

Матрични уравнения

Уравнения от вида

$$AX = C \quad ; \quad XB = C \quad ; \quad AXB = C \quad ,$$

където *A, B* и *C* са дадени матрици, а *X* е неизвестна матрица . Решенията са сьответно :

$$X = A^{-1}C \quad ; \quad X = CB^{-1} \quad ; \quad X = A^{-1}CB^{-1}$$

ЗАДАЧИ:

1. Дадени са матриците : $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Пресметнете: а) $A + B$, б) $2B$, в) $3A - B$.

Решение:

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+2 & 7+6 \\ -3+0 & 2+3 \\ 0+4 & -2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix};\ 2B=\begin{pmatrix} 2.2 & 2.6 \\ 2.0 & 2.3 \\ 2.4 & 2.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 6 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$3A-B=\begin{pmatrix} 3.1-2 & 3.7-6 \\ 3.(-3)-0 & 3.2-3 \\ 3.0-4 & 3.(-2)-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ -9 & 3 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}.$$

2.Дадени са матриците

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пресметнете : $6A + 5B - E_3$.

Упътване : E_3 е единична матрица от трети ред .

Отг. $\begin{pmatrix} -8 & 11 & 4 \\ 15 & 15 & 7 \\ 9 & 17 & 7 \end{pmatrix}$.

3.Дадени са матриците

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Пресметнете произведенията:

а) $A.B$; б) $B.C$; в) $C.B$; г) $A.B.C$.

Решение: а) Матрицата А е квадратна от тип (2x2) , матрицата В е от тип (2x3) , следователно умножението може да бъде извършено и АВ е матрица от тип (2x3), т.е.

$$A.B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}1.1+2.0 & 1.(-1)+2.2 & 1.1+2.(-1)\\ -1.1-3.0 & -1.(-1)-3.2 & -1.1-3.(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ -1 & -5 & 2\end{pmatrix} =$$

б) $$B.C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1.(-2)+(-1).3+1.4 & 1.1+(-1).2+1.5\\ 0.(-2)+2.3+(-1).4 & 0.1+2.2+(-1).5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Отг. в) $C.B=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -3\\ 3 & 1 & 1\\ 4 & 6 & -1\end{pmatrix}$; г) $A.B.C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -5 & -1\end{pmatrix}$.

ПРЕСМЕТНЕТЕ:

4. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ Отг. $\begin{pmatrix}6 & 6 & 8\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ Отг. $\begin{pmatrix}9 & 4\\ 7 & 4\end{pmatrix}$.

6. $A=(\alpha \quad \beta \quad \gamma)$, $B=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ а) $A.B$ б) $B.A$

Отг. а) $A.B = (a\alpha+b\beta+c\gamma)$; б) $B.A=\begin{pmatrix}\alpha a & \beta a & \gamma a\\ \alpha b & \beta b & \gamma b\\ \alpha c & \beta c & \gamma c\end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}^2$ Отг. $\begin{pmatrix}7 & 4 & 4\\ 9 & 4 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$ Отг. $\begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ Отг. $\begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Намерете обратните матрици (ако съществуват) на матриците от втори ред .

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; в) $C = \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$; г) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

където за $|A|$ и адюнгираните количества намираме

$|A| = 1$, $A_{11} = 1$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = 4$.

Следователно $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Отг. б) $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{11}{3} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; г) няма обратна.

11.Намерете обратните матрици (ако съществуват) на матриците от трети ред .

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -8 \end{pmatrix}$.

Решение : а) Пресмятаме $|A| = -3 \neq 0$. Следователно дадената матрица има обратна . Намираме:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -23;$ $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 6;$ $A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4;$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2;$ $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0;$ $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1;$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 8;$ $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -3;$ $A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$

Тогава

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-23 & 6 & 4\\ 2 & 0 & -1\\ 8 & -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{23}{3} & -2 & -\frac{4}{3}\\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ -\frac{8}{3} & 1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Отг. б) $B^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0\\ \frac{8}{5} & \frac{3}{5} & -2\end{pmatrix}$; в) $C^{-1}=\begin{pmatrix}9 & -7 & 2\\ -13 & 11 & -3\\ 5 & -4 & 1\end{pmatrix}$.

12. Да се намери неизвестната матрица X от уравнението:

а) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4\\ 11\\ 11\end{pmatrix}$;

в) $X.\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$; г) $X=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -1\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix}.X\begin{pmatrix}9 & 7 & 6\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 18 & 12 & 9\\ 23 & 15 & 11\end{pmatrix}$.

Отг.

а) $X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$; в) $X=\begin{pmatrix}-7/2 & 1/2 & 5/2\\ -7/2 & -1/2 & 5/2\end{pmatrix}$;

г) $X=$ (-5 6 -7) ; д) $X=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

13. Докажете , че всяка матрица от втори ред $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, удовлетворява уравнението

$$x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0 .$$

14. Докажете , че ако $AB = BA$, то $A^{-1}B = B^{-1}A$.

Упътване: Достатъчно е да умножите равенството $AB = BA$ от ляво и от дясно с A^{-1}.

15. Намерете всички реални матрици от втори ред , кубовете на които са равни на единичната матрица .

Решение: Нека $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ако $A^3 = E$, то $|A|^3 = E \Rightarrow |A| = E$. Тогава $A^{-1} = A^2$

Следователно или $A = E$, или $a + d = -1$, $ad - bc = 1$.

16. Изчислете $\varphi(A)$, където $\varphi(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. отг. $\varphi(A)=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

17. Да се намери рангът на матрицата $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение: Умножаваме елементите на първият ред с (-2) и ги събираме със съответните елементи на третия ред

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} .(-2) \\ + \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-0 = 1 \neq 0.$ Следователно $r(A) = 2$.

18. Пресметнете ранга на матриците:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 4 & -3 & -1 \\ 5 & -1 & 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}$; б) $B=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Отг. а) 2; б) 3; в) 3.

СИСТЕМИ ЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ

Общ вид

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

където a_{ij} (i = 1,2,…m; j = 1,2,…n) и b_i са дадени числа, а x_j - неизвестни, се нарича **система линейни уравнения с n неизвестни** . В случая, когато $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, системата се нарича **хомогенна** .

Матриците

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

се наричат съответно **основна и разширена** матрица на системата .
Всяка наредена n – торка от реални числа (α_1 , α_2 , …,α_n), се нарича **решение на системата** , ако удовлетворява всяко от уравненията и. Ако системата има поне едно решение , тя се нарича **сьвместима** , а в противен случай – **несьвместима** . Една сьвместима система се нарича **определена** , ако има точно едно решение и **неопределена** , ако решенията и са повече от
едно.

Метод на Крамер.

В случая , когато броят на уравненията е равен на броят на неизвестните , т.е. m = n , то основната матрица A на системата е квадратна от n- ти ред . Такава система е определена , когато $detA = D \neq 0$. Единственото решение се дава с формулите на Крамер :

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D} =,....., = x_n = \frac{D_n}{D},$$

kьдето $D_к$ (к = 1,2,…,n) е детерминантата получена от D чрез замяна на неиния к-ти стьлб сьс стьлба на свободните членове. В случай на хомогенна система получаваме $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.Тьй като $detA = D \neq 0$, то обратната матрица A^{-1} на основната матрица А съществува и решението на системата може да се намери и чрез решаване на матричното уравнение

$$X = A^{-1}B ,$$

където X е матрицата – стълб на неизвестните,а B е матрицата – стълб на свободните

членове .

Две системи линейни уравнения се наричат **еквивалентни** , когато множествата от решенията им съвпадат .

Елементарни преобразувания на система линейни уравнения

1) Смяна местата на две уравнения.
2) Умножаване (делене) на двете страни на едно уравнение с число различно от нула.
3) Прибавяне към двете страни на едно уравнение съответните страни на друго , умножени с произволно число.

Чрез елементарни преобразувания всяка система линейни уравнения се превежда в еквивалентна на нея система.

Метод на Гаус

Този метод се състои в привеждане на дадената система , чрез елементарни преобразувания в еквивалентна на нея система от вида

$$\left|\begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1k}x_k + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2k}x_k + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad c_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = d_k \\ \qquad\qquad\qquad 0.\ x_n = d_{k+1} \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0.\ x_n = d_m \end{array}\right.$$

където коефициентите $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{kk}$ са различни от нула .

Възможни са следните случаи :
1) Ако поне един от свободните членове $d_{k+1}, d_{k+2},\ldots,d_m$ е различен от нула, то системата е несъвместима .
2) Свободните членове $d_{k+1} = d_{k+2},= ,\ldots, = d_m = 0$, тогава след остраняване на нулевите уравнения , за получената система е възможно $k = n$ или $k<n$.
Тогава:

а) Ако $k = n$ (системата има триъгълна форма) , от последното уравнение оределяме

$$x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}.$$

като заместим x_n в предпоследното уравнение , намираме стойността на x_{n-1} и така последователно, чрез заместване на намерените неизвестни определяме всички неизвестни x_1 , x_2 ,..., x_n . Получаваме само едно решение на системата , т.е. тя е определена .

б) Ако $k<n$ (системата има трапецовидна форма) , то избираме неизвестните x_{k+1} , x_{k+2} ,..., x_n за параметри и изразяваме последователно неизвестните x_k , x_{k-1} ,..., x_1 чрез тях. Полученото решение се нарича **общо решение** на системата. Всяко **частно решение** се получава от общото решение при задаване на произволни стойности на параметрите . Следователно системата има безброй много решения , т.е. тя е неоределена.

Неизвестните x_1 , x_2 ,..., $x_к$, спрямо които е решена системата се наричат **базисни неизвестни** , а тези които са избрани за параметри – **свободни неизвестни**. Решението на системата , което се получава като на всички свободни неизвестни дадем стойност нула , се нарича **базисно решение** на системата .

ЗАДАЧИ:

Да се решат чрез метода на Крамер следните системи:

1. $\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -1 \end{array} \right.$.

2. $\left| \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 = 9 \\ 5x_1 + x_2 = 4 \end{array} \right.$.

3. $\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{array} \right.$

4. $\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -8 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -8 \end{array} \right.$.

5. $\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -6 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{array} \right.$.

6. $\left| \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6 \end{array} \right.$.

7. $\left| \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{array} \right.$.

8. $\left| \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{array} \right.$.

Решение: 3. Пресмятаме детерминантата на системата

$$|A| = D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 ,$$

следователно системата е определена.

Образуваме детерминантите D_1 , D_2 , D_3 и намираме съответно техните стойности :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 8; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 .$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{4} = 1; x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{8}{4} = 2; x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{12}{4} = 3.$$

Прилагаме формулите на Крамер и получаваме :

Отг. 1. $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; 2. $x_1 = 0$; $x_2 = 3$;
4. $x_1 = -2$; $x_2 = 2$; $x_3 = -3$; 5. $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$;
6. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; 7. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$;
8. $x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$;

Да се решат чрез метода на Гаус следните системи:

9. $\left| \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 6 \end{array} \right.$;

10. $\left| \begin{array}{l} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -3 \\ 7x_1 - 15x_2 + 11x_3 - 4x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \end{array} \right.$;

11. $\left| \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -7 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 = -7 \end{array} \right.$;

12. $\left| \begin{array}{l} 3x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 26 \\ 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 15x_4 = -5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 18 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{array} \right.$;

13. $\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 6 \end{array} \right.$;

14. $\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 4 \end{array} \right.$;

15. $\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1 \end{array} \right.$;

16. $\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 14 \\ 4x_2 + 7x_4 = 15 \end{array} \right.$;

17. $\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 \end{array} \right.$;

18. $\left| \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3 \end{array} \right.$;

Отг. **9**. $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$, **10**. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = -2$; **11**. $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 0$; $x_4 = -2$; **12**. $x_1 = p + 7$; $x_2 = p - 1$; $x_3 = -4p - 2$; $x_4 = p$; $p \in R$; **13**. системата е несъвместима ; **14**. $x_1 = 1$; $x_2 = p$; $x_3 = p$; $x_4 = 0$; $p \in R$; **15**. $x_1 = 1{,}5 + 2p$; $x_2 = -0{,}5$; $x_3 = p$; $p \in R$; **16**. $x_1 = 2$; $x_2 = 2$; $x_3 = 0$; $x_4 = 1$; **17**. $x_1 = p$; $x_2 = 3 - 2p$; $x_3 = p$; **18.** $x_1 = p$; $x_2 = q$; $x_3 = 3 - 3p - 2q$; $x_4 = 6p + q - 6$.

Решения : 9. Записваме разширената матрица на системата след размяна на местата на първото и второто уравнения и чрез елементарни преобразувания я превеждаме в трапецовидна форма.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & -3 & 0 \\ 3 & 7 & -7 & 6 \end{array} \right) .(-2)\ .(-4)\ .(-3) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -9 \\ 0 & 3 & -19 & -16 \\ 0 & 13 & -19 & -6 \end{array} \right) (-3)\ .(-13)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 98 & 98 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ :8 \\ :98 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) .(-1) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Последната система е разширена матрица на следната система :

$$\left|\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ \quad\;\; x_2 - 9x_3 = -8 \\ \qquad\quad\; x_3 = 1 \end{array}\right.$$

Нейното решение $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$ е решение на дадената система.

12. Записваме разширената матрица на системата след размяна на местата на първи и четвърти ред и чрез елементарни преобразувания получаваме :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 6 & 15 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 6 & 18 \\ 3 & -3 & -1 & -4 & 26 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2)\ (-3) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow\text{------} \\ \leftarrow\text{------} + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 13 & -11 \\ 0 & -7 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -9 & -4 & -7 & 17 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2,\ 3 \\ \leftarrow \\ \leftarrow\text{--} + \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 13 & -11 \\ 0 & -1 & 7 & 29 & -13 \\ 0 & 0 & 8 & 32 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ :8 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 29 & -13 \\ 0 & 3 & 4 & 13 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ .3 \\ \leftarrow + \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 29 & -13 \\ 0 & 0 & 25 & 100 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :25 \\ \leftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 29 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Последният ред на дадената матрица отговаря на уравнението

$$0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 = 0 ,$$

което можем да отстраним от системата. Тогава получяваме следната система :

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ \quad\; -x_2 + 7x_3 + 29x_4 = -13 \\ \qquad\qquad x_3 + 4x_4 = -2 \end{array}\right. ,$$

която е неопределена , затова избираме x_4 за параметър и от последното уравнение изразяваме $x_3 = -2 - 4x_4$, което заместваме в предходното уравнение и намираме $x_2 = x_4 - 1$. Така получените x_3 и x_2 заместваме в първото уравнение и определяме $x_1 = x_4 + 7$. Решението на системата може да се запише във вида :

$x_1 = p + 7$; $x_2 = p - 1$; $x_3 = -4p - 2$; $x_4 = p$; $p \in R$.

Да се решат хомогенните системи

19. $\left|\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{array}\right.$;

20. $\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{array}\right.$;

21. $\left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \; ; \end{array} \right.$ 22. $\left| \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0 \; ; \end{array} \right.$

Решение: 19. Преобразуваме основната матрица на системата, тъй като нулевите свободни членове ще останат нулеви при елементарните преобразувания . Получаваме

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix} .2 \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Получената матрица (без последният ред) е основна матрица на хомогенната система :

$$\left| \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \; , \end{array} \right.$$

която е еквивалентна на дадената . Изразяваме x_3 и x_4 чрез x_1 и x_2 и получаваме общото решение на системата :

$x_1 = p$; $x_2 = q$; $x_3 = -3p - 2q$; $x_4 = 6p + q$; $p, q \in R$.

Отг. 20. $x_1 = 1/3p - q$; $x_2 = -4/3p - q$; $x_3 = p$; $x_4 = q$; $p, q \in R$;

21.системата има само нулево решение: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$;

22. $x_1 = 11p$; $x_2 = p$; $x_3 = -7p$; $p \in R$.

23. Да се намери базисно решение на системата :

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ x_2 + 3x_4 = 13 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 15 \; ; \end{array} \right.$$

Решение : Намираме следното решение на системата :

$x_1 = 2p + 4$, $x_2 = -3p + 13$; $x_3 = p - 2$, $x_4 = p$, $p \in R$.

Тогава базисно решение се получава при $p = 0$ и то е :

$x_1 = 4$, $x_2 = 13$; $x_3 = -2$, $x_4 = 0$.

(Базисното решение съществено зависи от избора на параметрите при определяне на общото решение.)

24. Дадена е системата :

$$\left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 6x_1 - x_2 - ax_3 = 0 \; ; \end{array} \right.$$

а) За кои стойности на параметъра а , системата има ненулево решение .

б) Намерете тези решения.

Упътване : Системата има ненулево решение , когато детерминантата на системата е равна на нула.

Отг. а) $a = 1$;
б) $x_1 = 1/5p$, $x_2 = 11/5p$; $x_3 = p$.

25. По метода на Крамер решете системата :

$$\left|\begin{array}{l} (2 - a)x + 6y = 1 \\ 6x + (2 - a)y = 1 \end{array}\right. .$$

Отг. при $a \neq -4$ и $a \neq 8$, системата е определена ;
$x = -1/(a-8)$; $y = -1/(a-8)$;
при $a = -4$, системата е неопределена ; $x = p$; $y = -p$;
при $a = 8$, системата е несъвместима .

Определете параметъра λ така , че системите да имат единствено решение и намерете това решение.

26. $\left|\begin{array}{l} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{array}\right.$.

27. $\left|\begin{array}{l} 2x + y + z = 4 \\ x + \lambda y + z = 3 \\ x + 2\lambda y + z = 4 \end{array}\right.$.

Отг. 26. $\lambda \neq -2$ и $\lambda \neq 1$ $x = -(\lambda+1)/(\lambda+2)$; $y = 1/(\lambda+2)$;

$$x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, y = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, z = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

$z = (\lambda + 1)^2/(\lambda + 2)$.

27. $\lambda \neq 0$; $x = (2\lambda-1)/\lambda$; $y = 1/\lambda$; $z = 1/\lambda$.

28. Системата $\left|\begin{array}{l} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{array}\right.$

има единствено решение . Докажете ,че $abc \neq 0$ и намерете това решение.
Отг.

$$x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}; y = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}; z = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

29. За кои стойности на параметъра a системата има не нулево решение?

$$\left|\begin{array}{l} (a+4)x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + (2a+9)x_3 = 0 \end{array}\right. ;$$

Отг. $a = -4$; $a = -3$.

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

I. ВЕКТОРИ

О1. *Свободен вектор*

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$$

се нарича множеството от всички насочени отсечки равни на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$, която се нарича негов представител. Дължина на вектора $\vec{a}$ се нарича дължината на кой да е негов преставител .

Ако относно декартова координатна система Oxy в равнината са дадени точките A (x_1, y_1) и B (x_2, y_2) , то векторът $\overrightarrow{AB}$ ще има координати:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1).$$

Ако относно декартова коордиматна система Oxyz в пространството са дадени точките: A (x_1, y_1, z_1) и B (x_2, y_2, z_2), тогава:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1).$$

Нека M(x,y,z) е вътрешна точка за отсечката AB и AM:MB = λ, то M ще има координати :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

Ако M(x,y,z) е среда на отсечката AB, то M ще има координати:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Нека относно Oxyz са дадени векторите:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3); \vec{b} = (b_1, b_2, b_3); \vec{c} = (c_1, c_2, c_3).$$

О2. *Скаларно произведение* на два вектора е числото равно на произведението от дължините на векторите и косинуса на ъгъла заключен между тях:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\ \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Ако векторите са зададени с координатите си, то

$$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

$$\cos\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},$$

$$\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

О3. *Векторното произведение* на два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е векторът $\vec{c}$ с координати

$$\vec{c} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

За векторното произведение са изпълнени свойствата :

$$1)|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi;$$

$$2)\vec{c}\perp\vec{a}; \vec{c}\perp\vec{b},$$

$$3)\vec{a}x\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b}.$$

kъдето е φ е ъгълът между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Нека A, B и C са точки в пространството, които не лежат на една права. Тогава поради свойство 1), лицето на триъгълника ABC е

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

О4. *Смесено произведение* на три вектора

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$

се нарича числото

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}x\vec{b})\vec{c}.$$

За смесеното произведение са изпълнени свойствата:

$$1)\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}x\vec{c});$$

$$2)\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0,$$

точно когато векторите са линейно зависими, т.е. лежат в една равнина.

Ако спрямо Oxyz са дадени векторите:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3); \vec{b} = (b_1, b_2, b_3); \vec{c} = (c_1, c_2, c_3).$$

то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Нека ABCД е триъгълна пирамида. Тогава обемът на пирамидата е

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}\right|.$$

ЗАДАЧИ :

1. Да се намерят координатите на вектора $\overrightarrow{AB}$, ако :
а) A (1, -2) , B (4 , -1) ;
б) A (-2, 4, 5), B (3, -4, -8) .
Решение : Координатите на вектора $\overrightarrow{AB}$ намираме като от координатите на точката B извадим съответните координати на точката A . Тогава получаваме за а) $\overrightarrow{AB}$ = (3,1) и за б) $\overrightarrow{AB}$ =(5,-8,-13).

2. Да се намерят координатите на върха C на успоредника $ABCD$, ако A (2, -3, 4), B(3,2,-2) и D(5, -4 ,11) .
Отг. C(6,1,5).

3. Дадени са векторите: $\vec{a}(2;1)$ $\vec{b}(1;2)$. Да се пресметне: $\vec{a}+\vec{b};\vec{a}-\vec{b};\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Отг. $\vec{a}+\vec{b}=(3,3);\vec{a}-\vec{b}=(1,-1);\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{4}{5}$.

4. Дадени са векторите $\vec{a}$ (4,2,-4) и $\vec{b}$ (-2,9,6). Да се намерят дължините на векторите, скаларното им произведение и косинуса на ъгъла заключен между тях.

$$|\vec{a}|=\sqrt{4^2+2^2+(-4)^2}=6;|\vec{b}|=11,$$
$$\vec{a}\vec{b}=4(-2)+2.9+(-4)6=-14,$$
$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{-14}{6.11}=\frac{-7}{33}.$$

Решение:

5. Докажете, че векторите $\vec{a}$(2,3,0) и $\vec{b}$ (-3,2,5) са ортогонални.
Решение: $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ = 2.(-3) + 3.2 + 0.5 = 0. Следователно векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ортогонални.

6. За коя стойност на α векторите $\vec{a}$ (2,α,1) и $\vec{b}$ (-3,1,2) са ортогонални.
Решение: Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ортогонални когато $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ = 0.
$\vec{a}\,.\,\vec{b}$ = 2.(-3) + α.1 + 1.2 = 0 $\Rightarrow$ α = 4.

7. Намерете координатите на векторното произведение на векторите $\vec{a}$ (5,-1,-3) и $\vec{b}$ (7,-2,3).
Решение:

$$\vec{a}x\vec{b}=((-1).3-(-2)(-3),-(5.3-7.(-3)),5.(-2)-7.(-1))$$
$$\vec{a}x\vec{b}=(-9,-36,-3).$$

8. За четириъгълника ABCD са известни точките A(1,-2, 2), B(1, 4, 0), C(-4, 1, 1) и D(-5,-5, 3).
а) Докажете, че $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$;
б) Докажете, че точките A, B, C и D лежат в една равнина;
в) Намерете лицето на четириъгълника $ABCD$.

9. Дадени са точките A(1,1,1), B(-8.-1,1) и C(13,3,2) . Да се намери лицето на триъгълника ABC.
Решение: Съгласно условието

$$\overrightarrow{AB}=(-9,-2,0);\overrightarrow{AC}=(12,2,1).$$

Тогава
откъдето намираме $S_{ABC} = 11/2$.

$$\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC} = (-2,9,6)$$

10. За триъгълника ABC са известни точките $A(2, 2, 2)$, $B(3, 3, 2)$ и $C(3, 2, 3)$. Да се намерят:

а) лицето на триъгълника;
б) мярката на вътрешния ъгълпри върха B.
в) дължината на височината през върха C.

Отг. а) $S = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, б) $\angle B = 60^o$, в) $h_c = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

11. За триъгълника ABC са известни точките A (2, 3, 4), B (-1, 5, 4) и C (8, 7, 4). Да се намерят дължините на височините му.

12. Дадени са векторите

$$\vec{a} = (4,-6,5), \vec{b} = (2,3,-7), \vec{c}(8,-9,1).$$

Да се намери смесеното произведение на тези вектори.
Решение: Пресмятаме детерминантата образувана от координатите на дадените вектори

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 2 & 3 & -7 \\ 8 & -9 & 1 \end{vmatrix} = -102$$

Тогава $\vec{a}.\vec{b}.\vec{c} = -102$.

13. Намерете смесеното произведение на векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, ако
а) A(3,-1,1) , B(8,-4,-1) , C(3,-1,0) , Д(10,-12,-1) ;
б) A(2,-4,-2) , B(-1,-1,-4) , C(1,-2,-5) , Д(-11,-1,-15) .
Отг. а) –34 : б) 83 .

14. Намерете обема на паралелепипеда, построен върху векторите

$$\vec{a} = (2,-1,3), \vec{b} = (1,4,2), \vec{c} = (2,-2,2)$$

и намерете дължината на височината към стената определена от векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
Отг. V= 8 ; h = $4\sqrt{6}/3$.

15. Дадени са точките : A(-3.0.-1), B(0,-1,-4), C(-1,0,-6) и D(10,17,0). Да се намери обема на пирамидата ABCD.

Отг. V = 110/3 .

16. За тетраедъра ABCD са известни точките A(3, 4, 2), B (5, 2,-1), C (7, 4, 8) и D (-4, -3, 9). Да се намерят:
а) обема на тетраедъра;
б) дължината на височината от врън D.
Отг. V = 154/3 ; h = 77/ $\sqrt{181}$. .

17. Намерете y така, че разстоянието между точките A (1, y, 4) и B(-1, 3, 4) да е 2.
Отг. $y_1 = -1$, $y_2 = 7$.

18. Докажете, че триъгълник с върхове в точките A(4,0), B(2,1) и C(5,7) е правоъгълен.
Упътване: Намерете дължините на триъгълника и използвайте питагоровата теорема.

19. Намерете лицето на триъгълника ABC и височината към страната BC, ако A(11,25), B(2,3) и C(5,7).

Отг. S = 15, h = 6.

20. Да се докаже, че точките A, B, C и D лежат в една равнина, ако:

а) A(9,-3,2), B(1,-2,0), C(-7,13,-14), D(9,4,-4);

б) A(-2,-5,5), B(-1,-3,2), C(7,-5,-4), D(7.-11,2);

в) A(-3,3,-1), B(-2,2,3), C(13,11,7), D(4,8,-1).

21. Дадени са точките M(1,0,-4) и N(1,-2,7). Да се намерят координатите на симетричната на :

а) M, относно N; б) N, относно M.

Отг. а) $M_1(1,-4,18)$; б) $N_1(1,2,-15)$.

22.Определете координатите на точка, симетрична на точката A(-2, 1) относно:

а) оста Ox;

б)оста Oy;

в) координатното начало;

г) ъглополовящата на първи и трети квадрант.

Отг. а) (-2,-1); б) (2, 1); в) (2, -1); г) (1, -2)

23. Дадени са върховете на триъгълника ABC. Да се намерят координатите на средите на този триъгълник и медицентъра му, ако:

а) A(-3,2,-2), B(-9,12,-6) и C(-7,4,-8);

б) A(-9,2,8), B(-15,5,2) и C(-8,0,6);

в) A(5,-1,-6), B(17,4,-1) и C(9,17,-2).

Отг. а) $A_1(-8,8,-7)$, $B_1(-5,3,-5)$, $C_1(-6,7,-4)$ и M(-19/3, 6, -16/3);

б) $A_1(-23/2, 5/2, 4)$, $B_1(-17/2, 1,7)$, $C_1(-12, 7/2, 5)$ и M(-32/3, 7/3, 16/3);

в) $A_1(13, 21/2, 3/2)$, $B_1(7, 8,-4)$, $C_1(11, 3/2,-7/2)$ и M(31/3, 20/3, -3).

24. Ако A(5,-1,4) и B(-1,8.-7) са два съседни върха на успоредника ABCD, а F(3,-2,-5) е пресечна точка на диагоналите му, да се намерят координатите на върховете C и D.

Отг. C(1,-3,-14), D(7.-12,-3).

25. Намерете дължините на векторите:

а) $3\vec{i} - 4\vec{j}$; б) $\vec{b} + 2\vec{c}$, ако $\vec{b} = (-2,0)$ и $\vec{c} = (1,1)$.

Отг. а) 5; б) 2.

26. Намерете параметъра p така, че вектора $\vec{a}(3, p)$ да има дължина 5 единици.

Отг. p = 14.

II. П Р А В И   В   Р А В Н И Н А Т А

1. *Общо уравнение* на права:

$$g:\ Ax + By + C = 0,$$

където поне едно от числата A и B е различно от нула. Векторът $\vec{p}(-B,A)$ е успореден на правата g, а векторът $\vec{q}(A,B)$ е перпендикулярен на правата.

2. *Декартово уравнение* на права:

$$g:\ y = kx + n\ ,\quad k = tg\,\varphi,\ ,\ \varphi = \angle(Ox^{+}, g)$$

Числото k се нарича ъглов коефициент на правата.

3. *Уравнение на права през точка $M_o\,(x_o\,, y_o)$ и ъглов коефициент k* :

$$g:\ \ y - y_o = k\,(x - x_o)$$

4. *Уравнение на права през две точки $A\,(x_1,y_1)$* и *$B(x_2,y_2)$* :

$$g : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \text{ или } g : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. *Отрезово уравнение* :

$$g\ :\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\ .$$

където числата a и b са алгебричните мерки на отсечките, които правата отсича от координатните оси.

6. *Уравнение на права определена от точка $M_0(x_0,y_0\ )$ и успореден вектор* $\vec{p}(a,b)$.

$$g : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b};$$

7. *Нормално уравнение* на права .

Ако правата g има общо уравнение $g\!: Ax + By + C = 0$, то нормалното и уравнение е:

$$g : \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0;$$

8. *Разстояние от точка $M(x_0,y_0)$ до права $g\!: Ax + By + C = 0$.*

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

T1. В равнината са възможни следните взаимни положения на две прави l и g, зададени с общите си уравнения
l: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ g: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

а) сливат се точно когато $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$;

б) успоредни са точно когато $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$;

в) пресичат се точно когато $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

като координатите (x_0,y_0) на пресечната точка $M = l \cap g$ са решение на системата от двете уравнения на правите. В този случай ъгълът φ определен от двете прави, се намира се намира чрез формулите:

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}};\; tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2},$$

където правите са зададени чрез декартовите си уравнения, т.е.
l: $y = k_1x + n_1$, g: $y = k_2x + n_2$.

T2. Две прави са перпендикулярни точно когато:

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0; \qquad k_1k_2 = -1 .$$

З А Д А Ч И

1. Намерете общото уравнение на права g, която минава през точката M (1,-1) и е успоредна на вектора $\vec{p}\,(2, 3)$.

Решение: Като използваме 6) , намираме уравнението на правата

$$g : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3},$$

след преобразуването на което получаваме общото уравнение на правата, т.е. g: $3x - 2y - 5 = 0$.

2. Дадени са точките A (2 -3) и B (3, 5) . Намерете общото уравнение на правата AB.

Решение: В 4) заместваме дадените координати на точките A и B и получаваме :

$$AB : \frac{x-2}{3-2} = \frac{y+3}{5+3},$$

откъдето намираме общото уравнение AB: $8x - y - 19 = 0$.

3. Намерете декартовото уравнение на правата AB, ако:

а) A (-1,-2) , B(4,1) ; б) A (-3, 0) , B(2,4) .

Отг. а) $y = 3/5x - 7/5$; б) $y = 4/5x + 12/5$.

4. Намерете общото уравнение на права g, която минава през точката $A(3,2)$ и средата H на отсечката BC, ако $B(2,2)$ и $C(2,0)$.
Упътване: Точката H има координати

$$H = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (2,1).$$

Отг. $g\colon x - y - 1 = 0$.

5. Намерете декартовото уравнение на права g, която минава през точката $M(-1,-3)$ и сключва с положителната посока на оста Ox ъгъл от 45° .
Решение: От 2) за дадената права имаме $k = \operatorname{tg} 45^{\circ} = 1$. Тогава $g\colon y + 3 = 1(x + 1)$ т. е. $g\colon y = x - 2$.

6.Точките A(2,-1), B(4,2) и C(5,1) са върхове на триъгълник. Намерете дължините на страните му и докажете, че е равнобедрен.
Отг. AB = AC = $\sqrt{13}$.

7. Дадена е отсечката AB: A(-2,2) и B(6,4). Намерете средата M на AB, дължината на AB и уравнението на AB.

Решение: $M = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (2,3)$;

$$|AB| = \sqrt{(6-(-2))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{68};$$

$$AB: \frac{x-(-2)}{6-(-2)} = \frac{y-2}{4-2}$$

$$AB: \frac{x+2}{8} = \frac{y-2}{2}$$

$$AB: 2x + 4 = 8y - 16$$

$$AB: 2x - 8y + 20 = 0 \quad |:2$$

$$AB: x - 4y + 10 = 0$$

Отг. M(2,3); $|AB| = \sqrt{68}$; $AB\colon x - 4y + 10 = 0$.

8. Да се напише уравнението на права минаваща през точка A(2,1) и през пресечната точка B на правите с уравнения: 3x - 2y +1 =0 и x – y + 1 = 0.
Решение: Координатите на точка B са решение на системата : $\left|\begin{array}{l} 3x - 2y + 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{array}\right.$,

т.е. B(1,2). За уравнението на AB намираме:

$$AB: \frac{x-2}{1-2} = \frac{y-1}{2-1} \qquad AB: x + y - 3 = 0$$

9. Триъгълник има връх с координати (-4, -5) и височина принадлежаща на правата с уравнение: 5x +3y – 4 = 0. Да се намери уравнението на една от страните на триъгълника.
Решение: Декартовото уравнение на дадената права е: $y = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$, откъдето определяме ъгловия коефициент на правата $k = -\frac{5}{3}$. За ъгловия коефициент на правата перпендикулярна на височината имаме $k_1 = -\frac{1}{k} = \frac{3}{5}$. Заместваме във формула 3) и получаваме

$$y-(-5)=\frac{3}{5}(x-(-4)) \Leftrightarrow y+5=\frac{3}{5}(x+4) \Leftrightarrow 3x-5y-13=0$$

Отг. 3x – 5y – 13 = 0.

10. За правоъгълника АВСД са известни уравненията на две от страните АВ: 2x + y - 1 =0 и ВС: x -2y + 7 =0 и връх Д(6,-1). Намерете:

а/ уравненията на другите две страни АД и ДС ;

б/ дължината на диагонала ВД.

Решение: Правите АД и ДС са перпендикулярни съответно на АВ и ВС,следователно те са колинеарни съответно на векторите $\vec{n}_{AB}$ (2,1) и $\vec{n}_{BC}$ (1,-2) . Уравненията на тези прави намираме като използваме б), т.е.

АД: x - 2y -8 =0 и ДС: 2x + y - 11 = 0 .

б/ За да намерим дължината на ВД е необходимо да намерим координатите на точка В, които са решение на системата :

2x + y = 1 , x - 2y = 7 , т.е. B(-1,3). Тогава $|BD| = \sqrt{65}$.

11. Даден е триъгълникът АВС: А(-6,2); В(2,-2) и С(2,4) . Намерете уравнението на медианата през върха А и лицето на триъгълника.

Отг. m_a: x + 8y - 10 = 0 ; S = 24 .

12. Намерете уравнение на права, която минава през т.А (2 ; 3) и е перпендикулярна на правата y = 2x + 1.

Отг. x + 2y - 8 = 0.

13. Намерете уравнението на права, която минава през т.М (1 ; 2) и е успоредна на 2x - 3y + 1 = 0.

Отг. 2x - 3y + 4 = 0.

14. Докажете, че правите 3x + 2y - 5 = 0 и 4x - 6y + 14 = 0 са взаимно перпендикулярни.

15. Намерете уравнението на права, минаваща през пресечената точка на правите x + y -1 = 0, x - y + 2 = 0 и е перпендикулярна на правата 10x - 2y + 15 = 0.

Отг. x + 5y - 7 = 0.

16. Да се изчислят ъглите на триъгълник, страните на който имат уравнения 18x + 6y - 17 = 0, 14x - 7y + 15 = 0 и 5x + 10y - 9 = 0.

Отг. 90^0, 45^0, 45^0.

17. Даден е триъгълник АВС с върхове А (6 ; 4), В (-3 ; 5) и С (-2 ; -6). Намерете уравнение на права, минаваща през върха А и успоредна на медианата през върха В.

Отг. 6x + 5y - 56 = 0.

18. Дадени са точките А (1 ; 2), В (3 ; 1) и М (0 ; 5). Намерете уравненията на страните на правоъгълника АВСД и дължината на диагонала му, ако точка М е от правата СД.

Отг . АВ: x + 2y - 5 = 0, ВС: 2x - y - 5 = 0, СД: x + 2y - 10 = 0, АД: 2x - y = 0, ВД = 10.

19. В триъгълника АВС са известни точките А (-6 ; 2), В (2 ;-2) и пресечената точка на височината му Н (1 ; 2). Намерете лицето на триъгълника.

Отг. S = 24.

20. За триъгълника АВС са известни уравненията на две от страните АВ: x + y - 4 = 0 и ВС: 2x - y - 5 = 0 и ортоцентъра Н(0;0). Да се намерят:

а)координатите на върховете А, В и С;

б) лицето на триъгълника АВС.

Отг. а) А (8 ;-4), В (3 ; 1), С (5 ; 5); б) S = 15.

21. За триъгълника АВС са известни уравнението на страната

АВ: 4x + y - 12 = 0 и уравненията на височините му, съответно през върховете А и В , h_a : 2x + 2y - 9 = 0 и h_b : 5x - 4y - 15 = 0. Да се намерят:

а) координатите на върховете А, В и С;

б) разстоянието от точка В до ортоцентъра на триъгълника.

Отг. А(5/2,2), В(3,0), С(35/9,8/9); б) $|BH| = \sqrt{41}/6$.

22. За ромба АВСД са известни уравненията на страната АВ: x + 3y - 8 = 0 и диагонала АС: 2x + y + 4 = 0, а точката Р (-9 ;-1) лежи на правата СД. Да се намерят:

а) координатите на върховете А, В, С и Д;

б) лицето на ромба.

Отг. а) А (-4 ; 4), В (2 ; 2), С (0 ;-4), Д (-6 ;-2); б) S = 40.

23. За правоъгълника АВСД са известни: уравнението на страната АВ: 2x + 3y + 1 = 0, пресечената точка на диагоналите М (5 ; 7) и точка Р (-2 ; 1), която лежи на правата АД. Да се намерят:

а) координатите на върховете А, В, С и Д;

б) лицето на правоъгълника.

Отг. а) А(-2,1), В(28/13,-23/13), С(12,13), Д(102/13,205/13);

б) S = 1152.

24. За ромба АВСД са дадени уравненията на страните АВ: x + 3y + 12 = 0, СД: x + 3y - 8 = 0 и уравнението на диагонала АС: x - 2y + 2 = 0. Да се намерят:

а) координатите на върховете А, В, С и Д;

б) лицето на ромба.

Отг. а) А (-6 ;-2), В (0 ;-4), С (2 ; 2), Д (-4 ; 4); б) S = 40.

25. Дадени са един от върховете на триъгълник АВС и уравненията на височина и медиана, минаващи през един и същ връх. Да се намерят уравненията на страните на този триъглник, ако:

а) А(-2,9), h: 6x + 13y + 29 = 0 и m: 3x + 10y – 10 = 0;

б) В(-1,-9), h: x + y – 12 = 0 и m: 5x – 9y –74 = 0;

в) С(1,5), h: x – 2y + 20 = 0 и m: x = 0.

Отг. а) АВ: x – 9y + 83 = 0, АС: 13x – 6y + 80 = 0, ВС: 11x + 12y + 136 = 0;

б) АВ: x – y – 8 = 0, АС: 7x – 13y – 104 = 0, ВС: 4x – 7y – 59 = 0;

в) АВ: x – y + 10 = 0, АС: 5x + y – 10 = 0, ВС: 2x + y – 7 = 0.

26. Дадени са един от върховете на триъгълник АВС и уравненията на височина и медиана, минаващи през различни връхове. Да се намерят уравненията на страните на този триъглник, ако:

а) А(3,1), h: 4x + 9y - 59 = 0 и m: y – 10 = 0;

б) В(7,9), h: 6x + 5y + 61 = 0 и m: 10x + 3y + 53 = 0;

в) С(10,-4), h: 3x + y - 18 = 0 и m: x - y - 6 = 0.

Отг. а) АВ: 9x – 4y – 23 = 0, АС: 18x + 31y – 85 = 0, ВС: 9x + 35y - 413= 0;

б) АВ: 5x – 6y + 19 = 0, АС: 20x +21y+121 = 0, ВС: 10x+33y–367 = 0;

в) АВ: 7x – 3y – 10 = 0, АС: 5x + 3y – 38 = 0, ВС: x – 3y – 22 = 0.

27. Дадени са върховете на триъглник АВС. Да се намери уравнението на ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха:

а) А, ако А(0, -2), В(-10, 18) и С(-16, 6);

б) В, ако А(8,-1), В(2, 9) и С(-13, 0);

в) С, ако А(-7,-14), В(5, 0) и С(-3, 2).

Отг. а) l_A = x + y + 2 = 0, б) l_B = 4x - y + 1 = 0, в) l_C = 5x + 3y + 9 = 0.

28. Да се намерят координатите на точка А, ако ориентираните разстояния от нея до правите с уравнения 8x +15y + 20 = 0 и 3x – 4y + 23 = 0 са съответно -5 и 4.

Отг. А(-5,7).

III. ПРАВА И РАВНИНА В ПРОСТРАНСТВОТО

Равнина в пространството:

1) *Уравнение на равнина определена от точка* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *и два компланарни с равнината , но неколинеарни вектора* $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ *и* $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ *:*

$$\alpha: \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

2) *Уравнение на равнина определена от три точки:* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *,* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$\alpha: \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 .$$

3) *Уравнение на равнина определена от точка* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *и нормален вектор* $\vec{n}(A, B, C)$ *:*

$$\alpha: A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 .$$

4) *Отрезово уравнение* :

$$\alpha: \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$$

където числата *m, n* и *p* са алгебричните мерки на отсечките, които равнината отсича от координатните оси.

5) *Общо уравнение* на равнина:

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0,$$

където поне едно от числата *A, B* и *C* е различно от нула. Векторите $\vec{p}$ *(-B,A,0)* и $\vec{q}$ *(-C,0,A)* са компланарни с равнината, а векторът $\vec{n}(A, B, C)$ е перпендикулярен на равнината.

6) *Разстояние от точка* $M(x_0,y_0,z_0)$ *до равнината* $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

Права в пространството:

7) *Уравнение на права определена от точка* $M_0(x_0,y_0\ )$ *и успореден вектор* $\vec{q}$ *(a,b,c):*

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

или

$$x = x_o + \lambda a, \quad y = y_0 + \lambda b, \quad z = z_0 + \lambda c .$$

8) Уравнение на права през две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Взаимни положения на две равнини:

Възможни са следните взаимни положения на две равнини α и β, зададени с общите си уравнения

$$\alpha: A_1x + Bb_1y + C_1 z + D_1 = 0 \qquad \beta: A_2x + B_2y + C_2 z + D_2 = 0$$

а) сливат се точно когато

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2};$$

б) успоредни са точно когато

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$

в) перпендикулярни са точно когато

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

З А Д А Ч И:

1. Да се намери уравнение на равнина α, която минава през точките $A(1,-5,2)$, $B(4,0,1)$ и $C(2,1,-3)$, които не лежат на една права.

Решение: Като използваме 2) за уравнението на равнина минаваща през три точки получаваме

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\alpha: 19x - 14y - 13z + 63 = 0.$$

2. Да се намери уравнение на равнина α, която минава през точката $M_0(1,2,3)$ и успоредна на векторите $\vec{a}(1,-1,2)$ и $\vec{b}(4,-3,-1)$.

Решение: От формула 1) имаме:

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

Откъдето намираме

$$\alpha: 7x + 9y + z - 28 = 0$$

3. Да се намери уравнението на равнина α, която минава през точка $M_0(2,-1,5)$ и е перпендикулярна на равнините

$$\beta: 3x - 2y + z + 7 = 0 \quad \text{и} \quad \gamma: 5x - 4y + 3z + 1 = 0.$$

Решение: От условието, че търсената равнина α е перпендикулярна на равнините β и γ, следва че векторите $\vec{n}_\beta(3,-2,1)$ и $\vec{n}_\gamma(5,-4,3)$ са компланарни с нея. Използваме уравнение 1) и получаваме

$$\alpha : \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

или α: $x + 2y + z - 5 = 0$.

4. Да се намери уравнение на права g, която минава през точка $M_0(2,3,-1)$ и е успоредна на вектора $\vec{a}(1,-1,2)$.

Решение: Параметричните уравнения на правата g се задават с формулите

$$g : \begin{vmatrix} x = 2+\lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = -1+2\lambda \end{matrix} \quad ,$$

където λ е реален параметър. Тогава каноничните уравнения на правата g са

$$g : \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} .$$

5. Да се определи взаимното положение на равнините

а) $\alpha : 2x - y + z + 2 = 0$ и $\beta : x - 3y - 5z - 8 = 0$;

б) $\alpha : x + 2y - z + 3 = 0$ и $\beta : 2x + 4y - 2z - 5 = 0$;

в) $\alpha : x + 4y + 3z + 10 = 0$ и $\beta : 2x - y + z + 2 = 0$.

Решение: а) Разглеждаме нормалните вектори $\vec{n}_\alpha(2,-1,1)$ и $\vec{n}_\beta(1,-3,-5)$ на равнините α и β. Тъй като скаларното произведение

$$\vec{n}_\alpha \vec{n}_\beta = 2.1 + (-1).(-3) + 1.(-5) = 0,$$

То векторите $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$ и следователно равнините α и β са перпендикулярни.

Отг. б) α е успоредна на β; в) α пресича β.

6. Да се напише уравнението на равнина, която отсича от координатните оси равни отрези равни на 2.

Решение: От формула 4) имаме

$$\alpha : \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1,$$

откъдето получаваме α: $x + y + z - 2 = 0$.

7. Да се намери уравнение на равнина, минаваща през точка A и е перпендикулярна на вектора $\vec{a}$, ако:

а) $A(-10,2,-3)$ и $\vec{a}(4,-8,3)$;

б) $A(1,8,5)$ и $\vec{a}(2,4,9)$;

в) $A(-9,-5,-9)$ и $\vec{a}(7,-7,5)$.

Решение: а) От формула 3) имаме

$$\alpha : 4(x+10) - 8(y-2) + 3(z+3) = 0$$

откъдето получаваме α: $4x - 8y + 3z + 65 = 0$.

Отг. б) α: $2x + 4y + 9z - 79 = 0$; в) α: $7x - 7y + 5z + 73 = 0$.

8. Да се намери разстоянието от точка $M(7,0,4)$ до равнина $\alpha : x + y + z - 2 = 0$.

Решение: От формула 6) имаме

$$d=\frac{|7+0+4-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}\ .$$

9. Да се напишат параметричните уравнения на права , която е зададена като пресечница на две равнини с уравнения $x-y+1=0$ и $x-z-2=0$.
Решение: Решаваме системата от уравненията на дадените равнини. Общото решение на системата дава параметричните уравнения на правата.

$\begin{vmatrix} x - y = -1 \\ x - z = 2 \end{vmatrix}$ Решаваме системата по метода на Гаус : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$,

откъдето получаваме $\begin{vmatrix} x=2+\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=\lambda \end{vmatrix}$.

10. Да се намери прободът S на равнината $\alpha: \ x+y+z-2=0$ с правата g: $\begin{vmatrix} x=2+\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=\lambda \end{vmatrix}$.

Решение: Прободът на равнината α с правата g е общата точка на равнината и правата. Следователно параметричните уравнения на правата удовлетворяват уравнението на равнината, откъдето определяме параметъра.

$$(2+\lambda)+(3+\lambda)+\lambda-2=0$$
$$3+3\lambda=0$$
$$\lambda=-1$$

Координатите на пробода намираме като заместим намерената стойност на параметъра в параметричните уравнения на правата.
S(2+(-1), 3+(-1), -1) = (1,2,-1).

11. Да се напише нормалният вектор на равнината:
а) $\alpha: \ x+2y+z-5=0$; б) $\alpha: \ x+y+z-5=0$.
Отг. а) (1,2,1); б) (1,1,1).

12. Дадена е равнината $\alpha: \ 4x - y + 5z - 5 = 0$. Да се провери, кои от векторите $n_1(2,-1,-5)$; $n_2(4,-1,5)$, $n_3(8,-2,10)$ и $n_4(1,2,3)$ са перпендикулярни на равнината.
Отг. n_2 и n_4 .

13. Да се състави уравнение на равнина, която минава през две дадени точки и е успоредна на даден вектор:
а) $A(-3,7,-10)$, $B(2,-1,0)$ и $\vec{a}(3,-6,-7)$;
б) $A(3,-3,-3)$, $B(9,-11,-6)$ и $\vec{a}(7,10,-7)$.
Отг. а) $116x + 65y - 6z - 167 = 0$; б) $86x + 21y + 116z + 153 = 0$.

14. Да се състави уравнение на равнина, която минава през точка $A(-2,3,1)$ и отсича от координатните оси равни отрези.
Отг. $x+y+z-2=0$.

15. Да се намери уравнение на равнина α, минаваща през точка $A(3,1,4)$ и е перпендикулярна на вектора $\vec{a}(5,3,1)$. Да се намери разстоянието от точка $M(7,1,4)$ до равнина α.

Отг. $\alpha: \ 5x+3y+z-22=0$; $d=\dfrac{4\sqrt{35}}{7}$.

16. Да се състави уравнение на равнина, която минава през дадена точка H и е перпендикулярна на права, определена от точките K и M.

а) $H(2,-3,-1)$, $K(4,5,1)$ и $M(8,-12,7)$;

б) $H(-9,3,2)$, $K(5,-8,3)$ и $M(-14,6,2)$.

Отг. а) $4x - 17y + 6z - 53 = 0$; б) $19x - 14y + z + 211 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж.Димитрова, Г.Панайотова, Кр.Коларов ”Висша математика – първа част”(методическо ръководство), Печатна база Университет “Проф.д-р Асен Златаров”, Бургас, 2002.
2. Ж..Димитрова, Г.Панайотова, Кр.Коларов, М.Искрова, Ст.Георгиева, М.Вълкачовски, Ст.Павлов ”Висша математика – втора част”(методическо ръководство), Печатна база Университет “Проф.д-р Асен Златаров”, Бургас, 2005.
3. Ив.Стамова, Г.Стамов “Лекции по линейна алгебра и аналитична геометрия”, Издателство:Демократични традиции – Деметра, ISBN 954-9526-19-4, 2003.
4. Д.Дочев, Д.Димитров, “Висша математика”, Варна,1995