Л. Д. КУДРЯВЦЕВ

Курс математического анализа

Том I

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника для студентов
физико-математических
и инженерно-физических
специальностей вузов

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1981

ББК 22.16
К88
УДК 517(0.75.8)

Кудрявцев Л. Д.

К 88 Курс математического анализа (в двух томах): Учебник для студентов университетов и втузов. — М.: Высш. школа, 1981, т. I. — 687 с., ил.

В пер.: 1 р. 60 к.

Книга написана профессором, доктором физико-математических наук, заведующим кафедрой высшей математики МФТИ, ст. научным сотрудником Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. Учебник соответствует новой программе для вузов.

Особое внимание в учебнике обращено на изложение качественных и аналитических методов, в нем нашли отражение и некоторые геометрические приложения анализа. В первом томе излагаются дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной, простейшие сведения о функциях многих переменных и теория рядов.

Предназначается студентам университетов и физико-математических и инженерно-физических специальностей втузов, а также студентам других специальностей для углубленной математической подготовки.

К $\frac{20203-045}{001(01)-81}$ 35—81 1702050000

517.2
ББК 22.16

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый курс математического анализа написан на основе двухтомного учебника автора «Математический анализ». *) Настоящий учебник соответствует новым требованиям, предъявляемым к математическому образованию. Благодаря более четкому выделению вопросов, относящихся к основным понятиям математического анализа и их применению к решению задач, этот учебник можно использовать как в высших технических учебных заведениях, так и в университетах. Изложение материала ведется на уровне, доступном широкому кругу студентов. Вопросы, выходящие за рамки программы по высшей математике для втузов и посвященные более глубокому изучению анализа на университетском уровне, отмечены звездочкой.

В курсе излагаются как традиционные классические методы математического анализа, так и современные, которые возникли в последние десятилетия. Действительные числа вводятся аксиоматически. Этот путь дает возможность наиболее компактно и полно изложить необходимые для анализа сведения о числах. Вместе с тем он и логически наиболее совершенен, ибо при других, так называемых «конструктивных», методах построения теории действительных чисел (когда за основу берутся бесконечные десятичные дроби или сечения в области рациональных чисел, или классы эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел) все равно необходимо вводить аксиому существования (непротиворечивости) множества действительных чисел, что, правда, далеко не всегда отмечается в учебниках. Поскольку же при построении теории действительных чисел использование аксиом неизбежно, то проще всего их сразу сформулировать и перейти к изучению математического анализа в собственном смысле слова.

За исключением параграфов, посвященных теории действительных чисел, в курсе за основу принят индуктивный метод изложения материала. Так, например, понятие предела сначала изучается для числовых последовательностей, затем для функций одной действительной переменной, далее вводится понятие предела по множеству в евклидовом пространстве, предела интегральных сумм и, наконец, все завершается рассмотрением общего понятия предела по фильтру в топологическом пространстве.

Доказываемые теоремы не всегда формулируются с наибольшей общностью; иногда для лучшего выявления сущности изучаемого вопроса и идеи проводимого доказательства рассмотрение проводится лишь для достаточно гладких функций. Такая точка зрения оправдана также тем, что благодаря плотности гладких функций

*) Второе издание этого учебника выходило в 1973 г. в издательстве «Высшая школа».

в соответствующих функциональных пространствах многие теоремы, доказанные для гладких функций, могут быть единым методом с помощью предельного перехода перенесены на более широкие классы функций. К сожалению, эту идею невозможно довести до конца без существенного увеличения объема книги. Поэтому вопрос о плотности «хороших» функций в различных функциональных пространствах рассмотрен в курсе лишь в простейших случаях.

Большое внимание в учебнике уделяется решению задач методами, основанными на изложенной теории. Кроме того, читателю для самостоятельной работы рекомендуются упражнения и задачи. Решение упражнений весьма полезно для активного усвоения математического анализа. Отдельные же из предлагаемых задач довольно трудны. Их решение не является необходимым для овладения материалом и может потребовать довольно длительного времени. Как правило, они связаны с интересными и достаточно глубокими математическими фактами, для подробного изложения которых не нашлось места в книге. Нумерация упражнений ведется отдельно в каждом параграфе, нумерация же задач, как и рисунков — сквозная.

Значительная часть материала, вошедшего в книгу, в течение многих лет излагается автором в Московском физико-техническом институте в лекционном курсе математического анализа. Автор обсуждал многие вопросы, относящиеся к изложению различных тем, со своими коллегами по кафедре высшей математики Московского физико-технического института и получил от них много полезных советов, которые все были приняты во внимание при подготовке рукописи к печати.

Автор выражает свою глубокую благодарность С. М. Никольскому, О. В. Бесову и Г. Н. Яковлеву, с которыми он много лет читает параллельно курс математического анализа и постоянно обсуждает различные аспекты курса. Раздел, посвященный обобщенным функциям, написан под несомненным влиянием В. С. Владимирова, которому автор выражает свою искреннюю признательность за многие полезные замечания.

Особенно признателен автор рецензентам книги — Н. В. Ефимову и В. А. Ильину, подробные и обстоятельные рецензии которых позволили во многом улучшить изложение материала.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность преподавателям кафедры математики Московского физико-технического института И. А. Борачинскому, К. А. Бежанову, Ф. Г. Булаевской, В. А. Ходакову, сделавшим много полезных предложений, которые все были учтены при окончательном редактировании текста.

Автор также приносит свою искреннюю признательность научному редактору Н. М. Флайшеру, проделавшему большую работу, содействовавшую несомненному улучшению учебника.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ. ЛОГИЧЕСКИЕ СИМВОЛЫ

1.1. МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

В математике первичными понятиями являются понятия множества, элемента и принадлежности элемента множеству. Множества будем обозначать большими буквами латинского или какого-либо другого алфавита: A, B, ..., X, Y, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., а элементы множеств — малыми буквами: a, b, ..., x, y, ..., α, β, ... Если a является элементом множества A, то пишут $a \in A$ (читается «a принадлежит множеству A») или, что означает то же, $A \ni a$. Если же a не принадлежит множеству A, то пишут $a \notin A$ или $A \not\ni a$.

Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Таким образом, равенство $A = B$ означает, применительно к множествам, что одно и то же множество обозначено разными буквами A и B.

Запись $A = \{a, b, c, \ldots\}$ означает, что множество A состоит из элементов a, b, c и, возможно, каких-то других, заданных тем или иным способом.

Если множество A состоит из элементов a_α, где α пробегает некоторое множество индексов $\mathfrak{A}$, то будем писать $A = \{a_\alpha\}$ или, подробнее, $A = \{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$, или, если это не может привести к недоразумениям, просто $A = \{a\}$. Если множество A состоит из элементов, обладающих определенным свойством, то будем писать $A = \{a: \ldots\}$, где в фигурных скобках после двоеточия записано указанное свойство элементов множества A. Например, если a и b — два таких действительных числа, что $a \leqslant b$, и через $[a, b]$ обозначено множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, то определение этого множества (отрезка) посредством введенных символов можно записать следующим образом:

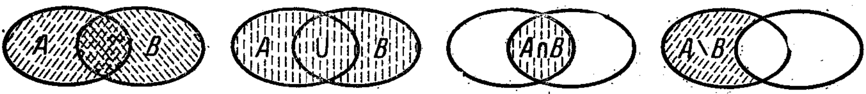
$$[a, b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Для удобства вводится понятие *пустого множества*, которое обозначается символом $\varnothing$. По определению пустое множество не содержит элементов.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что множество A есть часть множества B, или что A является *подмножеством* множества B, и пишут $A \subset B$ (читается: множество A содержится во множестве B) или, что то же, $B \supset A$ (читается: множество B содержит множество A).

Упражнение. Доказать, что включения $A \subset B$ и $B \subset A$ выполняются одновременно тогда и только тогда, когда $A = B$.

Из определения подмножества следует, что $A \subset A$, каково бы ни было множество A; принято также считать, по определению, что пустое множество считается подмножеством каждого множества, $\varnothing \subset A$. Если A — произвольное множество, то $\varnothing$ и A называются его *несобственными подмножествами*; если же $A \subset B$ и существует такой элемент $x \in B$, что $x \notin A$, то множество A называется *собственным подмножеством* множества B.



а) б) в) г)

Рис. 1

Если заданы два множества A и B (рис. 1, а), то через $A \cup B$ обозначается множество, называемое их *объединением* или *суммой*, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из множеств A и B (рис. 1, б). Таким образом, если некоторый элемент принадлежит множеству $A \cup B$, то он принадлежит либо только множеству A, либо только множеству B, либо обоим этим множествам.

Через $A \cap B$ обозначается множество, называемое *пересечением* множеств A и B, которое состоит из элементов, принадлежащих одновременно как множеству A, так и множеству B (рис. 1, в).

Через $A \setminus B$ обозначается множество, называемое *разностью* множеств A и B и состоящее из элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B (рис. 1, г).

Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется *дополнением* множества B до множества A или дополнением B в A. Говорят также, что $A \setminus B$ получается из множества A вычитанием из него множества B.

Если задана система множеств A_α (термины: множество, система, совокупность, семейство, класс будут употребляться как синонимы), где значения α образуют некоторую совокупность индексов $\mathfrak{A}$, то *объединением* $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ *множеств* A_α называется множество, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из заданных множеств A_α, т. е. условие $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ равносильно следующему: существует такое $\alpha \in \mathfrak{A}$, что $x \in A_\alpha$.

Пересечением множеств A_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, называется такое множество, обозначаемое через

$$\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha,$$

что каждый его элемент принадлежит всем множествам A_α, т. е. условие $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ означает: для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ имеет место $x \in A_\alpha$.

Если $A_\alpha \subset E$ *для всех* $\alpha \in \mathfrak{A}$, *то*

$$E \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha), \tag{1.1}$$

$$E \setminus \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha). \tag{1.2}$$

Докажем, например, равенство (1.1). Если $x \in E \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$, то, в силу определения разности множеств, $x \in E$ и $x \notin \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$. В свою очередь это, согласно определению объединения множеств, эквивалентно тому, что $x \in E$ и для всех $\alpha \in A_\alpha$ имеет место соотношение $x \notin A_\alpha$. Это же, снова по определению разности множеств, равносильно утверждению, что для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ имеем $x \in E \setminus A_\alpha$. Наконец, последнее утверждение, по определению пересечения множеств, означает, что $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha)$. Итак, условия $x \in E \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ и $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha)$ — эквивалентны, вследствие чего выполняется равенство (1.1). Равенство (1.2) доказывается аналогично.

В следующем пункте 1.2* рассмотрено понятие функции, а пункт 1.3* будет посвящен понятиям конечных множеств и последовательности. Пункты и параграфы курса, отмеченные звездочкой, при первом чтении можно пропустить и вернуться к ним лишь в случае внутренней потребности. В частности, для понимания дальнейшего материала достаточно представления о функции, имеющегося в курсе элементарной математики, как об определенном соответствии между элементами двух множеств. При этом понятие соответствия можно понимать как первичное.

1.2*. ФУНКЦИИ

Будем говорить, что *число элементов множества A равно единице* 1, если в нем имеется элемент $a \in A$ и нет других (иначе говоря, если из множества A вычесть множество, состоящее из элемента a, то получится пустое множество).

Множество A называется *множеством из 2-х (двух) элементов*, если после вычитания из него множества, состоящего только из одного элемента $a \in A$, т. е. множества, число элементов которого равно 1, останется множество, число элементов которого также равно единице. Нетрудно доказать, что это определение не зависит от выбора указанного элемента $a \in A$, т. е. если $a \in A$ и $b \in A$, причем $A \setminus \{a\}$ состоит из одного элемента, то и множество $A \setminus \{b\}$ также состоит из одного элемента (а именно, из элемента a).

Пусть теперь заданы множества $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$. Множество, состоящее из двух элементов $x \in X$ и $y \in Y$, называется *парой* $\{x, y\}$ элементов x, y.

Пара вида $\{x, \{x, y\}\}$, где $x \in X$, $y \in Y$, $\{x, y\}$ — пара элементов x, y, называется *упорядоченной парой* элементов x и y. Элемент x называется первым элементом упорядоченной пары $\{x, \{x, y\}\}$, а элемент y — вторым. Упорядоченная пара $\{x, \{x, y\}\}$ обозначается через (x, y). В дальнейшем под парой понимается обычно упорядоченная пара.

Множество всех упорядоченных пар (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, называется *произведением множеств* X и Y и обозначается через $X \times Y$. При этом не предполагается, что обязательно множество X отлично от множества Y, т. е. возможен и случай, когда $X = Y$.

Определение 1. *Всякое множество $f = \{(x, y)\}$ упорядоченных пар (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, такое, что для любых пар $(x', y') \in f$ и $(x'', y'') \in f$ из условия $y \neq y''$ следует, что $x' \neq x''$ называется функцией, или, что то же, отображением.*

Наряду с терминами «функция» и «отображение» в определенных ситуациях употребляются им равнозначные термины *преобразование*, *морфизм*, *соответствие*.

Функции будут обозначаться различными буквами: $f, g, \ldots, F, G, \ldots, \varphi, \psi, \ldots$.

Множество всех первых элементов упорядоченных пар (x, y) некоторой функции f называется *областью определения* (или множеством определения) этой функции и обозначается через X_f, а множество всех вторых элементов — *множеством ее значений* и обозначается через Y_f. Само множество упорядоченных пар $f = \{(x, y)\}$, рассматриваемое как подмножество произведения $X \times Y$, называется *графиком функции* f.

Элемент $x \in X_f$ называется *аргументом функции* f или независимой переменной, а элемент $y \in Y$ — *зависимой переменной*.

Если $f=\{(x, y)\}$ есть функция (отображение), то пишут $f: X_f \to Y$ и говорят, что f отображает множество X_f в множество Y. В случае $X=X_f$ пишется просто $f: X \to Y$.

Если $f: X \to Y$ — функция, т. е. множество упорядоченных пар $f=\{(x, y)\}$, $x \in X$, $y \in Y$, удовлетворяющих условиям определения 1, и $(x, y) \in f$, то пишут $y=f(x)$ (иногда просто $y=fx$) или $f: x \longmapsto y$ и говорят, что функция f ставит в соответствие элементу x элемент y (отображение f отображает элемент x в элемент y) или, что то же самое, элемент y соответствует элементу x. В этом случае говорят также, что элемент y является значением функции f в точке x, или образом элемента x при отображении f.

Наряду с символом $f(x_0)$ для обозначения значения функции f в точке x_0 употребляется также обозначение $f(x)|_{x=x_0}$.

При заданном $y \in Y$ совокупность всех таких элементов $x \in X$, что $f(x)=y$ называется *прообразом элемента* y и обозначается посредством $f^{-1}(y)$. Таким образом,

$$f^{-1}(y)=\{x: x \in X, \ f(x)=y\}.$$

Очевидно, если $y \in Y \setminus Y_f$, то $f^{-1}(y)=\varnothing$.

Иногда сама функция f обозначается символом $f(x)$. Обозначение функции $f: X \to Y$ и ее значения в точке $x \in X$ одним и тем же символом $f(x)$ не приводит к недоразумению, так как в каждом конкретном случае всегда ясно, о чем именно идет речь.

Обозначение $f(x)$ обычно удобнее обозначения $f: x \longmapsto y$ при вычислениях. Например, запись $f(x)=x^2$ значительно удобнее и проще использовать при аналитических преобразованиях, чем запись $f: x \longmapsto x^2$.

Пусть задано отображение $f: X \to Y$, т. е. отображение множества X в множество Y. Иначе говоря, каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие и притом единственный элемент $y \in Y$, и каждый элемент $y \in Y_f \subset Y$ поставлен в соответствие хотя бы одному элементу $x \in X$.

Если $Y=X$, то говорят, что отображение f отображает множество X в себя.

Если $Y=Y_f$, т. е. множество Y совпадает с множеством значений функции f, то говорят, что f отображает множество X *на* множество Y или, что отображение f является сюръективным отображением, короче, *сюръекцией*. Таким образом, отображение $f: X \to Y$ есть сюръекция, если для любого элемента $y \in Y$ существует по крайней мере один такой элемент $x \in X$, что $f(x)=y$.

Очевидно, если $f: X \to Y$ и Y_f — множество значений функции f, то $f: X \to Y_f$ является сюръективным отображанием.

Если при отображении $f: X \to Y$ разным $x \in X$ соответствуют разные $y \in Y$, т. е. при $x' \neq x''$ имеет место $f(x') \neq f(x'')$, то отображение f называется взаимно однозначным отображанием (взаимно однозначным соответствием) X в Y, а также однолистным отображанием или *инъекцией*. Таким образом, отображение

$f: X \to Y$ однолистно (инъективно) тогда и только тогда, когда прообраз каждого элемента y, принадлежащего множеству значений функции $f: y \in Y_f$, состоит в точности из одного элемента.

Если отображение $f: X \to Y$ является одновременно взаимно однозначным и на множество Y, т. е. является одновременно инъекцией и сюръекцией, то оно естественно называется *взаимно однозначным отображением* множества X *на* множество Y или, что то же, *биективным отображением* (биекцией) в Y.

Таким образом, отображение $f: X \to Y$ является взаимно однозначным отображением множества X на множество Y тогда и только тогда, когда для любых $x' \in X$ и $x'' \in X$, $x' \neq x''$, справедливо неравенство $f(x') \neq f(x'')$, и каково бы ни было $y \in Y$ существует такой элемент $x \in X$, что $f(x) = y$.

Взаимно однозначное отображение множества X на множество Y часто называют также взаимно однозначным соответствием элементов этих множеств.

Если $f: X \to Y$ и $A \subset X$, то множество

$$B = \{y : y \in Y,\ y = f(x),\ x \in A\},$$

т. е. множество всех тех y, в каждый из которых при отображении f отображается хоть один элемент из подмножества A множества X, называется *образом подмножества* A и пишется $B = f(A)$. В частности, всегда имеем $Y_f = f(X)$.

Если $f: X \to Y$ и $B \subset Y$, то множество

$$A = \{x : x \in X,\ f(x) \in B\},$$

называется *прообразом множества* B и пишется $A = f^{-1}(B)$. Таким образом, прообраз множества B состоит из всех тех элементов $x \in X$, которые при отображении f отображаются в элементы из B, или, что то же самое, которое состоит из всех прообразов точек $y \in B$:

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(y).$$

Если $A \subset X$, то функция $f: X \to Y$ естественным образом порождает функцию, определенную на множестве A, ставящую в соответствие каждому элементу $x \in A$ элемент $f(x)$. Эта функция называется *сужением функции* f на множестве A и иногда обозначается через $f|_A$.

Таким образом, $f|_A : A \to Y$ и для любого $x \in A$ имеет место $f|_A : x \mapsto f(x)$. Если множество A не совпадает с множеством X, то сужение $f|_A$ функции f на множестве A имеет другую область определения, чем функция f, и, следовательно, является другой, чем f, функцией. Нередко сужение функции на некотором множестве обозначается тем же символом, что и исходная функция.

Если две функции f и g рассматриваются на одном и том же множестве X, точнее, если рассматриваются сужения функций f и g на одном и том же множестве X, то запись $f = g$ на X означает, что $f(x)=g(x)$ для каждого $x \in X$. В этом случае говорят, что функция f тождественно равна функции g на множестве X.

Отметим, что функции, у которых всем элементам некоторого множества соответствует один и тот же элемент, т. е. функции, у которых при изменении значения аргумента значение функции не меняется, называются *постоянными* (на данном множестве), или *константами*.

Итак, если при изменении одной переменной (аргумента функции) другая переменная, являющаяся функцией первой, не меняется (т. е. «не зависит» от первой переменной), то это является частным и в определенном смысле простейшим случаем функциональной зависимости.

Если $f: X \to Y$ и каждый элемент $y \in Y_f$ представляет из себя множество каких-то элементов $y=\{z\}$, причем среди этих множеств имеется по крайней мере одно непустое множество, состоящее не из одного элемента, то такая функция f называется *многозначной функцией*. При этом элементы множества $f(x)=\{z\}$ часто также называют значениями функции f в точке x.

Если каждое множество $f(x)$ состоит только из одного элемента, то функцию f называют также *однозначной функцией*.

Если $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$, то функция $F: X \to Z$, определенная для каждого $x \in X$ равенством $F(x)=g(f(x))$, называется *композицией* (иногда *суперпозицией*) функций f и g, или *сложной функцией*, и обозначается через $g \circ f$.

Таким образом, по определению каждого $x \in X$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Пусть задана функция $f: X \to Y$ и Y_f — множество ее значений. Совокупность всевозможных упорядоченных пар вида $(y, f^{-1}(y))$, $y \in Y_f$, образует функцию, которая называется *обратной функцией* для функции f и обозначается через f^{-1}. Обратная функция f^{-1} ставит в соответствие каждому элементу $y \in Y_f$ его прообраз $f^{-1}(y)$, т. е. некоторое множество элементов. Тем самым обратная функция является, вообще говоря, многозначной функцией.

Если отображение $f: X \to Y$ однолистно (инъективно), то обратное отображение, определенное, как всегда, на Y_f, является однозначной функцией и отображает Y_f на X, т. е. $f^{-1}: Y_f \to X$. Действительно, в этом случае прообразы всех точек $y \in Y_f$ состоят в точности из одной точки $x \in X$.

1.3*. КОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА И НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Важным, часто встречающимся классом множеств является класс так называемых конечных множеств. Чтобы сформулировать определение конечного множества, дадим сначала определение понятия натурального числа.

Определение 2. *Множество* $N=\{n\}$ *называется множеством натуральных чисел, если*

а) один из его элементов обозначен символом 1;

б) каждому элементу $n\in N$ *поставлен в соответствие в точности один элемент этого множества, обозначаемый через* n^* *и называемый элементом, следующим за элементом* n;

в) для любого $n\in N$ *имеет место* $n^*\neq 1$;

г) из $n^*=m^*$, $n\in N$, $m\in N$, *следует, что* $n=m$;

д) (аксиома индукции) пусть множество $M=\{m\}\subset N$ *обладает свойствами*

1°) $1\in M$;

2°) *если* $m\in M$, *то* $m^*\in M$,

тогда множество M *содержит все натуральные числа:* $M=N$.

Приведенное аксиоматическое определение множества натуральных чисел принадлежит Пеано *), поэтому свойства а) — д) называются *аксиомами Пеано.*

Элементы множества N обозначаются через 1, 2, 3, 4, ... (здесь после каждого натурального числа написано следующее за ним).

Определение 3. *Множество* X *называется множеством, состоящим из* n *элементов,* $n\in N$, *если существует взаимно однозначное отображение множества* X *на множество* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Если для множества существует такое натуральное n, *что число его элементов равно* n, *то это множество называется конечным.*

Всякое множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным.* Примером бесконечного множества является множество всех натуральных чисел.

Пустое множество считается по определению конечным, а число его элементов равным нулю.

Если множество, содержащее m элементов, может быть получено из множества, содержащего n элементов, вычитанием из него некоторого конечного множества, то натуральное число m называется меньшим, чем натуральное число n, или, что то же, число n называется бо́льшим, чем число m; в этом случае пишут $m<n$, или $n>m$.

Определение 4. *Пусть* X — *какое-либо множество и* N — *множество натуральных чисел. Всякое отображение* $f: N\to X$ (см. п. 1.2*). *называется последовательностью элементов множества* X. *Элемент* $f(n)$ *обозначается через* x_n *и называется* n*-м членом последовательности* $f: N\to X$, *а сама эта последовательность обозначается через* $\{x_n\}$ *или* x_n, $n=1, 2, \ldots$.

Каждый элемент x_n последовательности $\{x_n\}$ представляет собой упорядоченную пару, состоящую из числа $n\in N$ и соответствующего ему при отображении $f: N\to X$ элемента x множества X,

*) Д. Пеано (1858—1932) — итальянский математик.

т. е. $x_n=(n, x)$. Второй элемент этой пары называется значением элемента последовательности $\{x_n\}$, а первый — его номером.

Множество элементов последовательности всегда бесконечно. Два различных элемента последовательности могут иметь одно и то же значение, но заведомо отличаются номерами, которых бесконечное множество.

Множество значений элементов последовательности (обычно говорят короче: множество значений последовательности) может быть конечным. Например, если всем $n \in N$ поставлен в соответствие один и тот же элемент $a \in X$, т. е. при всех $n \in N$ имеет место $f(n)=a$, то множество значений последовательности $x_n=a$, $n=1, 2, \ldots$, состоит из одного элемента $a \in X$. Такие последовательности называются *стационарными*.

Если $n_1 < n_2$, $n_1 \in N$, $n_2 \in N$, то член x_{n_1} последовательности $\{x_n\}$ называется членом, предшествующим члену x_{n_2}, а член x_{n_2} членом, следующим за членом x_{n_1}. В этом смысле члены последовательности всегда упорядочены.

1.4. ЛОГИЧЕСКИЕ СИМВОЛЫ

В математических рассуждениях часто встречаются выражения «существует элемент», обладающий некоторыми свойствами, и «любой элемент» среди элементов, имеющих некоторое свойство. Вместо слова «существует» или равносильного ему слова «найдется» иногда пишется символ $\exists$, т. е. перевернутая латинская буква E (от английского слова Existence — существование), а вместо слов «любой», «каждый», «всякий» — символ $\forall$, т. е. перевернутое латинское A (от английского слова Any — любой). Символ $\exists$ называется символом *существования*, а символ $\forall$ — символом *всеобщности*.

Примеры. 1. Определение объединения $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ множеств A_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, записывается с помощью логического символа существования следующим образом:

$$\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in \mathfrak{A},\ x \in A_\alpha\},$$

а определение пересечения $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$, записанное с помощью символа всеобщности, имеет вид

$$\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \{x : \forall \alpha \in \mathfrak{A},\ x \in A_\alpha\}.$$

2. Пусть R — множество действительных чисел и пусть задана функция $f: R \to R$, т. е. функция, определенная на множестве действительных чисел и принимающая действительные значения.

Функция f называется *четной функцией*, если для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $f(-x)=f(x)$. Используя логическую символику, это условие можно записать короче:

$$\forall x \in \boldsymbol{R}: f(-x)=f(x).$$

3. Функция $f: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ называется *периодической*, если существует такое число $T>0$, что каково бы ни было $x \in \boldsymbol{R}$ справедливо равенство $f(x+T)=f(x)$. Употребляя логические символы, это можно записать следующим образом:

$$(\exists T>0)(\forall x \in \boldsymbol{R}): f(x+T)=f(x).$$

Обычно для удобства чтения утверждений, записанных с помощью нескольких логических символов, все, что относится к каждому из них в отдельности, заключается в круглые скобки, как это и сделано в последней формуле. Двоеточие в подобных формулах означает «имеет место».

4. Функция $f: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ не является четной, если условие $f(-x)=f(x)$ не выполняется для всех $x \in \boldsymbol{R}$. Однако подобные отрицательные формулировки не очень удобны для их использования, так как трудно делать выводы из того, чего нет. Гораздо удобнее иметь дело с позитивными, как их называют, утверждениями, которые не содержат отрицаний. В нашем случае утверждение, что равенство $f(-x)=f(x)$ не выполняется для всех $x \in \boldsymbol{R}$, равносильно утверждению, что существует такое $x \in \boldsymbol{R}$, что $f(-x) \neq f(x)$, или, в символической записи,

$$\exists x \in \boldsymbol{R}: f(-x) \neq f(x).$$

5. Функция $f: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ не является периодической, если любое число $T>0$ не является ее периодом, т. е. для любого $T>0$ равенство $f(x+T)=f(x)$ не должно выполняться для всех $x \in \boldsymbol{R}$, или в позитивной форме: для любого $T>0$ найдется $x \in \boldsymbol{R}$, для которого $f(x+T) \neq f(x)$. С помощью логических символов это записывается следующим образом:

$$(\forall T>0)(\exists x \in \boldsymbol{R}): f(x+T) \neq f(x).$$

Сравнивая запись при помощи логических символов утверждений в примерах 2 и 3 с их отрицанием в примерах 4 и 5, видим, что при построении отрицаний символы существования и всеобщности заменяют друг друга. Для того чтобы в некотором множестве не существовал элемент, обладающий каким-то свойством, надо, чтобы все элементы не обладали этим свойством, т. е. в этом случае при отрицании символ существования $\exists$ переходит в символ всеобщности $\forall$. Если же каким-то свойством обладают не все элементы рассматриваемого множества, то это означает, что в нем существует элемент, не обладающий данным свойством: символ всеобщности заменился символом существования.

Для того чтобы не затруднять читателя, не привыкшего к логической символике, дальнейшее изложение материала ведется в классической манере без использования логических символов, которые лишь иногда употребляются параллельно с основным текстом. С одной стороны, для того чтобы приучить читателя к их применению (что весьма полезно при конспектировании книг и лекций), а с другой, поскольку они позволяют более кратко, а потому иногда и более выразительно, разъяснить нужную мысль, и тем самым помогают читателю понять содержание излагаемого вопроса.

Символом $\square$ в тексте книги отмечается конец проводимого доказательства. Символ $\Longrightarrow$ означает «следует» (одно высказывание следует из другого), а символ $\Longleftrightarrow$ означает равносильность утверждений, стоящих по разные от него стороны. Значок def означает, что сформулированное утверждение справедливо по определению (от английского слова definition — определение). Например,

$$A \subset B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall x \in A \Longrightarrow x \in B),$$

$$(g \cdot f)(x) \overset{\text{def}}{=} g(f(x)).$$

§ 2. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

2.1. СВОЙСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В элементарной математике изучаются действительные (вещественные) числа. Сначала в процессе счета возникает так называемый *натуральный ряд* чисел 1, 2, 3 ..., n, ... В арифметике вводятся действия сложения и умножения над натуральными числами. Что же касается операций вычитания и деления, то они уже оказываются не всегда возможными во множестве натуральных чисел. Чтобы все четыре арифметические операции были возможны для любой пары чисел (кроме операции деления на ноль, которой нельзя приписать разумного смысла), приходится расширить класс рассматриваемых чисел. К необходимости такого расширения запаса чисел приводят также потребности измерения тех или иных геометрических и физических величин. Поэтому вводятся число ноль и целые *отрицательные* числа (вида -1, -2, ..., $-n$, ...), а затем и *рациональные* (вида p/q, где p, q — целые, $q \neq 0$).

Та же потребность измерения величин и проведение таких операций, как извлечение корня, вычисление логарифмов, решение алгебраических уравнений, приводит к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел: появляются *иррациональные* и, наконец, *комплексные числа*. Все рациональные и все иррациональные числа образуют множество всех действительных чисел.

Множество действительных чисел, как принято, будем обозначать через $\boldsymbol{R}$ (от латинского слова realus — действительный). Это множество образует совокупность, в которой определены взаимосвязные операции сложения, умножения и сравнения чисел по величине и которая обладает определенного рода непрерывностью. Напомним кратко свойства действительных чисел, известные из элементарной математики, и дополним их описанием некоторых свойств, обычно не рассматриваемых там достаточно полно.

I. Операция сложения. Для любой упорядоченной пары действительных чисел a и b определено, и притом единственным образом, число, называемое их *суммой* и обозначаемое через $a+b$, так что при этом имеют место следующие свойства.

I_1. *Для любой пары чисел a и b*

$$a+b=b+a.$$

Это свойство называется *переместительным* или *коммутативным законом сложения.*

I_2. Для любой *тройки* чисел a и b, c

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

Это свойство называется *сочетательным* или *ассоциативным законом сложения.*

I_3. *Существует число, обозначаемое 0 и называемое нулем, такое, что для любого числа a*

$$a+0=a.$$

I_4. *Для любого числа a существует число, обозначаемое $-a$ и называемое противоположным данному, такое, что*

$$a+(-a)=0.$$

II. Операция умножения. Для любой упорядоченной пары чисел a и b определено, и притом единственным образом, число, называемое их *произведением* и обозначаемое ab, так что при этом имеют место следующие свойства.

II_1. *Для любой пары чисел a и b*

$$ab=ba.$$

Это свойство называется *переместительным* или *коммутативным законом умножения.*

II_2. *Для любой тройки чисел a, b, c*

$$a(bc)=(ab)c.$$

Это свойство называется *сочетательным* или *ассоциативным законом умножения.*

II_3. *Существует число, обозначаемое* 1 *и называемое единицей, такое, что для любого числа* a

$$a \cdot 1 = a.$$

II_4. *Для любого числа* $a \neq 0$ *существует число, обозначаемое* $1/a$ *или* $\frac{1}{a}$ *и называемое обратным данному, такое, что*

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

III. Связь операций сложения и умножения

Для любой тройки чисел a, b, c

$$(a+b)c = ac + bc.$$

Это свойство называется *распределительным* или *дистрибутивным законом умножения* относительно сложения.

IV. Упорядоченность. *Для каждого числа* a *определено одно из соотношений* $a > 0$ (*a больше нуля*), $a = 0$ (*a равно нулю*) *или* $0 > a$ (*ноль больше* a), *при этом, если* $a > 0$ *и* $b > 0$, *то*

IV_1. $a + b > 0$;

IV_2. $ab > 0$.

Если $a - b > 0$, то говорят, что число a больше числа b и пишут $a > b$ (подробнее об этом см. в п. 2. 3*).

Действительные числа обладают еще так называемым свойством непрерывности. Чтобы сформулировать его, введем понятие сечения.

Определение 1. *Два множества* $A \subset \boldsymbol{R}$ *и* $B \subset \boldsymbol{R}$ *называются сечением множества действительных чисел* $\boldsymbol{R}$, *если*

1°) *объединение множеств* A *и* B *составляет все множество действительных чисел* $\boldsymbol{R}$, $A \cup B = \boldsymbol{R}$;

2°) *каждое из множеств* A *и* B *не пусто*, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$;

3°) *каждое число множества* A *меньше любого числа множества* B: *если* $a \in A$, $b \in B$, *то* $a < b$.

Свойство 1° означает, что каждое действительное число принадлежит по крайней мере одному из множеств A и B.

Из свойства 3° очевидно следует, что множества A и B не пересекаются: $A \cap B = \varnothing$. Действительно, если бы нашелся элемент $x \in A \cap B$, т. е. $x \in A$ и $x \in B$, то из свойства 3° следовало бы, что $x < x$.

Сечение множества действительных чисел, образованное множествами A и B, обозначается через $A \mid B$. Множество A называется *нижним*, а множество B — *верхним* классом данного сечения.

Простые примеры сечений можно получить следующим образом. Зафиксируем какое-либо число $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Отнесем сначала к множеству A все числа $x \leqslant \alpha$, а к множеству B — все числа $y > \alpha$:

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \leqslant \alpha\}, \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \{y : y > \alpha\}. \tag{2.1}$$

Так определенные множества образуют сечение, что устанавливается непосредственной проверкой выполнения условий 1°, 2° и 3° определения 1.

Можно поступить иначе: отнести к множеству A все числа $x<\alpha$, а к множеству B все числа $y\geqslant\alpha$:

$$A\overset{\text{def}}{=}\{x:x<\alpha\},\ B\overset{\text{def}}{=}\{y:y\geqslant\alpha\}. \qquad (2.2)$$

Снова множества A и B образуют сечение. В обоих случаях (2.1) и (2.2) говорят, что сечение производится числом α и пишут $\alpha=A\,|\,B$.

Отметим два свойства сечений, производящихся некоторым числом.

1°. *В случае* (2.1) *в классе A есть наибольшее число, им является число α, а в классе B нет наименьшего.*

В случае (2.2) *в классе A нет наибольшего, а в классе B есть наименьшее число, им является число α.*

Рассмотрим, например, первый случай (2.1). То, что α является наибольшим числом в классе A, ясно из первой формулы (2.1), задающей множество A.

Покажем, что во множестве B нет наименьшего числа. Допустим противное: пусть в B есть наименьшее число. Обозначим его через β. Поскольку $\beta\in B$, то в силу второй формулы (2.1) $\alpha<\beta$, следовательно, $\alpha+\alpha<\alpha+\beta$, т. е. $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}$, откуда снова в силу второй формулы (2.1) получаем, что $\frac{\alpha+\beta}{2}\in B$. Аналогично из $\alpha<\beta$ имеем $\alpha+\beta<\beta+\beta$, т. е. $\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$ и так как β — наименьшее число в классе B, то $\frac{\alpha+\beta}{2}\in A$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

2°. *Число, производящее сечение, единственно.*

В самом деле, допустим, что существует сечение, которое определяется двумя разными числами: $\alpha=A\,|\,B$ и $\beta=A\,|\,B$. Пусть, например, $\alpha<\beta$. Тогда, как мы видели при доказательстве предыдущего свойства, $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$. Из неравенства $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}$ следует, что как в случае (2.1), так и в случае (2.2), имеет место $\frac{\alpha+\beta}{2}\in B$. Аналогично из неравенства $\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$ следует, что $\frac{\alpha+\beta}{2}\in A$. Это противоречит тому, что множества A и B не пересекаются.

Свойство непрерывности действительных чисел состоит в том, что никаких других сечений действительных чисел, кроме тех, которые производятся некоторым числом, не существует.

V. Свойство непрерывности действительных чисел. *Для каждого сечения $A\,|\,B$ множества действительных чисел существует число α, производящее это сечение, $\alpha=A\,|\,B$.*

Это число, согласно выше доказанному, является либо наибольшим в нижнем классе, тогда в верхнем нет наименьшего, либо наименьшим в верхнем классе, тогда в нижнем нет наибольшего.

Таким образом, если $A|B$ является сечением действительных чисел, то согласно свойству их непрерывности не может случиться так, что в классе A будет наибольшее число и одновременно в классе B будет наименьшее (рис. 2, *а*). Не может также быть и того, чтобы в классе A не было наибольшего и одновременно в классе B не было наименьшего числа (рис. 2, *б*). Образно говоря, непрерывность действительных чисел означает, что в их множестве нет ни скачков, ни пробелов, короче, нет пустот.

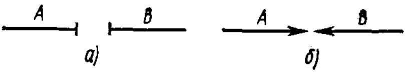


Рис. 2

Сформулированное свойство непрерывности действительных чисел называют также *принципом Дедекинда* *) непрерывности действительных чисел.

Свойство непрерывности действительных чисел связано с самым простейшим вопросом использования математики на практике — с измерением величин. При измерении какой-либо физической величины мы всегда получаем с большей или меньшей точностью ее приближенные значения. Если в результате экспериментального измерения данной величины получается ряд значений, дающих значение искомой величины с недостатком (т. е. принадлежащие нижнему классу соответствующего неизвестного сечения, определяемого значением измеряемой величины) или с избытком (т. е. принадлежащие верхнему классу), то свойство непрерывности действительных чисел выражает собой объективную уверенность в том, что измеряемая величина имеет определенное значение, расположенное между ее приближенными значениями, вычисленными с недостатком и избытком.

Упражнение 1. Доказать, что свойство V непрерывности действительных чисел равносильно следующему: каковы бы ни были непустые множества $A \subset \boldsymbol{R}$ и $B \subset \boldsymbol{R}$, у которых для любых элементов $a \in A$ и $b \in A$ выполняются неравенства $a \leqslant b$, существует такое число ξ, что для всех $a \in A$ и $b \in B$ имеет место соотношение $a \leqslant \xi \leqslant b$.

Из перечисленных свойств I—V действительных чисел вытекают другие многочисленные их свойства, поэтому можно сказать, что действительные числа представляют собой совокупность элементов, обладающую свойствами I—V.

Для вдумчивого читателя заметим, что ссылка в начале параграфа на то, что действительные числа и их свойства известны из курса элементарной математики, не является необходимой. Сформулированные выше свойства действительных чисел можно

*) Р. Дедекинд (1831—1916) — немецкий математик.

взять за исходное определение. Следует только исключить тривиальный случай: легко проверить, что для множества, состоящего только из одного нуля, выполняются все свойства I—V (в таком множестве $1=0$, а сечений в нем просто нет). Множество, в котором имеется хоть один элемент, отличный от нуля, называют *нетривиальным*.

Теперь, перефразируя итог наших рассмотрений, получим следующее определение.

Определение 2. *Нетривиальное множество элементов, обладающих свойствами* I—V, *называется множеством действительных чисел. Каждый элемент этого множества называется действительным числом.*

Напомним, что множество действительных чисел обозначается буквой $\boldsymbol{R}$.

Построение теории действительных чисел, основывающееся на таком их определении, называется *аксиоматическим*, а свойства I—V — *аксиомами действительных чисел*.

Геометрически множество действительных чисел изображается направленной (ориентированной) прямой, а отдельные числа — точками этой прямой. Поэтому совокупность действительных чисел часто называют числовой прямой, или числовой осью, а отдельные числа — ее точками (рис. 3). Имея в виду такое изображение действительных чисел, иногда вместо a меньше b (соответственно a больше b) говорят, что точка a лежит левее точки b (соответственно, что a лежит правее b).

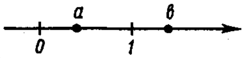


Рис. 3

Сечение $A \mid B$ геометрически означает разбиение числовой прямой на два луча, имеющих общее начало и идущих в противоположных направлениях, причем один из них содержит их общее начало (замкнутый луч), а другой нет (открытый луч).

В следующих пунктах 2.2*, 2.3*, 2.4* будут более детально проанализированы свойства I—V действительных чисел и выведены некоторые их следствия. Как и все пункты, отмеченные звездочками, перечисленные пункты, во всяком случае при первом чтении, можно опустить без существенного ущерба для усвоения курса математического анализа. Для понимания дальнейшего материала (в п. 2.5 и следующих) вполне достаточно представления о действительных числах, которое дается в курсе элементарной математики.

2.2*. СВОЙСТВА СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

Рассмотрим некоторые свойства сложения и умножения, которые вытекают из свойств I, II и III. Прежде всего заметим, что для операции сложения существует обратная операция — вычитание, определим ее.

Для любой упорядоченной пары чисел $a \in \boldsymbol{R}$ и $b \in \boldsymbol{R}$ число $a+(-b)$ называется *разностью* чисел a и b и обозначается через $a-b$, т. е.

$$a-b \stackrel{\text{def}}{=} a+(-b).$$

Если $a+b=c$, то, прибавляя к обеим частям этого равенства число $-b$, получим $(a+b)+(-b)=c+(-b)$. Отсюда согласно ассоциативному закону I_2 и определению разности имеем

$$a+(b+(-b))=c-b,$$

но $b+(-b)=0$, следовательно,

$$a=c-b. \tag{2.3}$$

Таким образом, после прибавления к числу a числа b число a восстанавливается вычитанием из суммы $a+b$ числа b, поэтому операция вычитания и называется *операцией, обратной операции сложения.*

Перейдем теперь к свойствам сложения и умножения действительных чисел.

1°. *Число, обладающее свойством нуля, единственно.*

Действительно, допустим, что существуют два нуля 0 и $0'$, тогда в силу I_3: $0'+0=0'$, $0+0'=0$. Согласно коммутативному закону I_2 левые части этих равенств равны, следовательно, равны и правые, т. е. $0=0'$. $\square$

2°. *Число, противоположное данному, единственно.*

Пусть числа b и c противоположны некоторому числу a, т. е. $a+b=0$ и $a+c=0$. Тогда из первого из этих равенств имеем $(a+b)+c=0+c$, т. е. $(a+b)+c=c$, откуда $(a+c)+b=c$; но $a+c=0$, следовательно, $b=c$. $\square$

3°. *Для любого числа a справедливо равенство*

$$-(-a)=a.$$

Из равенства $a+(-a)=0$, определяющего противоположный элемент, в силу коммутативности сложения, получим $-a+a=0$. Это и означает, что $a=-(-a)$. $\square$

4°. *Для любого числа a справедливо равенство*

$$a-a=0.$$

В самом деле, $a-a=a+(-a)=0$. $\square$

5°. *Для любых чисел a и b имеем:*

$$-a-b=-(a+b),$$

т. е. число, противоположное сумме двух чисел, равно сумме противоположных им чисел.

Действительно, $a+b+(-a-b)=(a-a)+(b-b)=0$. $\square$

6°. *Уравнение $a+x=b$ имеет в $\boldsymbol{R}$ решение и притом единственное: $x=b-a$.*

В самом деле, если решение существует, то в силу (2.3) $x = b - a$. Этим и доказана единственность решения уравнения $a + x = b$. Для существования решения достаточно проверить, что число $x = b - a$ является решением. Это действительно так:

$$a + (b - a) = a + [b + (-a)] = [a + (-a)] + b = b. \ \square$$

Для операции умножения также существует обратная операция; она называется делением и определяется следующим образом.

Для любой упорядоченной пары чисел a и b, $b \neq 0$, число $a \cdot \frac{1}{b}$ называется *частным от деления* a на b и обозначается через $\frac{a}{b}$, или a/b, или $a:b$, т. е.

$$\frac{a}{b} \overset{\text{def}}{=} a \cdot \frac{1}{b}, \qquad b \neq 0.$$

Свойства, аналогичные свойствам 1°—6° для сложения, справедливы и для операции умножения:

7°. *Число, обладающее свойствами единицы, единственно.*

8°. *Число, обратное данному числу, отличному от нуля, единственно.*

9°. *Для любого числа $a \neq 0$ справедливо равенство*

$$\frac{1}{1/a} = a.$$

10°. *Для любого числа $a \neq 0$ справедливо равенство*

$$a/a = 1.$$

11°. *Для любых чисел $a \neq 0$ и $b \neq 0$ имеем равенство*

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab},$$

т. е. число, обратное произведению двух чисел, отличных от нуля, равно произведению обратных к ним чисел.

12°. *Уравнение $ax = b$, $a \neq 0$, имеет в множестве действительных чисел и притом единственное решение.*

Доказываются свойства 7°—12° аналогично свойствам 1°—6°. Все рассмотренные свойства 1°—12° касаются только операций сложения и умножения. Эти операции позволяют определить натуральные, целые и рациональные числа, операцию возведения в целую степень и операцию извлечения корня. Проделаем это.

Число $1+1$ обозначается через 2, число $2+1$ через 3 и т. д. Числа 1, 2, 3, ... называются *натуральными числами*. Их обозначение и название совпадают с числами элементов в конечных множествах (см. п. 1.3*). Это не случайно, поскольку для того, чтобы получить натуральное число n в новом смысле, надо взять конечное множество единиц, число элементов которого в п. 1.2* было обозначено тем же символом n, и сложить их. При этом отношение порядка, введенное в множестве натуральных чисел (см. п. 1.3*), совпадает с порядком, имеющимся в этом множестве согласно упорядоченности множества всех действительных чисел (см. свойство IV в п. 2.1), причем натуральным числом n^*, следующим за n, является $n+1$, т. е. $n^*=n+1$. Как уже отмечалось, множество натуральных чисел обозначается через $\boldsymbol{N}$.

Заметим, что хотя, как это было доказано выше, единица единственна, можно рассматривать несколько экземпляров единицы (как и вообще, несколько экземпляров любого элемента некоторого множества), хотя бы для того, чтобы можно было написать выражение $1+1$.

Числа $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ называются *целыми числами*. Множество целых чисел обычно обозначается через $\boldsymbol{Z}$.

В дальнейшем будет показано (см. свойство 8° в п. 2.3*), что из всех перечисленных в п. 2.1 свойств действительных чисел следует, что $1>0$.

Числа вида m/n, где m и n — целые, а $n \neq 0$, называются *рациональными числами*. Множество рациональных чисел обозначается обычно через $\boldsymbol{Q}$. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными*.

Пусть заданы действительное число a и натуральное n. Число a, умноженное n раз на себя, называется n-й *степенью* числа a и обозначается через a^n. Таким образом,

$$a^n \overset{\mathrm{def}}{=} \underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ раз}}.$$

Число b такое, что $b^n=a$ (если оно, конечно, существует) называется *корнем* n-й степени из числа a и обозначается через $\sqrt[n]{a}$, или $a^{1/n}$, т. е.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \overset{\mathrm{def}}{=} a.$$

По определению полагается $a^0 \overset{\mathrm{def}}{=} 1$ и для любого $n \in \boldsymbol{N}$ $a^{-n} \overset{\mathrm{def}}{=} 1/a^n$.

Отметим теперь несколько свойств, касающихся связи операций сложения и умножения.

13°. *Для любых чисел a, b и c имеет место равенство*

$$a(b-c)=ab-ac.$$

В самом деле,

$$a(b-c)=a(b-c)+ac-ac=a(b-c+c)-ac=ab-ac. \quad \square$$

14°. *Для любого числа a выполняется равенство*

$$a \cdot 0=0.$$

Действительно, возьмем какое-либо число b, тогда $b-b=0$ (см. свойство 4°). Поэтому согласно свойству 13° будем иметь:

$$a\cdot 0=a(b-b)=ab-ab=0. \ \square$$

Из свойства 14°, между прочим, вытекает, что утверждение $1\neq 0$ при наличии других рассматриваемых свойств I—III эквивалентно тому, что существует хотя бы одно число, отличное от нуля. Очевидно, достаточно показать, что если существует число $a\neq 0$, то $1\neq 0$. Докажем это: пусть существует $a\neq 0$, тогда из равенства $a\cdot 1=a$ следует, что $1\neq 0$, так как в противном случае согласно свойству 14° имело бы место равенство $a=0$.

15°. *Если $ab=0$, то, по крайней мере, один из сомножителей a и b равен нулю.*

Пусть, например, $a\neq 0$, тогда, умножив равенство $ab=0$ на $1/a$, получим $\frac{1}{a}(ab)=\frac{1}{a}\cdot 0$, откуда $\left(\frac{1}{a}a\right)b=0$, следовательно, $b=0$. $\square$

16°. *Для любых чисел a и b имеем:*

$$(-a)\,b=-ab, \qquad (-a)(-b)=ab;$$

в частности, $(-1)\,a=-a$.

В самом деле,

$$(-a)\,b=(-a)\,b+ab-ab=(-a+a)\,b-ab=-ab. \ \square$$

Используя это равенство, имеем

$$(-a)(-b)=-a(-b)=(-1)[a(-b)]=(-1)(-ab)=$$
$$=-(-ab)=ab. \ \square$$

Из свойств I, II, III действительных чисел и перечисленных выше их следствий можно получить правила арифметических действий с дробями, т. е. числами вида a/b, $b\neq 0$, $a\in \boldsymbol{R}$, $b\in \boldsymbol{R}$.

17°. *Равенство*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

$b\neq 0$, $d\neq 0$, *справедливо тогда и только тогда, когда* $ad=bc$.

Следствие (основное свойство дроби). *Каковы бы ни были дробь a/b, $b\neq 0$, и число $c\neq 0$, имеет место равенство*

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}.$$

Действительно, умножив обе части равенства $a/b=c/d$ на bd и использовав определение деления, будем иметь следующую цепочку эквивалентных равенств:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \frac{a}{b}\,bd=\frac{c}{d}\,db\Leftrightarrow a\cdot\frac{1}{b}\,bd=c\frac{1}{d}\,db\Leftrightarrow ad=cb. \ \square$$

18°. *Сложение дробей производится по правилу*

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \quad b\neq 0,\ d\neq 0.$$

Докажем справедливость этого равенства. Использовав определение деления, дистрибутивность сложения относительно умножения и основное свойство дроби, получим:

$$\frac{ad+bc}{bd}=(ad+bc)\frac{1}{bd}=ad\frac{1}{bd}+bc\frac{1}{bd}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}. \ \square$$

19°. *Умножение дробей производится по правилу*

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \quad b\neq 0,\ d\neq 0.$$

Использовав определение деления и свойство 11°, получим

$$\frac{ac}{bd}=ac\cdot\frac{1}{bd}=ac\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{d}=\left(a\cdot\frac{1}{b}\right)\left(c\cdot\frac{1}{d}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}. \ \square$$

20°. *Обратным элементом дроби a/b, $a\neq 0$, $b\neq 0$ является дробь b/a, т. е.* $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$.

Это сразу следует из правила умножения дробей.

21°. *Деление дробей производится по правилу*

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}, \quad b\neq 0,\ c\neq 0,\ d\neq 0.$$

Использовав определение деления, предыдущее свойство и правило умножения дробей, будем иметь

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c/d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}. \ \square$$

Выведем теперь из полученных свойств правила действий со степенями.

22°. *Если m и n — целые числа, причем в случае, когда $m\leqslant 0$ или $n\leqslant 0$ имеет место $a\neq 0$, то*

$$a^m a^n=a^{m+n}, \quad (a^m)^n=a^{mn}.$$

Если $m=0$ или $n=0$, то справедливость формул очевидна. В случае, когда m и n натуральные числа, то согласно определению степени

$$a^m a^n=\underbrace{a\ldots\ldots a}_{m\ \text{раз}}\,\underbrace{a\ldots\ldots a}_{n\ \text{раз}}=a^{m+n}.$$

Если $m<0$, $n>0$ и $a\neq 0$, то, полагая $k=-m$ и используя основное свойство дроби (возможность одновременного деления числителя и знаменателя дроби на одно и то же не равное нулю число без нарушения равенства), при $k \leqslant n$ будем иметь

$$a^m a^n = a^{-k} a^n = \frac{a^n}{a^k} = \frac{\overbrace{a \dots a}^{n \text{ раз}}}{\underbrace{a \dots a}_{k \text{ раз}}} = a^{n-k} = a^{m+n};$$

а при $k > n$:

$$a^m a^n = \frac{a^n}{a^k} = \frac{1}{a^{k-n}} = a^{n-k} = a^{m+n}.$$

Если $m < 0$, $n < 0$ и $a \neq 0$, то, полагая $k = -m$, $l = -n$ и используя свойство 11°, получим:

$$a^m a^n = a^{-k} a^{-l} = \frac{1}{a^k} \frac{1}{a^l} = \frac{1}{a^{k+l}} = a^{-(k+l)} = a^{m+n}.$$

Подобным образом проверяется и вторая формула свойства 22°. □

Легко показать, что свойства I_1, I_2, II_1, II_2 и III распространяются по индукции на любое конечное число членов. В качестве примера покажем, что для любых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ и b

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) b = a_1 b + a_2 b + \dots + a_n b. \tag{2.4}$$

В самом деле, при $n = 2$ эта формула справедлива согласно свойству III.

Пусть теперь (2.4) справедлива при $n = k$, покажем, что она будет справедлива и при $n = k + 1$. Применив свойство I_2 для $k + 1$ слагаемых (считая, что оно уже доказано), затем свойство III и использовав предположение индукции, получим

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}) b = [(a_1 + \dots + a_k) + a_{k+1}] b =$$
$$= (a_1 + \dots + a_k) b + a_{k+1} b = a_1 b + \dots + a_k b + a_{k+1} b.$$

Из формулы (2.4) в случае $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ следует, что

$$nb = \underbrace{b + \dots + b}_{n \text{ раз}},$$

т. е. что умножение числа на натуральное число n сводится к сложению этого числа n раз.

Отметим, что свойства I—III п. 2.1 не описывают полностью действительные числа в том смысле, что существуют и другие множества, отличные от совокупности действительных чисел, удовлетворяющие тем же свойствам I—III, если в них слово «число» всюду заменить словом «элемент» рассматриваемого множества. Именно в этом смысле всюду в дальнейшем понимается выражение «множество, удовлетворяющее каким-либо из свойств I—V».

Примером множеств, удовлетворяющих условиям I, II и III, являются одни только рациональные числа или, известные из элементарной математики, комплексные числа, а также совокупность рациональных функций, т. е. функций вида $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Элементы всех перечисленных множеств можно складывать и и умножать, причем эти операции будут подчиняться условиям I, II и III. Множества, удовлетворяющие этим требованиям и содержащие хотя бы один элемент, отличный от нуля, называются *полями*.

Таким образом, и рациональные числа, и действительные числа, и комплексные числа и рациональные функции образуют поля.

Проанализируем теперь свойства, выделяющие поле действительных чисел среди всех других полей. Одним из таких свойств является свойство упорядоченности его элементов.

2.3*. СВОЙСТВО УПОРЯДОЧЕННОСТИ

Выведем некоторые следствия из свойств упорядоченности IV и свойств сложения и умножения I, II и III. Прежде всего определим понятие сравнения по величине для любых двух чисел (напомним, что в свойстве IV говорилось только о сравнении чисел с нулем).

Число a называется числом, бо́льшим числа b, и пишется $a>b$, или, что то же, число b называется меньшим числа a и пишется $b<a$, если $a-b>0$.

1°. *Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.*

Это свойство называется *транзитивностью* отношения порядка.

Если $a>b$ и $b>c$, то согласно определению это означает, что $a-b>0$ и $b-c>0$. Складывая эти неравенства, согласно IV_1 получаем: $(a-b)+(b-c)>0$, т. е. $a-c>0$. Это и означает, что $a>c$. □

2°. *Если $a>b$, то для любого числа c имеем: $a+c>b+c$.*

В самом деле, неравенство $a>b$ означает, что $a-b>0$. Поскольку по свойству 5° из п. 2.2* $a-b=a+c-c-b=(a+c)-(b+c)$, то $(a+c)-(b+c)>0$, и, следовательно, $a+c>b+c$. □

3°. *Для любых двух чисел a и b имеется в точности одно из трех соотношений порядка $a>b$, $a=b$* или *$a<b$.*

Действительно, пусть заданы два числа a и b. Для их разности $a-b$ согласно свойству IV имеет место в точности одно из соотношений $a-b>0$, $a-b=0$ или $0>a-b$.

Если $a-b>0$, то по определению $a>b$. Если $a-b=0$, то, прибавив к обеим частям равенства число b, получим $a=b$. Наконец, если $0>a-b$, то прибавив последовательно к обеим частям неравенства $0>a-b$ числа $-a$ и b (см. предыдущее свойство), получим $b-a>0$. Это и означает, что $b>a$, или, что то же, $a<b$. $\square$

Соотношение $a<b$ читается «a меньше b». Соотношение $a=b$ читается «a равно b». Соотношение $a>b$ читается «a больше b».

Наличие транзитивного отношения порядка «больше», «меньше» между любыми двумя числами и называется обычно *свойством упорядоченности множества действительных чисел*, или *отношением порядка*.

Запись $a\leqslant b$ равнозначна записи $b\geqslant a$ и означает, что либо $a=b$, либо $a<b$. Например, можно написать $2\leqslant 2$, $2\leqslant 5$. Конечно, можно написать более точно: $2=2$, $2<5$, однако неравенства $2\leqslant 2$ и $2\leqslant 5$ также верны, так как означают, что «два не больше двух», соответственно, что «два не больше пяти».

Соотношения $a<b$, $a\leqslant b$, $a>b$, $a\geqslant b$ называются *неравенствами*. Неравенства $a<b$ и $a>b$ называются *строгими неравенствами*.

4°. *Если* $a<b$, *то* $-a>-b$.

В частности, если $a>0$, *то* $-a<0$, *а если* $a<0$, *то* $-a>0$.

Действительно, из $a<b$ в силу определения имеем $b-a>0$. Поэтому $-a=-a+b+(-b)=(b-a)+(-b)>0+(-b)=-b$. $\square$

5°. *Если* $a<b$ *и* $c\leqslant d$, *то* $a+c<b+d$, *т. е. можно производить почленное сложение неравенств одного знака.*

В самом деле, если $a<b$ и $c\leqslant d$, то согласно свойству 2° этого пункта $a+c<b+c$ и $c+b\leqslant d+b$, поэтому в силу транзитивности упорядоченности имеем: $a+c<b+d$. $\square$

6°. *Если* $a<b$ *и* $c\geqslant d$, *то* $a-c<b-d$, *т. е. неравенства противоположных знаков можно вычитать в указанном смысле.*

Действительно, из $c\geqslant d$ имеем согласно свойству 4° этого пункта: $-c\leqslant -d$. Сложив неравенства $a<b$ и $-c\leqslant -d$, получим $a-c<b-d$. $\square$

7°. *Если* $a<b$ *и* $c<0$, *то* $ac>bc$.

В самом деле, согласно свойству 4° этого пункта $-c>0$, поэтому в силу свойства IV_2: $a(-c)<b(-c)$. Отсюда по свойству 16° п. 2.2* получим $-ac<-bc$ и, следовательно (см. свойство 4° этого пункта), $ac>bc$. $\square$

Из доказанного сейчас свойства 7° (при $a=0$) и из свойства IV_2 вытекает правило знаков при умножении действительных чисел: *произведение двух сомножителей одного знака* (либо одновременно положительных, либо одновременно отрицательных) *положительно, а произведение двух сомножителей разных знаков* (один из них положителен, другой отрицателен) *отрицательно.*

8°. *В упорядоченном поле всегда справедливо неравенство* $1>0$.

В самом деле, мы уже видели (см. замечание после свойства 14° в п. 2.2*), что из условия существования элемента $a\neq 0$ (это условие входит в определение поля, см. конец п. 2.2*) следует, что $1 \neq 0$. Покажем, что неравенство $1 < 0$ невозможно. Допустим противное, пусть $1 < 0$. Возьмем какое-либо $a > 0$. Согласно определению единицы имеем $a \cdot 1 = a$. По правилу знаков произведение положительного числа a и отрицательной по предположению 1 является отрицательным числом, т. е. $a < 0$ — противоречие.

Действительные числа снова не являются единственным объектом, который удовлетворяет аксиомам I — IV. Множества, для которых справедливы эти аксиомы, называются *упорядоченными полями*. Примером упорядоченного поля, отличного от поля действительных чисел, является поле рациональных чисел. Однако уже ни поле комплексных чисел, ни поле рациональных функций не являются упорядоченным полем.

Во всяком упорядоченном поле можно ввести понятие абсолютной величины его элементов. При ее определении и изучении ее свойств для единообразия изложения будем все время говорить о числах, а не об элементах произвольного упорядоченного поля.

Для любого числа a число, обозначаемое $|a|$ и определяемое по формуле

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0, \end{cases}$$

называется *абсолютной величиной* числа a, или, что то же, его *модулем*.

Отметим ряд свойств абсолютной величины.

1°. *Для любого числа a выполняются неравенства*

$$|a| \geqslant 0, \tag{2.5}$$

$$|a| = |-a|, \tag{2.6}$$

$$a \leqslant |a|, \quad -a \leqslant |a|. \tag{2.7}$$

Докажем неравенство (2.5). Если $a \geqslant 0$, то $|a| = a \geqslant 0$; если же $a < 0$, то $|a| = -a > 0$ (свойство 4° п. 2.3*). □

Докажем равенство (2.6). Если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$ и $-a \leqslant 0$, поэтому согласно определению абсолютной величины и свойству 3° из п. 2.2* получим $|-a| = -(-a) = a = |a|$. Если же $a < 0$, то $|a| = -a$ и $-a > 0$; это означает, что $|-a| = -a$. □

Докажем неравенство (2.7). Если $a \geqslant 0$, то $a = |a|$ и $-a \leqslant 0 \leqslant a = |a|$, т. е. (2.7) выполняется. Если же $a < 0$, то $a < 0 < -a = |a|$, т. е. (2.7) тоже выполняется. □

2°. *Для любых чисел a и b*

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|, \tag{2.8}$$

$$||a| - |b|| \leqslant |a-b|. \tag{2.9}$$

Докажем эти неравенства. Согласно (2.7) имеем:

$$a \leqslant |a|, \quad -a \leqslant |a|, \quad b \leqslant |b|, \quad -b \leqslant |b|.$$

Отсюда в силу свойства 5° из п. 2.3* и свойства 5° из п. 2.2*

$$a+b \leqslant |a|+|b|, \quad -(a+b) \leqslant |a|+|b|.$$

Одно из чисел $a+b$ или $-(a+b)$ неотрицательно и, следовательно, совпадает с $|a+b|$. Неравенство (2.8) доказано.

Неравенство же (2.9) является следствием (2.8). В самом деле

$$|a|-|b|=|(a-b)+b|-|b| \leqslant |a-b|+|b|-|b|=|a-b|;$$

аналогично, $|b|-|a| \leqslant |b-a|=|a-b|$.

Согласно свойству 5°, п. 2.2*, $|b|-|a|=-(|a|-|b|)$. Одно из чисел $|a|-|b|$ и $-(|a|-|b|)$ совпадает с $||a|-|b||$. Неравенство (2.9) также доказано. □

3°. *Для любых чисел a и b выполняется равенство* $|ab|=|a||b|$.

Это сразу следует из определения абсолютной величины, свойства 16°, п. 2.2* и правила знаков при умножении.

Рассмотрим теперь свойство непрерывности, которое выделяет поле действительных чисел среди всех прочих упорядоченных полей.

2.4*. СВОЙСТВО НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Упорядоченное поле, удовлетворяющее свойству V, называется непрерывным упорядоченным полем. Поле рациональных чисел уже не является непрерывным упорядоченным полем: в нем имеются сечения, которые не определяются никаким рациональным числом. Например, можно показать, что если к верхнему классу B отнести все положительные рациональные числа m/n, удовлетворяющие неравенству $(m/n)^2 > 2$, а к нижнему классу все остальные рациональные числа, то получится сечение рациональных чисел $A|B$, которое не определяется никаким рациональным числом.

Оказывается, что множество действительных чисел является в некотором смысле единственным непрерывным упорядоченным полем, точнее единственным с точностью до изоморфизма. Разъясним, что это означает.

Два упорядоченных поля $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}'$ называются изоморфными, если существует такое взаимно однозначное соответствие их элементов $f: \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ (см. п. 1.2*), *что для любых двух элементов* $x \in \mathscr{F}$ и $y \in \mathscr{F}$, $x < y$, *выполняются условия* $f(x) < f(y)$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$, $f(xy)=f(x)f(y)$.

Короче говоря, упорядоченные поля $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}'$ называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение одного из них на другое (биекция), сохраняющее упорядоченность, сложение и умножение их элементов.

Можно показать, что все непрерывные упорядоченные поля изоморфны между собой. Этим объясняется, что в математической литературе встречаются различные построения множества действительных чисел, исходящие из разных конкретных объектов — все они приводят к нетривиальным совокупностям элементов, удовлетворяющим свойствам I — V, т. е. к непрерывным упорядоченным полям и, следовательно, к изоморфным множествам. Таким образом, приходим к следующему определению множества действительных чисел.

Определение 2′. *Множеством действительных чисел называется непрерывное упорядоченное поле.*

Поле рациональных чисел, как уже отмечалось выше, не обладает свойством непрерывности, а поле действительных чисел — обладает. Поэтому заведомо существуют действительные числа, не являющиеся рациональными, т. е. существуют иррациональные числа. Таким образом, множество действительных чисел можно рассматривать, как существенное расширение множества рациональных чисел — существенное в том смысле, что множество рациональных чисел является собственным подмножеством множества действительных чисел. При этом расширении сохраняются свойство упорядоченности и операции сложения и умножения. Оказывается, что действительные числа, в отличие от рациональных, уже нельзя расширить до бóльшего множества так, чтобы сохранялись указанные свойства (упорядоченность и операции сложения и умножения).

Это свойство называется *свойством полноты действительных чисел относительно их упорядоченности, сложения и умножения.*

Доказательство единственности с точностью до изоморфизма непрерывного упорядоченного поля и свойство его полноты по отношению к упорядоченности, сложению и умножению его элементов можно найти в превосходных курсах анализа В. А. Ильина, Э. Г. Позняка «Основы математического анализа», ч. I, М., 1971 и В. А. Ильина, В. А. Садовничего, Б. Х. Сендова «Математический анализ», М., 1979.

Отметим, что в множестве действительных чисел для любого числа $a \geqslant 0$ и любого натурального числа n всегда существует число b, являющееся корнем n-й степени из a, т. е. существует $\sqrt[n]{a}$. Мы не будем пока останавливаться на доказательстве этого утверждения, хотя его можно было бы провести и здесь, например, на основе понятия сечения, а докажем его позже (см. пример в п. 6.3). Конечно, в некоторых случаях корень может существовать и для $a < 0$. Например, существует $\sqrt[3]{-8} = -2$, но уже корень $\sqrt{-4}$ не существует, в том смысле, что не существует действительного числа $b = \sqrt{-4}$, так как в противном случае было бы справедливо равенство $b^2=-4$, которое противоречит правилу знаков при умножении.

Сформулируем свойства корня. Пусть n и m натуральные числа и $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, тогда справедливы следующие формулы:

1°) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$; 4°) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b\neq 0$;

2°) $\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^m}$; 5°) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$.

3°) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$;

Все эти формулы доказываются одинаковым приемом. Докажем, например, первую.

Пусть $b=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$. Согласно определению корня и свойству 22° из п. 2.2* это означает, что $b^n=\sqrt[m]{a}$ и что $b^{mn}=a$. Отсюда в силу того же определения корня следует, что $b=\sqrt[mn]{a}$. Таким образом, имеем:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=b=\sqrt[mn]{a}. \ \square$$

Если $a<0$ и все корни, входящие в формулу 1), существуют, то она также справедлива, и приведенное ее доказательство сохраняет силу. Вообще, если $a<0$ и все корни, входящие в какую-либо из формул 1) — 5) существуют, то они справедливы и в этом случае.

Имея понятие целочисленной степени и корня, определим понятие рациональной степени. Пусть $a>0$ и $r\in \boldsymbol{Q}$, т. е. $r=m/n$, $m\in \boldsymbol{Z}$, $n\in \boldsymbol{Z}$, $n\neq 0$.

Степень a^r определяется равенством

$$a^r \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}.$$

Отметим основные свойства рациональной степени. Пусть $a>0$, $b>0$, $r_1\in \boldsymbol{Q}$, $r_2\in \boldsymbol{Q}$, $r\in \boldsymbol{Q}$; тогда

6°) $a^{r_1}a^{r_2}=a^{r_1+r_2}$;

7°) $(a^{r_1})^{r_2}=a^{r_1r_2}$;

8°) $(ab)^r=a^rb^r$.

Докажем, например, формулу 6°). Если $r_1=p/q$, $r_2=m/n$, $q\neq 0$, $n\neq 0$, p, q, m, $n\in \boldsymbol{Z}$, то, использовав определение рациональной степени, свойства корней 2°, 3° и свойство 22 из п. 2.2*, получим:

$$a^{r_1}a^{r_2}=a^{p/q}a^{m/n}=\sqrt[q]{a^p}\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nq]{a^{np}}\sqrt[nq]{a^{mq}}=\sqrt[nq]{a^{np+mq}}=$$
$$=a^{\frac{np+mq}{nq}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{m}{n}}=a^{r_1+r_2}. \ \square$$

Упражнение 2. Пусть $B \overset{\text{def}}{=} \{x : x^2 > 2,\ x \in Q\}$, $A \overset{\text{def}}{=} Q \setminus B$. Доказать, что множества A и B образуют сечение в поле рациональных чисел Q и что это сечение не определяется никаким рациональным числом.

2.5. РАСШИРЕННАЯ ЧИСЛОВАЯ ПРЯМАЯ

Часто бывает удобно дополнить множество действительных чисел R элементами, обозначенными через $+\infty$ и $-\infty$ и называемыми соответственно *плюс* и *минус бесконечностями*, считая при этом, что по определению

$$-\infty < +\infty,$$
$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty, \quad (-\infty)+(-\infty)=-\infty,$$
$$(+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty,$$
$$(+\infty)(-\infty)=(-\infty)(+\infty)=-\infty.$$

Но, например, операции $(+\infty)+(-\infty)$ или $\frac{+\infty}{+\infty}$ уже не определены (см. также п. 4.9). Кроме того, для любого $a \in R$ по определению полагается выполненным неравенство

$$-\infty < a < +\infty$$

и справедливость операций

$$a+(+\infty)=+\infty+a=+\infty, \quad -\infty+a=a+(-\infty)=-\infty;$$

для $a > 0$

$$a(+\infty)=(+\infty)a=+\infty, \quad a(-\infty)=(-\infty)a=-\infty;$$

для $a < 0$

$$a(+\infty)=(+\infty)a=-\infty, \quad a(-\infty)=(-\infty)a=+\infty.$$

Бесконечности $+\infty$ и $-\infty$ называют иногда *«бесконечными числами»* в отличие от действительных чисел $a \in R$, которые называются также *конечными числами*.

В дальнейшем под числом всегда понимается конечное действительное число, если не оговорено что-либо другое.

Множество действительных чисел R, дополненное элементами $+\infty$ и $-\infty$, называется *расширенным множеством действительных* чисел (или расширенной числовой прямой) и обозначается через $\bar{R}$. Элементы $+\infty$ и $-\infty$ называются иногда *бесконечно удаленными точками расширенной числовой прямой*.

2.6. ПРОМЕЖУТКИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ОКРЕСТНОСТИ

Напомним определения некоторых основных подмножеств действительных чисел, которые часто будут встречаться в дальнейшем. Если $a \leq b$, $a \in \bar{R}$, $b \in \bar{R}$, то множество $\{x : a \leq x \leq b\}$ называется *отрезком* расширенной числовой прямой $\bar{R}$ и обозначается через

$[a, b]$, т. е.

$$[a, b] \overset{\text{def}}{=} \{x : a \leqslant x \leqslant b\}, \quad a \in \overline{R}, \ b \in \overline{R}.$$

В случае $a = b$ отрезок $[a, b]$ состоит из одной точки.

Если $a < b$, то множество $\{x : a < x < b\}$ называется *интервалом* и обозначается через (a, b), т. е.

$$(a, b) \overset{\text{def}}{=} \{x : a < x < b\}.$$

Интервал (a, b) называется *внутренностью отрезка* $[a, b]$.

Числовые множества

$$[a, b) \overset{\text{def}}{=} \{x : a \leqslant x < b\} \text{ и } (a, b] \overset{\text{def}}{=} \{x : a < x \leqslant b\}$$

называются *полуинтервалами*.

Отрезки $[a, b]$, интервалы (a, b) и полуинтервалы $[a, b)$, $(a, b]$ называются *промежутками*, точки a и b — их *концами*: a — правым концом, а b — левым, а точки x такие, что $a < x < b$ — их *внутренними точками*.

Если a и b — конечны, т. е. $a \in R$ и $b \in R$, то число $b - a$ называется *длиной промежутка* с концами a и b.

Если хоть одно из a и b является бесконечным, то промежуток с концами a и b называется *бесконечным*.

Замечание 1. Промежутки всех типов расширенной числовой прямой обладают следующим свойством: *если точки* $\alpha \in \overline{R}$ и $\beta \in \overline{R}$, $\alpha < \beta$, *принадлежат некоторому промежутку с концами* $a \in \overline{R}$ *и* $b \in \overline{R}$, *то и весь отрезок* $[\alpha, \beta]$ *принадлежит этому промежутку*.

Для промежутка каждого типа это непосредственно следует из его определения.

Важным понятием для дальнейшего является понятие ε-окрестности точки расширенной числовой прямой.

В случае $a \in R$, т. е. когда a является действительным числом, для любого $\varepsilon > 0$ *ε-окрестностью* $U(a, \varepsilon)$ числа a называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$:

$$U(a, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Если $a = +\infty$, то $U(+\infty, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} (\varepsilon, +\infty]$.

Если же $a = -\infty$, то $U(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -\varepsilon)$.

Всякая ε-окрестность конечной или бесконечно удаленной точки $a \in \overline{R}$ называется ее *окрестностью* и иногда обозначается просто через $U(a)$ *).

При определении окрестностей бесконечно удаленных точек $+\infty$ и $-\infty$ можно было бы брать не только положительные ε, а и всевозможные $\varepsilon \in R$. Условие $\varepsilon > 0$ накладывается лишь с целью

*) Обозначение U происходит от немецкого слова Umgebung — окрестность.

единообразия всех определений: окрестность любого числа $a \in \boldsymbol{R}$ или одной из бесконечно удаленных точек $+\infty$, $-\infty$ определяется некоторым положительным числом $\varepsilon > 0$. Такое единообразие бывает иногда удобно при формулировке результатов, для которых не существенно, является ли рассматриваемая точка конечной или бесконечно удаленной.

Лемма. *У любых двух различных точек расширенной числовой прямой существуют их непересекающиеся окрестности.*

Доказательство. Покажем, что для любых $a \in \bar{\boldsymbol{R}}$ и $b \in \bar{\boldsymbol{R}}$, $a < b$, существуют такие $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, что $U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2) = \varnothing$. В самом деле, если a и b конечны, то можно взять $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{b-a}{2}$ (рис. 4, *а*). Если $a \in \boldsymbol{R}$, $b = +\infty$, то в качестве указанных $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ подходят, например, $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_2 = |a| + 1$ (рис. 4, *б*). Если $a = -\infty$, $b \in \boldsymbol{R}$, то можно взять $\varepsilon_1 = |b| + 1$, $\varepsilon_2 = 1$ (рис. 4, *в*). Наконец, если $a = -\infty$, $b = +\infty$, то при произвольном $\varepsilon > 0$ окрестности $U(-\infty, \varepsilon)$ и $U(+\infty, \varepsilon)$ не пересекаются (рис. 4, *г*).

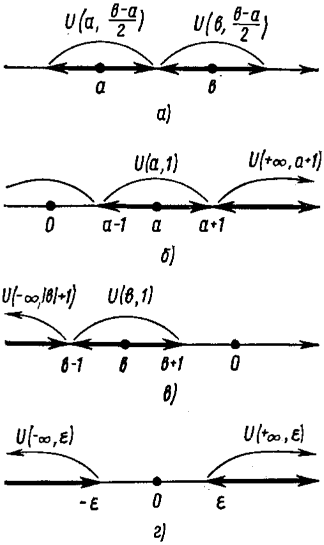


Рис. 4

Замечание 2. В случае $a < b$, $a \in \bar{\boldsymbol{R}}$, $b \in \bar{\boldsymbol{R}}$ и $U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2) = \varnothing$ для любых $x \in U(a, \varepsilon_1)$ и $y \in U(b, \varepsilon_2)$, очевидно, справедливо неравенство $x < y$.

Его справедливость устанавливается непосредственной проверкой во всех возможных здесь случаях, т. е. при $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$, при $a \in \boldsymbol{R}$, $b = +\infty$, при $a = -\infty$, $b \in \boldsymbol{R}$ и при $a = -\infty$, $b = +\infty$.

2.7. ОГРАНИЧЕННЫЕ И НЕОГРАНИЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

Введем ряд нужных для дальнейшего понятий и изучим некоторые свойства числовых множеств.

Определение 3. *Если для подмножества E действительных чисел существует такое число b, что оно не меньше каждого числа $x \in E$, т. е. для любого $x \in E$ выполняется неравенство $x \leqslant b$, то множество E называется ограниченным сверху, а число b — числом, ограничивающим сверху множество E.*

Множество, не являющееся ограниченным сверху множеством, называется *неограниченным сверху множеством.*

С помощью логических символов определение ограниченного сверху множества записывается следующим образом:

множество $E \subset \boldsymbol{R}$ ограничено сверху $\Leftrightarrow$ $(\exists b \in \boldsymbol{R})(\forall x \in E)$: $x \leqslant b$; отсюда

множество $E \subset \boldsymbol{R}$ неограничено сверху $\Leftrightarrow$ $(\forall b \in \boldsymbol{R})(\exists x \in E)$: $x > b$, т. е. множество E неограничено сверху, если каково бы ни было число $b \in \boldsymbol{R}$ найдется такое число $x \in E$, что $x > b$.

Заметим, что если число b ограничивает сверху множество E, т. е. для всех $x \in E$ выполняется неравенство $x \leqslant b$ и $b < b'$, то для всех $x \in E$, очевидно, имеет место и неравенство $x \leqslant b'$, следовательно, число b' также ограничивает сверху множество E.

Если в множестве E имеется число b, которое не меньше всех других чисел из E, т. е. $b \in E$, и для всех $x \in E$ выполняется неравенство $x \leqslant b$, то число b называется наибольшим или *максимальным числом множества* E: $b = \max E$.

Очевидно, что если в множестве E имеется наибольшее число, то оно единственно, а само множество E в этом случае ограничено сверху этим числом.

Отметим еще, что если множество E неограничено сверху, то согласно определению это означает, что для любого числа $b \in \boldsymbol{R}$ существует по крайней мере один такой элемент $x \in E$, что $x > b$. Обратим внимание на то, что на самом деле таких элементов бесконечно много. Действительно, допустим, что их оказалось лишь конечное число: $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \boldsymbol{N}$. Иначе говоря, для всех $x \in E$ и $x \neq x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, справедливо неравенство $x \leqslant b$. Тогда ясно, что для $b_0 = \max\{b, x_1, \ldots, x_n\}$ и всех $x \in E$ будет выполняться неравенство $x \leqslant b_0$, т. е. вопреки предположению множество E оказалось ограниченным.

Аналогично множеству, ограниченному сверху, определяется множество, ограниченное снизу.

Определение 4. *Если для подмножества E действительных чисел существует такое число a, что оно не больше каждого числа $x \in E$, т. е. для любого $x \in E$ выполняется неравенство $a \leqslant x$, то множество E называется ограниченным снизу, а число a — числом, ограничивающим снизу это множество.*

Множество, не являющееся ограниченным снизу множеством, называется *неограниченным снизу множеством*.

С помощью логических символов определение ограниченного снизу множества записывается следующим образом:

множество $E \subset \boldsymbol{R}$ ограничено снизу $\Leftrightarrow$ $(\exists a \in \boldsymbol{R})(\forall x \in E)$: $x \geqslant a$; отсюда

множество $E \subset \boldsymbol{R}$ неограничено снизу $\Leftrightarrow$ $(\forall a \in \boldsymbol{R})(\exists x \in E)$: $x < a$, т. е. множество E неограничено снизу, если каково бы ни было число $a \in \boldsymbol{R}$, найдется такой элемент $x \in E$, что $x < a$.

Очевидно, что если число a ограничивает снизу множество E, то и любое число $a' < a$ также ограничивает снизу это множество.

Если в множестве E имеется число a, которое не больше всех других чисел из E, т. е. $a \in E$ и для всех $x \in E$ выполняется неравенство $a \leqslant x$, то число a называется наименьшим или *минимальным числом множества* $E: a = \min E$.

Если в множестве E имеется наименьшее число, то оно единственно, а само множество E в этом случае ограничено снизу этим числом.

Определение 5. *Множество, ограниченное и сверху и снизу, называется просто ограниченным множеством.*

Другими словами, множество $E \subset \boldsymbol{R}$ называется ограниченным, если существуют такие числа a и b, что для любого $x \in E$ выполняется неравенство $a \leqslant x \leqslant b$.

Множество, не являющееся ограниченным, называется неограниченным.

Упражнение 3. Доказать, что множество $E \subset \boldsymbol{R}$ ограничено тогда и только тогда, когда существует такое число $a \geqslant 0$, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство $|x| \leqslant a$.

Примеры ограниченных множеств дают отрезок $[1, 2]$, интервал $(0, 1)$, множество значений функции $\sin x$. Бесконечный интервал $(-5, +\infty)$, множество натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots$ являются множествами, ограниченными снизу, но неограниченными сверху. Наконец, множество всех целых чисел, всех рациональных чисел суть множества, неограниченные как сверху, так и снизу.

Формальное обобщение понятий ограниченного сверху, ограниченного снизу и просто ограниченного множества на подмножества расширенного множества $\overline{\boldsymbol{R}}$ действительных чисел $\boldsymbol{R}$ (см. п. 2.5) не приводит к содержательным понятиям, так как все подмножества расширенного множества действительных чисел ограничены сверху символом $+\infty$ и снизу символом $-\infty$, а потому и просто ограничены в $\overline{\boldsymbol{R}}$. Однако понятие наибольшего (наименьшего) элемента множества является содержательным и в этом случае. Его определение формально совпадает с соответствующим определением для подмножеств не расширенного множества действительных чисел:

конечное или бесконечное число $c \in E \subset \overline{\boldsymbol{R}}$ называется наибольшим (наименьшим) в множестве $E \subset \overline{\boldsymbol{R}}$, если для всех $x \in E$ выполняется неравенство $x \leqslant c$ (соответственно $x \geqslant c$).

В дальнейшем мы воспользуемся этим понятием.

2.8. ВЕРХНЯЯ И НИЖНЯЯ ГРАНИ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

Среди всех чисел, ограничивающих сверху (снизу) данное множество, наименьшее (наибольшее) из них имеет специальное название.

Определение 6. *Наименьшее среди всех чисел, ограничивающих сверху множество* $E \subset \boldsymbol{R}$, *называется его верхней гранью и обозначается*) через* $\sup E$ *или* $\sup\limits_{x \in E} \{x\}$.

Определение 7. *Наибольшее среди всех чисел, ограничивающих снизу множество* $E \subset \boldsymbol{R}$, *называется его нижней гранью и обозначается**) через* $\inf E$ *или* $\inf\limits_{x \in E} \{x\}$.

Иногда верхнюю (нижнюю) грань множества называют *точной верхней* (*нижней*) *гранью* этого множества.

Отметим, что в сделанных определениях не обсуждается вопрос о том, существует или нет наименьшее (соответственно наибольшее) число среди всех чисел, ограничивающих сверху (снизу) данное множество — это будет сделано позже. Здесь же лишь говорится, что если такое число существует, то оно называется верхней (соответственно нижней) гранью рассматриваемого множества. Из самого определения верхней (нижней) грани следует, что если у данного множества эта грань существует, то она единственна, так как во всяком множестве максимальное (минимальное) число может быть только одно.

Проанализируем определения 6 и 7. Пусть $\beta = \sup E$. Это означает, во-первых, что число β ограничивает сверху множество E, т. е. для каждого $x \in E$ справедливо неравенство $x \leqslant \beta$; во-вторых, что число β является наименьшим среди всех чисел, ограничивающих сверху множество E, т. е. каково бы ни было число $\beta' < \beta$, оно уже не ограничивает сверху множество E, а это означает, что в множестве E найдется такое число x, что $x > \beta'$.

Таким образом, в «арифметической форме» определение 6 можно записать в следующем виде.

Определение 6'. *Число* β *называется верхней гранью множества* E, *если*

1°) $\forall x \in E : x \leqslant \beta$,

2°) $(\forall \beta' < \beta)(\exists x \in E) : x > \beta'$.

Условие 2°) можно перефразировать следующим образом:

2^1) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in E) : x > \beta - \varepsilon$.

Для того чтобы убедиться в равносильности условий 2° и 2^1, достаточно взять β' и ε, связанные равенством $\beta' = \beta - \varepsilon$, из которого следует, что условие $\varepsilon > 0$ эквивалентно условию $\beta' < \beta$.

Аналогичным образом, если $\alpha = \inf E$, то согласно определению 7, во-первых, число α ограничивает снизу множество E, а во-вторых, любое число $\alpha' > \alpha$ уже не ограничивает снизу это множество, ибо число α является наибольшим среди всех таких

---

*) От латинского слова supremum — наибольший.

**) От латинского слова infimum — наименьший.

чисел. Это означает, что для любого $\alpha' > \alpha$ найдется такой $x \in E$, что $x < \alpha'$. Следовательно, определение 7 можно перефразировать следующим образом.

Определение 7'. *Число α называется нижней гранью множества E, если*

1°) $\forall x \in E : x \geqslant \alpha$,

2°) $(\forall \alpha' > \alpha)(\exists x \in E) : x < \alpha'$.

Условие 2°) эквивалентно условию

2¹) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in E) : x < \alpha + \varepsilon$.

Для того чтобы убедиться в эквивалентности условий 2°) и 2¹), достаточно взять $\alpha' = \alpha + \varepsilon$.

Сделаем несколько очевидных замечаний. Если непустое множество $E \subset \boldsymbol{R}$ имеет верхнюю грань $\beta \in \boldsymbol{R}$ (имеет нижнюю грань $\alpha \in \boldsymbol{R}$), то оно ограничено сверху (соответственно снизу). Это следует из условия 1° определения 6' (определения 7').

Если $\beta = \sup E$ $(\alpha = \inf E)$ и число b (число a) ограничивает сверху (снизу) множество E, то $\beta \leqslant b$ (соответственно $a \leqslant \alpha$). Это следует из того, что верхняя (нижняя) грань множества является наименьшим (наибольшим) числом среди всех чисел, ограничивающих сверху (снизу) данное множество.

Если в множестве существует наибольшее (наименьшее) число, то оно является верхней (нижней) гранью этого множества. В частности, такая ситуация имеет место для конечных множеств: любое конечное множество чисел имеет наибольшее и наименьшее число, а потому нижнюю и верхнюю грани. В принципе их можно найти простым перебором всех чисел из данного множества, так как оно конечно. Однако, вообще говоря, только в принципе, а не на практике: если в данном конечном множестве, заданном какими-то свойствами его элементов, будет «достаточно много» элементов, то перебрать их все будет не под силу даже сверхмощной современной вычислительной машине.

Приведем примеры, иллюстрирующие понятие верхней и нижней граней множества.

Множество всех положительных действительных чисел, обозначим его через $\boldsymbol{R}_+$, ограничено снизу числом ноль, ибо для любого $x \in \boldsymbol{R}_+$ имеет место $x > 0$; более того, $\inf \boldsymbol{R}_+ = 0$. Множество $\boldsymbol{R}_+$ неограничено сверху, так как нет числа, которое бы ограничивало сверху все положительные числа.

Если $E = [a, b]$ — отрезок, то $\inf E = a$, $\sup E = b$. Если $E = (a, b)$ — интервал, то также $\inf E = a$, $\sup E = b$. Если, наконец, множество E состоит из двух точек a и b, $a \leqslant b$, т. е. $E = \{a\} \cup \{b\}$, то снова $\inf E = a$, $\sup E = b$. Эти примеры показывают, в частности, что верхняя (нижняя) грань множества может как принадлежать самому множеству, так и не принадлежать ему.

Перейдем теперь к выяснению вопроса: всегда ли у числового множества существует его верхняя (нижняя) грань? Если множество неограничено сверху (снизу), то не существует чисел, которые бы ограничивали его сверху (снизу). Следовательно, не существует среди них и наименьшего (наибольшего). Таким образом, если множество неограничено сверху (снизу), то у него нет верхней (нижней) грани. В этом случае ответ на поставленный вопрос получился совсем просто. Если же множество ограничено сверху (снизу), то ответ дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Всякое ограниченное сверху непустое числовое множество имеет верхнюю грань, а всякое ограниченное снизу непустое числовое множество имеет нижнюю грань.*

Доказательство. Пусть E — ограниченное сверху непустое числовое множество, $E \subset \boldsymbol{R}$. Обозначим через B множество всех чисел, ограничивающих сверху множество E, а через A — все остальные действительные числа. Покажем, что множества A и B образуют сечение в множестве действительных чисел и что число, производящее это сечение, является верхней гранью множества E.

Прежде всего убедимся, что A и B образуют сечение. Действительно, поскольку в множество A отнесены все числа, не попавшие в множество B, то их объединение $A \cup B$ составляет все множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$:

$$A \cup B = \boldsymbol{R}. \tag{2.10}$$

Множество E — ограничено сверху. Это означает, что существует число, обозначим его через b, ограничивающее сверху множество B. Тогда, согласно определению множества B, имеем $b \in B$ и, следовательно, множество B не пусто:

$$B \neq \varnothing. \tag{2.11}$$

Докажем, что и множество A не пусто. По условию множество E не пусто. Это означает, что существует по крайней мере одно число $x \in E$. Тогда число $x-1$ заведомо не ограничивает сверху множество A, ибо $x-1<x$, $x \in E$, т. е. в множестве E нашелся элемент x, больший чем $x-1$. Таким образом, $x-1 \notin B$, ибо множество B состоит только из чисел, ограничивающих сверху множество B. Поэтому $x-1 \in A$, ибо к множеству A отнесены все числа, не вошедшие в множество B. Итак, множество A также не пусто:

$$A \neq \varnothing. \tag{2.12}$$

Покажем теперь, что каждое число $a \in A$ меньше любого числа $b \in B$:

$$a < b. \tag{2.13}$$

Допустим противное: пусть найдутся такие числа $a \in A$ и $b \in B$, что $a \geqslant b$. Тогда, поскольку число b ограничивает сверху множество E, в силу неравенства $a \geqslant b$ оказалось бы, что и число a ограничивает сверху множество E и, следовательно, принадлежит множеству B, $a \in B$. Таким образом, число a принадлежит одновременно как множеству A, так и множеству B. Это невозможно, ибо к множеству A были отнесены только те числа, которые не содержатся в множестве B. Полученное противоречие показывает, что неравенство $a \geqslant b$ при условии $a \in A$, $b \in B$, невозможно и, тем самым, выполняется неравенство (2.13).

Выполнение условий (2.10)—(2.13) означает, что множества A и B действительно образуют сечение (см. определение 1 в п. 2.1). Пусть β — число, производящее это сечение, $\beta = A|B$. Такое число существует в силу непрерывности действительных чисел (см. свойство V в п. 2.1).

Покажем, что число β ограничивает сверху множество E. Если бы это было не так, то нашлось бы такое число $x \in E$, что $x > \beta$. Выберем какое-либо y так, чтобы $\beta < y < x$ (рис. 5). Поскольку $y > \beta$ и $\beta = A|B$, то $y \in B$ и, следовательно, число y ограничивает сверху множество E, ибо класс B состоит только из таких чисел. Но это заведомо невозможно, так как $y < x$ и $x \in E$, т. е. y меньше некоторого числа из E и потому не ограничивает сверху это множество. Полученное противоречие означает, что число β ограничивает сверху множество E и потому $\beta \in B$. Поскольку β производит сечение $A|B$, то оно может являться либо наибольшим в классе A, если оно принадлежит этому классу, либо наименьшим в классе B, если оно ему принадлежит. В нашем случае, как было показано, имеет место второй случай: $\beta \in B$; следовательно, $\beta = \min B$. Таким образом, число β является наименьшим среди всех чисел множества B, т. е. всех чисел, ограничивающих сверху множество E. Это и означает, что число β является верхней гранью множества E, $\beta = \sup E$.

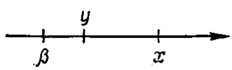


Рис. 5

Если теперь E — непустое ограниченное снизу числовое множество, то отнесем к классу A все числа, ограничивающие снизу множество E, а к классу B все остальные. Далее, рассуждая аналогично рассмотренному случаю верхней грани, можно показать, что множества A и B образуют сечение в множестве действительных чисел, а число α, производящее это сечение, является нижней гранью множества E, $\alpha = \inf E$.

Впрочем, утверждение о существовании нижней грани у ограниченного снизу непустого множества можно получить и из уже доказанного утверждения о существовании верхней грани у непустого ограниченного сверху множества. Для этого достаточно заметить, что если E — ограниченное снизу множество, то множество E^* всех чисел $-x$, где $x \in E$, т. е. множество на числовой прямой, симметричное с множеством E относительно нуля, является уже ограниченным сверху множеством (рис. 6). Действительно, если число a ограничивает снизу множество E, то число $-a$ ограничивает сверху множество E^*. Отсюда легко следует, что $\inf E = -\sup E^*$. $\square$

Теорема о существовании верхних и нижних граней принадлежит к так называемым чистым теоремам существования: в ней доказывается, что при определенных условиях у множества существует верхняя, соответственно нижняя грань. Однако из рассуждений, проведенных при доказательстве этой теоремы, не следует способа нахождения этих граней в конкретном случае.

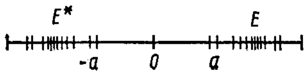


Рис. 6

Это следует из того, что построение множества B, с помощью которого проводилось доказательство теоремы и которое состояло из всех чисел, ограничивающих сверху рассматриваемое множество, равносильно отысканию верхней грани β этого множества. В действительности задача нахождения верхней (нижней) грани множества, заданного какими-либо своими свойствами, может оказаться очень трудной задачей.

Если множество неограничено сверху (снизу), то, как уже отмечалось, никакое число не может являться его верхней (нижней) гранью, так как вообще нет чисел, которые его ограничивают сверху (снизу). Для удобства вводится следующее определение.

Верхней гранью неограниченного сверху множества называется $+\infty$, *а нижней гранью неограниченного снизу множества называется* $-\infty$.

Это определение естественно, так как при соглашениях, принятых относительно употребления символов $+\infty$ и $-\infty$ в п. 2.5, так определенные бесконечные грани множеств также удовлетворяют условиям 1° и 2° определений 6′ и 7′.

Удобство же этого определения состоит в том, что теперь *каждое непустое числовое множество имеет верхнюю грань, принадлежащую расширенному множеству действительных чисел.* При этом, если заданное множество ограничено сверху, то его верхняя грань конечна, если же оно неограничено сверху, то бесконечна и равна $+\infty$. Аналогичное утверждение справедливо и для нижней грани.

Упражнения. 4. Пусть заданы числовые множества X_i, $i=1, 2, \ldots, n$, и пусть

$$X \overset{\text{def}}{=} \{x : x = x_1 + \ldots + x_n,\ x_i \in X_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Доказать, что $\sup X = \sum_{i=1}^{n} \sup X_i$.

5. Пусть заданы два числовых множества X и Y и пусть

$$Z \overset{\text{def}}{=} \{z : z = x - y,\ x \in X,\ y \in Y\}.$$

Доказать, что $\sup Z = \sup X - \inf Y$.

Покажем теперь, что из теоремы о существовании верхних и нижних граней вытекают два важных свойства действительных чисел, одно из которых обычно называют свойством Архимеда*) (конечно, правильнее было бы сказать: свойство чисел, указанное Архимедом, но это очень длинно), а второе принципом вложенных отрезков.

2.9. СВОЙСТВО АРХИМЕДА

Свойство Архимеда действительных чисел состоит в следующем.

Теорема 2. *Каково бы ни было действительное число a, существует такое натуральное число n, что $n > a$, т. е.*

$$(\forall a \in \boldsymbol{R})\,(\exists n \in \boldsymbol{N}) : n > a.$$

Доказательство. Допустим, что свойство Архимеда не выполняется. Это означает, что существует такое число a, что для всех натуральных n выполняется неравенство $n \leqslant a$, т. е. $(\exists a \in \boldsymbol{R})\,(\forall n \in \boldsymbol{N}) : n \leqslant a$. Это значит, что число a ограничивает сверху множество натуральных чисел. Поэтому множество натуральных чисел, как всякое непустое ограниченное сверху числовое множество, согласно теореме 1, п. 2.8 имеет конечную верхнюю грань. Обозначим ее через β, $\beta = \sup \boldsymbol{N}$.

Поскольку $\beta - 1 < \beta$, то согласно свойству 2° верхней грани в определении 6′, п. 2.8 существует такое натуральное число n, что $n > \beta - 1$. Но тогда $n + 1 > \beta$, причем согласно определению натуральных чисел $n + 1 \in \boldsymbol{N}$. Неравенство $n + 1 > \beta$ противоречит тому, что $\beta = \sup \boldsymbol{N}$, так как верхняя грань множества ограничивает его сверху (см. свойство 1° верхней грани в определении 6′ п. 2.8). Полученное противоречие показывает, что указанного числа a не существует, т. е. свойство Архимеда справедливо. □

Следствие. *Каковы бы ни были числа a и b, $0 < a < b$, существует такое натуральное число n, что $na > b$.*

Действительно, согласно свойству Архимеда для числа b/a существует такое натуральное n, что $n > b/a$. Это число n искомое, так как, умножая неравенство $n > b/a$ на положительное число a, получаем $na > b$.

Это утверждение имеет простой геометрический смысл: если взять два отрезка соответственно длин a и b, $0 < a < b$, то последовательно откладывая на большем отрезке от одного из его концов меньший отрезок, мы через конечное число шагов выйдем за пределы большего отрезка.

Пример. Пусть множество E состоит из чисел вида $\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Найдем $\sup E$ и $\inf E$.

---

*) Архимед (287—212 до н. э.) — древнегреческий математик и механик.

Поскольку множество E имеет наибольшее число 1, то оно и является его верхней гранью: $\sup\limits_{n\in N}\left\{\frac{1}{n}\right\}=1$. Для отыскания нижней грани множества E заметим, что для любого $n=1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $\frac{1}{n}>0$, т. е. число ноль ограничивает снизу множество E. Покажем, что оно наибольшее среди всех таких чисел. Пусть $\varepsilon>0$, тогда согласно свойству Архимеда существует такое натуральное n, что $n>\frac{1}{\varepsilon}$, или, что то же самое, $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Это неравенство показывает, что любое число $\varepsilon>0$ уже не ограничивает снизу множество E, ибо $\frac{1}{n}\in E$ при любом $n=1, 2, \ldots$. Итак, ноль — наибольшее из всех чисел, ограничивающих снизу множество E, т. е. $\inf\limits_{n\in N}\left\{\frac{1}{n}\right\}=0$.

2.10. ПРИНЦИП ВЛОЖЕННЫХ ОТРЕЗКОВ

Прежде всего поясним, какая система отрезков называется вложенной.

Определение 8. *Система числовых отрезков*

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \ldots,\ [a_n, b_n],\ \ldots,\quad a_n\in \boldsymbol{R},\ b_n\in \boldsymbol{R},\quad n=1, 2, \ldots,$$

называется системой вложенных отрезков, если

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n\leqslant\ldots\leqslant b_n\leqslant\ldots\leqslant b_2\leqslant b_1, \tag{2.14}$$

т. е. если каждый следующий отрезок $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ *содержится в предыдущем* $[a_n, b_n]$ (рис. 7).

Теорема 3. *Для всякой системы вложенных отрезков существует хотя бы одно число, которое принадлежит всем отрезкам данной системы.*

Это свойство действительных чисел называют также *непрерывностью множества действительных чисел в смысле Кантора* *⁾.

Доказательство. Пусть $\Omega=\{[a_n, b_n]\}$ — система вложенных отрезков. В силу неравенств (2.14) множество $\{a_n\}$ всех левых концов отрезков системы Ω ограничено сверху, например, числом b_1. Поэтому согласно теореме о существовании верхней грани (см. теорему 1 в п. 2.8) у множества $\{a_n\}$ существует конечная верхняя грань (рис. 7)

$$\alpha=\sup\{a_n\}. \tag{2.15}$$

Поскольку правый конец b_n любого отрезка системы Ω в силу неравенств (2.14) ограничивает сверху множество $\{a_n\}$, а α явля-

---

*⁾ Г. Кантор (1845—1918) — немецкий математик.

ется верхней гранью этого множества, т. е. наименьшим из всех чисел, ограничивающих $\{a_n\}$ сверху, то для всех $n=1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\alpha \leqslant b_n. \tag{2.16}$$

Это означает, что множество $\{b_n\}$ всех правых концов отрезков системы Ω ограничено снизу, и потому у него существует конечная нижняя грань

$$\beta = \inf \{b_n\}. \tag{2.17}$$

Поскольку число α согласно (2.16) ограничивает снизу множество $\{b_n\}$, а нижняя грань β этого множества является наибольшим среди всех таких чисел, то $\beta \geqslant \alpha$. Итак, имеем, что для всех $n=1, 2, \ldots$ справедливы неравенства

$$a_n \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_n. \tag{2.18}$$

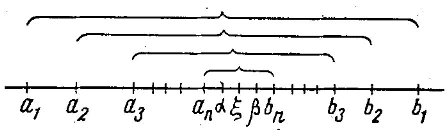


Рис. 7

Отсюда следует, что каждая точка отрезка $[\alpha, \beta]$ содержится во всех отрезках системы Ω: если $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, то для всех $n=1, 2, \ldots$ имеет место неравенство $a_n \leqslant x \leqslant b_n$, т. е. $x \in [a_n, b_n]$. $\square$

Замечание. При доказательстве теоремы 3 было показано, что каждая точка отрезка $[\alpha, \beta]$ принадлежит всем отрезкам системы Ω и, следовательно, их пересечению, т. е.

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]. \tag{2.19}$$

Легко убедиться и в обратном включении. Если $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, то для всех $n=1, 2, \ldots$ имеем $a_n \leqslant x \leqslant b_n$. Поскольку число x ограничивает сверху множество $\{a_n\}$, а $\alpha = \sup \{a_n\}$ является наименьшим среди всех таких чисел, то $\alpha \leqslant x$. Аналогично показывается, что $x \leqslant \beta$. Таким образом точка x принадлежит отрезку $[\alpha, \beta]$, т. е.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \subset [\alpha, \beta]. \tag{2.20}$$

Из (2.19) и (2.20) следует, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = [\alpha, \beta]. \tag{2.21}$$

Определение 9. *Пусть задана система отрезков* $[a_n, b_n]$, $a_n \in R$, $b_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$. *Будем говорить, что длина* $b_n - a_n$ *отрезков этой системы стремится к нулю, если для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* n_ε, *что для всех номеров* $n \geqslant n_\varepsilon$ *выполняется неравенство* $b_n - a_n < \varepsilon$.

В курсе элементарной математики вводится понятие предела последовательности. Сформулированное определение в терминах предела означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. В нашем курсе пределу последовательности будет посвящен следующий параграф.

Отметим, что термин «номер» является синонимом термина «натуральное число». Индекс ε у числа n_ε показывает, что это число зависит от задаваемого числа $\varepsilon < 0$.

Теорема 4. *Для всякой системы* $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, *вложенных отрезков с длинами, стремящимися к нулю, существует единственная точка* ξ, *принадлежащая всем отрезкам данной системы* (см. рис. 7), *причем*

$$\xi = \sup_{n \in N}\{a_n\} = \inf_{n \in N}\{b_n\}. \tag{2.22}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное, но фиксированное число. Из условия, что длины отрезков $[a_n, b_n]$ стремятся к нулю следует, что существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняются неравенства $b_n - a_n < \varepsilon$.

Поскольку из неравенства (2.18) следует, что $\beta - \alpha \leqslant b_n - a_n$, то $0 \leqslant \beta - \alpha < \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Это возможно только в случае, когда $\alpha = \beta$ (если бы $\beta > \alpha$, то, например, при $\varepsilon = \beta - \alpha > 0$ указанное неравенство превратилось бы в неверное утверждение $\beta - \alpha < \beta - \alpha$). Таким образом, отрезок $[\alpha, \beta]$ в этом случае превращается в точку, которую обозначим через $\xi = \alpha = \beta$.

В силу формулы (2.21) это и означает, что существует лишь единственная точка ξ, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$. Формула (2.22) следует из (2.15) и (2.17). $\square$

Очень часто в различных доказательствах применяется следующая конструкция построения системы вложенных отрезков с длинами, стремящимися к нулю. Берется отрезок $[a, b]$ и точкой $(a+b)/2$ делится на два равных отрезка $[a, (a+b)/2]$ и $[(a+b)/2; b]$ длины $(b-a)/2$. Далее выбирается один из этих отрезков (какой именно это зависит от условий конкретной задачи), обозначается через $[a_1, b_1]$ и снова своей средней точкой делится на два равных отрезка, один из которых обозначается $[a_2, b_2]$ и т. д. В результате получается система вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, с длинами $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Покажем, что эти длины стремятся к нулю.

Действительно, для всякого $\varepsilon > 0$, согласно свойству Архимеда, найдется такое натуральное n_ε, что $n_\varepsilon > \frac{b-a}{\varepsilon}$, но тогда и для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ будет выполняться неравенство $n > \frac{b-a}{\varepsilon}$ и, следовательно, неравенство $\frac{b-a}{n} < \varepsilon$. Замечая, что

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \ldots > n,$$

получаем $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ для $n = 1, 2, \ldots$. Поэтому для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ справедливо неравенство $\frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n} < \varepsilon$. Это и означает стремление к нулю длин отрезков $[a_n, b_n]$ при возрастании n.

Заметим, что принцип вложенных отрезков является свойством, присущим именно множеству действительных чисел. Так, поле одних только рациональных чисел уже не обладает аналогичным свойством.

Например, если взять последовательности «рациональных отрезков» [1; 2], [1,4; 1,5], [1,41; 1,42], [1,414; 1,415] *), т. е. последовательность множеств рациональных чисел, лежащих на отрезках, концы a_n и b_n, $n = 1, 2, \ldots$ которых суть значения $\sqrt{2}$, вычисленные соответственно с недостатком и с избытком с точностью $1/10^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ **), то, очевидно, не существует никакого рационального числа, принадлежащего всем этим отрезкам. В самом деле, таким числом могло быть только число $\sqrt{2}$ (почему?), которое, однако, не является рациональным ***).

Можно доказать и более точное утверждение. Назовем поле архимедовым, если для него выполняется свойство Архимеда, т. е. выполняется утверждение теоремы 2 из п. 2.9. Свойство упорядоченного поля, состоящее в том, что каждое сечение этого поля определяется некоторым его элементом, назовем непрерывностью поля по Дедекинду (см. свойство V в п. 2.1), а свойство упорядоченного поля, выражающееся в том, что каждая система его вложенных отрезков имеет непустое пересечение — непрерывностью поля по Кантору.

Для архимедовых упорядоченных полей можно показать, что их непрерывность по Дедекинду, непрерывность по Кантору и существование конечной верхней грани у каждого непустого ограниченного сверху множества эквивалентны между собой, т. е. из любого из этих свойств, принятого за аксиому, вытекают остальные два.

Нами было показано, что из непрерывности по Дедекинду следует существование конечной верхней грани у ограниченного

*) В случае, когда концы отрезка $[a, b]$ записаны в виде десятичной дроби, запятая между a и b заменяется точкой с запятой.

**) Это означает, что $a_n^2 \leqslant 2 \leqslant b_n^2$ и $b_n - a_n = 1/10^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

***) Доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$, обычно проводимое в элементарной математике, воспроизведено ниже в п. 6.3.

сверху множества, откуда в свою очередь следует непрерывность по Кантору. Для того чтобы завершить доказательство указанной эквивалентности трех понятий непрерывности архимедовых полей, достаточно показать, что из непрерывности по Кантору следует непрерывность по Дедекинду. Доказательство этого утверждения можно найти, например, в книге Л. Д. Кудрявцева «Математический анализ», том I, М., 1973.

Выше отмечалось (см. п. 2.4*), что все непрерывные по Дедекинду упорядоченные поля изоморфны между собой. Теперь мы видим, что всякое архимедово упорядоченное поле, обладающее одним из трех указанных свойств непрерывности, также изоморфно множеству действительных чисел (при этом при наличии непрерывности по Дедекинду можно требование архимедовости поля отбросить: как было показано в п. 2.9, оно в этом случае всегда имеет место).

В заключение обратим еще внимание на то, что утверждение, аналогичное теореме 3, оказывается уже неверным для числовых промежутков других типов, чем отрезки. Например, система вложенных интервалов $(0,\ 1/n)$, $n=1,\ 2,\ \ldots$ каждый последующий интервал содержится в предыдущем, т. е.

$$\left(0,\ \frac{1}{n+1}\right)\subset\left(0,\ \frac{1}{n}\right),\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

имеет, как легко видеть, пустое пересечение.

Задача 1. Доказать с помощью сечений, что для любого числа $a>0$ и любого натурального n существует корень $\sqrt[n]{a}$.

§ 3. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Прежде всего определим понятие числовой последовательности.

Определение 1. *Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число a_n (при этом разным натуральным числам n могут оказаться поставленными в соответствие и одинаковые числа). Совокупность элементов a_n* *), *$n=1,\ 2,\ \ldots$, называется числовой последовательностью, или просто последовательностью; каждый элемент a_n называется элементом (или членом) этой последовательности, а число n — его номером.*

Числовую последовательность с элементами a_n будем обозначать либо a_n, $n=1,\ 2,\ \ldots$, либо $\{a_n\}$.

*) Здесь под элементом понимается пара, состоящая из натурального числа и соответствующего ему при рассматриваемом соответствии действительного числа (называемого в дальнейшем значением данного элемента последовательности).

По самому определению, последовательность всегда содержит бесконечное множество элементов: любые два разных ее элемента отличаются по крайней мере своими номерами, которых бесконечно много.

Очевидно, что числовая последовательность является частным случаем функции. Именно, последовательность является *функцией, определенной на множестве натуральных чисел и принимающей значения в множестве действительных чисел*, т. е. функцией вида $f: N \to R$ (см. п. 1.3*).

Иногда в качестве номеров бывает удобно употреблять не все натуральные числа, а лишь некоторые из них. Например, натуральные числа, начиная с некоторого натурального числа n_0: a_n, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$, или одни четные числа: a_n, $n = 2, 4, \ldots$. Случается, что для нумерации употребляются не только натуральные, но и другие числа, например a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (здесь в качестве еще одного номера добавлен нуль). Во всех этих случаях можно перенумеровать заново a_n, используя все натуральные числа m и только их. В первом примере следует положить $m = n - n_0 + 1$, во втором — $m = \frac{n}{2}$, в третьем — $m = n + 1$. Поэтому в подобных случаях также говорится, что a_n образуют последовательность и, конечно, указывается, какие значения принимают номера n.

Определение 2. *Число a называется пределом данной последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство*

$$|a_n - a| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

При этом пишут $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, или $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Употребляя логические символы, это определение можно записать в виде:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_\varepsilon \in N)\,(\forall n \geqslant n_\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon.$$

Последовательность, у которой существует предел, называется *сходящейся*.

Таким образом, последовательность $\{a_n\}$ является сходящейся, если существует такое число a, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

С употреблением логических символов это определение выглядит следующим образом:

$$(\exists a \in R)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_\varepsilon \in N)\,(\forall n \geqslant n_\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon.$$

Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется расходящейся.

Отметим, что неравенство (3.1) равносильно неравенству

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon.$$

Напомним, что для заданного числа $x \in \boldsymbol{R}$ всякий интервал вида $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$, называется *ε-окрестностью*, или просто окрестностью, числа (точки) x и обозначается через $U(x,\ \varepsilon)$ или $U(x)$.

С помощью понятия окрестности определение предела последовательности можно перефразировать следующим образом.

Определение 2′. *Число a является пределом последовательности $\{a_n\}$, если в любой его окрестности содержатся почти все члены последовательности, т. е. все члены последовательности, за исключением их конечного числа.*

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ и $a_n \leqslant a$ (соответственно $a_n \geqslant a$) для всех $n=1,\ 2,\ \ldots$, то говорят, что последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу *a слева* (соответственно *справа*) и иногда вместо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a-0$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a+0$).

Понятие предела последовательности связано в определенном смысле с встречающейся на практике задачей получения значения некоторой интересующей нас величины с наперед заданной фиксированной точностью $\varepsilon>0$. Последовательные приближенные значения a_n рассматриваемой величины могут получаться в результате проведения каких-либо экспериментов, или вычисления по каким-нибудь рекуррентным формулам или каким-то другим путем. Эта задача будет, очевидно, решена, если найдется номер n_ε, начиная с которого все значения a_n будут отклоняться от точного значения рассматриваемой величины в пределах заданной точности. Конечно, если указанное n_ε существует лишь для одного данного $\varepsilon>0$, это еще не означает, что последовательность $\{a_n\}$ сходится: в определении предела последовательности требуется, чтобы соответствующий номер n_ε можно было бы подобрать для любого $\varepsilon>0$.

Примеры. 1. Последовательность $\{1/n\}$ сходится и имеет своим пределом ноль. В самом деле, каково бы ни было $\varepsilon>0$, по свойству Архимеда (см. п. 2.9) действительных чисел существует такое натуральное число n_ε, что $n_\varepsilon>\frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $0<\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n_\varepsilon}<\varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Очевидно, что последовательность $\{1/n\}$ сходится к нулю справа.

2. Последовательность $\left\{\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ является расходящейся. В самом деле, каково бы ни было число a, вне его ε-окрестности,

например при $0<\varepsilon<1$, заведомо лежит бесконечное число членов данной последовательности, и, значит, оно не является ее пределом.

3. Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2}n=$ $=0$, что следует (почему?) из того, что

$$\left|\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2}n\right|\leqslant\frac{1}{n} \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Сходящаяся последовательность $\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ не является последовательностью, сходящейся к своему пределу слева или справа.

4. Последовательность $\{n\}$ расходится.

Действительно, каково бы ни было число a, например, для $\varepsilon=1$ найдется согласно свойству Архимеда такое натуральное n_0, что $n_0>a+1$. Следовательно, и для всех натуральных $n\geqslant n_0$ будем иметь $n>a+1$. Поэтому никакое число a не может являться пределом последовательности $\{n\}$.

В примерах 2 и 4 при доказательстве расходимости последовательностей было использовано позитивное определение того обстоятельства, что число a не является пределом данной последовательности. Сформулируем это определение.

Определение 3. *Число a не является**) *пределом последовательности $\{a_n\}$, если существует такое $\varepsilon>0$, что для всякого натурального n существует такое натуральное $m_n>n$***), *что*

$$|a_{m_n}-a|\geqslant\varepsilon.$$

В логических символах это определение имеет вид

$$\lim_{n\to\infty}a_n\neq a\Longleftrightarrow(\exists\varepsilon>0)\,(\forall n\in N)\,(\exists m>n):|a_m-a|\geqslant\varepsilon.$$

Напомним, что при формулировании отрицания какого-либо утверждения логические символы существования $\exists$ и всеобщности $\forall$ меняются местами. Именно так и произошло в данном случае, в чем легко убедиться, сравнив запись определений 2 и 4 в логических символах.

Заметим, что определение 3 не является самостоятельным определением — оно является логическим следствием определения 2.

Упражнения. 1. Сформулировать позитивное определение понятия расходящейся последовательности.

2. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

Задача 2. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится тогда и только тогда, когда существует такое число $\varepsilon>0$, что, каково бы ни было действи-

---

*) Здесь частица «не» входит не в определение, а в определяемое понятие.

**) Индекс n у числа m_n показывает, что это число зависит от выбора числа n.

тельное число a и каков бы ни был номер n, найдется такой номер $m>n$, для которого выполняется неравенство $|x_m-a|\geqslant\varepsilon$.

Упражнение 3. Записать позитивное определение расходящейся последовательности и условие задачи 2 в логических символах и сравнить их.

В рассмотренных выше примерах существование или отсутствие пределов у данных последовательностей было довольно очевидным, а доказательства сводились к элементарной проверке определения предела последовательности.

В качестве более сложного примера отыскания предела последовательности докажем следующее утверждение.

Пример 5. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то последовательность средних арифметических ее членов*

$$y_n=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

также сходится и притом к тому же пределу, что и сама последовательность $\{x_n\}$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Прежде всего заметим, что для любых натуральных чисел n_0 и $n>n_0$ имеет место равенство

$$y_n-a=\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}-a=$$
$$=\frac{x_1+\ldots+x_{n_0}-n_0a}{n}+\frac{(x_{n_0+1}-a)+\ldots+(x_n-a)}{n}.\tag{3.2}$$

Если теперь задано $\varepsilon>0$, то согласно определению предела существует такой номер n_0, что для всех $n\geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{3.3}$$

Поскольку $x_1+\ldots+x_{n_0}-n_0a$ — фиксированное число, а $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, то, как нетрудно видеть, и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+\ldots+x_{n_0}-n_0a}{n}=0.$$

Следовательно, существует такой номер m_0, что для всех $n\geqslant m_0$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{x_1+\ldots+x_{n_0}-n_0a}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{3.4}$$

Пусть $n_\varepsilon = \max\{n_0, m_0\}$. Тогда для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ в силу (3.2), (3.3) и (3.4) получим

$$|y_n - a| \leqslant \left|\frac{x_1 + \ldots + x_{n_0} - n_0 a}{n}\right| + \frac{|x_{n_0+1} - a| + \ldots + |x_n - a|}{n} <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. $\square$

Упражнение 4. Доказать: 1) что отбрасывание или замена конечного числа элементов последовательности не влияет на ее сходимость, причем в случае сходящейся последовательности не влияет и на величину предела.

2) если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$ и $z_n = \begin{cases} x_k & \text{при } n = 2k-1, \\ y_k & \text{при } n = 2k, \end{cases}$ $k = 1, 2, \ldots$, то и $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$.

3.2. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Для удобства вводится также понятие последовательностей, имеющих своим пределом бесконечность. Такие последовательности называются *бесконечно большими*. Определим их.

Определение 4. *Последовательность $\{x_n\}$ называют бесконечно большой, если для любого числа ε существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n| > \varepsilon$.*

В этом случае, употребляя символ ∞, пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Если последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, такова, что для любого числа ε *) существует такое n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $x_n > \varepsilon$ (соответственно $x_n < \varepsilon$), то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $\left(\text{соответственно } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty\right)$. Во всех этих случаях говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет *бесконечный предел*, соответственно равный ∞, $+\infty$ или $-\infty$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, т. е. $\{x_n\}$ является бесконечно большой последовательностью. Очевидно, что бесконечно большие последовательности не имеют предела в том смысле, как он был определен в п. 3.1. Применение в этом случае обозначения «lim» и использование слова «предел» является традиционным.

В дальнейшем всегда под пределом последовательности будем понимать конечный предел, т. е. число, если, конечно, не оговорено противное.

---

*) Следует обратить внимание на то, что здесь ε не предполагается положительным.

Термин «сходящаяся последовательность» употребляется только для последовательностей, имеющих конечный предел.

С помощью понятия окрестности можно всем сформулированным выше определениям конечного или бесконечного предела последовательности придать более единообразную форму. В п. 2.6 было введено понятие окрестности чисел $x \in \boldsymbol{R}$ и бесконечно удаленных точек $+\infty$ и $-\infty$. Аналогично можно для любого $\varepsilon > 0$ определить и понятие ε-окрестности $U(\infty, \varepsilon)$ бесконечности ∞ без знака:

$$U(\infty, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} U(+\infty, \varepsilon) \cup U(-\infty, \varepsilon).$$

ε-окрестность $U(\infty, \varepsilon)$ называют также просто окрестностью бесконечности ∞ и обозначают через $U(\infty)$.

Используя понятие окрестности, определение конечного и любого бесконечного предела числовой последовательности можно сформулировать единым образом.

Определение 5. *Элемент a, являющийся числом или одной из бесконечностей ∞, $+\infty$, $-\infty$, называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если какова бы ни была окрестность $U(a)$ элемента a, для нее существует такой номер $n_0 \in \boldsymbol{N}$, что для всех $n \geqslant n_0$, $n \in \boldsymbol{N}$, справедливо включение $x_n \in U(a)$.*

Наряду с числовыми последовательностями в нашем курсе будут встречаться последовательности точек расширенной числовой прямой, т. е. занумерованные натуральными числами совокупности $\{x_n\}$ элементов расширенного множества действительных чисел $\overline{\boldsymbol{R}}$ (см. п. 2.5). Таким образом, элементами этих последовательностей наряду с действительными числами могут быть бесконечно удаленные точки $+\infty$ и $-\infty$. Для таких последовательностей также можно ввести понятие предела, аналогичное пределу числовых последовательностей и содержащее его в себе как частный случай.

Определение 6. *Элемент a, являющийся числом или одной из бесконечностей ∞, $+\infty$, $-\infty$, называется пределом последовательности точек $x_n \in \overline{\boldsymbol{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, если какова бы ни была окрестность $U(a)$ элемента a, для нее существует такой номер $n_0 \in \boldsymbol{N}$, что для всех $n \geqslant n_0$, $n \in \boldsymbol{N}$, выполняется включение $x_n \in U(a)$.*

Если последовательность $x_n \in \overline{\boldsymbol{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, такова, что все ее члены равны между собой: $x_n = x_m$ при всех $n \in N$ и $m \in \boldsymbol{N}$, то она, как известно, называется *стационарной*.

Всякая стационарная последовательность точек расширенного множества действительных чисел имеет предел, равный общему значению ее членов. Это сразу следует из того, что каждая точка расширенной числовой прямой содержится в любой своей окрестности. В самом деле, если для всех $n \in N$ имеет место $x_n = a \in \overline{\boldsymbol{R}}$, то для любой окрестности $U(a)$ точки a и всех $n \in N$ очевидным образом выполняется включение $x_n = a \in U(a)$.

В дальнейшем под последовательностью всегда понимается числовая последовательность, т. е. последовательность, элементами которой являются действительные числа, если, конечно, специально не оговорено что-либо другое.

Упражнения. 5. Привести пример неограниченной последовательности, не являющейся бесконечно большой.

6. Доказать, что если $a_n \leqslant |b_n|$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

7. Доказать, что любая подпоследовательность бесконечно большой последовательности также является бесконечно большой последовательностью.

8. Доказать: почленное произведение бесконечно большой последовательности на последовательность, абсолютная величина всех членов которой ограничена снизу положительной постоянной, является бесконечно большой последовательностью.

3.3. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Докажем прежде всего корректность определения предела в том смысле, что если он существует, то он единствен.

Теорема 1. *Последовательность точек расширенной числовой прямой может иметь на этой прямой только один предел.*

Следствие. *Числовая последовательность может иметь только один предел, конечный или бесконечный определенного знака.*

Доказательство теоремы. Допустим, что утверждение теоремы несправедливо. Это означает, что существует последовательность $x_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, у которой имеется, по крайней мере, два различных предела $a \in \overline{R}$ и $b \in \overline{R}$. Выберем $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ так, чтобы ε_1-окрестность точки a не пересекалась с ε_2-окрестностью точки b. Это всегда можно сделать согласно лемме п. 2.6 (см. рис. 4, *а*, *б*, *в* и *г*). В силу определения предела из условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ следует, что существует такой номер $n_1 \in N$, что для всех номеров $n \geqslant n_1$, $n \in N$, имеет место включение $x_n \in U(a, \varepsilon_1)$, а из условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ следует, что существует такое $n_2 \in N$, что для всех $n \geqslant n_2$, $n \in N$, справедливо включение $x_n \in U(b, \varepsilon_2)$. Следовательно, если обозначить через n_0 наибольший из номеров n_1 и n_2: $n_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{n_1, n_2\}$, то для любого $n \geqslant n_0$ будем одновременно иметь $x_n \in U(a, \varepsilon_1)$ и $x_n \in U(b, \varepsilon_2)$, т. е. $x_n \in U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2)$. Это противоречит условию $U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2) = \varnothing$. $\square$

Следствие является частным случаем утверждения теоремы.

Для единственности бесконечного предела последовательности элементов из $\overline{R}$ существенным является рассмотрение лишь бесконечностей определенного знака, так как если последовательность имеет своим пределом бесконечность со знаком, то одновременно ее пределом является и бесконечность без знака. Например, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, то, конечно, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$.

Докажем теперь некоторые простые свойства конечных и бесконечных пределов.

I. *Если* $x_n\in\overline{R}$, $y_n\in\overline{R}$, $z_n\in\overline{R}$, $n=1, 2, \ldots,$

$$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n \tag{3.5}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} z_n=a\in\overline{R}, \tag{3.6}$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$.

Доказательство. Пусть зафиксировано $\varepsilon>0$. Тогда согласно определению предела существуют такие $n_1\in N$ и $n_2\in N$, что для всех $n\geqslant n_1$, $n\in N$, выполняется включение $x_n\in U(a, \varepsilon)$, а для всех $n\geqslant n_2$, $n\in N$, — включение $z_n\in U(a, \varepsilon)$. Следовательно, если обозначить через n_0 наибольшее из чисел n_1 и n_2: $n_0\overset{\text{def}}{=}\max\{n_1, n_2\}$, то для всех номеров $n\geqslant n_0$, $n\in N$, будем иметь $x_n\in U(a, \varepsilon)$, $z_n\in U(a, \varepsilon)$, а поэтому и $[x_n, z_n]\subset U(a, \varepsilon)$ (см. замечание 1 в п. 2.6). Неравенство (3.5) означает, что $y_n\in[x_n, z_n]$. Следовательно, при $n\geqslant n_0$ имеет место $y_n\in U(a, \varepsilon)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$. $\square$

II. *Если* $x_n\leqslant y_n$, $x_n\in\overline{R}$, $y_n\in\overline{R}$, $n=1, 2, \ldots,$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ $\left(\textit{соответственно}, \lim\limits_{n\to\infty} y_n=-\infty\right)$, *то и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$ $\left(\textit{соответственно}, \lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty\right)$.

Это свойство является усилением свойства I для бесконечных пределов: в этом случае вторая последовательность $\{z_n\}$ не нужна.

Доказательство. Из условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $n_\varepsilon\in N$, что для всех $n\geqslant n_\varepsilon$, $n\in N$, выполняется условие $x_n>\varepsilon$. В силу неравенства $x_n\leqslant y_n$, очевидно, что для всех $n\geqslant n_\varepsilon$ имеет также место неравенство $y_n>\varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$.

Аналогично рассматривается случай $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=-\infty$. $\square$

III. *Если* $x_n\in\overline{R}$, $y_n\in\overline{R}$, $n=1, 2, \ldots,$ *и существуют пределы* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$, *причем* $a<b$, $a\in\overline{R}$, $b\in\overline{R}$, *то существует такой номер* $n_0\in N$, *что для всех номеров* $n\geqslant n_0$, $n\in N$, *выполняется неравенство* $x_n<y_n$.

Следствие. *Если существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, $x_n\in\overline{R}$, $n=1, 2, \ldots,$ $a\in\overline{R}$ *и* $a<c$ (*соответственно*, $a>c$), $c\in\overline{R}$, *то суще-*

ствует такое $n_0 \in N$, *что для всех* $n \geqslant n_0$, $n \in N$, *справедливо неравенство* $x_n < c$ (соответственно, $x_n > c$).

Доказательство. Выберем какие-либо числа $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ так, чтобы окрестности $U(a, \varepsilon_1)$ и $U(b, \varepsilon_2)$ не пересекались (см. п. 2.6). Тогда ясно, что в силу неравенства $a < b$ для любых $x \in U(a, \varepsilon_1)$ и $y \in U(b, \varepsilon_2)$ выполняется неравенство $x < y$ (см. замечание 2 в п. 2.6). В силу определения предела существуют такие $n_1 \in N$ и $n_2 \in N$, что при $n \geqslant n_1$, $n \in N$, выполняется включение $x_n \in U(a, \varepsilon_1)$, а при $n \geqslant n_2$, $n \in N$, — включение $y_n \in U(b, \varepsilon_2)$. Следовательно, если положить $n_0 \overset{\text{def}}{=} \max\{n_1, n_2\}$, то при $n \geqslant n_0$ будет справедливо неравенство $x_n < y_n$. □

Следствие вытекает из свойства III, если в нем в качестве последовательности $\{y_n\}$ взять стационарную последовательность $y_n = c$, $n = 1, 2, \ldots$, (см. п. 3.2).

IV. *Если существует* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \bar{R}$, $x_n \in \bar{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, *и для всех* $n \in N$ *справедливо неравенство* $x_n \leqslant b$ (*соответственно, неравенство* $x_n \geqslant b$), $b \in R$, *то* $a \leqslant b$ (*соответственно,* $a \geqslant b$).

Действительно, если бы оказалось, что $a > b$ (соответственно, $a < b$), то согласно следствию свойства III нашлось бы такое $n_0 \in N$, что при $n \geqslant n_0$, $n \in N$, имело бы место неравенство $x_n > b$ (соответственно, $x_n < b$), что противоречит предположению, что $x_n \leqslant b$ ($x_n \geqslant b$) для всех $n \in N$. □

Отметим, что нас в основном интересуют числовые последовательности. Последовательности же точек расширенной числовой прямой введены прежде всего для большей компактности изложения: они позволяют не рассматривать отдельно случаи конечных и бесконечных определенного знака пределов последовательностей. Исходя из основных целей, в дальнейшем определения и утверждения будут в основном формулироваться для числовых последовательностей, хотя многие из них безо всякого труда обобщаются на случай последовательностей точек расширенной числовой прямой.

Замечание. Если последовательность $\{a_n\}$ имеет конечный предел, равный a, и если фиксировано некоторое число $c > 0$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер, который будет, так же как и в определении предела, обозначаться n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < c\varepsilon.$$

Действительно, если положить $\varepsilon_1 = c\varepsilon$, то согласно определению предела последовательности существует такой номер n_{ε_1}, что для всех номеров $n \geqslant n_{\varepsilon_1}$, выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon_1 = c\varepsilon$$

и в качестве номера n_ε можно взять номер n_{ε_1}.

Например, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Полезным понятием является понятие подпоследовательности данной последовательности.

Определение 7. *Последовательность b_k, $k = 1, 2, \ldots$, называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$, если для любого k существует такое натуральное n_k, что $b_k = a_{n_k}$, причем $n_{k_1} < n_{k_2}$ тогда и только тогда, когда $k_1 < k_2$. Последовательность $\{b_k\}$ обозначается в этом случае также $\{a_{n_k}\}$ или a_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$.*

Иначе говоря, если дана какая-либо последовательность и из некоторого подмножества ее элементов образована новая последовательность, то она называется *подпоследовательностью исходной последовательности*, если порядок следования в ней элементов такой же, как и в данной последовательности.

Так, последовательность $1, 3, 5, \ldots, 2n+1, \ldots$ является, а последовательность $2, 1, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ не является подпоследовательностью натурального ряда чисел $1, 2, \ldots, n, \ldots$ В обоих случаях элементы последовательностей образуют подмножество *) множества натуральных чисел, но в первом случае члены последовательности расположены в том же порядке, как в натуральном ряде чисел, а во втором случае этот порядок нарушен.

Если $\{a_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности, то, очевидно, $n_k \geqslant k$, $k = 1, 2, \ldots$, и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty. \tag{3.7}$$

В дальнейшем мы будем неоднократно пользоваться следующей леммой.

Лемма. *Если последовательность точек расширенного множества действительных чисел имеет предел (конечный или равный ∞, $+\infty$ или $-\infty$), то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.*

Доказательство. Пусть $x_n \in \overline{\boldsymbol{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\{x_{n_k}\}$ — некоторая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где a — либо число, либо одна из бесконечностей ∞, $+\infty$, $-\infty$, то согласно определению 6 для любой окрестности $U(a)$ элемента a существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$,

---

*) Напомним (см. п. 1.1), что само множество также считается своим подмножеством.

$n \in N$, выполняется включение

$$x_n \in U(a). \tag{3.8}$$

В силу (3.7) для указанного n_0 существует такое $k_0 \in N$, что при всех $k \geqslant k_0$, $k \in N$, будет иметь место неравенство $n_k \geqslant n_0$ и, следовательно, в силу (3.8) — включение

$$x_{n_k} \in U(a).$$

Это и означает, что

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a.$$

Упражнение 9*. Пусть $k \longmapsto n_k$ — некоторая биекция множества натуральных чисел N на себя: $k \in N$, $n_k \in N$. Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится (расходится), то и последовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится (расходится), причем в случае сходимости последовательности $\{x_n\}$ или существования у нее какого-либо бесконечного предела последовательность $\{x_{n_k}\}$ имеет тот же предел.

3.4. ОГРАНИЧЕННОСТЬ СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Следует различать *последовательность* $\{a_n\}$, т. е. множество элементов a_n и *множество значений ее элементов*. Первое множество всегда бесконечно, так как состоит из совокупности элементов, отличающихся по крайней мере номерами $n = 1, 2, \ldots$ Второе множество состоит из всех чисел, являющихся значениями элементов данной последовательности, оно может быть и конечным. Например, последовательность $a_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, как и всякая последовательность, состоит из бесконечного числа элементов, а множество значений ее элементов состоит из одного числа 1.

Определение 8. *Последовательность называется ограниченной сверху (снизу), если множество значений ее элементов ограничено сверху (снизу).*

В терминах элементов последовательности это определение может быть перефразировано следующим образом.

Определение 8′. *Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число b, что для всех номеров $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $a_n \leqslant b$ (соответственно неравенство $a_n \geqslant b$).*

Определение 9. *Последовательность, ограниченная сверху и снизу, называется просто ограниченной.*

Очевидно, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда существует такое число b, что для всех номеров $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $|a_n| \leqslant b$.

Определение 10. *Последовательность, не являющаяся ограниченной (сверху, снизу), называется неограниченной (сверху, снизу).*

Например, последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ ограничены. Последовательность $\{n\}$ не ограничена, точнее она ограничена снизу, но не ограничена сверху, а последовательность $\left\{n\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ является неограниченной как сверху, так и снизу.

Теорема 2. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть дана сходящаяся последовательность $\{a_n\}$ и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Возьмем, например, $\varepsilon = 1$. Согласно определению предела последовательности, существует такое n_1, что для всех $n \geqslant n_1$ выполняется неравенство $|a_n - a| < 1$. Пусть d — наибольшее из чисел 1, $|a_1 - a|$, ..., $|a_{n-1} - a|$. Тогда для всех $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $|a_n - a| \leqslant d$, т. е. для всех n

$$a - d \leqslant a_n \leqslant a + d.$$

Это и означает ограниченность заданной последовательности. □

3.5. МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение 11. *Верхняя (нижняя) грань множества значений элементов последовательности* $\{a_n\}$ *называется верхней (нижней) гранью данной последовательности и обозначается* $\sup\{a_n\}$ *или* $\sup\limits_{n=1,2,\ldots} a_n$ *(соответственно* $\inf\{a_n\}$ *или* $\inf\limits_{n=1,2,\ldots} a_n$*).*

Если верхняя (нижняя) грань является числом, то это определение можно сформулировать следующим образом.

Определение 11′. *Число* a *является верхней (нижней) гранью последовательности* a_n, $n = 1, 2, \ldots,$ *если:*

1) *для всех* $n = 1, 2, \ldots$ *выполняется неравенство* $a_n \leqslant a$ *(соответственно неравенство* $a_n \geqslant a$*);*

2) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* n_ε, *что* $a_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$ *(соответственно* $a_{n_\varepsilon} < a + \varepsilon$*).*

Аналогично можно сформулировать определение верхней (нижней) грани последовательности в случае, когда указанная грань бесконечна. (Сделайте это.)

В качестве примеров отметим, что $\sup\{1/n\} = 1$, $\inf\{1/n\} = 0$, $\sup\{n\} = +\infty$, $\inf\{n\} = 1$. Здесь везде $n = 1, 2, \ldots$

Определение 12. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется возрастающей (убывающей) последовательностью, если для каждого* $n = 1, 2, \ldots$ *выполняется неравенство* $x_n \leqslant x_{n+1}$ *(соответственно неравенство* $x_n \geqslant x_{n+1}$*).* *)

---

*) Возрастающие (убывающие) последовательности называются также неубывающими (соответственно невозрастающими).

Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными*.

Например, последовательность $\{1/n\}$ убывает, последовательность $\{n\}$ возрастает, а последовательность $\left\{\sin \frac{\pi}{2} n\right\}$ не является монотонной.

Теорема 3. *Всякая возрастающая (убывающая) последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, конечный, если она ограничена сверху (снизу) и бесконечный, равный $+\infty$ (соответственно $-\infty$), если она неограничена сверху (снизу), причем*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \sup \{x_n\}$$

(соответственно,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \inf \{x_n\}\Big).$$

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограничена сверху. В силу последнего условия, она имеет конечную верхнюю грань (см. теорему 1 в п. 2.8). Пусть $\beta \overset{\text{def}}{=} \sup \{x_n\}$. Покажем, что $\beta = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из того, что $\beta = \sup \{x_n\}$, следует, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $x_n \leqslant \beta$ и что существует такой номер n_ε, что $x_{n_\varepsilon} > \beta - \varepsilon$. Тогда в силу возрастания последовательности $\{x_n\}$ для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ будем иметь: $\beta - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leqslant x_n \leqslant \beta$. Поэтому для всех $n \geqslant n_\varepsilon$, $n \in N$, выполняется неравенство $|x_n - \beta| < \varepsilon$. Это и означает, что $\beta = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Если последовательность $\{x_n\}$ неограничена сверху, то $\sup \{x_n\} = +\infty$ (см. п. 2.8). Покажем, что в этом случае и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

Снова выберем произвольным образом $\varepsilon > 0$. Из того, что последовательность $\{x_n\}$ неограничена сверху, следует, что существует такой номер n_ε, что $x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. Тогда в силу возрастания последовательности $\{x_n\}$ для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ будем иметь: $x_n \geqslant x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

Аналогично разбирается случай убывающих последовательностей. Впрочем, его можно свести и к случаю возрастающей последовательности, если заметить, что для каждой убывающей последовательности $\{x_n\}$ последовательность $\{-x_n\}$ будет уже возрастающей. $\square$

Таким образом, всякая монотонная последовательность имеет предел: конечный, если она ограничена, и бесконечный, если она не ограничена. Этот предел равен $+\infty$, если монотонная последовательность не ограничена сверху, и он равен $-\infty$, если она не ограничена снизу.

Поскольку всякая подпоследовательность монотонной последовательности также монотонна, то она в свою очередь всегда имеет конечный или бесконечный предел, который, очевидно, совпадает с пределом всей последовательности (см. лемму в п. 3.3).

Мы видели, что если последовательность сходится, то она ограничена (теорема 2), отсюда, в частности, следует, что если возрастающая последовательность сходится, то она ограничена сверху; с другой стороны, если возрастающая последовательность ограничена сверху, то она сходится (теорема 3). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие. *Для того чтобы возрастающая последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху.*

Аналогичное утверждение справедливо и для убывающей последовательности.

Замечание. Если $[a_n, b_n]$ — система вложенных отрезков, по длине стремящихся к нулю, а ξ — точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы, то

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{3.9}$$

В самом деле, в п. 2.10 было показано, что $\xi = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$. С другой стороны, последовательность $\{a_n\}$ (соответственно $\{b_n\}$) возрастает (убывает), откуда и следует (3.9).

Пример. Число e.

Пусть $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \ldots$

Покажем, что эта последовательность сходится. Применяя формулу бинома Ньютона, получаем:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$
$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \tag{3.10}$$

Поскольку при переходе от n к $n+1$ число слагаемых, которые все положительны, возрастает и, кроме того, каждое слагаемое увеличивается:

$$1-\frac{s}{n} < 1-\frac{s}{n+1}, \quad s = 1, 2, \ldots, n-1,$$

то

$$x_n < x_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Далее, замечая, что в (3.10) каждая из скобок вида $\left(1 - \frac{s}{n}\right)$ меньше единицы и $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$, имеем

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leqslant 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Сумма $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$ (которую легко подсчитать по известной из элементарной математики формуле для суммы членов геометрической прогрессии, она равна $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$) при любом $n = 1, 2, \ldots$ меньше единицы, поэтому окончательно

$$2 \leqslant x_n < x_{n+1} < 3. \tag{3.11}$$

Итак, последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограничена сверху, а значит, согласно теореме 3, имеет предел. Этот предел и обозначается буквой e.

Переходя к пределу в (3.11), получаем $2 < e \leqslant 3$. Более точными оценками можно получить, что справедливо приближенное равенство

$$e \approx 2{,}718281828459045.$$

Доказывается также, что число e иррационально и, более того, трансцендентно, т. е. не является корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Число e в математическом анализе играет особую роль. Оно, в частности, является основанием натуральных логарифмов.

3.6. ТЕОРЕМА БОЛЬЦАНО—ВЕЙЕРШТРАССА

В п. 3.4 было доказано, что всякая сходящаяся последовательность ограничена. Обратное утверждение, конечно, неверно. Например, последовательность $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена и расходится. Однако оказывается, что всякая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность. Это утверждение называется теоремой Больцано — Вейерштрасса *) или свойством компактности ограниченной последовательности.

Теорема 4. *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а из любой неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую*

---

*) Б. Больцано (1781—1848) — чешский математик; К. Вейерштрасс (1815—1897) — немецкий математик.

подпоследовательность, имеющую своим пределом бесконечность определенного знака.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т. е. существует такой отрезок $[a, b]$, что $a \leqslant x_n \leqslant b$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Разделим отрезок $[a, b]$ на два равных отрезка. По крайней мере один из получившихся отрезков содержит бесконечно много элементов данной последовательности. Обозначим его через $[a_1, b_1]$. Пусть x_{n_1} — какой-либо из членов данной последовательности, лежащий на отрезке $[a_1, b_1]$.

Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ на два равных отрезка; снова хоть один из получившихся двух отрезков содержит бесконечно много членов исходной последовательности, обозначим его через $[a_2, b_2]$. В силу того, что на отрезке $[a_2, b_2]$ бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, найдется такой член x_{n_2}, что $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ и $n_2 > n_1$. Продолжая этот процесс, получаем последовательность отрезков $[a_k, b_k]$, в которой каждый последующий является половиной предыдущего, и подпоследовательность таких элементов x_{n_k} данной последовательности, что $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots$ и $n_{k''} > n_{k'}$ при $k'' > k'$. Последовательность $\{x_{n_k}\}$ является в силу построения подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$. Покажем, что эта подпоследовательность сходящаяся.

Последовательность отрезков $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots$, является последовательностью вложенных отрезков, по длине стремящихся к нулю, так как $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \to 0$ при $k \to \infty$. Согласно принципу вложенных отрезков (см. п. 2.10), существует единственная точка ξ, принадлежащая всем этим отрезкам. Как мы видели (см. (3.9) в замечании к теореме 3), $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \xi$, но $a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$, $k = 1, 2, \ldots$, поэтому в силу свойства I (см. п. 3.3) сходящихся последовательностей последовательность $\{x_{n_k}\}$ также сходится, и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$.

Пусть теперь последовательность $\{x_n\}$ неограничена. Тогда она либо неограничена сверху, либо неограничена снизу, либо имеет место и то и другое. Пусть для определенности последовательность $\{x_n\}$ неограничена сверху. Тогда существует такой номер $n_1 \in N$, что $x_{n_1} > 1$.

Очевидно, последовательность x_n, $n = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots$, также неограничена сверху, так как получается из данной неограниченной сверху последовательности x_n, $n = 1, 2, \ldots$, отбрасыванием конечного числа членов. Поэтому существует такое $n_2 > n_1$, $n_2 \in N$, что $x_{n_2} > 2$.

Продолжая этот процесс, получаем последовательность таких номеров n_k, что

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

и

$$x_{n_1} > 1,\ x_{n_2} > 2,\ \ldots,\ x_{n_k} > k,\ \ldots$$

Отсюда следует, что $\{x_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ и в силу свойства II п. 3.3 что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$. □

Определение 13. *Предел, конечный или бесконечный определенного знака, подпоследовательности данной последовательности называется ее частичным пределом.*

Теорема Больцано — Вейерштрасса (первая часть теоремы 4) и ее аналог для неограниченных последовательностей (вторая часть теоремы 4) показывают, что

всякая последовательность имеет хотя бы один частичный конечный или бесконечный предел, причем заведомо конечный, если данная последовательность ограничена.

Таким образом, каждая числовая последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in R$, имеет хотя бы один частичный предел в расширенном множестве действительных чисел, т. е. множество частичных пределов в $\bar{R}$ для любой последовательности всегда не пусто.

Упражнения. 10. Доказать, что для того чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и имела единственный частичный предел.

11. Доказать, что элемент a (число или одна из бесконечностей $+\infty$ и $-\infty$) является частичным пределом последовательности тогда и только тогда, когда в любой его окрестности содержится бесконечно много членов данной последовательности.

3.7. КРИТЕРИЙ КОШИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

До сих пор не было дано достаточно общего критерия, с помощью которого можно было бы узнать, сходится ли данная последовательность. Само определение сходящейся последовательности для этого мало удобно, так как в него входит значение предела, которое может быть и неизвестным. Поэтому желательно иметь такой критерий для определения сходимости и расходимости последовательностей, который базировался бы только на свойствах элементов данной последовательности. Нижеследующая теорема 5 и дает как раз подобный критерий.

Определение 14. *Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши* [*], *если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров n и m, удовлетворяющих условию $n \geq n_\varepsilon$, $m \geq n_\varepsilon$, справедливо неравенство*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{3.12}$$

Последовательности, удовлетворяющие условию Коши, называются также *фундаментальными последовательностями.*

---

[*] О. Коши (1798—1857) — французский математик.

Условие (3.12) можно сформулировать и таким образом.

Для любого $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* n_ε, *что для всех номеров* $n \geqslant n_\varepsilon$ *и всех целых неотрицательных* p

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \tag{3.13}$$

Для того чтобы убедиться в равносильности условий (3.12) и (3.13), достаточно положить $p = n - m$, если $n \geqslant m$, и $p = m - n$, если $m > n$.

Теорема 5 (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.*

Доказательство необходимости. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Зададим $\varepsilon > 0$; тогда, согласно определению предела последовательности, существует такое n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть теперь $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$, тогда

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$|x_m - x_n| < \varepsilon$

т. е. выполняется условие Коши.

Доказательство достаточности. Пусть последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое n_ε, что если $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$, то $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Возьмем, например, $\varepsilon = 1$, тогда существует такое n_1, что при $n \geqslant n_1$ и $m \geqslant n_1$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < 1$. В частности, если $n \geqslant n_1$ и $m = n_1$, то $|x_n - x_{n_1}| < 1$, т. е. $x_{n_1} - 1 < x_n < x_{n_1} + 1$ при $n \geqslant n_1$. Это значит, что последовательность x_n, $n = n_1, n_1 + 1, \ldots$ ограничена. Поэтому в силу теоремы 4 существует ее сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Покажем, что вся данная последовательность $\{x_n\}$ также сходится и имеет пределом число a. Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда, во-первых, по определению предела последовательности существует такое k_ε, что для всех номеров $k \geqslant k_\varepsilon$, или, что то же самое согласно определению подпоследовательности, для всех $n_k \geqslant n_{k_\varepsilon}$ выполняется неравенство $|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Во-вторых, так как последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши, то существует такое n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $m \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Положим $N_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n_{k_\varepsilon}\}$ и зафиксируем некоторое $n_k \geqslant N_\varepsilon$. Тогда для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ получим:

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leqslant$$
$$\leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а это и доказывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. □

Упражнения. 12. Сформулировать позитивные необходимые и достаточные условия, являющиеся отрицанием критерия Коши, для того чтобы последовательность не имела предела.

13. Доказать, что для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $n_\varepsilon \in N$, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$, $n \in N$, выполняется неравенство $|x_n - x_{n_\varepsilon}| < \varepsilon$.

Задача 3. Выяснить, будет или нет вытекать сходимость последовательности $\{x_n\}$ из условия, что для любого натурального p существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+p} - x_n) = 0$.

3.8. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Над последовательностями можно производить арифметические операции сложения, вычитания, умножения и деления. Определим их.

Определение 15. *Пусть заданы последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$; *суммой, разностью и произведением этих последовательностей называются соответственно последовательности* $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$ *и* $\{x_n y_n\}$. *Если* $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *то частным от деления последовательности* $\{x_n\}$ *на последовательность* $\{y_n\}$ *называется последовательность* $\{x_n/y_n\}$. *Наконец, произведением последовательности* $\{x_n\}$ *на число* c *называется последовательность* $\{cx_n\}$.

Если последовательность $\{y_n\}$ такова, что в ней имеется лишь конечное число элементов, равных нулю, т. е. существует такое $n_0 \in N$, что при $n \geqslant n_0$, $n \in N$, выполняется неравенство $y_n \neq 0$, то можно рассматривать последовательность $\{x_n/y_n\}$, понимая под ней последовательность с номерами $n \geqslant n_0$.

Определение 16. *Последовательность* $\{\alpha_n\}$ *называется бесконечно малой последовательностью, если* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Мы уже встречались в п. 3.1 с бесконечно малыми последовательностями $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\alpha_n = \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2}n$, $n = 1, 2, \ldots$

Отметим несколько свойств бесконечно малых последовательностей.

I. *Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Покажем, что и последовательности $\{\alpha_n + \beta_n\}$ и $\{\alpha_n - \beta_n\}$ являются также бесконечно малыми. Зададим $\varepsilon > 0$, тогда существует (почему?) такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняются неравенства $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому для $n \geqslant n_\varepsilon$ имеем

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n \pm \beta_n) = 0$.

Соответствующее утверждение для любого конечного числа слагаемых следует из доказанного по индукции. □

Задача 4. Определив сумму бесконечного числа занумерованных слагаемых (обобщающую понятие суммы конечного числа слагаемых), а затем сумму бесконечного числа последовательностей, построить пример бесконечного числа бесконечно малых последовательностей, сумма которых не является бесконечно малой последовательностью.

II. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является бесконечно малой последовательностью.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, а $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, т. е. существует такое число $b > 0$, что для всех номеров $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant b$.

Зададим $\varepsilon > 0$; в силу определения бесконечно малой последовательности существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{b}$. Поэтому для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ имеем

$$|\alpha_n x_n| = |\alpha_n|\,|x_n| < \frac{\varepsilon}{b} \cdot b = \varepsilon,$$

что и означает, что последовательность $\{\alpha_n x_n\}$ бесконечно малая. □

Следствие. *Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.*

Это сразу следует по индукции из свойства II, если заметить, что бесконечно малая последовательность, как и всякая последовательность, имеющая предел, ограничена (см. теорему 2 п. 3.4).

Задача 5. Определив произведение бесконечного числа занумерованных сомножителей (обобщающее понятие произведения конечного числа сомножителей), а затем произведение бесконечного числа последовательностей, построить пример бесконечного числа бесконечно малых последовательностей, произведение которых не является бесконечно малой последовательностью.

Упражнение 14. Доказать, что для того чтобы последовательность $x_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, была бесконечно малой, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $1/x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, была бесконечно большой.

3.9. СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ, СВЯЗАННЫЕ С АРИФМЕТИЧЕСКИМИ ОПЕРАЦИЯМИ НАД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

Лемма. *Для того чтобы число a являлось пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы ее член x_n имел вид $x_n = a + \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\{\alpha_n\}$ есть бесконечно малая последовательность.*

В самом деле, пусть задана какая-либо последовательность $\{x_n\}$ и число a; положим $\alpha_n \overset{\text{def}}{=} x_n - a$. Тогда условие $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ согласно определению предела последовательности равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in N$, что для всех $n \geqslant n_0$, $n \in N$, выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, т. е. неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, а это и равносильно тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. $\square$

Эта лемма показывает особую роль бесконечно малых последовательностей при изучении понятия предела, так как общее понятие предела последовательности с помощью этой леммы сводится к понятию нулевого предела. Это обстоятельство далее широко используется при изучении ряда свойств сходящихся последовательностей.

1°. *Если $x_n = c$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.*

В самом деле, последовательность $x_n - c = c - c = 0$ бесконечно малая, и поэтому в силу леммы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. $\square$

2°. *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то последовательности $\{x_n \pm y_n\}$ также сходятся и*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$

т. е. предел алгебраической суммы двух сходящихся последовательностей равен такой же сумме пределов данных последовательностей.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Согласно необходимости условий леммы для существования предела, имеем

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Следовательно, $x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, где в силу свойства I бесконечно малых последовательностей (см. п. 3.8) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n \pm \beta_n) = 0$. Поэтому, согласно достаточности условий леммы для существования предела, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. $\square$

Следствие. *Предел конечной алгебраической суммы сходящихся последовательностей равен такой же алгебраической сумме пределов отдельных последовательностей.*

Это непосредственно следует по индукции из доказанного свойства пределов сходящихся последовательностей.

3°. *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то последовательность $\{x_n y_n\}$ также сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n,$$

т. е. предел произведения сходящихся последовательностей существует и равен произведению пределов данных последовательностей.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, тогда

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$; поэтому $x_n y_n = (a+\alpha_n)(b+\beta_n) = ab + {}$ $+ (\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n)$.

В силу свойств I и II бесконечно малых последовательностей (см. п. 3.8) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n) = 0$; поэтому

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Следствие 1. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то для любого числа c последовательность $\{cx_n\}$ также сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c \lim_{n\to\infty} x_b,$$

т. е. постоянную можно выносить за знак предела.

Это утверждение сразу вытекает из свойств 1° и 3°.

Следствие 2. *Если $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность и k — натуральное число, то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^k.$$

Это непосредственно по индукции следует из свойства 3°.

4°. *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то последовательность $\{x_n/y_n\}$ сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n / \lim_{n\to\infty} y_n,$$

т. е. при сделанных предположениях предел частного сходящихся последовательностей существует и равен частному от пределов данных последовательностей.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$ и для определенности $b > 0$. Тогда

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, а согласно следствию из свойства III пределов последовательностей из п. 3.3, существует такой номер n_0, что для всех номеров $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $y_n > \frac{b}{2} > 0$ (действительно, заметив, что $\frac{b}{2} < b$, в указанном свойстве в качестве c надо взять $c = \frac{b}{2}$) — здесь используется предположение, что $b > 0$; поэтому при $n \geqslant n_0$ имеем $\frac{1}{y_n} < \frac{2}{b}$ (поскольку $y_n \neq 0$, то на него можно делить).

Далее,

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b+\beta_n)}(\alpha_n b - \beta_n a). \tag{3.14}$$

Здесь $0 < \frac{1}{b(b+\beta_n)} = \frac{1}{by_n} < \frac{2}{b^2}$, т. е. последовательность $1/(b(b+\beta_n))$, $n = n_0, n_0+1, \ldots$, ограничена (отсюда, конечно, следует, что эта последовательность ограничена и при всех $n = 1, 2, \ldots$).

В силу свойств бесконечно малых последовательностей последовательность $\{\alpha_n b - \beta_n b\}$ является бесконечно малой, поэтому и последовательность $\left\{\frac{1}{b(b+\beta_n)}(\alpha_n b - \beta_n a)\right\}$ бесконечно малая. В силу этого из (3.14) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Аналогично рассматривается случай, когда $b < 0$. □

Замечание. В случае последовательностей, имеющих бесконечные пределы, утверждения, аналогичные 1°—4°, вообще говоря, не имеют места. Например, пусть $x_n = n+1$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 1.$$

Если $x_n = 2n$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = +\infty.$$

Если же $x_n = n + \sin\frac{n\pi}{2}$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty,$$

а последовательность $x_n - y_n = \sin\frac{n\pi}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$, не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

Эти примеры показывают, что при одинаковых предположениях относительно последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, имеющих бесконечные пределы, для последовательностей $\{x_n - y_n\}$ могут встретиться самые разнообразные случаи. Вместе с тем отдельные обобщения свойств 1°—4° на случай последовательностей с бесконечными пределами все-таки имеют место. Например, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ $\left(\text{или } \lim\limits_{n\to\infty} y_n \text{ конечен}\right)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$ или, если $\alpha > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (рекомендуется доказать самостоятельно).

Упражнение 15. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, а последовательность $\{y_n\}$ ограничена, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.

Примеры. 1. Пусть $a > 0$, $x_0 > 0$ и

$$x_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.15}$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$. По индукции сразу ясно, что $x_n > 0$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Покажем сначала, что

$$x_n \geqslant \sqrt{a}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.16}$$

Для этого предварительно заметим, что из очевидного неравенства $(t-1)^2 \geqslant 0$ в случае $t > 0$ следует неравенство $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$. Используя это неравенство при $t = \frac{x_n}{\sqrt{a}}$ в силу (3.15) получаем:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right) \geqslant \frac{\sqrt{a}}{2}2 = \sqrt{a}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Покажем теперь, что последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, монотонно убывает. Применяя неравенство (3.16), получаем:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{x_n}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \leqslant \frac{x_n}{2}2 = x_n, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.17}$$

Итак, $\sqrt{a} \leqslant \ldots \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n \leqslant \ldots \leqslant x_1$, где бы ни было расположено «нулевое приближение» $x_0 > 0$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу и монотонно убывает, поэтому, согласно теореме 3, она имеет предел.

Пусть $\lim x_n = x$. Переходя к пределу, в равенстве (3.15) при $n \to \infty$, получаем равенство

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right),$$

откуда $x^2 = a$, и так как $x_n \geqslant 0$, то и $x \geqslant 0$, поэтому $x = \sqrt{a}$.

Формула (3.15) может служить для приближенного вычисления значений квадратного корня из числа a. Она действительно применяется на практике с этой целью, в частности, при вычислениях на быстродействующих счетных машинах.

Нетрудно подсчитать и точность, с которой n-е приближение, т. е. член x_n, дает значение корня $\sqrt{a}$.

Из рекуррентной формулы (3.15) имеем:

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a) =$$
$$= \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Применяя неравенство (3.16), отсюда находим:

$$0 \leqslant x_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(x_n - \sqrt{a})^2, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Полученная оценка не совсем удобна на практике, поскольку мы не знаем значения корня $\sqrt{a}$ — мы его ищем. Однако всегда можно найти приближенно такое c, что $0 < c < \sqrt{a}$, причем можно выбрать и $x_0 \geqslant c$, тогда из полученной оценки будем иметь

$$0 \leqslant x_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2c}(x_n - \sqrt{a})^2, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

или

$$\frac{1}{2c}(x_{n+1} - \sqrt{a}) \leqslant \left[\frac{1}{2c}(x_n - \sqrt{a})\right]^2, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

Отсюда по индукции находим:

$$\frac{1}{2c}(x_n - \sqrt{a}) \leqslant \left[\frac{1}{2c}(x_{n-1} - \sqrt{a})\right]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left[\left(\frac{1}{2c}(x_{n-2} - \sqrt{a})\right)^2\right]^2 \leqslant \ldots \leqslant \left[\frac{1}{2c}(x_0 - \sqrt{a})\right]^{2^n}. \tag{3.18}$$

Если выбрать нулевое приближение x_0 так, чтобы

$$q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2c}\,|x_0 - \sqrt{a}| < 1,$$

то из (3.18) получится, что

$$0 \leqslant x_n - \sqrt{a} \leqslant 2cq^{2^n}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

т. е. последовательность (3.15) сходится к значению корня гораздо быстрее геометрической прогрессии со знаменателем q, $0<q<1$.

Для иллюстрации приближенного вычисления корня по формуле (3.15) приведём результаты вычисления $\sqrt{2}$ на ЭВМ в случае, когда в качестве нулевого приближения x_0 было выбрано $x_0=1$:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \mathbf{1},50000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\\
x_2 &= \mathbf{1{,}41}666666666666666666666666666666666666666666666666666666666\\
x_3 &= \mathbf{1{,}41421}568627450980392156862745098039215686274509803921568627\\
x_4 &= \mathbf{1{,}41421356237}468991062629557889013491011655962211574404458490\\
x_5 &= \mathbf{1{,}41421356237309504880168}962350253024361498192577619742849828\\
x_6 &= \mathbf{1{,}41421356237309504880168872420969807856967187537}723400156101\\
x_7 &= \mathbf{1{,}41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667}
\end{aligned}
$$

Здесь полужирным шрифтом выделены числа, являющиеся правильным приближением $\sqrt{2}$ с точностью до числа значащих цифр, входящих в выделенное число (эти цифры стабилизируются в процессе вычисления). Число правильных в этом смысле цифр удваивается (как это видно из таблицы) при переходе к следующему приближению: в x_1 имеется одна правильная цифра, в x_2 уже 3, в x_3 — 6, в x_4 — 12, в x_5 — 24, в x_6 — 48, а x_7 даёт уже правильное приближение $\sqrt{2}$ с 60 значащими цифрами, т. е. со всеми использованными разрядами.

Заметим, что если число $a>0$ таково, что корень из него вычисляется в конечном виде в том смысле, что существует такая конечная десятичная дробь x, что $x^2=a$, то эта дробь может быть найдена (во всяком случае принципиально) с помощью классического метода извлечения корня «столбиком». В случае же извлечения корня из этого числа с помощью формулы (3.15), если x_0 выбрано отличным от точного значения корня: $x_0 \neq \sqrt{a}$, то указанное точное значение корня не получится ни на каком шаге. Это следует из того, что в случае $x_0 \neq \sqrt{a}$ последовательность (3.15) строго убывает: $x_{n+1}<x_n$, $n=1, 2, \ldots$.

Прежде чем рассматривать дальнейшие примеры докажем одно полезное неравенство.

Лемма (неравенство Бернулли *)). *Пусть $\alpha>0$, тогда для любого натурального n справедливо неравенство*

$$(1+\alpha)^n > 1+n\alpha. \tag{3.19}$$

Доказательство. По формуле бинома Ньютона имеем

$$(1+\alpha)^n = 1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2+\ldots+\alpha^n.$$

Все слагаемые в правой части равенства положительны; отбрасывая все из них кроме первого и второго, отчего правая часть может только уменьшиться, получаем искомое неравенство (3.19).

---

*) Я. Бернулли (1654—1705) — швейцарский математик.

Вернемся к рассмотрению примеров.

2. Если $p>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} p^n=+\infty$, а если $0<p<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} p^n=0$.

Пусть сначала $p>1$, тогда $p=1+\alpha$, где $\alpha>0$, и по неравенству Бернулли (см. (3.19))

$$p^n=(1+\alpha)^n>1+n\alpha>n\alpha.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha n=\alpha \lim\limits_{n\to\infty} n=+\infty$, $\alpha>0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} p^n=+\infty$.

Если теперь $0<p<1$, то $q=1/p>1$ и

$$\lim_{n\to\infty} p^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q^n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} q^n}=0,$$

ибо по доказанному $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=+\infty$.

3. Для любого $a>0$:

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n}=1, \tag{3.20}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{-1/n}=1. \tag{3.21}$$

Пусть сначала $a>1$, тогда $b\overset{\text{def}}{=}\sqrt[n]{a}>1$. В самом деле, согласно определению корня $b^n=a$. Если бы $b\leqslant 1$, то, перемножая это неравенство n раз, мы получили бы, что $a=b^n\leqslant 1$, но это противоречит условию $a>1$. Положим

$$x_n\overset{\text{def}}{=}\sqrt[n]{a}-1. \tag{3.22}$$

Согласно сказанному $x_n>0$. Из (3.22) следует, что $a=(1+x_n)^n$. Применяя неравенство Бернулли, получаем

$$a=(1+x_n)^n>nx_n.$$

Следовательно, $0<x_n<\frac{a}{n}$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$; откуда согласно (3.22)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

Если теперь $0<a<1$, то $b\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{a}>1$, и так как в силу доказанного $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}=1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{b}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{b}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}}=1.$$

Если $a=1$, то $\sqrt[n]{a}=1$, $n=1, 2, \ldots$, и, следовательно, также $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Таким образом, (3.20) доказано при любом $a>0$. Отсюда сразу следует (3.21):

$$\lim_{n\to\infty} a^{-1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^{1/n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n}}=1. \ \square$$

Упражнение 16. Пусть $a_0>0$, $b_0\geqslant 0$, $a_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$, $b_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$, $n=1, 2, \ldots$. Доказать, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ стремятся к одному и тому же пределу a и что $0\leqslant a-a_n\leqslant\frac{b_0-a_0}{2^n}$, $0\leqslant b_n-a\leqslant\frac{|b_0-a_0|}{2^n}$.

3.10. ИЗОБРАЖЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ БЕСКОНЕЧНЫМИ ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

Пусть задано какое-либо число a, для определенности $a\geqslant 0$. В силу свойства Архимеда существует целое число $n_0>a$. Среди чисел $n=1, 2, \ldots, n_0$ возьмем наименьшее, обладающее свойством $n>a$, и обозначим его α_0+1, тогда $\alpha_0\leqslant a<\alpha_0+1$.

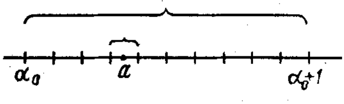


Рис. 8

Разобьем отрезок $I_0=[\alpha_0, \alpha_0+1]$ на десять равных отрезков, т. е. рассмотрим отрезки

$$[\alpha_0,\alpha_1;\ \ \alpha_0,\alpha_1+1/10],$$

где $\alpha_1,=0, 1, 2, \ldots, 9$.

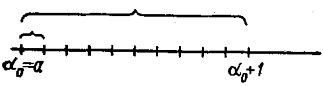


Рис. 9

Возможны два случая: либо точка a не совпадает ни с одной точкой деления (рис. 8), либо точка a совпадает с одной из точек деления (рис. 9, 10). В первом случае точка a принадлежит только одному из этих отрезков. Обозначим его

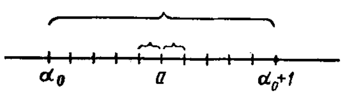


Рис. 10

$$I_1=[\alpha_0,\alpha_1;\ \alpha_0,\ \alpha_1+1/10],$$

где α_1 обозначает номер отрезка, т. е. одну из цифр $0, 1, \ldots, 9$.

Во втором случае точка a может принадлежать двум соседним отрезкам (рис. 10). Тогда через $I_1=\left[\alpha_0,\alpha_1;\ \alpha_0,\alpha_1+\frac{1}{10}\right]$ обозначим тот из них, для которого точка a является левым концом. Во всех случаях $a\in I_1$. Разобьем отрезок I_1 в свою очередь на десять равных отрезков и через $I_2=\left[\alpha_0,\alpha_1\alpha_2;\ \alpha_0,\alpha_1\alpha_2+\frac{1}{10^2}\right]$ обозначим тот из получившихся отрезков, который содержит a и для которого точка a не является правым концом. Продолжая этот процесс, получим систему вложенных отрезков

$$I_n=[\underline{a}_n,\ \bar{a}_n],\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

где

$$\underline{a}_n=\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n,\quad \bar{a}_n=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n+\frac{1}{10^n},$$

а α_n — одна из цифр 0, 1, 2, ..., 9. Каждый из отрезков I_n содержит a, причем a не является его правым концом,

$$a\in I_n,\quad a\neq\bar{a}_n,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$$

длина отрезка I_n равна $1/10^n$ и, следовательно, стремится к нулю при $n\to\infty$.

Конечные десятичные дроби $\underline{a}_n$ и $\bar{a}_n$ называются *десятичными дробями, приближающими число* a. Более точно, число $\underline{a}_n$ называется ***нижним десятичным приближением*** порядка n, а число $\bar{a}_n$ ***верхним десятичным приближением*** того же порядка числа a. Они обладают следующими свойствами, непосредственно вытекающими из их определения:

$$\underline{a}_n\leqslant a<\bar{a}_n,\tag{3.23}$$

$$\underline{a}_n\leqslant\underline{a}_{n+1},\quad \bar{a}_{n+1}\leqslant\bar{a}_n,\tag{3.24}$$

$$\bar{a}_n-\underline{a}_n=1/10^n.\tag{3.25}$$

В случае, если $a<0$, то, полагая $b=-a$, определяем

$$\underline{a}_n=-\bar{b}_n,\quad \bar{a}_n=-\underline{b}_n.$$

при этом свойства (3.23)—(3.25), очевидно, сохраняются, лишь в неравенстве (3.23) знаки $\leqslant$ и $<$ поменяются местами.

Свойство (3.24) означает, что отрезки $[\underline{a}_n,\ \bar{a}_n]$ образуют вложенную систему отрезков. Из свойства (3.25) следует, что длины отрезков $[\underline{a}_n,\ \bar{a}_n]$ стремятся к нулю. Наконец, (3.23) означает, что точка a принадлежит всем этим отрезкам, поэтому согласно замечанию п. 3.5, она является пределом их концов $\underline{a}_n$ и $\bar{a}_n$.

Итак, в частности, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Каково бы ни было число a, последовательность $\{\underline{a}_n\}$ монотонно возрастает, последовательность $\{\bar{a}_n\}$ монотонно убывает и*

$$\lim_{n\to\infty}\underline{a}_n=\lim_{n\to\infty}\bar{a}_n=a.$$

Следствие. *Всякое действительное число является пределом последовательности рациональных чисел.*

Следствие леммы вытекает из того, что $\underline{a}_n$ и $\bar{a}_n$ суть рациональные числа.

Пусть теперь снова $a \geqslant 0$ и $\bar{a}_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$. Поставим в соответствие числу a бесконечную десятичную дробь $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ Подчеркнем, что здесь α_0 является неотрицательным целым числом, а α_n, $n=1, 2, \ldots$ — одной из цифр 0, 1, 2, ..., 9. Поскольку число a является единственным числом, принадлежащим всем отрезкам I_n, $n=1, 2, \ldots$, то при указанном соответствии разным числам соответствуют разные десятичные дроби, т. е. отличающиеся хотя бы одним α_k $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

Заметим далее, что при нашем построении не может получиться дробь с периодом, состоящим из одной цифры 9. Действительно, пусть числу a соответствует дробь $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{n_0} 9 \ldots 9 \ldots$, где в случае $n_0 \neq 0$ выполняется неравенство $\alpha_{n_0} \neq 9$. Тогда, согласно построению,

$$a \in \left[\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{n_0} 9 \ldots 9;\ \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}}\right]$$

для всех $n \geqslant n_0$, где n — число десятичных знаков после запятой в дроби $\alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_{n_0} 9 \ldots 9$. Отсюда следует, что a является правым концом всех отрезков I_n, $n \geqslant n_0$, что противоречит выбору этих отрезков.

Таким образом, в силу установленного соответствия каждому действительному числу $a \geqslant 0$ соответствует некоторая бесконечная десятичная дробь, не имеющая периода, состоящего из одной цифры 9. Такие десятичные дроби называются *допустимыми*.

Наконец, каждая бесконечная допустимая десятичная дробь $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ в результате описанного соответствия оказывается поставленной в соответствие некоторому числу a, а именно тому единственному числу, которое принадлежит всем отрезкам:

$$\left[\alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_n;\ \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_n + \frac{1}{10^n}\right], \quad n=1, 2, \ldots.$$

Это соответствие можно распространить и на отрицательные числа: если числу $a > 0$ соответствует дробь $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots$, то числу $-a$ поставим в соответствие дробь $-\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots$.

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 6. *Между множеством всех действительных чисел и множеством допустимых десятичных дробей существует взаимно однозначное соответствие; причем если при этом соответствии числу a соответствует дробь $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, то*

$$\pm \lim_{n \to \infty} \alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n = a.$$

Бесконечная десятичная дробь $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, соответствующая числу a, называется его *десятичной записью* и используется для его обозначения; поэтому пишут

$$a = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

Если бесконечная десятичная дробь имеет период, состоящий только из нулей, $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n00\ldots0\ldots$, причем $\alpha_n\neq0$, то говорят, что эта дробь имеет n значащих цифр после запятой; при этом обычно ноль в периоде не пишется, т. е. указанное число записывается конечной десятичной дробью $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ (именно такая запись и употреблялась выше).

Замечание 1. Любой бесконечной десятичной дроби

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$$

(не обязательно допустимой) можно также естественным образом поставить в соответствие единственное действительное число, принадлежащее всем отрезкам:

$$\left[\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n;\quad\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n+\frac{1}{10^n}\right].$$

Однако получившееся при этом соответствие уже не будет взаимно однозначным: может случиться, что разным десятичным дробям будет соответствовать одно и то же действительное число. Именно дробям вида

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n99\ldots9\ldots\quad\text{и}\quad\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots(\alpha_n+1)00\ldots0\ldots(\alpha_n\neq9)$$

соответствует одно и то же число. В описанной выше конструкции соответствия вещественных чисел и бесконечных десятичных дробей мы получили бы не только допустимые десятичные дроби, если бы отказались от условия каждый раз выбирать такой отрезок I_n, что число a не является его правым концом.

Используя запись действительных чисел, с помощью бесконечных десятичных дробей можно получить правило для их сравнения по величине и правила арифметических действий над ними. И то и другое сводится к аналогичным операциям над соответствующими их десятичными приближениями и, быть может, предельному переходу. Сформулируем эти результаты в виде лемм.

Лемма 2. *Пусть a и b — действительные числа. Тогда $a<b$ в том и только том случае, когда существует такое натуральное n_0, что $\underline{a}_n<\underline{b}_n$ для всех $n\geqslant n_0$.*

Действительно, пусть $a<b$. Из

$$a=\lim_{n\to\infty}\underline{a}_n,\quad b=\lim_{n\to\infty}\underline{b}_n,\quad\text{и}\quad a<\frac{a+b}{2}<b$$

следует (см. свойства пределов последовательностей в п. 3.3), что существует такое n_0, что при всех $n\geqslant n_0$ справедливы неравенства $\underline{a}_n<\frac{a+b}{2}$, $\underline{b}_n>\frac{a+b}{2}$ и, следовательно, неравенство $\underline{a}_n<\underline{b}_n$.

Обратно, если существует n_0 такое, что $\underline{a}_n < \underline{b}_n$ для всех $n \geqslant n_0$, то случай $a > b$ невозможен в силу только что доказанного. Невозможен и случай $a = b$, так как тогда бы в силу однозначной записи чисел с помощью допустимых десятичных дробей при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполнялось равенство $\underline{a}_n = \underline{b}_n$. Таким образом, $a < b$. $\square$

Лемма 3. *Пусть a и b — два действительных числа, тогда*

$$\lim_{n \to \infty} (\underline{a}_n + \underline{b}_n) = a + b, \quad \lim_{n \to \infty} (\underline{a}_n - \underline{b}_n) = a - b, \quad \lim_{n \to \infty} \underline{a}_n \underline{b}_n = ab,$$

а при $b \neq 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} = \frac{a}{b}.^{*)}$$

Все утверждения этой леммы непосредственно следуют из леммы 1 и свойств пределов, связанных с арифметическими действиями над последовательностями (см. п. 3.9).

Замечание 2. Из леммы 3 следует, что для того чтобы произвести с заданной степенью точности какое-либо арифметическое действие над числами, записанными в виде допустимых десятичных дробей, надо взять с достаточной точностью конечные десятичные приближения и произвести над ними соответствующие действия. При этом при сложении, вычитании и умножении в результате получается снова конечная десятичная дробь. В случае же деления частное двух конечных десятичных дробей будет, вообще говоря, бесконечной десятичной дробью, причем, как это известно из элементарной математики, — периодической. Однако и в этом случае можно с любой степенью точности получить результат, выраженный конечной десятичной дробью. Например, если $\underline{(\underline{a}_n/\underline{b}_n)_n}$ является нижним десятичным приближением порядка n для частного $\underline{a}_n/\underline{b}_n$, то

$$\lim_{n \to \infty} \underline{\left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right)_n} = \frac{a}{b} \tag{3.26}$$

и, следовательно, частное a/b, $b \neq 0$, можно с любой степенью точности выразить с помощью конечных десятичных дробей вида $\underline{\left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right)_n}$.

---

*) Может случиться, что при некоторых n будем иметь $\underline{b}_n = 0$ и, следовательно, выражение $\underline{a}_n/\underline{b}_n$ будет лишено смысла. Однако в силу условия $b \neq 0$ и свойства III пределов последовательностей, доказанного в п. 3.3, существует такое n_0, что $\underline{b}_n \neq 0$ при $n \geqslant n_0$. В этом случае вместо последовательности $\underline{a}_n/\underline{b}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, следует рассматривать последовательность $\underline{a}_n/\underline{b}_n$, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$.

Для доказательства равенства (3.26) положим

$$\alpha_n = \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} - \frac{a}{b};$$

в силу леммы 3 имеем (см. лемму в п. 3.9) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Теперь, используя (3.23) и (3.25), получаем

$$\underline{\left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right)}_n - \frac{a}{b} = \left[\underline{\left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right)}_n - \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right] + \left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} - \frac{a}{b}\right) < \frac{1}{10^n} + \alpha_n.$$

И поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10^n} + \alpha_n\right) = 0$, то равенство (3.26) доказано.

Замечание 3. В результате вышеуказанных вычислений с нижними десятичными приближениями порядка n в случае сложения $\underline{a}_n + \underline{b}_n$, вычитания $\underline{a}_n - \underline{b}_n$ и деления $\underline{(\underline{a}_n/\underline{b}_n)}_n$ мы снова получим конечные десятичные дроби с не более чем n значащими цифрами после запятой. При умножении же $\underline{a}_n\underline{b}_n$ получится, вообще говоря, десятичная дробь с $2n$ значащими цифрами после запятой. Если $\underline{(\underline{a}_n\underline{b}_n)}_n$ является нижним десятичным приближением произведения $\underline{a}_n\underline{b}_n$, то аналогично (3.26) доказывается, что

$$\lim_{n\to\infty} \underline{(\underline{a}_n\underline{b}_n)}_n = ab.$$

Таким образом, при приближенных вычислениях сумм $a+b$, разностей $a-b$, произведений ab и частных a/b, $b \neq 0$, соответственно по формулам

$$\underline{a}_n + \underline{b}_n, \quad \underline{a}_n - \underline{b}_n, \quad \underline{(\underline{a}_n\underline{b}_n)}_n \quad \text{и} \quad \underline{(\underline{a}_n/\underline{b}_n)}_n,$$

в результате указанных действий над конечными десятичными дробями $\underline{a}_n$ и $\underline{b}_n$, имеющими не более чем n значащих цифр после запятой, получаются снова десятичные дроби с не более чем n значащими цифрами после запятой, при этом результат может быть получен с любой заданной степенью точности. Именно таким образом и производятся обычно действия с числами на практике.

Замечание 4. Отметим, что при построении способа записи действительных чисел последовательностями цифр за основу было взято число 10 (отрезки последовательно делились на десять равных частей). Вместо числа 10 можно взять любое натуральное число n. При использовании быстродействующих вычислительных машин часто употребляется так называемая двоичная система записи чисел, соответствующая случаю $n = 2$. При записи числа в двоичной системе участвуют только две цифры 0 и 1. Например, число 14,625 в двоичной системе будет иметь вид 1110,101, так как

$$14{,}625 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3},$$

а цифры в двоичной системе записи числа являются соответствующими коэффициентами его разложения по степеням двойки.

Замечание 5. При изложении теории действительных чисел можно идти и в обратном порядке: определить действительные числа как бесконечные допустимые десятичные дроби и, используя эту запись, ввести в них соответствующим образом соотношение порядка и арифметические действия.

Существуют и другие построения действительных чисел, которые исходят из других конкретных объектов, однако все они приводят к совокупностям элементов, удовлетворяющих свойствам I—V п. 2.1. Напомним (см. п. 2.4*), что наличие свойств I—V однозначно определяет совокупность элементов, обладающих этими свойствами. Однозначно в том смысле, что любые две совокупности, для элементов которых выполнены условия I—V, изоморфны относительно операций сложения, умножения и свойства упорядоченности. Здесь мы встречаемся с характерной чертой математических методов исследования, для которых совершенно безразлична природа элементов, а важны лишь «количественные связи» между ними, которые в данном случае выражаются свойствами I—V.

3.11*. СЧЕТНОСТЬ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. НЕСЧЕТНОСТЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Возникает естественный вопрос: все ли бесконечные множества содержат одинаковое число элементов или бесконечности бывают разными? Прежде всего оказывается, что непонятно, что вообще означает термин «одинаковое число элементов» для бесконечных множеств. Сравнение бесконечных множеств по количеству содержащихся в них элементов, или, как принято говорить, по их мощности, удобно производить с помощью понятия взаимно однозначного соответствия между элементами множеств (см. п. 1.2*).

Определение 17. *Будем говорить, что два множества X и Y имеют одинаковое количество элементов или что они равномощны, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.*

С этой точки зрения натуральные числа $1, 2, \ldots, n, \ldots$ содержат столько же элементов, сколько и четные числа $2, 4, \ldots, 2n, \ldots$, хотя на первый взгляд последних кажется в два раза меньше. Требуемое взаимное однозначное соответствие получается, если натуральному числу n поставить в соответствие число $2n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Четные числа составляют часть множества натуральных чисел, однако эти множества равномощны, следовательно, в случае бесконечных множеств часть может равняться в нашем смысле целому!

Определение 18. *Множество, которое содержит столько же элементов, сколько натуральный ряд чисел, т. е. равномощное с множеством натуральных чисел, называется счетным.*

Таким образом, если X счетно, то между множеством X и множеством натуральных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие, или, как говорят, можно занумеровать элементы множества X, понимая под номером каждого элемента $x \in X$ соответствующее ему при указанном соответствии натуральное число.

Счетные множества являются в определенном смысле простейшими бесконечными множествами. Именно справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Действительно, пусть X — бесконечное множество. Возьмем какой-либо его элемент и обозначим его x_1. В силу того, что X — бесконечное множество, в нем заведомо имеется хоть один элемент, отличный от элемента x_1. Выберем какой-либо из таких элементов и обозначим его x_2.

Пусть в множестве X уже выбраны элементы $x_1, \ldots, x_n$. Поскольку X — бесконечное множество, то в нем заведомо есть еще и другие элементы; выберем какой-либо из оставшихся элементов и обозначим его через x_{n+1} и т. д. В результате мы получили элементы $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, которые образуют счетное подмножество множества X. $\square$

Лемма 2. *Любое бесконечное подмножество счетного множества счетно.*

Доказательство. Пусть X — счетное множество, его элементы могут быть перенумерованы: $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Пусть Y — бесконечное подмножество множества X. Обозначим через b_1 первый встретившийся в ряде $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ элемент множества Y, т. е. тот из элементов $a_n \in X$, который принадлежит множеству Y и имеет наименьший номер $n_0 : b_1 = a_{n_0}$. Через b_2 обозначим тот из элементов a_n, который принадлежит множеству Y и имеет наименьший номер среди номеров $n > n_0$ и т. д. Каждый элемент множества Y имеется в ряде $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$, поэтому через какое-то конечное число шагов он будет обозначен через b_m, и поскольку множество Y бесконечно, то индекс m примет любое значение $1, 2, 3, \ldots$ Таким образом, все элементы множества Y окажутся занумерованными натуральными числами $m = 1, 2, \ldots$. Это и означает, что множество Y является счетным множеством. $\square$

Следующая теорема дает интересный пример счетного множества.

Теорема 7. *Рациональные числа образуют счетное множество.*

Доказательство. Расположим рациональные числа в таблицу следующим способом. В первую строчку поместим все целые числа в порядке возрастания их абсолютной величины и так, что за каждым натуральным числом поставлено ему противоположное:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \ldots,\ \ n,\ -n,\ \ldots,\quad n \in N.$$

Во вторую строчку поместим все несократимые рациональные дроби со знаменателем 2, упорядоченные по их абсолютной величине, причем снова за каждым положительным числом поставим ему противоположное:

$$1/2,\ -1/2,\ 3/2,\ -3/2,\ 5/2,\ -5/2,\ \ldots.$$

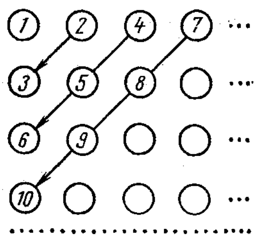
Вообще, в n-ю строчку поместим все несократимые рациональные дроби со знаменателем n, упорядоченные по их абсолютной величине, так что за каждым положительным следует ему противоположное.

В результате получим таблицу с бесконечным числом строк и столбцов:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \ldots \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \ldots \\
\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Очевидно, что каждое рациональное число попадет на какое-то место в этой таблице.

Занумеруем теперь элементы получившейся таблицы согласно следующей схеме (в кружочках стоят номера соответствующих элементов, стрелка указывает направление нумерации):



В результате все рациональные числа оказываются занумерованными, т. е. множество Q рациональных чисел счетно. $\square$

Возникает естественный вопрос: а существуют ли бесконечные множества, не являющиеся счетными? Оказывается, что да, существуют, и они называются, естественно, **несчетными множествами**. Важный пример несчетных множеств устанавливается нижеследующей теоремой.

Теорема 8 (Кантор). *Множество действительных чисел несчетно.*

Доказательство. Допустим противное: пусть удалось занумеровать все действительные числа: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$; запишем их с помощью допустимых десятичных дробей:

$$
\begin{array}{ll}
x_1 = \alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} & \ldots \alpha_m^{(1)} \ldots \\
x_2 = \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)} \alpha_2^{(2)} & \ldots \alpha_m^{(2)} \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
x_n = \alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)} \alpha_1^{(n)} & \ldots \alpha_m^{(n)} \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
\tag{3.27}
$$

Здесь $\alpha_m^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$, обозначает одну из цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$ а $\alpha_0^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, — целое число с тем или иным знаком.

Выберем цифру α_n, $n = 1, 2, \ldots$, так, чтобы $\alpha_n \neq \alpha_n^{(n)}$ и $\alpha_n \neq 9$. Тогда дробь $0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ является допустимой, но числа $a = 0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ заведомо нет среди чисел x_n, $n = 1, 2, \ldots$, так как десятичная дробь $0, \alpha_1, \ldots \alpha_n \ldots$ хотя бы одним десятичным знаком отличается от каждой из десятичных дробей (3.27). Полученное противоречие и доказывает теорему. $\square$

Следствие 1. *Множество действительных чисел любого интервала несчетно.*

Доказательство. Докажем, что, более того, множество действительных чисел любого интервала равномощно множеству всех действительных чисел.

В самом деле, прежде всего любой интервал равномощен интервалу $(-1, +1)$. Взаимно однозначное соответствие между интервалом (a, b) и интервалом $(-1, +1)$ можно установить, например, с помощью линейного отображения $x = \frac{2t - a - b}{b - a}$. Если $a < t < b$, то $-1 < x < +1$. Интервал $(-1, +1)$ взаимно однозначно с помощью отображения

$$
f(x) = \frac{x}{1 - |x|}, \quad -1 < x < 1,
$$

отображается на всю действительную ось (проверьте это). Таким образом оказывается, что интервал (a, b) равномощен всей действительной оси и, следовательно, является несчетным множеством. $\square$

Взаимно однозначное соответствие между интервалом и всей прямой легко можно наглядно осуществить геометрическим методом: сначала спроектируем открытую полуокружность, т. е. полуокружность без концевых точек, с помощью параллельной проекции на интервал (рис. 11) и, тем самым, установим между их точками взаимно однозначное соответствие. Затем с помощью центральной проекции из центра полуокружности спроектируем ее на прямую (рис. 12). Эта проекция также устанавливает взаимно однозначное соответствие, но на этот раз между указанной полуокружностью и всей прямой.

Следствие 2. *На любом интервале имеются иррациональные числа.*

Доказательство. Действительно, если бы на некотором интервале не оказалось бы иррационального числа, то это означало бы, что все точки этого интервала являются рациональными числами, т. е. являются подмножеством счетного множества рациональных чисел и, значит, образуют конечное, или счетное, множество (см. лемму 2), что противоречит следствию 1. □

Рис. 11

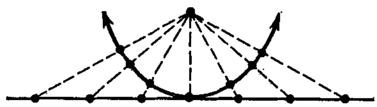


Рис. 12

Замечание. В п. 3.10 доказано, что действительное число есть предел последовательности рациональных чисел (например, своих верхних десятичных приближений). Отсюда сразу следует, что всякий интервал содержит бесконечно много рациональных чисел. В самом деле, пусть задан интервал (a, b). Выберем какое-либо число $\xi \in (a, b)$, например $\xi = \frac{a+b}{2}$. Тогда если ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, — верхние десятичные приближения для ξ, то $\xi_n \neq \xi$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n = \xi$. Поскольку интервал (a, b) является окрестностью выбранной точки ξ, то согласно определению предела последовательности почти все рациональные числа ξ_n будут содержаться в интервале (a, b). Иначе говоря, найдется такой номер n_0, что для всех номеров $n \geqslant n_0$ будет выполняться неравенство $a < \xi_n < b$, т. е. ξ_n, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$, — искомые рациональные числа.

Таким образом, на любом интервале числовой оси содержатся как рациональные, так и иррациональные числа. Это свойство кратко выражают, говоря, что «рациональные и иррациональные числа образуют всюду плотные подмножества множества действительных чисел».

Упражнение 17. Доказать, что множества точек интервала, отрезка и полуинтервала равномощны.

3.12*. ВЕРХНИЙ И НИЖНИЙ ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В п. 3.6 было показано, что любая числовая последовательность всегда имеет по крайней мере один частичный предел, конечный или бесконечный. Наибольший и наименьший из них (ниже будет показано, что они всегда существуют) играют особую роль в теории последовательностей. Здесь понятия «наибольший» и «наименьший» понимаются в смысле расширенного множества действительных чисел $\overline{R}$ (см. п. 2.7), т. е. в частности, наибольшим (наименьшим) элементом множества $X \subset \overline{R}$ может оказаться $+\infty$ (соответственно $-\infty$). Это будет иметь место тогда, когда $+\infty \subset X$ ($-\infty \subset X$). В нашем случае это будет означать, что бесконечность соответствующего знака является частичным пределом рассматриваемой последовательности.

Определение 19. *Наибольший частичный предел последовательности $\{x_n\}$ называется ее верхним пределом и обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, а наименьший частичный предел называется нижним пределом и обозначается $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.*

Теорема 9. *У любой последовательности $\{x_n\}$ существует как наибольший, так и наименьший частичный предел.*

Доказательство. Докажем существование наибольшего частичного предела. Для заданной последовательности $\{x_n\}$ возможны два случая: либо она ограничена сверху, либо нет. Если она не ограничена сверху, то $+\infty$ является ее частичным пределом и, очевидно, наибольшим, т. е. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$.

Если же последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то снова возможны два случая: либо множество ее конечных пределов, которое мы обозначим через A, не пусто, либо оно пусто. Рассмотрим сначала первый случай. Из ограниченности сверху данной последовательности $\{x_n\}$ следует и ограниченность сверху непустого множества A ее конечных частичных пределов. В силу этого множество A имеет конечную верхнюю грань. Покажем, что $b = \sup A$ является частичным пределом, т. е. что $b \in A$. Действительно, если бы $b \notin A$, то существовало бы такое $\varepsilon > 0$, что в интервале $(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$ содержалось бы лишь конечное число членов последовательности $\{x_n\}$ (в частности, ни одного), и поэтому (почему?) в этом интервале не было бы ни одного элемента A, что противоречит условию $b = \sup A$.

Таким образом, $b \in A$ и, следовательно, является наибольшим элементом множества A, поэтому $b = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

В оставшемся случае, т. е. когда последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху и множество ее конечных частичных пределов A пусто, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ (докажите это), т. е. в этом случае множество ее частичных пределов состоит из одного элемента $-\infty$, который тем самым является и наибольшим в этом множестве, т. е. здесь

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty.$$

Аналогично для любой последовательности доказывается и существование наименьшего (конечного или бесконечного) частичного предела. □

Упражнение 18. Пусть $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$, $n=1, 2, \ldots$. Найти $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$.

Теорема 10. *Для того чтобы число a было верхним пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно выполнение для любого числа $\varepsilon > 0$ совокупности следующих двух условий.*

1. *Существует номер n_ε такой, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ справедливо неравенство $x_n < a + \varepsilon$.*

2. *Для любого номера n_0 существует номер n' (зависящий от ε и от n_0) такой, что $n' > n_0$ и $x_{n'} > a - \varepsilon$.*

Условие 1 означает, что при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ в последовательности $\{x_n\}$ существует лишь конечное число членов x_n таких, что $x_n \geqslant a + \varepsilon$ (их номера меньше n_ε).

Условие же 2 означает, что при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ в последовательности $\{x_n\}$ существует бесконечно много членов x_n таких, что $x_n > a - \varepsilon$.

Доказательство необходимости. Пусть $a = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ и пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Если бы на полуинтервале $[a+\varepsilon, +\infty)$ оказалось бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, то нашлась бы подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, элементы которой принадлежат этому полуинтервалу и которая имеет конечный или бесконечный предел. Обозначим его через b. Очевидно, $b \geqslant a + \varepsilon > a$, что противоречит тому, что a — наибольший частичный предел последовательности $\{x_n\}$. Свойство 1 доказано.

Далее, поскольку верхний предел является и частичным пределом, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Почти все члены последовательности $\{x_{n_k}\}$ больше $a - \varepsilon$ и, следовательно, существует бесконечно много членов данной последовательности $\{x_n\}$, больших, чем $a - \varepsilon$. Свойство 2 также доказано.

Доказательство достаточности. Пусть число a удовлетворяет условиям 1 и 2. Покажем, что тогда a является частичным пределом. Возьмем $\varepsilon = 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$. Для каждого натурального k существует номер n_k такой, что $x_{n_k} > a - 1/k$ (согласно условию 2) и $x_{n_k} < a + 1/k$ (согласно условию 1). Поскольку для любого k множество элементов x_n данной последовательности, для которых выполняются неравенства $a - \frac{1}{k} < x_n < a + \frac{1}{k}$, бесконечно, то номера n_k можно последовательно ($k = 1, 2, \ldots$) выбрать так, чтобы $n_{k_1} < n_{k_2}$ при $k_1 < k_2$. В результате мы получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ данной последовательности $\{x_n\}$. Из неравенства $|a - x_{n_k}| < \frac{1}{k}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, т. е. что a является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$.

Покажем теперь, что число a является наибольшим частичным пределом. Действительно, если бы нашелся частичный предел b последовательности $\{x_n\}$ такой, что $b > a$, то беря $\varepsilon > 0$ так, что $a+\varepsilon < b$ мы получим, что на промежутке $(a+\varepsilon, +\infty)$ будет находиться бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$ (а именно почти все члены подпоследовательности, сходящейся к b). Это противоречит условию 1. $\square$

Упражнения. 19. Доказать, что для того чтобы последовательность имела предел (конечный или бесконечный, равный одному из символов $+\infty$ или $-\infty$), необходимо и достаточно, чтобы $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

20. Доказать, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n$.

21. Доказать, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \inf_n \left\{\sup_{m\geqslant n} x_m\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{m\geqslant n} x_m\right\},$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \sup_n \left\{\inf_{m\geqslant n} x_m\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\inf_{m\geqslant n} x_m\right\}.$$

§ 4. ФУНКЦИИ И ИХ ПРЕДЕЛЫ

4.1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

При изучении тех или иных процессов реального мира (физических, химических, биологических, экономических и всевозможных других) мы постоянно встречаемся с теми или иными характеризующими их величинами, меняющимися в течение рассматриваемых процессов. При этом часто бывает, что изменению одной величины сопутствует и изменение другой или даже, более того, изменение одной величины является причиной изменения другой. Взаимосвязные изменения числовых характеристик рассматриваемых величин приводят к их функциональной зависимости в соответствующих математических моделях. Поэтому понятие функции является одним из самых важных понятий в математике и ее приложениях.

В нашем курсе математического анализа будут сначала изучаться только действительные функции одного действительного аргумента, т. е. функции $f: E \to \boldsymbol{R}$, где $E \subset \boldsymbol{R}$. Независимые и зависимые переменные называются в этом случае *действительными* (*вещественными*) *переменными*. Затем появятся функции многих переменных, т. е. функции, определенные на некотором множестве элементов, каждый из которых представляет собой упорядоченную совокупность чисел. Будут также изучаться функции, принимающие комплексные значения, функции, аргументами которых являются комплексные числа и другие функции более общей природы.

Над функциями, принимающими числовые значения (такие функции называются *числовыми функциями*), можно производить различные арифметические операции. Если даны две числовые функции f и g, определенные на одном и том же множестве X, а c — некоторое число (или, как часто говорят, постоянное), то функция cf определяется как функция, принимающая в каждой точке $x \in X$ значение $cf(x)$; функция $f+g$ — как функция, принимающая в каждой точке $x \in X$ значение $f(x)+g(x)$; fg — как функция, в каждой точке принимающая значение $f(x)\,g(x)$; наконец, f/g — как функция, в каждой точке $x \in X$ равная $f(x)/g(x)$ (что, конечно, имеет смысл лишь при $g(x) \neq 0$).

Числовая функция f, определенная на множестве X, называется *ограниченной сверху* (*ограниченной снизу*), если множество ее значений ограничено сверху (снизу). Иначе говоря, функция f ограничена сверху (снизу), если существует такая постоянная M, что для каждого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant M$ (соответственно $f(x) \geqslant M$).

Функция f, ограниченная на множестве X как сверху, так и снизу, называется просто *ограниченной* на этом множестве. Очевидно, что функция f ограничена на множестве X в том и только том случае, если существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для каждого $x \in X$.

Верхняя (нижняя) грань множества значений Y_f числовой функции $y=f(x)$, определенной на множестве X, называется *верхней* (*нижней*) *гранью* функции f и обозначается

$$\sup f, \ \sup_X f, \ \sup_{x \in X} f(x) \ \left(\inf f, \ \inf_X f, \ \inf_{x \in X} f(x)\right).$$

Более подробно это означает, что, например, $\lambda = \sup f$, если, во-первых, для каждого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant \lambda$ и, во-вторых, для любого $\lambda' < \lambda$ существует такое $x_{\lambda'} \in X$, что $f(x_{\lambda'}) > \lambda'$. Индекс λ' у элемента множества X показывает, что он зависит от выбора числа λ'.

В приведенном определении верхняя (нижняя) грань функции может быть как конечной, так и бесконечной.

Согласно результатам п. 2.8, функция f ограничена сверху (снизу) на множестве X тогда и только тогда, когда она имеет на этом множестве конечную верхнюю (нижнюю) грань.

Упражнения. 1. Доказать, что если функция f неограничена сверху (соответственно снизу) на отрезке $[a, b]$, то существует такая последовательность точек $x_n \in [a, b]$, $n=1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty$ (соответственно $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty$).

2. Доказать, что если функция неограничена на отрезке, то существует точка этого отрезка, в каждой окрестности которой функция неограничена.

3. Построить пример функции, определенной на отрезке и неограниченной на нем.

Будем говорить, что числовая функция f, определенная на множестве X, принимает в точке $x_0 \in X$ *наибольшее значение* (соответственно *наименьшее*), если $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(x_0)$) для каждой точки $x \in X$. В этом случае будем писать $f(x_0) = \max\limits_X f$ или $f(x_0) = \max f$ (соответственно $f(x_0) = \min\limits_X f$ или $f(x_0) = \min f$).

Наибольшее (наименьшее) значение функции называется также ее *максимальным* (*минимальным*) значением. Максимальные и минимальные значения называются *экстремальными*.

Очевидно, что если функция f принимает в точке x_0 наибольшее (наименьшее) значение, то $f(x_0) = \sup f$ (соответственно $f(x_0) = \inf f$).

Отметим еще, что если заданы множества X, Y и соответствие f, ставящее в соответствие каждому элементу множества X единственный элемент множества Y, то этим функция f, определенная на множестве X и с множеством значений, содержащимся в множестве Y, полностью определена. В частности, безразлично, какой буквой обозначать аргумент и какой — значение функции. Так, при заданном указанном соответствии f записи $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ и $v = f(u)$, $u \in X$, $v \in Y$, обозначают одно и то же. Например, $y = \log_a x$, $x > 0$ и $x = \log_a y$, $y > 0$ обозначают одну и ту же функцию.

4.2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

В этой главе изучаются только действительные функции одной действительной переменной, поэтому остановимся на способах задания только таких функций.

Прежде всего функции могут задаваться при помощи формул: аналитический способ. Для этого используется некоторый запас изученных и специально обозначенных функций, алгебраические действия и предельный переход. Например, $y = ax + b$, $y = ax^2$, $y = \sin x$, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 1 + \sqrt{\lg \cos 2\pi x}$.

При этом всегда под функцией, заданной некоторой формулой, понимается функция, определенная на множестве всех тех действительных чисел, для которых, во-первых, указанная формула имеет смысл и, во-вторых, в процессе проведения всех необходимых вычислений по этой формуле получаются только действительные числа, причем окончательный результат вычислений для данного числа x из области определения рассматриваемой функции является ее *значением* в точке x. Так, областью существования функции $f(x)=\frac{x+|x|}{\sqrt{1-x^2}}$ является интервал $(-1, 1)$, хотя эта функция и принимает действительные значения на полупрямой $x<1$ с «выколотой точкой» $x=-1$.

Иногда функция задается с помощью нескольких формул, например

$$f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{для } x>0, \\ 0 & \text{для } x=0, \\ x-1 & \text{для } x<0. \end{cases} \qquad (4.1)$$

Функция может быть задана также просто с помощью описания соответствия. Поставим в соответствие каждому числу $x>0$ число 1, числу 0 — число 0, а каждому $x<0$ — число -1. В результате получим функцию, определенную на всей вещественной оси и принимающую три значения: 1, 0 и -1. Эта функция имеет специальное обозначение $\operatorname{sign} x$ *) и, конечно, может быть записана с помощью нескольких формул:

$$\operatorname{sign} x=\begin{cases} 1 & \text{для } x>0, \\ 0 & \text{для } x=0, \\ -1 & \text{для } x<0. \end{cases}$$

Другой пример: каждому рациональному числу поставим в соответствие число 1, а каждому иррациональному — число ноль. Полученная функция называется *функцией Дирихле* **).

Отметим, что всякая формула является символической записью некоторого где-то описанного ранее соответствия, так что, в конце концов, нет принципиального различия между заданием функции с помощью формулы или с помощью описания соответствия; это различие чисто внешнее.

Следует также иметь в виду, что всякая вновь определенная функция, если для нее ввести специальное обозначение, может служить для определения других функций с помощью формул, включающих этот новый символ.

Если речь идет о действительных функциях одного действительного аргумента, то для наглядного представления о характере функциональной зависимости часто строятся графики функций.

Графиком функции $y=f(x)$ *(x и y — числа) называется множество точек на плоскости с координатами* $(x, f(x))$, $x\in X$ *(X — как всегда, область определения функции).*

---

*) Signum — по латыни означает «знак»

**) Л. Дирихле (1805—1859) — немецкий математик.

Так, график функции (4.1) имеет вид, изображенный на рис. 13, а график функции $y = 1 + \sqrt{\lg \cos 2\pi x}$ состоит из отдельных точек (рис. 14).

Множество точек $\{(x, y): x \in X, y \geqslant f(x)\}$ называется *надграфиком* данной функции f, а множество $\{(x, y): x \in X, y \leqslant f(x)\}$ *ее подграфиком*.

Графическое изображение функции также может служить для задания функциональной зависимости. Правда, это задание будет приближенно, потому что измерение отрезков практически можно производить лишь с определенной степенью точности. Примерами графического задания функций, встречающимися на практике, могут служить, например, показания осциллографа.

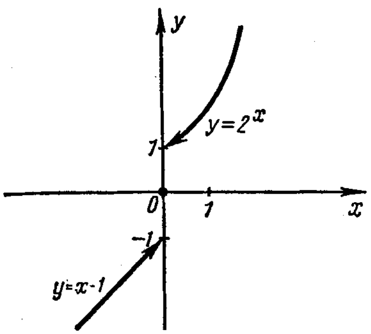


Рис. 13

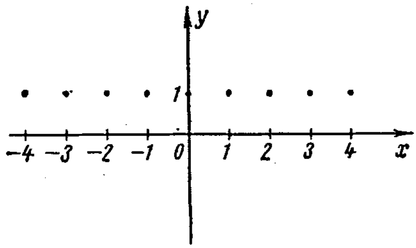


Рис. 14

Функцию можно задать еще с помощью таблиц, т. е. для некоторых значений переменной x указать соответствующие значения переменной y. Данные таблиц могут быть получены как непосредственно из опыта, так и с помощью тех или иных математических расчетов. Примерами такого задания функций являются логарифмические таблицы и таблицы тригонометрических функций.

Наконец, при проведении численных расчетов на компьютерах функции задаются с помощью программ для их вычисления при нужных значениях аргумента или требуемые значения функции в готовом виде закладываются тем или иным способом в память компьютера.

Упражнения. Построить графики функций:

4. $y = 2x + 1$.
5. $y = ax + b$.
6. $y = a/x$.
7. $y = 2x^2$.
8. $y = ax^2 + bx + c$.
9. $y = 2^x$.
10. $y = (1/2)^x$.
11. $y = \lg x$.
12. $y = \log_{1/2} x$.
13. $y = \sin 2x$.
14. $y = 2\cos(3x + 2) + 1$.
15. $y = \operatorname{tg} 3x$.

16. $y=\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x$
17. $y=\arcsin x$,
18. $y=3\arccos\frac{x}{2}+1$,
19. $y=\operatorname{arctg} x$,
20. $y=\frac{x^2+1}{x^2-4}$.
21. $y=\frac{x^2(x-1)^2}{x+1}$.

Рассмотрим более подробно некоторые специальные аналитические способы задания функции.

Неявные функции. Пусть дано уравнение вида

$$F(x, y)=0, \tag{4.2}$$

т. е. задана функция $F(x, y)$ двух действительных переменных x и y, и рассматриваются только такие пары x, y (если они существуют), для которых выполняется условие (4.2).

Пусть существует такое множество X, что для каждого $x_0 \in X$ существует по крайней мере одно число y, удовлетворяющее уравнению $F(x_0, y)=0$. Обозначим одно из таких y-ков через y_0 и поставим его в соответствие числу $x_0 \in X$. В результате получим функцию f, определенную на множестве X и такую, что $F(x_0, f(x_0))=0$ для всех $x_0 \in X$. В этом случае говорят, что функция f задается неявно уравнением (4.2). Одно и то же уравнение (4.2) задает, вообще говоря, не одну, а некоторое множество функций.

Функции, неявно задаваемые уравнениями вида (4.2), называются *неявными функциями* в отличие от функций, задаваемых формулой, разрешенной относительно переменной y, т. е. формулой вида $y=f(x)$.

Термин «неявная функция» отражает не характер функциональной зависимости, а лишь способ ее задания. Одна и та же функция может быть задана как явно, так и неявно. Например, функции $f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ и $f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$ могут быть заданы также и неявным образом с помощью уравнения $x^2+y^2-1=0$ в том смысле, что они входят в совокупность функций, задаваемых этим уравнением.

Сложные функции. Напомним, что если заданы функции $y=f(x)$ и $z=F(y)$, причем область задания функции F содержит область значений функции f, тогда каждому x из области определения функции f естественным образом соответствует z такое, что $z=F(y)$, где $y=f(x)$. Эта функция, определяемая соответствием $z=F[f(x)]$, называется, как известно, *сложной функцией* или *композицией* (*суперпозицией*) функций f и F и обозначается через $F\circ f$, т. е.

$$(F\circ f)(x) \overset{\text{def}}{=} F(f(x)).$$

Сложная функция отражает не характер функциональной зависимости, а лишь способ ее задания: может случиться, что одна и та же функция может быть задана как с помощью композиций каких-либо функций, так и без их помощи. Например, сложная функция $z=2^y$, $y=\log_2(1+\sin^2 x)$, заданная с помощью суперпозиций показательной и логарифмической функций, может быть задана и без этой суперпозиции $z=1+\sin^2 x$.

Подобным образом можно рассматривать сложные функции, являющиеся суперпозицией более чем двух функций, например функцию $w=\sin\lg\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ можно рассматривать как суперпозицию следующих функций: $w=\sin v$, $v=\lg u$, $u=1+z$, $z=1/y$, $y=\sqrt{x}$.

4.3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Функции: постоянная $y=c$, c — константа, степенная $y=x^\alpha$, показательная $y=a^x$ $(a>0)$, логарифмическая $y=\log_a x$ $(a>0$, $a\neq 1)$, тригонометрические $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$ и $y=\operatorname{arcctg} x$ — называются *основными элементарными функциями*.

Всякая функция, которая может быть явным образом задана с помощью формулы, содержащей лишь конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций, называется просто элементарной функцией.

Под областью существования элементарной функции в соответствии с общим соглашением о функциях, заданных формулами (см. п. 4.2), обычно понимают множество всех действительных чисел x, для которых, во-первых, формула, задающая рассматриваемую элементарную функцию, имеет смысл, и, во-вторых, в процессе проведения всех необходимых вычислений по этой формуле получаются только действительные числа.

Выше рассмотренные функции, задаваемые формулами $y=ax+b$, $y=ax^2$, $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=1+\sqrt{\lg\cos 2\pi x}$, $y=\sin\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $y=\frac{x+|x|}{\sqrt{1-x^2}}$ (заметим, что $|x|=\sqrt{x^2}$ — элементарная функция), являются элементарными функциями.

Элементарные функции обычно делят на следующие классы.

1. Многочлены (полиномы). К многочленам относятся функции, которые могут быть заданы формулами вида

$$y=P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n} a_kx^k.$$

Если $a_n\neq 0$, то число n называется степенью данного многочлена. Многочлены первой степени называются также линейными функциями.

2. Рациональные функции (рациональные дроби). К этому классу функций относятся функции, которые могут быть

заданы в виде

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

3. Иррациональные функции. Иррациональной функцией называется функция, которая может быть задана с помощью суперпозиций конечного числа рациональных функций, степенных функций с рациональными показателями и четырех арифметических действий. Например, функция

$$y=\sqrt[5]{(x-1)/(x^2+\sqrt{x})}$$

является иррациональной функцией.

Заметим, что класс многочленов содержится в классе рациональных функций.

4. Трансцендентные функции. Элементарные функции, не являющиеся иррациональными, называются трансцендентными, элементарными функциями. Можно показать, что все прямые и обратные тригонометрические функции, а также показательная и логарифмическая функции являются трансцендентными функциями.

Поскольку в нашем курсе анализа изучаются в основном действительные функции от одного или нескольких действительных аргументов, то вместо «действительная функция» будем говорить и писать просто «функция». В тех случаях, когда будут рассматриваться функции другой природы, это или будет специально оговариваться, либо будет ясно из контекста.

4.4. ПЕРВОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

Для того чтобы сформулировать определение предела функции, введем сначала определение «проколотой окрестности». Напомним, что ε-окрестностью $U(x_0, \varepsilon)$ точки $x_0 \in R$ называется интервал вида $U(x_0, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.

Всякая ε-окрестность точки называется также просто ее *окрестностью*.

Определение 1. *Проколотой ε-окрестностью точки x_0 называется ε-окрестность точки x_0, из которой удалена точка x_0.*

Проколотая ε-окрестность точки x_0 обозначается через $\mathring{U}(x_0, \varepsilon)$:

$$\mathring{U}(x_0, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} U(x_0, \varepsilon)\setminus\{x_0\}.$$

Всякая проколотая ε-окрестность точки x_0 называется и просто *проколотой окрестностью* этой точки и обозначается также и через $\mathring{U}(x_0)$.

Отметим, что выражение «функция f определена на множестве E» не означает, что указанное множество является множеством определения функции f, а лишь, что это множество принадлежит области X_f определения функции f и что в данном вопросе функция f рассматривается только на указанном множестве E, т. е. по существу рассматривается лишь сужение функции f на множестве E *).

Определение 2. (Гейне **)). *Пусть функция f определена на некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0.*

Число A называется пределом функции f в точке x_0 (или при x, стремящемся к x_0), если для любой последовательности $x_n \in \mathring{U}(x_0)$, $n=1, 2, \ldots$, сходящейся к точке x_0: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A, т. е. верно равенство $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Если число A является пределом функции f в точке x_0, то пишется

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x), \quad \text{или} \quad A = \lim_{x - x_0 \to 0} f(x),$$

а также $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Из этого определения следует, что функция не может иметь двух разных пределов в одной точке. Далее, из определения следует, что значения функции f в точках x, лежащих вне любой фиксированной окрестности точки x_0, и значение функции f в точке x_0 не влияют ни на существование, ни на величину предела функции f в точке x_0.

Существует или нет предел функции в данной точке x_0, а если существует, то каково его значение, полностью определяется значениями функции в сколь угодной малой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0. Действительно, какова бы ни была проколотая окрестность $\mathring{U}(x_0)$ и какова бы ни была последовательность $x_n \in \mathring{U}(x_0)$, $n=1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, найдется такой номер $n_0 \in N$, что при $n \geq n_0$ будет иметь место $x_n \in \mathring{U}(x_0)$, а конечное число оставшихся членов последовательности $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_{n_0-1})$ не влияет ни на существование, ни на величину предела всей последовательности $\{f(x_n)\}$. В этом смысле говорят, что свойство функции иметь предел в данной точке является **локальным свойством** функции.

---

*) В случае окрестности точки (а также в случае ее проколотой окрестности) наряду с выражением «функция определена на окрестности» употребляется выражение «функция определена в окрестности». В подобных выражениях предлоги в и на имеют одинаковый смысл и для ряда других множеств.

**) Г. Гейне (1821—1881)—немецкий математик.

Подчеркнем, что если функция имеет предел в некоторой точке, то она определена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

Примеры. 1. Пусть $f(x)=(2x^2+x-1)/(x-1)$. Выясним, существует или нет $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Возьмем какую-либо последовательность x_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ и $x_n\neq 0$, $n=1, 2, \ldots$, тогда на основании теорем п. 3.9 имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2x_n^2+x_n-1}{x_n-1}=\frac{2\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^2+\lim\limits_{n\to\infty} x_n-1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n-1}=1.$$

(при этом мы считали $x_n\neq 1$, так как при $x=1$ рассматриваемая функция не определена). Таким образом, существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=1$, и так как он не зависит от выбора последовательности $x_n\to 0$, $n=1, 2, \ldots$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=1$.

2. Рассмотрим функцию $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ (рис. 15). Снова выясним существует или нет $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Возьмем две последовательности: $x_n=\frac{1}{\pi n}$ и $x_n'=\frac{1}{\pi/2+2\pi n}$, $n=1, 2, \ldots$. Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} x_n'=0$, $x_n\neq 0$, $x_n'\neq 0$, $f(x_n)=\sin\pi n=0$, $f(x_n')=\sin\frac{\pi}{2}=1$, $n=1, 2, \ldots$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$ и $\lim f(x_n')=1$ и, значит, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует.

Замечание. Пусть функции f и g определены на интервале $(a\ b)$, кроме, быть может, точки x_0, и пусть $f(x)=g(x)$ при $x\neq x_0$, $x\in(a, b)$, тогда из того, что в определении предела функции в точке x_0 участвуют только значения функции в точках $x\neq x_0$ следует, что пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ одновременно существуют или нет, причем в первом случае $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. На этом простом замечании основано так называемое правило раскрытия неопределенностей с помощью сокращения дробей. Поясним его на примере.

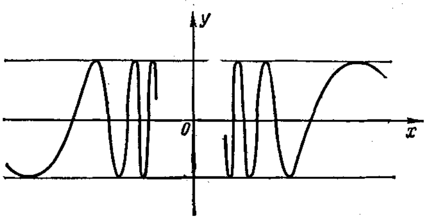


Рис. 15

3. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2x^2+x-1)x}{x^2-x}$. Повторение рассуждений, аналогичных проведенным выше при разборе примера 1, приводит

к выражению 0/0 (к неопределенности), т. е. не дает ответа на вопрос о существовании и значении искомого предела. Однако, беря функцию $f(x)=\frac{2x^2-x-1}{x-1}$, получающуюся сокращением на x выражения $g(x)=\frac{(2x^2+x-1)x}{x^2-x}$ и, следовательно, такую, что $f(x)=g(x)$ при $x\neq 0$, вспоминая, что мы уже доказали, что существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, имеем, согласно сделанному замечанию,

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(2x^2+x-1)x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+x-1}{x-1}=\lim_{x\to 0} f(x)=1.$$

Определение 3. *Пусть функция f определена на интервале $(a,\ x_0)$. Число B называется пределом слева функции f в точке x_0, если какова бы ни была такая последовательность $\{x_n\}$, что*

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0,\qquad a<x_n<x_0,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

(в частности, это означает, что последовательность $\{x_n\}$ сходится слева к точке x_0 см. п. 3.1), последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу B, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=B.$$

Если такое число B существует, то пишут

$$B=\lim_{x\to x_0-0} f(x)\qquad\text{или}\qquad B=f(x_0-0).$$

Аналогично определяется предел справа $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ в точке x_0 для функции, определенной на интервале $(x_0,\ b)$. Именно, *число B называется пределом справа функции f в точке x_0, если для любой такой последовательности точек $\{x_n\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, $x_0<x_n<b$, $n=1,\ 2,\ \ldots$ (в частности, это означает, что последовательность $\{x_n\}$ сходится справа к точке x_0), последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу B, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=B.$$

В случае $x_0=0$ вместо $x\to 0+0$ (соответственно вместо $x\to 0-0$) пишут просто $x\to +0$ (соответственно $x\to -0$). Пределы слева и справа функции называются *односторонними* в отличие от предела функции, определенного в начале этого пункта, который называется и *двусторонним пределом*.

В качестве примера рассмотрим функцию $y=\operatorname{sign} x$ (см. п. 4.1 и рис. 16).

Пусть $x_n>0$, $x_n'<0$, $n=1,\ 2,\ \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} x_n'=0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{sign} x_n=\lim_{n\to\infty} 1=1,\ \lim_{n\to\infty}\operatorname{sign} x_n'=\lim_{n\to\infty}(-1)=-1,$$

значит,

$$\lim_{x\to+0}\operatorname{sign}x=1,\quad \text{а} \quad \lim_{x\to-0}\operatorname{sign}x=-1.$$

Согласно определению предела функции функция f, определенная в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0, имеет в этой точке предел, если какова бы ни была последовательность $x_n\in\mathring{U}(x_0)$, $n=1, 2, \ldots$, имеющая своим пределом x_0: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится, и ее предел не зависит от выбора указанной последовательности $\{x_n\}$, т. е. все последовательности $\{f(x_n)\}$ имеют и притом один и тот же предел: $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$. Число A и является в этом случае *пределом функции f в точке x_0*.

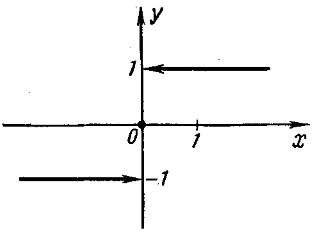


Рис. 16

Покажем, что если предположить несколько меньше, а именно предположить только существование предела у каждой рассматриваемой последовательности $\{f(x_n)\}$, то уже из одного этого будет следовать, что все эти пределы совпадают и тем самым функция f в этом случае будет иметь предел в точке x_0.

Сформулируем это утверждение в виде отдельной леммы.

Лемма. *Для того чтобы функция f, определенная в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0, имела в этой точке предел необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n\in\mathring{U}(x_0)$, $n=1, 2, \ldots$, сходящейся к точке x_0, последовательность $f(x_n)$ имела предел.*

Доказательство. Необходимость сформулированного условия для существования предела функции содержится в самом определении этого понятия (см. определение 2).

Достаточность. Пусть функция f определена в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0, и пусть для любой последовательности $x_n\in\mathring{U}(x_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, последовательность $f(x_n)$, $n=1, 2, \ldots$, сходится. Рассмотрим две последовательности $x'_n\in\mathring{U}(x_0)$ и $x''_n\in\mathring{U}(x_0)$, $n=1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=\lim\limits_{n\to\infty}x''_n=x_0$. Тогда последовательность

$$x_n=\begin{cases} x'_k, & \text{если} \quad n=2k-1,\\ x''_k, & \text{если} \quad n=2k,\end{cases}$$
$$k=1, 2, \ldots$$

также сходится к точке x_0, $x_n\in\mathring{U}(x_0)$, $n=1, 2, \ldots$. Согласно предположению существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x''_n)$ и

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, причем последовательности $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ являются подпоследовательностями последовательности $\{f(x_n)\}$.

Заметим теперь, что если у некоторой последовательности имеется предел, то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n)=\lim_{n\to\infty} f(x_n),\qquad \lim_{n\to\infty} f(x''_n)=\lim_{n\to\infty} f(x_n);$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n)=\lim_{n\to\infty} f(x''_n).$$

Таким образом, пределы последовательностей $\{f(x_n)\}$, где $x_n\in\mathring{U}(x_0)$, $n=1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, не зависят от выбора последовательности $\{x_n\}$. Обозначая их общее значение через A, согласно определению 2 будем иметь: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. $\square$

Доказанная лемма естественным образом переносится и на случай односторонних пределов.

4.5. ВТОРОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИЙ

Существует другое определение предела функции, не использующее понятия предела последовательности и называемое *определением предела по Коши.*

Определение 4. *Число A называется пределом функции f в точке x_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию*

$$|x-x_0|<\delta,\qquad x\neq x_0, \tag{4.3}$$

выполняется неравенство

$$|f(x)-A|<\varepsilon. \tag{4.4}$$

Предел функции в смысле определения Коши также обозначается

$$\lim_{x\to x_0} f(x).$$

Используя логические символы, определение 4 можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,(\forall x\neq x_0,\ |x-x_0|<\delta):|f(x)-A|<\varepsilon. \tag{4.5}$$

Вспоминая, что множество точек x, удовлетворяющих условию (4.3), называется *проколотой окрестностью* $\mathring{U}(x_0, \delta)$ точки x_0, а множество точек y, удовлетворяющих неравенству $|y-A|<\varepsilon$, называется просто *окрестностью* $U(A, \varepsilon)$ точка A, определение 4 можно перефразировать следующим образом.

Число A называется пределом функции f в точке x_0, если для любой окрестности $U(A, \varepsilon)$ точки A существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(x_0, \delta)$ точки x_0, что (рис. 17)

$$f(\mathring{U}(x_0, \delta)) \subset U(A, \varepsilon). \tag{4.6}$$

Теорема 1. *Определения 2 и 4 предела функции в данной точке равносильны.*

Доказательство. 1. Пусть $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ в смысле определения 2. Тогда функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0, \delta)$ точки x_0 и для любой последовательности $x_n \in \mathring{U}(x_0, \delta)$, $n=1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Покажем, что выполняется и условие, стоящее в правой части формулы (4.5).

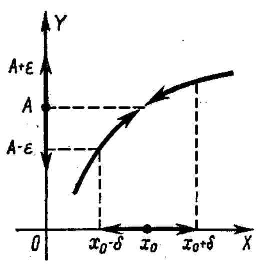


Рис. 17

Допустим, это не так, т. е. что

$$(\exists \varepsilon_0 > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists x_\delta \neq x_0,$$
$$|x_\delta - x_0| < \delta)\colon |f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon. \tag{4.7}$$

Иначе говоря, найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$, а значит, в частности, и для любого δ, $0<\delta<\delta_0$, существует такое x_δ (индекс δ у x подчеркивает зависимость x от выбора δ; ничего, конечно, не изменится, если индекс δ не писать), что для него $|x_\delta - x_0| < \delta$ и выполняется неравенство

$$|f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon_0. \tag{4.8}$$

Будем последовательно выбирать $\delta = \frac{\delta_0}{n}$, $n=1, 2, \ldots$, а соответствующие x_δ обозначать просто через x_n:

$$|x_n - x_0| < \frac{\delta_0}{n}, \quad x_n \neq x_0, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{4.9}$$

следовательно, в силу (4.8)

$$|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0. \tag{4.10}$$

Очевидно, что из (4.9) вытекает, что $x_n \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, однако из условия (4.10) явствует, что число A не может быть пределом последовательности $\{f(x_n)\}$. Это противоречит определению 2 предела функции. Полученное противоречие доказывает сделанное утверждение. $\square$

2. Пусть теперь $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ в смысле определения 4 предела функции. Покажем, что тогда функция f прежде всего определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. В самом деле, возьмем, например, $\varepsilon = 1$. Для него согласно определению 4 существует такое $\delta_0 > 0$, что для всех $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta_0$ выполняется условие $|f(x) - A| < 1$ и, следовательно, в частности для всех таких значений x определена функция f. Таким образом, функция f заведомо определена в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0, \delta_0)$.

Возьмем

$$x_n \in \mathring{U}(x_0, \delta_0), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.11}$$

и

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0. \tag{4.12}$$

Покажем, что если функция f удовлетворяет условиям определения 4, то

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A. \tag{4.13}$$

Проверим это. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и выберем для него $\delta > 0$, которое удовлетворяет условиям (4.3) — (4.4). Для этого δ в силу условия (4.12) найдется такое $n_0 \in N$, что для всех $n \geqslant n_0$, $n \in N$, будет выполняться неравенство $|x_n - x_0| < \delta$. Из условия же (4.11) следует, что для всех $n \in N$: $x_n \neq x_0$. Поэтому в силу (4.4) для всех $n \geqslant n_0$ справедливо неравенство

$$|f_n(x) - A| < \varepsilon.$$

Это и означает выполнение условия (4.13). □

Предел функции, как было отмечено в п. 4.4, является локальным свойством функции в том смысле, что его существование для функции в данной точке, а если он существует, то и его значение не зависит от сужения функции на сколь угодно малой проколотой окрестности рассматриваемой точки. Это хорошо также видно и из определения 4: если задать произвольное $\delta_0 > 0$ и добавить в указанное определение дополнительное условие $\delta < \delta_0$, то получится равносильное исходному определение, так как если условия (4.3) — (4.4) выполняются для некоторого $\delta > 0$, то они выполняются и для всех меньших положительных δ.

Для односторонних пределов функции в точке также можно дать новое определение.

Определение 5. *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, x_0) (соответственно на интервале (x_0, b)). Число B называется пределом слева (справа) функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек x, удовлетворяющих условию $x_0 - \delta < x < x_0$ (соответственно условию $x_0 < x < x_0 + \delta$), выполняется неравенство $|f(x) - B| < \varepsilon$.*

Совершенно аналогично теореме 1 доказывается, что это определение эквивалентно исходному (см. определение 3 в п. 4.4).

Связь между односторонними пределами и двусторонним пределом устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. *Функция f имеет предел в точке тогда и только тогда, когда в этой точке существуют пределы как справа, так и слева и они равны. В этом случае их общее значение и является двусторонним пределом функции f в точке x_0.*

Доказательство. В самом деле, пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. Тогда, согласно определению предела функции в точке x_0, это означает, что для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех точек x, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, $x\neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Тем самым, как для точек x таких, что $x_0-\delta<x<x_0$, так и таких, что $x_0<x<$ $<x_0+\delta$, справедливо неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. А это, согласно определению 5, и означает, что число A является как пределом функции f слева, так и ее пределом справа в точке x_0:

$$A=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x+0} f(x) \tag{4.14}$$

(обозначения см. в определении 3 в п. 4.4).

Обратно, пусть выполнены условия (4.14). Согласно определению предела функции слева и справа, отсюда следует, что для всякого $\varepsilon>0$ существуют такие $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ и $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0-\delta_1<x<x_0$, и для всех x, удовлетворяющих условию $x_0<x<x_0+\delta_2$, справедливо неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Если обозначить через δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2, то очевидно, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, $x\neq x_0$, будет справедливо неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Это и означает, что

$$A=\lim_{x\to x_0} f(x). \ \square$$

4.6. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

Понятие предела функции можно обобщить для случая, когда аргумент функции или ее значения стремятся к бесконечности. Например, будем говорить, что $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех x таких, что $x_0<x<x_0+\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>\varepsilon$.

Можно показать, что это определение равносильно следующему: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$, если функция f определена в некотором интервале $(x_0, x_0+\delta)$, и для любой последовательности $x_n\in(x_0, x_0+\delta)$ $n=1, 2, \ldots,$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$.

Приведем еще один пример. Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$ $=A+0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех $x<-\delta$ выполняется неравенство $A\leqslant f(x)<A+\varepsilon$.

Нетрудно сформулировать равносильное определение в терминах пределов последовательностей.

Встречаются и различные другие подобные сочетания предельных значений аргументов и функций. Формулировка определения предела функции для каждого отдельного случая, хотя часто и удобна в конкретных ситуациях (поэтому ее нужно уметь делать), мало приспособлена к рассмотрению общих вопросов, так как требует проведения специальных доказательств, соответствующих данным определениям. Поэтому целесообразно ввести одно единое определение предела функции, конечного и бесконечного, в данной «точке».

Напомним, что окрестностью точки a называется всякий интервал вида $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, $\delta>0$. Правосторонней окрестностью $U(x_0+0,\ \delta)$, точки x_0 называется полуинтервал вида $[x_0,\ x_0+\delta)$, а левосторонней $U(x_0-0,\ \delta)$ — полуинтервал $(x_0-\delta,\ x_0]$, $\delta>0$.

По аналогии с определением проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0,\ \delta)$ в п. 4.4 определим проколотые окрестности для x_0+0, x_0-0, ∞, $+\infty$, $-\infty$:

$$
\begin{aligned}
&\mathring{U}(x_0+0,\ \delta) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0,\ x_0+\delta) = U(x_0+0,\ \delta)\setminus\{x_0\},\\
&\mathring{U}(x_0-0,\ \delta) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0-\delta,\ x_0) = U(x_0-0,\ \delta)\setminus\{x_0\},\\
&\mathring{U}(\infty,\ \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \{x\colon |x|>\delta\} = U(\infty,\ \delta)\setminus\{+\infty\}\setminus\{-\infty\},\\
&\mathring{U}(+\infty,\ \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \{x\colon x>\delta\} = U(+\infty,\ \delta)\setminus\{+\infty\},\\
&\mathring{U}(-\infty,\ \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \{x\colon x<-\delta\} = U(-\infty,\ \delta)\setminus\{-\infty\},\ \delta>0
\end{aligned}
$$

Как видно из сформированного определения, проколотые окрестности любых элементов x_0, x_0+0, x_0-0, ∞, $+\infty$ или $-\infty$ получаются из их обычных окрестностей посредством удаления из них соответствующих элементов. При этом оказывается, что во всех перечисленных случаях элементами проколотых окрестностей являются только действительные числа.

Для простоты формулировок здесь под термином «точка» будем понимать либо действительное число x_0, либо один из символов x_0+0, x_0-0, ∞, $+\infty$, $-\infty$. Под записью $x\neq a$, в случаях $a=x_0\pm 0$ будем понимать $x\neq x_0$ и считать, что $-\infty+0=-\infty$ и $+\infty-0=+\infty$. Для краткости иногда обычную и проколотую δ-окрестности точки a будем соответственно обозначать через $U(a)$ и $\mathring{U}(a)$.

Теперь можно сформулировать общее определение предела функции.

Определение 6. *Точка A называется пределом функции f в точке a и пишется $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, если для любой окрестности $U(A,\ \varepsilon)$ точки A существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a,\ \delta)$ точки a, что $f(\mathring{U}(a,\ \delta))\subset U(A,\ \varepsilon)$.*

Заметим, что функция f, имеющая предел в точке a, определена в силу определения 6 в некоторой проколотой окрестности этой точки. Чтобы доказать ее существование, достаточно взять какое-либо конкретное $\varepsilon > 0$, например, $\varepsilon = 1$; тогда, если $\mathring{U}(a, \delta_0)$ — проколотая δ_0-окрестность, соответствующая $\varepsilon = 1$ согласно определению 6, то функция f и будет определена во всех точках этой проколотой окрестности. Мы уже встречались с подобным рассуждением в п. 4.5 при доказательстве эквивалентности определений 2 и 4 предела функции.

Нетрудно сформулировать определение предела функции в точке, равносильное определению 6, в терминах предела последовательности.

Определение 7. *Точка A называется пределом функции f в точке a, если функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a и если для любой последовательности $x_n \in \mathring{U}(a)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.*

Аналогично случаю $a = x_0 \in \boldsymbol{R}$ и конечного предела A, рассмотренному в п. 4.5, доказывается эквивалентность определений 6 и 7.

Для общего определения предела функции в точке справедливо обобщение леммы из п. 4.4 в следующем виде.

Лемма. *Для того чтобы функция f, определенная в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a имела в этой точке конечный или бесконечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \in \mathring{U}(a)$, $n = 1, 2, \ldots$, имеющей своим пределом величину a, последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ имела конечный или бесконечный предел.*

Необходимость сформулированного условия следует непосредственно из определения 7, а доказательство его достаточности получается буквальным повторением леммы п. 4.4, если только под встречающимися там пределами понимать конечные или бесконечные пределы.

В дальнейшем под пределом функции всегда понимается к о н е ч н ы й п р е д е л, если не оговорено что-либо другое. При этом, если предел функции равен $A+0$ или $A-0$, где A — число: $A \in \boldsymbol{R}$, то этот предел также называется конечным.

Упражнения. 22. Доказать равносильность определений 6 и 7.

23. Доказать, что если $P(x)$ — многочлен степени $n \geq 1$, то $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \infty$.

4.7. СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

Все функции, рассматриваемые в этом пункте, определены в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a) = \mathring{U}(a, \delta_0)$ заданной точки a. Напомним, что под «точкой» понимается либо число x_0, либо один из символов x_0+0, x_0-0, ∞, $+\infty$, $-\infty$.

1°. *Если у функции в заданной точке существует конечный предел, то в некоторой проколотой окрестности этой точки функция ограничена.*

Доказательство. Пусть у функции f существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$. Тогда согласно определению 6 для любого $\varepsilon>0$, в частности, для $\varepsilon=1$, существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a,\ \delta)$ точки a, что для всех $x\in\mathring{U}(a,\ \delta)$ имеет место $f(x)\in U(A,\ 1)$, т. е. выполняется неравенство $A-1<f(x)<A+1$. Это и означает ограниченность функции f на проколотой окрестности $\mathring{U}(a,\ \delta)$. □

2°. *Если у функции в заданной точке существует конечный, не равный нулю предел, то в некоторой проколотой окрестности этой точки функция имеет тот же знак, что и указанный предел (в частности, она не равна нулю).*

Доказательство. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и для определенности $A>0$. Тогда согласно определению 6 для любого $\varepsilon>0$, в частности для $\varepsilon=A$ (в случае $A<0$ надо взять $\varepsilon=-A$) существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a,\ \delta)$, что для всех $x\in\mathring{U}(a,\ \delta)$ имеет место $f(x)\in U(A,\ A)$, т. е. выполняется неравенство $A-A<f(x)<A+A$. В частности, $f(x)>0$. □

3°. *Если $f(x)=c$ — постоянная, $x\in\mathring{U}(a)$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$.*

4°. *Если $f(x)\geqslant A$, $x\in\mathring{U}(a)$, и существует конечный или определенного знака бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)\geqslant A$.*

5°. *Если $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$, $x\in\mathring{U}(a)$ и существуют конечные или бесконечные определенного знака пределы $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.*

6°. *Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то существуют и конечные пределы $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$, а если $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, то — и предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем*

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x), \tag{4.15}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x), \tag{4.16}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{4.17}$$

Следствие. *Если существует* $\lim_{x\to a} f(x)$, *то для любого числа* $c \in \mathbf{R}$

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x).$$

Заметим, что частное $f(x)/g(x)$ при условии, что $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, конечно, может быть не определено на всей исходной проколотой окрестности $\mathring{U}(a, \delta_0)$. Однако, согласно свойству 2° из условия $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ следует, что существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$, $0 < \delta \leq \delta_0$, на которой $g(x) \neq 0$, и потому на ней имеет смысл частное $f(x)/g(x)$. Предполагается, что в формуле предела частного рассматривается сужение функций f и g на указанной проколотой окрестности $\mathring{U}(a, \delta)$.

Свойства 3° — 6° могут быть доказаны одинаковым методом, основанным на соответствующих свойствах пределов последовательностей (см. п. 3.9).

Докажем, например, формулу (4.16). Пусть $A \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to a} f(x)$, $B \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to a} g(x)$. Тогда, согласно определению 7 предела функции (см. п. 4.6), для любой последовательности $x_n \in \mathring{U}(a)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, справедливы равенства

$$A = \lim_{n\to\infty} f(x_n), \quad B = \lim_{n\to\infty} g(x_n).$$

Поэтому вспоминая, что предел произведения сходящихся последовательностей существует и равен произведению их пределов (см. п. 3.9), получаем, что существует предел $\lim_{n\to\infty} f(x_n) g(x_n) = AB$, причем этот предел не зависит от выбора указанной последовательности $\{x_n\}$. Это согласно тому же определению 7 и означает, что

$$\lim_{x\to a} f(x) g(x) = AB = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x). \ \square$$

4.8*. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕДЕЛОВ

Здесь будет доказана теорема, полезная при решении задач на нахождение пределов функций.

Теорема 3 (о замене переменной для пределов функций). *Пусть существуют конечные или бесконечные пределы* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim_{y\to b} F(y)$. *Пусть, кроме того, в некоторой проколотой окрестности точки* a *имеет место* $f(x) \neq b$, *тогда в точке* a *существует предел сложной функции* $F(f(x))$ и

$$\lim_{x\to a} F(f(x)) = \lim_{y\to b} F(y). \tag{4.18}$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что существуют такие проколотые окрестности $\mathring{U}(a, \delta_0)$ и $\mathring{U}(b, \varepsilon)$, что функция f определена на $\mathring{U}(a, \delta_0)$ и при $x \in \mathring{U}(a, \delta_0)$

$$f(x) \neq b, \tag{4.19}$$

а функция F определена на $\mathring{U}(b, \varepsilon)$.

Из существования предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ согласно определению 6 (см. п. 6) следует существование такой проколотой окрестности $\mathring{U}(a, \delta)$, что

$$f(\mathring{U}(a, \delta)) \subset U(b, \varepsilon). \tag{4.20}$$

При этом можно выбрать $\delta \leqslant \delta_0$, ибо если условие (4.20) выполнено для некоторого $\delta > 0$, то оно выполнено и для всех меньших положительных δ. В силу условия (4.19) из (4.20) следует, что множество $f(\mathring{U}(a, \delta))$ принадлежит не только окрестности $U(b, \varepsilon)$, но и соответствующей проколотой:

$$f(\mathring{U}(a, \delta) \subset \mathring{U}(b, \varepsilon). \tag{4.21}$$

Поэтому для любого $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ значение $f(x)$ принадлежит области определения функции F и, следовательно, для любого $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ определена сложная функция $F(f(x))$ или, как говорят, композиция $F \circ f$.

Пусть, теперь, последовательность $x_n \in \mathring{U}(a, \delta)$, $n = 1, 2, \ldots$, такова, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ и пусть $y_n \overset{\text{def}}{=} f(x_n)$. Тогда в силу определения предела 7 (см. п. 4.6) $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$, а в силу (4.21) $y_n \in \mathring{U}(b, \varepsilon)$.

Поэтому согласно тому же определению 7 из существования предела $\lim\limits_{y \to b} F(y)$, который обозначим через A, следует, что

$$\lim_{n \to \infty} F(f(x_n)) = \lim_{n \to \infty} F(y_n) = A.$$

Поскольку это верно для любой указанной последовательности $\{x_n\}$, то это и означает, что $\lim\limits_{x \to a} F(f(x)) = A$. $\square$

Замечание. Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a, \delta)$ и отображает ее взаимно однозначно на проколотую окрестность $\mathring{U}(b, \varepsilon)$. Следовательно, на $\mathring{U}(b, \varepsilon)$ определена однозначная обратная функция f^{-1}, причем при $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ имеет место неравенство $f(x) \neq b$, а при $y \in \mathring{U}(b, \varepsilon)$ соответственно, $f^{-1}(y) \neq a$. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{y \to b} f^{-1}(y) = a$.

Пусть, кроме того, на $\mathring{U}(b, \varepsilon)$ определена функция F, и потому на $\mathring{U}(a, \delta)$ определена композиция $F \circ f$. Тогда предел $\lim\limits_{y \to b} F(y)$

существует в том и только том случае, когда существует предел $\lim\limits_{x\to a} F[f(x)]$, причем если они существуют, то равны между собой.

То, что из существования предела $\lim\limits_{y\to b} F(y)$ следует существование предела $\lim\limits_{x\to a} F(f(x))$, и их равенство составляет утверждение теоремы 3. Поэтому надо доказать только обратное утверждение. Оно при сделанных предположениях также вытекает из теоремы 3, примененной к композиции $(F\circ f)\circ f^{-1}$ функций f^{-1} и $F\circ f$. Действительно, согласно этой теореме существует предел $\lim\limits_{y\to b}(F\circ f)(f^{-1}(y))=\lim\limits_{x\to a}(F\circ f)(x)$, но $(F\circ f)\circ f^{-1}=F\circ(f\circ f^{-1})=F$, тем самым существует предел $\lim\limits_{y\to b} F(y)$. $\square$

4.9. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

Все функции, рассматриваемые в этом пункте, определены на некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a.

Определение 8. *Функция α называется бесконечно малой (бесконечно большой) при стремлении аргумента к точке a, если* $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ $(\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\infty)$.

Бесконечно малые функции играют существенную роль, связанную, в частности, с тем, что общее понятие предела может быть сведено к понятию бесконечно малой.

Лемма. *Предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и равен A тогда и только тогда, когда $f(x)=A+\alpha(x)$, где α бесконечно малая при стремлении аргумента к точке a.*

Действительно, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, то, полагая $\alpha(x)\overset{\text{def}}{=}f(x)-A$, получаем $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)-A=A-A=0$.

Наоборот, если $f(x)=A+\alpha(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=$ $=A+\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=A$. $\square$

Теорема 4. *Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых при стремлении аргумента к точке a, а также произведение бесконечно малой при стремлении аргумента к точке a на ограниченную функцию являются бесконечно малыми при стремлении аргумента к той же точке a.*

То, что сумма и произведение конечного числа бесконечно малых является бесконечно малой, непосредственно следует из свойства пределов в п. 4.7.

Доказательство же того, что произведение бесконечно малой на ограниченную функцию является бесконечно малой, очевидным образом проводится на основе определения 7 предела функции с использованием соответствующего свойства бесконечно малых последовательностей (см. в п. 3.8 свойство II).

Упражнение 24. Доказать, что функция α, определенная и не равная нулю в некоторой проколотой окрестности точки a, тогда и только тогда является бесконечно малой при стремлении аргумента к точке a, когда функция $1/\alpha$ является бесконечно большой при стремлении аргумента к той же точке a.

То обстоятельство, что функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой и наоборот (см. упражнение 24), делает естественной следующую символическую запись, часто употребляющуюся для сокращения записи: для любого числа $a>0$ пишут

$$\frac{a}{+0}=+\infty,\quad \frac{a}{-0}=-\infty,\quad \frac{a}{0}=\infty,\quad \frac{a}{+\infty}=+0,\quad \frac{a}{-\infty}=-0,\quad \frac{a}{\infty}=0.$$

Отметим, что на бесконечно большие функции свойства конечных пределов, связанные с арифметическими действиями над пределами, непосредственно не переносятся. Однако некоторые аналогии имеют место.

Например, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, то и $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=+\infty$. Однако о существовании какого-либо предела $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ здесь уже ничего утверждать нельзя. Можно показать, что позитивные утверждения о бесконечных пределах можно сделать в случаях, для которых в п. 2.5 были определены некоторые «арифметические операции» $c+\infty$ и $-\infty$.

4.10. ПРЕДЕЛЫ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Определение 9. *Функция f, определенная на числовом множестве E, называется возрастающей (убывающей) на E, если для любых $x_1\in E$ и $x_2\in E$ таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ (соответственно, неравенство $f(x_1)\geqslant f(x_2)$* *).

Если функция является возрастающей (убывающей) на множестве E, то говорят также, что она возрастает (убывает) на этом множестве.

Если функция f возрастает на множестве E, то функция $-f$, получающаяся из f изменением знака у всех ее значений, т. е. $(-f)(x)=-f(x)$, $x\in E$, является убывающей на E функций.

Возрастающие и убывающие на множестве E функции называются *монотонными* на этом множестве.

Теорема 5. *Пусть функция f возрастает на конечном или бесконечном интервале (a, b). Тогда в точке $x=b$ существует предел*

---

*) Возрастающие (убывающие) функции называются также *неубывающими* (*невозрастающими*).

слева и

$$\lim_{x\to b-0} f(x) = \sup_{(a,\,b)} f(x),$$

а в точке $x=a$ — предел справа и

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \inf_{(a,\,b)} f(x).$$

Таким образом, если в условиях теоремы функция f ограничена сверху, то в точке $x=b$ существует конечный предел слева, а если f неограничена сверху, то $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=+\infty$.

Аналогично, если функция f ограничена снизу, то в точке $x=a$ существует конечный предел справа, а если f не ограничена снизу, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$.

Аналогичные утверждения справедливы и для убывающих функций, их можно получить, перейдя от функции f к функции $-f$.

Следствие. *Если функция f монотонна на интервале $(a,\ b)$ и $x_0\in(a,\ b)$, то в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы*

$$f(x_0-0) \text{ и } f(x_0+0). \tag{4.22}$$

Доказательство теоремы. Пусть $\beta \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{(a,\,b)} f(x)$ — верхняя грань конечная или бесконечная, равная $+\infty$. Возьмем какое-либо $\eta<\beta$. Тогда в силу определения верхней грани (см. свойство 2° в определении 6′ п. 2.8) существует точка $\xi\in(a,\ b)$ такая, что

$$f(\xi)>\eta. \tag{4.23}$$

Положим, что $\mathring{U}(b) \overset{\text{def}}{=} (\xi,\ b)$, т. е. $\mathring{U}(b)$ является односторонней проколотой окрестностью точки b *). Тогда для любого $x\in\mathring{U}(b)$, т. е. для любого такого x, что $\xi<x<b$ (рис. 18) в силу возрастания функции f, определения верхней грани и неравенства (4.23) получим:

$$\eta<f(\xi)\leqslant f(x)\leqslant\beta.$$

Итак, если $x\in\mathring{U}(b)$, то

$$\eta<f(x)\leqslant\beta. \tag{4.24}$$

Задание произвольного числа $\eta<\beta$ равносильно в данном случае заданию произвольной окрестности $U(\beta)$ точки β в следующем смысле. Именно, если β конечно, то, полагая $\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \beta-\eta$, получаем, что условие (4.24) равносильно условию $f(x)\in U(\beta,\ \varepsilon)$,

*) В случае $b=+\infty$ проколотая окрестность $(\eta,\ +\infty)$ причисляется к односторонним проколотым окрестностям.

ибо $f(x) \leqslant \beta$. Если же $\beta = +\infty$, то условие (4.24) равносильно условию $f(x) \in U(+\infty, \eta)$.

Таким образом, для любой окрестности $U(\beta)$ существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(b)$, что для любой точки $x \in \mathring{U}(b)$ имеет место $f(x) \in U(\beta)$. Это и означает, что

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \beta = \sup_{(a,\, b)} f(x).$$

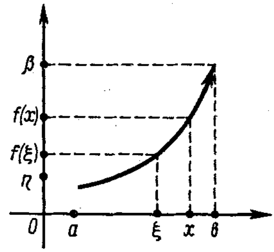


Рис. 18

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \inf\limits_{(a,\, b)} f(x)$. $\square$

Доказательство следствия. Пусть для определенности функция f возрастает на интервале (a, b). Тогда какова бы ни была точка $x_0 \in (a, b)$, для всех $x' \in (a, x_0)$ и всех $x'' \in (x_0, b)$ будет справедливо неравенство $f(x') \leqslant f(x_0) \leqslant f(x'')$, т. е. функция f ограничена сверху на интервале (a, x_0) и снизу на интервале (x_0, b) числом $f(x_0)$. Следовательно,

$$\sup_{(a,\, x_0)} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \inf_{(x_0,\, b)} f(x).$$

В частности, указанные верхняя и нижняя грани конечны. Этим следствие доказано, так как согласно теореме

$$f(x_0 - 0) = \sup_{(a,\, x_0)} f(x), \; f(x_0 + 0) = \inf_{(x_0,\, b)} f(x). \; \square$$

4.11. КРИТЕРИЙ КОШИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

Как и в случае предела последовательности, получим необходимое и достаточное условие того, что функция имеет предел в точке a, не используя самого значения предела, а в терминах лишь значений самой функции в проколотой окрестности точки a.

Теорема 6 (критерий Коши). *Для того чтобы функция f имела в точке a конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$ точки a, что для любых $x' \in \mathring{U}(a, \delta)$ и $x'' \in \mathring{U}(a, \delta)$ выполнялось бы неравенство*

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

Доказательство необходимости. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in \mathbf{R}$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$ точки a такая, что для каждого $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.25}$$

Пусть $x' \in \mathring{U}(a, \delta)$ и $x'' \in \mathring{U}(a, \delta)$, тогда в силу (4.25) получим:

$$|f(x'') - f(x')| = |[f(x'') - A] + [A - f(x'')]| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x'') - A| + |f(x') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \ \square$$

Доказательство достаточности. Пусть функция f такова, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$, что для всех

$$x' \in \mathring{U}(a, \delta), \ x'' \in \mathring{U}(a, \delta) \tag{4.26}$$

выполняется неравенство

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon. \tag{4.27}$$

Прежде всего из этого условия следует, что функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a. Можно, например, взять $\varepsilon = 1$, тогда функция f и будет определена в соответствующей ему в силу сформулированного условия проколотой окрестности.

Проверим, что функция f имеет в точке a предел. Возьмем какую-либо последовательность $x_n \in \mathring{U}(a)$, $n = 1, 2, \ldots,$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \tag{4.28}$$

и произвольно зададим $\varepsilon > 0$. Для этого ε существует проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$, удовлетворяющая условиям (4.26) — (4.27). В силу условия (4.28) для соответствующей обычной окрестности $U(a, \delta)$ существует такое $n_0 \in N$, что при всех $n \geqslant n_0$, $n \in N$, имеет место $x_n \in U(a, \delta)$. Но $x_n \in \mathring{U}(a)$, следовательно, $x_n \neq a$, $n \in N$. Поэтому x_n принадлежат не только обычной окрестности $U(a, \delta)$, но и соответствующей проколотой: $x_n \in \mathring{U}(a, \delta)$, $n \geqslant n_0$. Отсюда в силу условий (4.26) — (4.27) для всех $n \geqslant n_0$ и $m \geqslant n_0$ получим:

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет условиям критерия Коши для последовательностей и, следовательно, сходится (см. п. 3.7).

Таким образом, для каждой последовательности $x_n \in \mathring{U}(a)$, $n = 1, 2, \ldots,$ удовлетворяющей условию (4.28) последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится. Отсюда, как известно (см. лемму п. 4.6), следует существование конечного предела $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. $\square$

В случае, если $a = x_0$ является числом, то условие Коши можно перефразировать следующим образом.

Для любого $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для любых* x' *и* x'', *удовлетворяющих условиям* $|x' - x_0| < \delta$, $|x'' - x_0| < \delta$, $x' \neq x_0$, $x'' \neq x_0$, *выполняется неравенство* $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

В случае же, когда $a = \infty$, условию Коши можно придать следующий вид.

Для любого $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для любых* x' *и* x'', *удовлетворяющих неравенствам* $|x'| > \delta$, $|x''| > \delta$, *выполняется неравенство* $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Следует отметить, что эти два критерия существования предела функции, относящиеся к разным случаям и имеющие разную формулировку, благодаря удачно выбранной терминологии (понятию окрестности) получили единое доказательство.

Для случая односторонних пределов[*] условие Коши можно перефразировать без терминов окрестности следующим образом: *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* η ($\eta < a$ *в случае предела слева и* $\eta > a$ *в случае предела справа*), *что для любых* x' *и* x'', *удовлетворяющих условию* $\eta < x' < a$, $\eta < x'' < a$, *или, соответственно, условию* $a < x' < \eta$, $a < x'' < \eta$, *выполняется неравенство* $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

§ 5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

5.1. ТОЧКИ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИЙ

Определение 1. *Функция* f, *определенная в некоторой окрестности* $U(x_0)$ *точки* x_0, *называется непрерывной в этой точке (или, что то же, при* $x = x_0$), *если*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{5.1}$$

Подчеркнем, что если функция f непрерывна в некоторой точке, то согласно данному определению она определена в некоторой окрестности этой точки (обычной, а не проколотой, как это было в случае определения предела функции). В дальнейшем (см. п. 19.3) будет дано обобщение понятия непрерывности функции в точке, в котором не будет предполагаться, что функция определена в некоторой окрестности этой точки.

Согласно определению предела функции в точке в терминах последовательностей (см. п. 4.4) определение непрерывности функции в точке x_0 равносильно тому, что для любой последовательности $x_n \in U(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0, \tag{5.2}$$

---

[*] Мы, естественно, причисляем понятие предела функции при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ к понятию одностороннего предела.

последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0). \tag{5.3}$$

Понятие непрерывности функции, сформулированное в терминах последовательностей, отражает собой обстоятельство, обычно встречающееся на практике и состоящее в том, что при косвенном измерении некоторой величины y с помощью параметра x, от которого эта величина y непрерывно зависит: $y=f(x)$, мы имеем объективную уверенность, что чем точнее мы будем получать (вследствие каких-либо экспериментов, измерений или расчетов) последовательно значения x_n, $n=1, 2, \ldots$ аргумента x, тем точнее будут получаться и соответствующие значения $y_n = f(x_n)$ величины y.

Согласно же определению предела функции в точке на языке ε и δ (см. п. 4.5), условие (5.1) равносильно условию: для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$|x-x_0|<\delta, \tag{5.4}$$

выполняется неравенство (рис. 19)

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{5.5}$$

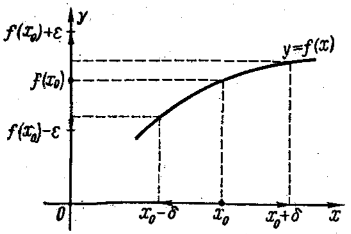


Рис. 19

Отметим, что в определении непрерывности (5.2) — (5.3) вместо проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$, как это было при определении предела в п. 4.4, была взята обычная окрестность $U(x_0)$, а в определении непрерывности (5.4) — (5.5) было сделано равносильное изменение: отброшено условие $x \neq x_0$. Дело в том, что в случае, когда предел функции в точке равен значению функции в этой точке, определение предела оказывается равносильным, брать ли обычные или проколотые окрестности или, что то же самое, требовать или нет выполнения условия $x \neq x_0$. Например, в случае (5.4) — (5.5) добавление значения $x=x_0$ ничего не меняет, так как и условие (5.4) и условие (5.5) выполняются при $x=x_0$ для любого $\delta>0$ и любого $\varepsilon>0$:

$$|x_0-x_0|=0<\delta, \quad |f(x_0)-f(x_0)|=0<\varepsilon.$$

Упражнение 1. Доказать, что если в определении предела функции f в точке x_0 в смысле п. 4.4 заменить проколотую окрестность на обычную или в соответствующем определении п. 4.5 отбросить условие $x \neq x_0$, то получится определение, эквивалентное определению непрерывности функции f в точке x_0.

Например, доказать, если функция f определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и если существует число A, обладающее свойством, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, то функция f непрерывна в точке x_0 и $A=f(x_0)$. Обратно, если функция f непрерывна в точке x_0, т. е. имеет место (5.1), где предел понимается в смысле § 4 и, следовательно требуется, что $x \neq x_0$, то число $A = f(x_0)$ обладает вышеуказанным свойством.

Определение непрерывности функции f в точке x_0 можно еще перефразировать так: функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если, какова бы ни была заданная степень точности $\varepsilon > 0$ для значений функции, существует такая степень точности для аргумента $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что коль скоро мы выберем значение аргумента x, равное x_0 с точностью δ, т. е. удовлетворяющее неравенству (5.4), и возьмем в нем значение функции f, то мы получим значение $f(x_0)$ с заданной степенью точности, т. е. будет выполнено неравенство (5.5).

Как и в случае определения предела, определение непрерывности функции в точке можно дать на языке окрестностей (см. условия (4.6)).

Функция f непрерывна в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in U(x_0, \delta)$ имеем $f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$; иначе говоря, если для любой окрестности $U(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что выполняется включение

$$f(U(x_0)) \subset U(y_0). \tag{5.6}$$

Наконец, перенося $f(x_0)$ в равенстве (5.1) в левую часть, внося $f(x_0)$ под знак предела и замечая, что обозначение $x \to x_0$ при пределе функции равносильно обозначению $x - x_0 \to 0$, получаем

$$\lim_{x - x_0 \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0. \tag{5.7}$$

Разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента* и обозначается Δx, а разность $f(x) - f(x_0)$ — *приращением функции*, соответствующим данному приращению аргумента Δx, и обозначается Δy; таким образом,

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \tag{5.8}$$

В этих обозначениях равенство (5.7) перепишется в виде

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \tag{5.9}$$

т. е. говоря описательно, непрерывность функции в точке означает, что бесконечно малому приращению агрумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Примеры. 1. Функция $f(x) = c$, где c — постоянная, непрерывна на всей числовой прямой. В самом деле, для любого $x_0 \in \boldsymbol{R}$ имеет место

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c = f(x_0). \ \square$$

2. Покажем, что функция $f(x)=\frac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0\neq 0$. В самом деле,

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}=-\frac{\Delta x}{(x_0+\Delta x)\,x_0},$$

откуда при $x_0\neq 0$ имеем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{(x_0+\Delta x)\,x_0}=-\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(x_0+\Delta x)\,x_0}=\frac{0}{x_0}=0,$$

что и означает, согласно (5.9), непрерывность функции $f(x)=1/x$ в точке x_0.

3. Покажем, что функция $f(x)=|\operatorname{sign} x|$ (см. рис. 13) не является непрерывной в точке $x_0=0$. Действительно, $\lim\limits_{x\to 0}|\operatorname{sign} x|=1$, и этот предел не совпадает со значением $|\operatorname{sign} 0|=0$.

Упражнения. 2. Выяснить, с какой степенью точности достаточно взять значение аргумента функции x^3 в данной точке x_0, чтобы получить значение функции с заданной степенью точности $\varepsilon>0$.

3. Выяснить, будет ли функция

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$

непрерывной в точке $x=0$.

Определение 2. *Пусть теперь функция f определена на интервале (a, b), кроме, быть может, точки $x_0\in(a, b)$.*

Точка x_0 называется точкой разрыва функции f, если функция f не определена в точке x_0, или если она определена в этой точке, но не является в ней непрерывной.

Упражнение 4. Сформулировать в позитивном смысле определение точки разрыва функции.

Определение 3. *Если x_0 — точка разрыва функции f и существуют конечные пределы*

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)\quad \textit{и}\quad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x),$$

то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода. Величина $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется скачком функции f в точке x_0. Если $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то x_0 называется точкой устранимого разрыва.

Последнее оправдано тем, что если в этом случае видоизменить или доопределить (если функция f была не определена в точке x_0) функцию f, положив

$$f(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=\lim_{x\to x_0-0}f(x),$$

то получится непрерывная в точке x_0 функция.

Точка разрыва функции f, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется точкой разрыва второго рода.

Очевидно, что в точках разрыва второго рода по крайней мере один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ не существует. (Здесь под пределом, как обычно, понимается лишь конечный предел.)

Упражнение 5. Сформулировать в позитивном смысле определение точки разрыва второго рода.

Функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ (см. рис. 16) имеет в точке $x_0 = 0$ разрыв первого рода, а функции $f(x) = \frac{1}{x}$ и $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 0$ имеют разрывы второго рода. Всякая функция, монотонная на некотором интервале, может иметь только точки разрыва первого рода (см. следствие теоремы 5 п. 4.10).

Определение 4. *Пусть функция f определена на левосторонней окрестности точки x_0, т. е. на полуинтервале вида $(a, x_0]$. Функция f называется непрерывной слева в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$.*

Пусть функция f определена на правосторонней окрестности точки x_0, т. е. на полуинтервале вида $[x_0, b)$. Функция f называется непрерывной справа в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

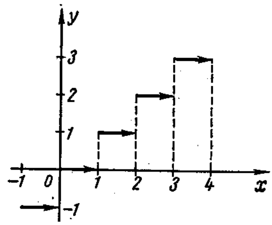


Рис. 20

Пример. Рассмотрим функцию, определенную на всей числовой оси и для каждого числа x равную наибольшему целому числу, меньшему или равному x. Эта функция имеет специальное обозначение $y = [x]$, читается «y является целой частью числа x» или «y равно entier x *)». Ее график изображен на рис. 20. Функция $[x]$ в точках $x = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ непрерывна справа и разрывна слева; во всех же других точках она непрерывна как справа, так и слева, таким образом, в частности, $[x]$ непрерывна справа во всех точках.

5.2. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ В ТОЧКЕ

Теорема 1. *Если функции f и g непрерывны в точке x_0, то функции cf (c — постоянное), $f+g$, fg, а если, кроме того, $g(x_0) \neq 0$, то и функция f/g также непрерывны в точке x_0.*

Эта теорема вытекает непосредственно из определения непрерывности и свойств пределов функций (см. п. 4.7). Докажем, например, непрерывность функции fg. Согласно свойству (4.16),

---

*) Entier — целый (франц.).

имеем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) g(x_0) \tag{5.10}$$

ибо пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ существуют и в силу непрерывности f и g в точке x_0 равны соответственно $f(x_0)$ и $g(x_0)$. Выполнение равенства (5.10) и означает наличие непрерывности функции fg в точке x_0. □

Теорема 2. *Пусть функция* $y = \varphi(x)$ *непрерывна в точке* x_0, *а функция* $f(y)$ *непрерывна в точке* $y_0 = \varphi(x_0)$, *тогда сложная функция* $f[\varphi(x)]$ *непрерывна в точке* x_0.

Короче, но менее точно: непрерывная функция от непрерывной функции является непрерывной функцией.

Следует обратить внимание на то, что в теореме утверждается непрерывность сложной функции $f[\varphi(x)]$ в точке x_0, а поскольку непрерывность функции в некоторой точке предполагает согласно определению 1 из п. 5.1, что функция определена в какой-то окрестности этой точки, то в теореме тем самым утверждается также, что функция $f[\varphi(x)]$ при сделанных предположениях определена в некоторой окрестности точки x_0.

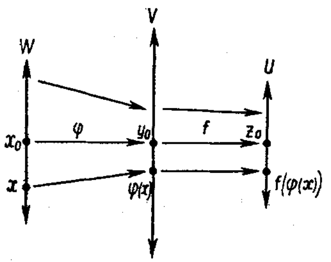


Рис. 21

Доказательство. Пусть $z_0 = f(y_0)$ и фиксирована произвольным образом окрестность $U(z_0)$ точки z_0. Тогда в силу непрерывности функции f в точке y_0 существует такая окрестность $V(y_0)$ точки y_0, что, если

$$y \in V(y_0), \tag{5.11}$$

то функция f определена в этой точке y и

$$f(y) \in U(z_0). \tag{5.12}$$

Далее, для полученной окрестности $V(y_0)$ в силу непрерывности функции φ в точке x_0 существует такая окрестность $W(x_0)$, что, если $x \in W(x_0)$, то функция φ определена в этой точке x и $\varphi(x) \in V(y_0)$.

Следовательно, для этой точки определена и функция $f[\varphi(x)]$, причем выполняется включение (5.11), где $y = \varphi(x)$, а значит и (5.12), которое для рассматриваемого случая имеет вид $f[\varphi(x)] \in U(z_0)$ (рис. 21). Это и означает непрерывность сложной функции $f \circ \varphi$ в точке x_0. □

Утверждение теоремы можно записать в виде формулы

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f\left[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\right], \tag{5.13}$$

из которой видно, что *операция предельного перехода перестановочна с операцией взятия непрерывной функции.*

В самом деле, левая часть равенства (5.13) равна $f[\varphi(x_0)]$ согласно утверждению теоремы, правая часть также равна $f[\varphi(x_0)]$ в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке x_0.

При отыскании пределов непрерывных функций теорему 2 удобно использовать еще в одном виде, в виде следующего правила.

Правило замены переменной для пределов непрерывных функций: пусть функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0=\varphi(x_0)$, тогда

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{y\to y_0} f(y), \quad y=\varphi(x).$$

Теорема 2 естественным образом переносится и на случай односторонней непрерывности (сформулируйте ее в этом случае).

Упражнения. 6. Доказать, что если для функции $x=\varphi(t)$ существует предел $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=x_0$, а функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, то в некоторой проколотой окрестности точки t_0 имеет смысл композиция $f[\varphi(t)]$ и существует

$$\lim_{t\to t_0} f[\varphi(t)]=f(x_0).$$

7. Сформулировать и доказать правила замены переменных для односторонних пределов функций.

§ 6. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

6.1. ОГРАНИЧЕННОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ. ДОСТИЖЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Определение 1. *Функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и непрерывная в каждой его точке, называется непрерывной на этом отрезке.*

При этом под непрерывностью в точке a понимается непрерывность справа, а под непрерывностью в точке b — непрерывность слева.

Аналогично определяется и непрерывность функции на промежутке любого другого вида.

Будем говорить, что функция f, определенная на множестве E, достигает на нем своей верхней (нижней) грани $\beta=\sup\limits_E f$ $(\alpha=\inf\limits_E f)$, если существует такая точка $x_0\in E$, что $f(x_0)=\beta$ $(f(x_0)=\alpha)$.

Теорема 1 (Вейерштрасс). *Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает на нем своей верхней грани и своей нижней грани.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и пусть

$$M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x);$$

M, как и всякая верхняя грань непустого множества чисел, может быть либо конечной, либо бесконечной, равной $+\infty$. Покажем, что $M < +\infty$ и что существует такая точка $x_0 \in [a, b]$, что $f(x_0) = M$.

Выберем какую-либо последовательность таких чисел a_n, $n = 1, 2, \ldots$, что

$$\lim_{n \to \infty} a_n = M, \quad a_n < M, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{6.1}$$

Согласно определению верхней грани функции, для каждого a_n, $n = 1, 2, \ldots$, существует такая точка $x_n \in [a, b]$, что

$$f(x_n) > a_n, \; n = 1, 2, \ldots. \tag{6.2}$$

С другой стороны, поскольку M — верхняя грань функции f, то для всех точек $x \in [a, b]$ справедливо неравенство

$$f(x) \leqslant M. \tag{6.3}$$

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена: $a \leqslant x_n \leqslant b$, $n = 1, 2, \ldots$, поэтому по теореме Больцано — Вейерштрасса (см. п.3.6) из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0. \tag{6.4}$$

Поскольку $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, $k = 1, 2, \ldots$, то (почему?) и $a \leqslant x_0 \leqslant b$.

Из неравенств (6.2) и (6.3) следует, что для всех $k = 1, 2, \ldots$ справедливы неравенства

$$a_{n_k} < f(x_{n_k}) \leqslant M. \tag{6.5}$$

Предел всякой подпоследовательности последовательности, имеющей конечный или бесконечный предел, равен пределу всей последовательности; поэтому из (6.1) имеем $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = M$. Переходя в (6.5) к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = M. \tag{6.6}$$

С другой стороны, в силу непрерывности функции f на отрезке $[a, b]$ она непрерывна в точке x_0 этого отрезка и, следовательно, из (6.4) следует, что

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0). \tag{6.7}$$

Из (6.6) и (6.7) получаем $M = f(x_0)$.

Таким образом, доказано, что верхняя грань M функции f совпадает со значением функции в точке x_0 и, следовательно, конечна. Тем самым функция f ограничена сверху и ее верхняя грань достигается в точке $x_0 \in [a, b]$.

Аналогично доказывается, что непрерывная на отрезке функция ограничена снизу и достигает на нем своей нижней грани. □

Теорема, аналогичная теореме 1, несправедлива для промежутков, не являющихся отрезками; в этом легко убедиться, построив соответствующие примеры. Например, функция $y = 1/x$ непрерывна в каждой точке интервала $(0; 1)$ и вместе с тем неограничена на нем; функция $y = x$ непрерывна на всей вещественной оси и неограничена на ней.

Отметим еще, что если функция f непрерывна не на отрезке, а на промежутке другого типа и даже, кроме того, ограничена на нем, она, вообще говоря, не имеет наибольшего и наименьшего значения. Например, функции $y = x$ на интервале $(0; 1)$ и $y = \operatorname{arctg} x$ на всей вещественной прямой, хотя они непрерывны (непрерывность функции $y = \operatorname{arctg} x$ будет доказана в п. 7.3) и ограничены в указанных промежутках, не достигают своих верхних и нижних граней.

Упражнение 1. Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(x) > 0$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда существует такое $c > 0$, что $f(x) > c$ для всех $x \in [a, b]$.

6.2. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 2 (Больцано — Коши). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$, то для любого C, заключенного между A и B, существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = C$.*

Иначе говоря, *непрерывная на отрезке функция, принимая какие-либо два значения, принимает и любое лежащее между ними значение.*

Доказательство. Пусть для определенности $f(a) = A < B = f(b)$ и $A < C < B$. Разделим отрезок $[a, b]$ точкой x_0 на два равных по длине отрезка, тогда либо $f(x_0) = C$ и, значит, искомая точка $\xi = x_0$ найдена, либо $f(x_0) \neq C$, и тогда на концах одного из полученных отрезков функция f принимает значения, лежащие по разные стороны от числа C, точнее — на левом конце значение, меньшее C, на правом — большее.

Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$ и разделим его снова на два равных по длине отрезка и т. д. В результате либо через конечное число шагов придем к искомой точке ξ, в которой $f(\xi) = C$, либо получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, по длине стремящихся к нулю и таких, что

$$f(a_n) < C < f(b_n). \tag{6.8}$$

Пусть ξ — общая точка всех отрезков $[a_n, b_n]$, $n=1, 2, \ldots$ (см. п. 2.10). Как мы знаем (см. (3.9)), $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Поэтому в силу непрерывности функции f

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n). \tag{6.9}$$

Из (6.8) же получим (см. п. 3.3)

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant C \leqslant \lim_{n\to\infty} f(b_n). \tag{6.10}$$

Из (6.9) и (6.10) следует, что $f(\xi) = C$. □

Следствие 1. *Если функция непрерывна на отрезке и на его концах принимает значения разного знака, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка, в которой функция обращается в ноль.*

Это следствие — частный случай теоремы (рис. 22).

Следствие 2. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $M = \sup f$, $m = \inf f$. Тогда функция f принимает все значения из отрезка $[m, M]$ и только эти значения.*

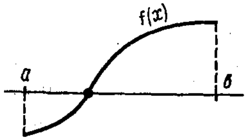


Рис. 22

Для доказательства заметим, что если

$$M = \sup_{[a,\, b]} f, \quad m = \inf_{[a,\, b]} f, \text{ то } m \leqslant f(x) \leqslant M$$

и, согласно теореме 1, существуют такие точки $\alpha \in [a, b]$ и $\beta \in [a, b]$, что $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$. Теперь рассматриваемое следствие непосредственно вытекает из теоремы 2, примененной к отрезку $[\alpha, \beta]$, если $\alpha \leqslant \beta$, или соответственно к отрезку $[\beta, \alpha]$, если $\beta < \alpha$.

Таким образом, *множество всех значений функции, заданной и непрерывной на некотором отрезке, представляет собой также отрезок.*

Отметим, что свойство непрерывных функций принимать все промежуточные значения справедливо для любого промежутка (конечного или бесконечного). Именно: если непрерывная на некотором промежутке функция принимает в двух его точках a и b, причем $a < b$, два каких-то значения, то она принимает и любое промежуточное. В самом деле, согласно теореме 2, рассматриваемая функция заведомо принимает указанное значение в некоторой точке отрезка $[a, b]$, который является частью исходного промежутка.

Замечание. Как в теореме 1, так и в теореме 2 было доказано существование точки на данном отрезке, в которой значение рассматриваемой непрерывной функции обладает определенным свойством (в первой теореме в этой точке достигается экстремальное значение, во второй — принимается заданное промежуточное значение). Однако между методами, примененными для доказательства этих утверждений, имеется принципиальное различие. Метод доказательства теоремы 2 дает возможность не только доказать в общем случае существование указанной точки, но и фактически найти ее с любой заданной степенью точности для каждой конкретной функции: нужно разделить отрезок, на котором ищется точка, достаточное число раз пополам, выбирая каждый раз половину согласно правилу, указанному при доказательстве; концы получившегося отрезка и будут приближенными значениями указанной точки.

Метод же доказательства теоремы 1 не позволяет указать способ, с помощью которого для каждой непрерывной на отрезке функции можно было бы найти точки, в которых она принимает экстремальные значения. Это обусловлено тем, что доказательство этой теоремы основано на теореме Больцано — Вейерштрасса, утверждающей лишь возможность выделения из каждой ограниченной последовательности сходящейся подпоследовательности. Конкретного метода, или, как это принято говорить, *алгоритма*, для выделения из любой ограниченной последовательности сходящейся подпоследовательности не существует.

Заметим еще, что при использовании какого-либо алгоритма на практике важно, как быстро он приводит к цели. С этой точки зрения при приближенном решении уравнения $f(x)=0$ обычно применяется не метод последовательного деления отрезка пополам, а другие алгоритмы, быстрее приводящие к цели (см. Добавление в конце второго тома, § 60).

Задача 6. Доказать, что периодическая непрерывная на всей числовой оси функция, отличная от постоянной, имеет наименьший период. Привести пример периодической функции, определенной на всей числовой оси и отличной от постоянной, которая не имеет наименьшего периода.

6.3. ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ

Определение 2. *Функция f, определенная на числовом множестве E, называется строго возрастающей (строго убывающей), если для любых двух чисел $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).*

Функция, строго возрастающая или строго убывающая, называется строго монотонной.

Если функция является строго возрастающей (убывающей) на множестве E, то будем также говорить, что она строго возрастает (убывает) на этом множестве.

Очевидно, что строго монотонная (возрастающая, убывающая) функция является и просто монотонной (соответственно возрастающей, убывающей) функцией в смысле определения 9 из п. 4.10.

Лемма 1. *Пусть функция f строго возрастает (убывает) на некотором множестве $X \subset \boldsymbol{R}$ и пусть Y — множество ее значений.*

Тогда обратная функция f^{-1} (см. п. 1.2) является однозначной строго возрастающей (убывающей) функцией на множестве Y.*

Доказательство. Пусть для определенности функции f строго возрастает на множестве X. Докажем, что обратная функция однозначна.

Допустим противное. Пусть существует такая точка $y \in Y$, что множество $f^{-1}(y)$ содержит по крайней мере две различных точки x_1 и x_2:

$$x_1 \in f^{-1}(y) \text{ и } x_2 \in f^{-1}(y), \; x_1 \neq x_2,$$

и, следовательно,

$$f(x_1) = f(x_2). \tag{6.11}$$

Для двух чисел x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$ справедливо одно из двух неравенств: $x_1 < x_2$ или $x_1 > x_2$; в первом случае в силу строгого монотонного возрастания функции f имеем $f(x_1) < f(x_2)$, а во втором $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. в обоих случаях равенство (6.11) не выполняется. Таким образом, для каждого $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ состоит в точности из одной точки, т. е. функция f^{-1} однозначна.

Докажем теперь, что функция f^{-1} строго возрастает на множестве Y. Пусть

$$y_1 < y_2, \; y_1 \in Y, \; y_2 \in Y \tag{6.12}$$

и пусть $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Следовательно, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Для любых двух чисел x_1 и x_2 справедливо одно из трех соотношений: либо $x_1 > x_2$, либо $x_1 = x_2$, либо $x_1 < x_2$. Если $x_1 > x_2$ или $x_1 = x_2$, то соответственно было бы $y_1 > y_2$ (в силу строго монотонного возрастания функции f) или $y_1 = y_2$ (в силу однозначности), что противоречило бы неравенству (6.12). Таким образом, из неравенства (6.12) следует, что $x_1 < x_2$, а это и означает строгое возрастание функции f^{-1} на множестве Y.

В случае строго убывающей на множестве функции f доказательство можно либо провести аналогичным образом, либо свести к уже рассмотренному случаю рассмотрением функции $-f$, ибо когда функция f строго убывает на множестве X, функция $-f$ строго возрастает на этом множестве. □

Теорема 3. *Пусть функция f определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда обратная функция f^{-1} определена, однозначна, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$ (рис.23).*

Доказательство. Проведем доказательство теоремы для строго возрастающих функций. Пусть $c = f(a)$, $d = f(b)$.

Покажем, что областью определения обратной функции f^{-1} является сегмент $[c, d]$, или, что то же, $[c, d]$ является множеством значений функции f. В самом деле, из монотонного возрастания функции f следует, что $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, т. е. что $f(x) \in [c, d]$ для любого $x \in [a, b]$. С другой стороны, каково бы ни было $y \in [c, d]$, т. е. $f(a) \leq y \leq f(b)$, согласно теореме 2 существует такая точка $x \in [a, b]$, что $f(x) = y$. Таким образом, все значения заданной функции f лежат на отрезке $[c, d]$, и каждая точка этого отрезка является значением функции f в некоторой точке. Это и означает, что отрезок $[c, d]$ является множеством значений функции f.

Отметим, что это утверждение следует также и из следствия 2 теоремы 2, если заметить, что в данном случае

$$c = \min_{[a, b]} f(x), \quad d = \max_{[a, b]} f(x).$$

В силу леммы функция f^{-1} однозначна и строго возрастает на отрезке $[c, d]$.

Покажем, наконец, что функция f^{-1} непрерывна на $[c, d]$. Пусть $y_0 \in [c, d]$ и $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Пусть $c < y_0 < d$, т. е. y_0 — внутренняя точка отрезка $[c, d]$, тогда в силу строгого возрастания функции f^{-1} и $a < x_0 < b$. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Не ограничивая общности дальнейших рассуждений, можно считать (почему?), что ε таково, что

$$a \leqslant x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \leqslant b. \qquad (6.13)$$

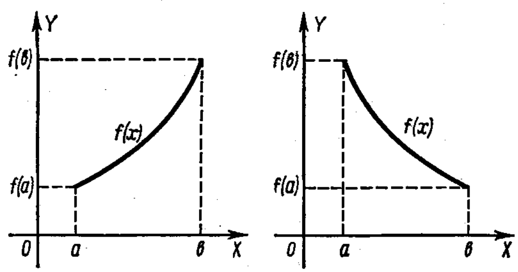


Рис. 23

Пусть $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Тогда из условия (6.13) в силу строгого возрастания функции f следует, что

$$c \leqslant y_1 < y_0 < y_2 \leqslant d.$$

Возьмем $\delta > 0$ так, чтобы $y_1 \leqslant y_0 - \delta < y_0 + \delta \leqslant y_2$ (рис. 24). Если теперь выбрать y так, что $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$, то тем более

$$y_1 < y < y_2,$$

и, следовательно, в силу строгого возрастания функции f^{-1} справедливо неравенство

$$x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon.$$

Таким образом, для $\varepsilon > 0$ указано такое $\delta > 0$, что для всех $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ выполняется неравенство

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon,$$

т. е. функция f^{-1} непрерывна в точке y_0. Если теперь $y_0 = c$ или $y_0 = d$, то аналогичными рассуждениями доказывается, что функция f^{-1} непрерывна справа в точке c и непрерывна слева в точке d.

Теорема для строго возрастающих функций доказана полностью.

Напомним, что функция f строго убывает тогда и только тогда, когда функция $-f$ строго возрастает, поэтому справедливость теоремы для строго убывающих функций следует из рассмотренного случая. $\square$

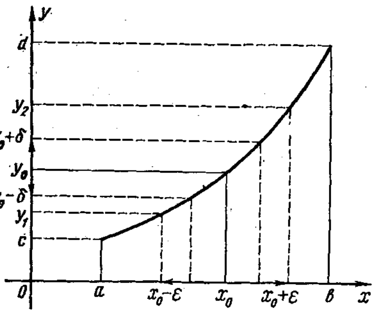


Рис. 24

Рассмотрим теперь случай функции, определенной на интервале.

Теорема 4. *Пусть функция f определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на интервале (a, b) (конечном или бесконечном) и пусть*

$$c = \lim_{x \to a+0} f(x), \quad d = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Тогда обратная функция f^{-1} определена, однозначна, строго возрастает (убывает) и непрерывна на интервале (конечном или бесконечном) с концами c и d (рис. 25).

При этом в случае, когда $a = -\infty$ под $\lim\limits_{x \to -\infty+0} f(x)$ понимается предел $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, а в случае $b = +\infty$ под пределом $\lim\limits_{x \to +\infty-0} f(x)$ — предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Доказательство. Пусть для определенности функция f строго возрастает в интервале (a, b). Покажем, что в этом случае множеством ее значений является интервал (c, d). Действительно, согласно теореме о пределах монотонных функций (см. п. 4.10) имеем: $c = \inf\limits_{(a, b)} f$, $d = \sup\limits_{(a, b)} f$ и, следовательно, для любого $x \in (a, b)$ справедливо неравенство $c \leqslant f(x) \leqslant d$. Более того, для всех $x \in (a, b)$ выполняются еще неравенства $f(x) \neq c$, $f(x) \neq d$. В самом деле, если бы, например, существовало такое x_0, что $a < x_0 < b$ и $f(x_0) = c$ (это, очевидно, возможно только тогда, когда нижняя грань c конечна), то при $a < x < x_0$ выполнялось бы

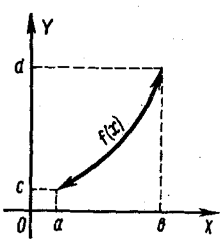


Рис. 25

неравенство $f(x) < f(x_0) = c$, что противоречило бы тому, что $c = \inf f$. Итак, для всех $x \in (a, b)$ выполняются неравенства $c < f(x) < d$. С другой стороны, поскольку $c = \inf\limits_{(a, b)} f$, $d = \sup\limits_{(a, b)} f$, то для любого y, $c < y < d$, существуют такие $x_1 \in (a, b)$ и $x_2 \in (a, b)$, что $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ удовлетворяют неравенствам

$$c < y_1 < y < y_2 < d.$$

Отсюда следует, что $x_1 < x_2$ *), и поскольку $f(x_1)=y_1$ и $f(x_2)=y_2$, то по теореме Больцано — Коши о промежуточных значениях непрерывных функций существует такая точка $x \in [x_1, x_2]$, что $f(x)=y$. Таким образом, для любой точки $y \in (c, d)$ существует такая точка $x \in (a, b)$, что $f(x)=y$.

Тем самым доказано, что действительно множеством значений функции f, или, что то же, множеством определения обратной функции f^{-1}, является интервал (c, d). То, что функция f^{-1} однозначна и строго монотонно возрастает в интервале (c, d), следует из леммы. Ее непрерывность доказывается дословным повторением доказательства непрерывности обратной функции в предыдущей теореме. Наконец, как и выше, теорема для строго монотонно убывающей функции следует из уже доказанной теоремы о строго монотонно возрастающей функции с помощью рассмотрения функции $-f$. $\square$

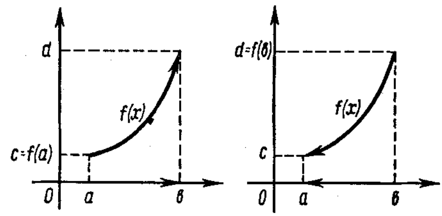


Рис. 26

Замечание. Аналогичным образом доказывается, что если функция строго возрастает и непрерывна на полуинтервале $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, или на $(a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, то обратная функция определена, строго возрастает и непрерывна на полуинтервале $[c, d)$, где $c=f(a)$, $d=\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$, соответственно на $(c, d]$, где $c=\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $d=f(b)$ (рис. 26).

Случай строго убывающей на полуинтервале функции $f(x)$ можно свести к случаю строго возрастающей, рассмотрев функцию $-f(x)$.

Пример. При любом целом положительном n степенная функция $y=x^n$ строго возрастает и непрерывна на положительной полуоси $x \geqslant 0$.

Действительно, если $0 \leqslant x_1 < x_2$, то, перемножая n раз эти неравенства, получим $x_1^n < x_2^n$, т. е. функция $y=x^n$, $n=1, 2, \ldots$, строго монотонно возрастает. Для доказательства непрерывности функции $y=x^n$ заметим, что функция $y=f(x)=x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$. Действительно в этом случае $y_0=f(x_0)=x_0$, поэтому $\Delta y = y-y_0 = x-x_0=\Delta x$. Следовательно, если задано $\varepsilon > 0$, то, беря $\delta=\varepsilon$, получим, что из условия $|\Delta x| < \delta$ следует $|\Delta y| = |\Delta x| < \delta = \varepsilon$. Это и означает непрерывность функции $y=x$ в точке $x=x_0$. Функция же $y=x^n$ является произведением n

*) Случай $x_1 \geqslant x_2$ невозможен, так как тогда бы в силу возрастания функции f выполнялось бы неравенство $y_1 \geqslant y_2$.

одинаковых функций $f(x)=x$ и потому (см. п. 5.2) также непрерывна во всех точках $x \in R$.

Из того, что $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, очевидно, следует, что $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $n=1, 2, \ldots$. Кроме того, в нуле функция $y=x^n$ обращается в ноль. Поэтому, согласно замечанию к теореме 4, множеством значений степенной функции $y=x^n$ при $x \geqslant 0$ является неотрицательная полуось $y \geqslant 0$.

Обратной функцией для функции $y^n = x$ является корень n-й степени $\sqrt[n]{y}$, $n=1, 2, \ldots$. Согласно теореме 4 и в силу доказанных свойств степенной функции $y=x^n$, корень n-й степени $\sqrt[n]{y}$, $n=1, 2, \ldots$, определен для любого неотрицательного y.

Таким образом, из доказанных теорем следует, в частности, *существование и единственность положительного корня n-й степени из любого положительного числа.*

З а м е ч а н и е. Из рассмотренного примера следует еще раз, что любой промежуток содержит иррациональные числа (см. следствие 2 из теоремы 8 в п. 3.11). Покажем сначала, что число $\sqrt{2}$ (существование которого вытекает из рассмотренного выше примера) является иррациональным. Допустим противное: пусть существует рациональное число, равное квадратному корню из двух. Запишем это число в виде несократимой дроби p/q (p и q — взаимно простые натуральные числа):

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Тогда $p^2 = 2q^2$ и, следовательно, число p делится на 2. Действительно, если бы p было нечетным, т. е. $p = 2k+1$, $k \in N$, то $p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 2k + 1$ также было бы нечетным, и равенство $p^2 = 2q^2$ не имело бы места. Итак, $p = 2k$; но тогда $4k^2 = 2q^2$, или $q^2 = 2k^2$. Отсюда, как и выше, следует, что q — четное число. Четность чисел $p = q$ противоречит предположению о несократимости дроби p/q.

Из доказанного, очевидно, следует, что всякое число вида $m\sqrt{2}/n$, m и n — натуральные, также иррационально. В самом деле, если бы оно было рациональным $\frac{m\sqrt{2}}{n} = \frac{p}{q}$, то и $\sqrt{2}$ оказалось бы рациональным числом: $\sqrt{2} = \frac{np}{mq}$. Отсюда, в свою очередь, следует, что всякий интервал содержит иррациональное число (сравните с п. 3.11) и притом вида $m\sqrt{2}/n$, m и n — целые.

Действительно, пусть $0 \leqslant a < b$. Выберем так натуральное n, чтобы

$$\sqrt{2}/n < b - a,$$

а затем натуральное m так, чтобы

$$\frac{(m-1)\sqrt{2}}{n} \leqslant a < \frac{m\sqrt{2}}{n}.$$

Тогда $a < \frac{m\sqrt{2}}{n} < b$. Если же $a < b \leqslant 0$, то в силу доказанного существуют такие целые m и n, что

$$0 \leqslant -b < \frac{m\sqrt{2}}{n} < -a;$$

а поэтому

$$a < -\frac{m\sqrt{2}}{n} < b.$$

В случае $a < 0 < b$ согласно доказанному существуют такие целые m и n, что $a < 0 < \frac{m\sqrt{2}}{n} < b$. □

§ 7. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

7.1. МНОГОЧЛЕНЫ И ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Теорема 1. *Любой многочлен непрерывен в каждой точке.*

В самом деле, функция $y=c$, где c — постоянная, непрерывна, что показано в примере 1 п. 5.1.

Функции вида $y=x^n$ также непрерывны для каждого фиксированного $n \in N$ в любой точке x. Это показано в п. 6.3 (см. приведенный там пример).

Всякий же многочлен получается из функций вида $y=c$ и $y=x^n$ с помощью сложения и умножения и поэтому является непрерывной функцией в каждой точке (см. п. 5.2).

Теорема 2. *Всякая рациональная функция $P(x)/Q(x)$, ($P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены) непрерывна во всех точках, в которых ее знаменатель не обращается в ноль.*

Это непосредственно следует из того, что многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывны в каждой точке и частное непрерывных функций также непрерывно во всех точках, где делитель не обращается в нуль (см. п. 5.2).

Эту теорему весьма удобно использовать при нахождении пределов рациональных функций. Пусть требуется найти $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$. Для этого нужно сначала произвести, если, конечно, это возможно, сокращение дроби $P(x)/Q(x)$ на множитель $(x-x_0)^n$ с наибольшим возможным показателем $n \geqslant 1$. Если получившуюся рациональную дробь обозначить $P_1(x)/Q_1(x)$, то (см. п. 4.4)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Если $Q_1(x_0) \neq 0$, то, в силу теоремы 2, этот предел равен просто $P_1(x_0)/Q_1(x_0)$, если же $Q_1(x_0) = 0$ (и, значит, $P_1(x_0) \neq 0$, ибо в противном случае дробь $P_1(x)/Q_1(x)$ можно было бы сократить на $(x - x_0)$), то этот предел равен ∞.

Примеры. 1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x-2}{x-1} = \infty$.

7.2. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ, ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ И СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИИ

Напомним свойства степени a^r, где $a > 0$, r — рациональное число: $r = p/q$, p и q — целые, $q \neq 0$.

1°. Пусть $r_1 < r_2$. Если $a > 1$, то $a^{r_1} < a^{r_2}$, а если $a < 1$, то $a^{r_1} > a^{r_2}$.

2°. $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$.

3°. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$.

4°. $(ab)^r = a^r b^r$.

Здесь везде r, r_1 и r_2 — рациональные числа. Вспомним еще, что $a^0 = 1$. Из свойства 2° следует, что $a^r \cdot a^{-r} = a^0 = 1$; откуда

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}. \tag{7.1}$$

Далее, из свойства 1° и из (7.1) вытекает, что $a^r > 0$ для любого рационального r. Действительно, если $r > 0$ и $a \geqslant 1$, то в силу 1° $a^r \geqslant a^0 = 1 > 0$. Отсюда, согласно (7.1), имеем

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} > 0.$$

Аналогично доказывается неравенство $a^r > 0$ при $a < 1$.

Определим теперь степень a^x для любого действительного x и $a > 0$. Предварительно напомним, что (см. в п. 3.9 пример 3, формулы (3.20) и (3.21))

$$\lim_{n \to \infty} a^{1/n} = \lim_{n \to \infty} a^{-1/n} = 1. \tag{7.2}$$

Лемма. *Пусть $a > 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех рациональных чисел h, удовлетворяющих условию $|h| < \delta$, выполняется неравенство $|a^h - 1| < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть сначала $a > 1$. Из (7.2) следует, что для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число n_ε, что

$$|a^{1/n_\varepsilon} - 1| < \varepsilon \text{ и } |a^{-1/n_\varepsilon} - 1| < \varepsilon, \tag{7.3}$$

следовательно (см. свойство 1° степени),

$$1-\varepsilon < a^{-1/n_\varepsilon} < a^{1/n_\varepsilon} < 1+\varepsilon. \tag{7.4}$$

Если h — рациональное число и $|h| < \frac{1}{n_\varepsilon}$, т. е. $-\frac{1}{n_\varepsilon} < h < \frac{1}{n_\varepsilon}$, то $a^{-1/n_\varepsilon} < a^h < a^{1/n_\varepsilon}$ и, значит, $1-\varepsilon < a^h < 1+\varepsilon$. Таким образом, если h рационально и $|h| < \delta$, где $\delta = \frac{1}{n_\varepsilon}$, то $|a^h - 1| < \varepsilon$. Для $a > 1$ лемма доказана.

Для $a < 1$ она доказывается аналогично, только соответствующие неравенства, согласно свойству 1° степени a^r при $a < 1$, надо заменить обратными. При $a = 1$ лемма очевидна. □

Определим теперь степень a^x для любого действительного x.

Определение 1. *Пусть $a > 0$, а x — произвольное действительное число. Пусть, далее, $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x (для любого $x \in \boldsymbol{R}$ такая последовательность всегда существует, см.* следствие леммы 1 в п. 3.10). Положим по определению

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}. \tag{7.5}$$

Это определение корректно в том смысле, что указанный предел всегда существует и не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$, сходящейся к числу $x \in \boldsymbol{R}$.

Докажем это. Пусть последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ сходится к числу x. Покажем, что последовательность $\{a^{r_n}\}$ удовлетворяет условиям критерия Коши (см. п. 3.7) и, значит, является сходящейся последовательностью. Для этого необходимо оценить разность

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m} |a^{r_n - r_m} - 1|. \tag{7.6}$$

Последовательность $\{r_n\}$ сходится и, следовательно, ограничена (см. п. 3.4), поэтому существует такое число A, которое без ограничения общности можно считать рациональным (почему?), что $-A < r_n < A$. Отсюда в случае $a \geqslant 1$ имеем $a^{-A} \leqslant a^{r_n} \leqslant a^A$, а в случае $a < 1$ — соответственно $a^{-A} > a^{r_n} > a^A$, $n = 1, 2, \ldots$, поэтому при любом $a > 0$ существует такое число B, что

$$a^{r_n} \leqslant B, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.7}$$

($B = a^A$ при $a \geqslant 1$ и $B = a^{-A}$ при $a < 1$), т. е. последовательность $\{a^{r_n}\}$ ограничена сверху числом B.

Далее, по лемме для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех рациональных r, удовлетворяющих условию $|r| < \delta$, выполнено неравенство

$$|a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{B}. \tag{7.8}$$

Из сходимости же последовательности $\{r_n\}$ в силу критерия Коши (см. п. 3.7) следует, что для найденного $\delta > 0$ существует такой номер n_δ, что для всех $n \geqslant n_\delta$ и $m \geqslant n_\delta$ выполняется неравенство $|r_n - r_m| < \delta$ и, значит, в силу (7.8) неравенство

$$|a^{r_n - r_m} - 1| < \frac{\varepsilon}{B}. \qquad (7.9)$$

Из (7.6), (7.7) и (7.9) вытекает, что для всех $n \geqslant n_\delta$ и $m \geqslant n_\delta$ справедливо неравенство $|a^{r_n} - a^{r_m}| < \varepsilon$, откуда в силу критерия Коши следует, что последовательность $\{a^{r_n}\}$ сходится.

Пусть теперь $\{r'_n\}$ — другая последовательность, сходящаяся к x. Покажем, что последовательности $\{a^{r_n}\}$ и $\{a^{r'_n}\}$ сходятся к одному и тому же пределу.

Составим новую последовательность:

$$r''_n = \begin{cases} r_k, & \text{если } n = 2k-1, \\ r'_k, & \text{если } n = 2k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots. \qquad (7.10)$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} r''_n = x$, поэтому в силу доказанного существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r''_n}$. Предел же любой сходящейся последовательности совпадает с пределом любой ее подпоследовательности, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r''_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}. \qquad (7.11)$$

Корректность определения a^x доказана.

Определение 1 естественно в том смысле, что в случае, когда x является рациональным числом r, то степень a^x совпадает со значением a^r в ранее известном смысле. В самом деле, если $x = r$ — рациональное число, то в качестве последовательности рациональных чисел r_n, $n = 1, 2, \ldots$, сходящейся к $x = r$, можно взять $r_n = r$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда согласно определению 1

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^r = a^r.$$

Определение 2. *Пусть задано некоторое число $a > 0$. Функция a^x, определенная для всех $x \in \boldsymbol{R}$, называется показательной функцией с основанием a.*

Согласно определению $1^x = 1$ для всех действительных x. Поэтому случай $a = 1$ не представляет интереса для изучения, и в дальнейшем мы не будем его рассматривать.

Теорема 3. *Показательная функция a^x $(a > 0)$ обладает следующими свойствами.*

1°. *При $a > 1$ она строго возрастает, а при $a < 1$ — строго убывает на всей числовой оси.*

2°. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ *для любых действительных* x *и* y.

3°. $(a^x)^y = a^{xy}$ *для любых действительных* x *и* y.

4°. *Она непрерывна в каждой точке числовой оси.*

Доказательство свойства 1°. Пусть для определенности $a > 1$ и $x < y$. Существуют (почему?) такие рациональные числа r' и r'', что $x < r' < r'' < y$. Выберем какие-либо последовательности рациональных чисел $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} r'_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r''_n = y$ и чтобы $r'_n < r' < r'' < r''_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$a^{r'_n} < a^{r'} < a^{r''} < a^{r''_n};$$

перейдя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$a^x \leqslant a^{r'} < a^{r''} \leqslant a^y. \tag{7.12}$$

Таким образом, если $x < y$, то $a^x < a^y$, что и означает строгое возрастание функции a^x при $a > 1$.

Случай $a < 1$ рассматривается аналогичным образом.

Доказательство свойства 2°. Пусть $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ — такие последовательности рациональных чисел, что $\lim\limits_{n\to\infty} r'_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r''_n = y$ и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} (r'_n + r''_n) = x + y$ (см. п. 3.9). Тогда в силу определения показательной функции

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n + r''_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a^{r'_n} a^{r''_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} \lim_{n\to\infty} a^{r''_n} = a^x a^y.$$

Прежде чем переходить к доказательству следующих свойств, заметим, что из свойства 2° следует, что для любого действительного x справедливо равенство $a^x a^{-x} = a^0 = 1$; поэтому $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Доказательство свойства 4° *). В силу уже доказанной строгой монотонности функции a^x утверждение леммы настоящего пункта справедливо (вместе с доказательством) не только для рациональных, но и для всех действительных h. А именно: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех вещественных чисел h, удовлетворяющих условию $|h| < \delta$, выполняется неравенство $|a^h - 1| < \varepsilon$.

Пусть x фиксировано, $y = a^x$, $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$. Согласно сказанному, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех Δx, удовлетворяющих условию $|\Delta x| < \delta$, выполняется неравенство

$$|a^{\Delta x} - 1| < \frac{\varepsilon}{a^x}, \quad ^{**)}$$

---

*) Свойство 3° будет доказано после доказательства свойства 4°.

**) Отметим, что $a^x > 0$ при любом действительном x. Это вытекает из свойств 1° и 2°, сформулированных в теореме 3, и из того, что $a^0 = 1$ (ср. со свойствами a^r при рациональных показателях r).

следовательно, для всех Δx, удовлетворяющих условию $|\Delta x| < \delta$, справедливо неравенство $|\Delta y| = a^x |a^{\Delta x} - 1| < \varepsilon$, что и означает непрерывность функции a^x в точке x.

Доказательство свойства 3°. Пусть сначала $y = p$ — целое положительное число; тогда применив p раз свойство 2°, получим

$$(a^x)^p = \underbrace{a^x \cdot a^x \ldots a^x}_{p \text{ раз}} = a^{\overbrace{x+x+\ldots x}^{p \text{ раз}}} = a^{xp}. \qquad (7.13)$$

Пусть, далее, $y = \frac{1}{q}$, где q — целое положительное число. Покажем, что $(a^x)^{1/q} = a^{x/q}$, т. е. что $a^{x/q}$ является корнем q-й степени из числа a^x. Для этого, согласно определению корня, надо доказать, что $\left(a^{\frac{x}{q}}\right)^q = a^x$; это следует из равенства (7.13).

Пусть теперь $y = \frac{p}{q}$, p и q натуральные, тогда, согласно уже доказанному,

$$(a^x)^{p/q} = [(a^x)^p]^{1/q} = (a^{xp})^{1/q} = a^{xp/q}.$$

Если же $y = -\frac{p}{q}$, то

$$(a^x)^{-p/q} = \frac{1}{(a^x)^{p/q}} = \frac{1}{a^{xp/q}} = a^{-xp/q}.$$

Наконец, очевидно, что $(a^x)^0 = 1 = a^0$. Таким образом доказано, что для любого действительного x и любого рационального r

$$(a^x)^r = a^{xr}. \qquad (7.14)$$

Пусть теперь задано еще одно действительное число y. Рассмотрим произвольную последовательность $\{r_n\}$ рациональных чисел, сходящуюся к y. Тогда в силу (7.14) для всех $n = 1, 2, \ldots$ будем иметь

$$(a^x)^{r_n} = a^{xr_n}. \qquad (7.15)$$

Поскольку $\lim\limits_{n \to \infty} xr_n = xy$, то согласно доказанной выше непрерывности функции a^x

$$\lim_{n \to \infty} a^{xr_n} = a^{xy}. \qquad (7.16)$$

С другой стороны, в силу определения показательной функции

$$\lim_{n \to \infty} (a^x)^{r_n} = (a^x)^y. \qquad (7.17)$$

Переходя к пределу в равенстве (7.15) при $n \to \infty$, из (7.16) и (7.17) получим рассматриваемое свойство для любых $x, y \in \boldsymbol{R}$. $\boxdot$

Упражнение 1. Доказать, что $(ab)^x = a^x b^x$ и $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ для любых $a > 0$, $b > 0$ и каждого $x \in \boldsymbol{R}$.

Пусть a — положительное число, неравное единице. Из элементарной математики известно, что операция, обратная возведению в степень и ставящая в соответствие данному числу $x>0$ такое число y, что $a^y=x$ (если, конечно, указанное y существует), называется логарифмированием по основанию a. Число y называется логарифмом числа x по основанию a и обозначается через $\log_a x$. Таким образом по определению

$$a^{\log_a x}=x \qquad (a>0,\ a\neq 1).$$

При $a=e$ логарифм числа x обозначается $\ln x$ и называется натуральным логарифмом числа x.

Определение 3. *Функция, ставящая в соответствие каждому числу x его логарифм $\log_a x$ по основанию a $(a>0,\ a\neq 1)$, если этот логарифм существует, называется логарифмической функцией $y=\log_a x$.*

Теорема 4. *Функция $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, определена для всех $x>0$ и является на этом множестве строго монотонной (возрастающей при $a>1$ и убывающей при $a<1$) непрерывной функцией. Она имеет следующие свойства:*

1°) $\log_a x_1x_2=\log_a x_1+\log_a x_2$, $x_1>0$, $x_2>0$;

2°) $\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x$, $x>0$, $\alpha\in \boldsymbol{R}$.

Доказательство. Надо прежде всего доказать, что множеством значений функции $y=a^x$ является множество всех положительных чисел. При $a>1$ в силу непрерывности и строго монотонного возрастания функции $y=a^x$ это означает (см. п. 4.8), что

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x=0. \tag{7.18}$$

При этом, поскольку пределы (7.18) (конечные или бесконечные) существуют (см. п. 4.10), достаточно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}=+\infty$ $\left(\text{соответственно } \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}=0\right)$ хотя бы для одной последовательности $\{x_n\}$, которая стремится к $+\infty$ (соответственно к $-\infty$).

Покажем, что при $a>1$

$$\lim_{n\to+\infty} a^n=+\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} a^{-n}=0. \tag{7.19}$$

Так как $\alpha=a-1>0$, то, раскладывая $(1+\alpha)^n$ по биномиальной формуле Ньютона и отбрасывая все члены (которые положительны), кроме первых двух, получаем

$$a^n=(1+\alpha)^n=1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2+\ldots>n\alpha,$$

(ср. с леммой п. *3.9*) и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=+\infty$; отсюда

$$\lim_{n\to\infty} a^{-n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} a^n}=0.$$

Таким образом, равенства (7.19) доказаны.

Если теперь $a<1$, то $b=\frac{1}{a}>1$ и

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} b^x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \frac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty} b^x} = +\infty.$$

Из доказанного следует (см. п. 6.3 и теорему 4 этого параграфа), что как в случае $a>1$, так и в случае $a<1$ множеством значений функции a^x, а значит, и областью определения обратной функции $y=\log_a x$ является полупрямая $(0, +\infty)$. Этим, в частности, доказано существование логарифма любого положительного числа. Остальные утверждения теоремы 4 непосредственно следуют из теоремы 4 п. 6.3 и теоремы 3 настоящего параграфа.

Например, покажем, как свойство 1° вытекает из свойств показательной функции, указанных в теореме 3. Положим

$$y_1=\log_a x_1, \quad y_2=\log_a x_2,$$

согласно определению логарифма это означает, что

$$x_1=a^{y_1}, \quad x_2=a^{y_2}.$$

Отсюда (см. свойство 1° показательной функции в теореме 3) имеем

$$x_1x_2=a^{y_1}a^{y_2}=a^{y_1+y_2},$$

и, следовательно, снова по определению логарифма,

$$\log_a x_1x_2 = y_1+y_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2. \ \square$$

Определение 4. *Пусть задано действительное число α. Функция x^α, определенная для всех $x>0$, называется степенной функцией с показателем α.*

Теорема 5. *Степенная функция x^α непрерывна при всех $x>0$.*

Действительно, из определения логарифма имеем $x=e^{\ln x}$, а поэтому $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$, т. е. x^α есть композиция показательной функции e^u и логарифмической функции, умноженной на постоянную: $u=\alpha\ln x$. Показательная и логарифмическая функции непрерывны (см. теоремы 3 и 4), поэтому в силу теоремы о непрерывности композиции непрерывных функций (см. п. 5.2) функция x^α также непрерывна. $\square$

При рассмотрении функции $y=x^\alpha$ предполагалось, что $x>0$, так как при $x\leqslant 0$ выражение x^α имеет смысл не для всех α в области действительных чисел. Однако если α рационально и x^α имеет смысл при $x<0$ $\left(\text{например, } x^2, \frac{1}{x^3}, \sqrt[5]{x}\right)$, то функция $y=x^\alpha$ будет при $\alpha>0$ непрерывной на всей действительной оси, а при $\alpha<0$ — на всей действительной оси, кроме точки $x=0$.

При $x\neq 0$ это непосредственно следует из теоремы 5, так как функция $y=x^\alpha$, если она определена и для всех $x<0$, будет всегда четной или нечетной, а если четная или нечетная функция непрерывна при $x>0$, то она непрерывна и при $x<0$ (почему?). Если же в точке $x=0$ четная или нечетная функция непрерывна справа и равна нулю, то она просто непрерывна в этой точке (почему?). Этот случай имеет место при $\alpha>0$

$$\lim_{x\to+0} x^\alpha=0=0^\alpha,$$

ибо $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$ и (см. теорему 4) $\lim\limits_{x\to+0}\ln x=-\infty$, поэтому в этом случае функция x^α непрерывна и при $x=0$.

7.3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Перейдем к вопросу о непрерывности тригонометрических функций. При этом не будем приводить строгих аналитических определений этих функций (как это было сделано выше с показательной функцией), а используем их геометрическое определение, известное из элементарной математики. Всюду в дальнейшем x — действительное число, а под $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ будем подразумевать значение соответствующей тригонометрической функции от угла, радианная мера которого равна x.

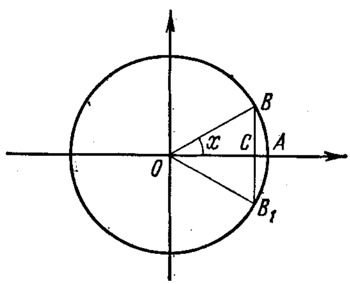


Рис. 27

Лемма 3. *При любом действительном x справедливо неравенство*

$$|\sin x|\leqslant|x|.$$

Доказательство. Рассмотрим окружность радиуса R с центром в точке O. Пусть радиус OB образует угол x, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, с радиусом OA, а радиус OB_1 симметричен радиусу OB относительно OA (рис. 27).

Опустим из точки B перпендикуляр BC на радиус OA. Тогда $BC=R\sin x$, и так как $BC=CB_1$, будем иметь $BB_1=2R\sin x$. Как известно, длина дуги BAB_1 равна $2Rx$. Длина отрезка, соединяющего две точки, не превышает длины дуги окружности, соединяющей те же точки, значит, $2R\sin x\leqslant 2Rx$, т. е. $\sin x\leqslant x$.

Если теперь $-\frac{\pi}{2}\leqslant x<0$, то $0<-x\leqslant\frac{\pi}{2}$, и поэтому, в силу доказанного, $\sin(-x)\leqslant -x$, но в этом случае $\sin(-x)=|\sin x|$ и $-x=|x|$, следовательно, $|\sin x|\leqslant|x|$. Таким образом, если $|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$, то $|\sin x|\leqslant|x|$. Если же $|x|>\frac{\pi}{2}$, то $|\sin x|\leqslant 1<\frac{\pi}{2}<|x|$. $\square$

Теорема 6. *Функции* $y = \sin x$, $y = \cos x$ *непрерывны на всей действительной оси.*

Следствие. *Функции* $y = \operatorname{tg} x$ *и* $y = \operatorname{ctg} x$ *непрерывны при всех* x, *при которых* $\cos x$, *соответственно* $\sin x$, *не обращаются в ноль.*

Доказательство. Так как $|\sin\alpha| \leqslant 1$, $|\cos\alpha| \leqslant 1$ при любом α и в силу леммы $\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}|\Delta x|$, то

$$|\sin(x+\Delta x) - \sin x| \leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant |\Delta x|,$$

$$|\cos(x+\Delta x) - \cos x| \leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant |\Delta x|.$$

Отсюда следует, что при $\Delta x \to 0$ левые части неравенства также стремятся к нулю. Это и означает непрерывность функций $\sin x$ и $\cos x$.

Непрерывность $\operatorname{tg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ и $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ в точках, в которых знаменатели не обращаются в ноль, следует из непрерывности $\sin x$ и $\cos x$ и теоремы о частном непрерывных функций (см. п. 5.2).

Теорема 7. *Обратные тригонометрические функции* $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ *и* $\operatorname{arcctg} x$ *непрерывны в области их определения.*

Это сразу следует из теорем 3 и 4 в § 6 и из непрерывности и строгой монотонности функций $\sin x$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, $\cos x$ на отрезке $[0, \pi]$, $\operatorname{tg} x$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ и $\operatorname{ctg} x$ на интервале $(0, \pi)$.

§ 8. СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИЙ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

8.1. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

В этом пункте вычисляются пределы, которые неоднократно будут встречаться в дальнейшем.

Лемма 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{8.1}$$

Доказательство. Рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O. Пусть радиус OB образует угол x, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, с радиусом OA. Соединим точки A и B отрезком и восставим из точки A перпендикуляр к радиусу OA до пересечения в точке C с продолжением радиуса OB (рис. 28). Тогда площадь треугольника AOB равна $\frac{1}{2}R^2\sin x$, площадь сектора AOB равна $\frac{1}{2}R^2x$, а площадь треугольника AOC равна $\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg} x$. Треугольник AOB является частью сектора AOB, который в свою очередь является частью треугольника AOC; поэтому

$$\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}x, \text{ откуда } \sin x<x<\operatorname{tg}x,$$

следовательно,

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

или, заменяя величины им обратными

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1. \qquad (8.2)$$

Заметим, что в силу четности функций $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ неравенство (8.2) справедливо и при $-\pi/2<x<0$.

Так как функция $\cos x$ непрерывна и $\cos 0=1$, то из (8.2) при $x\to 0$ следует (см. п. 4.7) равенство (8.1). □

Следствие 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1. \qquad (8.3)$$

В самом деле,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

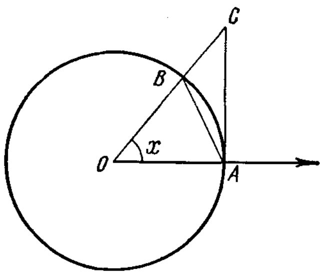


Рис. 28

Следствие 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1. \qquad (8.4)$$

Функция $y=\sin x$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, поэтому обратная функция $x=\arcsin y$ также строго монотонна и непрерывна на отрезке $[-1;\ 1]$. Поскольку $\sin 0=0$, то записи $x\to 0$ и $y\to 0$ эквивалентны (см. замечание в конце п. 8*). Чтобы вычислить предел (8.4), применим правило замены переменного для пределов непрерывных функций (см. теорему 2 в п. 5.2). Положив $x=\sin y$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{\arcsin(\sin y)}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1.$$

Следствие 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1. \qquad (8.5)$$

Это равенство получается аналогично предыдущему из (8.3).

Лемма 2.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e. \qquad (8.6)$$

Ранее (см. п. 3.5) было доказано, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e, \tag{8.7}$$

где $n=1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что для любой последовательности $\{n_k\}$ натуральных чисел, такой, что

$$\lim_{k\to\infty} n_k=+\infty, \tag{8.8}$$

имеем

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=e. \tag{8.9}$$

В самом деле, пусть задано $\varepsilon>0$; из (8.7) вытекает, что существует такое n_ε, что при $n\geqslant n_\varepsilon$

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|<\varepsilon, \tag{8.10}$$

а из условия (8.8) следует, что существует такое k_ε, что $n_k\geqslant n_\varepsilon$ при $k\geqslant k_\varepsilon$; поэтому в силу (8.10) $\left|\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}-e\right|<\varepsilon$ при $k\geqslant k_\varepsilon$, что и означает выполнение равенства (8.9).

Пусть теперь последовательность $\{x_k\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=+0$, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} x_k=0 \text{ и } x_k>0. \tag{8.11}$$

Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k}=e$. При этом без ограничения общности можно считать, что $x_k<1$, $k=1, 2, \ldots$ (почему?). Для всякого x_k найдется такое натуральное n_k, что $n_k+1>\frac{1}{x^k}\geqslant n_k$ и, следовательно, $\frac{1}{n_k+1}<x_k\leqslant\frac{1}{n_k}$, причем в силу (18.11) $\lim\limits_{k\to\infty} n_k=+\infty$. Поэтому имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<(1+x_k)^{1/x_k}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}. \tag{8.12}$$

Замечая, что в силу (8.9)

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)}=\frac{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)}=e$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)=e$$

и переходя к пределу в неравенстве (8.12) при $k \to \infty$, получим

$$\lim_{k \to \infty} (1+x_k)^{1/x_k} = e.$$

Поскольку $\{x_k\}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям (8.11), то тем самым доказано, что

$$\lim_{x \to +0} (1+x)^{1/x} = e. \tag{8.13}$$

Пусть теперь последовательность $\{x_k\}$ такая, что $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = -0$, т. е.

$$\lim_{k \to \infty} x_k = 0, \quad x_k < 0. \tag{8.14}$$

Положим $y_k = -x_k$, тогда $y_k > 0$ и $\lim\limits_{k \to \infty} y_k = 0$, причем без ограничения общности можно считать, что $y_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\lim_{k \to \infty} (1+x_k)^{1/x_k} = \lim_{k \to \infty} (1-y_k)^{-1/y_k} = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{1/y_k} =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{1/y_k} = \lim_{k \to \infty} (1+z_k)^{\frac{1}{z_k}+1},$$

где

$$z_k = \frac{y_k}{1-y_k} > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{k \to \infty} z_k = 0,$$

и в силу уже доказанного равенства (8.13)

$$\lim_{k \to \infty} (1+x_k)^{1/x_k} = \lim_{k \to \infty} (1+z_k)^{1/z_k} \lim_{k \to \infty} (1+z_k) = e.$$

Но $\{x_k\}$ была произвольной последовательностью, удовлетворяющей условиям (8.14), поэтому

$$\lim_{x \to -0} (1+x)^{1/x} = e. \tag{8.15}$$

Таким образом, функция $(1+x)^{1/x}$, $x \neq 0$ имеет в точке 0 пределы слева и справа, равные одному и тому же числу e. Поэтому существует и ее двусторонний предел при $x \to 0$, также равный e (см. п. 4.5). □

Следствие 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \tag{8.16}$$

и, в частности, при $a = e$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln (1+x)}{x} = 1.$$

В самом деле, используя непрерывность логарифмической функции (см. теорему 4 из § 7), непрерывность суперпозиции функций (см. п. 5.2) и равенство (8.6), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x}=\log_a\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}.$$

Следствие 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \tag{8.17}$$

В частности, если $a=e$, *то*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{8.18}$$

Функция $y=a^x-1$ строго монотонна и непрерывна на всей вещественной оси, поэтому обратная функция $x=\frac{\ln(1+y)}{\ln a}$ также строго монотонна и непрерывна при $y>-1$. Поскольку при $x=0$ имеем также и $y=0$, то обозначения $x\to 0$ и $y\to 0$ эквивалентны (см. замечание в конце п. 4.8*). Применим для вычисления предела (8.17) правило замены переменного (см. теорему 2 п. 5.2). Положив $x=\frac{\ln(1+y)}{\ln a}$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)}=\ln a\,\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}}=\ln a.$$

8.2. СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Все рассматриваемые в этом параграфе функции определены на некоторой фиксированной проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0 расширенной числовой прямой: $x_0\in\overline{\boldsymbol{R}}$, причем эта окрестность может быть и односторонней. Поэтому каждый раз не будет оговариваться, что $x\in\mathring{U}(x_0)$.

Как мы уже знаем, сумма, разность и произведение бесконечно малых функций являются также бесконечно малыми функциями; этого нельзя, вообще говоря, сказать об их частном: деление одной бесконечно малой на другую может привести к разнообразным случаям, как это показывают нижеприведенные примеры бесконечно малых при $x\to 0$ функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

Пусть, например, $\alpha(x)=x$ и $\beta(x)=x^2$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}x=0,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{n\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$$

Если же $\alpha(x)=x$, $\beta(x)=2x$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=2$, а если $\alpha(x)=x$, $\beta(x)=x\sin\frac{1}{x}$, то предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ не существует.

Определение 1. *Если для двух функций f и g существуют такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{V}(x_0)$ и постоянная $c>0$, что для всех $x \in \overset{\circ}{V}(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant c|g(x)|$, то функция f называется ограниченной по сравнению с функцией g на $\overset{\circ}{V}(x_0)$ и пишется*

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0$$

(читается: $f(x)$ есть O большое от $g(x)$ при x, стремящемся к x_0).

Подчеркнем, что запись $x \to x_0$ имеет здесь другой, чем обычно, смысл: она только указывает на то, что рассматриваемое свойство имеет место лишь в некоторой окрестности точки x_0; ни о каком пределе здесь речи нет.

Лемма 3. *Если $f(x) = \varphi(x) g(x)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = k$,* то $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$.

Доказательство. Из существования конечного предела $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = k$, согласно свойству 1° из п. 4.7, следует существование такой проколотой окрестности $\overset{\circ}{V}(x_0)$ точки x_0, что функция φ на ней ограничена, т. е. имеется такая постоянная $c>0$, что для всех $x \in \overset{\circ}{V}(x_0)$ выполняется неравенство $|\varphi(x)| \leqslant c$, а следовательно, и неравенство $|f(x)| = |\varphi(x)||g(x)| \leqslant c|g(x)|$. Это и означает, что $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$. □

Примеры. $\frac{1}{x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x \to 0$, ибо $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$ при $|x| \leqslant 1$; $\frac{1}{x^2} = O\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to \infty$, ибо $\frac{1}{x^2} < \left|\frac{1}{x}\right|$ при $|x| \geqslant 1$. Запись $f(x) = O(1)$ при $x \to x_0$ означает, что функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0, например $\frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = O(1)$ при $x \to 0$, ибо $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = 2$, и, значит, функция $\frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$ ограничена в окрестности точки $x = 0$.

Определение 2. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что $f = O(g)$ и $g = O(f)$ при $x \to x_0$, то они называются функциями одного порядка при $x \to x_0$; это записывается в виде*

$$f(x) \asymp g(x), \quad x \to x_0.$$

Это понятие наиболее содержательно в том случае, когда функции f и g являются либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x \to x_0$. Например, функции $\alpha = x$ и $\alpha = x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$ являются при $x \to 0$ бесконечно малыми одного порядка, ибо

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{1}{\left|2 + \sin\frac{1}{x}\right|} \leqslant \frac{1}{2 - \left|\sin\frac{1}{x}\right|} \leqslant 1,$$

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|2 + \sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 2 + \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 3.$$

Лемма 4. *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=k\neq 0$, *то* $f(x)\asymp g(x)$, $x\to x_0$.

Доказательство. Положим $\varphi(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{f(x)}{g(x)}$. Тогда $f(x)=\varphi(x)g(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=k$. Следовательно, по лемме 3, $f(x)=O(g(x))$, $x\to x_0$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\neq 0$, существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{V}(x_0)$ точки x_0, что для всех $x\in\overset{\circ}{V}(x_0)$ имеем $f(x)/g(x)\neq 0$ (см. свойство 2 в п. 4.7), а следовательно, и $f(x)\neq 0$. Для $x\in\overset{\circ}{V}(x_0)$ положим $\psi(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{g(x)}{f(x)}$ тогда $g(x)=\psi(x)f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=\frac{1}{k}$. Поэтому, согласно лемме 3, $g(x)=O(f(x))$, $x\to x_0$. □

В качестве примера возьмем функции $f(x)=3x^2$ и $g(x)=\sin x^2$. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{3}\lim\frac{\sin x^2}{x^2}=\frac{1}{3}$ (см. (8.1)), поэтому, согласно доказанному, функции $3x^2$ и $\sin x^2$ одного порядка при $x\to 0$.

Определение 3. *Функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *называются эквивалентными при* $x\to x_0$, *если в некоторой проколотой окрестности* $\overset{\circ}{U}(x_0)$ *точки* x_0 *определена такая функция* $\varphi(x)$, *что*

$$f(x)=\varphi(x)g(x) \tag{8.20}$$

и

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=1. \tag{8.21}$$

Отметим, что в силу свойства (8.21) найдется проколотая окрестность $\overset{\circ}{V}(x_0)$ точки x_0, на которой $\varphi(x)\neq 0$. Полагая $\psi(x)=\frac{1}{\varphi(x)}$, $x\in\overset{\circ}{V}(x_0)$, видим, что условия (8.20) и (8.21) для указанной проколотой окрестности равносильны условиям

$$g(x)=\psi(x)f(x),\quad \lim_{x\to x_0}\psi(x)=1,$$

т. е. как говорят, эквивалентность двух функций обладает свойством симметричности.

Функции $f(x)$ и $g(x)$, эквивалентные при $x\to x_0$, называются также *асимптотически равными* при $x\to x_0$. *Асимптотическое равенство* (эквивалентность) функций обозначается символом $\sim$:

$$f(x)\sim g(x)\quad\text{при}\quad x\to x_0. \tag{8.22}$$

Из сказанного выше следует, что если $f\sim g$ при $x\to x_0$, то и $g\sim f$ при $x\to x_0$.

Примеры. 1. $\frac{x^2}{1+x^4} \sim x^2$ при $x \to 0$. Действительно, полагая $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^4}$, получим

$$\frac{x^2}{1+x^4} = \varphi(x)\, x^2 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x^4} = 1.$$

2. $\frac{x^6}{1+x^4} \sim x^2$ при $x \to \infty$. В самом деле, если $\varphi(x) = \frac{x^4}{1+x^4}$, то

$$\frac{x^6}{1+x^4} = \varphi(x)\, x^2 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^4}{1+x^4} = 1.$$

Если в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0 справедливы неравенства $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, то условия (8.20) и (8.21) эквивалентны соотношению

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

и, следовательно, условию

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно положить $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; тогда, очевидно, для функции $\varphi(x)$ выполняются условия (8.20) и (8.21). Если

$$f \sim g \quad \text{и} \quad g \sim h \quad \text{при} \quad x \to x_0, \tag{8.23}$$

то

$$f \sim h \quad \text{при} \quad x \to x_0. \tag{8.24}$$

В самом деле, из условий (8.23) следует, что в некоторой проколотой окрестности точки x_0

$$f(x) = \varphi(x)\, g(x) \quad \text{и} \quad g(x) = \psi(x)\, h(x),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = 1$ и, следовательно,

$$f(x) = \varphi(x)\, \psi(x)\, h(x),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)\psi(x) = 1$, т. е. выполняется асимптотическое равенство (8.24).

Из результатов п. 8.1 следует, что при $x \to 0$ справедлива следующая эквивалентность бесконечно малых:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$$

Из этой эквивалентности следуют и более общие соотношения, которые сформулируем в виде отдельной леммы.

Лемма 4. *Если функция $u(x)$ такова, что*

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0, \tag{8.25}$$

то при $x \to x_0$

$$u(x) \sim \sin u(x) \sim \operatorname{tg} u(x) \sim \arcsin u(x) \sim \operatorname{arctg} u(x) \sim \\ \sim \ln[1+u(x)] \sim e^{u(x)}-1. \qquad (8.26)$$

Доказательство. Покажем, например, что

$$\sin u(x) \sim u(x) \quad \text{при} \quad x \to x_0. \qquad (8.27)$$

Пусть функция $u(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Положим (считая $x \neq x_0$ принадлежащими этой окрестности)

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin u(x)}{u(x)}, & \text{если } u(x) \neq 0, \\ 1, & \text{если } u(x) = 0. \end{cases} \qquad (8.28)$$

Покажем, что

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1. \qquad (8.29)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Поскольку

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

(здесь u — независимое переменное), существует такое число $\eta = \eta(\varepsilon)$, что при $|u| < \eta$, $u \neq 0$, выполняется неравенство

$$\left| \frac{\sin u}{u} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Для указанного $\eta > 0$ в силу (8.25) существует такое число $\delta = \delta(\eta)$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|u(x)| < \eta$. Следовательно, если $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ и $u(x) \neq 0$, то

$$\left| \frac{\sin u(x)}{u(x)} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Иначе говоря, если $0 < |x - x_0| < \delta$, и $u(x) \neq 0$, то

$$|\varphi(x) - 1| < \varepsilon. \qquad (8.30)$$

Если же $0 < |x - x_0| < \delta$ и $u(x) = 0$, то согласно (8.28) имеем $\varphi(x) = 1$ и, следовательно, неравенство (8.30) очевидно также выполняется.

Равенство (8.29) доказано, а так как из (8.28) следует, что $\sin u(x) = \varphi(x) u(x)$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, то доказана справедливость асимптотического равенства (8.27). Аналогично доказываются и остальные асимптотические формулы (8.26). □

Определение 4. *Если в некоторой проколотой окрестности точки* x_0 $\alpha(x) = \varepsilon(x) f(x)$, *где* $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, *то функция* α *назы-*

вается бесконечно малой по сравнению с функцией f при $x \to x_0$ и пишется $\alpha = o(f)$, $x \to x_0$ (читается «α есть o малое от f при x, стремящемся к x_0»).

В силу этого определения запись «$\alpha(x) = o(1)$, $x \to x_0$» означает просто, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Если $f(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$, то условие

$$\alpha = \varepsilon f, \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon = 0,$$

можно переписать в виде

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{f} = 0.$$

Таким образом, под $o(f)$ при $x \to x_0$ ($f(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$) подразумевается любая функция такая, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(f)}{f} = 0.$$

В случае, когда $f(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$, то говорят, что $\alpha = o(f)$ при $x \to x_0$ является *бесконечно малой более высокого порядка, чем f.*

Например, $x^3 = o(\sin x^2)$ при $x \to 0$, ибо

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin x^2} = \lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin x^2} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Подобным образом $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ и $x = o(x^2)$ при $x \to \infty$.

Отметим, что если $f = o(g)$ при $x \to x_0$, то и подавно $f = O(g)$ при $x \to x_0$. В самом деле, пусть $f = \varepsilon g$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon = 0$. Тогда функция $\varepsilon = \varepsilon(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 (см. п. 4.7): $|\varepsilon(x)| \leqslant c$, $x \neq x_0$ и, значит, $|f(x)| \leqslant c|g(x)|$ в указанной проколотой окрестности, а это означает, что $f = O(g)$, $x \to x_0$.

Собирая вместе введенные в этом пункте основные понятия, получим: пусть в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U} = \mathring{U}(x_0)$ точки x_0

$$f(x) = \varphi(x) g(x),$$

тогда

если функция $\varphi(x)$ ограничена на $\mathring{U}$, то $f(x) = O(g(x))$;
если $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$, то $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$;
если $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, то $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$.

Упражнение 1. Пусть $\beta = O(\alpha^2)$ при $x \to x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$. Доказать, что тогда $\beta = o(\alpha)$ при $x \to x_0$.

При использовании равенств с символами O и o следует иметь в виду, что они не являются равенствами в обычном смысле этого слова. Так, если

$$\alpha_1 = o(\beta) \text{ при } x \to x_0, \quad \alpha_2 = o(\beta) \text{ при } x \to x_0,$$

то было бы ошибкой сделать отсюда заключение, что $\alpha_1 = \alpha_2$, как это было бы в случае обычных равенств. Например, $x^3 = o(x)$ и $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, но $x^2 \neq x^3$.

Аналогично, если

$$f + O(f) = g + O(f) \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

то было бы ошибкой сделать заключение, что $f = g$.

Дело в том, что один и тот же символ $O(f)$ или $o(f)$ может обозначать разные конкретные функции. Это обстоятельство связано с тем, что при определении символов $O(f)$ и $o(f)$ мы по существу ввели целые классы функций, обладающих определенными свойствами (класс функций, ограниченных в некоторой окрестности точки x_0 по сравнению с функцией f и класс функций, бесконечно малых по сравнению с $f(x)$ при $x \to x_0$) и было бы правильнее писать не $\alpha = O(f)$ и $\alpha = o(f)$, а соответственно $\alpha \in O(f)$ и $\alpha \in o(f)$. Однако это привело бы к существенному усложнению вычислений с формулами, в которых встречаются символы O и o. Поэтому мы сохраним прежнюю запись $\alpha = O(f)$ и $\alpha = o(f)$, но будем всегда читать эти равенства, в соответствии с приведенными выше определениями, только в одну сторону: слева направо (если, конечно, не оговорено что-либо другое). Например, запись

$$\alpha = o(f), \quad x \to x_0$$

означает, что функция α является бесконечно малой по сравнению с функцией f при $x \to x_0$, но отнюдь не то, что всякая бесконечно малая по сравнению с f функция равна α.

В качестве примера на обращение с этими символами докажем равенство

$$o(cf) = o(f), \tag{8.31}$$

где c — постоянная.

Согласно сказанному, надо показать, что если $g = o(cf)$, то $g = o(f)$. Действительно, если $g = o(cf)$, то $g = \varepsilon cf$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Положим $\varepsilon_1 = c\varepsilon$, тогда $g = \varepsilon_1 f$, где, очевидно, $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$ и, значит, $g = o(f)$. □

В заключение отметим, что сказанное об использовании символов o и O не исключает, конечно, того, что отдельные формулы с этими символами могут оказаться справедливыми не только при чтении слева направо, но и справа налево; так, формула (8.31) при $c \neq 0$ верна и при чтении справа налево.

Упражнения. Доказать, что если α — бесконечно малая при $x \to x_0$, то при $x \to x_0$:

2. $o(\alpha^2) = o(\alpha)$,
3. $o(\alpha) \cdot O(\alpha) = o(\alpha^2)$,
4. $o(\alpha) + o(\alpha) = o(\alpha)$,
5. $\alpha \cdot o(\alpha) = o(\alpha^2)$,
6. $o(\alpha + \alpha^2) = o(\alpha)$,
7. $o^2(\alpha) = o(\alpha^2)$,
8. $cO(\alpha) + o(\alpha) = O(\alpha)$ (c — постоянная)
9. $o(o(\alpha)) = o(\alpha)$,
10. $O(O(\alpha)) = O(\alpha)$,
11. Если $|\beta| \leqslant o(\alpha)$, то $\beta = o(\alpha)$.

12. Пусть $\lim\limits_{t \to b} f(t) = a$, причем $f(t) \neq a$ при $t \neq b$ в некоторой окрестности точки $t = b$. Доказать, что тогда, если $\varphi(x) = o[\psi(x)]$ при $x \to a$, то $\varphi[f(t)] = o\{\psi[f(t)]\}$ при $t \to b$; а если $\varphi(x) = O[\psi(x)]$ при $x \to a$, то $\varphi[f(t)] = O\{\psi[f(t)]\}$ при $t \to b$.

8.3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Если функция $f(x)$ заменяется для каких-либо целей через $g(x)$, то разность $f(x) - g(x)$ называется *абсолютной погрешностью*, а отношение $\frac{f(x) - g(x)}{f(x)}$ — *относительной погрешностью* сделанной замены. Если изучается поведение функции $f(x)$ при $x \to x_0$, то часто целесообразно заменить ее функцией $g(x)$ такой, что 1) функция $g(x)$ в определенном смысле более простая, чем функция $f(x)$; 2) абсолютная погрешность стремится к нулю при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = 0.$$

В этом случае говорят, что $g(x)$ приближает или аппроксимирует функцию $f(x)$ вблизи точки x_0. Таким свойством обладают например, все бесконечно малые при $x \to x_0$ функции f и g.

Ниже будет показано, что среди них лишь те, которые эквивалентны между собой:

$$g(x) \sim f(x), \quad x \to x_0,$$

обладают тем свойством, что не только абсолютная погрешность $f(x) - g(x)$, но и относительная $\frac{f(x) - g(x)}{f(x)}$ стремится к нулю при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{f(x)} = 0.$$

В этом смысле функции, эквивалентные заданной, приближают ее лучше, чем другие функции даже того же порядка, что и данная при $x \to x_0$.

Например, функции x, $\frac{1}{2}x$, $2x$, $10x$ являются бесконечно малыми при $x \to 0$, так же как и $\sin x$, а поэтому абсолютные погрешности при замене $\sin x$ каждой из них стремятся к нулю при $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} (\sin x - x) = \lim_{x \to 0} \left(\sin x - \frac{1}{2} x\right) = \lim_{x \to 0} (\sin x - 2x) = \\ = \lim_{x \to 0} (\sin x - 10x) = 0.$$

Но лишь одна из всех перечисленных функций, а именно $g(x) = x$ обладает тем свойством, что относительная погрешность при замене $\sin x$ этой функцией будет стремиться к нулю при $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x}{\sin x}\right) = 0.$$

Стремление относительной погрешности $\frac{f(x) - g(x)}{f(x)}$ к нулю при $x \to x_0$ можно записать, используя символ «o малое»:

$$f(x) - g(x) = o(f(x)), \quad x \to x_0.$$

Сформулируем высказанное характеристическое свойство эквивалентных функций в виде теоремы.

Теорема 1. *Для того чтобы функции $f = f(x)$ и $g = g(x)$ были эквивалентными при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы при $x \to x_0$ выполнялось условие*

$$f(x) = g(x) + o(g(x)). \tag{8.32}$$

Доказательство необходимости. Пусть $f \sim g$ при $x \to x_0$, т. е.

$$f(x) = \varphi(x) g(x),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$. Тогда

$$f(x) - g(x) = \varphi(x) g(x) - g(x) = [\varphi(x) - 1] g(x) = \varepsilon(x) g(x),$$

где $\varepsilon(x) = \varphi(x) - 1 \to 0$ при $x \to x_0$, т. е. имеем (8.32).

Доказательство достаточности. Пусть выполняется условие (8.32), т. е.

$$f(x) = g(x) + \varepsilon(x) g(x),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Тогда

$$f(x) = [1 + \varepsilon(x)] g(x) = \varphi(x) g(x),$$

где $\varphi(x) = 1 + \varepsilon(x) \to 1$ при $x \to x_0$, т. е. $f \sim g$ при $x \to x_0$. □

Итак, мы показали, что функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда относительная погрешность $\frac{f(x) - g(x)}{f(x)}$ $\left(\text{или } \frac{f(x) - g(x)}{g(x)}\right)$ стремится к нулю при $x \to x_0$.

Следствие. *Пусть* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g}{f} = c \neq 0$, *где* c — *постоянная. Тогда* $g \sim cf$ *и* $g = cf + o(f)$ *при* $x \to x_0$.

Доказательство. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g}{f} = c \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{cf}{g} = 1$, и, значит, $g \sim cf$ при $x \to x_0$. Отсюда по теореме 1 имеем $g = cf + o(cf)$, а значит (см. конец п. 8.2), $g = cf + o(f)$. □

Теорема 2. *Пусть* $f(x) \sim f_1(x)$ *и* $g(x) \sim g_1(x)$ *при* $x \to x_0$. *Тогда если существует*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \tag{8.33}$$

то существует и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, *причем*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \tag{8.34}$$

Доказательство. Условие $f \sim f_1$ при $x \to x_0$ означает, что

$$f(x) = \varphi(x) f_1(x),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$, а условие $g \sim g_1$ при $x \to x_0$ — что $g(x) = \psi(x) g_1(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = 1$. Кроме того, поскольку существует предел (8.33), функция $f_1(x)/g_1(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и, следовательно, всюду в этой окрестности выполняется неравенство $g_1(x) \neq 0$. Поскольку $g(x) = \psi(x) g_1(x)$ и, очевидно (почему?), $\psi(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то и функция $g(x)$ обладает тем же свойством. Поэтому функция $f(x)/g(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Теперь имеем:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) f_1(x)}{\psi(x) g_1(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x)} \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \quad \square$$

Поскольку обе части равенства (8.34) равноправны, то из доказанной теоремы следует, что предел, стоящий в левой части, существует тогда и только тогда, когда существует предел в правой части, причем в случае их существования они совпадают. Это делает очень удобным применение теоремы 2 на практике: ее можно использовать для вычисления пределов, не зная заранее, существует или нет рассматриваемый предел.

Упражнение 13. Доказать равенство (8.34) в случае, когда предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ равен ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

8.4. МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ ФУНКЦИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПРЕДЕЛОВ

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — функции, определенные в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Если функция $\beta(x)$ представима в виде

$$\beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x)), \quad x \to x_0,$$

то функция $\alpha(x)$ называется *главной частью функции* $\beta(x)$ при x стремящемся к $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Примеры. 1. Главная часть функции $\sin x$, при $x\to 0$ равна x, ибо $\sin x = x + o(x)$ при $x\to 0$.

2. Если $P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, то функция $a_n x^n$ является главной частью многочлена $P_n(x)$ при $x\to\infty$, ибо $P_n(x) = a_n x^n + o(x^n)$ при $x\to\infty$.

Если задана функция $\beta(x)$, то ее главная часть не определяется однозначно: любая функция $\alpha(x)$, эквивалентная $\beta(x)$, является ее главной частью. Например, пусть $\beta = x + x^2 + x^3$. Поскольку, с одной стороны $x^2 + x^3 = o(x)$ при $x\to 0$, то $\beta = x + o(x)$ при $x\to 0$, а с другой стороны, $x^3 = o(x + x^2)$, при $x\to 0$, то $\beta = x + x^2 + o(x + x^2)$ при $x\to 0$. В первом случае главной частью можно считать $\alpha = x$, во втором $\alpha = x + x^2$. Однако, если задаваться определенным видом главной части, то при его разумном выборе можно добиться того, что главная часть указанного вида будет определена однозначно.

В частности, справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *Если функция $\beta(x)$ обладает при $x\to x_0$, главной частью вида $A(x-x_0)^k$, $A\neq 0$,* где *A и k — постоянные, то среди всех главных частей такого вида она определяется единственным образом.*

Действительно, пусть, при $x\to x_0$,

$$\beta(x) = A(x-x_0)^k + o((x-x_0)^k),\quad A\neq 0,$$

и

$$\beta(x) = A_1(x-x_0)^{k_1} + o((x-x_0)^{k_1}),\quad A_1\neq 0.$$

Тогда $\beta(x)\sim A(x-x_0)^k$; $\beta(x)\sim A_1(x-x_0)^{k_1}$ при $x\to x_0$; поэтому $A(x-x_0)^k \sim A_1(x-x_0)^{k_1}$, т. е.

$$\lim_{x\to y_0}\frac{A(x-x_0)^k}{A_1(x-x_0)^{k_1}} = 1,$$

что справедливо лишь в случае $A = A_1$ и $k = k_1$. $\square$

Понятие главной части функции полезно при изучении бесконечно малых и бесконечно больших и с успехом используется при решении разнообразных задач математического анализа. Довольно часто удается бесконечно малую сложного аналитического вида заменить, в окрестности данной точки, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, более простой (в каком-то смысле) функцией. Например, если $\beta(x)$ удается представить в виде $\beta(x) = A(x-x_0)^k + o((x-x_0)^k)$, то это означает, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $(x-x_0)^k$ при $x\to x_0$, бесконечно малая $\beta(x)$ ведет себя в окрестности точки x как степенная функция $A(x-x_0)^k$.

Покажем на примерах, как метод выделения главной части бесконечно малых применяется к вычислению пределов функций. При этом будем широко использовать полученные нами соотношения эквивалентности (8.26).

Пусть требуется найти предел (а значит, и доказать, что он существует):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x-5x^3}{\sin 2x+\operatorname{tg}^2 x+(e^x-1)^5}.$$

Используя доказанную выше (см. (8.26)) эквивалентность $\ln(1+u)\sim u$ при $u\to 0$, имеем $\ln(1+x+x^2)\sim x+x^2$ при $x\to 0$, поэтому (см. теорему 1) $\ln(1+x+x^2)=x+x^2+o(x+x^2)$. Однако $o(x+x^2)=o(x)$ (почему?) и $x^2=o(x)$ при $x\to 0$, а следовательно,

$$\ln(1+x+x^2)=x+o(x) \text{ при } x\to 0.$$

Далее, $\arcsin 3x\sim 3x$, вследствие чего

$$\arcsin 3x=3x+o(3x)=3x+o(x).$$

Очевидно также, что

$$5x^3=o(x).$$

Из асимптотического равенства $\sin 2x\sim 2x$, получим

$$\sin 2x=2x+o(2x)=2x+o(x),$$

из $\operatorname{tg}^2 x\sim x^2$ —

$$\operatorname{tg}^2 x=x^2+o(x^2)=o(x),$$

а из $(e^x-1)^5\sim x^5$ —

$$(e^x-1)^5=x^5+o(x^5)=o(x).$$

Все эти соотношения выполняются при $x\to 0$. Теперь имеем

$$\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x-5x^3=$$
$$=x+o(x)+3x+o(x)-o(x)=4x+o(x),$$
$$\sin 2x+\operatorname{tg}^2 x+(e^x-1)^5=2x+o(x)+o(x)=2x+o(x),$$

поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x-5x^3}{\sin 2x+\operatorname{tg}^2 x+(e^x-1)^5}=\lim_{x\to 0}\frac{4x+o(x)}{2x+o(x)}.$$

Но $4x+o(x)\sim 4x$, а $2x+o(x)\sim 2x$ при $x\to 0$, и, значит, по теореме 2,

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x+o(x)}{2x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x}=2.$$

Таким образом, искомый предел существует и равен 2.

При вычислении пределов функций с помощью метода выделения главной части следует иметь в виду, что в случаях, не рассмотренных в п. 8.3, вообще говоря, нельзя бесконечно малые заменять эквивалентными им. Так, например, при отыскании предела выражения $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$ было бы ошибкой заменить функцию $\sin x$ эквивалентной ей при $x\to 0$ функцией x. Естественный метод решения подобных задач будет дан в 13.4.

Для отыскания пределов выражений вида $u(x)^{v(x)}$ целесообразно находить предел их логарифмов. Рассмотрим подобный пример. Найдем предел $\lim\limits_{x\to 0} \cos^{1/x^2} 2x$. Замечая, что

$$\cos^{1/x^2} 2x = e^{\ln \cos^{1/x^2} 2x}, \tag{8.35}$$

видим, что следует вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \ln \cos^{1/x^2} 2x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\sin^2 2x)}{x^2}.$$

Так как $\ln(1-\sin^2 2x) \sim -\sin^2 2x$, то отсюда, согласно теореме 2 этого параграфа, имеем

$$\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\sin^2 2x)}{x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2};$$

но $\sin^2 2x \sim (2x)^2$, а поэтому

$$-\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{4x^2}{x^2} = -2;$$

таким образом,

$$\lim_{x\to 0} \ln \cos^{1/x^2} 2x = -2.$$

В силу непрерывности показательной функции из (8.35) имеем

$$\lim_{x\to 0} \cos^{1/x^2} 2x = e^{\lim\limits_{x\to 0} \ln \cos^{1/x^2} 2x} = \frac{1}{e^2}.$$

Способ вычисления пределов с помощью выделения главной части функции является очень удобным, простым и вместе с тем весьма общим методом. Некоторое затруднение в его применении связано пока с тем, что еще нет достаточно общего способа выделения главной части функции. Это затруднение будет устранено в дальнейшем (см. § 13).

Упражнения. Вычислить пределы:

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - \sin^2 x}{x^2 + \ln(1+3x)}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ $(a,\ b > 0;\ a,\ b \neq 1)$.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

18. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(1+e^{\alpha x})}{\ln(1+e^{\beta x})}$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$.

19. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$. Указание. Полезно сделать замену $x = \dfrac{\pi}{4} - y$.

20. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$.

21. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

22. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + 2\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

23. $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$.

§ 9. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

9.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Определение 1. *Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и пусть x — произвольная точка этой окрестности. Если отношение*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

имеет предел при $x \to x_0$, то этот предел называется производной функции f в точке x_0 или, что то же, при $x=x_0$ и обозначается $f'(x_0)$:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{9.1}$$

Если ввести обозначение $x-x_0=\Delta x$, то определение (9.1) запишется в виде

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Полагая $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y$, опуская обозначения аргумента и обозначая производную просто через y', получим еще одну запись определения производной:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если для некоторого значения x_0 существуют пределы

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty, \text{ или } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty,$$

то говорят, что при $x=x_0$ существует *бесконечная производная*, равная соответственно $+\infty$ или $-\infty$. Подчеркнем, что под бесконечной производной понимается только бесконечность определенного знака.

В дальнейшем под выражением «функция имеет производную» мы будем понимать всегда наличие конечной производной, если не оговорено противное.

Определение 2. *Если функция f определена в некоторой правосторонней (левосторонней) окрестности точки x_0 и существует конечный или бесконечный (определенного знака) предел $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $\left(\lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)$, то он называется соответственно конечной или бесконечной правой (левой) производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$ (или $f'_-(x_0)$).*

Правая и левая производные называются односторонними производными.

Из теоремы об односторонних пределах (см. п. 4.5) следует, что функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ существуют и $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$. В этом случае $f'(x_0)= f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

Если функция $f(x)$ определена на некотором промежутке и в каждой его точке существует производная (причем под производной в его конце, который принадлежит промежутку, естественно, понимается соответствующая односторонняя производная), то она, очевидно, также является функцией, определенной на данном промежутке; ее обозначают через $f'(x)$. Если $y=f(x)$, то вместо $f'(x_0)$ пишут также $y'|_{x=x_0}$

Вычисление производной от функции называется *дифференцированием*.

Примеры. 1. $y=c$ (c — постоянная).

Так как $\Delta y=c-c=0$, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$ и, таким образом

$$c'=0.$$

2. $y=\sin x$. Имеем

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

и поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x.$$

Таким образом

$$(\sin x)'=\cos x.$$

3. $y=\cos x$. Так как

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos(x)=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

то будем иметь

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x.$$

Таким образом,

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

$y=a^x$. Имеем $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^x-1)$, а поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x},$$

откуда, в силу формулы (8.17), получаем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

Таким образом $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности,

$$(e^x)' = e^x.$$

Последнее равенство показывает, что число e обладает замечательным свойством: *показательная функция с основанием e имеет производную, совпадающую с самой функцией*. Этим и объясняется то обстоятельство, что в математическом анализе в качестве основания степени и основания логарифмов используется преимущественно число e. Это очень удобно, так как упрощает вычисления.

5. $y = x^n$, n — натуральное число. Используя правило возведения бинома в степень, находим

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-1}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}.$$

Так как при $\Delta x \to 0$ все слагаемые правой части, содержащие множитель Δx в степени с натуральным показателем, стремятся к нулю, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$; таким образом,

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

В дальнейшем мы увидим, что эта формула справедлива и тогда, когда n — произвольное действительное число.

9.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Определение 3. *Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, называется дифференцируемой при $x = x_0$, если ее приращение в этой точке*

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad \Delta x = x - x_0,$$

представимо в виде

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x), \tag{9.2}$$

где A — постоянная) и $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$* при $\Delta x \to 0$.

Линейная функция $A\,\Delta x$ (от Δx) называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$ или, короче, dy.

Таким образом,

$$\Delta y = dy + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0, \tag{9.3}$$

$$dy = A\,\Delta x. \tag{9.4}$$

---

*) При фиксированном x_0 A есть некоторое число, не зависящее от Δx; конечно, при изменении точки x_0 число A, вообще говоря, меняется.

Заметим, что дифференциал $dy = A\,\Delta x$, как и всякая линейная функция, определен для любого значения Δx: $-\infty < \Delta x < +\infty$, в то время как приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, естественно, можно рассматривать только для таких Δx, для которых $x_0 + \Delta x$ принадлежит области определения функции f.

Если $A \neq 0$, т. е. если $dy \not\equiv 0$, то дифференцируемость функции в точке x_0 означает, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем приращение аргумента Δx, приращение функции Δy является линейной функцией от Δx. Используя терминологию п. 8.4, можно сказать, что главная часть приращения функции Δy в точке x_0 является линейной функцией относительно Δx; при этом приращение Δy и дифференциал dy — эквивалентные бесконечно малые при $\Delta x \to 0$ (см. п. 8.3).

Если же $A = 0$, т. е. $dy \equiv 0$, то $\Delta y = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Таким образом, при $A = 0$ приращение Δy является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx, когда $\Delta x \to 0$.

Для большей симметрии записи дифференциала приращение Δx обозначают dx и называют его дифференциалом независимого переменного. Таким образом, дифференциал можно записать в виде

$$dy = A\,dx.$$

Пример. Найдем дифференциал функции $y = x^3$.

В этом случае

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\,\Delta x + 3x\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

При $\Delta x \to 0$ главная линейная часть выражения, стоящего справа, равна $3x^2\,\Delta x$; поэтому $dy = 3x^2\,dx$.

Пусть $f(x_0) = y_0$. Подставив в (9.3) значения $\Delta y = f(x) - y_0$, $\Delta x = x - x_0$, $dy = A\,(x - x_0)$, получим

$$f(x) = y_0 + A\,(x - x_0) + o\,(x - x_0), \qquad x \to x_0. \tag{9.5}$$

Итак, если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $x - x_0$, вблизи x_0, она равна линейной функции; иначе говоря, в этом случае функция f в окрестности точки x_0 ведет себя «почти как линейная функция»

$$y_0 + A\,(x - x_0),$$

причем погрешность при замене функции f этой линейной функцией будет тем меньше, чем меньше разность $x - x_0$, и, более того, отношение этой погрешности к разности $x - x_0$ стремится к нулю при $x \to x_0$.

Если функция f дифференцируема в каждой точке некоторого интервала, то ее дифференциал является функцией двух переменных — точки x и переменной dx:

$$dy = A\,(x)\,dx.$$

Выясним теперь связь между дифференцируемостью в точке и существованием производной в той же точке.

Теорема 1. *Для того чтобы функция f была дифференцируемой в некоторой точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную; при этом*

$$dy = f'(x_0)\,dx. \tag{9.6}$$

Доказательство необходимости. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, т. е. $\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

Поэтому производная $f'(x_0)$ существует и равна A. Отсюда $dy = f'(x_0)\,dx$.

Доказательство достаточности. Пусть существует производная $f'(x_0)$, т. е. существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x),$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$, и для $\Delta x \neq 0$

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\,\Delta x. \tag{9.7}$$

Так как $\varepsilon(\Delta x)\,\Delta x = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ выполнение равенства (9.7) и означает дифференцируемость функции f в точке x_0. ☐

Подчеркнем, что в теореме 1 речь идет о конечной производной.

Таким образом, дифференцируемость функции $f(x)$ в точке x_0 равносильна существованию в этой точке конечной производной $f'(x_0)$.

Из доказанного следует, что коэффициент A, участвующий в определении дифференциала (см. (9.4)), определен однозначно, а именно $A = f'(x_0)$; тем самым и дифференциал функции в данной точке определен однозначно. Это, впрочем, вытекает также из леммы п. 8.4 о единственности главной части вида $A(x-x_0)^k$ бесконечно малой функции.

Из формулы (9.6) находим $y' = \frac{dy}{dx}$. Правая часть представляет собой дробь, числитель которой — дифференциал функции, а знаменатель — дифференциал аргумента.

Формула (9.6) позволяет находить дифференциалы функций, если известны их производные. Так, например, используя производные, найденные в п. 9.1. получаем:

$$dc = 0 \ (c \text{ — постоянная}), \quad d\cos x = -\sin x\,dx,$$
$$d\sin x = \cos x\,dx, \quad da^x = a^x \ln a\,dx,$$

в частности, $de^x = e^x\,dx$,

$$dx^n = nx^{n-1}\,dx \ (n \text{ — натуральное число}).$$

В заключение выясним связь между дифференцируемостью и непрерывностью в данной точке.

Теорема 2. *Если функция f дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в этой точке.*

Следствие. *Если функция в некоторой точке имеет производную, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, т. е. в этой точке $\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} o(\Delta x) = 0,$$

что и означает непрерывность функции f при $x = x_0$. $\square$

Следствие непосредственно вытекает из теорем 1 и 2.

Обратим внимание на то, что если функция имеет в точке бесконечную производную, то она может быть разрывной в этой точке.

Упражнение 1. Построить пример функции, имеющей в некоторой точке бесконечную производную и разрывную в этой точке.

Заметим, что утверждение, обратное теореме 2, неверно, т. е. из непрерывности функции f в данной точке не следует ее дифференцируемость или, что равносильно (см. теорему 1), существование производной в этой точке.

Приведем примеры, подтверждающие это.

1. Функция $f(x) = |x|$, очевидно, непрерывна в точке $x = 0$ (как и во всех других), но не имеет в этой точке производной.

В самом деле, при $x \geqslant 0$ имеем $y = |x| = x$, поэтому для точки $x_0 = 0$ получим $\Delta y = \Delta x$. Следовательно,

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Аналогично, при $x \leqslant 0$ имеем $y = |x| = -x$, поэтому для точки $x_0 = 0$ в этом случае получим $\Delta y = -\Delta x$. Следовательно,

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

Тем самым доказано, что функция $f(x) = |x|$ не имеет при $x = 0$ производной, однако в этой точке существуют как левая, так и правая производные.

Отметим еще, что при $x > 0$ имеет место равенство $(|x|)' = x' = 1$, а при $x < 0$ соответственно $(|x|)' = (-x)' = -1$; поэтому для любого $x \neq 0$ справедлива формула

$$|x|' = \operatorname{sign} x.$$

Следующий пример показывает, что у функции может не быть в точке непрерывности никакой односторонней производной.

2. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{при} \quad x\neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x=0 \end{cases}$$

(рис. 29). Тогда в точке $x=0$ имеем $\Delta y=\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}$, откуда $|\Delta y|\leqslant|\Delta x|$, и поэтому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, т. е. рассматриваемая функция непрерывна при $x=0$. Вместе с тем $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}$, и поскольку $\sin\frac{1}{x}$ не имеет в точке $x=0$ предела ни слева, ни справа (см. пример 2 в п. 4.4), то у функции $f(x)$ не существует односторонних производных при $x=0$.

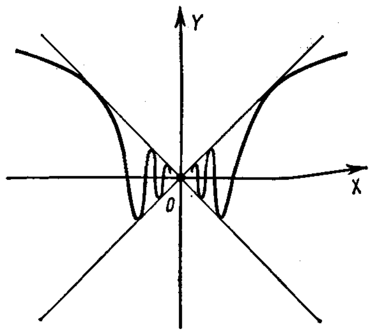


Рис. 29

Упражнение 2. Ввести понятие дифференцируемости функции справа (слева) в данной точке и доказать, что дифференцируемость справа (слева) в данной точке эквивалентна существованию в этой точке производной справа (слева).

Если функция f имеет производную в каждой точке некоторого промежутка (дифференцируема в каждой точке этого промежутка), то говорят, что функция f *имеет производную*, или что она *дифференцируема, на* указанном *промежутке*.

9.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Понятия производной и дифференциала функции в данной точке связаны с понятием касательной к графику функции в этой точке. Чтобы выяснить эту связь, определим прежде всего касательную.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале (a, b) и непрерывна в точке $x_0\in(a, b)$. Пусть $y_0=f(x_0)$, $M_0=(x_0, y_0)$, $x_0+\Delta x\in(a, b)$, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, $M=(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$.

Проведем секущую M_0M (рис. 30). Она имеет уравнение

$$y=k(\Delta x)(x-x_0)+y_0, \tag{9.8}$$

где

$$k(\Delta x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{9.9}$$

Покажем, что при $\Delta x\to 0$ расстояние $|M_0M|$ от точки M_0 до точки M стремится к нулю (в этом случае говорят, что точка M

стремится к точке M_0 и пишут $M \to M_0$). Действительно, в силу непрерывности функции f при $x = x_0$ имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Следовательно, при $\Delta x \to 0$

$$|M_0M| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0.$$

Определение 4. *Если существует предел* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = k_0$, *то прямая, уравнение которой*

$$y = k_0(x - x_0) + y_0, \tag{9.10}$$

получается из уравнения $y = k(\Delta x)(x - x_0) + y_0$ *при* $\Delta x \to 0$, *(рис. 30) называется (наклонной) касательной к графику функции* f *в точке* (x_0, y_0).

Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \infty$, *то прямая (рис. 31), уравнение которой*

$$x = x_0 \tag{9.11}$$

получается при $\Delta x \to 0$ *из уравнения секущей, записанного в виде* $\frac{y}{k(\Delta x)} = x - x_0 + \frac{y_0}{k(\Delta x)}$, *называется (вертикальной) касательной к графику функции* f *в точке* (x_0, y_0).

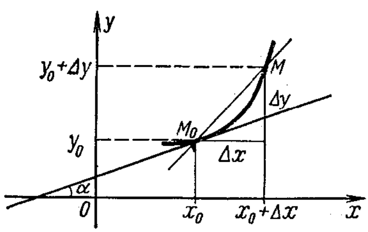


Рис. 30

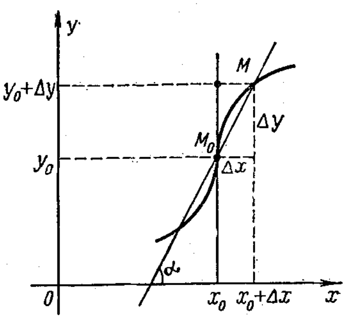


Рис. 31

Прямые (9.10) в случае конечного предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x)$ и (9.11) в случае, когда этот предел бесконечен, называются *предельными положениями прямой* (9.8). В силу этого данное выше определение касательной к графику функции можно перефразировать следующим образом.

Предельное положение секущей M_0M *при* $\Delta x \to 0$, *или, что то же, при* $M \to M_0$, *называется касательной к графику функции* f *в точке* M_0.

Заметим, теперь, что в силу равенства (9.9) существование конечного предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ означает существование конечной производной $f'(x_0)=k$. Следовательно, если у функции f в точке x_0 существует производная, то уравнение касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0, \tag{9.12}$$

где $y_0=f(x_0)$. Если же $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$, то, в силу (9.9), $\lim\limits_{\Delta x\to 0}k(\Delta x)=\infty$ и, следовательно, (см. (9.11)), уравнением касательной будет

$$x=x_0.$$

Как известно, из аналитической геометрии, коэффициент $f'(x_0)$ в уравнении (9.12) равен тангенсу угла (см. рис. 30), который рассматриваемая прямая образует с положительным направлением оси Ox:

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha,$$

т. е. производная функции в некоторой точке равна тангенсу угла между касательной в соответствующей точке графика функции и осью абсцисс.

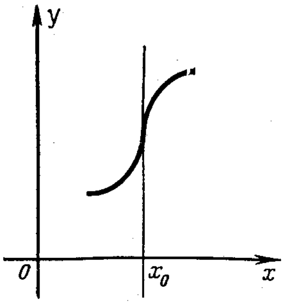


Рис. 32

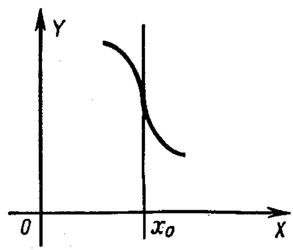


Рис. 33

Первое слагаемое правой части уравнения (9.12), т. е. выражение $f'(x_0)(x-x_0)=f'(x_0)\Delta x$, $\Delta x=x-x_0$, является дифференциалом dy функции f в точке x_0. Следовательно, в силу равенства (9.12),

$$y-y_0=dy,$$

где y — текущая ордината касательной. Таким образом, дифференциал функции в данной точке равен п р и р а щ е н и ю о р д и н а т ы к а с а т е л ь н о й в соответствующей точке графика функции.

З а м е ч а н и е. Если в точке x_0 существует бесконечный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$, то он может быть равным $+\infty$ или $-\infty$. В этом случае при $x=x_0$ существует бесконечная производная $y'=+\infty$ или $y'=-\infty$, и график функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 имеет вид, схематически изображенный на рис. 32 и 33.

Возможен также и случай, когда предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ не является бесконечностью определенного знака и, следовательно, в этой точке не существует ни конечной, ни бесконечной производной (это может, например, случиться, если в точке x_0 существуют односторонние бесконечные производные разного знака). Тогда в окрестности точки x_0 график функции имеет вид, схематически показанный на рис. 34 и 35.

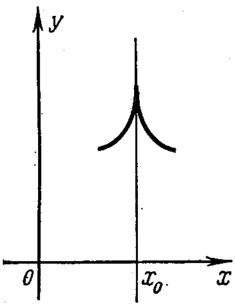


Рис. 34

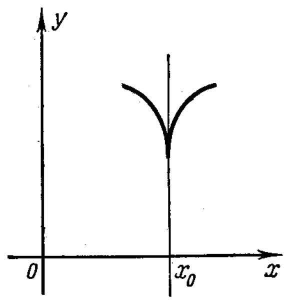


Рис. 35

Согласно сказанному выше, при условии $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ в точке $(x_0, f(x_0))$ всегда существует вертикальная касательная к графику, независимо от того, имеет функция при $x = x_0$ бесконечную производную или нет.

Возникает вопрос, не естественно ли считать, что функция имеет в данной точке бесконечную производную, если в этой точке существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, не являющийся обязательно бесконечностью определенного знака. Такое определение бесконечной производной имело бы некоторые преимущества при формулировке связи между существованием производной и наличием касательной к графику. Однако, как мы увидим в дальнейшем (см. § 11), ряд теорем перестает быть справедливым при таком понимании бесконечной производной.

Пример. Найдем касательную к параболе $y = x^2$ в точке $(1;\ 1)$.

Согласно п. 9.1 (см. пример 5), $y' = 2x$, поэтому $y'|_{x=1} = 2$. В силу формулы (9.12), искомая касательная имеет уравнение $y = 2(x-1)+1$, т. е. $y = 2x - 1$.

Если функция f дифференцируема в точке x_0, то, подставляя в формулу (9.5) $A = f'(x_0)$ (см. теорему 1 настоящего параграфа), имеем

$$f(x) = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \qquad x \to x_0,$$

и, значит, согласно (9.12) ($y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$) получим

$$f(x) - y_{\text{кас}} = o(x - x_0), \qquad x \to x_0.$$

Таким образом, наклонная касательная к графику функции обладает тем свойством, что разность ординат графика и этой касательной есть величина бесконечно малая более высокого порядка, при $x \to x_0$, по сравнению с приращением аргумента.

Обратно, если существует невертикальная прямая

$$y_{\text{пр}} = A(x - x_0) + y_0, \tag{9.13}$$

проходящая через точку (x_0, y_0), и такая, что

$$f(x) - y_{\text{пр}} = o(x - x_0), \qquad x \to x_0, \tag{9.14}$$

то эта прямая является касательной к графику функции в точке (x_0, y_0). Действительно, в этом случае

$$f(x) - [A(x - x_0) + y_0] = o(x - x_0),$$

т. е.

$$\Delta y = f(x) - y_0 = A(x - x_0) + o(x - x_0), \qquad x \to x_0,$$

следовательно, функция f дифференцируема в точке x_0 (см. (9.2)) и $A = f'(x_0)$ (см. теорему 1), т. е. указанная прямая совпадает с касательной (9.12).

Таким образом, *условие* (9.14) *необходимо и достаточно для того, чтобы прямая* (9.13) *являлась наклонной касательной к графику функции* $f(x)$ *в точке* (x_0, y_0). Отсюда, в частности, следует, что если существует прямая (9.13), обладающая свойством (9.14), то она единственна (последнее вытекает, например, из того, что дифференциал функции единственен, или из того, что касательная к графику функции в данной точке единственна.

9.4. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Воспользуемся, как и выше, обозначениями $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)$. Пусть для определенности $\Delta x > 0$. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, равное изменению переменной y на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$, отнесенному к единице измерения переменной x, естественно назвать *величиной средней скорости* изменения y на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ относительно x. При стремлении Δx к нулю, т. е. при стягивании отрезка $[x_0, x_0 + \Delta x]$ к точке x_0, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ дает величину средней скорости изменения y относительно x во все меньшем и меньшем отрезке, содержащем точку x_0. Все сказанное, конечно, справедливо и при $\Delta x < 0$ для отрезка $[x_0 + \Delta x, x_0]$.

Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, если он существует, т. е. производную $f'(x_0)$, естественно поэтому назвать *величиной скорости* изменения переменной y относительно переменной x в точке x_0.

Заметим, что если в точке x_0 существует производная $f'(x_0)$, то, рассматривая предел средних скоростей изменения y относительно x на отрезках $[x_0-\Delta x,\ x_0+\Delta x]$ $(\Delta x>0)$, содержащих точку x_0 внутри себя в качестве центра, при стягивании их к точке x_0 (при $\Delta x\to 0$) мы придем в пределе к тому же значению величины скорости изменения y относительно x в точке x_0, т. е. к $f'(x_0)$. Действительно, величина средней скорости изменения переменной y относительно x на отрезке $[x_0-\Delta x,\ x_0+\Delta x]$ равна $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$ (частному от деления изменения функции на длину отрезка, на котором произошло это изменение); отсюда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}\right]=f'(x_0).$$

Интересно заметить, что разностное отношение $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ в известном смысле лучше приближает значение производной f' в точке x, чем $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (см. об этом в п. 60.3).

На интерпретации производной как величины скорости изменения одной величины относительно другой и основано применение производной к изучению физических явлений.

Применение же дифференциала основано на том, что замена приращения функции ее дифференциалом позволяет заменить л ю б у ю дифференцируемую в точке x_0 функцию линейной функцией в достаточно малой окрестности точки x_0, т. е. считать, что процесс изменения зависимой переменной «в малом» происходит линейно относительно аргумента. Иначе говоря, можно считать, что изменение функции прямо пропорционально изменению аргумента или, как говорят, что упомянутый процесс «в малом» происходит равномерно. При такой замене получающаяся погрешность оказывается бесконечно малой более высокого порядка, чем приращение аргумента.

П р и м е р ы. 1. Пусть $s=s(t)$ — закон движения материальной точки*) (рис. 36); s — длина пути, отсчитываемая вдоль траектории от некоторой начальной точки M_0; t — время. Пусть M — положение точки в момент времени t, а M' — в момент $t+\Delta t$ и Δs — длина пути от M до M', т. е. $\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)$.

---

*) Не следует путать закон движения точки с уравнением ее траектории, которое имеет вид $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор движущейся точки.

Отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ называется в механике *величиной средней скорости* движения на участке от M до M', а $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$ — величиной скорости в точке M или *величиной мгновенной скорости* в момент времени t; таким образом, $v = \frac{ds}{dt}$.

По определению дифференциала, $ds = v\,dt$; следовательно, дифференциал пути равен расстоянию, которое прошла бы точка за промежуток времени от момента t до $t + \Delta t$, если бы она двигалась равномерно со скоростью, равной мгновенной скорости точки в момент t. Величина же Δs действительного перемещения точки равна $\Delta s = ds + o(\Delta t)$.

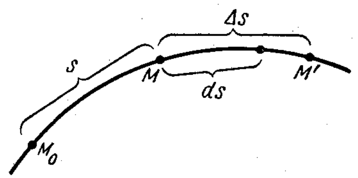


Рис. 36

Мы видим, что с точки зрения механики замена Δs через ds означает, что мы считаем движение на рассматриваемом участке равномерным (в смысле величины скорости *)).

2. Пусть $q = q(t)$ — количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника; t — время; Δt — некоторый промежуток времени; $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$ — количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$. Тогда $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ называется *средней силой тока* за промежуток времени Δt и обозначается через $I_{ср}$, а предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} I_{ср} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$ называется *силой тока в данный момент времени* t или *мгновенным током* и обозначается I. Таким образом, $I = \frac{dq}{dt}$. Дифференциал $dq = I\,\Delta t$ равен количеству электричества, протекшего через поперечное сечение проводника за момент времени Δt, если сила тока была бы постоянной и равной силе тока в момент t. Как всегда, $\Delta q - dq = o(\Delta t)$.

3. Пусть дан неоднородный стержень **) длины l и пусть $m = m(x)$ — масса части стержня длины x, $0 \leqslant x \leqslant l$, отмеряемой от одного фиксированного конца (рис. 37). Тогда $\Delta m = m(x + \Delta x) - m(x)$ — масса части стержня, ограниченной точками, расположенными соответственно на расстоянии x и $x + \Delta x$ от указанного конца. Величина $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ называется *средней линейной плотностью*

---

*) Следует иметь в виду, что скорость — вектор и потому характеризуется не только величиной, но и направлением.

**) Стержень называется однородным, если два любых его участка одинаковой длины имеют одинаковую массу, и неоднородным — в противном случае.

стержня на указанном участке и обозначается $\rho_{\text{ср}}$. Предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\rho_{\text{ср}}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}$ называется *линейной плотностью* стержня в данной точке и обозначается ρ. Таким образом,

$$\rho=\frac{dm}{dx}.$$

Если плотность ρ постоянна, то стержень будет однородным. Для произвольного, вообще говоря, неоднородного стержня дифференциал $dm=\rho\,\Delta x$ равен массе однородного стержня длины Δx с постоянной плотностью ρ, равной плотности рассматриваемого стержня в данной точке.

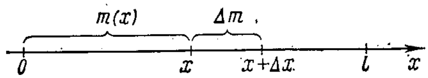


Рис. 37

Мы видим на этом примере, что, интерпретируя производную как величину скорости, мы должны понимать это в широком смысле слова. Например, плотность стержня тоже «скорость», а именно — скорость изменения массы с изменением длины.

9.5. ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ, СВЯЗАННЫЕ С АРИФМЕТИЧЕСКИМИ ДЕЙСТВИЯМИ НАД ФУНКЦИЯМИ

Все функции, рассматриваемые в этом пункте, предполагаются определенными в некоторой окрестности точки x_0.

1°. *Пусть функции* $y_1=f_1(x)$ *и* $y_2=f_2(x)$ *имеют производные в точке* x_0. *Тогда их сумма* $y_1+y_2=f_1(x)+f_2(x)$ *также имеет в точке* x_0 *производную и*

$$(y_1+y_2)'=y_1'+y_2'. \tag{9.15}$$

Таким образом, производная суммы функций равна сумме их производных.

Действительно, пусть $y=f_1(x)+f_2(x)$, $\Delta y_1=f_1(x_0+\Delta x)-f_1(x_0)$, $\Delta y_2=f_2(x_0+\Delta x)-f_2(x_0)$. Тогда

$$\Delta y=[f_1(x_0+\Delta x)+f_2(x_0+\Delta x)]-[f_1(x_0)-f_2(x_0)]=\Delta y_1+\Delta y_2;$$

поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y_1}{\Delta x}+\frac{\Delta y_2}{\Delta x},\qquad \Delta x\neq 0. \tag{9.16}$$

Пределы $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_1}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_2}{\Delta x}$, согласно предположению, существуют и равны соответственно производным y_1' и y_2' в точке x_0, поэтому предел левой части равенства (9.16) при $\Delta x\to 0$ существует и равен $y_1'+y_2'$. Но $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$, поэтому y' в точке x_0 существует и $y'=y_1'+y_2'$. $\square$

2°. *Пусть функции $y_1=f(x)$ и $y_2=f_2(x)$ имеют производные в точке x_0. Тогда и их произведение $y_1y_2=f_1(x)f_2(x)$ имеет в точке x_0 производную, причем*

$$(y_1y_2)'=y_1'y_2+y_1y_2', \tag{9.17}$$

а если $y_2\neq 0$, в x_0, то частное $\frac{y_1}{y_2}=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ также имеет в точке x_0 производную, причем

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)'=\frac{y_1'y_2-y_1y_2'}{y_2^2}. \tag{9.18}$$

Действительно, пусть $y=f_1(x)f_2(x)$, $\Delta y_1=f_1(x_0+\Delta x)-f_1(x_0)$, $\Delta y_2=f_2(x_0+\Delta x)-f_2(x_0)$; тогда

$$\Delta y=f_1(x_0+\Delta x)f_2(x_0+\Delta x)-f_1(x_0)f_2(x_0)=$$
$$=[f_1(x_0)+\Delta y_1][f_2(x_0)+\Delta y_2]-f_1(x_0)f_2(x_0)=$$
$$=\Delta y_1f_2(x_0)+f_1(x_0)\Delta y_2+\Delta y_1\Delta y_2.$$

отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y_1}{\Delta x}f_2(x_0)+f_1(x_0)\frac{\Delta y_2}{\Delta x}+\frac{\Delta y_1}{\Delta x}\Delta y_2,$$

и так как в точке x_0

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_1}{\Delta x}=y_1',\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_2}{\Delta x}=y_2',\quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y_2=0$$

(функция $y_2=f_2(x)$ имеет производную, а потому и непрерывна в точке x_0), то при $x=x_0$ существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$, и $y'=y_1'y_2+y_1y_2'$. □

Пусть теперь $f_2(x_0)\neq 0$; тогда существует такое $h>0$, что $f(x_0+\Delta x)\neq 0$ для всех Δx, удовлетворяющих условию $|\Delta x|<h$. Если положить $z=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ и выбрать Δx так, что $|\Delta x|<h$, то

$$\Delta z=\frac{f_1(x_0+\Delta x)}{f_2(x_0+\Delta x)}-\frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)}=\frac{f_1(x_0)+\Delta y_1}{f_2(x_0)+\Delta y_2}-\frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)}=\frac{\Delta y_1f_2(x_0)-f_1(x_0)\Delta y_2}{[f_2(x_0)+\Delta y_2]f_2(x_0)},$$

поэтому

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x}f_2(x_0)-f_1(x_0)\frac{\Delta y_2}{\Delta x}}{[f_2(x_0)+\Delta y_2]f_2(x_0)}.$$

Отсюда, как и при доказательстве формулы (9.17), заключаем, что в точке $x=x_0$ существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=z'$, и $z'=\frac{y_1'y_2-y_1y_2'}{y_2^2}$. □

Следствие 1. *Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x_0. Тогда функция $cf(x)$ (c — постоянная) также имеет в этой точке производную, причем*

$$(cy)'=cy',$$

т. е. производная произведения функции на постоянную равна произведению этой постоянной на производную функции.

Действительно, вспоминая, что $c'=0$, из формулы (9.17) получим

$$(cy)'=c'y+cy'=cy'. \ \square \tag{9.19}$$

Следствие 2. *Пусть функции $y_1=f_1(x), \ldots, y_n=f_n(x)$ имеют производные в точке x_0; тогда функция $c_1f(x)+\ldots+c_nf_n(x)$ также имеет в точке x_0 производную, причем*

$$(c_1y_1+\ldots+c_ny_n)'=c_1y_1'+\ldots+c_ny_n',$$

т. е. производная линейной комбинации функций равна линейной комбинации с этими же коэффициентами соответствующих производных.

Это утверждение непосредственно выводится из формул (9.15) и (9.19) с помощью метода математической индукции.

Замечание. Используя свойства бесконечных пределов, относящиеся к арифметическим действиям над функциями (см. п. 4.7), можно установить и соответствующие свойства бесконечных производных. Например, если существует конечная производная $y_1'(x_0)$ и бесконечная (определенного знака) производная $y_2'(x_0)$, то у функции $y(x)\overset{\text{def}}{=}y_1(x)+y_2(x)$ в точке x_0 существует бесконечная производная того же знака. Например, если $y_2'(x_0)=+\infty$, то $y'(x_0)=+\infty$. Действительно, $\Delta y=\Delta y_1+\Delta y_2$. Поэтому если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_1}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_2}{\Delta x}=+\infty$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x}+\frac{\Delta y_2}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_1}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_2}{\Delta x}=+\infty,$$

т. е. $y'(x_0)=+\infty$.

Примеры. 1. Пусть $y=e^x\sin x-2x^2\cos x$; в силу формул (9.15), (9.17) и (9.19) имеем

$$y'=(e^x\sin x)'-2(x^2\cos x)'=$$
$$=e^x\sin x+e^x\cos x-2(2x\cos x-x^2\sin x).$$

2. Пусть $y=\operatorname{tg} x$; так как $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$, то по формуле (9.18) получаем

$$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким образом

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

3. Аналогично для $y=\operatorname{ctg} x$

$$y'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(-\sin x)\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x},$$

т. е.

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Свойства 1° и 2° переносятся и на дифференциалы функций. При тех же предположениях относительно дифференцируемости в точке x_0 имеем:

$$d(y_1 + y_2) = dy_1 + dy_2; \qquad d(y_1 y_2) = y_2\,dy_1 + y_1\,dy_2,$$

$$d(cy) = c\,dy; \qquad d\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{y_2\,dy_1 - y_1\,dy_2}{y_2^2}.$$

Вычислим, например, дифференциал произведения $y = y_1 y_2$:

$$dy = y'\,dx = (y_1 y_2)'\,dx = y_1' y_2\,dx + y_1 y_2'\,dx = y_2\,dy_1 + y_1\,dy_2,$$

ибо $y_1'\,dx = dy_1$, $y_2'\,dx = dy_2$.

Аналогично доказываются и остальные формулы.

9.6. ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 3. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 и пусть при $x = x_0$ существует производная $\frac{df(x_0)}{dx} \neq 0$; тогда и обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем*

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}, \tag{9.20}$$

т. е. производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.

Доказательство. Зафиксируем какую-то окрестность точки x_0, на которой функция f определена, непрерывна и строго монотонна и, будем рассматривать f только в этой окрестности. Тогда, как доказано ранее (см. п. 6.3), обратная функция определена и непрерывна на некотором интервале, содержащем точку y_0; он является образом указанной выше окрестности точки x_0. Поэтому, если $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $y = f(x)$, то $\Delta x \to 0$ равносильно $\Delta y \to 0$.

Для любых $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ имеем

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

При $\Delta x \to 0$ (или, что то же в силу сказанного выше, при $\Delta y \to 0$) предел правой части существует, значит, существует и предел левой части, причем

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}.$$

Но $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{df^{-1}(y_0)}{dy}$, поэтому $\frac{df^{-1}(y_0)}{dy}=\frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}$. □

Эта теорема допускает наглядную геометрическую интерпретацию (рис. 38). Как известно, $\frac{df(x_0)}{dx}=\operatorname{tg}\alpha$, где α — величина угла, образуемого касательной графика функции f в точке (x_0, y_0) с положительным направлением оси Ox, а $\frac{df^{-1}(y_0)}{dx}=\operatorname{tg}\beta$, где β — величина угла, образованного той же касательной с осью Oy.

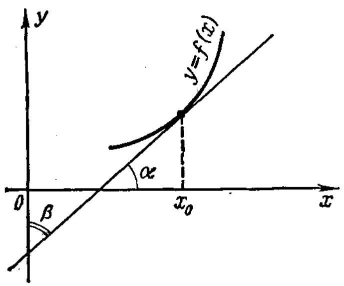


Рис. 38

Очевидно, $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, а поэтому

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy}=\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}=\frac{1}{\operatorname{ctg}(\pi/2-\alpha)}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}.$$

Упражнения. 1. Доказать, что если функция $f=f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0, если в этой точке существует производная и $\frac{df(x_0)}{dx}=0$, то обратная функция $f^{-1}(y)$ имеет в точке $y_0=f(x_0)$ бесконечную производную; следовательно, если считать условно, что $\frac{1}{0}=\infty$, то формула (9.20) справедлива и в этом случае.

4. Сформулируйте и докажите аналог теоремы 3 для односторонних производных (конечных и бесконечных).

Примеры. 1. $y=\arcsin x$, $x=\sin y$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$. Применяя формулу (9.20), получаем

$$\frac{dy}{dx}=(\arcsin x)'=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}.$$

Так как $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$, то $\cos y>0$, поэтому $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$. Таким образом,

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. $y=\arccos x$, $x=\cos y$, $0\leqslant y\leqslant\pi$, $-1\leqslant x\leqslant 1$.
Аналогично предыдущему примеру имеем:

$$\frac{dy}{dx}=(\arccos x)'=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

т. е.

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. $y=\operatorname{arctg} x$, $x=\operatorname{tg} y$, $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$, $-\infty<x<+\infty$. Имеем:

$$\frac{dy}{dx}=(\operatorname{arctg} x)'=1\Big/\frac{dx}{dy}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2};$$

итак,

$$(\operatorname{arctg} x)'=1/(1+x^2).$$

4. $y=\operatorname{arcctg} x$, $x=\operatorname{ctg} y$, $0<y<\pi$, $-\infty<x<\infty$.
В этом случае

$$\frac{dy}{dx}=(\operatorname{arcctg})'=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\sin^2 y=-\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}=-\frac{1}{1+x^2},$$

т. е.

$$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

5. Если $y=\log_a x$, $x=a^y$, $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, $-\infty<y<+\infty$, то

$$\frac{dy}{dx}=(\log_a x)'=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a},$$

т. е.

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a};$$

в частности, при $a=e$ имеем

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

9.7. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 4. *Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z=F(y)$ имеет производную в точке $y_0=f(x_0)$. Тогда сложная функция $\Phi(x)=F[f(x)]$ также имеет производную при $x=x_0$, причем*

$$\Phi'(x_0)=F'(y_0)f'(x_0). \tag{9.21}$$

Если сложную функцию Φ обозначить символом $\Phi = F \circ f$ (см. п. 4.2), то формулу (9.21) можно записать в виде

$$(F \circ f)'(x_0) = F'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Следует обратить внимание на то, что утверждение о существовании в точке x_0 производной у сложной функции $F[f(x)]$ содержит в себе предположение о том, что рассматриваемая сложная функция имеет смысл, т. е. определена в некоторой окрестности точки x_0. Опуская значение аргумента и используя запись производной с помощью дифференциалов, равенство (9.21) можно переписать в виде

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Доказательство. Согласно теореме 2 настоящего параграфа, функции $y = f(x)$ и $z = F(y)$ непрерывны соответственно в точках x_0 и $y_0 = f(x_0)$, и, следовательно, в силу теоремы 2 из п. 5.2, в некоторой окрестности точки x_0 определена сложная функция $\Phi(x) = F[f(x)]$.

Положим, как всегда, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta x = x - x_0$. Функция F имеет в точке y_0 производную и, значит, дифференцируема в этой точке (см. п. 9.2), т. е.

$$\Delta z = F'(y_0)\,\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\,\Delta y, \tag{9.22}$$

где $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$. Функция $\varepsilon(\Delta y)$ не определена при $\Delta y = 0$. Для дальнейшего удобнее доопределить ее и при $\Delta y = 0$. Это можно сделать произвольным образом. Проще всего продолжить ее «по непрерывности», положив $\varepsilon(0) = 0$. Доопределенная таким образом функция $\varepsilon(\Delta y)$ непрерывна при $\Delta y = 0$.

Поделим теперь обе части равенства (9.22) на $\Delta x \neq 0$:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = F'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{9.23}$$

Функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, т. е. существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0). \tag{9.24}$$

Из существования производной $f'(x_0)$ следует непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

При $\Delta x = 0$ имеем $\Delta y = 0$. Следовательно, приращение Δy, рассматриваемое как функция Δx, непрерывно в точке $\Delta x = 0$. Поэтому, согласно правилу замены переменных в предельных соотношениях, содержащих непрерывные функции (см. п. 5.2),

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0. \tag{9.25}$$

Теперь из (9.23), переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, в силу (9.24) и (9.25), получим формулу (9.21). $\square$

Замечание. 1. При доказательстве теоремы было сказано, что $\varepsilon(\Delta y)$ можно доопределить произвольно при $\Delta y = 0$. Однако если, например, взять $\varepsilon(0) = 1$, то на первый взгляд формула (9.21) не получится, и не только потому, что в этом случае нельзя применить правило замены переменного для предела непрерывной функции, но и потому, что если $\varepsilon(0) = 1$ и если существуют такие $\Delta x \neq 0$, для которых $\Delta y = 0$, то равенство (9.25) будет неверным. Это, однако, не влияет на окончательный результат. Действительно, если для сколь угодно малых $\Delta x \neq 0$ существует $\Delta y = 0$, то отсюда легко следует, что

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

и, следовательно, второе слагаемое в правой части равенства (9.23) все равно стремится к нулю при $\Delta x \to 0$ (более того, в этом случае, как легко видеть, все члены равенства (9.23) стремятся к нулю). Можно было воспользоваться также и тем, что из формулы (9.2) следует, что $\alpha(0) = 0$.

На примере доказательства теоремы 4 хорошо видно, как удачно выбранная вспомогательная конструкция (в данном случае просто доопределение в нуле функции $\varepsilon(\Delta y)$ нулем, позволившее использовать правило замены переменного для пределов непрерывных функций), может существенно упростить доказательство.

Замечание 2. Формула (9.21) для производной сложной функции остается справедливой и в случае, когда под производными понимаются соответствующие односторонние производные, если только предварительно потребовать, чтобы сложная функция, необходимая для определения рассматриваемой односторонней (или двусторонней) производной, стоящей в левой части формулы (9.21), имела смысл.

Следствие (инвариантность формы первого дифференциала относительно преобразования независимой переменной):

$$dz = F'(y_0)\,dy = \Phi'(x_0)\,dx. \tag{9.26}$$

В этой формуле $dy = f'(x)\,dx$ является дифференциалом функции, а dx — дифференциалом независимой переменной.

Таким образом, дифференциал функции имеет один и тот же вид: произведение производной по некоторой переменной на «дифференциал этой переменной» — независимо от того, является эта переменная в свою очередь функцией или независимой переменной.

Докажем это. Согласно формуле (9.6), $dz=\Phi'(x_0)\,dx$, отсюда, применив формулу (9.21) для производной сложной функции, получим $dz=F'(y_0)f'(x_0)\,dx$, но $f'(x_0)\,dx=dy$, а поэтому $dz=F'(y_0)\,dy$, что и требовалось доказать.

Формулу (9.26) можно интерпретировать и несколько иначе, если вспомнить, что дифференциалом функции в точке является функция, линейная относительно дифференциала независимой переменной. Согласно (9.21) дифференциал функции $\Phi(x)=F[f(x)]$ имеет вид $d\Phi=F'(y_0)f'(x_0)\,dx$, т. е. является результатом подстановки линейной функции $dy=f'(x_0)\,dx$, посредством которой задан дифференциал df (где $y=f(x)$), в линейную функцию $dz=F'(y_0)\,dy$, задающую дифференциал dF (где $z=F(y)$). Иначе говоря, дифференциал композиции $\Phi=F\circ f$ является композицией дифференциалов dF и df:

$$d(F\circ f)=dF\circ df.$$

Отметим, что теорема 4 по индукции распространяется на суперпозицию любого конечного числа функций. Например, для сложной функции вида $z(y(x(t)))$ в случае дифференцируемости функций $z(y)$, $y(x)$ и $x(t)$ в соответствующих точках имеет место формула

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Если приходится иметь дело со сложной функцией $z=z(y)$, $y=y(x)$, то для обозначения ее производной z' употребляется также нижний индекс x или y, указывающий, по какой из переменных берется производная, т. е. пишут z'_x или z'_y. Часто для простоты штрих опускается, т. е. вместо z'_x пишется просто z_x. В этих обозначениях формула (9.21) имеет вид

$$z_x=z_yy_x.$$

Примеры. 1. Пусть $y=x^\alpha$, $x>0$, найдем $\frac{dy}{dx}$. Имеем $x^\alpha=e^u$, где $u=\alpha\ln x$. Замечая, что $\frac{du}{dx}=\frac{\alpha}{x}$, получаем

$$\frac{dx^\alpha}{dx}=\frac{de^u}{dx}=\frac{de^u}{du}\frac{du}{dx}=e^u\cdot\frac{\alpha}{x}=e^{\alpha\ln x}\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Таким образом,

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Так, если $y=x^2$, то $y'=2x$;
если $y=1/x=x^{-1}$, то $y'=(-1)x^{-2}=-1/x^2$;
если $y=\sqrt{x}=x^{1/2}$, то $y'=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Если функция $y=x^{\alpha}$ определена при $x=0$ или при $x<0$, то при этих значениях x она также имеет производную $y'=\alpha x^{\alpha-1}$ Например, при $\alpha=1$, т. е. для функции $y=x$ в точке $x=0$, как и во всех других точках $y'=1$.

2. Пусть $y=|f(x)|$, где функция $f(x)$ дифференцируема на некотором интервале (a, b). Полагая $u=f(x)$, получаем $y=|u|$, $u=f(x)$. Пользуясь формулой из примера 1, п. 9.2, находим $y'=(|u|)'u'=f'(x)\cdot\operatorname{sign} f(x)$. Эта формула справедлива для всех $x\in(a, b)$, для которых $f(x)\neq 0$; она позволяет найти односторонние производные в тех точках, где $f(x)=0$.

3. Найдем производную функции

$$y=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad (x\neq a,\ x\neq -a).$$

В силу сказанного в примере 2

$$y'=\frac{1}{2a}\frac{\operatorname{sign}\frac{x-a}{x+a}}{\left|\frac{x-a}{x+a}\right|}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)'=\frac{1}{2a}\,\frac{x+a}{x-a}\,\frac{x+a-(x-a)}{(x+a)^2}=\frac{1}{x^2-a^2}.$$

3. Найдем производную функции $y=\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$. Аналогично предыдущему получим

$$y'=\frac{\operatorname{sign}(x+\sqrt{x^2+A})}{|x+\sqrt{x^2+A}|}(x+\sqrt{x^2+A})'=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+A}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+A}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}.$$

4. Пусть $y=\ln^2\arcsin\frac{1}{x}$, $x>1$. Найдем производную и дифференциал этой функции:

$$y'=\left(\ln^2\arcsin\frac{1}{x}\right)'=2\ln\arcsin\frac{1}{x}\left(\ln\arcsin\frac{1}{x}\right)'=$$

$$=2\ln\arcsin\frac{1}{x}\,\frac{1}{\arcsin\frac{1}{x}}\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)'=2\,\frac{\ln\arcsin\frac{1}{x}}{\arcsin\frac{1}{x}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(\frac{1}{x}\right)'=$$

$$=-\frac{2\ln\arcsin\frac{1}{x}}{|x|\sqrt{x^2-1}\arcsin\frac{1}{x}}.$$

Отсюда дифференциал находится непосредственно по формуле $dy=y'\,dx$; однако, если бы мы еще не имели готового выражения для производной, т. е. дифференциал можно было бы найти и непосредственно, используя его инвариантность относительно выбора переменных:

$$d\left(\ln^2 \arcsin\frac{1}{x}\right) = 2\ln\arcsin\frac{1}{x}\, d\left(\ln\arcsin\frac{1}{x}\right) =$$
$$= 2\ln\arcsin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\arcsin\frac{1}{x}}\, d\left(\arcsin\frac{1}{x}\right) =$$
$$= \frac{2\ln\arcsin\frac{1}{x}}{\arcsin\frac{1}{x}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\, d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-2\ln\arcsin\frac{1}{x}}{|x|\sqrt{x^2-1}\arcsin\frac{1}{x}}\, dx.$$

5. Выведем с помощью теоремы 4 еще одну часто применяемую формулу. Пусть $y=u^v$, где $u=u(x)>0$, $v=v(x)$. Представим нашу функцию в виде $y=e^{v\ln u}$ и вычислим $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^{v\ln u}}{dx} = e^{v\ln u}\frac{d}{dx}(v\ln u) = u^v\left(\frac{dv}{dx}\ln u + \frac{v}{u}\frac{du}{dx}\right) =$$
$$= u^v\frac{dv}{dx}\ln u + vu^{v-1}\frac{du}{dx}. \qquad (9.27)$$

Таким образом, производная функции u^v равна сумме двух слагаемых, из которых первое совпадает с производной u^v в предположении, что u — постоянная, а второе — с производной u^v в предположении, что v — постоянная.

С помощью правила дифференцирования сложной функции можно находить и *производные функций, заданных неявно.*

6. Пусть дифференцируемая функция $y=y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y)=0$ (см. п. 4.2). (Вопрос о том, как установить что данное уравнение на самом деле определяет некоторую функцию и будет ли она дифференцируемой мы пока оставляем в стороне; он будет изучен в дальнейшем.) Дифференцируя тождество $F(x, y(x))\equiv 0$ как сложную функцию, можно вычислить производную $\frac{dy}{dx}$.

В качестве примера вычислим производную неявной функции $y(x)$, определенной уравнением $x^2+y^2=a^2$. В данном конкретном случае существование подобной функции не вызывает сомнения, так как ею, например, является $y=\sqrt{a^2-x^2}$, а также $y=-\sqrt{a^2-x^2}$. Продифференцируем уравнение $x^2+y^2=a^2$, считая y функцией от x. Получим $2x+2yy'=0$; отсюда $y'=-\frac{x}{y}$.

С подобными задачами приходится сталкиваться в геометрии. Пусть, например, требуется найти касательную к окружности

$x^2+y^2=25$ в точке (3; 4). Угловой коэффициент k касательной равен производной: $k=y'$, и, значит, в нашем случае $k=-\frac{x}{y}$. Для рассматриваемой точки $k=-\frac{3}{4}$; поэтому уравнение искомой касательной можно записать в виде $y-4=-\frac{3(x-3)}{4}$, т. е. $3x+$ $+4y-25=0$.

Применим метод дифференцирования неявных функций к выводу формул, полученных ранее другим путем.

7. Рассмотрим снова функцию $y=u^v$. Логарифмируя, получаем ее неявное задание $\ln y=v\ln u$. Дифференцируя обе части этого уравнения будем иметь $y'/y=v'\ln u+\frac{v}{u}u'$ (выражение $(\ln y)'=$ $=y'/y$ называется *логарифмической производной* функции $y(x)$), или $y'=y\left(v'\ln u+\frac{v}{y}u'\right)$; подставляя сюда $y=u^v$, приходим снова к формуле (9.27).

Другой пример. Функция $y=\arcsin x$ неявно задается уравнением $x=\sin y$. Дифференцируя обе части по x, получаем $1=$ $=y'\cos y$, откуда $y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т. е. то же, что и в п. 9.6.

8. В случае, когда функция задана не одной формулой, а несколькими, вычисление производной приходится иногда производить непосредственно, исходя из определения производной. Найдем, например, производную функции

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

При $x\neq 0$ производная существует и вычисляется по формулам дифференцирования: $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$. В точке же $x=0$ производная находится непосредственно по ее определению

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

Таким образом, функция $f(x)$ дифференцируема на всей вещественной оси.

Замечание. Используя теорему 4, можно все полученные нами формулы для производных основных элементарных функций записать в несколько более общем виде: если $u=u(x)$ — дифференцируемая функция, то

$$
\begin{aligned}
(\sin u)' &= u'\cos u; & (e^u)' &= e^u u'; \\
(\cos u)' &= -u'\sin u; & (\ln u)' &= \frac{u'}{u}\ (u>0); \\
(\operatorname{tg} u)' &= \frac{u'}{\cos^2 u}; & (\arcsin u)' &= \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \\
(\operatorname{ctg} u)' &= -\frac{u'}{\sin^2 u}; & (\arccos u)' &= -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \\
(u^\alpha)' &= \alpha u^{\alpha-1}u'\ (u>0); & (\operatorname{arctg} u)' &= \frac{u'}{1+u^2}; \\
(a^u)' &= a^u u'\ln a; & (\operatorname{arcctg} u) &= -\frac{u'}{1+u^2}.
\end{aligned}
$$

Из перечисленных формул видно (при $u=x$), что производные основных элементарных функций являются элементарными функциями.

Полученные же нами в совокупности формулы дают возможность вычислить производную и дифференциал любой элементарной функции в случае, если эта производная существует.

Следует иметь в виду, однако, что не всякая элементарная функция имеет производные во всех точках своей области определения. Примером элементарной дифференцируемой не во всех точках функции является функция $|x|=\sqrt{x^2}$, она, как мы знаем, не имеет производной в точке $x=0$ (см. п. 9.2).

Упражнения 5. Ответить на вопросы. Можно ли доказать формулу $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ при $dy\neq 0$, просто умножив и разделив $\frac{dz}{dx}$ на dy? Можно или нет доказать формулу $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ при $dx\neq 0$, разделив числитель и знаменатель дроби $\frac{dx}{dy}$ на dx?

6. Выяснить будет ли функция

$$
f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{при } x\neq 0, \\ 0 & \text{при } x=0, \end{cases}
$$

непрерывной в точке $y=0$? Будет ли она иметь производную в этой точке? Будет ли она иметь в ней односторонние производные?

9.8. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРОИЗВОДНЫЕ

Определение 5. *Функции* $(e^x+e^{-x})/2$ *и* $(e^x-e^{-x})/2$ *называются соответственно гиперболическим косинусом и гиперболическим синусом и обозначаются* $\operatorname{ch} x$ *и* $\operatorname{sh} x$:

$$
\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch} x,\quad \frac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh} x.
$$

Справедлива формула

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \tag{9.28}$$

Действительно,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{2x} - e^{-2x} + 2 - e^{-2x}) = 1.$$

Справедлива также формула

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$$

в самом деле,

$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2\frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x.$$

Эти формулы напоминают соотношения между обычными (как их иногда называют, круговыми) синусом и косинусом. Для $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ имеется и ряд других соотношений, аналогичных соответствующим формулам для $\sin x$ и $\cos x$. Этим и объясняется название функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$. Эпитет же «гиперболический» связан с тем обстоятельством, что формулы

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t \tag{9.29}$$

параметрически задают гиперболу, подобно тому как формулы

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t \tag{9.30}$$

параметрически задают окружность. В самом деле, если возвести в квадрат равенства (9.29), вычесть одно из другого и воспользоваться формулой (9.28), то получим $x^2 - y^2 = a^2$, т. е. уравнение равнобочной гиперболы.

Подобным же образом из уравнения (9.30) вытекает $x^2 + y^2 = a^2$, т. е. уравнение окружности.

Найдем производные гиперболических синуса и косинуса. Замечая, что $(e^{-x})' = -e^{-x}$, имеем

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$
$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Таким образом, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

Частные $\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и $\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ по аналогии с обычными синусами и косинусами называются соответственно *гиперболическим тангенсом* и *гиперболическим котангенсом* и обозначаются

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x, \quad \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{cth} x.$$

Упражнения. 7. Вычислить производные функций $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$. Построить графики функций $y=\operatorname{ch} x$, $y=\operatorname{sh} x$, $y=\operatorname{th} x$ и $y=\operatorname{cth} x$. Найти производные их обратных функций. Выразить указанные обратные функции и их производные через логарифмы (функция, обратная к $\operatorname{ch} x$, определяется дополнительно условием неотрицательности ее значений).

Вычислить производные следующих функций (во всех точках, в которых это возможно).

8. $y=x^2(x^3-1)^4$.
9. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-x+1}$.
10. $y=\sqrt[3]{x}$.
11. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
12. $y=x^2\sin 2x+2x\cos 3x$.
13. $y=\ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.
14. $y=\sqrt[5]{x}\operatorname{ctg} 2x-\dfrac{1}{2}\ln x \operatorname{arctg} x$.
15. $y=2^{x^3}\ln\arccos x$.
16. $y=\arccos\dfrac{1}{x}$.
17. $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$.
18. $y=x^2|x|$.
19. $y=x^x$.
20. $y=|x|\ln|x|$.
21. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.
22. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+$
$+\dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.
23. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$.
24. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.
25. $y=\sqrt[x]{x}$.
26. $y=x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^x}$.
27. $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$.
28. $y=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}-\ln\operatorname{cth}\dfrac{x}{2}$.
29. $y=\arccos\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.
30. $y=\dfrac{b}{a}x+\dfrac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\times$
$\times\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right)$ $(0\leqslant b<a)$.

§ 10. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

10.1. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Определение 1. *Пусть функция $f(x)$, определенная на интервале (a, b) имеет в каждой точке $x\in(a, b)$ производную $f'(x)$ и пусть $x_0\in(a, b)$. Если при $x=x_0$ производная функции $f'(x)$ существует, то она называется второй производной (или производной второго порядка) функции f и обозначается через $f''(x_0)$ или $f^{(2)}(x_0)$.*

Таким образом, $f''(x_0)=[f'(x)]'_{x=x_0}$ или, опуская обозначение аргумента, $y''=(y')'$. Аналогично определяется производная $y^{(n)}$ любого порядка $n=1, 2, \ldots$: *если существует производная $y^{(n-1)}$ порядка $n-1$* (при этом под производной нулевого порядка подразумевается сама функция: $y^{(0)}=y$, а под производной первого порядка — y'), то, по определению, $y^{(n)}=[y^{(n-1)}]'$.

Вспоминая как определялась производная (см. п. 9.1), определение n-й производной в точке x_0 можно записать в виде предела

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x},\quad n=1,\ 2\ldots.$$

Отметим, что из предположения, что функция f имеет в точке x_0 производную порядка n, следует, в силу определения последней, что в некоторой окрестности точки x_0 у функции f существует производная порядка $n-1$, а следовательно, при $n>1$, и все производные более низкого порядка $k<n-1$ (которые к тому же непрерывны в этой окрестности, поскольку во всех ее точках они имеют производную, см. теоремы 1 и 2 в п. 9.2), в частности сама функция определена в некоторой окрестности точки x_0.

Все здесь сказанное естественным образом переносится и на так называемые односторонние производные высшего порядка, которые читатель без труда определит самостоятельно.

Определение 2. *Функция называется n раз непрерывно дифференцируемой на некотором промежутке, если во всех точках этого промежутка она имеет непрерывные производные до порядка n включительно* ($n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$).

При этом на каком-либо конце рассматриваемого промежутка в случае, когда этот конец принадлежит промежутку, под производными, как обычно, понимаются соответствующие односторонние производные.

Для того чтобы функция была n раз непрерывно дифференцируемой на некотором промежутке, достаточно, чтобы она имела на нем непрерывную производную порядка n. Действительно, согласно определению, существование производной порядка n на рассматриваемом промежутке предполагает существование на нем производной порядка $n-1$, и поскольку из существования производной какой-либо функции в некоторой точке следует непрерывность функции в этой точке, то производная порядка $n-1$ непрерывна на данном промежутке. Аналогично, в случае $n>1$ доказывается непрерывность производной порядка $n-2$ и т. д.

Примеры. 1. $y=x^3$, $y'=3x^2$, $y''=6x$, $y^{(3)}=6$, $y^{(4)}=y^{(5)}=\ldots=0$.

2. $y=a^x$, $y'=a^x\ln a$, $y''=a^x\ln^2 a$, $y^3=a^x\ln^3 a$. Вообще по индукции легко установить, что $y^{(n)}=a^x\ln^n a$. В частности, $(e^x)^{(n)}=e^x$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

3. $y=\sin x$. Вычисляя последовательно производные, получим $y'=\cos x$, $y''=-\sin x$, $y^{(3)}=-\cos x$, $y^{(4)}=\sin x$, далее производные повторяются в том же порядке. Чтобы записать полученный результат одной формулой, заметим, что $\cos\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$, и поэтому $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$ и т. д.

По индукции $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ для любого $n=1, 2, \ldots$.

4. $y=\cos x$. Замечая, что $-\sin\alpha=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$, аналогично предыдущему примеру получим

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\quad n=1,\ 2,\ \ldots.$$

10.2. ВЫСШИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Теорема 1. *Пусть функции $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ имеют производные n-го порядка в точке x_0; тогда функции $y_1+y_2=f_1(x)+f_2(x)$ и $y_1y_2=f_1(x)f_2(x)$ также имеют производные n-го порядка в точке x_0, причем*

$$(y_1+y_2)^{(n)}=y_1^{(n)}+y_2^{(n)}, \tag{10.1}$$

$$(y_1y_2)^{(n)}=y_1^{(n)}y_2+C_n^1y_1^{(n-1)}y_2^{(1)}+C_n^2y_1^{(n-2)}y_2^{(2)}+\ldots+y_1y_2^{(n)}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^ky_1^{(n-k)}y_2^{(k)}, \tag{10.2}$$

где, как обычно, C_n^k обозначает число сочетаний из n элементов по k ($k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$).

Формула (10.2) обычно называется *формулой Лейбница**), ее символически можно записать в следующем виде, удобном для запоминания:

$$(y_1y_2)^{(n)}=(y_1+y_2)^{\{n\}}.$$

Индекс $\{n\}$ означает, что выражение $(y_1+y_2)^{\{n\}}$ записывается подобно биному Ньютона, т. е. в виде суммы с теми же коэффициентами, что и в биномиальной формуле, только степени функций y_1 и y_2 заменяются их производными соответствующего порядка (см. (10.2)).

Формулы (10.1) и (10.2) доказываются по индукции. При $n=1$, т. е. для производных первого порядка, они были доказаны в п. 9.5. Пусть теперь эти формулы верны для производных n-го порядка. Докажем их справедливость для производных порядка $n+1$.

В случае суммы функций имеем:

$$(y_1+y_2)^{(n+1)}=\left[(y_1+y_2)^{(n)}\right]'=\left(y_1^{(n)}+y_2^{(n)}\right)'=$$
$$=\left(y_1^{(n)}\right)'+\left(y_2^{(n)}\right)'=y_1^{(n+1)}+y_2^{(n+1)}.$$

Формула (10.2) доказана.

---

*) Г. Лейбниц (1664—1716) — немецкий философ и математик.

В случае произведения функций выкладки несколько сложнее:

$$(y_1y_2)^{(n+1)}=[(y_1y_2)^{(n)}]'=\left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k)}\right]'=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left[y_1^{(n+1-k)}y_2^{(k)}+y_1^{(n-k)}y_2^{(k+1)}\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n+1-k)}y_2^{(k)}+\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k+1)}=$$

$$=y_1^{(n+1)}y_2^{(0)}+\sum_{k=1}^{n} C_k^n y_1^{(n+1-k)}y_2^k+\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k+1)}+y_1^{(0)}y_2^{(n+1)}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $C_n^0=C_n^n=1$. Теперь изменим индекс суммирования во второй сумме, положив $k=p-1$; тогда новый индекс суммирования p будет меняться от 1 до n. После этого в полученных суммах объединим попарно слагаемые, содержащие производные одинаковых порядков. Обозначая общий индекс суммирования через p, будем иметь

$$(y_1y_2)^{(n+1)}=y_1^{(n+1)}y_2^{(0)}+\sum_{p=1}^{n}\left(C_n^p+C_n^{p-1}\right)y_1^{(n+1-p)}y_2^{(p)}+y_1^{(0)}y_2^{(n+1)}$$

Отсюда, заметив, что $C_n^p+C_n^{p-1}=C_{n+1}^p$ *) и что $C_{n+1}^0=C_{n+1}^{n+1}=1$, получим

$$(y_1y_2)^{(n+1)}=y_1^{(n+1)}y_2^{(0)}+\sum_{p=1}^{n} C_{n+1}^p y_1^{(n+1-p)}y_2^{(p)}+y_1^{(0)}y_2^{(n+1)}=$$

$$=\sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p y_1^{(n+1-p)}y_2^{(p)}. \quad \square$$

Следствие. *Если c — постоянная, а $y=f(x)$ — функция, имеющая производную n-го порядка в точке x_0, то функция $cf(x)$ также имеет производную порядка n при $x=x_0$, причем*

$$(cy)^{(n)}=cy^{(n)}. \tag{10.3}$$

Действительно, если в формуле (10.2) положить $y_1=c$, $y_2=y$, то получится формула (10.3). Впрочем, она следует очевидным образом и из n-кратного применения формулы (9.19) к функции cy.

---

*) В самом деле, если зафиксировать один из $n+1$ элементов, составляющих сочетания по p элементов, то число сочетаний, в которое вошел этот фиксированный элемент, будет равно C_n^{p-1}, а число сочетаний, в которое он не вошел будет равно C_n^p, поэтому $C_{n+1}^p=C_n^{p-1}+C_n^p$.

Рассмотрим пример. Пусть $y=x^3\sin x$. Найдем с помощью формулы Лейбница производную $y^{(10)}$:

$$(x^3\sin x)^{(10)}=x^3\sin\left(x+10\frac{\pi}{2}\right)+10\cdot 3x^2\sin\left(x+9\cdot\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+10\cdot 9\cdot 3x\sin\left(x+8\cdot\frac{\pi}{2}\right)+10\cdot 9\cdot 8\sin\left(x+7\cdot\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=-x^3\sin x+30x^2\cos x+270x\sin x-720\cos x.$$

10.3. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ОТ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ, ОТ ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ И ОТ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Пусть функция $y=y(x)$ имеет вторую производную в точке x_0, а $z=z(y)$ — вторую производную в точке $y_0=y(x_0)$. Тогда сложная функция $z[y(x)]$ имеет при $x=x_0$ вторую производную, причем

$$z''_{xx}=z''_{yy}y'^2_x+z'_yy''_{xx}. \tag{10.4}$$

Действительно, поскольку существуют производные $y''(x_0)$ и $z''(y_0)$, то существуют также $y'(x_0)$ и $z'(y_0)$. Следовательно, функции $y(x)$ и $z(y)$ непрерывны соответственно в точках x_0 и y_0. Поэтому в некоторой окрестности точки x_0 определена сложная функция $z=z[y(x)]$. Дифференцируя ее и опуская для простоты обозначение аргумента, имеем $z'_x=z'_yy'_x$; дифференцируя еще раз по x, получим

$$z''_{xx}=(z'_y)'_xy'_x+z'_yy''_{xx}=z''_{yy}y'^2_x+z'_yy''_{xx}. \ \square$$

Аналогичным образом вычисляются, при соответствующих предположениях, и *производные высших порядков сложной функции*. Этот метод позволяет также доказывать существование и находить производные высших порядков от обратной функции.

Пусть функция $y=y(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 (ср. п. 9.6) и пусть при $x=x_0$ существуют производные y' и y'', причем $y'(x_0)\neq 0$; тогда и обратная функция $x=x(y)$ имеет вторую производную в точке $y_0=y(x_0)$, причем она может быть выражена через значения производных y' и y'' функции $y(x)$ при $x=x_0$.

В самом деле, опуская, как и выше, обозначения аргумента, согласно теореме 3 § 9 (см. п. 9.6), имеем $x'_y=1/y'_x$. Вычисляя производную по y от обеих частей и применяя к правой части правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$x''_{yy}=(x'_y)_y=\left(\frac{1}{y'_x}\right)'_x x'_y=-\frac{y''_{xx}}{y'^2_x}\cdot\frac{1}{y'_x}=-\frac{y''_{xx}}{y'^3}.$$

Аналогично при соответствующих предположениях вычисляются и *производные высших порядков для обратной функции.*

Подобным же образом можно поступать и в случае так называемого параметрического задания функции.

Определение 3. *Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определены в некоторой окрестности точки t_0 и одна из них, например $x = x(t)$, непрерывна и строго монотонна в указанной окрестности; тогда существует обратная к $x(t)$ функция $t = t(x)$, и в некоторой окрестности точки $x_0 = x(t_0)$ имеет смысл композиция $y(t(x))$. Эта функция y от x и называется параметрически заданной формулами $x = x(t)$, $y = y(t)$ функцией.*

Выведем формулы для дифференцирования параметрически заданных функций.

Если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют в точке t_0 производные и если $x'(t_0) \neq 0$, то параметрически заданная функция $y(t(x))$ также имеет в точке $x_0 = x(t_0)$ производную, причем

$$y'_x = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}. \tag{10.5}$$

В самом деле, по правилу дифференцирования сложной функции имеем (опуская обозначение аргумента)

$$y'_x = y'_t t'_x; \tag{10.6}$$

по правилу же дифференцирования обратной функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \tag{10.7}$$

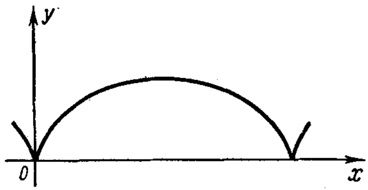


Рис. 39

Из формул (10.6) и (10.7) и следует формула (10.5).

Если, кроме того, существуют $x''_{tt}(t_0)$ и $y''_{tt}(t_0)$, то существует и $y''_{xx}(x_0)$ причем

$$y''_{xx} = (y'_x)_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)_t t'_x = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}.$$

Аналогично вычисляются *производные более высокого порядка параметрически заданных функций.*

Рассмотрим в качестве примера параметрически заданную функцию

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad (a \neq 0, \ -\infty < t < +\infty). \tag{10.8}$$

Ее график называется *циклоидой* (рис. 39). Пусть для определенности $a > 0$; тогда функция $x(t) = a(t - \sin t)$ строго монотонно возрастает. Действительно, пусть $\Delta t > 0$, тогда, замечая, что $0 < \sin\frac{\Delta t}{2} < \frac{\Delta t}{2}$, имеем

$$x(t + \Delta t) - x(t) = a\{\Delta t - [\sin(t + \Delta t) - \sin t]\} =$$
$$= a\left[\Delta t - 2\cos\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\sin\frac{\Delta t}{2}\right] > a\left(\Delta t - 2 \cdot 1 \cdot \frac{\Delta t}{2}\right) = 0,$$

что и означает строго монотонное возрастание функции $x(t)$. В силу этого существует однозначная обратная функция $t=t(x)$.

Далее, $x'_t=a(1-\cos t)=2a\sin^2\frac{t}{2}\geqslant 0$, $y'_t=a\sin t$, и x'_t обращается в ноль только в точках вида $t=2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Поэтому, если $t\neq 2k\pi$, то, согласно правилу дифференцирования функции, заданной параметрически, имеем

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\sin t}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2};$$

$$y''_{xx}=\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'_x=\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'_x\frac{1}{x'_t}=-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

Упражнение 1. Доказать, что циклоида (10.8) является траекторией точки окружности радиуса a, катящейся без скольжения по оси x-в.

10.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В настоящем пункте мы для удобства будем иногда вместо символа дифференцирования d писать букву δ, т. е. вместо dy, dx писать δy, δx.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на некотором интервале (a, b). Как известно, ее дифференциал

$$dy=f'(x)\,dx,$$

который называется также ее первым дифференциалом, зависит от двух переменных: x и dx. Пусть $f'(x)$, в свою очередь, дифференцируема в некоторой точке $x_0\in(a, b)$. Тогда дифференциал в этой точке функции dy, рассматриваемой как функция только от x (т. е. при некотором фиксированном dx), если для его обозначения использовать символ δ, имеет вид

$$\delta(dy)=\delta[f'(x)\,dx]|_{x=x_0}=[f'(x)\,dx]'|_{x=x_0}\delta x=f''(x_0)\,dx\,\delta x.$$

Определение 4. *Значение дифференциала $\delta(dy)$, т. е. дифференциала от первого дифференциала, в некоторой точке x_0 при $dx=\delta x$ называется вторым дифференциалом функции f в этой точке и обозначается через d^2y, т. е.*

$$d^2y=f''(x_0)\,dx^2. \tag{10.9}$$

Заметим, что в силу этого определения $d^2x=0$, ибо при вычислении дифференциалов мы считаем приращение $dx=\Delta x$ постоянным.

Подобным же образом в случае, когда производная $(n-1)$-го порядка $y^{(n-1)}$ дифференцируема в точке x_0 или, эквивалентно, когда при $x=x_0$ существует производная n-го порядка $y^{(n)}$, определяется *дифференциал n-го порядка* d^ny функции $y=f(x)$

в точке x_0 как дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка $d^{n-1}y$, в котором взято $\delta x = dx$:

$$d^n y = \delta\,(d^{n-1}y)\,|_{\delta x = dx}.$$

Покажем, что справедлива формула

$$d^n y = y^{(n)}\,dx^n, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots \tag{10.10}$$

Ее доказательство проведем по индукции. Для $n=1$ и $n=2$ она доказана. Пусть эта формула верна для дифференциалов порядка $n=1$:

$$d^{n-1}y = y^{(n-1)}\,dx^{n-1}.$$

Тогда, согласно данному выше определению, для вычисления дифференциала n-го порядка $d^{(n)}y$ необходимо вычислить сначала дифференциал (мы его обозначим символом δ) от $d^{n-1}y$:

$$\delta\,(d^{n-1}y) = \delta\,(y^{(n-1)}\,dx^{n-1}) = (y^{(n-1)}\,dx^{n-1})'\,\delta x = y^{(n)}\,\delta x\,dx^{n-1},$$

а затем положить $\delta x = dx$:

$$d^n y = \delta\,(d^{n-1}y)\,|_{\delta x = dx} = y^{(n)}\,dx^n. \quad \square$$

Из формулы (10.10) следует, что

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}. \tag{10.11}$$

Отметим некоторые свойства дифференциалов высших порядков.

1°. $d^n(y_1 + y_2) = d^n y_1 + d^n y_2$.

2°. $d^n(cy) = c\,d^n y$, c — постоянная.

3°. $d^n(y_1 y_2) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\,dy_1^{n-k}\,dy_2^k$, или, употребляя символическую запись,

$$d^n(y_1 y_2) = (dy_1 + dy_2)^{\{n\}},$$

где выражение $(dy_1 + dy_2)^{\{n\}}$ записывается по биномиальной формуле Ньютона, т. е. представляет собой сумму вида $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\,d^{n-k}y_1\,d^k y_2$; при этом для любой функции u считается, что $d^0 u = u^{(0)}\,dx^0 = u$.

Эти свойства непосредственно следуют из соответствующих формул для производных n-го порядка (см. (10.1), (10.2), (10.3) и (10.10)).

Важное замечание. Формулы (10.10) и (10.11) справедливы, вообще говоря, при $n > 1$ (в отличие от случая $n = 1$) только тогда, когда x является независимым переменным. В случае дифференциалов высших порядков по зависимым переменным дело обстоит сложнее.

Пусть $z=z(y)$, $y=y(x)$, имеет смысл суперпозиция $z[y(x)]$ и функции $z(y)$ и $y(x)$ дважды дифференцируемы. Тогда

$$dz=z'_y\,dy,$$

дифференцируя еще раз и не прибегая для простоты к символу δ, т. е. считая запись $d(dz)$ равносильной записи $\delta(dz)|_{\delta x=dx}$ (так всегда и поступают на практике), причем здесь под $\delta(dz)$ понимается дифференциал по x от функции $dz=z'_y(y)\,dy=$ $=z'_y[y(x)]\,y'_x(x)\,dx$, получаем

$$d^2z=d(dz)=d(z'_y\,dy)=d(z'_y)\,dy+z'_y\,d(dy)=z''_{yy}\,dy^2+z'_y\,d^2y \qquad (10.12)$$

(мы написали $dz'_y=z''_{yy}\,dy$ на основании формулы (9.26), т. е. использовав инвариантность первого дифференциала).

Сравнивая формулы (10.9) и (10.12), мы видим, что они отличаются вторым членом, и так как, вообще говоря, $d^2y\neq0$, то они существенно различны. Деля обе части равенства (10.12) на dx^2, мы получаем формулу второй производной для сложной функции:

$$z''_{xx}=z''_{yy}y'^2_x+z'_y y''_{xx},$$

которая была нами получена раньше (см. (10.4)) другим путем.

Подобным же образом могут быть вычислены дифференциалы и производные высших порядков сложной функции.

Упражнения. Вычислить производные и дифференциалы:

2. $y^{(8)}$ для функции $y=\sqrt{x}$.
3. $y^{(50)}$ для функции $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$.
4. $y^{(n)}$ для функции $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.
5. $y^{(n)}$ для функции $y=\sin^2 x$.
6. $y^{(n)}$ для функции $y=x\operatorname{ch} x$.
7. d^ny для функции $y=x^ne^x$.
8. d^ny для функции $y=\dfrac{\ln x}{x}$.
9. y''_{xx} для функции $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$.
10. y'''_{xxx} для функции $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.
11. y'_x и y''_{xx} для функции $x=y-a\sin y$.
12. y'_x и y''_{xx} для функции $x^2+2xy-y^2=1$.

§ 11. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

11.1. ТЕОРЕМА ФЕРМА

Если функция f имеет в некоторой точке x_0 конечную или бесконечную производную, то $f(x)$ называется функцией, имеющей при $x=x_0$ производную в широком смысле.

Теорема 1 (Ферма *)). *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и принимает в этой точке наиболь-*

*) П. Ферма́ (1601—1665) — французский математик.

шее или наименьшее значение. Тогда, если при $x=x_0$ существует производная в широком смысле, то она равна нулю.

Доказательство. Пусть функция f определена в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и принимает для определенности при $x=x_0$ наибольшее значение, т. е. для всех $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$. Тогда, если $x < x_0$, то

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0, \tag{11.1}$$

а если $x > x_0$, то

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0. \tag{11.2}$$

Если существует производная в широком смысле, т. е. если существует конечный или бесконечный, определенного знака, предел

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

то, перейдя к пределу при $x \to x_0 - 0$ в неравенстве (11.1), получаем $f'(x_0) \geqslant 0$; аналогично из неравенства (11.2) при $x \to x_0 + 0$ находим $f'(x_0) \leqslant 0$. Эти неравенства выполняются одновременно лишь при $f'(x_0) = 0$. □

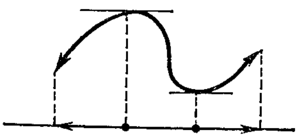


Рис. 40

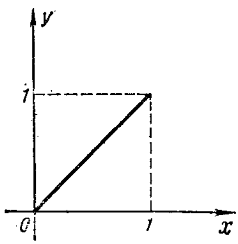


Рис. 41

Геометрическая интерпретация теоремы Ферма состоит в том, что если при $x=x_0$ функция f принимает наибольшее или наименьшее значение на некоторой окрестности точки x_0, то касательная к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ параллельна оси Ox (рис. 40).

Замечание. Если функция f принимает наибольшее или наименьшее значение при $x=x_0$ по сравнению с ее значениями в некоторой односторонней окрестности точки x_0 и имеет в x_0 (одностороннюю) производную, то эта производная может не равняться нулю. Так, например, функция $f(x)=x$, рассматриваемая на отрезке $[0,1]$, принимает при $x=0$ минимальное, а для $x=1$ — максимальное значение, однако, как в той, так и в другой точке производная равна единице (см. рис. 41).

11.2. ТЕОРЕМЫ РОЛЛЯ, ЛАГРАНЖА И КОШИ О СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ

Теорема 2 (Ролль *)). *Пусть функция* f

1) *непрерывна на отрезке* $[a, b]$;

2) *имеет в каждой точке интервала* (a, b) *производную в широком смысле*;

3) *принимает равные значения на концах отрезка, т. е.* $f(a)=f(b)$; *тогда существует хотя бы одна такая точка* ξ, $a<\xi<b$, *что* $f'(\xi)=0$.

Доказательство. Мы уже знаем, что функция, непрерывная на отрезке, принимает наибольшее и наименьшее значения в некоторых точках этого отрезка (см. п. 6.1). Пусть $M=\max f(x)$, $m=\min f(x)$; тогда для всех $x\in[a, b]$ выполняется неравенство $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

Если $m=M$, то функция f постоянна и, значит $f'\equiv 0$ на $[a, b]$. В качестве точки ξ можно взять любую точку интервала (a, b).

Если же $m\neq M$, то из условия $f(a)=f(b)$ следует, что хотя бы одно из значений m или M не принимается на концах отрезка. $[a, b]$. Пусть этим значением является M, т. е. существует такая точка $\xi\in(a, b)$, что $f(\xi)=M$, и, значит, в этой точке ξ функция f принимает наибольшее значение и на интервале (a, b). Поэтому из теоремы Ферма следует, что $f'(\xi)=0$. □

Геометрически теорема Ролля означает, что у графика непрерывной на отрезке и дифференцируемой внутри него функции, принимающей на его концах одинаковые значения, существует точка, в которой касательная параллельна оси абсцисс (рис. 42).

Заметим, что все предпосылки теоремы Ролля существенны. Чтобы в этом убедиться, достаточно привести примеры функций, для которых выполнялись бы два из трех условий теоремы, третье же не выполнялось и у которых не существует точки ξ, такой, что $f'(\xi)=0$. (При этом в силу условия 3, в котором говорится о значениях функции в концевых точках промежутка, следует рассматривать лишь функции, определенные на отрезках.)

Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[0,1]$ и равная x, если $0\leqslant x<1$, и 0, если $x=1$, удовлетворяет условиям 2 и 3, но не удовлетворяет условию 1 (рис. 43).

Функция $f(x)=|x|$, $x\in[-1; 1]$ удовлетворяет условиям 1 и 3, но не удовлетворяет условию 2 (рис. 44).

Наконец, функция $f(x)=x$, $x\in[0; 1]$ удовлетворяет условиям 1 и 2, но не удовлетворяет условию 3 (см. рис. 41).

Для всех этих функций не существует точки, в которой их производная обращалась бы в ноль.

---

*) М. Ролль (1652—1719) — французский математик.

Обратим внимание на то, что по условиям теоремы Ролля отрезок $[a, b]$ может содержать точки, в которых функция имеет бесконечную производную, т. е. в которых либо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$, либо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$. Это требование нельзя ослабить, заменив его условием $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$. Например, для функции $f(x)=\sqrt{|x|}$,

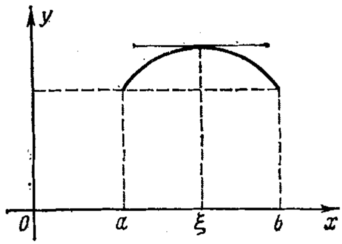


Рис. 42

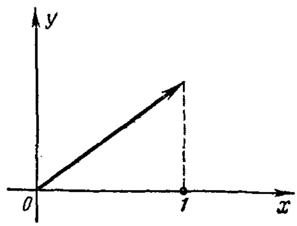


Рис. 43

$-1\leqslant x\leqslant 1$, не существует точки $\xi\in[-1, +1]$, в которой производная этой функции обращалась бы в ноль. Вместе с тем функция $f(x)=\sqrt{|x|}$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля на отрезке $[-1, 1]$, за исключением того, что в точке $x=0$ эта функция не имеет ни конечной, ни бесконечной производной. В самом деле, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$, причем этот предел не является бесконечностью определенного знака.

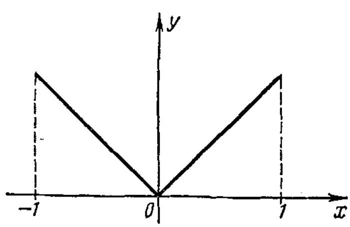


Рис. 44

Этот пример показывает целесообразность определения бесконечной производной только как бесконечности определенного знака.

Заметим, что построением соответствующих примеров (если, конечно, это удается сделать) и проверяют обычно в математике существенность тех или иных условий доказываемых теорем.

В дальнейшем мы не будем проводить проверки необходимости условий теорем, предоставляя это делать читателю по мере внутренней потребности.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[a, b]$, то функция $F(x)=f(x)-f(a)$ равна нулю на его концах и $F'(x)=f'(x)$, в частности эти производные одновременно обращаются в ноль. Поэтому теорема Ролля равносильна утверждению: если функция непрерывна на некотором отрезке, обращается в ноль на его концах и дифференцируема во всех его внутренних точках, то существует его внутренняя точка, в которой производная обращается в ноль. Коротко говоря,

между двумя нулями дифференцируемой функции всегда лежит хотя бы один ноль ее производной.

Упражнения 1. Доказать, что если функция f удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[a, b]$ и не является постоянной, то на этом отрезке существуют такие точки ξ_1 и ξ_2, что $f'(\xi_1)>0$ и $f'(\xi_2)<0$.

2. Привести пример функции, непрерывной на отрезке $[a, b]$, имеющей производную в каждой точке интервала (a, b), но не имеющей производной (односторонней) в точке a.

Теорема 3. (Лагранж*)). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в каждой точке интервала (a, b) имеет производную в широком смысле, то в этом интервале существует по крайней мере одна такая точка ξ, что*

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a). \tag{11.3}$$

Эта теорема является, очевидно, обобщением теоремы Ролля.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\lambda x \tag{11.4}$$

и определим число λ таким образом, чтобы $F(a)=F(b)$, т. е. чтобы $f(a)-\lambda a=f(b)-\lambda b$. Это равносильно тому, что

$$\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{11.5}$$

Для функции F выполняются все условия теоремы Ролля. Действительно, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция λx, будучи линейной, непрерывна на всей числовой оси; поэтому и функция $F(x)=f(x)-\lambda x$ также непрерывна на отрезке $[a, b]$. Функция f имеет во всех точках интервала (a, b) конечную или бесконечную производную, а функция λx — конечную производную во всех точках числовой оси, поэтому их разность $F(x)$ также имеет всюду в интервале (a, b) конечную или бесконечную производную (см. замечание в п. 9.5). Наконец, на концах отрезка $[a, b]$ в силу выбора λ (см. (11.5)) функция $\bar{f}$ принимает одинаковые значения. Поэтому существует хотя бы одна такая точка ξ, $(a<\xi<b)$, что $F'(\xi)=0$. Из (11.4) получаем $F'(x)=$ $=f'(x)-\lambda$, поэтому $f'(\xi)-\lambda=0$. Подставляя сюда λ из (11.5), получим

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \ \square \tag{11.6}$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в следующем. Пусть $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ — концы графика функции f, AB — хорда, соединяющая точки A и B (рис. 45). Тогда отноше-

*) Ж.-Л. Лагранж (1736—1813) — французский математик и механик.

ние $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно тангенсу угла β между хордой AB и осью Ox, т. е.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\operatorname{tg}\beta,$$

а производная $f'(\xi)$, как известно (см. п. 9.3), равна тангенсу угла α между касательной к графику функции f в точке $(\xi, f(\xi))$ и положительным направлением оси Ox, т. е. $f'(\xi)=\operatorname{tg}\alpha$. Поэтому равенство (11.6) может быть переписано в виде

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta.$$

Таким образом, теорема Лагранжа показывает, что в интервале (a, b) должна найтись точка ξ (может быть, и не одна, см. рис. 35, где условию теоремы удовлетворяют точки ξ' и ξ''), в которой касательная к графику параллельна хорде AB.

Теорема Лагранжа найдет ряд важных приложений в дальнейшем.

Приведем другие формы записи формулы (11.3). Пусть $a<\xi<b$ и $\frac{\xi-a}{b-a}=\theta$. Тогда

$$\xi=a+\theta(b-a), \quad 0<\theta<1. \tag{11.7}$$

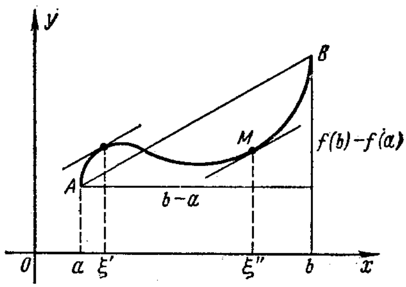


Рис. 45

Наоборот, если ξ выражается формулой (11.7), то, как легко видеть, $a<\xi<b$. Таким образом, в виде (11.7) могут быть представлены все точки интервала (a, b) и только они. Поэтому формула (11.3) может быть записана в виде

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a), \quad 0<\theta<1. \tag{11.8}$$

Положим теперь $a=x$, $b-a=\Delta x$ и, значит, $b=x+\Delta x$; тогда (11.8) перепишется в виде

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x, \quad 0<\theta<1. \tag{11.9}$$

Формула (11.9), а также равнозначная ей формула (11.3) и (11.8), называется *формулой конечных приращений Лагранжа*, или просто *формулой конечных приращений* в отличие от приближенного равенства

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x, \tag{11.10}$$

которое называют иногда формулой бесконечно малых приращений. Она выражает тот факт, что левая и правая части приближенного равенства (11.10) равны между собой для дифференцируемой в точке x функции f «с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем приращение Δx при $\Delta x \to 0$».

Замечание. Формула Лагранжа (11.3) может быть представлена в виде

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),$$

где $a<b$. Таким образом, она справедлива не только при $a<b$, но и для $a>b$.

Отметим три следствия из теоремы Лагранжа, полезные для дальнейшего.

Следствие 1. *Пусть функция f*

1) *определена на некотором промежутке (конечном или бесконечном);*

2) *имеет производную, равную нулю во всех его внутренних точках;*

3) *непрерывна в концевых точках рассматриваемого промежутка, входящих в него;*

тогда функция f постоянна на указанном промежутке.

Действительно, каковы бы ни были две точки x_1 и x_2, $x_1<x_2$, рассматриваемого промежутка, функция f, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[x_1, x_2]$ и, значит,

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),$$

где $x_1<\xi<x_2$. Но, по условию 2 следствия, $f'(\xi)=0$, и, значит, $f(x_1)=f(x_2)$ для любых двух точек x_1 и x_2 из области определения функции f, что и означает, что функция f постоянна. $\square$

Следствие 2. *Если функции f и g дифференцируемы во всех внутренних точках некоторого промежутка и в этих точках*

$$f'=g',$$

а на концах промежутка, которые в него входят, функции f и g непрерывны, то эти функции отличаются на рассматриваемом промежутке лишь на постоянную

$$f-g=c.$$

Действительно, функция $F=f-g$ удовлетворяет условиям следствия 1, в частности, $F'=f'-g'=0$ во внутренних точках промежутка и поэтому $F=c$. $\square$

Следствие 3. *Пусть функция φ*

1) *непрерывна на интервале (a, b);*

2) *дифференцируема во всех точках интервала (a, b), кроме, быть может, некоторой точки $x_0 \in (a, b)$;*

3) *существует $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi'(x)$; тогда существует и производная $\varphi'(x_0)$, причем*

$$\varphi'(x_0)=\lim_{x\to x_0} \varphi'(x).$$

Действительно, пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi'(x) = A$. Если $a < x < b$ и $x \neq x_0$, то по теореме Лагранжа $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(x - x_0)$, где $\xi \in (x_0, x)$, если $x > x_0$, и $\xi \in (x, x_0)$, если $x < x_0$, откуда

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(\xi).$$

Будем для определенности считать, что $x > x_0$. Точка $\xi = \xi(x)$ является функцией от x и притом, вообще говоря, многозначной. Выберем произвольно для каждого $x \in (a, b)$ одно какое-либо значение ξ, тогда получим однозначную функцию $\xi(x)$ (как говорят, однозначную ветвь многозначной функции). Поскольку $x_0 < \xi(x) < x$, то

$$\lim_{x \to x_0} \xi(x) = x_0.$$

Применяя правило замены переменного для пределов функций (см. п. 4.8*), получим, что существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \varphi'(\xi) = A,$$

а следовательно, существует и предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = A.$$

Это и означает, что производная $\varphi'(x_0)$ существует и равна A. $\square$

Упражнение 3. Пусть функция f непрерывна на интервале (a, b) и дифференцируема во всех точках этого интервала, кроме, быть может, некоторой точки $x_0 \in (a, b)$. Пусть существуют $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f'(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x)$, причем они не равны между собой. Доказать, что при этих предположениях производная $f'(x_0)$ не существует.

В теоремах Ролля и Лагранжа (а также и в нижеследующей теореме Коши) речь идет о существовании некоторой точки ξ, $a < \xi < b$, ее можно назвать «средней точкой», для которой выполняется то или иное равенство. Этим и объясняется название «теоремы о среднем» для этой группы теорем. Докажем последнее нужное нам утверждение этого типа.

Теорема 4 (Коши). *Пусть функции f и g*

1) *непрерывны на отрезке* $[a, b]$;
2) *имеют производные в каждой точке интервала* (a, b);
3) $g' \neq 0$ *во всех точках интервала* (a, b).

Тогда существует такая точка ξ, $a < \xi < b$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{11.11}$$

Заметим, что из условий теоремы следует, что формула (11.11) имеет смысл, т. е. $g(a) \neq g(b)$. В самом деле, если $g(a) = g(b)$, то функция g удовлетворяла бы условиям теоремы Ролля и, значит, нашлась бы такая точка ξ, что $g'(\xi)=0$, $a<\xi<b$, что противоречило бы условию 3.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\lambda g(x), \tag{11.12}$$

где число λ выберем таким образом, чтобы $F(a)=F(b)$, т. е. чтобы $f(a)-\lambda g(a)=f(b)-\lambda g(b)$. Для этого нужно взять

$$\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \tag{11.13}$$

Функция F удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, следовательно, существует такая точка ξ, $a<\xi<b$, что $F'(\xi)=0$. Но из (11.12) $F'(x)=f'(x)-\lambda g'(x)$, а поэтому

$$f'(\xi)=\lambda g'(\xi)=0,$$

откуда следует, что

$$\lambda=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{11.14}$$

Сравнивая (11.13) и (11.14), получим формулу (11.11), обычно называемую *формулой конечных приращений Коши*. □

Отметим, что формула конечных приращений Лагранжа является частным случаем формулы конечных приращений Коши, в котором $g(x)=x$. Мы привели независимые доказательства этих формул, во-первых, из-за той важной роли, которую играет формула Лагранжа, а во-вторых, чтобы иметь возможность, используя одну и ту же идею (построения вспомогательной функции, удовлетворяющей условиям теоремы Ролля), применить ее дважды в доказательствах, причем сначала для большей наглядности в более простом случае.

Формула Коши (11.11), так же как и формула Лагранжа (11.3), справедлива не только если $a<b$, но и для $a>b$.

Упражнение 4. Пусть $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$. Применим к этой функции на отрезке $[0, x]$ формулу Лагранжа:

$$x^2\sin\frac{1}{x}=\left(2\xi\sin\frac{1}{\xi}-\cos\frac{1}{\xi}\right)x,$$

где $0<\xi<x$. Сократим обе части равенства на x при $x\neq 0$:

$$x\sin\frac{1}{x}=2\xi\sin\frac{1}{\xi}-\cos\frac{1}{\xi}.$$

Переходя здесь к пределу при $x\to 0$ (при этом, очевидно, $\xi\to 0$), получаем

$$\lim_{\xi\to 0}\cos\frac{1}{\xi}=0,$$

так как два других слагаемых, очевидно, стремятся к нулю. Вместе с тем предел функции $\cos\frac{1}{\xi}$ при стремлении аргумента к нулю не существует! Где ошибка?

Задача 7 (**Дарбу** *)). Доказать, что если функция дифференцируема на отрезке, то ее производная, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное.

§ 12. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ПО ПРАВИЛУ ЛОПИТАЛЯ

Во многих случаях отыскание предела функции, заданной аналитически, при стремлении аргумента к некоторой точке (числу или к одной из бесконечностей ∞, $+\infty$ или $-\infty$) выполняемое путем формальной подстановки соответствующего значения вместо аргумента в формулу, задающую рассматриваемую функцию, приводит к выражениям вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 или 1^∞. Они называются *неопределенностями*, так как по ним нельзя судить о том, существует или нет указанный предел, не говоря уже о нахождении его значения, если он существует. В этом случае вычисление предела называется также «*раскрытием неопределенности*».

Наряду с основным приемом, нахождения пределов функции — методом выделения главной части, существуют и другие способы отыскания пределов. Некоторые из них, носящие общее название *правил Лопиталя* **), мы изложим в этом параграфе.

12.1. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВИДА 0/0

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на отрезке $[a, b]$, таковы, что:*

1) $f(a)=g(a)=0$;

2) *существуют производные (правосторонние) $f'(a)$ и $g'(a)$ причем $g'(a)\neq 0$.*

Тогда существует предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Доказательство. Применим метод выделения главной части. В силу условия 2 имеем (см. п. 9.2).

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a),$$
$$g(x)=g(a)+g'(a)(x-a)+o(x-a).$$

Отсюда, согласно условию 1, получим, что

$$f(x)=f'(a)(x-a)+o(x-a),\quad g(x)=g'(a)(x-a)+o(x-a),$$

*) Г. Дарбу (1842—1917) — французский математик.

**) Г. Лопиталь (1661—1704) — французский математик.

а поэтому

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(a)+\dfrac{o(x-a)}{x-a}}{g'(a)+\dfrac{o(x-a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(x)}. \ \square$$

В теореме 1 предполагалось существование производных в точке a. Докажем теперь теорему, близкую по содержанию к предыдущей, в которой, однако, не будет предполагаться существование производных $f'(a)$ и $g'(a)$.

Теорема 2. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$:

1) *дифференцируемы на интервале* (a, b);
2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=0$;
3) $g'(x)\neq 0$ *для всех* $x\in(a, b)$;
4) *существует конечный или бесконечный, равный* $+\infty$ *или* $-\infty$, *предел* $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. В силу условий теоремы функции f и g не определены в точке a; доопределим их, положив $f(a)=g(a)=0$. Теперь f и g непрерывны в точке a и удовлетворяют условиям теоремы Коши о среднем значении (см. п. 11.2) на любом отрезке $[a, x]$, где $a<x<b$. Поэтому для каждого x, $a<x<b$, существует такое $\xi=\xi(x)\in(a, x)$, что

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{12.1}$$

причем $\lim\limits_{x\to a+0}\xi(x)=a$.

Поэтому, если существует $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$, то из правила замены переменного для пределов функций следует, что существует и $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=k$. Теперь из (12.1) получаем

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=k. \ \square$$

Теоремы 1 и 2 остаются верными с естественными видоизменениями, как в случае левостороннего, так и двустороннего предела.

Теорема 3. *Пусть функции* f *и* g:

1) *дифференцируемы при* $x>c$;
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$;

3) $g'(x) \neq 0$ *для всех* $x > c$;

4) *существует конечный или бесконечный, равный* $+\infty$ *или* $-\infty$, *предел*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда существует и предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $c > 0$ (если $c < 0$, то в качестве нового значения c возьмем, например, $c = 1$).

Выполним замену переменного $x = \frac{1}{t}$. Функции $\varphi(t) = f(1/t)$ и $\psi(t) = g(1/t)$ определены на интервале $(0, 1/c)$; если $x \to +\infty$, то $t \to +0$ и наоборот. На интервале $(0, 1/c)$ существуют производные

$$\varphi'(t) = -f'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2} \quad \text{и} \quad \psi'(t) = -g'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2},$$

где штрихом обозначены производные функций f и g по первоначальному аргументу.

Из сказанного и условий теоремы следует, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют на интервале $\left(0, \frac{1}{c}\right)$ условиям 1, 2 и 3 теоремы 2. Покажем еще, что из существования предела $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, который обозначим через k, следует существование предела $\lim\limits_{t \to +0} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$ и равенство его k, т. е. что выполняется и условие 4 теоремы 2. Действительно, используя полученные выражения для производных $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, находим

$$\lim_{t \to +0} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{t \to +0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

Теперь из теоремы 2, примененной к функциям $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, следует, что $\lim\limits_{t \to +0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = k$. Но

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

где $x = \frac{1}{t}$, поэтому

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to +0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = k. \quad \square$$

Эта теорема остается верной с соответствующим видоизменением, и при $x \to -\infty$.

12.2. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ВИДА ∞/∞

Теорема 4. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$:

1) *дифференцируемы на интервале* (a, b);

2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=\infty$;

3) $g'(x)\neq 0$ *на* (a, b);

4) *существует конечный или бесконечный, равный* $+\infty$ *или* $-\infty$, *предел*

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{12.2}$$

Тогда существует и предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Пусть сначала предел (12.2) конечен; обозначим его через k:

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k.$$

Покажем, что и

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=k.$$

Для этого выберем точки x_0 и x так, чтобы $a<x<x_0<b$. Тогда на отрезке $[x, x_0]$ функции f и g будут удовлетворять условиям теоремы Коши. Поэтому согласно этой теореме существует такая точка $\xi\in(x, x_0)$, что

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

(Очевидно, точка ξ зависит от выбора точек x и x_0, т. е. $\xi=\xi(x, x_0)$). Найдем из этой формулы отношение $f(x)/g(x)$. Переписав ее в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)}\,\frac{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

получим

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,\frac{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}. \tag{12.3}$$

Как бы ни выбирать при заданном x_0 точку ξ так, чтобы выполнялось неравенство $a<\xi=\xi(x, x_0)<x_0$, в силу условия 4) теоремы будем иметь

$$\lim_{x_0\to a+0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=k,$$

а при фиксированном x_0 в силу условия 2) теоремы получим

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}=1.$$

Однако, в правой части формулы (12.3) нельзя просто воспользоваться теоремой о пределе произведения функций, так как пределы стоящих там сомножителей берутся при разных условиях: в одном случае точка x_0 стремится к точке a, а в другом — точка x_0 фиксирована, а к точке a стремится точка x. Тем не менее каково бы ни было $\varepsilon>0$, всегда можно выбрать x_0 так, чтобы отношение $f'(\xi)/g'(\xi)$ было столь близко к числу k для всех $\xi\in(a, x_0)$, а затем выбрать такое $\delta>0$, чтобы отношение $\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}$ было столь близко к 1 для всех $x\in(a, a+\delta)$, что в результате для всех указанных x выполнялось неравенство

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-k\right|<\varepsilon.$$

Собственно говоря, теорема в случае конечного предела (12.2) доказана, и на этом месте можно поставить знак $\square$.

Для полноты изложения сделаем некоторые разъяснения отдельных этапов доказательства, которые, впрочем, каждый, кто достаточно хорошо овладел предшествующим материалом, легко может провести самостоятельно.

Прежде всего, производилось деление на $f(x)$ и $g(x)$. Для обоснования этого надо показать, что для соответствующих значений справедливы неравенства $f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$. Конечно, эти неравенства не имеют места, вообще говоря, при любом выборе точки $x\in(a, b)$, но они справедливы для всех x, достаточно близких к точке a. В самом деле, в силу условия 2) теоремы существует такое $\delta_1>0$, что для всех $x\in(a, a+\delta_1)$ выполняются неравенства $|f(x)|>0$, $|g(x)|>0$. Поэтому, если выбрать x_0 так, что $a<x_0<a+\delta_1$, то x будет также удовлетворять этому неравенству, т. е. $a<x<a+\delta_1$, и, следовательно, деление на $f(x)$ и $g(x)$ будет заведомо возможно.

Далее производилось деление на $1-f(x_0)/f(x)$. Это также возможно для всех x достаточно близких к точке a. Действительно, в силу условия $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ существует такое δ_2, что для всех x, удовлетворяющих условию $a<x<a+\delta_2$, справедливо неравенство $|f(x)|>|f(x_0)|$, а поэтому и неравенство $1-\frac{f(x_0)}{f(x)}\neq$ $\neq 0$. При этом выберем δ_2 так, чтобы $\delta_2<\delta_1$ — это всегда возможно.

Таким образом, формула (12.3) заведомо справедлива для всех таких x и x_0, что $a<x<x_0<a+\delta_2$.

Далее, для заданного $\varepsilon>0$ в силу существования конечного предела

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k,$$

найдется такое $\delta_3>0$, что для всех $x\in(a, a+\delta_3)$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-k\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{12.4}$$

при этом выберем δ_3 еще и так, чтобы $\delta_3<\delta_1$, а выбор x_0 подчиним условию $a<x_0<a+\delta_3$.

Положим теперь,

$$\alpha_1\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-k, \quad x<\xi<x_0. \tag{12.5}$$

Точка ξ, а потому и функция α_1, зависят от точек x_0 и x, однако при сделанном их выборе, т. е. при

$$a<x<x_0<a+\delta_3,$$

будем иметь $a<\xi<a+\delta_3$, и, следовательно, в силу неравенства (12.4) будет выполняться неравенство

$$|\alpha_1|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{12.6}$$

Положим далее

$$\alpha_2(x)\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}-1. \tag{12.7}$$

Очевидно, в силу условия 2) теоремы имеем

$$\lim_{x\to a+0}\alpha_2(x)=0. \tag{12.8}$$

Из (12.3), (12.5) и (12.7) следует, что

$$f(x)/g(x)=(k+\alpha_1)(1+\alpha_2(x))=k+\alpha_1+(k+\alpha_1)\alpha_2(x). \tag{12.9}$$

Выберем теперь δ_ε, $0<\delta_\varepsilon<\delta_3$, так, чтобы при $a<x<a+\delta_\varepsilon$ выполнялось неравенство

$$(|k|+|\alpha_1|)|\alpha_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{12.10}$$

для чего в силу (12.6) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$|\alpha_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2(|k|+\varepsilon)}.$$

Это возможно в силу (12.8).

Из неравенств (12.6) и (12.10) следует, что для всех x, удовлетворяющих условию $a<x<a+\delta_\varepsilon$, выполняется неравенство

$$|\alpha_1+(k+\alpha_1)\alpha_2(x)|\leqslant|\alpha_1|+(|k|+|\alpha_1|)|\alpha_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

и потому из (12.9) следует, что $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-k\right|<\varepsilon$ при $a<x<a+\delta_\varepsilon$. Это и означает существование предела

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=k.$$

Так раскрываются на «языке неравенств» сделанные выше высказывания о выборе достаточно близких значений x_0 и x к точке a, обеспечивающих нужную близость отношения $f(x)/g(x)$ к числу k.

Рассмотрим теперь случай бесконечного предела.

Пусть $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$. Тогда в некоторой окрестности точки a имеем $f'(x)\neq 0$ (почему?) и $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0$. Поэтому, согласно доказанному выше, $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$, откуда следует, что $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

Но нужно доказать более сильное утверждение, а именно — что этот предел равен $+\infty$. Покажем это. Поскольку, согласно предположению, $\frac{f'(x)}{g'(x)}\to+\infty$ при $x\to a+0$, то существует такое $\eta_1>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $a<x<a+\eta_1$, будем иметь

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}>0.$$

Далее, зафиксируем x_0, $a<x_0<a+\eta_1$, так как нам придется снова использовать формулу (12.3).

Наконец, выберем η_2, $0<\eta_2<x_0-a$, так, чтобы для всех $x\in(a,\ a+\eta_2)$ имели место неравенства $|f(x)|>|f(x_0)|$, $|g(x)|>|g(x_0)|$, вследствие чего

$$1-\frac{f(x_0)}{f(x)}>0,\quad 1-\frac{g(x_0)}{g(x)}>0. \tag{12.11}$$

Тогда для всех x, удовлетворяющих условию $a<x<a+\eta_2$, выполняются неравенства (12.11),

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}>0,\quad \text{где}\quad x<\xi=\xi(x)<x_0,$$

и справедлива формула (12.3). Из нее следует, что для всех указанных x

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0.$$

Из доказанного выше утверждения $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ следует теперь, что $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Аналогично рассматривается случай

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty. \ \square$$

Теорема 4 вместе с ее доказательством остается в силе с естественными видоизменениями, и при $x \to a-0$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, а также в случае двусторонних пределов.

Можно показать, что при выполнении условий 1, 2 и 3, входящих в любую из теорем 2, 3 или 4, не может существовать предел $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ без существования одного из двух «знакоопределенных» бесконечных пределов $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$.

Задача 8. Доказать, что если выполнены условия 1, 2 и 3 теоремы 4 и $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, то либо $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$, либо $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$.

Примеры. 1. Найдем $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$. Замечая, что

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0,$$

получаем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

Это означает, что при $x \to +\infty$ функция $\ln x$ растет медленнее, чем любая положительная степень переменной x.

Иногда правило Лопиталя приходится применять несколько раз.

2. Найдем $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x}$, где n — натуральное число и $a > 1$. Имеем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^n)'}{(a^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{a^x \ln^n a} = 0. \tag{12.12}$$

Таким образом при $x \to +\infty$ любая степень x^n растет медленнее, чем показательная функция a^x, $a > 1$.

3. Следует иметь в виду, что проведение вычислений по образцу (12.12) оправдано только в том случае, когда в результате получается конечный или бесконечный предел. Так, например, было бы ошибкой написать

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'},$$

так как предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

не существует.

В самом деле, беря последовательности $x_n'=2\pi n\to+\infty$ и $x_n''=\frac{\pi}{2}+2\pi n\to+\infty$ при $n\to\infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos x_n'}{1+\cos x_n'}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos x_n''}{1+\cos x_n''}=1.$$

Вместе с тем данная неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ может быть раскрыта элементарным путем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=1.$$

Упражнение 1. Пусть $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $g(x)=\sin x$. Найти $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}$ и доказать, что в этом случае правило Лопиталя неприменимо.

4. Неопределенности 0^0, ∞^0 или 1^∞ можно раскрыть, предварительно прологарифмировав соответствующие функции. Например, чтобы найти $\lim\limits_{x\to+0}x^x$, следует найти предел

$$\lim_{x\to+0}x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{1/x^2}=-\lim_{x\to+0}x=0.$$

Поэтому в силу непрерывности показательной функции

$$\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}e^{x\ln x}=1.$$

Неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ следует привести к виду $0/0$ или ∞/∞. При этом, как и всегда при применении правила Лопиталя, по ходу вычислений рекомендуется упрощать получающиеся выражения. Поясним это на примере.

5. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}$. Заметим, что

$$\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}\,\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}.$$

Предел первого сомножителя правой части находится непосредственно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{\sin x}\cos x\right)=2,$$

а предел второго — путем применения правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\frac{x}{\sin x}\cos x}=\frac{1}{3}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)=2/3.$

Упражнения. Найти пределы:

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-x^a}{x-a}$, $a>0$.
3. $\lim\limits_{x\to +0}x^{\varepsilon}\ln x$, $\varepsilon>0$.
4. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x-1/x)$.

§ 13. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

13.1. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

Если функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то ее приращение можно представить в виде

$$\Delta y=A\,\Delta x+o(\Delta x),\quad \Delta x\to 0,$$

где $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x)-y_0$, $y_0=f(x_0)$ и $A=f'(x_0)$, т. е. $f(x)=y_0+A(x-x_0)+o(x-x_0)$. Иначе говоря, существует линейная функция

$$P_1(x)=y_0+A(x-x_0)\tag{13.1}$$

такая, что

$$f(x)=P_1(x)+o(x-x_0),\quad x\to x_0,$$

причем

$$P_1(x_0)=y_0=f(x_0),\quad P_1'(x_0)=A=f'(x_0).$$

Поставим более общую задачу. Пусть функция f имеет в точке x_0 n производных. Требуется выяснить, существует ли многочлен $P_n(x)$ степени не выше n, такой, что

$$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0,\tag{13.2}$$

и

$$f(x_0)=P_n(x_0),\quad f'(x_0)=P_n'(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)=P_n^{(n)}(x_0).\tag{13.3}$$

Будем искать этот многочлен, по аналогии с формулой (13.1), в виде

$$P_n(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots+A_n(x-x_0)^n.$$

Замечая, что $P_n(x_0)=A_0$, из первого условия (13.3), т. е. $f(x_0)=P_n(x_0)$, имеем $A_0=f(x_0)$. Далее,

$$P_n'(x)=A_1+2A_2(x-x_0)+\ldots+nA_n(x-x_0)^{n-1},$$

отсюда $P_n'(x_0)=A_1$, и так как $P_n'(x_0)=f'(x_0)$, то $A_1=f'(x_0)$. Затем найдем вторую производную многочлена $P_n(x)$:

$$P_n''(x)=2\cdot 1\cdot A_2+\ldots+n(n-1)A_n(x-x_0)^{n-2}.$$

Отсюда и из условия $f''(x_0)=P_n''(x_0)$ получим $A_2=\frac{f''(x_0)}{2!}$ и вообще

$$A_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

В силу самого построения, для многочлена

$$P_n(x)=$$
$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

выполнены все соотношения (13.3). Проверим, удовлетворяет ли он условию (13.2).

Пусть

$$r_n(x)\stackrel{\text{def}}{=}f(x)-P_n(x).$$

Из условия (13.3) следует, что

$$r_n(x_0)=r_n'(x_0)=\ldots=r_n^{(n)}(x_0)=0. \tag{13.4}$$

Поэтому, применяя n раз правило Лопиталя для раскрытия неопределенности $\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}$ при $x\to x_0$, а именно сначала $n-1$ раз теорему 2 из § 12, а затем теорему 1 того же параграфа, получаем:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x_0)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}=\frac{r^n(x_0)}{n!}=0,$$

т. е. действительно $r_n(x)=o((x-x_0)^n)$, $x\to x_0$.

Итак, доказана следующая очень важная теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ определенная на интервале $(a,\ b)$, имеет в точке $x_0\in(a,\ b)$ производные до порядка n включительно. Тогда при $x\to x_0$*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n), \tag{13.5}$$

или $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$.

Эта теорема остается справедливой, вместе с ее доказательством, и для функции f, определенной на отрезке $[a,\ b]$, при $x_0\in[a,\ b]$, если для $x_0=a$ и $x_0=b$ под производными понимать соответствующие односторонние производные.

Формула (13.5), называется *формулой Тейлора**) *n-го порядка с остаточным членом в форме Пеано.*

Многочлен

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{n!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{13.6}$$

называется *многочленом Тейлора,* а функция

$$r_n(x)=f(x)-P_n(x) \tag{13.7}$$

— *остаточным членом n-го порядка формулы Тейлора.* Как показано, остаточный член $r_n(x)$ является бесконечно малой, при $x\to x_0$, более высокого порядка, чем все члены многочлена Тейлора (13.6).

Укажем другой вид записи формулы (13.5). Полагая

$$x-x_0=\Delta x,\quad \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

получим

$$\Delta y=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\Delta x^k+o(\Delta x),\quad \Delta x\to 0. \tag{13.5'}$$

Если в формуле (13.5) $x_0=0$, то получается частный вид формулы Тейлора, называемый обычно *формулой Маклорена***):

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n),\quad x\to 0. \tag{13.8}$$

Доказанная теорема позволяет любую функцию, удовлетворяющую условиям этой теоремы заменить, в окрестности некоторой точки, многочленом с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем члены многочлена. Таким многочленом является многочлен Тейлора. Величина погрешности дается при этом остаточным членом.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано дает единообразный метод выделения главной части функции в окрестности данной точки. На этом обстоятельстве и основаны многочисленные и разнообразные приложения формулы (13.5) в различных вопросах анализа.

Отметим полезное следствие из теоремы 1.

Следствие. *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b), и пусть в точке x она имеет производные до порядка $n+1$*

*) Б. Тейлор (1685—1731) — английский математик.

**) К. Маклорен (1698—1746) — шотландский математик.

включительно. Тогда при $x \to x_0$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+O(x-x_0)^{n+1}. \tag{13.9}$$

Действительно, в силу теоремы 1 при $x \to x_0$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^{n+1}), \tag{13.10}$$

и поскольку

$$\frac{f^{n+1}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+o((x-x_0)^{n+1})=O((x-x_0)^{n+1}) \text{ при } x \to x_0,$$

то из формулы (13.10) непосредственно следует формула (13.9). □

Упражнение 1. Доказать, что если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производную порядка n, то, каковы бы ни были точка x этой окрестности и функция $\psi(t)$, непрерывная на отрезке с концами в точках x_0 и x, имеющая неравную нулю производную внутри этого отрезка, найдется такая точка ξ, лежащая между x_0 и x, что для остаточного члена $r_{n-1}(x)$ формулы Тейлора функции $f(x)$ имеет место формула

$$r_{n-1}(x)=\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(\xi)}\,\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1},\quad n=1,\ 2,\ \ldots.$$

Получить отсюда следующие виды записи остаточного члена:

$$r_{n-1}(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!\,p}(x-x_0)^p(x-\xi)^{n-p},\quad p>0 \quad \text{(форма Шлёмильха—Роша *)}.$$

$$r_{n-1}(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{(форма Лагранжа)},$$

$$r_{n-1}(x)=\frac{f^{(n)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x-x_0)^n,\quad 0<\theta<1 \quad \text{(форма Коши)}.$$

Указание. Рассмотреть вспомогательную функцию

$$\varphi(t)=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

и применить к функциям φ и ψ теорему Коши о среднем значении. Для вывода остаточного члена в виде Шлёмильха—Роша положить $\psi(t)=(x-t)^p$.

13.2. МНОГОЧЛЕН ТЕЙЛОРА КАК МНОГОЧЛЕН НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ В ОКРЕСТНОСТИ ДАННОЙ ТОЧКИ

Заметим предварительно, что, очевидно, всякий многочлен

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}A_kx^k \tag{13.11}$$

---

* О. Шлёмильх (1823—1901) — немецкий математик. Э. Рош (1820—1883) — французский астроном и математик.

может быть представлен, для любого x_0, в виде

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k. \tag{13.12}$$

В самом деле, достаточно в (13.11) положить $x=x_0+h$ и разложить правую часть по степеням h; тогда

$$P_n(x)=a_0+a_1h+\ldots+a_nh^n, \text{ где } h=x-x_0,$$

т. е. мы получили формулу (13.12).

Многочлен Тейлора порядка n является многочленом, наилучшим образом среди всех многочленов степени n приближающим функцию f «в бесконечно малой окрестности» точки x_0, т. е. при $x\to x_0$. При этом такой многочлен оказывается единственным. Более точно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция f дифференцируема до порядка n включительно в точке x_0 и пусть*

$$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0, \tag{13.13}$$

где $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ — некоторый многочлен степени, меньшей или равной n. Тогда

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n, \tag{13.14}$$

т. е. $P_n(x)$ является многочленом Тейлора.

Иначе говоря, никакой многочлен степени, меньшей или равной n, отличный от многочлена Тейлора порядка n, не может приближать данную функцию с точностью до $o((x-x_0)^n)$ при $x\to x_0$ (а значит, и с более высокой точностью $o((x-x_0)^k)$, $k>n$).

Доказательство. Из формул (13.5) и (13.13) следует, что

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0$$

откуда, перейдя к пределу при $x\to x_0$ получим $a_0=f(x_0)$. Отбрасывая слева и справа этот член, сокращая оставшиеся в обеих частях выражения на $x-x_0$ $(x\ne x_0)$ и замечая, что

$$o((x-x_0)^n)=\varepsilon(x)(x-x_0)^n, \text{ где } \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0,$$

и, значит, при $x \to x_0$

$$\frac{o((x-x_0)^n)}{x-x_0} = \varepsilon(x)(x-x_0)^{n-1} = o((x-x_0)^{n-1}),\quad n=1, 2, \ldots,$$

получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k-1} + o((x-x_0)^{n-1}) = \\ = \sum_{k=1}^{n} a_k (x-x_0)^{k-1} + o((x-x_0)^{n-1}).$$

Перейдя снова к пределу при $x \to x_0$ будем иметь $a_1 = f'(x_0)$. Продолжая таким же образом, получим

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\quad k=0,\ 1,\ 2, \ldots, n. \ \square$$

Единственность представления функции в виде (13.13) может быть иногда использована для ее разложения по формуле Тейлора. Именно, если удается каким-либо косвенным путем получить представление (13.13), то в силу теоремы 2 можно утверждать, что это и есть разложение по формуле Тейлора (13.5), т. е. что коэффициенты найденного многочлена выражаются по формулам (13.14).

Так, например, соотношение (13.12) представляет собой разложение многочлена (13.11) по формуле Тейлора, причем в этом случае $r_n(x) \equiv 0$, поэтому согласно теореме 2 коэффициенты многочлена (13.12) имеют вид

$$a_k = \frac{P_n^k(x_0)}{k!}.$$

Таким образом,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

В частности, при разложении многочлена степени n по формуле Тейлора остаток n-го порядка тождественно равен нулю.

Пусть требуется разложить по формуле Тейлора функцию $f(x) = 1/(1-x)$ в окрестности точки $x_0 = 0$. Замечая, что $1/(1-x)$ есть не что иное как сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,\quad |x| < 1,$$

и полагая $r_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$, $|x| < 1$, получим

$$1/(1-x) = 1 + x + \ldots + x^n + r_n(x),$$

где $r_n(x)=O(x^{n+1})$ и, значит, $r_n(x)=o(x^n)$ при $x\to 0$. Таким образом, представление

$$1/(1-x)=1+x+\ldots+x^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n} x^k+o(x^n),\quad x\to 0.$$

и есть разложение функции $1/(1-x)$, по формуле Тейлора в окрестности нуля.

13.3. ПРИМЕРЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ФОРМУЛЕ ТЕЙЛОРА

1. $f(x)=\sin x$. Функция $\sin x$ обладает производными всех порядков. Найдем для нее формулу Тейлора при $x_0=0$, т. е. формулу Маклорена (13.8). Было доказано (см. п. 10.1), что $(\sin x)^{(m)}=\sin\left(x+m\frac{\pi}{2}\right)$, поэтому

$$f^{(m)}0=\sin\frac{m\pi}{2}=\begin{cases}0 \text{ для } m=2k,\\ (-1)^k \text{ для } m=2k+1,\end{cases}\quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{13.15}$$

и согласно формуле (13.5),

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}),$$

при $x\to 0$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, или, короче,

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2}) \text{ при } x\to 0.$$

Мы записали здесь остаточный член в виде $o(x^{2n+2})$, а не в виде $o(x^{2n+1})$, так как следующий за последним выписанным слагаемым член многочлена Тейлора в силу (13.15) равен нулю.

2. $f(x)=\cos x$. Как известно (см. п. 10.1), $f^{(m)}(x)=\cos\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)$, а поэтому

$$f^{(m)}(0)=\cos\frac{m\pi}{2}=\begin{cases}0 \text{ для } m=2k+1,\\ (-1)^k \text{ для } m=2k,\end{cases}\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

и

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

при $x\to 0$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, или, короче,

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1}) \text{ при } x\to 0,$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

3. $f(x)=e^x$. Поскольку $(e^x)^{(n)}=e^x$, то $f^{(n)}(0)=1$, $n=0, 1, \ldots$, следовательно,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n), \qquad (13.16)$$

при $x\to 0$, $n=0, 1, 2, \ldots$, или, короче,

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n) \text{ при } x\to 0.$$

Отсюда, заменяя x через $-x$, получим

$$e^{-x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}+o(x^n) \text{ при } x\to 0,\ n=0, 1, 2, \ldots \qquad (13.17)$$

4. $\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ и $\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Сложив и вычтя (13.16) и (13.17), будем иметь

$$\operatorname{sh} x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2}),$$

$$\operatorname{ch} x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1}) \text{ при } x\to 0\ n=0, 1, 2, \ldots.$$

В силу единственности представления функции в указанном виде (см. теорему 2) полученные соотношения являются формулами Тейлора для функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$.

5. $f(x)=(1+x)^\alpha$, α — некоторое фиксированное число. Так как $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, то

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$$

и, следовательно,

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

при $x\to 0$, $n=0, 1, 2, \ldots$, или, короче,

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+o(x^n) \text{ при } x\to 0,$$
$$n=1, 2, \ldots.$$

6. $f(x)=\ln(1+x)$. Легко видеть, что

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1},\ f''(x)=-(1+x)^{-2}$$

и вообще $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+x)^{-k}$, $k=1,\ 2,\ \ldots$. Поэтому $f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, и так как $f(0)=0$, то

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

при $x\to 0$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, или, короче,

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^n)\ \text{при}\ x\to 0,\ n=1,\ 2,\ \ldots.$$

Замечание. В силу следствия теоремы 1, полученные формулы можно записать, используя символ O (O большое), следующим образом:

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+O(x^{2n+3}),$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+O(x^{2n+2}),$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+O(x^{n+1}),$$

$$\operatorname{sh} x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+O(x^{2n+3}),$$

$$\operatorname{ch} x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+O(x^{2n+2}),\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+O(x^{n+1}),$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+O(x^{n+1}),\ n=1,\ 2,\ \ldots,\ \text{при}\ x\to x_0.$$

Такая запись формул Тейлора в некоторых вопросах оказывается более удобной, чем их запись с символом o (o маленькое).

13.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА (МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ)

Формула Тейлора дает простое и весьма общее правило для выделения главной части функции. В результате этого метод вычисления пределов функций с помощью выделения главной части приобретает законченный алгоритмический характер.

Рассмотрим сначала случай неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Пусть требуется найти предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, где $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$. В этом случае рекомендуется разложить по формуле Тейлора функции f и g в окрестности точки x_0 (если, конечно, это возможно), ограничившись в этом разложении лишь первыми не равными нулю членами, т. е. взять разложения в виде

$$f(x) = a(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \qquad a \neq 0,$$
$$g(x) = b(x - x_0)^m + o((x - x_0)^m), \qquad b \neq 0,$$

тогда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)}{b(x - x_0)^m + o((x - x_0)^m)} =$$
$$= \frac{a}{b} \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{n-m} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n > m, \\ \frac{a}{b}, & \text{если} \quad n = m, \\ \infty, & \text{если} \quad n < m. \end{cases}$$

Часто бывает удобно для разложения функций f и g по формуле Тейлора использовать готовый набор разложений элементарных функций, полученный в п. 13.3. Для этого следует в случае $x_0 \neq 0$ предварительно выполнить замену переменного $t = x - x_0$; тогда $x \to x_0$ будет соответствовать $t \to 0$. Случай $x \to \infty$ заменой переменного $x = \frac{1}{t}$ сводится к случаю $t \to 0$.

Если имеется неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, т. е. требуется найти $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, где $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, то ее легко привести к рассмотренному случаю $\frac{0}{0}$ преобразованием $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$.

Подобно вычислению пределов с помощью правила Лопиталя, при применении метода выделения главной части к раскрытию неопределенностей вида $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$ их следует преобразовать к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Наконец, для раскрытия неопределенностей вида 0^0, ∞^0 и 1^∞ указанным методом, необходимо предварительно прологарифмировать рассматриваемые функции.

Посмотрим на примерах, как применяется формула Тейлора к вычислению пределов функций. Пусть требуется найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

Заметив, что (см. п. 13.3)

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3),\quad e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3/3+o(x^3)}{x^3/6+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3/3}{x^3/6}=2.$$

Рассмотрим неопределенность вида $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]^2-x^2}{x^2\,[x+o(x)]^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^2\,[x^2+o(x^2)]}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{3}}{x^4}=-\frac{1}{3}.$$

В качестве последнего примера вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$, т. е. раскроем неопределенность вида 1^∞. Согласно общему правилу, найдем предел логарифма выражения, стоящего под знаком предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{x+o(x^2)}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+o(x))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}}=1.$$

Упражнения. Найти пределы:

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{e^x-1-x-x^2/2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x-x^2)}{x\sin x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sqrt[4]{1-x^2}-4e^{x^3}+\ln(1+x^2)}{\operatorname{arctg} x-\sin x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})+2x^3}{x^5}$.

§ 14. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

14.1. ПРИЗНАК МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ

Теорема 1. *Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a, b) функция f возрастала (убывала) на этом интервале необходимо и достаточно, чтобы во всех его точках производная была неотрицательной, $f'(x) \geqslant 0$ (соответственно, неположительной, $f'(x) \leqslant 0$).*

Если всюду на (a, b) производная положительна: $f'(x) > 0$ (соответственно отрицательна: $f'(x) < 0$), то функция f строго возрастает (строго убывает) на рассматриваемом интервале.

Необходимость. Если функция f возрастает (убывает) на (a, b), то для любой точки $x_0 \in (a, b)$ при $\Delta x > 0$ имеем $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geqslant 0$ $(\Delta y \leqslant 0)$. Поэтому $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$ $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0\right)$; перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем $f'(x_0) \geqslant 0$ $(f'(x_0) \leqslant 0)$.

Достаточность. Пусть $a < x_1 < x_2 < b$. Тогда по формуле Лагранжа (см. п. 11.2) $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где $x_1 < \xi < x_2$. Так как $x_2 - x_1 > 0$, то при $f'(x) \geqslant 0$ на (a, b) (откуда следует, что в частности $f'(\xi) \geqslant 0$) будем иметь $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, т. е. функция f возрастает. Аналогично, при $f'(x) \leqslant 0$ на (a, b) имеем $f'(\xi) \leqslant 0$ и, следовательно, $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, т. е. функция f убывает.

Если же $f'(x) > 0$ на (a, b), то $f'(\xi) > 0$ и поэтому $f(x_2) > f(x_1)$, т. е. функция f строго возрастает. Пусть теперь $f'(x) < 0$ на (a, b); тогда $f'(\xi) < 0$, следовательно, $f(x_2) < f(x_1)$, т. е. функция f строго убывает. ☐

Отметим, что условия $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ не являются необходимыми для строгого возрастания, соответственно строгого убывания, функции, показывают примеры функций $f_1(x) = x^3$ и $f_2(x) = -x^3$. Первая из них строго возрастает, а вторая строго убывает на всей числовой оси, но для $x = 0$ их производные обращаются в ноль.

Теорема остается верной для непрерывных функций, не имеющих в конечном числе точек производной. Утверждение второй части теоремы остается в силе, если кроме того, в конечном числе точек производная обращается в ноль. Например,

если функция непрерывна на некотором интервале и имеет всюду в нем положительную (отрицательную) производную, кроме, быть может, конечного числа точек, в которых производная обращается в ноль или не существует, то функция строго монотонно возрастает (соответственно строго монотонно убывает) на рассматриваемом интервале.

Это непосредственно следует из теоремы 1: достаточно ее последовательно применить ко всем промежуткам, на которые разбивается заданный интервал указанным конечным множеством точек.

Пример. Исследуем функцию

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при} \quad 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Функция f дифференцируема (а, следовательно, и непрерывна) на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. В специальной проверке нуждается лишь существование производной в точке $x=0$. Применяя, например, дважды правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t - t}{t^2} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cos t - 1}{2t} = -\frac{1}{2} \lim_{t \to 0} \sin t = 0.$$

Это и означает, что существует $f'(0) = 0$.

Для всех $x \neq 0$ имеем

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x) < 0,$$

ибо $x < \operatorname{tg} x$, если $0 < x < \pi/2$ (см. доказательство леммы 1 в п. 8.1). Следовательно, функция f строго убывает на отрезке $[0, \pi/2]$, и поэтому $f(0) > f(x) > f(1)$, т. е.

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{14.1}$$

14.2. ОТЫСКАНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ

Определение 1. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда x_0 называется точкой максимума (соответственно точкой минимума) функции f, если существует такое $\delta > 0$, что для всех Δx удовлетворяющих условию $|\Delta x| < \delta$, выполняется неравенство $f(x_0 + \Delta x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x_0 + \Delta x) \geqslant f(x_0)$).*

Если существует такое $\delta > 0$, что для всех $\Delta x \neq 0$, таких, что $|\Delta x| < \delta$, выполняется неравенство $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$), то *$x_0$ называется точкой строгого максимума (соответственно строгого минимума).*

Точки (строгого) максимума и минимума называются точками (строгого) экстремума.

Для точек x_0 строгого экстремума функции f, и только для них, приращение $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ не меняет знака при переходе аргумента через x_0, т. е. при изменении знака Δx. Именно

$\Delta f < 0$ для точек строгого максимума и $\Delta f > 0$ в случае строгого минимума независимо от знака достаточно малого $\Delta x \neq 0$.

Теорема 2 (необходимые условия экстремума). *Пусть x_0 является точкой экстремума функции f, определенной в некоторой окрестности точки x_0. Тогда либо производная $f'(x_0)$ не существует, либо $f'(x_0) = 0$.*

Действительно, если x_0 является точкой экстремума для функции f, то найдется такая окрестность $U(x_0, \delta)$, что значение функции f в точке x_0 будет наибольшим или наименьшим на этой окрестности. Поэтому, если в точке x_0 существует производная, то она, согласно теореме Ферма (см. п. 11.1), равна нулю.

Отметим, что условие $f'(x_0) = 0$ не является, для дифференцируемой при $x = x_0$ функции, достаточным условием наличия экстремума, как это показывает пример функции $f(x) = x^3$, которая для $x = 0$ имеет производную, равную нулю, но для которой $x = 0$ не является точкой экстремума.

Упражнение 1 (достаточные условия экстремума). Пусть функция f определена на интервале (a, b) и непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$. Доказать, если f (строго) возрастает на интервале (a, x_0) и (строго) убывает на (x_0, b), то x_0 является точкой (строгого) максимума; если же функция f (строго) убывает на (a, x_0) и (строго) возрастает на (x_0, b), то x_0 является точкой (строгого) минимума.

Теорема 3 (достаточные условия строгого экстремума). *Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки $x_0 \in (a, b)$, в которой она является, однако, непрерывной. Если производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через x_0 (это означает, что существует такое число $\delta > 0$, что значения производной f' имеют один и тот же знак всюду в $(x_0 - \delta, x_0)$ и противоположный знак для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$), то x_0 является точкой строгого экстремума.*

При этом, если для $x_0 - \delta < x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а для $x_0 + \delta > x > x_0$ — неравенство $f'(x) < 0$, то x_0 является точкой строгого максимума, а если для $x_0 - \delta < x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а для $x_0 + \delta > x > x_0$ — неравенство $f'(x) > 0$, то x_0 является точкой строгого минимума (рис. 46).

Доказательство. Рассмотрим случай $f'(x) > 0$ для $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ для $x > x_0$, где x принадлежит окрестности точки x_0, указанной в условиях теоремы. По теореме Лагранжа (см. п. 11.2)

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

где ξ лежит на интервале с концами x_0 и x.

Если $x < x_0$, то $x - x_0 < 0$ и $f'(\xi) > 0$, так как $x < \xi < x_0$. Если $x > x_0$, то $x - x_0 > 0$ и $f'(\xi) < 0$, так как в этом случае $x_0 < \xi < x$. Таким образом, всегда $\Delta f < 0$, т. е. точка x_0 является точкой строгого максимума. Аналогично рассматривается второй случай. $\square$

Из п. 14.1 следует, что если функция имеет всюду в некоторой проколотой окрестности данной точки x_0 производную одного и того же знака, а в самой точке x_0 производная либо равна нулю, либо не существует, однако сама функция непрерывна, т. е. если производная непрерывной функции «не меняет знака» при переходе через точку x_0, то эта точка заведомо *не является точкой экстремума* рассматриваемой функции (более того, функция в указанной окрестности строго возрастает или убывает в зависимости от того, положительна или отрицательна производная в точках $x \neq x_0$).

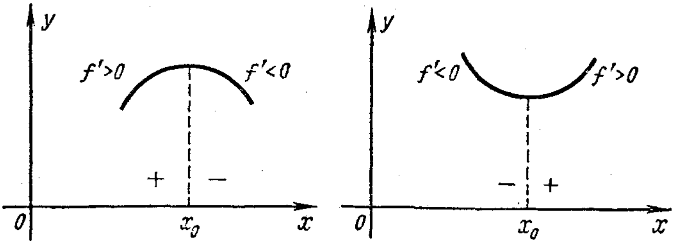


Рис. 46

Объединяя это утверждение с доказанной выше теоремой 3, получим следующий результат.

Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, непрерывна при $x = x_0$, имеет всюду в рассматриваемой окрестности кроме, может быть, точки x_0, производную и эта производная с каждой стороны от x_0 сохраняет постоянный знак (следовательно, можно говорить о сохранении или перемене знака у производной при переходе через x_0), то для того, чтобы при $x = x_0$ функция достигала экстремума необходимо и достаточно, чтобы производная меняла знак при переходе через точку x_0.

Следует, однако, обратить внимание на то, что рассмотренным здесь случаем, т. е. случаем, когда можно в указанном смысле говорить о перемене знака производной при переходе через точку x_0, не исчерпываются возможные ситуации (даже для всюду дифференцируемых функций): может случиться, что в сколь угодно малых односторонних окрестностях точки x_0 производная функции меняет знак. В этом случае приходится применять другие методы для исследования функции на экстремум при $x = x_0$.

Поэтому в классе всех дифференцируемых функций теорема 3 дает лишь достаточные условия строгого экстремума.

Задача 9. Построить пример функции, которая дифференцируема на интервале, достигает в некоторой его точке x_0 строгого экстремума, а ее производная в любой окрестности точки x_0 (как слева, так и справа от нее) принимает и положительные и отрицательные значения (таким образом показать, что условие изменения знака производной в данной точке, являясь достаточным для наличия строгого экстремума, не является вместе с тем необходимым).

Введем еще одно понятие, которым будем пользоваться в дальнейшем.

Определение 2. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Будем называть x_0 точкой возрастания (убывания) функции f, если существует такое $\delta > 0$, что при $x_0 - \delta < x < x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x) > f(x_0)$), а при $x_0 < x < x_0 + \delta$ — неравенство $f(x) > f(x_0)$ (соответственно $f(x) < f(x_0)$).*

Таким образом, точки возрастания и убывания функции f характеризуются тем, что при переходе через них приращение Δf меняет знак, а именно с «—» на «+» в точке возрастания и с «+» на «—» в точке убывания (рис. 47).

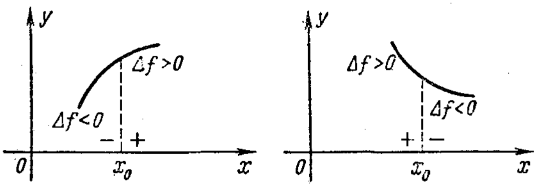


Рис. 47

Не следует думать, что если функция определена на интервале, то всякая точка этого интервала является либо точкой экстремума функции, либо точкой возрастания, либо точкой убывания: могут существовать точки, не принадлежащие ни к одному из указанных типов. Например, точка $x = 0$ для функции

$$y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases} \tag{14.2}$$

не является ни точкой экстремума, ни точкой возрастания, ни точкой убывания.

Производная функции (14.2) равна (см. пример 8 в п. 9.7)

$$y' = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, & (14.3') \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. & (14.3'') \end{cases}$$

Таким образом функция (14.2) дифференцируема на всей числовой оси. При $x = 0$ ее производная имеет разрыв второго рода, ибо

$$\lim_{x \to 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} \right) = 0, \tag{14.4}$$

а второе слагаемое в правой части равенства (14.3′), т. е. $-\cos\frac{1}{x}$, не имеет предела при $x\to 0$. Кроме того это слагаемое, изменяясь в любой односторонней окрестности точки $x=0$ от -1 до $+1$, бесконечно много раз меняет знак. Отсюда, в силу формул (14.3′) и (14.3″) и (14.4) следует, что и производная функции (14.2) в любой сколь угодно малой односторонней окрестности нуля также меняет знак. Общий характер поведения функции (14.2) изображен на рис. 48.

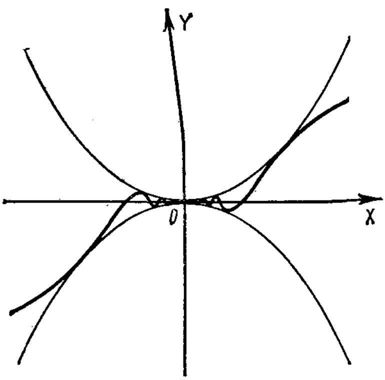


Рис. 48

Сформулируем теперь основанные на использовании производных высших порядков достаточные условия наличия строгого экстремума, а также точек возрастания и убывания.

Теорема 4. *Пусть в точке x_0 у функции f существуют производные до порядка $n\geqslant 1$ включительно, причем*

$$f^{(i)}(x_0)=0 \quad \text{для} \quad i=1,\ \ldots,\ n-1, \qquad f^{(n)}(x_0)\neq 0. \tag{14.5}$$

Тогда, если $n=2k$, $k=1, 2, \ldots$, т. е. n — четное число, то функция f имеет в точке x_0 строгий экстремум, а именно максимум при $f^{(2k)}(x_0)<0$ и минимум при $f^{(2k)}(x_0)>0$. Если же $n=2k+1$, $k=0, 1, \ldots$, т. е. n — нечетное число, то функция f не имеет в точке x_0 экстремума; в этом случае x_0 является точкой возрастания при $f^{(2k+1)}(x_0)>0$ и убывания при $f^{(2k+1)}(x_0)<0$.

Предпошлем доказательству теоремы одно простое замечание.

Если $\beta(x)=o(\alpha(x))$ при $x\to x_0$, то существует такое $\delta>0$, что при $|x-x|<\delta$, $x\neq x_0$, справедливо неравенство

$$|\beta(x)|\leqslant\frac{1}{2}|\alpha(x)|. \tag{14.6}$$

В самом деле,

$$\beta(x)=\varepsilon(x)\,\alpha(x), \tag{14.7}$$

где $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$ и, следовательно, существует такое δ, что при $|x-x_0|<\delta$, $x\neq x_0$, выполняется неравенство

$$|\varepsilon(x)|<\frac{1}{2}. \tag{14.8}$$

Из (14.7) и (14.8) и следует (14.6).

Доказательство. Прежде всего заметим, что поскольку f имеет в точке x_0 производную порядка $n\geqslant 1$, то (согласно определению производной) производная порядка $n-1$ рассматриваемой функции определена в некоторой окрестности точки x_0. Поэтому и сама функция f также определена, во всяком случае в той же окрестности точки x_0.

Напишем формулу Тейлора n-го порядка для функции f в окрестности точки x_0. В силу (13.5') и условий (14.5) будем иметь

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \alpha(x), \tag{14.9}$$

где

$$\alpha(x) = o(\Delta x^n), \qquad \Delta x \to 0,$$

и, значит (см. п. 8.2),

$$\alpha(x) = o\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n\right), \quad \Delta x \to 0.$$

Поэтому, согласно сделанному замечанию, существует такое $\delta > 0$, что при $|\Delta x| < \delta$, $\Delta x \neq 0$,

$$|\alpha(x)| < \frac{1}{2}\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n\right|.$$

Отсюда следует, что при $|\Delta x| < \delta$, $\Delta x \neq 0$, знак правой части равенства (14.9), а значит и знак Δf совпадает со знаком первого слагаемого правой части.

Если $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, то в (14.9) Δx возводится в четную степень, поэтому знак Δf не зависит от знака $\Delta x \neq 0$, и, значит, x_0 является точкой строгого экстремума, причем точкой строгого максимума при $f^{(2k)}(x_0) < 0$ (в этом случае $\Delta f < 0$) и строгого минимума при $f^{(2k)}(x_0) > 0$ (в этом случае $\Delta f > 0$).

Если же $n = 2k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то Δx возводится в нечетную степень, поэтому знак Δf меняется вместе с изменением знака Δx, и, значит, x_0 не является точкой экстремума. Если Δx меняет знак с «—» на «+», то при $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$ приращение Δf меняет знак с «—» на «+», и, значит, x_0 является точкой возрастания функции f, а при $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$ приращение Δf меняет знак с «+» на «—», и, значит, x_0 является точкой убывания функции f. □

Из доказанной теоремы вытекают, в частности, при $n = 1$ и $n = 2$ два следствия.

1. *Если $f'(x_0) > 0$, то x_0 является точкой возрастания функции; если $f'(x_0) < 0$, то x_0 — точка убывания функции.*

2. *Если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то при $f''(x_0) > 0$ x_0 является точкой строгого минимума, а при $f''(x_0) < 0$ — точкой строгого максимума функции f (рис. 49).*

Следствие 1 остается в силе и для бесконечных производных: если $f'(x_0) = +\infty$ (соответственно $f'(x_0) = -\infty$), то x_0 является точкой возрастания (соответственно, убывания) функции. В самом деле, если, например, $f'(x_0) = +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ и, в частности, для $\varepsilon = 1$ существует такое $\delta > 0$, что при всех Δx, удовлетворяющих условию $|\Delta x| < \delta$, имеет место неравенство $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 1$. Поэтому при $0 < \Delta x < \delta$ имеем $\Delta y > \Delta x > 0$, а при $-\delta < \Delta x < 0$ — аналогично $\Delta y < \Delta x < 0$, т. е. x_0 — точка возрастания. Подобным же образом рассматривается случай $f'(x_0) = -\infty$.

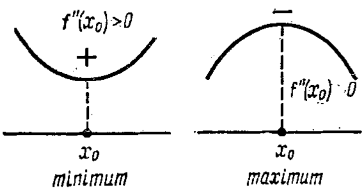


Рис. 49

Заметим, что из первого следствия еще раз вытекает теорема Ферма (см. теорему 1 п. 11.1). Действительно, если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке экстремум, то производная в x_0 не может быть ни положительной, ни отрицательной, так как в противном случае функция либо возрастала, либо убывала бы в этой точке. Следовательно, производная в x_0 или не существует, или, если существует, необходимо равна нулю.

Отметим еще, что из теоремы 4 непосредственно вытекает следующий критерий наличия точек экстремума.

Пусть у функции f в точке x_0 существуют производные до порядка $n \geqslant 1$ включительно, причем

$$f^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда для того чтобы при $x = x_0$ функция достигала экстремума, необходимо и достаточно, чтобы n было четным числом.

Все полученные правила справедливы лишь в том случае, когда функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Однако об экстремуме функции можно говорить не только в этом случае: пусть функция f определена на некотором числовом множестве E; будем называть $x_0 \in E$ *точкой максимума* (*минимума*) *), если существует такое $\delta > 0$, что если $x \in E$ и $|x - x_0| < \delta$, то $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(x_0)$). Подобным же образом определяются в этом случае и понятия строгого максимума и строгого минимума, следует лишь знаки нестрогих неравенств заменить знаками строгих неравенств и дополнительно потребовать, чтобы $x \neq x_0$.

Например, если функция f определена на полуинтервале $[a, b)$, то точка a в указанном смысле может являться экстремальной. Заметим, однако, что производная (правосторонняя) в этой точке, вообще говоря, не обязана обращаться в ноль. Так, функция $y = x$, рассматриваемая на отрезке $[0, 1]$, имеет строгий минимум

---

*) Правильнее было бы добавить — локального, но не будем усложнять терминологию.

при $x=0$ и строгий максимум при $x=1$, однако в этих точках, как и всюду на отрезке $[0, 1]$, $y'=1$.

Выяснение обстоятельства, имеет или нет функция экстремум на концах промежутка, принадлежащего ее области определения (такой экстремум будем называть концевым), требует специального исследования.

Упражнение 2. Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$ и имеет производные при $x=a$ и $x=b$. Доказать, что если $f'_+(a)>0$ (соответственно $f'_-(b)<0$), то точка $x=a$ (соответственно $x=b$) является точкой строгого минимума, а если $f'_+(a)<0$ (соответственно $f'_-(b)>0$), то $x=a$ (соответственно $x=b$) является точкой строгого максимума.

Установленные нами теоремы лежат в основе метода, позволяющего единообразно решать многочисленные математические, физические и технические задачи, в которых ищутся экстремальные значения какой-либо величины.

Пусть, например, требуется определить наибольшее значение функции f на отрезке $[a, b]$. Может случиться, что это возможно сделать достаточно просто каким-либо способом, исходя из конкретного вида функции. Если же не видно, как это сделать, то следует найти все ее критические точки, лежащие на $[a, b]$ (точка, в которой функция определена, а ее производная либо равна нулю, либо не существует, обычно называется *критической точкой* этой функции). Затем из этих значений x необходимо, исходя из сказанного, отобрать те, в которых возможен максимум (можно заведомо отбросить точки, удовлетворяющие достаточным условиям наличия минимума). После этого достаточно сравнить между собой по величине значения функции в полученных точках и числа $f(a)$ и $f(b)$; наибольшее из этих чисел и будет наибольшим значением функции на отрезке $[a, b]$. Эта задача принципиально заведомо может быть решена, если множество критических точек конечно.

Если функция определена на полуинтервале (конечном или бесконечном), например на полуинтервале вида $[a, b)$, задача об определении ее наибольшего значения на этом полуинтервале требует дополнительных исследований; найдя множество указанных выше точек, надо изучить еще поведение функции при $x \to b-0$. Аналогичным образом решаются и задачи на определение наименьших значений функций.

Не следует, однако, думать, что изложенный метод позволяет находить точки экстремума данной функции с любой нужной степенью точности. Это не так, поскольку если пользоваться им, надо прежде всего уметь решать уравнение $f'(x)=0$ с заданной степенью точности, что является другой математической задачей. Как она решается с помощью дифференциального исчисления в тех случаях, когда точное решение уравнения не выписывается в явном виде, будет показано в дальнейшем (см. том 2, § 60).

Пример. Две точки движутся с постоянными скоростями v_1 и v_2 по двум прямым, образующим прямой угол в направлении вершины этого угла, от которой в начале движения первая точка находилась на расстоянии a, а вторая — на расстоянии b. Через какое время после начала движения расстояние между точками будет наименьшим?

Пусть $\rho=\rho(t)$ — расстояние между точками через время t после начала движения, которое будем считать начавшимся при $t=0$. Тогда

$$\rho^2(t)=(a-v_1t)^2+(b-v_2t)^2.$$

Функция $\rho(t)$, очевидно, достигает минимума при том же значении t, при котором достигает минимума функция $y=\rho^2(t)$.

Физически ясно, что расстояние $\rho(t)$ должно достигать минимума (тела начинают сближаться), а максимума заведомо нет, ибо $\rho(t)\to+\infty$ при $t\to+\infty$. В силу необходимого условия экстремума это может быть только в точке, в которой $y'=0$, и, так как $y'=-2v_1(a-v_1t)-2v_2(b-v_2t)$, то из условия $y'=0$ получаем единственное значение

$$t_0=\frac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2},$$

которое и дает ответ на поставленный вопрос.

14.3. ВЫПУКЛОСТЬ И ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Пусть функция f определена на интервале (a, b) и пусть $a<x_1<x_2<b$. Проведем прямую через точки $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$, лежащие на графике функции f. Ее уравнение будет

$$y=\frac{f(x_2)(x-x_1)+f(x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}.$$

Обозначим правую часть этого уравнения через $l(x)$; тогда оно кратко запишется в виде

$$y=l(x).$$

Очевидно, $l(x_1)=f(x_1)$, $l(x_2)=f(x_2)$.

Определение 3. *Функция f называется выпуклой вверх (выпуклой вниз) на интервале (a, b), если каковы бы ни были точки x_1 и x_2, $a<x_1<x_2<b$, для любой точки x_0 интервала (x_1, x_2), выполняется неравенство*

$$l(x_0)\leqslant f(x_0), \tag{14.7}$$

(соответственно

$$l(x_0)\geqslant f(x_0)). \tag{14.8}$$

Геометрически это означает, что любая точка хорды AB (т. е. отрезка прямой $y=l(x)$ с концами в точках A и B) лежит не выше (не ниже) точки графика функции f, соответствующей тому же значению аргумента (рис. 50).

Определение 4. *Если вместо* (14.7) *и* (14.8) *выполняются строгие неравенства* $l(x_0)<f(x_0)$ *и соответственно* $l(x_0)>f(x_0)$ *при любых* x_0, x_1 *и* x_2 *таких, что* $a<x_1<x_0<x_2<b$, *то функция* f *называется строго выпуклой вверх* (*строго выпуклой вниз*) *на интервале* (a, b).

В этом случае любая точка хорды AB, исключая ее концы, лежит ниже (выше) соответствующей точки графика функции.

Определение 5. *Всякий интервал, на котором функция* (*строго*) *выпукла вверх, соответственно вниз, называется интервалом* (*строгой*) *выпуклости вверх, соответственно вниз, этой функции.*

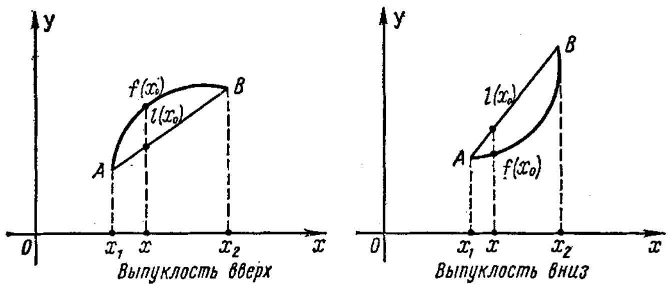


Рис. 50

Теорема 5 (достаточное условие строгой выпуклости). *Пусть функция* f *дважды дифференцируема на интервале* (a, b). *Тогда, если* $f''<0$ *на* (a, b), *то функция* f *строго выпукла вверх, а если* $f''>0$ *на* (a, b), *то функция* f *строго выпукла вниз на этом интервале.*

Доказательство. Пусть $a<x_1<x<x_2<b$. Тогда

$$l(x)-f(x)=\frac{f(x_2)(x-x_1)+f(x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}-f(x)\frac{(x-x_1)+(x_2-x)}{x_2-x_1}=$$

$$=\frac{[f(x_2)-f(x)](x-x_1)-[f(x)-f(x_1)](x_2-x)}{x_2-x_1}.$$

Применяя теорему Лагранжа (см. п. 11.2), получаем

$$l(x)-f(x)=\frac{f'(\eta)(x_2-x)(x-x_1)-f'(\xi)(x-x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}=$$

$$=\frac{[f'(\eta)-f'(\xi)](x_2-x)(x-x_1)}{x_2-x_1},$$

где $x_1<\xi<x<\eta<x_2$.

Применим снова теорему Лагранжа:

$$l(x)-f(x)=\frac{f''(\zeta)(x_2-x)(x-x_1)(\eta-\xi)}{x_2-x_1}, \quad \xi<\zeta<\eta.$$

Отсюда видно, что если $f''<0$ на (a, b), следовательно, в частности, $f''(\zeta)<0$, то $l(x)<f(x)$, т. е. функция f строго выпукла вверх; если же $f''>0$ на (a, b), то $l(x)>f(x)$, т. е. функция f выпукла вниз. □

Условие знакопостоянства второй производной, являясь достаточным для строгой выпуклости (вверх или вниз), не является вместе с тем необходимым. Так, функция $y=x^4$ строго выпукла вниз на всей числовой прямой, однако ее вторая производная $y''=12x^2$ обращается в ноль при $x=0$.

Отметим, что если функция f (строго) выпукла вверх на интервале (a, b), то функция $-f$ (строго) выпукла вниз на этом интервале и обратно, а поскольку $\frac{d^2}{dx^2}[-f(x)]=-\frac{d^2f(x)}{dx^2}$, то, например, приводимое в теореме 5 достаточное условие строгой выпуклости вверх следует из содержащегося в этой же теореме достаточного условия строгой выпуклости функции вниз.

Упражнения 3. Доказать, что для функции

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{при} \quad x\neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x=0 \end{cases}$$

точка $x=0$ не принадлежит никаким интервалам выпуклости вверх или вниз и не является концом какого-либо из этих интервалов.

4. Доказать, что функция $y=x^4$ строго выпукла вниз на всей числовой прямой.

Мы видим, что выпуклость вверх или вниз функции f зависит от знака ее второй производной. Оказывается, что расположение графика дважды дифференцируемой функции относительно касательной также в определенном смысле связано со знаком второй производной.

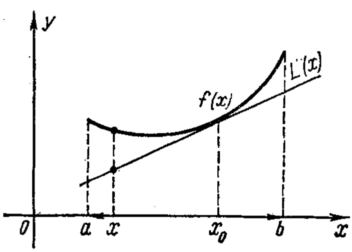


Рис. 51

Теорема 6. *Пусть функция f имеет во всем интервале (a, b) положительную (отрицательную) вторую производную: $f''(x)>0$ (соответственно $f''(x)<0$), $x\in(a, b)$*[*]. *Тогда, какова бы ни была точка $x_0\in(a, b)$, все точки $(x, f(x))$, $x\in(a, b)$, графика функции f лежат выше (соответственно ниже) касательной, проведенной к нему в точке $(x_0, f(x_0))$ (исключением является, естественно, сама эта точка, которая лежит на указанной касательной*[**]) (рис. 51).

---

[*] Отсюда следует, что функция f строго выпукла вниз (вверх) на (a, b).

[**] Если функция f, кроме того, определена и имеет одностороннюю производную в конце a или b интервала, то указанное свойство, как это видно из нижеприводимого доказательства, выполняется и для касательной в точке $(a, f(a))$ (соответственно в точке $(b, f(b))$).

Действительно, уравнением касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ будет

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

Обозначим правую часть этого уравнения через $L(x)$. Тогда, применив теорему Лагранжа к разности $f(x)-f(x_0)$, получим

$$f(x)-L(x)=[f(x)-f(x_0)]-f'(x_0)(x-x_0)=$$
$$=f'(\xi)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=[f'(\xi)-f'(x_0)](x-x_0),$$

где $a<x_0<b$, $a<x<b$, а точка ξ лежит между x и x_0.

Применив еще раз теорему Лагранжа, но уже к приращению производной, получим

$$f(x)-L(x)=f''(\eta)(\xi-x_0)(x-x_0),$$

где точка η лежит между ξ и x_0.

При $x\neq x_0$ имеем $(\xi-x_0)(x-x_0)>0$, ибо точка ξ всегда лежит между x и x_0 и, следовательно, всегда по ту же сторону от точки x_0, что и точка x.

В силу этого знак разности $f(x)-L(x)$ совпадает, при $x\neq x_0$, со знаком $f''(\eta)$. Поэтому, если на интервале (a, b) вторая производная положительна (следовательно, она положительна и в точке η), то для всех $x\in(a, b)$, кроме точки $x=x_0$, выполняется неравенство $f(x)-L(x)>0$; если же на интервале (a, b) вторая производная отрицательна, то для указанных точек справедливо неравенство $f(x)-L(x)<0$. □

Поясним эту теорему исходя из несколько иных соображений. Если функция f имеет всюду на некотором интервале вторую производную, то в окрестности любой точки x_0 этого интервала можно выделить главную часть функции f в виде многочлена Тейлора второго порядка

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2), \qquad x\to x_0,$$

и, следовательно, график функции f «ведет себя в окрестности точки x_0 почти как парабола»

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2,$$

которая, когда ее коэффициент при x^2, т. е. $\frac{f''(x_0)}{2}$, положителен, выпукла вниз и лежит выше любой касательной, в частности и выше касательной в точке $(x_0, f(x_0))$ (эта прямая является и касательной к графику функции f), а когда указанный коэффициент отрицателен, выпукла вверх и лежит ниже любой своей касательной.

Мы снова видим, как целесообразно при изучении функции в окрестности данной точки выделить с помощью формулы Тейлора главную часть функции в этой точке. В дальнейшем при решении разнообразных задач анализа мы еще неоднократно будем иметь возможность убедиться в больших возможностях и плодотворности метода выделения главной части.

Определение 6. *Пусть функция f дифференцируема при $x=x_0$ и пусть $y=L(x)$ — уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$. Если разность $f(x)-L(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 называется точкой перегиба функции f.*

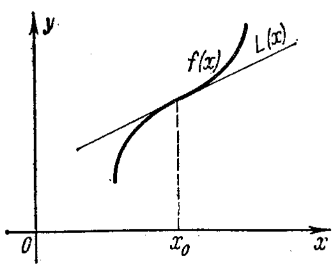


Рис. 52

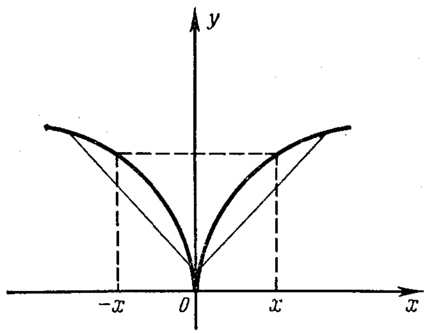


Рис. 53

Более подробно и точно это означает, что существует такая δ-окрестность $U(x_0, \delta)$ точки x_0, что на каждом из интервалов $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$ разность $f(x)-L(x)$ сохраняет постоянный знак, противоположный ее знаку на другом интервале.

Геометрически это означает, что график функции f переходит в точке $(x_0, f(x_0))$ с одной стороны (от наклонной) касательной в этой точке на другую (см. рис. 52).

Если x_0 — точка перегиба функции, то точка $(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба графика функции f*.

Примеры. 1. $f(x)=x^3$, $f''(x)=6x$. Очевидно, что в этом случае $f''(x)<0$ для $x<0$ и $f''(x)>0$ для $x>0$. Поэтому на бесконечном интервале $(-\infty, 0)$ функция $f(x)=x^3$ строго выпукла вверх, на интервале $(0, +\infty)$ она строго выпукла вниз, а точка $x=0$ является одновременно концом интервалов выпуклости вверх и вниз. Она является и точкой перегиба, поскольку уравнением касательной в ней будет $y=0$, и при $x<0$ имеет место неравенство $f(x)<0$, а при $x>0$ — наоборот $f(x)>0$.

2. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$; график этой функции (рис. 53) называется *полукубической параболой*. Здесь $f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$, и потому для всех $x\neq 0$ справедливо неравенство $f''(x)<0$. Следовательно,

интервалы $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ являются промежутками строгой выпуклости вверх. Вместе с тем при любом $x \neq 0$

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2} = f(x) > 0 = f(0),$$

поэтому точка $x=0$ не принадлежит никакому интервалу выпуклости вверх (интервалов выпуклости вниз у этой функции нет).

График функции $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ в точке $(0, 0)$ имеет вертикальную касательную, и его ветви, для которых $x>0$ и $x<0$, лежат по разные стороны от нее. Однако, $x=0$ не является точкой перегиба, поскольку в силу вертикальности касательной в этой точке ее уравнение нельзя записать в виде $y=L(x)$, и, следовательно, $x=0$ не удовлетворяет условиям определения 6.

Образно говоря, график полукубической параболы не перегибается при переходе через касательную в точке $(0, 0)$, а «возвращается назад»; поэтому точки такого типа называются *точками возврата*.

Теорема 7 (необходимое условие наличия точки перегиба). *Пусть функция f имеет непрерывную при $x=x_0$ вторую производную. Тогда, если точка x_0 является точкой перегиба функции f, то $f''(x_0)=0$.*

Действительно, если имело бы место неравенство $f''(x_0)>0$ (соответственно $f''(x_0)<0$), то, в силу непрерывности второй производной при $x=x_0$, нашлась бы окрестность $U(x_0)$ этой точки, в которой выполнялось бы условие $f''(x)>0$ (соответственно, $f''(x)<0$) и, следовательно, согласно теореме 6, для всех $x \in U(x)$, $x \neq x_0$, график функции f лежал бы выше (ниже) касательной, проведенной к нему в точке x_0, что противоречило бы тому, что x_0 является точкой перегиба. $\square$

Замечание. Подобно тому, как все точки экстремума функции принадлежат множеству точек, в которых производная либо равна нулю, либо не существует, так и все точки перегиба функции (дважды непрерывно дифференцируемой, кроме, быть может, для конечного числа значений независимого переменного) входят во множество точек, в которых вторая производная либо равна нулю, либо не существует.

Теорема 8 (первое достаточное условие наличия точек перегиба). *Если функция f, дифференцируемая в точке x_0, дважды дифференцируема в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0, \delta)$ этой точки и вторая производная f'' функции f меняет знак при переходе аргумента через x_0 (т. е. либо $f''(x)<0$ при $x_0-\delta<x<x_0$ и $f''(x)>0$ при $x_0<x<x_0+\delta$, либо $f''(x)>0$ при $x_0-\delta<x<x_0$ и $f''(x)<0$ при $x_0<x<x_0+\delta$), то x_0 является точкой перегиба функции f.*

В самом деле, представим, как и выше, в виде $y=L(x)$ уравнение касательной $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. При доказательстве теоремы 6 было показано, что

$$f(x)-L(x)=f''(\eta)(\xi-x_0)(x-x_0),$$

где точки x и ξ лежат по одну сторону от x_0, поэтому при $x\neq x_0$ имеем $(\xi-x_0)(x-x_0)>0$, и, следовательно,

$$\operatorname{sign}[f(x)-L(x)]=\operatorname{sign}f''(\eta).$$

Точка η лежит между ξ и x_0, т. е. по ту же сторону от x_0 что и точка x. Отсюда явствует, что если f'' меняет знак при переходе аргумента через точку x_0, то разность $f(x)-L(x)$ меняет знак, и, следовательно, x_0 является точкой перегиба. □

Теорема 9 (второе достаточное условие наличия точки перегиба). *Пусть $f''(x_0)=0$, а $f'''(x_0)\neq 0$; тогда x_0 является точкой перегиба.*

Доказательство. По формуле Тейлора в силу условия $f''(x_0)=0$ имеем

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3),$$

и поскольку $L(x)\equiv f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, то

$$f(x)-L(x)=\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3).$$

Отсюда следует (см. замечание о бесконечно малых перед доказательством теоремы 4 этого параграфа), что знак разности $f(x)-L(x)$ меняется при изменении знака $x-x_0$. Это и означает, что x_0 является точкой перегиба. □

Задача 10. Доказать, что если функция f непрерывна на интервале (a, b) и если для любых точек x_1 и x_2, $a<x_1<x_2<b$, выполняется неравенство

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

то (a, b) является интервалом выпуклости вверх для функции f.

Задача 11. Доказать нижеследующие утверждения. Для того чтобы дифференцируемая функция была выпуклой вверх (вниз) на некотором интервале, необходимо и достаточно, чтобы ее производная монотонно убывала (монотонно возрастала) на нем. Для того чтобы дифференцируемая функция была строго выпуклой вверх (вниз) на некотором интервале, достаточно, чтобы ее производная строго убывала (строго возрастала) на нем.

14.4. АСИМПТОТЫ

Определение 7. *Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x>a$ (соответственно для всех $x<a$). Если существуют такие числа k и l, что $f(x)-kx-l=o(1)$ при $x\to+\infty$ (соответственно при $x\to-\infty$), то прямая*

$$y=kx+l \tag{14.9}$$

называется асимптотой графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ (соответственно при $x\to-\infty$).

Существование асимптоты графика функции означает, что при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$) функция ведет себя «почти как линейная функция», т. е. отличается от линейной функции на бесконечно малую.

Найдем, например, асимптоту графика функции $y = \frac{x^2 - 3x - 2}{x+1}$. Разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, получим $y = x - 4 + \frac{2}{x+1}$. Так как $\frac{2}{x+1} = o(1)$ при $x \to \pm\infty$, то прямая $y = x - 4$ является асимптотой графика данной функции как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$.

Рассмотрим геометрический смысл асимптоты. Пусть $M = (x, f(x))$ — точка графика функции f, M_0 — проекция этой точки на ось Ox, AB — асимптота (14.9), θ — угол между асимптотой и положительным направлением оси Ox, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, MP — перпендикуляр, опущенный из точки M на асимптоту AB, Q — точка пересечения прямой MM_0 с асимптотой AB (рис. 54). Тогда $MM_0 = f(x)$, $QM_0 = kx + l$, $MQ = MM_0 - QM_0 = f(x) - (kx + l)$, $MP = MQ \cos\theta$. Таким образом, MP отличается от MQ лишь на не равный нулю множитель $\cos\theta$, поэтому условия $MQ \to 0$ и $MP \to 0$ при $x \to +\infty$ (соответственно при $x \to -\infty$) эквивалентны, т. е. если $\lim\limits_{x \to +\infty} MQ = 0$, то и $\lim\limits_{x \to +\infty} MP = 0$, и наоборот.

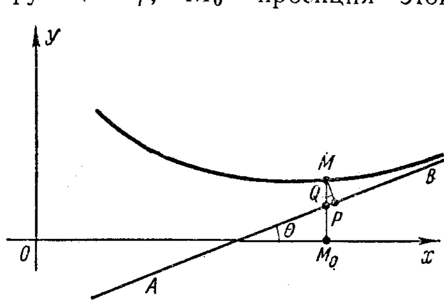


Рис. 54

Отсюда следует, что асимптота может быть определена как прямая, расстояние до которой от графика функции, т. е. отрезок MP, стремится к нулю, когда точка $M = (x, f(x))$ «стремится, оставаясь на графике, в бесконечность» (при $x \to +\infty$ или, соответственно, $x \to -\infty$).

Укажем теперь общий метод отыскания асимптоты (14.9), т. е. способ определения коэффициентов k и l в уравнении (14.9). Будем рассматривать для определенности лишь случай $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$ рассуждения проводятся аналогично). Пусть график функции f имеет асимптоту (14.9) при $x \to +\infty$. Тогда, по определению,

$$f(x) = kx + l + o(1). \tag{14.10}$$

Разделим обе части равенства (14.10) на x и перейдем к пределу при $x \to +\infty$. Тогда

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k. \tag{14.11}$$

Используя найденное значение k, получим из (14.10) для определения l формулу

$$l=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx). \tag{14.12}$$

Справедливо и обратное утверждение: если существуют такие числа k и l, что выполняется условие (14.12), то прямая $y=kx+l$ является асимптотой графика функции $f(x)$. В самом деле, из (14.12) имеем

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+l)]=0,$$

т. е. прямая $y=kx+l$ действительно удовлетворяет определению асимптоты, иначе говоря, выполняется условие (14.10).

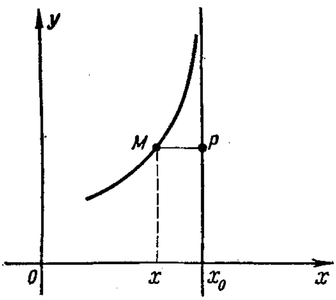


Рис. 55

Таким образом, формулы (14.11) и (14.12) сводят задачу отыскания асимптот (14.9) к вычислению пределов определенного вида. Более того, мы показали, что если существует представление функции f в виде (14.10), то k и l выражаются по формулам (14.11) и (14.12). Следовательно, если существует представление (14.10), то оно единственно.

Найдем по этому правилу асимптоту графика функции $f(x)=\frac{x^2-3x-2}{x+1}$, найденную нами выше другим способом:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x-2}{x(x+1)}=1,$$

$$l=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x-2}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x-2}{x+1}=-4,$$

т. е. мы, как и следовало ожидать, получили то же уравнение асимптоты $y=x-4$, как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$.

В виде (14.9) может быть записано уравнение любой прямой, непараллельной оси Oy. Естественно распространить определение асимптоты и на прямые, параллельные оси Oy.

Определение 8. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 (быть может, односторонней) и пусть выполнено хотя бы одно из условий*

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\infty, \quad \textit{или} \quad \lim_{x\to x_0+0}f(x)=\infty. \tag{14.13}$$

Тогда прямая $x=x_0$ (рис. 55) *называется вертикальной асимптотой графика функции f (в отличие от асимптоты вида* (14.9)*, которая называется также наклонной).*

В случае вертикальной асимптоты, как и в случае наклонной, расстояние $MP = x - x_0$ между точкой M и прямой $x = x_0$ стремится к нулю, если точка $M(x, f(x))$ стремится вдоль графика в бесконечность, т. е. когда $x \to x_0 - 0$ или $x \to x_0 + 0$.

Чтобы найти вертикальные асимптоты графика функции f, надо найти такие значения x, для которых выполняется одно или оба условия (14.13). Например, функция $y = \frac{x^2 - 3x - 2}{x+1}$ имеет вертикальную асимптоту $x = -1$. Вообще если $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ — рациональная функция (($P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены), $Q(x_0) = 0$, $P(x_0) \neq 0$, то прямая $x = x_0$ является асимптотой графика функции $f(x)$.

14.5. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Изучение заданной функции и построение ее графика с помощью развитого нами аналитического аппарата целесообразно проводить в следующем порядке.

1. Определить область существования функции, область непрерывности и точки разрыва.
2. Найти асимптоты.
3. Приблизительно, вчерне, нарисовать график функции.
4. Вычислить первую, а если нужно, и вторую производную (без производных более высокого порядка часто удается обойтись).
5. Найти точки, в которых первая и вторая производные либо не существуют, либо равны нулю.
6. Составить таблицу изменения знака первой и второй производных. Определить промежутки возрастания, убывания, выпуклости вверх или вниз функции, найти точки экстремума (в том числе концевые) и точки перегиба.
7. Окончательно вычертить график.

При этом чем бóльшую точность графика мы хотим достигнуть, тем больше, вообще говоря, необходимо найти точек, лежащих на нем. Обычно целесообразно найти (быть может, с определенной точностью) точки пересечения графика с осями координат и точки, соответствующие экстремумам функции; другие точки находятся по мере потребности.

В случае очень громоздких выражений для второй производной иногда приходится ограничиваться рассмотрением тех свойств графика, которые можно изучать лишь с помощью первой производной.

Пример 1. Построим график функции $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x+1}$.

Эта функция определена и непрерывна для всех $x \neq -1$. Она, как мы уже знаем (см. п. 14.4), имеет асимптоты $y = x - 4$ и $x = -1$, причем $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = -\infty$. Было отмечено также, что $f(x)=x-4+\frac{2}{x+1}$, поэтому $f(x)>x-4$ при $x>-1$ (график функции находится выше асимптоты) и $f(x)<$ $<x-4$ при $x<-1$ (график лежит ниже асимптоты).

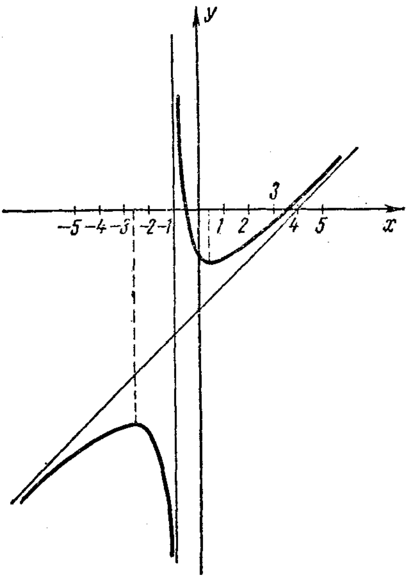


Рис. 56

График функции $f(x)$ пересекает ось Ox в точках, в которых $x^2-3x-2=0$, т. е. при $x_1,x_2=(3\pm\sqrt{17})/2$ или приблизительно в точках $x_1=3{,}5$, $x_2=-0{,}5$. Ось Oy график пересекает в точке $y=-2$. Это позволяет нарисовать график функции $f(x)$ в виде, указанном на рис. 56.

Дальнейшее исследование имеет своей целью нахождение экстремумов точек перегиба и интервалов, выпуклости вверх или вниз графика функции. Для этого найдем y' и y'':

$$y'=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2},$$

$$y''=\frac{4}{(x+1)^3}.$$

Отсюда видно, что $y'=0$ при $x=-1-\sqrt{2}\approx-2{,}4$ и $x=-1+$ $+\sqrt{2}\approx0{,}4$. В точке $x=-1$ производные y' и y'' не существуют.

Составим таблицу изменения знака первой и второй производных в зависимости от изменения аргумента, включив в нее критические точки:

x		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$	
y'	+	0	—	Не существует	—	0	+
y''	—	—	—	Не существует	+	+	+

Из этой таблицы видно, что функция $f(x)$ имеет в точке $x=$ $=-1+\sqrt{2}$ строгий минимум, а в точке $x=-1-\sqrt{2}$ – строгий максимум; при $x<-1$ функция строго выпукла вверх, а при $x>-1$ – строго выпукла вниз. Точек перегиба нет, так как при $x=-1$ функция разрывна.

Мы нашли общий характер поведения функции. Чтобы построить график более точно, надо найти ряд точек графика, как это отмечалось выше.

В дальнейшем для краткости таблицы, подобные табл. 1, будем называть *таблицами поведения функций* и иногда сразу отмечать в них точки экстремума, точки перегиба и интервалы выпуклости.

Пример 2. Построим график функции $f(x)=(x+1)^3\sqrt[3]{x^2}$. Область определения этой функции — множество всех действительных чисел, причем она непрерывна в каждой точке и потому не имеет вертикальных асимптот. Из того, что

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty,$$

следует, что нет и наклонных асимптот.

Для построения графика вчерне заметим, что

1) $f(x)$ обращается в ноль в точках $x=-1$ и $x=0$;
2) $f>0$ при $x>-1$, $x\neq 0$;
3) $f<0$ при $x<-1$;
4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Приблизительный вид графика функции, который можно нарисовать на основании этих замечаний, изображен на рис. 57.

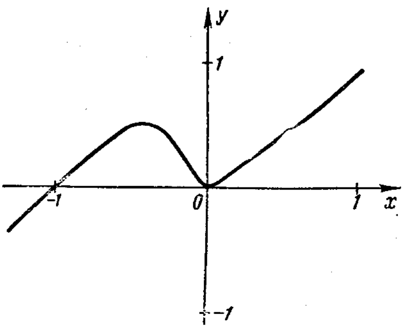


Рис. 57

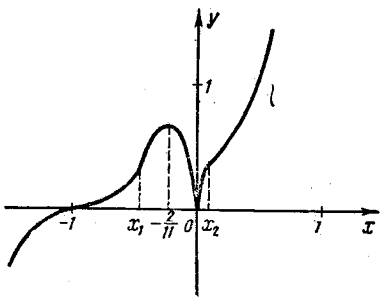


Рис. 58

Проведем теперь более подробное исследование функции с помощью производных. Найдем y' и y'':

$$y'=\frac{(x+1)^2(11x+2)}{3\sqrt[3]{x}},\quad y''=\frac{2(x+1)(44x^2+16x-1)}{9x\sqrt[3]{x}}.$$

Отсюда видно, что $y'=0$ при $x=-1$ и $x=-2/11$; $y''=0$ при $x=-1$, а также когда $44x^2+16x-1=0$, т. е. приблизительно при $x_1=-9/22$ и $x_2=1/22$. При $x=0$ производные y' и y'' не существуют.

Составляем таблицу поведения функции — см. с. 242.

Теперь график функции $y=(x+1)^3\sqrt[3]{x^2}$ можно нарисовать более точно. Его вид изображен на рис. 58. Как видно, с помощью исследования производных мы существенно уточнили вид графика (ср. с рис. 57).

Развитый аппарат позволяет строить и графики функций, локально заданных параметрически: $x=x(t)$, $y=y(t)$. Здесь не предполагается, что пара функций $x=x(t)$, $y=y(t)$ определяет однозначно одну функцию вида $y=y(x)$ или $x=x(y)$. Под графиком параметрически заданной функции подразумевается объединение графиков всех функций вида $y=f(x)$ и $x=g(y)$, задаваемых формулами $x=x(t)$, $y=y(t)$.

Сделаем несколько предварительных замечаний. Для нахождения асимптот, параллельных оси Oy, необходимо найти такие значения t_0 *), для которых существует конечный предел $\lim\limits_{t\to t_0+0} x(t)=a$ или $\lim\limits_{t\to t_0-0} x(t)=a$, а $\lim\limits_{t\to t_0+0} y(t)$, соответственно $\lim\limits_{t_0-0} y(t)$, равен $+\infty$ или $-\infty$.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, x_1)$	x_1	$\left(x_1, -\frac{2}{11}\right)$	$-\frac{2}{11}$	$\left(-\frac{2}{11}, 0\right)$	0	$(0, x_2)$	x_2	$(x_2, +\infty)$
y'	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	Не существует	$+$	$+$	$+$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	Не существует	$-$	0	$+$
Интервалы монотонности и точки экстремума	Возрастание					Максимум	Убывание	Минимум	Возрастание		
Интервалы выпуклости и точки перегиба	Выпуклость вверх	Точка перегиба	Выпуклость вниз	Точка перегиба	Выпуклость вверх				Выпуклость вверх	Точка перегиба	Выпуклость вниз

*) Здесь и в дальнейшем t_0 — число или одна из бесконечностей $+\infty$, $-\infty$.

Если такие значения t_0 существуют, то

$$x = a \tag{14.14}$$

будет уравнением искомой асимптоты.

Аналогично нахождение асимптот, параллельных оси Ox, сводится к определению таких значений t_0, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{t \to t_0+0} y(t) = b$ или $\lim\limits_{t \to t_0-0} y(t) = b$, а $\lim\limits_{t \to t_0+0} x(t)$, соответственно $\lim\limits_{t \to t_0-0} x(t)$, равен $+\infty$ или $-\infty$. Если окажется, что такие значения t_0 существуют, то

$$y = b \tag{14.15}$$

является уравнением искомой асимптоты.

Наконец, для нахождения асимптот, не параллельных ни оси Ox, ни оси Oy, надо найти такие значения t_0, для которых пределы $\lim\limits_{t \to t_0+0} x(t)$ и $\lim\limits_{t \to t_0+0} y(t)$ (или $\lim\limits_{t \to t_0-0} x(t)$ и $\lim\limits_{t \to t_0-0} y(t)$) равны $+\infty$ или $-\infty$ и существует конечный предел $\lim\limits_{t \to t_0+0} \frac{y(t)}{x(t)} = k \neq 0$ $\left(\text{соответственно } \lim\limits_{t \to t_0-0} \frac{y(t)}{x(t)} = k\right)$. Если для этого значения, кроме того, существует конечный предел $\lim\limits_{t \to t_0+0} [y(t) - kx(t)] = l$ $\left(\text{соответственно } \lim\limits_{t \to t_0-0} [y(t) - kx(t)] = l\right)$, то прямая

$$y = kx + l \tag{14.16}$$

является асимптотой графика рассматриваемой функции.

Здесь везде t_0 может быть как конечным, так и бесконечным.

Упражнение 5. Вывести уравнения асимптот (14.14), (14.15) и (14.16), исходя из того, что асимптотой называется прямая, расстояние до которой от точки $(x(t), y(t))$ графика функции, заданной параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$ стремится к нулю, когда точка стремится, оставаясь на графике функции, в бесконечность, т. е. когда $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \to \infty$ при $t \to t_0+0$ или $t \to t_0-0$.

При предварительном вычерчивании графика функции, заданной параметрически, часто бывает полезно построить сначала в отдельности графики функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

Для определения промежутков возрастания и убывания функции, заданной параметрически, нахождения ее экстремумов, точек перегиба, а также интервалов выпуклости вверх и вниз надо использовать выражения для производных y'_x и y''_{xx} через производные x'_t, y'_t, x''_{tt} и y''_{tt}. При этом следует иметь в виду, что уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$ вообще говоря, не определяют однозначно функцию вида $y = y(x)$, так что при исследовании графика функции надо все время внимательно следить за тем, какая «ветвь» графика рассматривается. Иногда полезнее рассматривать, наоборот, x как функцию от y.

Пример 3. Построим график функции

$$x=\frac{t^2+1}{4(1-t)},\quad y=\frac{t}{1+t}. \tag{14.17}$$

Параметрическое представление имеет смысл для всех t, кроме $t=\pm 1$. Асимптоты, параллельные оси Ox, получаются при $t=1$ и $t=\pm\infty$; их уравнения соответственно $y=1/2$ и $y=1$. Асимптота, параллельная оси Oy, получается при $t=-1$; ее уравнение $x=1/4$. Наклонных асимптот в данном случае нет.

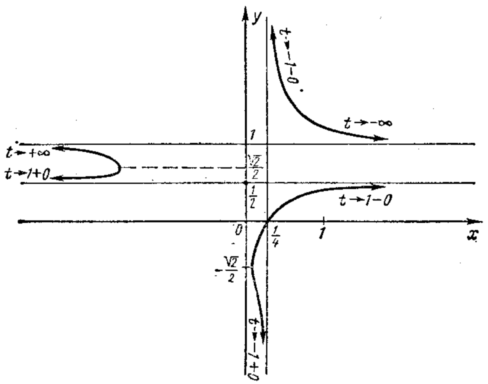


Рис. 59

Для построения графика вчерне полезно составить таблицу изменения знаков переменных x и y в зависимости от изменения t; в нее могут быть включены и некоторые характерные значения x и y. Так, в данном случае полезна следующая таблица.

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x	$+\infty$	$+$	$1/4$	$+$	$1/4$	$+$	∞	$-$	$-\infty$
y	1	$+$	∞	$-$	0	$+$	$1/2$	$+$	1

Теперь строим график (рис. 59). Для наглядности на графике указано, как ветви графика соответствуют изменению параметра. Далее,

$$x'_t=\frac{1+2t-t^2}{4(1-t)^3},\quad y'_t=\frac{1}{(1+t)^2},$$

поэтому

$$x'_y=\frac{(1+t)^2(1+2t-t^2)}{4(1-t)^2}. \tag{14.18}$$

В данном случае лучше рассматривать x как функцию от y, а не наоборот, так как из нарисованного графика видно, что естественно ожидать, что x определяется однозначно как функция от y, $y\neq 1/2$ и $y\neq 1$.

Из (14.18) видно, что $x'_y=0$ при $t=-1$ и когда $1+2t-t^2=0$, т. е. при $t=1+\sqrt{2}$ и $t=1-\sqrt{2}$. Значению $t=-1$ не соответствует никакая точка графика, а при $t=1+\sqrt{2}$ и $t=1-\sqrt{2}$ имеем соответственно

$$y=\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad y=\frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Составим теперь таблицу изменения знака производной x'_y, эта таблица позволяет найти и точки экстремума.

t	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y	1		∞		$-\sqrt{2}/2$		$1/2$		$\sqrt{2}/2$		1
x'_y		$-$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
Экстремумы					Минимум				Максимум		

Из таблицы видно, что в точке $y=\sqrt{2}/2$ функция $x=x(y)$ имеет максимум, в точке $y=-\sqrt{2}/2$ — минимум и строго монотонна на интервалах

$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \ \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \ (1, +\infty).$$

Следует обратить внимание на то, что, взяв y за независимую переменную, x — за зависимую, т. е. взяв ось Oy за первую координатную ось, а Ox — за вторую, мы получили систему координат, ориентированную противоположно рассматриваемой нами все время системе координат, у которой первой осью является Ox, а второй — Oy. Читателю полезно убедиться, что доказанные нами выше критерии, например, для наличия экстремумов и точек перегиба геометрически не связаны с той или иной ориентацией осей координат.

Для исследования выпуклости и точек перегиба функции $x(y)$ найдем x''_{yy}:

$$x''_{yy}=(x'_y)'_t t'_y=\frac{(1+t)^3(3+3t-3t^2+t^3)}{2(1-t)^3}.$$

Производная x''_{yy} равна нулю при $t=-1$ и для тех t, для которых

$$P(t)\equiv 3+3t-3t^2+t^3=0.$$

Замечая, что $P'(t)=3(t-1)^2\geqslant 0$, причем $P'=0$ только в одной точке $t=1$, видим, что $P(t)$ строго монотонно возрастает на всей вещественной оси (почему?). Следовательно, существует единственное t_0 такое, что $P(t_0)=0$. При этом $P(0)=3>0$, а $P(-1)=-4<0$, откуда $-1<t_0<0$. Если $y_0=\frac{t_0}{1+t_0}$, то, очевидно, $-\infty<y_0<0$ (можно, конечно, получить и более точную оценку для y_0, выбирая более близкие t_1 и t_2, такие, что $P(t_1)<0$, $P(t_2)>0$). Составим теперь таблицу изменения производной x''_{yy} и определим с ее помощью интервалы выпуклости вверх и вниз, а также точки перегиба:

t	$-\infty$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, t_0)$	t_0	$(t_0, 1)$	1	$(1, +\infty)$	$+\infty$
y	1	$(1, +\infty)$	∞	$(-\infty, y_0)$	y_0	$(y_0, 1/2)$	$1/2$	$(1/2, 1)$	1
x''_y		$+$		$-$	0	$+$	Не существует	$-$	
Интервалы выпуклости		Выпуклость вниз		Выпуклость вверх		Выпуклость вниз		Выпуклость вверх	
Точки перегиба и точки разрыва	Точка разрыва				Точка перегиба		Точка разрыва		Точка разрыва

График функции (14.17) исследован.

Пример 4. Построим график функции

$$x=\frac{t}{1+t^3}, \quad y=\frac{t^2}{1+t^3}. \tag{14.19}$$

Асимптот, параллельных осям координат, в данном случае нет; так как $x\to\infty$ и $y\to\infty$ при $t\to-1$, то, возможно, существует наклонная асимптота. Для ее нахождения вычислим соответствующие пределы:

$$\lim_{t\to-1}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1}t=-1, \text{ т. е. } k=-1,$$

$$\lim_{t\to-1}(y-kx)=\lim_{t\to-1}\left(\frac{t^2}{1+t^3}+\frac{t}{1+t^3}\right)=\lim_{t\to-1}\frac{t}{t^2-t+1}=-\frac{1}{3}.$$

Отсюда следует, что наклонная асимптота существует и что ее уравнение будет

$$y=-x-1/3.$$

Построим приблизительно графики функций $x(t)$ и $y(t)$; для этого предварительно найдем производные:

$$x'_t=\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}, \quad y'_t=\frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}. \tag{14.20}$$

Производная x'_t обращается в ноль при $t=1/\sqrt[3]{2}$, меняя знак с «+» на «—», поэтому это точка максимума; производная y'_t обращается в ноль при $t=0$, меняя знак с «—» на «+» (значит, это точка минимума) и при $t=1/\sqrt[3]{2}$, меняя знак с «+» на «—» (следовательно, это также точка максимума). Из этих замечаний следует, что графики функций $x(t)$ и $y(t)$ имеют вид, изображенный на рис. 60.

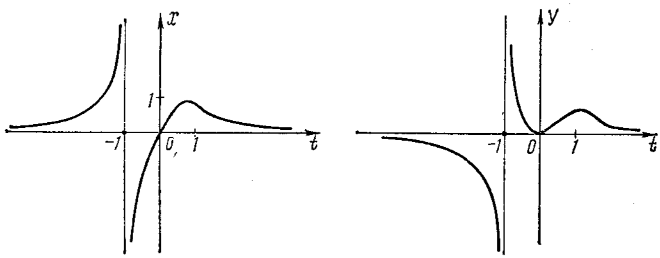


Рис. 60

По этим графикам, зная уравнение асимптоты, можно найти приблизительно график искомой функции (14.19). Он имеет вид, изображенный на рис. 61.

Исследование производной y'_x позволит уточнить размеры «петли», образуемой графиком. Из (14.20) имеем $y'_x=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. Теперь видим, что: 1) $y'_x=0$ при $t=0$ и $t=\sqrt[3]{2}$, т. е. касательная к графику параллельна оси Ox в точках $(0;\ 0)$ и $(\sqrt[3]{2}/3;\ \sqrt[3]{4}/3)$; 2) $y'_x=\infty$ при $t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и $t=\infty$, т. е. касательная параллельна оси Oy в точках $(\sqrt[3]{4}/3;\ \sqrt[3]{2}/3)$ и $(0;\ 0)$. Таким образом, точке $(0;\ 0)$ (являющейся, как говорят, точкой самопересечения графика) соответствуют два значения параметра $t=0$ и $t=\infty$, если только доопределить функции (14.19), положив $x(\infty)=0$, $y(\infty)=0$. В этой точке две части графика имеют соответственно своими касательными координатные оси.

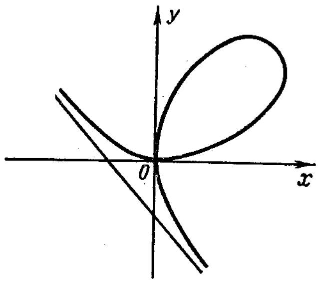


Рис. 61

График функции (14.19) называется *декартовым* *) *листом.* Из формул (14.19) нетрудно получить его неявное задание

$$x^3+y^3-xy=0.$$

*) Р. Декарт (1596—1650)—французский философ, математик, физик, физиолог.

Упражнения. Построить графики следующих функций:

6. $y = x^{1/x}$.

7. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2}$.

8. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.

9. $y = x^2 \ln x$.

10. $y = \dfrac{x^2 \sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.

11. $y = x^2 \left(1 - \dfrac{1}{4} \sin \dfrac{1}{x}\right)$.

12. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

13. $x = t - e^{-t}$, $y = 2t - e^{-2t}$.

14. $x = \dfrac{t^2+1}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t}{t^4+1}$.

15. $y^3 - x^2y^2 - x^3 = 0$. Указание: выразить x и y через параметр t, полагая $y = tx$.

§ 15. ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ

15.1. ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЛЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Определение 1. *Если каждому значению $t \in E$, где E — некоторое множество чисел, соответствует определенный вектор $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ трехмерного пространства, то будем говорить, что на E определена вектор-функция, или, что то же, векторная функция $\boldsymbol{r}(t)$.*

В этом определении в зависимости от рассматриваемых задач под значениями $\boldsymbol{r}(t)$ можно понимать как свободные векторы, так и векторы с закрепленными в одной и той же точке началами (так называемые *радиус-векторы*).

Если в пространстве задана прямоугольная система координат, то, как хорошо известно, каждому вектору соответствует упорядоченная тройка действительных чисел — его координат, и наоборот, каждой упорядоченной тройке чисел соответствует вектор, для которого числа, входящие в эту тройку, являются его координатами. Поэтому задание вектор-функции эквивалентно заданию трех скалярных (числовых) функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, являющихся его координатами:

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)).$$

Если при всех $t \in E$ имеем $z(t) = 0$, то вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ называется двумерной; в этом случае пишется

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t)).$$

Длина всякого вектора $\boldsymbol{\rho}$ обозначается через $|\boldsymbol{\rho}|$. Будем предполагать известными основные алгебраические свойства векторов, понятие скалярного и векторного произведений, а также свойства этих произведений. Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначается через $\boldsymbol{ab}$ или $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, а векторное через $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ или $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Введем понятие предела, непрерывности, производной и дифференциала для векторных функций.

Определение 2. *Пусть вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки t_0 и $\boldsymbol{a}$ — некоторый вектор.*

Будем называть вектор $\boldsymbol{a}$ *пределом функции* $\boldsymbol{r}(t)$ *при* $t \to t_0$ *и писать* $\boldsymbol{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t)$ (*или* $\boldsymbol{r}(t) \to \boldsymbol{a}$ *при* $t \to t_0$), *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для всех* t, *удовлетворяющих условию* $|t - t_0| < \delta$, $t \neq t_0$, *выполняется неравенство* (*рис.* 62) $|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| < \varepsilon$.

Очевидно (ср. с леммой п. 4.9), что

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}, \tag{15.1}$$

тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| = 0. \tag{15.2}$$

Если $\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$ и $\boldsymbol{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, то для того, чтобы $\boldsymbol{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a_1, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = a_2, \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = a_3. \tag{15.3}$$

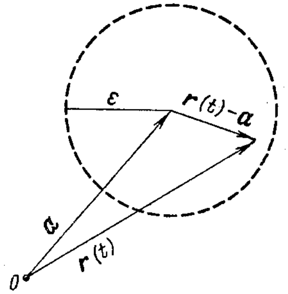


Рис. 62

В самом деле,

$$|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| = \sqrt{[x(t) - a_1]^2 + [y(t) - a_2]^2 + [z(t) - a_3]^2}. \tag{15.4}$$

Поэтому $|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| \geqslant |x(t) - a_1|$. Отсюда следует, что условие $|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| \to 0$ при $t \to t_0$ влечет за собой условие $|x(t) - a_1| \to 0$ при $t \to t_0$, т. е. $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a_1$. Аналогично доказываются другие равенства (15.3). Наоборот, если выполнено (15.3), то из (15.4) сразу получаем, что $|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| \to 0$ при $t \to t_0$, т. е. $\boldsymbol{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t)$.

Отметим некоторые свойства пределов векторных функций.

1°. Если $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}$, то $\lim\limits_{t \to t_0} |\boldsymbol{r}(t)| = |\boldsymbol{a}|$. Это непосредственно следует из неравенства $||\boldsymbol{r}| - |\boldsymbol{a}|| \leqslant |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}|$.

2°. $\lim\limits_{t \to t_0} [\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t)] = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) + \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_2(t)$.

3°. $\lim\limits_{t \to t_0} f(t)\boldsymbol{r}(t) = \lim\limits_{t \to t_0} f(t) \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t)$ ($f(t)$ — скалярная функция).

4°. $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t)\boldsymbol{r}_2(t) = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_2(t)$.

5°. $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) \times \boldsymbol{r}_2(t) = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) \times \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_2(t)$.

В свойствах 2°—5° все рассматриваемые функции определены в некоторой окрестности точки t_0, кроме, быть может, самой точки t_0, и предполагается, что все пределы, входящие в правые части равенств, существуют; тогда утверждается, что существуют и пределы, стоящие в левых частях, причем справедливы написанные равенства.

Все эти свойства доказываются аналогично тому, как мы доказывали подобные утверждения, встречавшиеся нам раньше (см. п. 3.9, 4.7). Докажем, например, свойство 5°. Предварительно заметим, что для любых векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$

$$|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}| = |\boldsymbol{p}|\,|\boldsymbol{q}|\sin\widehat{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}} \leqslant |\boldsymbol{p}|\,|\boldsymbol{q}|. \tag{15.5}$$

Поэтому, если $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(t)$, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(t)$, причем $\lim\limits_{t\to t_0}|\boldsymbol{p}(t)|=0$, а $|\boldsymbol{q}(t)|$ — ограниченная функция, то из (15.5) имеем (см. п. 4.9)

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}|=0. \tag{15.6}$$

Пусть теперь $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)=\boldsymbol{a}$, $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)=\boldsymbol{b}$. Положим $\alpha(t)=$ $=\boldsymbol{r}_1(t)-\boldsymbol{a}$, $\beta(t)=\boldsymbol{r}_2(t)-\boldsymbol{b}$; тогда согласно (15.2),

$$\lim_{t\to t_0}|\alpha(t)|=\lim_{t\to t_0}|\beta(t)|=0 \tag{15.7}$$

и

$$\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)=[\boldsymbol{a}+\alpha(t)]\times[\boldsymbol{b}+\beta(t)]=$$
$$=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\beta(t)+\alpha(t)\times\boldsymbol{b}+\alpha(t)\times\beta(t),$$

где, в силу (15.7), $\lim\limits_{t\to t_0}|\boldsymbol{a}\times\beta(t)|=\lim\limits_{t\to t_0}|\alpha(t)\times\boldsymbol{b}|=\lim\limits_{t\to t_0}|\alpha(t)\times\beta(t)|=$ $=0$. Так как

$$|\boldsymbol{a}\times\beta(t)+\alpha(t)\times\boldsymbol{b}+\alpha(t)|\times\beta(t)|\leqslant$$
$$\leqslant|\boldsymbol{a}\times\beta(t)|+|\alpha(t)\times\boldsymbol{b}|+|\alpha(t)\times\beta(t)|,$$

то и $\lim\limits_{t\to t_0}|\alpha\times\beta(t)+\alpha(t)\times\boldsymbol{b}+\alpha(t)\times\beta(t)|=0$. А это, согласно (15.2), и означает, что

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}. \ \square$$

Отметим, что свойства 1°—5° пределов вектор-функций могут, конечно, быть получены с помощью формул (15.3) из соответствующих свойств скалярных функций, если перейти к координатной записи векторов и их скалярных и векторных произведений.

Перейдем к определению непрерывности вектор-функции.

Определение 3. *Вектор-функция* $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, *определенная в некоторой окрестности точки* t_0, *называется непрерывной в* t_0, *если* $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t_0)$.

Из эквивалентности условий (15.1) и (15.3) следует, что для того чтобы вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$, определенная в некоторой окрестности точки t_0, была непрерывной в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы при $t=t_0$ были непрерывными функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Из свойств пределов векторных функций следует, что сумма, скалярное и векторное произведения векторных функций, а также произведение скалярных функций на векторные будут непрерывными в некоторой точке, если в этой точке непрерывны все слагаемые, соответственно — сомножители.

15.2. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Определение 4. *Пусть вектор-функция* $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ *определена в некоторой окрестности точки* t_0. *Если существует предел*

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t},$$

то он называется производной данной вектор-функции в t_0 *и обозначается через* $\boldsymbol{r}'(t_0)$ *или* $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$.

Таким образом, производная вектор-функция в точке есть вектор.

Для того чтобы функция $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$, определенная в некоторой окрестности точки t_0, имела производную в t_0, необходимо и достаточно, чтобы функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ имели производные при $t=t_0$, причем в этом случае

$$\boldsymbol{r}'(t_0)=(x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0)),\quad |\boldsymbol{r}'(t_0)|=\sqrt{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)+z'^2(t_0)}.$$

Это непосредственно следует из эквивалентности двух подходов (15.1) и (15.3) к определению предела для вектор-функции:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}=$$

$$=\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t},\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t},\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}\right).$$

Определение 5. *Вектор-функция* $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, *определенная в некоторой окрестности точки* t_0, *называется дифференцируемой при* $t=t_0$, *если ее приращение* $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)$ *в точке* t_0 *представимо в виде*

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\Delta t+\varepsilon(\Delta t)\Delta t, \tag{15.8}$$

где $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\varepsilon(\Delta t)=0$. *При этом линейная вектор-функция**) $\boldsymbol{a}\Delta t$ *называется дифференциалом функции* $\boldsymbol{r}(t)$ *в точке* t_0 *и обозначается через* $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\Delta t$:

$$\Delta\boldsymbol{r}=d\boldsymbol{r}+\varepsilon(\Delta t)\Delta t. \tag{15.9}$$

---

*) Вектор-функция аргумента t называется линейной, если она имеет вид $\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — какие-либо два фиксированных вектора.

Очевидно, что если вектор-функция дифференцируема при $t=t_0$, то она и непрерывна в этой точке.

Как и в случае скалярных функций, из дифференцируемости функции следует существование производной $\boldsymbol{r}'(t)$ и равенство ее вектору $\boldsymbol{a}$. В самом деле, из (15.8) имеем

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} [\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)] = \boldsymbol{a}.$$

Наоборот, если существует производная $\boldsymbol{r}'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$, то, полагая $\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t) = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} - \boldsymbol{r}'(t_0)$, получаем $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\Delta t$, где $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t) = 0$. Значит, $\boldsymbol{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 и

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t.$$

Положим для независимой переменной t, по определению, $dt = \Delta t$; тогда (опуская обозначение аргумента t_0)

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' dt, \quad \boldsymbol{r}' = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.$$

Подставляя полученное выражение для $d\boldsymbol{r}$ в (15.9), получим

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'\Delta t + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\Delta t,$$

или

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'\Delta t + \boldsymbol{\alpha}(\Delta t), \tag{15.10}$$

где $\boldsymbol{\alpha}(\Delta t) = \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\Delta t = \boldsymbol{o}(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$ *) и $\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{0}$.

Пусть теперь $t = t(\tau)$. Если эта функция дифференцируема в точке τ_0, $t_0 = t(\tau_0)$ и $\Delta\tau = \tau - \tau_0$, то из (15.10) (обозначая для ясности $\boldsymbol{r}'$ через $\boldsymbol{r}'_t$), следует, что

$$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta \tau} = \boldsymbol{r}'_t \frac{\Delta t}{\Delta \tau} + \frac{\boldsymbol{\alpha}(\Delta t)}{\Delta \tau}.$$

Так как $\Delta t \to 0$ при $\Delta\tau \to 0$, то, как и в случае числовой функции (см. п. 9.7), положив $\boldsymbol{\varepsilon}(0) = \boldsymbol{0}$, получим

$$\lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\boldsymbol{\alpha}(\Delta t)}{\Delta \tau} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \boldsymbol{0}.$$

поэтому производная $\boldsymbol{r}'_\tau = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta \tau}$ существует и $\boldsymbol{r}'_\tau = \boldsymbol{r}'_t t'_\tau$. Отсюда, как и в случае скалярных функций, вытекает инвариантность записи дифференциала вектор-функции; как для зависимой переменной t, так и для независимой переменной τ имеем

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'_t\, dt, \quad d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'_\tau\, d\tau.$$

---

* По аналогии со случаем скалярных функций, для вектор-функции $\boldsymbol{\alpha}(t)$ пишется $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{o}(\beta)$ при $t \to t_0$, если $\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t)\beta(t)$, где $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{0}$.

Приведем формулы дифференцирования вектор-функций (аргумент для простоты обозначений опущен):

1. $(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)'=\boldsymbol{r}_1'+\boldsymbol{r}_2'$.
2. $(f\boldsymbol{r})=f'\boldsymbol{r}+f\boldsymbol{r}'$.
3. $(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)'=\boldsymbol{r}_1'\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2'$.
4. $(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)'=\boldsymbol{r}_1'\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2'$.

Здесь все рассматриваемые функции определены в некоторой окрестности точки t_0 и предполагается, что все производные, стоящие в правой части каждого равенства, существуют при $t=t_0$; тогда в точке t_0 существуют и производные, стоящие в левой части, причем справедливы написанные равенства.

Все эти формулы доказываются аналогично формулам дифференцирования скалярных функций (см. п. 9.5). Докажем, например, формулу 4.

Использовав свойства 1°—5° пределов вектор-функций, получим:

$$[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)]'_{t=t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}_1(t_0+\Delta t)\times\boldsymbol{r}_2(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}_1(t_0)\times\boldsymbol{r}_2(t_0)}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\boldsymbol{r}_1(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}_1(t_0)}{\Delta t}\times\boldsymbol{r}_2(t_0+\Delta t)+\boldsymbol{r}_1(t_0)\times\frac{\boldsymbol{r}_2(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}_2(t_0)}{\Delta t}\right]=$$

$$=\boldsymbol{r}_1'(t_0)\times\boldsymbol{r}_2(t_0)+\boldsymbol{r}_1(t_0)\times\boldsymbol{r}_2'(t_0).$$

Если вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$ определена в некоторой окрестности точки t_0 и имеет n производных в этой точке, то для нее справедлива формула Тейлора

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k\boldsymbol{r}(t_0)}{dt^k}\Delta t^k+\boldsymbol{o}(\Delta t^n).$$

Она непосредственно следует из разложения по формуле Тейлора координатных функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

Мы видим, что многие факты, установленные в теории скалярных функций,дословно переносятся на вектор-функции. Однако было бы ошибкой думать, что это всегда так: например, в определенном смысле аналог формулы конечных приращений не имеет места для вектор-функций.

Действительно, рассмотрим двумерную вектор-функцию $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t,\ \sin t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Поскольку $\boldsymbol{r}'(t)=(-\sin t,\ \cos t)$, то $|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1$ при любом $t\in[0,\ 2\pi]$. Следовательно, не существует такой точки $\xi\in[0,\ 2\pi]$, для которой было бы справедливо равенство, аналогичное формуле конечных приращений Лагранжа для скалярных функций,

$$\boldsymbol{r}(2\pi)-\boldsymbol{r}(0)=2\pi\boldsymbol{r}'(\xi),$$

так как слева стоит нулевой вектор, ибо $\boldsymbol{r}(2\pi)=\boldsymbol{r}(0)$, а справа — не нулевой.

Некоторой заменой формулы конечных приращений для вектор-функций является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть вектор-функция* $\boldsymbol{r}(t)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и дифференцируема внутри него. Тогда существует такая точка* $\xi \in (a, b)$, *что*

$$|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)| \leqslant (b-a)\,|\boldsymbol{r}'(\xi)|. \tag{15.11}$$

Доказательство. Если $\boldsymbol{r}(a)=\boldsymbol{r}(b)$, то неравенство (15.11) справедливо при любом выборе точки $\xi \in (a, b)$, ибо его левая часть обращается в ноль.

Пусть $\boldsymbol{r}(a) \neq \boldsymbol{r}(b)$. Оценим длину $|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)|$ вектора $\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a) \neq 0$. Если задан какой-либо вектор $\boldsymbol{x}$, то обозначая через $\boldsymbol{e}$ единичный вектор в направлении вектора $\boldsymbol{x}$, получим $|\boldsymbol{x}|=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e})$, ибо согласно определению скалярного произведения $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}) = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{e}|\cos\widehat{\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}}$, $|\boldsymbol{e}|=1$, $\widehat{\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}}=0$, и, следовательно, $\cos\widehat{\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}}=1$. Поэтому, если $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор в направлении вектора $\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a) \neq 0$, то

$$|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)| = (\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a), \boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{r}(b), \boldsymbol{e}) - (\boldsymbol{r}(a), \boldsymbol{e}),$$

т. е. получилась разность значений числовой функции

$$f(t) = (\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{e}) \tag{15.12}$$

на концах отрезка $[a, b]$:

$$|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)| = f(b)-f(a). \tag{15.13}$$

Из (15.12) следует, что функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех его внутренних точках, ибо согласно условиям теоремы этими свойствами обладает функция $\boldsymbol{r}(t)$. Поэтому, в силу формулы конечных приращений Лагранжа, существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$. Но согласно правилу дифференцирования скалярного произведения имеем

$$f'(t) = (\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{e}),$$

вследствие чего

$$f(b)-f(a) = (\boldsymbol{r}'(\xi), \boldsymbol{e})(b-a), \quad a<\xi<b. \tag{15.14}$$

Для любых же двух векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из определения скалярного произведения следует неравенство

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|\,|\cos\widehat{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}| \leqslant |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|;$$

в частности

$$|(\boldsymbol{r}'(\xi), \boldsymbol{e})| \leqslant |\boldsymbol{r}'(\xi)|\,|\boldsymbol{e}| = |\boldsymbol{r}'(\xi)|.$$

Следовательно, из (15.14) получаем:

$$f(b)-f(a) \leqslant |\boldsymbol{r}'(\xi)|\,(b-a), \quad a<\xi<b.$$

Из этого неравенства и формулы (15.13) сразу следует неравенство (15.11). □

§ 16. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

16.1. ПОНЯТИЕ КРИВОЙ

Рассмотрим отображения отрезков в трехмерное пространство R^3. Пусть $[a, b]$ — некоторый отрезок, а $r(t)$ — его отображение в R^3, т. е. отображение, ставящее в соответствие каждой точке $t \in [a, b]$ точку $r(t)$ пространства R^3, короче, $r: [a, b] \to R^3$.

Будем считать, что в пространстве R^3 фиксирована система координат. В этом случае задание точки пространства равносильно заданию трех ее координат. Обозначим координаты точки $r(t)$ через $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$:

$$r(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)).$$

Тогда задание отображения $r(t)$ оказывается равносильным заданию трех числовых функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, называемых *координатными функциями отображения* $r(t)$.

Отображение $r(t)$ называется *непрерывным на отрезке* $[a, b]$, если на этом отрезке непрерывны все его координатные функции.

Для отображения $r(t)$ будем обозначать через $\boldsymbol{r}(t)$ вектор-функцию, у которой координаты вектора $\boldsymbol{r}(t)$ совпадают с координатами точки $r(t)$, т. е. $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, и будем называть отображение $r(t)$ и вектор-функцию $\boldsymbol{r}(t)$ соответствующими друг другу.

Очевидно, что отображение $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, непрерывно на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда на этом отрезке непрерывна соответствующая ему вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$. Действительно, мы знаем, что вектор-функция непрерывна на отрезке в том и только том случае, когда на нем непрерывны все ее координаты (см. п. 15.1), что по определению является условием непрерывности отображения $r(t)$ на отрезке.

Теперь можно сформулировать определение кривой.

Множество Γ пространства, заданное как непрерывный образ некоторого отрезка[*)] называется *непрерывной кривой* или просто кривой.

Указанное непрерывное отображение, обозначим его снова через $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, отрезка $[a, b]$ на множество $\Gamma \subset R^3$ называется представлением кривой Γ и пишется

$$\Gamma = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Переменная t называется *параметром кривой* Γ.

Таким образом, кривая есть не просто множество пространства, а множество, рассматриваемое как результат некоторого непрерывного отображения отрезка. Иначе говоря, кривая — это

[*)] *Непрерывным образом отрезка* называется образ отрезка при непрерывном отображении последнего.

множество пространства плюс непрерывное отображение на него отрезка.

Поэтому одно и то же множество, полученное как образ двух разных непрерывных отображений отрезков, рассматривается как различные кривые.

Отметим, что непрерывное отображение $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, являющееся представлением кривой Γ, не предполагается взаимно однозначным: в одну и ту же точку кривой Γ могут отобразиться две или больше точек отрезка $[a, b]$.

Точки кривой $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, в которые отображается более чем одна точка отрезка $[a, b]$, называются *точками самопересечения*, или *кратными точками* этой кривой.

Таким образом, если точка M непрерывной кривой Γ является кратной точкой последней, то при заданном представлении $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, этой кривой Γ существуют по крайней мере два таких различных значения t_1 и t_2 параметра t, $a \leqslant t_1 \leqslant b$, $a \leqslant t_2 \leqslant b$, что $r(t_1) = r(t_2) = M$.

Точка $r(a)$ кривой $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется ее началом, а точка $r(b)$ — ее концом.

Определение 1. *Кривая* $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ *называется замкнутой кривой, или, что то же самое, замкнутым контуром, если ее начало совпадает с ее концом:* $r(a) = r(b)$.

Замкнутая кривая, не имеющая точек самопересечения, кроме точки $r(a) = r(b)$, *и такая, что* $r(t) \neq r(a) = r(b)$ *при* $a < t < b$, *называется простым замкнутым контуром.*

Будем говорить, что точка $M = r(t)$ кривой $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ стремится к точке $M_0 = r(t_0)$ этой кривой, если $|MM_0| \to 0$ при $t \to t_0$.

Если кривая Γ лежит в некоторой плоскости, то эта кривая называется *плоской*. Если указанная плоскость выбрана за координатную плоскость xOy, то представление кривой имеет вид

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = 0,$$

причем уравнение $z = 0$, если это не может привести к недоразумениям, обычно не пишется.

График непрерывной на некотором отрезке $[a, b]$ функции $y = f(x)$ является плоской кривой в нашем смысле с представлением

$$x = x,\quad y = f(x),\quad a \leqslant x \leqslant b$$

(в этом случае параметр $t = x$).

Отображение $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, задающее кривую Γ, при фиксированной в пространстве системе координат x, y, z можно задавать также в координатном виде, т. е., задавая координаты точки $r(t)$:

$$r(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)).$$

В этом случае тройка функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, называется *координатным представлением кривой* Γ *и пишется*:

$$\Gamma = \{x(t),\ y(t),\ z(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Отображение $r(t)$ можно задать и соответствующей ему вектор-функцией $\boldsymbol{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, где, как всегда, $\boldsymbol{r}(t)$ — радиус-вектор с концом в точке $r(t)$.*) В этом случае кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *годографом* вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$, а сама эта вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ — *векторным представлением кривой* Γ и пишется

$$\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\quad a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Примером кривой является окружность. Возьмем для определенности окружность радиуса r с центром в начале координат. Ее можно, например, представить как непрерывный образ отрезка $[0,\ 2\pi]$ с помощью функций

$$x = r\cos t,\quad y = r\sin t,\qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \tag{16.1}$$

Очевидно, окружность является простым замкнутым контуром. Примером незамкнутой кривой является любая дуга окружности, соответствующая, например, изменению параметра t на отрезке $[0,\ \alpha]$, где $0 \leqslant \alpha < 2\pi$.

Отметим, что множество точек кривой

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t,\qquad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi \tag{16.2}$$

совпадает с множеством точек кривой (16.1): и в том и в другом случае это окружность $x^2 + y^2 = r^2$ на плоскости x, y. Однако получена она как результат разных отображений: при отображении (16.1), т. е. при изменении параметра t от 0 до 2π эта окружность проходится один раз, а при отображении (16.2), т. е. при изменении параметра t от 0 до 4π, она проходится дважды. Поэтому (16.1) и (16.2) — разные кривые.

Аналогичным образом определяются специальные виды непрерывных кривых: (непрерывно) дифференцируемые, дважды (непрерывно) дифференцируемые и т. п. Определим, например, непрерывно дифференцируемые кривые. Отображение $r(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$ отрезка $[a,\ b]$ в пространство называется *непрерывно дифференцируемым*, если все функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,\ b]$.

Кривая $\Gamma = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *непрерывно дифференцируемой*, если ее представление $r(t)$ непрерывно дифференцируемо на отрезке $[a,\ b]$.

Аналогично определяются дифференцируемые кривые, дважды дифференцируемые, дважды непрерывно дифференцируемые и т. д.

---

*) Если не оговорено что-либо другое, то всегда предполагается, что начало радиус-вектора находится в начале координат.

Приведенное определение кривой имеет в своей основе физическое представление о траектории (пути) движущейся в пространстве материальной точки. Но на такой траектории можно выбирать различные параметры, например, время движения t, длину пройденного пути s или что-либо еще. Поэтому условие, состоящее в том, что две кривые с разными представлениями считаются всегда различными, не всегда удобно. Такое соглашение естественно для кривых (16.1) и (16.2). Однако два представления кривых

$$x=\cos t,\ y=-\sin t,\ -\pi\leqslant t\leqslant 0 \text{ и } y=\sqrt{1-x^2},\ -1\leqslant x\leqslant 1,$$

естественно было бы считать представлением одной и той же кривой: полуокружности $x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$.

Эти соображения приводят к мысли о проведении некоторого уточнения понятия кривой: объединения некоторых различных в смысле данного выше определения кривых в одну кривую. Сделаем это.

Будем говорить, что кривые $\Gamma_1=\{r(t),\ a\leqslant t\leqslant b\}$ и $\Gamma_2=\{\rho(\tau), \alpha\leqslant\tau\leqslant\beta\}$ являются одной и той же кривой, если существует непрерывная строго возрастающая функция $\tau=\varphi(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, $\varphi(a)=\alpha$, $\varphi(b)=\beta$ или непрерывная строго убывающая функция $\tau=\varphi(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, $\varphi(a)=\beta$, $\varphi(b)=\alpha$, такая, что для всех $t\in[a,\ b]$ имеет место равенство $r(t)=\rho(\varphi(t))$.

В случае (непрерывно) дифференцируемых кривых предполагается, что функция φ: $[a,\ b]\to[\alpha,\ \beta]$ кроме того (непрерывно) дифференцируема на $[a,\ b]$ и имеет не обращающуюся в ноль производную. Последнее условие обеспечивает (непрерывную) дифференцируемость обратной функции φ^{-1}.

Подобные преобразования параметра, т. е. такие, которые приводят к той же кривой в смысле сделанного определения, называются *допустимыми преобразованиями параметра*, а все представления одной и той же кривой называются *эквивалентными* между собой.

Более подробно переход к другим представлениям данной кривой будет рассмотрен в следующем пункте.

16.2*. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАННЫЕ КРИВЫЕ

Для построения строгой теории кривых, допускающих разные представления, введем предварительно понятие эквивалентных отображений отрезков в пространство.

Определение 2. *Непрерывное отображение $r(t)$ отрезка $[a,\ b]$ в пространство называется эквивалентным непрерывному отображению $\rho(\tau)$ отрезка $[\alpha,\ \beta]$ в то же пространство, если существует такая непрерывная строго монотонная функция $t=\varphi(\tau)$ (возрастающая или убывающая), что она отображает отрезок $[\alpha,\ \beta]$ на отрезок $[a,\ b]$ и для каждого $\tau\in[\alpha,\ \beta]$ справедливо ра-*

венство (*рис.* 63)

$$r(\varphi(\tau)) = \rho(\tau). \tag{16.3}$$

Функция $\varphi(\tau)$ называется *отображением, осуществляющим эквивалентность отображений* $r(t)$ и $\rho(\tau)$.

Если непрерывное отображение $r(t)$, $a \leq t \leq b$, отрезка $[a, b]$ в пространство эквивалентно непрерывному отображению $\rho(\tau)$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$, отрезка $[\alpha, \beta]$ в пространство, то пишут $r(t) \sim \rho(\tau)$.

Легко убедиться, что всякое непрерывное отображение отрезка в пространство эквивалентно самому себе: $r(t) \sim r(t)$ (здесь отображением, осуществляющим эквивалентность, является функция $t = \tau$, $a = \alpha \leq \tau \leq \beta = b$). Это свойство называется свойством *рефлексивности*. Легко проверяется также, что если $r(t)$, $a \leq t \leq b$, и $\rho(\tau)$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$, суть непрерывные отображения соответственно отрезков $[a, b]$ и $[\alpha, \beta]$ в пространство и если $r(t) \sim \rho(\tau)$, то и $\rho(\tau) \sim r(t)$ — свойство *симметричности*. Так же легко убедиться, что если $r_1(t_1)$, $a_1 \leq t_1 \leq b_1$, $r_2(t_2)$, $a_2 \leq t_2 \leq b_2$, и $r_3(t_3)$, $a_3 \leq t_3 \leq b_3$, являются непрерывными отображениями соответственно отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ и $[a_3, b_3]$ в пространство, то из $r_1(t_1) \sim r_2(t_2)$ и $r_2(t_2) \sim r_3(t_3)$ следует, что $r_1(t_1) \sim r_3(t_3)$ — свойство *транзитивности*.

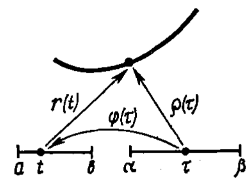


Рис. 63

Если в некотором множестве элементов введено понятие эквивалентности, обладающее тремя указанными свойствами (рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью), то такое множество распадается на непересекающиеся классы эквивалентных элементов (см. § 61). В нашем случае получаются непересекающиеся классы эквивалентных между собой непрерывных отображений отрезков.

Наконец, заметим, что, если $r(t)$, $a \leq t \leq b$, и $\rho(\tau)$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$ — эквивалентные непрерывные отображения отрезков в пространство, то образы отрезков $[a, b]$ и $[\alpha, \beta]$ в пространстве соответственно при отображениях $r(t)$ и $\rho(\tau)$ совпадают. Это сразу следует из условия (16.3).

Перейдем теперь к понятию кривой.

Определение 3. *Всякое множество* Γ *непрерывных эквивалентных отображений* $r(t)$ *отрезков* $[a, b]$ *в пространство (см. определение 2) называется параметрически заданной кривой*:

$$\Gamma = \{r(t);\quad a \leq t \leq b\}.$$

Каждое из указанных отображений называется представлением этой кривой.

Вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ ($\boldsymbol{r}(t)$ — радиус-вектор с концом в точке $r(t)$) называется по аналогии с п. 16.1 *векторным представлением* *параметрически заданной кривой* Γ:

$$\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\quad a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Если $r(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$, то функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ называются *координатным представлением параметрически заданной кривой* Γ:

$$\Gamma = \{x(t),\ y(t),\ z(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Очевидно, что параметрически заданная кривая однозначно определяется каждым из своих представлений. Это позволяет (что более удобно), например, в записи $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ правую часть равенства понимать не как совокупность всех представлений кривой Γ, а как некоторое вполне определенное ее представление $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Мы так и будем поступать в дальнейшем, причем не только в указанном случае, но и в случаях как векторных, так и координатных представлений.

Пример. В силу нашего определения параметрически заданные кривые

$$x = \cos t,\quad y = \sin t,\qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

и

$$x = \cos t,\quad y = \sin t,\qquad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi,$$

являются, как это уже отмечалось в п. 16.1, различными кривыми, хотя как множества точек плоскости они совпадают: эти множества представляют собой одну и ту же окружность $x^2 + y^2 = 1$. В первом случае эта окружность «пробегается» один раз, во втором — дважды.

Представления же

$$x = \cos t,\quad y = \sin t,\qquad -\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2$$

и

$$x = \sqrt{\tau(2-\tau)},\quad y = \tau - 1,\qquad 0 \leqslant \tau \leqslant 2,$$

задают одну и ту же кривую. Действительно, функция $\tau = 1 + \sin t$ непрерывна, строго монотонно возрастает на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ и переводит одно представление в другое. Множество точек кривой образует в этом случае полуокружность $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$.

При заданном представлении $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, некоторой непрерывной кривой и при фиксированном значении параметра t через $r(t)$, естественно, обозначается точка рассматриваемой непрерывной кривой, в которую при данном представлении отображается точка $t \in [a, b]$.

Определим, теперь, что называется точкой параметрически заданной кривой, т. е. кривой, определенной как класс эквивалентных непрерывных отображений отрезков.

Определение 4. *Пусть* $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, *и* $\rho(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, — *два представления параметрически заданной кривой* Γ, φ — *отображение, осуществляющее их эквивалентность* (*см. определение* 3) *и* *пусть* $t=\varphi(\tau)$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$, $a\leqslant t\leqslant b$ *(причем значение* τ, *а потому и значение* t *фиксированы), и, следовательно,* $r(t)=\rho(\tau)$. *Обозначим эту точку пространства через* P, *т. е.* $P=r(t)=\rho(\tau)$. *Пары* (P, t) *и* (P, τ) *называются эквивалентными.*

Эквивалентность пар (P, t) и (P, τ) будем обозначать символом $(P, t)\sim P(\tau)$.

Легко проверить, что 1) $(P, t)\sim(P, t)$;
2) если $(P, t)\sim(P, \tau)$, то $(P, \tau)\sim(P, t)$;
3) если $(P, t_1)\sim(P, t_2)$ и $(P, t_2)\sim(P, t_3)$, то $(P, t_1)\sim(P, t_3)$.

Определение 5. *Для данной параметрически заданной кривой* Γ *совокупность* $\{(P, t)\}$ *всех эквивалентных пар* (P — *фиксировано) называется точкой этой кривой, а точка пространства* P — *ее носителем.*

Каждая точка $\{(P, t)\}$ параметрически заданной кривой $\Gamma=\{r(t);\ a\leqslant t\leqslant b\}$ однозначно определяется каждой парой (P, t), и поскольку в этой паре $P=r(t)$, то каждая точка кривой Γ однозначно определяется значением параметра $t\in[a, b]$ при каждом представлении. Поэтому для краткости точки параметрически заданных кривых будем обозначать не символом $\{(P, t)\}$, а просто $r(t)$. В силу сказанного это обозначение имеет однозначный смысл.

Определение 6. *Совокупность носителей всех точек параметрически заданной кривой* Γ *называется носителем этой кривой.*

Точка P носителя кривой Γ, являющаяся носителем по крайней мере двух различных точек кривой, называется *кратной точкой* (или *точкой самопересечения*) носителя кривой Γ.

Как мы уже видели на примерах в п. 16.1 (см. (16.1) и (16.2)), различные кривые могут иметь один и тот же носитель. Заметим еще, что если $r(t)\neq r(a)=r(b)$, $a<t<b$ при одном представлении кривой, то это условие выполняется и при любом другом ее представлении. Следовательно, понятие замкнутого контура (см. определение 1 в п. 16.1) не зависит от выбора представления кривой.

Перейдем, теперь, к определению кривых других классов. Понятие эквивалентности отображений отрезка в пространство можно вводить не только для непрерывных отображений, но и для других отображений. Это дает возможность определить специальные классы параметрически заданных кривых: n раз дифференцируемых и n раз непрерывно дифференцируемых параметрически заданных кривых, $n=1, 2, \ldots$.

Определим, например, понятие эквивалентности для непрерывно дифференцируемых отображений отрезков и непрерывно дифференцируемую параметрически заданную кривую.

Определение 7. *Два непрерывно дифференцируемых отображения отрезков в пространство называются непрерывно дифференцируемо эквивалентными, если существует функция* φ, *осуществляющая их эквивалентность в смысле определения* 2, *которая как сама, так и ей обратная непрерывно дифференцируемы.*

Определение 8. *Всякое множество* Γ *непрерывно дифференцируемых и непрерывно дифференцируемо эквивалентных отображений отрезков в пространство называется непрерывно дифференцируемой параметрически заданной кривой.*

Вообще параметрически заданная кривая данного класса определяется как совокупность отображений отрезков в пространство (называемых ее представлениями), эквивалентных в некотором смысле. Отображения одного отрезка на другой, осуществляющие эту эквивалентность, называются в этом случае *допустимыми преобразованиями параметра* и удовлетворяют условиям рефлексивности, симметричности и транзитности (см. п. 16.1).

Каждая параметрически заданная кривая некоторого класса однозначно определяется любым своим представлением и для нее по той же схеме, что и выше, определяется понятие точки, носителя точки и носителя кривой. В дальнейшем для простоты там, где это не сможет привести к недоразумениям, параметрически заданные кривые и их носители (непрерывные кривые в смысле п. 16.1) будут называться одним и тем же термином «кривые».

16.3. ОРИЕНТАЦИЯ КРИВОЙ. ДУГА КРИВОЙ. СУММА КРИВЫХ. НЕЯВНОЕ ЗАДАНИЕ КРИВЫХ

Порядок чисел (по величине) на отрезке $[a, b]$ с помощью данного фиксированного представления $r(t)$ кривой $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, естественно, порождает соответствующий порядок точек на кривой. Точка $r(t') \in \Gamma$ считается предшествующей точке $r(t'') \in \Gamma$, или, что то же, точка $r(t'')$ считается следующей за точкой $r(t')$, если $a \leqslant t' < t'' \leqslant b$. Если этот же порядок точек желательно сохранить и при других представлениях кривой, то необходимо сузить класс допустимых преобразований параметра, именно допускать лишь строго монотонно возрастающие преобразования параметра.

Определение 9. *Кривая* Γ, *определенная классом эквивалентных непрерывных отображений отрезков в пространство, для которых допустимыми преобразованиями параметров являются только строго монотонно возрастающие непрерывные функции, называется ориентированной кривой.*

Таким образом, функции φ, осуществляющие эквивалентность двух представлений данной ориентированной кривой, удовлетворяют условиям определения 2 и, кроме того, являются строго монотонно возрастающими.

Вместо выражения «задана ориентированная кривая» говорят иногда, что «на кривой задана ориентация» (т. е. порядок точек).

Определение 10. *Пусть* $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — *ориентированная кривая и пусть* $t = t(\tau)$ — *строго монотонно убывающая и непрерывная на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *функция, причем* $t(\alpha) = b$, $t(\beta) = a$. *Кривая, определяемая представлением* $r = r(t(\tau))$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, *назы-*

вается кривой, ориентированной противоположно кривой Γ, *и обозначается* $-\Gamma$.

Подобным же образом определяются ориентированные и противоположно ориентированные кривые других классов (дифференцируемые, непрерывно дифференцируемые и т. п.).

Если $t=t(\tau)$ — указанное в определении 10 отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$, $\tau_0 \in [\alpha, \beta]$ и $t_0 = t(\tau_0)$, то точки $r(t_0)$ и $r(t(\tau_0))$ соответственно кривой Γ и противоположно ориентированной кривой $-\Gamma$ называются соответствующими друг другу. Одна точка кривой Γ предшествует другой точке этой кривой тогда и только тогда, когда точка кривой $-\Gamma$, соответствующая первой точке, следует за точкой, соответствующей второй. Этим оправдывается термин «противоположно ориентированная кривая».

Если $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — представление кривой Γ, то $r(a+b-\tau)$, $a \leqslant \tau \leqslant b$, является представлением противоположно ориентированной кривой $-\Gamma$, ибо функция $t=a+b-\tau$, $a \leqslant \tau \leqslant b$, строго монотонно убывает и отображает отрезок $[a, b]$ на себя.

В заключение сформулируем еще несколько полезных для дальнейшего определений.

Пусть задана кривая $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$.

Определение 11. *Если* $[a', b'] \subset [a, b]$, *то кривая* $\Gamma' = \{r(t);\ a' \leqslant t \leqslant b'\}$ *называется частью кривой* Γ *(или ее дугой) и пишется* $\Gamma' \subset \Gamma$.

Определение 12. *Если* $t_0 \in (a, b)$, $\Gamma_1 = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant t_0\}$, $\Gamma_2 = \{r(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant b\}$, *то кривая* Γ *называется суммой кривых* Γ_1 *и* Γ_2 *и пишется* $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Аналогично определяется сумма конечного числа кривых.

Определение 13. *Сумма конечного числа непрерывно дифференцируемых кривых называется кусочно-непрерывно дифференцируемой кривой.*

Определение 14. *Пусть* $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — *плоская кривая, расположенная на плоскости* x, y. *Если существует такая функция* $F(x, y)$, *что координаты точек* (x, y) *кривой* Γ *удовлетворяют условию*

$$F(x, y) = 0, \tag{16.4}$$

то говорят, что уравнение (16.4) *является неявным представлением кривой* Γ.

Следует, однако, иметь в виду, что, вообще говоря, множество всех точек, удовлетворяющих уравнению вида (16.4), не является кривой в выше определенном смысле даже для достаточно «хороших» функций $F(x, y)$. Например, множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)=0$, представляет собой окружность $x^2+y^2=1$ и точку $(0;\ 0)$. Можно показать, что это множество не является непрерывным образом отрезка.

Можно и в пространственном случае задавать кривые неявным образом, но уже при помощи системы друх уравнений:

$$F_1(x, y, z)=0, \quad F_2(x, y, z)=0.$$

Более подробно этим вопросом мы займемся в п. 41.3.

Наконец, отметим, что кривая всегда ограничена, т. е. лежит в некотором шаре; это следует из того, что функции координатного представления кривой, согласно теореме Больцано — Вейерштрасса, ограничены в силу их непрерывности. Вместе с тем уже в элементарной математике встречаются неограниченные кривые, к таковым относятся, например, прямая, парабола, гипербола, синусоида, график $\operatorname{tg} x$ и т. п. Чтобы охватить и такие «кривые», можно определить класс так называемых *открытых кривых* по схеме, подобной вышеприведенной, в которой за основу взято непрерывное отображение интервала, а не на отрезке, как это было сделано выше. Открытые кривые, в частности, могут быть и неограниченными. Подробное и точное формулирование всех этих понятий предоставляется проделывать читателю по мере потребности.

16.4. КАСАТЕЛЬНАЯ К КРИВОЙ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Пусть задана кривая $\Gamma=\{\boldsymbol{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$, вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ дифференцируема в точке $t_0 \in [a, b]$ и $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq 0$. Поскольку в силу определения дифференцируемости

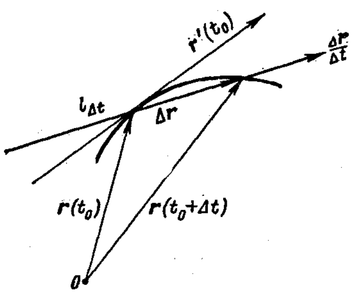


Рис. 64

$$\Delta \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)=$$
$$=\boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t+\boldsymbol{o}(\Delta t), \quad \Delta t \to 0,$$

то для всех достаточно малых $\Delta t \neq 0$ имеет место неравенство

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t) \neq \boldsymbol{r}(t_0).$$

Действительно при сделанных предположениях $\boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t \neq 0$, а потому для всех достаточно малых $\Delta t \neq 0$ будем иметь и

$$\boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t+\boldsymbol{o}(\Delta t) \neq 0.$$

Прямая, проведенная через точки $r(t_0)$ и $r(t_0+\Delta t)$ называется *секущей* для кривой Γ. Обозначим ее через $l_{\Delta t}$ (рис. 64). Для всех достаточно малых $\Delta t \neq 0$ в силу условия $r(t_0) \neq r(t_0+\Delta t)$ секущая $l_{\Delta t}$ определена однозначно. Поскольку вектор $\Delta \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)$ параллелен этой секущей, то и вектор $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$, $\Delta t \neq 0$, отличающийся от вектора $\Delta \boldsymbol{r}$ лишь скалярным множителем $1/\Delta t$, также ей параллелен.

По условию в точке t_0 существует производная, т. е. предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\boldsymbol{r}'(t_0). \tag{16.5}$$

Так как все секущие проходят через одну и ту же точку $r(t_0)$, то геометрически формула (16.5) означает, что секущие $l_{\Delta t}$ при Δt, стремящемуся к нулю стремятся к некоторому предельному положению, т. е. к прямой, проходящей через ту же точку $r(t_0)$ в направлении вектора $\boldsymbol{r}'(t_0)$. Эта прямая в силу условия $\boldsymbol{r}'(t_0)\neq 0$ определена однозначно. Она и называется *касательной к кривой* Γ в точке $r(t_0)$.

Таким образом, в силу самого определения касательной к кривой Γ в точке $r(t_0)$, производная $\boldsymbol{r}'(t_0)$ вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ в случае, если $\boldsymbol{r}'(t_0)\neq 0$ является вектором, параллельным касательной в точке $r(t_0)$. Если начало вектора $\boldsymbol{r}'(t_0)$ поместить в эту точку, как это обычно и делается, то он будет направлен по касательной.

В рассматриваемом случае дифференциал $d\boldsymbol{r}(t_0)=\boldsymbol{r}'(t_0)\,dt$ также направлен по касательной к кривой, ибо он отличается от производной лишь скалярным множителем dt. Вектор $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{r}'/|\boldsymbol{r}'|$, $\boldsymbol{r}'\neq\boldsymbol{0}$ является единичным вектором, направленным по касательной. Вектор $\Delta\boldsymbol{r}$ при $\Delta t>0$ направлен от точки кривой с меньшим значением параметра к точке с большим значением параметра, поэтому можно сказать, что вектор $\Delta\boldsymbol{r}$ при $\Delta t>0$ показывает направление, в котором параметр на кривой возрастает, т. е., как говорят, положительное направление на кривой. Вектор $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t>0$ имеет то же направление, что и вектор $\Delta\boldsymbol{r}$. Поскольку $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\boldsymbol{r}'(t)$, то естественно говорить, что вектор $\boldsymbol{r}'(t)$, а значит, и вектор $\boldsymbol{t}$, который отличается, быть может, от вектора $\boldsymbol{r}'(t)$ положительным числовым множителем $1/|\boldsymbol{r}'(t)|$, также направлены в сторону возрастания параметра и что их ориентация (направление) соответствует ориентации кривой. Направление вектора $\boldsymbol{t}$ (или, что то же, вектора $\boldsymbol{r}'$) называется *положительным направлением касательной*.

Уравнение касательной к кривой Γ в точке $r(t_0)$, для которой $\boldsymbol{r}'(t_0)\neq 0$, в векторной записи имеет вид

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t_0)+\boldsymbol{r}'(t_0)\,\tau,\quad -\infty<\tau<+\infty,$$

где $\boldsymbol{r}$ — текущий радиус-вектор касательной. В координатной записи уравнение касательной в этом случае имеет вид

$$\begin{gathered} x=x(t_0)+x'(t_0)\,\tau,\\ y=y(t_0)+y'(t_0)\,\tau,\\ z=z(t_0)+z'(t_0)\,\tau,\\ -\infty<\tau<+\infty. \end{gathered}$$

Исключив переменную τ, получим

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}.$$

Определение 15. *Пусть* Γ — *дифференцируемая кривая и* $\boldsymbol{r}(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$ — *ее векторное представление. Точка кривой* Γ, *в которой* $\boldsymbol{r}'\neq\boldsymbol{0}$, *называется неособой, а точка, в которой* $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{0}$ — *особой.*

Если $\boldsymbol{r}=(x(t)),\ y(t),\ z(t))$, то из равенства $|\boldsymbol{r}'|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$ (см. п. 15.2) имеем: *точка* $(x(t),\ y(t),\ z(t))$ *кривой* Γ *неособая тогда и только тогда, когда в ней* $x'^2+y'^2+z'^2>0$, *т. е. хоть одна из производных* x', y' *и* z' не обращается в нуль.

Согласно доказанному выше, *во всякой неособой точке кривой* Γ *существует касательная.*

В определении 15 формально правильнее было бы говорить об особой и неособой точке кривой при данном ее представлении. Это не было сделано, поскольку понятие особой точки не зависит от выбора представления кривой. Поясним и докажем это.

Допустимыми преобразованиями параметра для дифференцируемых кривых являются функции $t=t(\tau)$, которые, как сами, так и обратные к ним, являются строго монотонными дифференцируемыми функциями. Поэтому в силу теоремы 3 п. 9.6 о производной обратной функции имеем $t'_\tau\tau'_t=1$. Отсюда следует, что для каждого допустимого преобразования $t=t(\tau)$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$, параметра дифференцируемой кривой всегда $t'(\tau)\neq 0$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$. Поскольку

$$x_\tau'^2+y_\tau'^2+z_\tau'^2=\left(x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2\right)t_\tau'^2,$$

то неособая точка при одном представлении дифференцируемой кривой будет одновременно неособой и при любом другом ее представлении.

Определение 16. *Непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек называется гладкой.*

Кривая, представимая как сумма конечного числа гладких кривых, называется кусочно-гладкой.

Отметим, что если плоская кривая имеет явное представление $y=y(x)$ или $x=x(y)$, то для нее вектор $(x'(t),\ y'(t))$ — всегда не нулевой: в первом случае это $(1,\ y')$, а во втором — $(x',\ 1)$.

Аналогичным образом определяется касательная как предельное положение секущей и кривой $\Gamma=\{\boldsymbol{r}(t),\ a\leqslant t\leqslant b\}$ в точке $\boldsymbol{r}(t_0)$, $t_0\in[a,\ b]$, и в случае, когда $\boldsymbol{r}'(t_0)=\boldsymbol{0}$, но существует некоторое натуральное $n>1$, для которого $\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)\neq\boldsymbol{0}$.

Если все $\boldsymbol{r}^{(k)}(t_0)=\boldsymbol{0}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, а $\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)\neq\boldsymbol{0}$, то раскладывая $\Delta\boldsymbol{r}$ по формуле Тейлора, получаем

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)=\frac{1}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)\,\Delta t^n+\boldsymbol{o}(\Delta t^n),\quad \Delta t\to 0.$$

Вектор $\frac{\Delta r}{\Delta t^n}$ направлен параллельно секущей $l_{\Delta t}$, проходящей через точки $r(t_0)$ и $r(t_0+\Delta t)$. Из написанного равенства следует, очевидно, что существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t^n} = \frac{1}{n!} r^{(n)}(t_0) \neq 0.$$

Поэтому в этом случае предельное положение секущей $l_{\Delta t}$, т. е. касательная в точке $r(t_0)$, является прямой, проходящей через точку $r(t_0)$ параллельно вектору $r^{(n)}(t_0)$.

16.5. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

Прежде чем определять понятие длины дуги кривой, введем понятие разбиения отрезка — понятие, которое будет неоднократно встречаться и в дальнейшем.

Определение 17. *Для всякого отрезка* $[a, b]$ *систему его точек* t_i, $i=0, 1, 2, \ldots, n$, *таких, что*

$$a=t_0<t_1<\ldots<t_{i-1}<t_i<\ldots<t_n=b,$$

будем называть его разбиением и обозначать $\tau=\{t_i\}_{i=0}^{i=n}$.

Пусть задана кривая $\Gamma=\{r(t),\ a\leqslant t\leqslant b\}$ и пусть $\tau=\{t_i\}_{i=0}^{i=n}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Положим

$$\sigma_\tau \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} |r(t_i)-r(t_{i-1})|.$$

Очевидно (рис. 65), σ_τ — длина ломаной с вершинами $r(a)$, $r(t_1)$, ..., $r(t_{n-1})$, $r(b)$, т. е. как обычно говорят, *ломаной, вписанной в кривую* Γ.

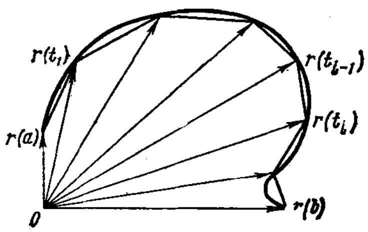


Рис. 65

Всякую ломаную, в частности и вписанную в кривую $\Gamma=\{r(t);\ a\leqslant t\leqslant b\}$, можно рассматривать как кривую в смысле данного выше определения, если только задать ее представление. Пусть λ — ломаная, т. е. множество, состоящее из конечного числа отрезков с вершинами в точках $M_0, M_1, \ldots, M_n$ (эти отрезки называются звеньями ломаной). Возьмем некоторый отрезок $[a, b]$ и какое-либо его разбиение на n отрезков: $\tau=\{t_i\}_{i=0}^{i=n}$. Будем для простоты всегда считать, что представлением ломаной является непрерывное отображение $\rho(t)$, линейно отображающее каждый отрезок $[t_{i-1}, t_i]$ на отрезок $M_{i-1}M_i$, $i=1, 2, \ldots, n$; таким образом, если обозначить через ρ_i радиус-вектор точки M_i, $i=0, 1, \ldots, n$, то векторное представление ломаной будет иметь вид

$$\rho(t)=\frac{\rho_i-\rho_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}(t-t_{i-1})+\rho_{i-1},\quad t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i,\quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Если $M_{i-1} \neq M_i$ при $i=1, 2, \ldots, n$, то ломаная называется *невырожденной*.

Определение 18. *Величина* $S_\Gamma = \sup\limits_\tau \sigma_\tau$, *где верхняя грань взята по всевозможным разбиениям* τ *отрезка* $[a, b]$, *называется длиной кривой* Γ. *Если* $S_\Gamma < +\infty$, *то кривая* Γ *называется спрямляемой.*

В силу этого определения спрямляемость кривой и ее длина не зависят от выбора представления кривой и всегда

$$0 \leqslant S_\Gamma \leqslant +\infty.$$

Упражнение 1. Доказать, что кривая, являющаяся частью спрямляемой кривой, также спрямляема.

Лемма 2. *Пусть* $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$, *тогда*

$$S_\Gamma = S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}. \tag{16.6}$$

Доказательство. Пусть $a < c < b$ и

$$\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\},\ \Gamma_a = \{\boldsymbol{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant c\},\ \Gamma_b = \{\boldsymbol{r}(t),\ c \leqslant t \leqslant b\}.$$

Пусть τ — разбиение отрезка $[a, b]$, а τ^* — разбиение этого же отрезка, совпадающее с τ, если точка c входит в разбиение τ, и получающееся из τ добавлением к нему точки c, если эта точка не входит в разбиение τ. Разбиение τ^* является объединением двух разбиений отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, которые мы обозначим соответственно τ_a и τ_b, т. е. $\tau^* = \tau_a \cup \tau_b$. Очевидно, для длин ломаных, соответствующих разбиениям τ^*, τ_a и τ_b справедливо равенство $\sigma_{\tau^*} = \sigma_{\tau_a} + \sigma_{\tau_b}$. Но $\sup\limits_{\tau_a} \sigma_{\tau_a} = S_{\Gamma_a}$, $\sup\limits_{\tau_b} \sigma_{\tau_b} = S_{\Gamma_b}$, следовательно,

$$\sigma_{\tau^*} \leqslant S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}.$$

При переходе от разбиения τ к разбиению τ^*, быть может, лишь одно звено $r(t_{i-1})r(t_i)$ заменяется двумя $r(t_{i-1})r(c)$ и $r(c)\,r(t_i)$, и поскольку $|r(t_{i-1})\,r(t_i)| \leqslant |r(t_{i-1})\,r(c)| + |r(c)\,r(t_i)|$, то $\sigma_\tau \leqslant \sigma_{\tau^*}$ и, следовательно,

$$\sigma_\tau \leqslant S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}.$$

Но $S_\Gamma = \sup\limits_\tau \sigma_\tau$, поэтому

$$S_\Gamma \leqslant S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}. \tag{16.7}$$

Докажем теперь обратное неравенство. Для произвольных τ_a и τ_b разбиений соответственно отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ и разбиения $\tau^* = \tau_a \cup \tau_b$ отрезка $[a, b]$ имеем $\sigma_{\tau_a} + \sigma_{\tau_b} = \sigma_{\tau^*} \leqslant S_\Gamma$. Отсюда $\sigma_{\tau_a} \leqslant S_\Gamma - \sigma_{\tau_b}$; фиксируя разбиение τ_b и переходя к верхней грани σ_{τ_a} при всевозможных τ_a, получаем неравенство $S_{\Gamma_a} \leqslant$ $\leqslant S_\Gamma - \sigma_{\tau_b}$, и затем —

$$S_{\Gamma_a} + \sigma_{\tau_b} \leqslant S_\Gamma.$$

Беря верхнюю грань множества чисел, которое получается при всевозможных разбиениях τ_b, будем иметь:

$$S_{\Gamma_a}+S_{\Gamma_b}\leqslant S_\Gamma. \ \square$$

Отметим, что в лемме 2 не предполагается, что рассматриваемые кривые спрямляемы.

Задача 12. Построить пример неспрямляемой кривой.

Теорема 1. *Если кривая $\Gamma=\{\boldsymbol r(t),\ a\leqslant t\leqslant b\}$ непрерывно дифференцируема, то она спрямляема, и ее длина S_Γ удовлетворяет неравенству*

$$|r(b)-r(a)|\leqslant S_\Gamma\leqslant M(b-a), \tag{16.9}$$

где

$$M=\max_{[a,\,b]}|\boldsymbol r'(t)|. \tag{16.10}$$

Отметим, что в силу непрерывности производной $\boldsymbol r'(t)$, ее абсолютная величина $|\boldsymbol r'(t)|$ также непрерывна и потому достигает на отрезке $[a, b]$ своего наибольшего значения M.

Доказательство. Возьмем какое-либо разбиение $\tau=\{t_i\}_{i=0}^{i=n}$ отрезка $[a, b]$. Тогда применив неравенство (15.11), получим

$$|\boldsymbol r(b)-\boldsymbol r(a)|=\left|\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol r(t_i)-\boldsymbol r(t_{i-1})\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol r(t_i)-\boldsymbol r(t_{i-1})|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol r'(\xi_i)|(t_i-t_{i-1}), \tag{16.11}$$

где $\xi_i\in(t_{i-1}, t_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Поскольку

$$\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol r(t_i)-\boldsymbol r(t_{i-1})|=\sigma_\tau$$

— длина вписанной в кривую Γ ломаной, соответствующей разбиению τ, и для всех $i=1, 2, \ldots, n$ в силу (16.10) имеет место неравенство $|\boldsymbol r'(\xi_i)|\leqslant M$, то из неравенства (16.11) для любого разбиения τ, будем иметь

$$|\boldsymbol r(b)-\boldsymbol r(a)|\leqslant\sigma_\tau\leqslant M\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})=M(b-a). \tag{16.12}$$

Перейдя в этом неравенстве к верхней грани по τ, получим утверждение теоремы. $\square$

Теорема 2. *Пусть кривая $\Gamma=\{\boldsymbol r(t)=(x(t), y(t), z(t));\ a\leqslant t\leqslant b\}$ непрерывно дифференцируема. Тогда переменная длина дуги s, отсчитываемая от начала $r(a)$ кривой Γ или соответственно от ее конца $r(b)$, является возрастающей, соответственно убывающей,* *непрерывно дифференцируемой функцией параметра t; при этом*

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=\left|\frac{dr}{dt}\right|, \tag{16.13}$$

соответственно

$$\frac{ds}{dt}=-\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=-\left|\frac{dr}{dt}\right|. \tag{16.14}$$

Доказательство. Пусть $s=s(t)$ длина дуги кривой Γ от точки $r(a)$ до точки $r(t)$. Пусть $t_0\in[a, b]$, $t_0+\Delta t\in[a, b]$ и $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t)$. Очевидно, что функция $s=s(t)$ возрастает на отрезке $[a, b]$, т. е. если $\Delta t>0$, то $\Delta s\geqslant 0$; если же $\Delta t<0$, то $\Delta s\leqslant 0$. Поэтому всегда $\frac{\Delta s}{\Delta t}\geqslant 0$.

Применив неравенство (16.9) к части кривой Γ, соответствующей отрезку $[t_0, t_0+\Delta t]$ при $\Delta t>0$ (соответственно отрезку $[t_0+\Delta t, t_0]$ при $\Delta t<0$), получим:

$$|\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)|\leqslant|\Delta s|\leqslant M|\Delta t|;$$

откуда

$$\left|\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}\right|\leqslant\frac{\Delta s}{\Delta t}\leqslant M, \tag{16.15}$$

где M — наибольшее значение $|\boldsymbol{r}'(t)|$ на отрезке $[t_0, t_0+\Delta t]$ при $\Delta t>0$ или на отрезке $[t_0+\Delta t, t_0]$ при $\Delta t<0$.

В силу непрерывности производной $\boldsymbol{r}'(t)$ ее абсолютная величина $|\boldsymbol{r}'(t)|$ также непрерывна и потому ее наибольшее значение существует, т. е. принимается в некоторой точке $\xi=t_0+\theta\Delta t$, $0<\theta<1$, указанного отрезка. Поэтому неравенство (16.15) можно переписать в виде

$$\left|\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}\right|\leqslant\frac{\Delta s}{\Delta t}\leqslant|\boldsymbol{r}'(t_0+\theta\,\Delta t)|,\qquad 0<\theta<1.$$

Перейдя здесь к пределу при $\Delta t\to 0$, в левой части неравенства в силу определения производной, а в правой в силу непрерывности производной $\boldsymbol{r}'(t)$ в точке $t=t_0$, получим $|\boldsymbol{r}'(t_0)|$. Следовательно, предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$ существует и также равен $|\boldsymbol{r}'(t_0)|$, т. е. существует производная $s'(t_0)$ и $s'(t_0)=|\boldsymbol{r}'(t_0)|$.

Если $\boldsymbol{r}(t)=(x(t), y(t), z(t))$, то $\boldsymbol{r}'(t)=(x'(t), y'(t), z'(t))$ и потому

$$s'(t)=|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}.$$

Если теперь $\sigma=\sigma(t)$ — переменная длина дуги, отсчитываемая от конца $r(b)$ кривой Γ, то, очевидно, $\sigma=S_\Gamma-s$, откуда, дифференцируя это равенство по t, будем иметь

$$\frac{d\sigma}{dt}=-\frac{ds}{dt}=-\left|\frac{dr}{dt}\right|.\ \square$$

Следствие 1. *Если параметром непрерывно дифференцируемой кривой является переменная длина дуги s, то*

$$\left|\frac{dr}{ds}\right|=1. \tag{16.16}$$

Это сразу следует из формулы $\left|\frac{dr}{dt}\right|=\frac{ds}{dt}$ при $t=s$.

Замечание. Формула (16.16) имеет простой геометрический смысл. Поясним его. Пусть параметром непрерывно дифференцируемой кривой Γ является переменная длина дуги s: $\Gamma=\{\boldsymbol{r}(s);\ 0\leqslant s\leqslant S_\Gamma\}$. Величина $|\Delta\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s)|$ равна длине отрезка, соединяющего точки $r(s)$ и $r(s+\Delta s)$. Этот отрезок называется обычно хордой, стягивающей дугу кривой Γ с началом в точке $r(s)$ и концом в точке $r(s+\Delta s)$. Длина указанной дуги, очевидно, равна $|\Delta s|$ (рис. 66). Поскольку $\left|\frac{dr}{ds}\right|=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta r}{\Delta s}\right|$, то из равенства (16.16) следует, что

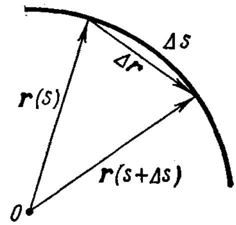


Рис. 66

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta r|}{|\Delta s|}=1.$$

Это означает, что предел отношения длины дуги к длине стягивающей ее хорды равен единице, когда дуга стягивается в точку. В этом и состоит геометрический смысл формулы (16.16).

Следствие 2. *Для всякой непрерывно дифференцируемой кривой Γ без особых точек, т. е. для всякой гладкой кривой, существует ее представление $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, в котором за параметр s взята переменная длина дуги кривой Γ.*

Доказательство. Пусть непрерывно дифференцируемая кривая $\Gamma=\{\boldsymbol{r}(t);\ a\leqslant t\leqslant b\}$ не имеет особых точек, т. е. $\boldsymbol{r}'(t)\neq\boldsymbol{0}$ для всех $t\in[a, b]$. В этом случае переменная длина дуги $s=s(t)$ является строго монотонно возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией, ибо $\frac{ds}{dt}=|\boldsymbol{r}'|>0$ во всех точках $[a, b]$. Поэтому существует обратная функция $t=t(s)$, $0\leqslant s\leqslant S_\Gamma$, которая также строго монотонно возрастает и имеет непрерывную не обращающуюся в ноль производную на отрезке $[0, S_\Gamma]$, т. е. функция $t=t(s)$ является допустимым преобразованием параметра для непрерывно дифференцируемых кривых без особых точек и представление $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t(s))$ является искомым представлением, в котором роль параметра играет переменная длина дуги. □

Выясним теперь геометрический смысл координат вектора $\frac{dr}{ds}$. Обозначим через α, β и γ углы, образованные вектором $\frac{dr}{ds}$ или, что то же, касательной к кривой $\Gamma=\{\boldsymbol{r}(s)\}$ соответственно с осями Ox, Oy и Oz. Тогда из равенства $\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right| = 1$, очевидно, следует, что проекции вектора $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ на оси координат равны соответственно направляющим косинусам вектора $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$: $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$, т. е.

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma). \tag{16.17}$$

Наряду с этим для вектор-функции $\boldsymbol{r}(s) = (x(s),\ y(s),\ z(s))$, как для всякой вектор-функции (см. п. 15.2), имеем

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \left(\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}\right). \tag{16.18}$$

Сравнивая (16.17) и (16.18), получаем

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha,\quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta,\quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma. \tag{16.19}$$

В качестве примера рассмотрим кривую, называемую *винтовой линией*. Эта кривая задается представлением

$$x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad z = bt,$$
$$a^2 + b^2 \neq 0,\qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

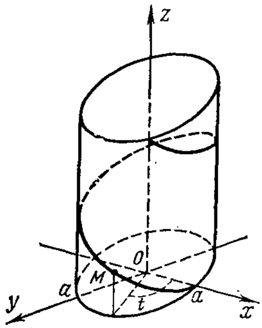


Рис. 67

Очевидно, что винтовая линия является бесконечно дифференцируемой кривой, и так как

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2 \neq 0,$$

то она не имеет особых точек (рис. 67). Следовательно, переменную длину ее дуги можно принять за параметр.

Найдем соответствующее представление. Согласно формуле (16.13), имеем

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Отсюда $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и, так как $t(0) = 0$, то $t = s/\sqrt{a^2+b^2}$. Поэтому искомое представление имеет вид

$$x(s) = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y(s) = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
$$z(s) = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad 0 \leqslant s \leqslant T\sqrt{a^2+b^2}.$$

Упражнение 2. Доказать, что для спрямляемой кривой без точек самопересечения переменная длина дуги является непрерывной *строго монотонной функцией параметра*.

16.6. ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ

Пусть $\Gamma=\{\boldsymbol{r}(t);\quad a\leqslant t\leqslant b\}$ — непрерывно дифференцируемая плоская кривая, лежащая в плоскости xOy,

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t))$$

и пусть $s=s(t)$ — переменная длина дуги кривой Γ; для ее производной из формул (16.13) и (16.14) получаем:

$$\frac{ds}{dt}=\pm\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \tag{16.20}$$

здесь знак «+» берется, если длина дуги $s(t)$ отсчитывается от начальной точки $r(a)$ кривой, и знак «—», если от конечной точки $r(b)$. Из формулы (16.20) для дифференциала дуги получаем выражение

$$ds^2=dx^2+dy^2. \tag{16.21}$$

Пусть точка $(x(t_0),\ y(t_0))$ — неособая, т. е. $x'^2(t_0)+y'^2(t_0)>0$, например $x'(t_0)\neq 0$. Пусть для определенности $x'(t_0)>0$, тогда в некоторой окрестности точки t_0 также $x'(t)>0$ и, значит, функция $x(t)$ строго монотонно возрастает в этой окрестности; поэтому существует обратная непрерывно дифференцируемая функция $t=t(x)$. Подставляя ее в представление кривой Γ, находим

$$y=y(t(x))=f(x),$$

т. е. в некоторой окрестности неособой точки непрерывно дифференцируемая кривая, является графиком непрерывно дифференцируемой функции f; точнее, существуют окрестность точки t_0 и непрерывно дифференцируемая функция f, определенная на некотором интервале, содержащем точку $x_0=x(t_0)$, такие, что часть кривой, соответствующая значениям параметра, принадлежащим указанной окрестности точки t_0, является графиком функции f.

В случае, если кривая Γ является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y=f(x)$, формула (16.20) превращается в формулу

$$\frac{ds}{dx}=\pm\sqrt{1+y'^2},\quad \text{и, следовательно,}\quad ds=\pm\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Рассмотрим геометрический смысл формулы (16.21) в случае, когда Γ является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, и длина дуги кривой отсчитывается от начальной точки кривой (рис. 68). Пусть

$$x_0\in[a,\ b],\ x_0+dx\in[a,\ b],\ y_0=f(x_0),\ M_0=(x_0,\ y_0),$$
$$y_0+\Delta y=f(x_0+dx),\ M=(x_0+dx,\ y_0+\Delta y),$$

M_0N — касательная в точке M_0, $PM=\Delta y$ — приращение функции в точке x_0+dx, $PN=dy$ — приращение ординаты касательной в точке x_0+dx. Треугольник M_0NP прямоугольный; поскольку $M_0P=dx$, $PN=dy$, то

$$M_0N^2=M_0P^2+PN^2=dx^2+dy^2=ds^2,$$

т. е. длина отрезка касательной M_0N равна ds. Иначе говоря, приращение длины касательной $\sqrt{dx^2+dy^2}$ равно главной части ds приращения длины дуги Δs.

Если теперь на кривой Γ в качестве параметра взята переменная длина дуги s: $\Gamma=\{\boldsymbol{r}(s);\ 0\leqslant s\leqslant S_\Gamma\}$, то, согласно (16.19),

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\quad \frac{dy}{ds}=\cos\beta=\sin\alpha,\quad \alpha+\beta=\frac{\pi}{2},\qquad (16.22)$$

где (рис. 69) α — угол, образованный касательной с осью Ox, а β — с осью Oy.

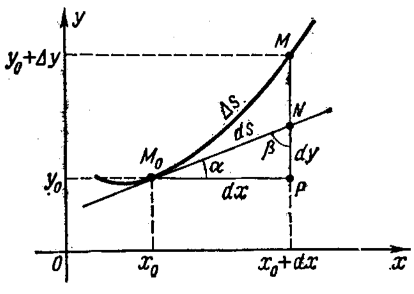


Рис. 68

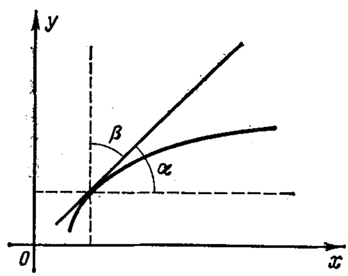


Рис. 69

Отметим, что эти формулы могут быть получены применением к «криволинейному треугольнику» M_0MP (см. рис. 68) формул, выражающих синус и косинус углов обычного прямоугольного треугольника через его катеты и гипотенузу, считая стороны указанного «треугольника» M_0MP равными соответственно dx, dy, ds. Подобное обстоятельство имеет место и для пространственных формул (16.19). Такой метод получения формул (16.19) и (16.22) является, конечно, необоснованным — он не имеет доказательной силы, однако он облегчает запоминание этих формул.

16.7. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Пусть теперь годограф Γ непрерывно дифференцируемой вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ есть траектория движущейся материальной точки, а параметр t — время движения. Обозначим переменную длину дуги, отсчитываемую от некоторой начальной точки $\boldsymbol{r}(t_0)$, через $s=s(t)$. Пусть $t>t_0$; положив $\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)$ согласно (16.13), получим

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|=\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t},$$

т. е. длина вектора $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ совпадает с величиной скорости в рассматриваемой точке (см. п. 9.4); сам же вектор $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, как мы знаем (см. п. 16.2), направлен по касательной. Вектор $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ называется в этом случае *скоростью движения* в данной точке и обозначается $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.$$

§ 17. КРИВИЗНА КРИВОЙ

17.1. ДВЕ ЛЕММЫ. РАДИАЛЬНАЯ И ТРАНСВЕРСАЛЬНАЯ СОСТАВЛЯЮЩИЕ СКОРОСТИ

Докажем две полезные для дальнейшего леммы о производных вектор-функции.

Лемма 1. *Пусть вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ имеет производную в точке t_0. Если длина вектора $\boldsymbol{r}(t)$ в некоторой окрестности точки t_0 постоянна, то вектор $\boldsymbol{r}'(t_0)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{r}(t_0)$, т. е.*

$$\boldsymbol{r}'(t_0)\,\boldsymbol{r}(t_0)=0. \tag{17.1}$$

Доказательство. По условию, существует окрестность точки t_0, в которой длина вектора $\boldsymbol{r}(t)$ постоянна: $|\boldsymbol{r}(t)|=c$, где c — константа. Поэтому для всех точек указанной окрестности имеем $|\boldsymbol{r}(t)|^2=c^2$, а следовательно, и $\boldsymbol{r}^2(t)=c^2$. Вычислив производную функции $\boldsymbol{r}^2(t)$ в точке t_0, получим (см. п. 15.2) $2\boldsymbol{r}(t_0)\,\boldsymbol{r}'(t_0)=0$ откуда и следует (17.1). $\square$

Физическая интерпретация этой леммы состоит в том, что у материальной точки, движущейся так, что она все время остается на поверхности сферы, ее скорость направлена по касательной к этой сфере и, следовательно, перпендикулярна радиус-вектору.

Пусть функция $\boldsymbol{r}(t)$ определена в некоторой окрестности $U(t_0)$ точки t_0 и пусть в этой окрестности $\boldsymbol{r}(t)\neq 0$ (если вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ непрерывна в точке t_0, то условия неравенства нулю радиус-векторов $\boldsymbol{r}(t)$ в достаточно малой окрестности точки t_0 всегда можно добиться переносом начала координат). Пусть $t=t_0+\Delta t\in U(t_0)$ и пусть $\varphi=\varphi(t)$ — угол (выраженный в радианах) между векторами $\boldsymbol{r}(t_0)$ и $\boldsymbol{r}(t)$, $|\varphi|\leqslant\pi$, причем будем считать, что $\varphi(t)\geqslant 0$ для $\Delta t\geqslant 0$ и $\varphi\leqslant 0$ для $\Delta t<0$. В точке t_0 для приращения $\Delta\varphi$ функции φ имеем

$$\Delta\varphi=\varphi(t)-\varphi(t_0)=\varphi(t),$$

ибо $\varphi(t_0)=0$; поэтому всегда $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\geqslant 0$.

Определение 1. *Производная* $\frac{d\varphi(t_0)}{dt}$ *называется скоростью вращения вектор-функции* $\boldsymbol{r}(t)$ *в точке* t_0 *и обозначается* $\omega = \omega(t_0;\ \boldsymbol{r}(t))$:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{17.2}$$

Заметим, что, если выбрать противоположный отсчет углов, т. е. определить угол между векторами $\boldsymbol{r}(t_0)$ и $\boldsymbol{r}(t)$ как угол $\psi = -\varphi$, то, очевидно,

$$\frac{d\psi}{dt} \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \omega(t_0;\ \boldsymbol{r}) = \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt} = \left|\frac{d\psi}{dt}\right|.$$

Таким образом, как при одном, так и при другом отсчете углов φ между векторами $\boldsymbol{r}(t_0)$ и $\boldsymbol{r}(t)$ всегда

$$\omega(t_0;\ \boldsymbol{r}) = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|.$$

Лемма 2. *Пусть вектор-функция* $\boldsymbol{r}(t)$ *определена в некоторой окрестности точки* t_0 *и* $\boldsymbol{r}(t_0) \neq 0$. *Тогда, если в точке* t_0 *существует производная* $\boldsymbol{r}'(t_0)$, *то в этой точке существует и скорость вращения* $\omega = \omega(t_0;\ \boldsymbol{r}(t))$, *причем*

$$\omega = \frac{1}{r^2(t_0)} |\boldsymbol{r}(t_0) \times \boldsymbol{r}'(t_0)|. \tag{17.3}$$

Следствие. *Если в дополнение к условиям леммы длина вектора* $\boldsymbol{r}(t)$ *постоянна:* $|\boldsymbol{r}(t)| = r$, r *— константа, то*

$$\omega = |\boldsymbol{r}'(t)|/r. \tag{17.4}$$

Доказательство. В силу существования производной $\boldsymbol{r}'(t_0)$ функция $\boldsymbol{r}(t)$ непрерывна в точке t_0. Отсюда и из условия $\boldsymbol{r}(t_0) \neq 0$ следует, что для всех достаточно малых Δt выполняется неравенство $\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) \neq 0$ и, следовательно, определен угол $\Delta\varphi$ между векторами $\boldsymbol{r}(t_0)$ и $\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t)$. Из непрерывности вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ в точке t_0 следует также*) и непрерывность в точке t_0 функции $\varphi(t)$, т. е.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta\varphi = 0$$

(как всегда $\Delta t = t - t_0$, $\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi(t)$, ибо $\varphi(t_0) = 0$).

Для вычисления производной (17.2) заменим бесконечно малую $\Delta\varphi$ на эквивалентную ей при $\Delta t \to 0$ бесконечно малую $\sin\Delta\varphi$ (см. лемму в п. 8.2), которую можно найти из формулы

$$|\boldsymbol{r}(t_0) \times \boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t)| = |\boldsymbol{r}_0(t_0)|\,|\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t)|\,|\sin\Delta\varphi|.$$

---

*) Это вытекает, например, из равенства $\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{r}(t_0)\,\boldsymbol{r}(t)}{|\boldsymbol{r}(t_0)|\,|\boldsymbol{r}(t)|}$.

В силу теоремы 2 п. 8.3 о замене бесконечно малых им эквивалентными при вычислении пределов имеем

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta t}\right|=$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\boldsymbol r(t_0)\times\boldsymbol r(t_0+\Delta t)|}{|\boldsymbol r(t_0)|\,|\boldsymbol r(t_0+\Delta t)|\,|\Delta t|}=\frac{1}{r^2(t_0)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\boldsymbol r(t_0)\times\boldsymbol r(t_0+\Delta t)|}{|\Delta t|}.\qquad(17.5)$$

Здесь снова была использована непрерывность вектор-функции $\boldsymbol r(t)$ в точке t_0: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\boldsymbol r(t_0+\Delta t)=\boldsymbol r(t_0)$.

Далее, поскольку функция $\boldsymbol r(t)$ дифференцируема в точке t_0, то

$$\boldsymbol r(t_0+\Delta t)=\boldsymbol r(t_0)+\boldsymbol r'(t_0)\,\Delta t+\boldsymbol\varepsilon(\Delta t)\,\Delta t,$$

где $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\boldsymbol\varepsilon(\Delta t)=\mathbf 0$. Подставив это выражение для $\boldsymbol r(t_0+\Delta t)$ в (17.5) и заметив, что $|\boldsymbol r(t_0)\times\boldsymbol r(t_0)|=0$ и $\lim\limits_{\Delta t\to 0}|\boldsymbol r(t_0)\times\boldsymbol\varepsilon(\Delta t)=0$ получим:

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{|\boldsymbol r(t_0)\times\boldsymbol r'(t_0)|}{r^2(t_0)}.\ \square$$

Доказательство следствия. Если $|\boldsymbol r(t)|=r$ — постоянная, то в силу леммы 1 $\boldsymbol r(t_0)\boldsymbol r'(t_0)=0$, т. е. $|\boldsymbol r(t_0)|\,|\boldsymbol r'(t_0)|\cos\widehat{\boldsymbol r\boldsymbol r'}=0$. Поскольку $|\boldsymbol r(t_0)|\neq 0$, то либо $|\boldsymbol r'(t_0)|=0$, либо угол $\widehat{\boldsymbol r\boldsymbol r'}$ между векторами $\boldsymbol r(t_0)$ и $\boldsymbol r'(t_0)$ равен $\pm\pi/2$ и, следовательно, $|\sin\widehat{\boldsymbol r\boldsymbol r'}|=1$. В обоих случаях

$$|\boldsymbol r(t_0)\times\boldsymbol r'(t_0)|=|\boldsymbol r(t_0)|\,|\boldsymbol r'(t_0)|\,|\sin\widehat{\boldsymbol r\boldsymbol r'}|=r\,|\boldsymbol r'(t_0)|.$$

Подставляя это выражение в формулу (17.3), получим (17.4). $\square$

Леммы 1 и 2 остаются справедливыми и в случае, если в них под окрестностями понимать односторонние окрестности.

Для выяснения физического смысла формул (17.3) и (17.4) будем снова интерпретировать кривую, описываемую концом радиус-вектора $\boldsymbol r(t)$, как траекторию движения материальной точки, а параметр t — как время. Пусть длина вектора $\boldsymbol r(t)$ остается постоянной: $|\boldsymbol r(t)|=r$, т. е. точка движется по сфере радиуса r. Рассмотрим движение точки в каждый момент времени как вращение около так называемой мгновенной оси вращения, т. е. оси, проходящей через начало координат перпендикулярно плоскости движения (так называется плоскость, проходящая через радиус-вектор $\boldsymbol r(t)$ параллельно скорости $\boldsymbol v=\frac{d\boldsymbol r(t)}{dt}$. Тогда вектор $\boldsymbol\omega=(\boldsymbol r\times\boldsymbol r')/r^2$ физически означает вектор угловой скорости, а формулы (17.3) и (17.4) выражают связь между угловой скоростью $\boldsymbol\omega$ и линейной скоростью $\boldsymbol v$. В частности, формула (17.4) в этих обозначениях принимает вид

$$|\boldsymbol\omega|=|\boldsymbol v|/r.$$

З а м е ч а н и е. Используя лемму 1, можно легко получить разложение производной вектор-функции на две ортогональные составляющие: в направлении вектора $\boldsymbol{r}(t)$ (*радиальная составляющая*) и в перпендикулярном направлении (*трансверсальная составляющая*).

Пусть вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ определена в некоторой окрестности точки t_0, $\boldsymbol{r}(t) \neq 0$ и существует производная $\boldsymbol{r}'(t_0)$. Положим $\boldsymbol{r}_0(t) = \frac{\boldsymbol{r}(t)}{|\boldsymbol{r}(t)|}$, очевидно, $|\boldsymbol{r}_0(t)| \equiv 1$. В точке t_0 существует производная

$$\frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\boldsymbol{r}^2} = \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}|} = \boldsymbol{r}_0\boldsymbol{r}',$$

следовательно, в точке t_0 существует и производная $\frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt}$, которая, согласно лемме 1, ортогональна вектору $\boldsymbol{r}_0(t_0)$, а потому, и вектору $\boldsymbol{r}(t_0)$.

Дифференцируя равенство $\boldsymbol{r}(t) = |\boldsymbol{r}(t)|\,\boldsymbol{r}_0(t)$ в точке t_0, получим

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt}\boldsymbol{r}_0 + |\boldsymbol{r}|\frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt} = (\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{r}_0 + |\boldsymbol{r}|\frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt}. \qquad (17.6)$$

Это и есть искомое разложение.

В случае, если годограф вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ является траекторией движущейся материальной точки, то формула (17.6) дает разложение ее скорости на составляющую поступательного движения (радиальная составляющая) и составляющую вращательного движения (трансверсальная составляющая).

17.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВИЗНЫ КРИВОЙ И ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Пусть $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ — непрерывно дифференцируемая и, следовательно, спрямляемая кривая, s — переменная длина дуги $0 \leqslant s_0 \leqslant S$, $\Delta s = s - s_0$, а $\alpha = \alpha(s)$ — угол между касательными к кривой Γ в точках $\boldsymbol{r}(s_0)$ и $\boldsymbol{r}(s_0 + \Delta s)$, причем будем считать, что $\alpha(s) \geqslant 0$ для $\Delta s \geqslant 0$ и $\alpha(s) \leqslant 0$ для $\Delta s < 0$. Очевидно, $\Delta\alpha = \alpha(s) - \alpha(s_0) = \alpha(s)$, ибо $\alpha(s_0) = 0$.

Пусть теперь $\boldsymbol{t}(s) = \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}$. Как было показано, $\boldsymbol{t}(s)$ является единичным вектором (см. (16.16)), параллельным касательной к кривой в соответствующей точке (см. п. 16.4), поэтому угол $\Delta\alpha$ является и углом между векторами $\boldsymbol{t}(s_0)$ и $\boldsymbol{t}(s_0 + \Delta s)$.

Определение 2. *Угловая скорость вращения касательного единичного вектора* $\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ *в данной точке кривой называется кривизной* $k(s_0)$ *кривой в этой точке,* $k(s_0) = \omega(s_0;\ \boldsymbol{t}) = \frac{d\alpha(s_0)}{ds}$.

Опуская для краткости значение аргумента, получаем

$$k = \frac{d\alpha}{ds}. \qquad (17.7)$$

Поскольку $|\boldsymbol{t}| = 1$, то в силу следствия леммы 2 из п. 17.1 отсюда имеем

$$k = \left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right| \qquad (17.8)$$

$\left(\text{если, конечно, производная } \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \text{ существует}\right)$.

Определение 3. *Величина, обратная кривизне, называется радиусом кривизны в данной точке и обозначается R, т. е. $R = 1/k$.*

Пусть Γ — окружность радиуса R. В этом случае угол $\Delta\alpha$ между касательными равен углу, образованному радиусами точек касания (рис. 70), а для длины дуги Δs между этими точками имеется формула $\Delta s = R\Delta\alpha$. Поэтому $\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \frac{1}{R}$. По определению же кривизны для окружности имеем

$$k = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \frac{1}{R}.$$

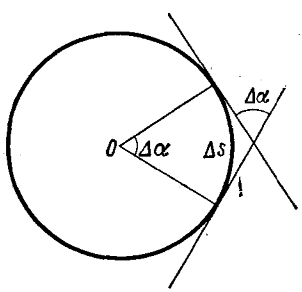


Рис. 70

Таким образом, в случае окружности ее кривизна k постоянна (не зависит от точки) и равна обратной величине радиуса; радиус же кривизны окружности равен ее радиусу. Отсюда и произошел термин «радиус кривизны».

Достаточные условия существования кривизны в данной точке и метод ее вычисления даются следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — дважды дифференцируемая кривая без особых точек. Тогда в каждой ее точке существует кривизна и*

$$k = |\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''| / |\boldsymbol{r}'|^3. \qquad (17.9)$$

Штрихом здесь и в дальнейшем обозначаются производные по произвольному параметру t. Производные по длине дуги s будем обозначать символом $\frac{d}{ds}$.

Доказательство. При предположениях теоремы переменная длина дуги $s = s(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $0 \leqslant s \leqslant S$, кривой Γ может быть принята на этой кривой за параметр (см. следствие 2 из теоремы 2 в п. 16.5). При этом единичный касательный вектор $\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ является непрерывно дифференцируемой вектор-функцией и поэтому для него при каждом значении $s_0 \in [0, S]$ определена скорость его вращения $\omega(s_0; t)$, т. е. в каждой точке кривой Г определена кривизна

$$k(s_0)=\omega(s_0; t)=\frac{d\alpha}{ds}, \tag{17.10}$$

где $\alpha=\alpha(s)$ — угол между векторами $\frac{d\boldsymbol{r}(s_0)}{ds}$ и $\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}$, выбранный, как указано в начале этого пункта. В частности, это означает, что для всех $s\in[0, S]$ выполняется неравенство $\frac{d\alpha(s)}{ds}\geqslant 0$.

Из формулы

$$\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}=\boldsymbol{r}'(t)\frac{dt}{ds}=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{s'}$$

следует, что векторы $\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}$ и $\boldsymbol{r}'(t)$ при $s=s(t)$ всегда коллинеарны, и поскольку функция $s'(t)$ не меняет знака, то указанные векторы либо всегда имеют одно направление (если $s'(t)>0$), либо всегда противоположное (если $s'(t)<0$).

При этом в первом случае достаточно малым приращениям Δt соответствуют приращения Δs того же знака, а во втором — противоположного. В силу сказанного, если $s_0=s(t_0)$, $t_0\in[a, b]$, и если $\beta=\beta(t)$ — угол между векторами $\boldsymbol{r}'(t_0)$ и $\boldsymbol{r}'(t)$, то либо для всех $t\in[a, b]$ будет $\beta=\alpha$, либо для всех $t\in[a, b]$ будет $\beta=-\alpha$; поэтому (см. п. 17.1)

$$\omega(t_0, \boldsymbol{r}')=\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|. \tag{17.11}$$

Теперь, используя формулы (17.10), (17.11) и лемму 2, получим

$$k(s_0)=\frac{d\alpha}{ds}=\left|\frac{d\alpha}{dt}\frac{dt}{ds}\right|=\omega(t_0; \boldsymbol{r}')\frac{1}{|s'|}=\frac{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}$$

(мы воспользовались также формулой (16.13)). □

От формулы (17.9) легко перейти к выражению для кривизны в координатной записи. В самом деле, замечая, что $\boldsymbol{r}'=(x', y', z')$, $\boldsymbol{r}''=(x'', y'', z'')$ и что

$$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\end{vmatrix}$$

(где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — единичные векторы соответственно в направлении осей Ox, Oy, Oz), получаем

$$|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|=\sqrt{(y'z''-y''z')^2+(z'x''-z''x')^2+(x'y''-x''y')^2}, \tag{17.12}$$

с другой стороны

$$|\boldsymbol{r}'|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}. \tag{17.13}$$

Подставив (17.12) и (17.13) в (17.9), мы и найдем искомое выражение.

17.3. ГЛАВНАЯ НОРМАЛЬ. СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ПЛОСКОСТЬ

Рассмотрим дважды дифференцируемую кривую Γ без особых точек. У такой кривой существует дважды дифференцируемое представление $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, где s — переменная длина дуги, $0 \leqslant s \leqslant S$.

Обозначим через $\boldsymbol{n}$ единичный вектор в направлении вектора $\frac{dt}{ds}$, где $\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ — единичный касательный вектор к рассматриваемой кривой. Из формулы (17.8) следует, что $\boldsymbol{n}$ определен лишь для тех точек, в которых кривизна $k \neq 0$, и что в этих точках

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=k\boldsymbol{n}. \tag{17.14}$$

Вектор $\boldsymbol{t}$ — единичный, поэтому вектор $\boldsymbol{n}$ перпендикулярен (см. п. 17.1) вектору $\boldsymbol{t}$. Формула (17.14) называется *формулой Френе* *).

Вектор $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$, а значит, и вектор $\boldsymbol{n}=\frac{1}{k}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$ не зависят от выбора ориентации кривой. Действительно, если σ — переменная длина дуги кривой, отсчитываемая в противоположном, чем s, направлении, и, следовательно, если $\sigma=S-s$, то, замечая, что $\frac{d\sigma}{ds}=-1$, получим

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\sigma^2}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\sigma^2}.$$

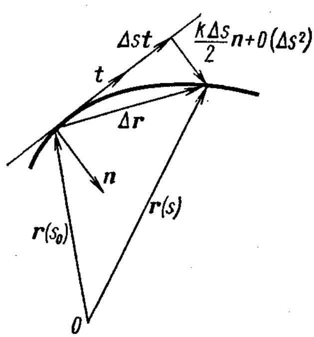


Рис. 71

Определение 4. *Всякая прямая, проходящая через точку кривой и перпендикулярная к касательной в этой точке, называется нормалью к кривой в данной точке. Нормаль к кривой, параллельная вектору* $\boldsymbol{n}$, *называется главной нормалью.*

Вектор главной нормали $\boldsymbol{n}$ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δs^2, указывает направление, в котором кривая в окрестности данной точки отклоняется от своей касательной (рис. 71). Действительно, выбирая на кривой в качестве параметра переменную длину дуги s, согласно формуле Тейлора для вектор-функции (см. п. 15.2), будем иметь

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)=\frac{d\boldsymbol{r}(s_0)}{ds}\Delta s+\frac{1}{2}\frac{d^2\boldsymbol{r}(s_0)}{ds^2}\Delta s^2+\boldsymbol{o}(\Delta s^2),$$

или, заметив, что (см. 17.14))

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{t},\quad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=k\boldsymbol{n}, \tag{17.15}$$

*) Ж. Френе (1801—1880) — французский математик.

получим

$$\Delta \boldsymbol{r} = \Delta s \boldsymbol{t} + \frac{1}{2} k \Delta s^2 \boldsymbol{n} + o(\Delta s^2);$$

поскольку $\frac{1}{2} k \Delta s^2 > 0$, то эта формула и доказывает справедливость нашего утверждения.

Определение 5. *Плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль в данной точке кривой, называется соприкасающейся плоскостью.*

В силу этого определения соприкасающаяся плоскость определена для точек, в которых $k \neq 0$. Найдем уравнение этой плоскости для кривой, заданной представлением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ с произвольным параметром t. Как и выше, производные по переменному t будем обозначать штрихом, а производные по длине дуги s — символом $\frac{d}{ds}$. Дифференцируя $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ как сложную функцию $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, $s = s(t)$, получим (см. (17.15))

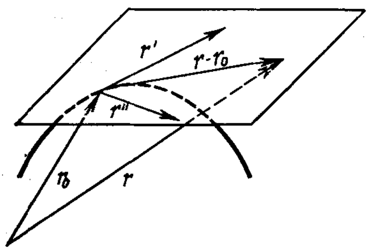


Рис. 72

$$\boldsymbol{r}' = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} s' = s' \boldsymbol{t},$$

$$\boldsymbol{r}'' = s'^2 \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} + s'' \boldsymbol{t} = s'^2 k \boldsymbol{n} + s'' \boldsymbol{t}. \quad (17.16)$$

Отсюда следует, что векторы $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ также параллельны соприкасающейся плоскости; в силу же условия $k \neq 0$ выполняется неравенство $\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' \neq 0$ (см. (17.9)), и, значит, $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ не коллинеарны. Обозначим теперь через $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_0'$ и $\boldsymbol{r}_0''$ векторы $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ в некоторой фиксированной точке данной кривой Γ, а через $\boldsymbol{r}$ обозначим текущий вектор соприкасающейся плоскости; тогда смешанное произведение векторов $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_0'$ и $\boldsymbol{r}_0''$ должно быть равно нулю, так как все они параллельны соприкасающейся плоскости (рис. 72):

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_0', \boldsymbol{r}_0'') = 0.$$

Это и есть уравнение указанной плоскости в векторном виде. В координатном виде оно запишется следующим образом

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} = 0,$$

где $\boldsymbol{r}_0' = (x_0', y_0', z_0')$, $\boldsymbol{r}'' = (x_0'', y_0'', z_0'')$.

В случае если в данной точке $k = 0$, то любая плоскость, проходящая через касательную в этой точке, называется *соприкасающейся*.

17.4. ЦЕНТР КРИВИЗНЫ И ЭВОЛЮТА КРИВОЙ

Определение 6. *Точка пространства, лежащая на главной нормали к кривой в данной точке и находящаяся от этой точки на расстоянии R в направлении вектора $\boldsymbol{n}$, называется центром кривизны кривой в указанной ее точке.*

Таким образом, если $\boldsymbol{\rho}$ является радиус-вектором центра кривизны, а $\boldsymbol{r}$, как обычно, радиус-вектор данной точки кривой, то

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+R\boldsymbol{n},$$

или, что то же (см. (17.15)),

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+\frac{1}{k^2}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}. \tag{17.17}$$

Найдем выражение $\boldsymbol{\rho}$ через производные вектор-функции по произвольному параметру t. По правилу дифференцирования сложной функции,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{r}'\frac{dt}{ds}=\frac{\boldsymbol{r}'}{s'},$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\boldsymbol{r}'}{s'}\right)=\left(\frac{\boldsymbol{r}'}{s'}\right)'\frac{1}{s'}=\frac{\boldsymbol{r}''s'-\boldsymbol{r}'s''}{s'^3}. \tag{17.18}$$

Эти формулы в силу формул (17.15), очевидно, являются обращением формул (17.16).

Подставив (17.18) в (17.17), получим

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+\frac{1}{k^2}\frac{s'\boldsymbol{r}''-s''\boldsymbol{r}''}{s'^3}, \tag{17.19}$$

где (считая для простоты, что при возрастании параметра t длина дуги $s(t)$ также возрастает) $s'=|\boldsymbol{r}'|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$, откуда

$$s''=\frac{x'x''+y'y''+z'z''}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.$$

Формулы (17.17) и (17.19) можно рассматривать как представления некоторой кривой, точками которой являются центры кривизны данной кривой. Эта кривая называется *эволютой* данной кривой.

17.5. ФОРМУЛЫ ДЛЯ КРИВИЗНЫ И ЭВОЛЮТЫ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Все сказанное в предыдущем пункте, в частности, справедливо и для плоских кривых. Заметим лишь, что если кривая $\Gamma=\{\boldsymbol{r}(t)\}$ лежит в некоторой плоскости, то все производные вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ также лежат в этой плоскости. В самом деле, в ней лежит приращение вектор-функции $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$, а поэтому и отношение $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$. Отсюда легко следует, что и предел этих отношений $\boldsymbol{r}' = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ лежит в указанной плоскости. Применяя то же рассуждение к $\boldsymbol{r}'$, мы докажем, что и $\boldsymbol{r}''$ находится в той же плоскости, и т. д.

Из сказанного следует, что если кривая лежит в некоторой плоскости, то касательный вектор $\boldsymbol{r}$, а если ее кривизна $k \neq 0$, то и вектор главной нормали $\boldsymbol{n}$ лежат в той же плоскости. Поэтому эта плоскость является соприкасающейся плоскостью для рассматриваемой кривой.

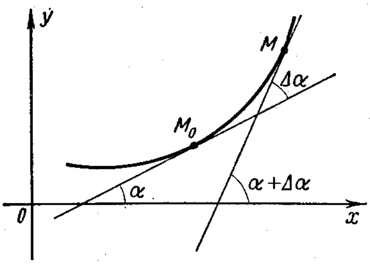


Рис. 73

Отметим также, что, если в случае кривой $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(s)\}$, лежащей в плоскости xOy в отличие от п. 17.2 через $\alpha(s)$ обозначить угол, образованный касательной в точке $r(s)$ с осью Ox (рис. 73), то $\Delta\alpha = \alpha(s_0 + \Delta s) - \alpha(s_0)$ будет являться углом между касательными в точках $r(s_0)$ и $r(s_0 + \Delta s)$. Если угол α возрастает вместе с s, т. е. если $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \geqslant 0$ при $\Delta s > 0$, то $k = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$; если же α убывает с возрастанием s, то

$$k = -\lim_{\Delta s \to \infty} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = -\frac{d\alpha}{ds}.$$

Выпишем некоторые из формул, полученных в предыдущем пункте, считая, что кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ лежит в плоскости $xOy: \boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t))$. Из формул (17.9), (17.12) и (17.13) имеем

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \tag{17.20}$$

Обозначая (ξ, η) центр кривизны кривой Γ, из формулы (17.17) получим формулы, выражающие координаты ξ и η через производные по s:

$$\xi = x + R^2 \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \eta = y + R^2 \frac{d^2y}{ds^2},$$

а из формул (17.19) и (17.20) следуют формулы, выражающие координаты центра кривизны через производные по произвольному параметру t:

$$\xi = x + \frac{(x'^2 + y'^2)^3}{(x'y'' - x''y')^2} \cdot \frac{x''\sqrt{x'^2 + y'^2} - x'\dfrac{x'x'' + y'y''}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}; \tag{17.21}$$

аналогично,

$$\eta = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}. \tag{17.22}$$

Упражнение 1. Пусть Γ — дважды дифференцируемая плоская кривая без особых точек, пусть α — угол наклона ее касательной к оси Ox и пусть $k^* = \frac{d\alpha}{ds}$ (следовательно, $|k^*| = k$) и $R^* = \frac{1}{k^*}$. Показать, что $\xi = x - R^* \sin\alpha$, $\eta = y + R^* \cos\alpha$, а также что $\xi = x - \frac{dy}{d\alpha}$, $\eta = y + \frac{dx}{d\alpha}$.

В случае, когда кривая является графиком функции $y = f(x)$, формулы (17.20), (17.21) и (17.22) принимают вид

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}, \tag{17.23}$$

$$\xi = x - \frac{1+y'^2}{y''} y', \tag{17.24}$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Примеры. 1. Найдем кривизну и эволюту параболы $y = ax^2$, $a > 0$.

Замечая, что $y' = 2ax$, $y'' = 2a$, по формуле (17.23) имеем $k = \frac{2a}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}$. Чтобы найти уравнение эволюты, воспользуемся формулами (17.24):

$$\xi = x - \frac{1+4a^2x^2}{2a} 2ax = -4a^2x^3, \quad \eta = ax^2 + \frac{1+4a^2x^2}{2a} = \frac{6a^2x^2+1}{2a}.$$

Получилось параметрическое представление эволюты параболы с параметром x. Можно получить и ее явное представление, исключив этот параметр x. Для этого из первого равенства найдем $x^3 = -\xi/4a^2$, а из второго $x^2 = (2a\eta - 1)/6a^2$. Возводя первое получившееся равенство в квадрат, а второе в куб и приравнивая правые части, будем иметь

$$\left(\frac{\xi}{4a^2}\right)^2 = \left(\frac{2a\eta - 1}{6a^2}\right)^3, \text{ откуда } \xi = \pm\frac{4}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\left(\eta - \frac{1}{2a}\right)^{3/2}.$$

Эта кривая, изображенная на рис. 74, является, как мы знаем (см. пример 2 в п. 14.3), полукубической параболой.

2. Найдем радиус кривизны и эволюту эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $a \geqslant b > 0$.

Заметив, что $x' = -a\sin t$, $y' = b\cos t$, $x'' = -a\cos t$, $y'' = -b\sin t$, по формуле (17.20) получим

$$R = \frac{1}{k} = \frac{(a^2\sin^2 + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t} = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}.$$

Поэтому из формул (17.21) и (17.22) следует, что

$$\xi = a\cos t - b\cos t\,\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$\eta = b\sin t - a\sin t\,\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t.$$

Это параметрическое представление искомой эволюты; параметр t можно исключить, возводя получившиеся равенства в степень 2/3 и складывая их:

$$(a\xi)^{2/3} + (b\eta)^{2/3} = (a^2-b^2)^{2/3}.$$

Эта кривая называется *астроидой* (рис. 75).

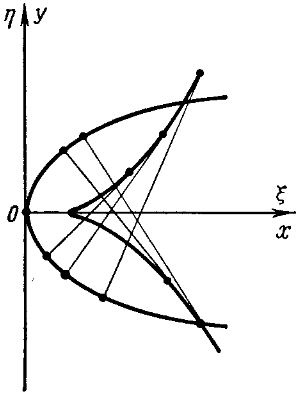


Рис. 74

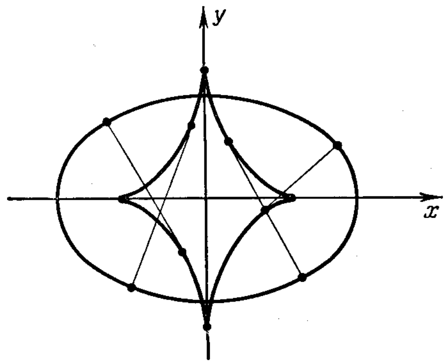


Рис. 75

Иногда для изображения кривой бывает удобно использовать так называемые полярные координаты (ρ, φ), $\rho \geqslant 0$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, где ρ — длина радиус-вектора данной точки M, а φ — угол, образованный этим радиус-вектором с осью Ox. Таким образом, каждой точке плоскости, кроме начала координат, взаимно однозначно соответствует указанная упорядоченная пара (ρ, φ); для начала же координат имеем $\rho = 0$, а угол φ не определен (рис. 76).

Если $M = (x, y)$ где, как обычно, x и y — декартовы координаты точки M, то

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{17.25}$$

Обратная связь выражается формулами

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + k\pi,$$

где $k=0$, если $x \geqslant 0$, $k=1$, если $x<0$, $y>0$, и $k=-1$, если $y<0$; при этом, как обычно, при $x=0$, $y \neq 0$ считается $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} y$.

Иногда на угол φ не накладывают ограничения $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, а обозначают через φ любой угол, для которого $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$. В этом случае соответствие между упорядоченными парами (ρ, φ), $\rho \neq 0$, и точками плоскости, отличными от начала координат, уже, очевидно, не является взаимно однозначным.

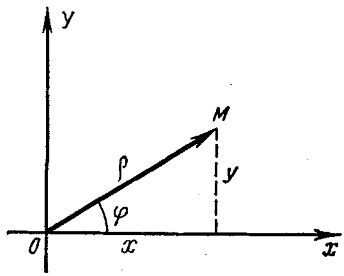


Рис. 76

Если задана непрерывная функция

$$\rho = \rho(\varphi), \quad a \leqslant \varphi \leqslant \beta, \tag{17.26}$$

то, подставляя ее в (17.25), получаем

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \quad y = \rho(\varphi)\sin\varphi, \tag{17.27}$$

т. е. параметрическое представление некоторой кривой Г. В этом смысле можно говорить, что уравнение (17.26) задает в полярных координатах кривую Г. Для вычисления кривизны, радиуса кривизны и эволюты кривой Г, заданной уравнением (17.26), надо перейти к ее параметрическому представлению (17.27) и воспользоваться выведенными выше формулами.

Упражнения 2. Пусть в полярных координатах задана кривая $\rho = \rho(\varphi)$, пусть α — угол наклона ее касательной к оси Ox, а ω — угол, образованный этой касательной с продолжением радиус-вектора точки касания. Доказать, что $\alpha = \omega + \varphi$ и $\operatorname{tg}\omega = \rho/\rho'$.

3. Найти эволюту кривой $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ называемой *кардиоидой*.

Указание. Полезно воспользоваться результатами упражнений 1 и 2.

Задача 13. Пусть Γ — дважды дифференцируемая кривая без особых точек, $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, и пусть $t_0 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t_1 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t_2 \in [a, b]$. Проведем через точки $r(t_0)$, $r(t_0 + \Delta t_1)$ и $r(t_0 + \Delta t_2)$ плоскость; доказать, что если в точке $r(t_0)$ кривизна $k \neq 0$, то при $\Delta t_1 \to 0$ и $\Delta t_2 \to 0$ эта плоскость стремится (определите это понятие) к соприкасающейся плоскости в точке $r(t_0)$.

Задача 14. В предположении предыдущей задачи проведем через те же три точки $r(t_0)$, $r(t_0 + \Delta t_1)$ и $r(t_0 + \Delta t_2)$ окружность. Доказать, что эта окружность при $\Delta t_1 \to 0$ и $\Delta t_2 \to 0$ стремится к окружности (определите это понятие), лежащей в соприкасающейся плоскости с центром в центре кривизны кривой и радиусом, равным радиусу кривизны в точке $r(t_0)$.

Эта предельная окружность называется *соприкасающейся окружностью* в данной точке кривой.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 18. МНОЖЕСТВА НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

18.1. ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК. ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ТОЧЕК

Прежде чем перейти к изучению функций многих переменных, ознакомимся с некоторыми свойствами множеств, на которых эти функции задаются. Будем предполагать, что на рассматриваемой нами плоскости или в пространстве всегда задана некоторая прямоугольная система декартовых координат. Точки будем большей частью обозначать буквами a, b, ..., x, y, z, ...*), а их координаты — теми же буквами с индексами, т. е. в случае плоскости будем писать $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$, а в случае пространства $x=(x_1, x_2, x_3)$, $y=(y_1, y_2, y_3)$. Расстояние между точками x и y будем обозначать $\rho(x, y)$. Как известно, формула для расстояния между точками x и y в случае плоскости имеет вид

$$\rho(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2},$$

а в случае пространства —

$$\rho(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}.$$

В дальнейшем придется иметь дело не только с функциями двух и трех переменных, но и с функциями большего числа переменных, а поэтому полезно ввести понятие n-мерного пространства для любого $n=1, 2, 3, \ldots$

Определение 1. *Точкой x n-мерного пространства называется упорядоченная совокупность n действительных чисел $(x_1, \ldots, x_n)=x$. Число x_i называется i-координатой точки x; $i=1, 2, \ldots, n$. Расстояние* между двумя точками $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ определяется по формуле

$$\rho(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}. \tag{18.1}$$

*) Иногда точки обозначаются и большими буквами, например M, N, P, а их координаты — буквами x, y, z.

Совокупность точек n-мерного пространства, для которых определено расстояние согласно формуле (18.1), *называется n-мерным евклидовым пространством (или, более полно, n-мерным арифметическим евклидовым пространством) и обозначается через R^n* или R^n_x.

Иногда для краткости вместо $x=(x_1, \ldots, x_n)$ будем писать $x=(x_i)$.

В случае $n=1$ пространство R^n совпадает с прямой, в случае $n=2$ — с плоскостью, а в случае $n=3$ — с пространством, изучаемым в элементарной и аналитической геометрии. В случае произвольного $n>3$ не следует искать в нашем определении какого-то скрытого физического или геометрического смысла. Нашей целью является лишь построение некоторого математического аппарата, удобного для изучения функций многих переменных; определения и терминологию мы заимствуем из обычной геометрии, так как это позволяет включить прямую, плоскость и трехмерное пространство в одну более общую схему.

Расстояние между точками в n-мерном евклидовом пространстве R^n обладает следующими свойствами:

1°) $\rho(x, y) \geqslant 0$, причем $\rho(x, y)=0$ в том и только том случае, когда $x=y$;

2°) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$ для любых двух точек x и y из R^n;

3°) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y)+\rho(y, z)$ для любых трех точек x, y и z из R^n.

Свойства 1° и 2° непосредственно следуют из формулы (18.1), третье же, обычно называемое «*неравенством треугольника*» и хорошо известное для обычного трехмерного пространства, в общем случае (при произвольном n) требует доказательства.

Докажем предварительно лемму.

Лемма 1 (Коши — Шварц *)). *Для любых действительных чисел a_k и b_k, $k=1, 2, \ldots, n$, выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{18.2}$$

Следствие.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{18.3}$$

Доказательство. Если все $a_i=0$, $i=1, 2, \ldots, n$, то неравенство (18.2) очевидно — обе его части обращаются в ноль. Если же $a_1^2+\ldots+a_n^2>0$, то рассмотрим квадратичную функцию

$$F(t)=\sum_{i=1}^{n}(a_i t+b_i)^2=t^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2+2t\sum_{i=1}^{n} a_i b_i+\sum_{i=1}^{n} b_i^2. \tag{18.4}$$

*) Г. Шварц (1843—1921) — немецкий математик.

Очевидно, что

$$F(t) \geqslant 0. \tag{18.5}$$

Из условия (18.5) следует, что квадратный трехчлен (18.4) имеет либо совпадающие действительные корни, либо существенно комплексные корни, и поэтому его дискриминант не положителен:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 0.$$

Перенеся второе слагаемое в правую часть и извлекая квадратный корень, получим (18.2). □

Для доказательства неравенства (18.3) оценим сумму $\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2$, применяя неравенство (18.2):

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} =$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2.$$

Извлекая из обеих частей квадратный корень, получим (18.3). □ Вернемся теперь к свойству 3 расстояния между точками в пространстве R^n.

Пусть $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$ и $z=(z_1, \ldots, z_n)$. Положим $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$, и значит, $a_i + b_i = x_i - z_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда неравенство (18.3) перепишется следующим образом:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2},$$

или, согласно (18.1) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$. □

В дальнейшем в этом параграфе пространство R^n будем считать фиксированным (т. е. считать фиксированным число n).

Определение 2. *Множество точек* $x=(x_1, \ldots, x_n)$ *n-мерного евклидова пространства* R^n *таких, что* $x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = x_n = 0$, *называется i-й координатной осью* ($i = 1, 2, \ldots, n$) *этого пространства. Точка* $O=(0, 0 \ldots, 0)$ *называется началом координат.*

Очевидно, в случае $n=2$ и $n=3$ наше определение дает обычные координатные оси.

Замечание. Пусть на плоскости заданы две прямоугольные системы координат, точка M в одной системе имеет координаты

(x, y), а в другой (ξ, η), т. е. $M=(x, y)=(\xi, \eta)$. Ставя в соответствие упорядоченной паре чисел (x, y) упорядоченную пару (ξ, η), получаем взаимно однозначное соответствие между множеством всех упорядоченных пар (x, y) и множеством всех упорядоченных пар (ξ, η). При этом если

$$M'=(x', y')=(\xi', \eta'), \quad M''=(x'', y'')=(\xi'', \eta''),$$

то

$$\rho(M', M'')=\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2}=\sqrt{(\xi''-\xi')^2+(\eta''-\eta')^2}.$$

Этот пример делает естественным следующее определение.

Пусть каждой точке $x=(x_1, \ldots, x_n)\in R^n$ поставлен в соответствие упорядоченный комплекс из n действительных чисел $\xi(x)=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, таким образом, что для любых двух точек $x'=(x_1, \ldots, x_n)$ и $x''=(x_1'', \ldots, x_n'')$ и соответствующих им комплексов $\xi(x')=(\xi_1', \ldots, \xi_n')$ и $\xi(x'')=(\xi_1'', \ldots, \xi_n'')$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i''-x_i')^2=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i''-\xi_i')^2,$$

тогда числа, входящие в совокупность $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ также называются *координатами точки* x («в другой системе координат»). При таком определении координат расстояние между двумя данными точками не меняется при изменении систем координат, т. е. при замене одной системы координат другой. В дальнейшем, если не оговорено что-либо другое, система координат считается фиксированной.

Если точка x задается координатами $(x_1, \ldots, x_n)$, то иногда для ясности пространство R_x^n будет обозначать $R_{x_1, \ldots, x_n}^n$.

Определение 3. *Пусть* $x\in R^n$ и $\varepsilon>0$. *Совокупность всех точек* y *пространства* R^n, *таких, что* $\rho(x, y)<\varepsilon$, *называется* n-*мерным шаром с центром в точке* x *и радиусом* ε *или* ε-*окрестностью (а иногда сферической или правильнее, шаровой окрестностью) точки* x *в пространстве* R^n *и обозначается* $U(x; \varepsilon)$; *таким образом,*

$$U(x; \varepsilon)=\{y: y\in R^n, \ \rho(x, y)<\varepsilon\}. \tag{18.6}$$

В координатной записи это определение выглядит так:

$$U(x; \varepsilon)=\left\{y=(y_1, \ldots, y_n): \sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2<\varepsilon^2\right\},$$

$$x=(x_1, \ldots, x_n), \quad \varepsilon>0.$$

В случае прямой, т. е. при $n=1$ (рис. 77) $x=x_1$, $y=y_1$, а поэтому

$$U(x; \varepsilon)=\{y: |y-x|<\varepsilon\}.$$

Таким образом, $U(x;\ \varepsilon)$ является интервалом длины 2ε с центром в точке x, т. е. окрестностью точки x в рассмотренном выше смысле (см. п. 2.6).

В случае плоскости, т. е. при $n=2$ (рис. 78) $x=(x_1,\ x_2)$, $y=(y_1,\ y_2)$ и

$$U(x;\ \varepsilon)=\{y=(y_1,\ y_2):(y_1-x_1)^2-(y_1-x_1)^2<\varepsilon^2\},\quad \varepsilon>0,$$

т. е. $U(x;\ \varepsilon)$—круг радиуса ε с центром в точке $x=(x_1,\ x_2)$, а в случае пространства, т. е. при $n=3$ окрестность точки $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)$

$$U(x;\ \varepsilon)=$$
$$=\{y=(y_1,\ y_2,\ y_3):(y_1-x)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2<\varepsilon^2\},\quad \varepsilon>0,$$

является шаром радиуса ε с центром в точке $(x_1,\ x_2,\ x_3)$.

Таким образом, понятие окрестности обобщено на случай n-мерного евклидова пространства R^n. Однако наряду с указанным обобщением бывает полезно и другое обобщение этого понятия, а именно понятие так называемой прямоугольной окрестности.

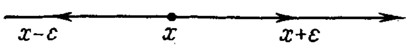


Рис. 77

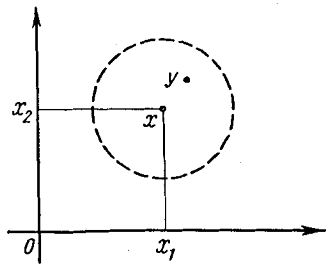


Рис. 78

Определение 4. Пусть $x=(x_1, \ldots, x_n)\in R^n$, $\delta_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$. *Множество*

$$P(x;\ \delta_1,\ \ldots,\ \delta_n)=$$
$$=\{y=(y_1,\ \ldots,\ y_n):x_i-\delta_i<y_i<x_i+\delta_i,\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}\qquad(18.7)$$

называется n-мерным параллелепипедом, а точка x — его центром.

Определение 5. *Если $\delta_1=\delta_2=\ldots=\delta_n=\delta$, то $P(x,\ \delta,\ \delta,\ \ldots,\ \delta)$ называется n-мерным кубом с центром в точке x и обозначается $P(x;\ \delta)$.*

Если $n=1$, то множество $P(x;\ \delta)$ является интервалом с центром в точке x длины 2δ; если $n=2$, то множество $P(x;\ \delta_1,\ \delta_2)$ является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат (их длины равны соответственно $2\delta_1$ и $2\delta_2$); при $n=3$ множество $P(x;\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3)$ представляет собой прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат (их длины соответственно равны $2\delta_1$, $2\delta_2$ и $2\delta_3$).

Под n-мерным параллелепипедом, соответственно n-мерным кубом, понимается также множество, определенное вышеуказанными условиями хотя бы в одной системе координат (а не обязательно в данной, как это было сделано выше). В дальнейшем n-мерный параллелепипед и n-мерный куб понимаются лишь в узком смысле, т. е. в смысле данного выше определения при фиксированной системе координат.

Определение 6. *Всякий n-мерный параллелепипед $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ называется прямоугольной окрестностью точки x.*

Если прямоугольная окрестность точки является n-мерным кубом, то она называется также и *кубической окрестностью* этой точки.

Лемма 2. *Какова бы ни была ε-окрестность $U(x; \varepsilon)$ точки $x \in R^n$, существует ее прямоугольная окрестность $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ такая, что*

$$P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n) \subset U(x; \varepsilon), \tag{18.8}$$

и наоборот, какова бы ни была прямоугольная окрестность $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ точки $x \in R^n$, существует ее ε-окрестность $U(x; \varepsilon)$ такая, что

$$U(x; \varepsilon) \subset P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n). \tag{18.9}$$

Эти утверждения геометрически очевидны, при $n=1$, 2 и 3. Действительно, при $n=1$ понятия сферической и прямоугольной окрестностей совпадают. При $n=2$ лемма означает, что во всякий прямоугольник можно поместить круг с центром в центре прямоугольника, а во всякий круг можно вписать прямоугольник с центром в центре круга. Наконец, при $n=3$ лемма означает, что во всякий прямоугольный параллелепипед можно поместить шар с центром в центре этого параллелепипеда и во всякий шар можно вписать прямоугольный параллелепипед с центром в центре рассматриваемого шара. Нетрудно записать и доказать эти утверждения и в аналитической форме, использовав координатную запись. Этот способ, как это сейчас будет показано, легко обобщается и на случай произвольного n-мерного пространства.

Доказательство леммы. Для любых точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $a=(a_1, \ldots, a_n)$ пространства R^n при каждом $i=1, 2, \ldots, n$ справедливы неравенства

$$|x_i - a_i| \leqslant \rho(x, a) \leqslant |x_1 - a_1| + \ldots + |x_n - a_n|. \tag{18.10}$$

Левое неравенство получится, если в выражении $\rho(x, a) = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}$ все слагаемые под корнем, кроме i-го, заменить нулем — в результате значение $\rho(x, a)$ может только уменьшиться.

Правое неравенство (18.10) следует из неравенства

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2} \leqslant |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|, \tag{18.11}$$

справедливого для любых действительных чисел α_i, $i=1, 2, \ldots, n$, и проверяемого непосредственным возведением в квадрат. Полагая в (18.11) $\alpha_i = x_i - a_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, получаем неравенство, стоящее в правой части (18.10).

Пусть задана шаровая окрестность $U(a; \varepsilon)$ точки a. Рассмотрим прямоугольную окрестность $P(a; \varepsilon/n)$, т. е. n-мерный куб с центром в точке a и ребром длины $2\varepsilon/n$ (случай $n=2$ изображен на рис. 79). Если $x \in P(a; \varepsilon/n)$ и, следовательно, в силу определения (18.7) выполняются неравенства $|x_i - a_i| < \frac{\varepsilon}{n}$, $i=1, 2, \ldots, n$, то из (18.10) вытекает и справедливость неравенства

$$\rho(x, a) \leqslant |x_1 - a_1| + \ldots + |x_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{n} + \ldots + \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Это означает, что $x \in U(a; \varepsilon)$. Поскольку под x подразумевалась произвольная точка куба $P(a; \varepsilon/n)$, то $P(a; \varepsilon/n) \subset U(a; \varepsilon)$; таким образом (18.8) доказано.

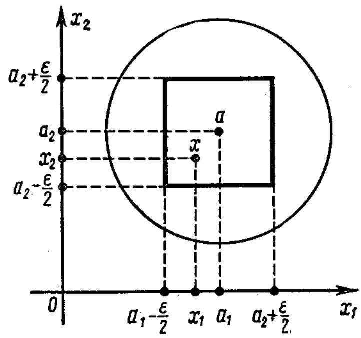


Рис. 79

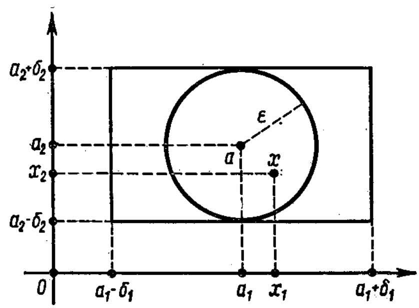


Рис. 80

Пусть теперь задана прямоугольная окрестность $P(a; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ точки a. Положим $\varepsilon = \min\limits_{i=1, 2, \ldots, n} \delta_i$ и рассмотрим шаровую окрестность $U(a; \varepsilon)$ этой точки (см. рис. 80). Если $x \in U(a; \varepsilon)$ то для любого $i=1, 2, \ldots, n$ в силу (18.10) получим неравенства

$$|x_i - a_i| \leqslant \rho(x, a) < \varepsilon \leqslant \delta_i,$$

т. е. согласно определению (18.7) $x \in P(a; \delta_1, \ldots, \delta_n)$. Поскольку x — произвольная точка шара $U(a; \varepsilon)$, то $U(a; \varepsilon) \subset P(a; \delta_1, \ldots, \delta_n)$. $\square$

На примере доказательства этой леммы хорошо видно, как используя для наглядности плоский чертеж, можно проводить доказательства в n-мерном пространстве.

От слишком поспешного использования аналогий, не подкрепленных математическими доказательствами, предостерегает пример, содержащийся в нижеследующем упражнении.

Упражнение 1. Доказать, что при $n=1$, 2, 3, 4 n-мерный куб с ребрами, длины которых равны единице, содержится в шаре единичного радиуса и с центром в центре куба, а при $n \geqslant 5$ аналогичное утверждение несправедливо.

Определение 7. *Пусть каждому натуральному числу m поставлена в соответствие некоторая точка $x^{(m)} \in R^n$ (не обязательно разные точки для разных m). Тогда множество $\{x^{(m)} : m=1, 2, \ldots\}$, состоящее из точек пространства R^n с различными номерами называется последовательностью точек этого пространства и обозначается*

$$x^{(m)}, \quad m=1,\ 2,\ \ldots, \quad \text{или} \quad \{x^{(m)}\}.$$

Последовательность $\{y^{(k)}\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x^{(m)}\}$ и обозначается

$$x^{(m_k)},\ k=1,\ 2,\ \ldots, \text{ или } \{x^{(m_k)}\},$$

если для любого k существует такое m_k, что $y^{(k)} = x^{(m_k)}$, причем если $k' < k''$, то $m_{k'} < m_{k''}$.

Определение 8. *Точка $x \in R^n$ называется пределом последовательности $\{x^{(m)}\}$ и пишется*

$$x = \lim_{m \to \infty} x^{(m)}, \quad \text{если} \quad \lim_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, x) = 0.$$

Если $x = \lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)}$, то говорят, что последовательность $\{x^{(m)}\}$ сходится к точке x. Последовательность, которая сходится к некоторой точке, называется сходящейся.

Используя понятие окрестности, легко установить, что $x = \lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое m_ε, что для всех $m \geqslant m_\varepsilon$ выполняется включение $x^{(m)} \in U(x; \varepsilon)$. Согласно лемме 2, получаем также $x = \lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)}$ в том и только том случае, когда для любой прямоугольной окрестности $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ существует номер m_0 (зависящий от этой окрестности) такой, что для всех $m \geqslant m_0$

$$x^{(m)} \in P(x;\ \delta_1, \ \ldots, \ \delta_n). \tag{18.12}$$

Конечно, при определении предела можно ограничиться и только одними кубическими окрестностями.

В случае $n=1$ определение 8 превращается в обычное определение предела числовой последовательности.

При $n=2$ сходимость последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек плоскости R^2 к точке $x \in R^2$ означает, что, каков бы ни был круг с центром в точке x, начиная с некоторого номера, зависящего от радиуса этого круга, все члены данной последовательности лежат в этом круге (рис. 81). В случае $n=3$ сходимость последовательности точек $\{x^{(m)}\}$ пространства к точке $x \in R^3$ означает, что, каков бы ни был обычный трехмерный шар с центром в точке x, начиная с некоторого номера, зависящего от радиуса шара, все члены данной последовательности лежат в этом шаре.

Как и в случае числовых последовательностей, можно сказать, что $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)}=x$, $x^{(m)} \in R^n$, $m=1, 2, \ldots$, если всякая ε-окрестность точки x содержит почти все точки данной последовательности, т. е. все, за исключением, быть может, конечного числа их.

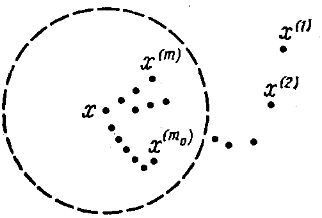


Рис. 81

Понятие предела последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек пространства R^n может быть сведено к понятию предела числовых последовательностей, а именно последовательностей координат точек $x^{(m)}$, $m=1, 2 \ldots$.

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность* $x^{(m)}=(x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}) \in R^n$, $m=1, 2, \ldots$, *сходилась к точке* $x=(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)}=x_i, \quad i=1, 2, \ldots, n. \tag{18.13}$$

Доказательство. Докажем необходимость условия (18.13). Пусть $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)}=x$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$; тогда, согласно (18.12) существует такое m_ε, что при всех $m \geqslant m_\varepsilon$ выполняется включение

$$x^{(m)} \in P(x;\ \varepsilon),$$

т. е. для любого $i=1, 2, \ldots, n$ и при $m \geqslant m_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$|x_i^{(m)}-x_i|<\varepsilon,$$

а это и означает, что

$$\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)}=x_i, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Докажем достаточность условия (18.13). Пусть $\lim\limits_{m\to\infty} x_i^{(m)}=x_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, и $P(x;\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — заданная прямоугольная окрестность точки x. Тогда для каждого $\varepsilon_i>0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ существует такой номер $m_i=m_i(\varepsilon_i)$, что для всех $m \geqslant m_i$ выполняется неравенство

$$|x_i^{(m)}-x_i|<\varepsilon_i, \quad i=1, 2, \ldots, n. \tag{18.14}$$

Обозначим через m_0 наибольший из номеров $m_1, \ldots, m_n$:

$$m_0 = \max\{m_1, \ldots, m_n\};$$

тогда при $m \geqslant m_0$ и всех $i = 1, 2, \ldots, n$ будут одновременно выполнены условия (18.14) и, следовательно (см. (18.7)), при $m \geqslant m_0$ будем иметь включение

$$x^{(m)} \in P(x;\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),$$

что и означает, согласно (18.12), что

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x. \ \square$$

Из теоремы 1 и свойств пределов числовых последовательностей следует, что если последовательность точек имеет предел, то он единственен, и что всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, что и вся последовательность.

Упражнение 2. Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие сходимости последовательности точек пространства R^n, аналогичное критерию Коши для числовых последовательностей.

Определение 9. *Множество $E \subset R^n$ называется ограниченным, если существует n-мерный куб $P(O;\ a)$ с центром в начале координат O такой, что $E \subset P(O;\ a)$.*

Аналогично лемме 2 доказывается, что, каков бы ни был шар $U(x;\ \varepsilon)$, существует куб $P(x;\ \delta)$ такой, что $P(x;\ \delta) \supset U(x;\ \varepsilon)$, и, наоборот каков бы ни был куб $P(x;\ \delta)$, существует шар $U(x;\ \varepsilon)$ такой, что $U(x;\ \varepsilon) \supset P(x;\ \delta)$. Отсюда следует, что можно дать еще одно эквивалентное предыдущему определение ограниченного множества.

Определение 9′. *Множество $E \subset R^n$ называется ограниченным, если существует n-мерный шар $U(O;\ \varepsilon)$ такой, что $E \subset U(O;\ \varepsilon)$.*

Определение 10. *Последовательность точек $x^{(m)} \in R^n$, $m = 1, 2, \ldots$, называется ограниченной, если множество ее значений, т. е. $\{x^{(m)} : m = 1, 2, \ldots\}$, ограничено в пространстве R^n.*

Если последовательность $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right)$, $m = 1, 2, \ldots$, сходится, то она ограничена, ибо каждая из координатных последовательностей $x_i^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$, i — фиксировано ($i = 1, 2, \ldots, n$), в этом случае также сходится и, значит, ограничена.

Теорема 2. *Из любой ограниченной последовательности точек пространства R^n можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Эта теорема, как и в одномерном случае, обычно называется *теоремой Больцано — Вейерштрасса.*

Доказательство. Пусть задана ограниченная последовательность точек $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right)$, $m = 1, 2, \ldots$, пространства R^n. Очевидно, что каждая из n последовательностей $\left\{x_i^{(m)}\right\}$,

$i=1, 2, \ldots, n$, также ограничена. Поэтому, согласно теореме Больцано — Вейерштрасса (см. п. 3.6), последовательность $\{x_1^{(m)}\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность; пусть это будет последовательность $x_1^{(m_{k_1})}$, $k_1=1, 2, \ldots$. Последовательность $\{x_2^{(m_{k_1})}\}$, как подпоследовательность последовательности $\{x_2^{(m)}\}$, также ограничена и, значит, содержит сходящуюся подпоследовательность. Пусть ею будет последовательность $x_2^{(m_{k_2})}$, $k_2=1$, $2, \ldots$. Последовательность $\{x_1^{(m_{k_2})}\}$, как подпоследовательность сходящейся последовательности $\{x_1^{(m_{k_1})}\}$, очевидно, также будет сходящейся. Продолжив это рассуждение, через n шагов получим n сходящихся последовательностей $\{x_i^{(m_{k_n})}\}$, $i=1, 2, \ldots, n$, каждая из которых является подпоследовательностью, соответственно последовательности $\{x_i^{(m)}\}$. Тогда, согласно теореме 1 последовательность точек $\{x^{(m_{k_n})}\}$ пространства R^n будет также сходящейся. $\square$

Иногда бывает удобно рассматривать последовательности точек, стремящиеся к бесконечности.

Определение 11. *Последовательность точек* $x^{(m)} \in R^n$, $m=1$, $2 \ldots$, *называется стремящейся к бесконечности, если расстояние ее членов от начала координат* $O=(0, 0, \ldots, 0)$ *стремится к бесконечности, т. е. если*

$$\lim_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, O) = +\infty \tag{18.15}$$

В этом случае пишут

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$$

Поскольку для любой точки $a \in R^n$ в силу неравенства треугольника

$$\rho(x^{(m)}, O) \leqslant \rho(x^{(m)}, a) + \rho(a, O)$$

справедливо неравенство

$$\rho(x^{(m)}, a) \geqslant \rho(x^{(m)}, O) - \rho(a, O),$$

то при выполнении условия (18.15) имеем: $\lim\limits_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, a) = +\infty$, т. е. если $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$, то расстояния от точек последовательности $\{x^{(m)}\}$ до любой фиксированной точки $a \in R^n$ стремятся к бесконечности.

Отметим, что, если $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$, то у точек $x^{(m)}$ существует по крайней мере одна координата, которая также стремится к бесконечности при $m \to \infty$. Действительно, если $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$, то например для каждого $p=1, 2, \ldots$ существует такой номер m_p, что для всех $m \geqslant m_p$ выполняется неравенство

$$\rho(x^{(m)}, O) = \sqrt{x_1^{(m)2} + \ldots + x_n^{(m)2}} > p,$$

откуда в силу (18.11) следует, что

$$|x_1^{(m)}| + \ldots + |x_n^{(m)}| > p. \qquad (18.16)$$

Поэтому при данном p найдется такая i-ая координата, $i=1, 2, \ldots, n$, что для нее будем иметь

$$|x_i^{(m)}| \geqslant \frac{p}{n}.$$

В противном случае, т. е. если для всех $i=1, 2, \ldots, n$ имело бы место неравенство

$$|x_i^{(m)}| < \frac{p}{n},$$

то не выполнялось бы неравенство (18.16). Номеров координат конечное число, а поэтому один из них, обозначим его через i_0, при $p=1, 2, \ldots$ будет повторяться бесконечно много раз, т. е. найдется такая подпоследовательность p_k натуральных чисел, что при всех $m \geqslant p_k$, $k=1, 2, \ldots$, будем иметь: $|x_{i_0}^{(m)}| \geqslant p_k/n$. Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty}(p_k/n) = +\infty$, то для указанного i_0 получим

$$\lim_{m\to\infty} x_{i_0}^{(m)} = \infty.$$

18.2. РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ МНОЖЕСТВ

В настоящем пункте рассматриваются вопросы, вспомогательные для дальнейшего изложения математического анализа и связанные с геометрией n-мерного пространства.

Определение 12. *Пусть E — некоторое множество точек евклидова пространства R^n. Точка $x \in E$ называется внутренней точкой множества (относительно пространства R^n), если существует ε-окрестность этой точки, содержащаяся во множестве E, т. е. существует такое $\varepsilon > 0$, что $U(x; \varepsilon) \subset E$.*

Определение 13. *Множество, каждая точка которого является его внутренней точкой (относительно рассматриваемого пространства R^n), называется открытым множеством.*

Следует иметь в виду, что одна и та же точка одного и того же множества может быть его внутренней точкой относительно одного пространства, содержащего это множество, и не быть внутренней точкой рассматриваемого множества относительно другого пространства, также содержащего это множество. Рассмотрим, например, пространство R_{xy}^2, т. е. плоскость с некоторой фиксированной системой декартовых координат, которые будем обозначать x и y. Ось x-ов этой плоскости, как всякая числовая ось, является евклидовым пространством R^1_x. Каждая точка какого-либо интервала (a, b) этой оси, т. е. множество точек

$$\{(x, y): a < x < b, \ y = 0\}$$

плоскости R^2_{xy}, является внутренней точкой этого интервала относительно указанного пространства R^1_x (оси x-ов) и не является внутренней точкой этого интервала относительно всей плоскости R^2_{xy}. Тем самым интервал (a, b) является открытым множеством пространства R^1_x и не является открытым множеством пространства R^2_{xy}.

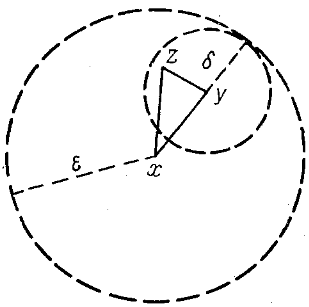


Рис. 82

Важный класс открытых множеств устанавливается следующей леммой.

Лемма 3. *Всякая ε-окрестность $U(x; \varepsilon)$ любой точки $x \in R^n$ является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть задана некоторая окрестность $U(x; \varepsilon)$ и пусть $y \in U(x; \varepsilon)$. Положим

$$\delta = \varepsilon - \rho(y, x) \qquad (18.17)$$

и покажем, что $U(y; \delta) \subset U(x; \varepsilon)$ (рис. 82).

Если $z \in U(y; \delta)$ и, значит, $\rho(z; y) < \delta$, то, применив неравенство треугольника и (18.17), получим

$$\rho(z, x) \leqslant \rho(z, y) + \rho(y, x) < \delta + \rho(y, x) = \varepsilon,$$

т. е. $z \in U(x; \varepsilon)$. В силу того что z — произвольная точка множества $U(y; \delta)$, это означает, что $U(y; \delta) \subset U(x; \varepsilon)$. □

Открытые множества пространства R^n будем обозначать большей частью буквой G.

Упражнение 3. Доказать, что множество внутренних точек всякого множества является открытым множеством.

Лемма 4. *Пересечение конечного числа, так же как и объединение любой совокупности открытых множеств являются открытыми множествами.*

Доказательство. Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_k$ — открытые множества пространства R^n. Если их пересечение $\bigcap\limits_{j=1}^{k} G_j$ — пустое множество, то оно является открытым ибо его множество внутренних точек пусто и, следовательно, совпадает с самим пересечением. Если же указанное пересечение не пусто и $x \in \bigcap\limits_{j=1} G_j$, то, в силу открытости множеств G_j, для каждого $j=1, 2, \ldots, k$ существует такое $\varepsilon_j > 0$, что $U(x; \varepsilon_j) \subset G_j$. Полагая $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$, получим, что для каждого j справедливо включение $U(x, \varepsilon) \subset G_j$ $(j=1, 2, \ldots, k)$. Следовательно, $U(x, \varepsilon) \subset \bigcap\limits_{j=1}^{k} G_j$, т. е. точка x является внутренней для пересечения $\bigcap\limits_{j=1}^{k} G_j$. Поскольку x — произвольная точка этого пересечения, оно является открытым множеством.

Пусть теперь дана произвольная система открытых множеств $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов, и $G = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha$. Покажем, что G — открытое множество. Действительно, какова бы ни была точка $x \in G$, существует такой индекс $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, что $x \in G_{\alpha_0}$. Поскольку G_{α_0} — открытое множество, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $U(x; \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}$. Но тогда $U(x, \varepsilon) \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha = G$, т. е. x — внутренняя точка множества G, и значит это множество открыто. $\square$

Очень удобным оказывается следующее определение.

Определение 14. *Всякое открытое множество, содержащее точку называется ее окрестностью.*

Окрестность точки x будет обычно обозначаться через $U = U(x)$, быть может, с теми или иными индексами.

Замечание. Во всякой окрестности $U(x)$ точки x, очевидно, содержится как сферическая, так и прямоугольная окрестность этой точки. Далее, при понимании окрестности точки в смысле определения 14 сохраняется и аналог свойства (18.12), т. е. точка x является пределом последовательности $\{x^{(m)}\}$ тогда и только тогда, когда для каждой ее окрестности $U(x)$ существует такой номер m_0, что для всех $m \geq m_0$ выполняется включение $x^{(m)} \in U(x)$.

Определение 15. *Точка $x \in R^n$ называется точкой прикосновения множества $E \subset R^n$, если любая окрестность этой точки содержит по крайней мере одну точку множества E.*

Очевидно, что каждая точка множества E является его точкой прикосновения, ибо всякая окрестность точки $x \in E$ содержит саму точку x. Вместе с тем могут, конечно, существовать и точки прикосновения данного множества, не принадлежащие ему (например, концы интервала на прямой являются его точками прикосновения).

Упражнение 4. Доказать, что для того чтобы точка $x \in R^n$ была точкой прикосновения множества $E \subset R^n$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность точек $x^{(m)} \in E$, $m = 1, 2, \ldots$, такая, что $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$.

Определение 16. *Если у точки $x \in E$ существует окрестность, не содержащая никаких других точек множества E, кроме самой точки x, то эта точка называется изолированной точкой множества E.*

Определение 17. *Точка $x \in R^n$ называется предельной точкой множества E, если любая окрестность точки x содержит по крайней мере одну точку множества E, отличную от x.*

Очевидно, что предельная точка является точкой прикосновения.

У всякой точки прикосновения x_0 множества E либо существует окрестность, содержащая лишь одну точку из E (в этом случае этой точкой является сама точка x_0), либо такой окрестности нет, т. е. в каждой окрестности точки x_0 имеется по крайней мере две точки множества E (следовательно, по крайней мере одна из них отлична от x_0). Поэтому всякая точка прикосновения множества E является либо его изолированной точкой, либо его предельной точкой (в последнем случае она может как принадлежать, так и не принадлежать самому множеству).

Примеры. Пусть $n=1$, $E=(0, 1)$ — интервал. Каждая точка отрезка $[0, 1]$ является точкой прикосновения и предельной точкой множества E, при этом точки 0 и 1 не принадлежат самому множеству E. Если $E=[0, 1]$ — отрезок, то множество точек прикосновения множества E совпадает с самим множеством. Наконец, если множество E состоит из интервала $(0, 1)$ и точки 2, т. е. $E=(0, 1)\cup\{2\}$, то точка 2 является его изолированной точкой, а множеством его точек прикосновения будет $[0, 1]\cup\{2\}$.

Определение 18. *Совокупность всех точек прикосновения множества $E \subset R^n$ называется замыканием множества E и обозначается $\bar{E}$.*

Как уже отмечалось, каждая точка множества E является его точкой прикосновения, поэтому

$$E \subset \bar{E}. \tag{18.18}$$

Определение 19. *Множество E называется замкнутым, если $\bar{E}=E$, т. е. если оно содержит все свои точки прикосновения.*

Например, при $n=1$ интервал $(0, 1)$ не является замкнутым множеством, а отрезок $[0, 1]$ — замкнутое множество.

Все пространство и пустое множество являются единственными в R^n одновременно замкнутыми и открытыми множествами (проверьте это).

Поскольку всякая точка прикосновения множества является либо его предельной, либо его изолированной точкой, а изолированная точка в силу самого своего определения принадлежит множеству, то требование принадлежности каждой точки прикосновения к множеству эквивалентно требованию принадлежности к этому множеству каждой его предельной точки. Иначе говоря, *множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

Упражнение 5. Пусть $E \subset R^k \subset R^n$. Доказать, что $x \in R^n$ является точкой прикосновения множества E в пространстве R^n тогда и только тогда, когда она принадлежит пространству R^k и является в нем точкой прикосновения множества E.

Отсюда следует, что множество E является замкнутым множеством пространства R^k тогда и только тогда, когда оно является замкнутым множеством пространства R^n. Таким образом, свойство множества быть замкнутым в некотором пространстве R^n является его «внутренним» свойством, т. е. свойством, которое не зависит от выбора пространства R^n, в котором лежит рассматриваемое множество. Как было отмечено выше, свойство множества быть открытым не является «внутренним» свойством в указанном смысле, одно и то же множество может быть открытым в одном пространстве R^n и не быть открытым в другом.

Отметим следующее очевидное свойство замкнутых множеств. *Если A — замкнутое множество, а $\{x^{(m)}\}$ — сходящаяся последовательность, все члены которой принадлежат множеству A: $x^{(m)} \in A$, $m = 1, 2, \ldots$, то ее предел также принадлежит множеству A.*

Действительно, если $x^{(0)} = \lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)}$, то из определения предела последовательности точек следует, что в любой окрестности точки $x^{(0)}$ имеются точки данной последовательности (и, более того, там лежат почти все точки последовательности, т. е. все за исключением конечного числа их), являющиеся, по предположению, и точками множества A. Таким образом, точка $x^{(0)}$ является точкой прикосновения множества A, и поскольку A — замкнутое множество, то $x^{(0)} \in A$.

Лемма 5. *Точка прикосновения замыкания множества является и точкой прикосновения самого множества.*

Следствие. *Замыкание всякого множества является замкнутым множеством.*

Доказательство леммы. Пусть $E \subset R^n$, $\bar{\bar{E}}$ — замыкание множества E и x — точка прикосновения множества $\bar{E}$, т. е. $x \in \bar{\bar{E}}$. Покажем, что $x \in \bar{E}$.

Из условия $x \in \bar{\bar{E}}$ следует, что любой окрестности $U = U(x)$ точки x принадлежит хотя бы одна точка y множества $\bar{E}$: $y \in U \cap \bar{E}$. Поскольку U, как всякая окрестность, является открытым множеством, то она является и окрестностью содержащейся в ней точки y. Но $y \in \bar{E}$, следовательно, в любой окрестности точки y, в частности — в U, имеется точка z из множества E: $z \in U \cap E$.

Итак, в любой окрестности U точки $x \in \bar{\bar{E}}$ имеется точка из E. Это и означает, что x является точкой прикосновения множества E: $x \in \bar{E}$. □

Доказательство следствия. В лемме 5 доказано, что

$$\bar{\bar{E}} \subset \bar{E},$$

и так как согласно (18.18), $\bar{E} \subset \bar{\bar{E}}$, то

$$\bar{\bar{E}} = \bar{E}. \tag{18.19}$$

Примеры. 1. Всякий n-мерный шар

$$Q^n = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 < r^2 \right\} \tag{18.20}$$

является открытым множеством (см. лемму 1), поэтому его часто называют также *n-мерным открытым шаром*. Множество же

$$\bar{Q}^n = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \leqslant r^2 \right\}, \tag{18.21}$$

замкнуто, так как нестрогие неравенства сохраняются при предельном переходе. Оно является замыканием открытого шара Q^n и называется *n-мерным замкнутым шаром*. В случае $n=2$: Q^2 — открытый круг, $\bar{Q}^2$ — замкнутый круг; в случае $n=1$: Q^1 — интервал, $\bar{Q}^1$ — отрезок.

2. Замкнутый шар $\bar{Q}^n$ получается из открытого шара Q^n присоединением к нему множества

$$\left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = r^2 \right\},$$

называемого *$(n-1)$-мерной сферой радиуса r с центром в точке $a = (a_1 \ldots, a_n)$* и обозначаемого S^{n-1}. В случае $n=2$: S^1 — окружность, в случае $n=1$: S^0 — пара точек.

Сфера

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = r^2 \right\} \tag{18.22}$$

также дает пример замкнутого множества (почему?)

Заметим еще, что n-мерный шар радиуса 1 с центром в начале координат обычно называется *n-мерным единичным шаром* (замкнутым или открытым), а $(n-1)$-мерная сфера радиуса 1 с центром в начале координат — $(n-1)$-мерной единичной сферой.

Определение 20. *Для всякого множества $E \subset R^n$ множество $R^n \setminus E$ называется его дополнением в пространстве R^n* (см. п. 1.1).

Лемма 6. *Для того чтобы множество было открытым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение было замкнутым.*

Доказательство необходимости. Пусть G — открытое множество. Тогда никакая точка $x \in G$ не является точкой прикосновения его дополнения $F = R^n \setminus G$, так как множество G, будучи открытым, является окрестностью точки x и не содержит точек множества F. Следовательно, все точки прикосновения множества F содержатся в F, что и означает замкнутость множества F.

Доказательство достаточности. Пусть F является замкнутым множеством и пусть $x \in G = R^n \setminus F$. В силу замкнутости F точка x не является его точкой прикосновения, поэтому существует ее окрестность $U(x)$, не пересекающаяся с множеством F и следовательно, такая, что $U(x) \subset G$. Таким образом, любая точка множества G является внутренней, т. е. G открыто. □

Следствие 1. *Множество замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.*

Это сразу следует из леммы 6, так как если множество B является дополнением множества A в R^n, т. е. $B = R^n \setminus A$, то и наоборот множество A является дополнением B в R^n: $A = R^n \setminus B$.

Следствие 2. *Пересечение любой совокупности и объединение конечного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.*

В самом деле, пусть F_α — замкнутые множества, тогда по лемме 6 множества $G_\alpha = R^n \setminus F_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, являются открытыми. Согласно формуле (1.1) имеем:

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = \bigcap_\alpha (R^n \setminus G_\alpha) = R^n \setminus \bigcup_\alpha G_\alpha.$$

Множество $\bigcup\limits_\alpha G_\alpha$ по лемме 4 открыто как объединение открытых множеств. Следовательно, его дополнение $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha = R^n \setminus \bigcup\limits_\alpha G_\alpha$, согласно лемме 6 замкнуто.

Аналогично с помощью формулы (1.2) доказывается замкнутость объединения конечного числа замкнутых множеств. □

Упражнение 6. Доказать, что если G — открытое множество, а F — замкнутое, $G \subset R^n$, $F \subset R^n$, то $G \setminus F$ — открытое множество.

Лемма 7. Пусть A и B — замкнутые непересекающиеся множества из R^n и множество A ограничено; тогда существует такое число $d > 0$, что для любых двух точек $x \in A$ и $y \in B$ выполняется неравенство $\rho(x, y) \geqslant d$.

Доказательство. Допустим, что такого числа d не существует. Тогда для любого $m = 1, 2, \ldots$ существует пара точек $x^{(m)} \in A$ и $y^{(m)} \in B$ таких, что $\rho(x^{(m)}, y^{(m)}) < 1/m$. Поскольку A — ограниченное множество, то из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$. Пусть $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x^{(0)}$. В силу замкнутости множества A имеем $x^{(0)} \in A$. Из неравенства

$$\rho(x^{(0)}, y^{(m_k)}) \leqslant \rho(x^{(0)}, x^{(m_k)}) + \rho(x^{(m_k)}, y^{(m_k)}) < \rho(x^{(0)}, x^{(m_k)}) + \frac{1}{m}$$

следует, что $\lim\limits_{k \to \infty} \rho(x^{(0)}, y^{(m_k)}) = 0$. Поэтому точка $x^{(0)}$ является точкой прикосновения множества B и в силу его замкнутости $x^{(0)} \in B$. Таким образом, $x^{(0)} \in A$ и $x^{(0)} \in B$, а это противоречит тому, что A и B не пересекаются. □

Определение 21. *Для двух множеств* E_1 и E_2 величина

$$\rho(E_1, E_2) = \inf_{x \in E_1,\ y \in E_2} \rho(x, y)$$

называется расстоянием между E_1 и E_2. В частности, *если* E_1 *состоит из одной точки* x, то $\rho(E_1, E_2) = \rho(x, E_2)$ *называется расстоянием от точки* x *до множества* E_2.

Применяя этот термин, лемму 7 можно сформулировать следующим образом.

Если два замкнутых множества не пересекаются и по крайней мере одно из них ограничено, то расстояние между ними положительно.

Упражнение 7. Привести пример двух непересекающихся замкнутых множеств, расстояние между которыми равно нулю.

Лемма 8. *Если* A — *замкнутое множество,* $A \subset R^n$, $x \in \boldsymbol{R}^n$ и $\rho(x, A) = d$, то существует такая точка $y \in A$, что $\rho(x, y) = d$.

Доказательство. Если $\rho(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \rho(x, y) = d$, то для любого $m = 1, 2, \ldots$ найдется такая точка $y^{(m)} \in A$, что $\rho(x, y^{(m)}) < d + \frac{1}{m}$. Очевидно, для каждого m справедливо включение $y^{(m)} \in U(x, d+1)$, а поэтому последовательность $\{y^{(m)}\}$ ограничена и, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{y^{(m_k)}\}$. Пусть $\lim\limits_{k \to \infty} y^{(m_k)} = y^{(0)}$. В силу замкнутости множества A имеем $y^{(0)} \in A$; далее

$$\rho(x, y^{(0)}) \leqslant \rho(x, y^{(m_k)}) + \rho(y^{(m_k)}, y^{(0)}) < d + \frac{1}{m_k} + \rho(y^{(m_k)}, y^{(0)}).$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, получим $\rho(x, y^{(0)}) \leqslant d$. С другой стороны, $\rho(x, y^{(0)}) \geqslant \rho(x, A) = d$, следовательно, $\rho(x, y^{(0)}) = d$. $\square$

Определение 22. *Точка* $x \in R^n$ *называется граничной точкой множества* $E \subset \boldsymbol{R}^n$, *если в любой ее окрестности существуют точки, как принадлежащие множеству* E, *так и не принадлежащие ему. Совокупность всех граничных точек множества* E *называется его границей и обозначается* ∂E.

Очевидно, что $\partial E \subset \bar{E}$. При этом каждая точка прикосновения множества E является либо его граничной точкой, либо его внутренней точкой — других возможностей нет, поэтому $\bar{E} = E \cup \partial E$.

Если G — открытое множество, то в объединении $\bar{G} = G \cup \partial G$ G и ∂G не пересекаются.

Действительно, поскольку множество G открыто, всякая его точка является внутренней и тем самым не принадлежит его границе.

Примеры. Пусть $n = 2$, $Q^2 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ — открытый круг. Если $E = Q^2$, то любая точка окружности $S^1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 +$

$+x_2^2=1\}$ является граничной точкой множества E и других граничных точек нет, т. е. $S^1=\partial E$. В этом случае граница множества E не принадлежит ему.

Пусть $E=\bar{Q}^2$ — замкнутый круг, и в этом случае окружность S^1 является границей для E, причем теперь $\partial E \subset E$.

Наконец, если $E=S^1$ — окружность, то каждая точка множества E является его граничной точкой и других граничных точек нет, т. е. $E=\partial E$.

Вообще, $(n-1)$-мерная сфера (18.22) является границей как n-мерного открытого шара (18.20), так и замкнутого (18.21), а также совпадает со своей собственной границей (почему?)

Упражнения. 8. Доказать, что для того чтобы множество $A \subset R^n$ было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы $\partial A \subset A$.

9. Доказать, что $\overline{\partial E}=\partial E$.

Для дальнейшего нам понадобится еще понятие кривой в n-мерном пространстве. Для этой цели обобщим данное выше определение кривой в трехмерном пространстве, не касаясь вопроса о преобразовании параметра.

Определение 23. *Множество точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$ пространства R^n, координаты которых заданы как непрерывные функции $x_i=x_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, определенные на некотором отрезке $[a, b]$, называется непрерывной кривой в пространстве R^n. Аргумент t называется параметром кривой. Точка $x(a)=(x_1(a), \ldots$ $\ldots, x_n(a))$ называется началом, а точка $x(b)=(x_1(b), \ldots, x_n(b))$ — концом данной кривой.*

Все сказанное в п. 16.1 и 16.2 о кривой в трехмерном пространстве можно естественным образом перенести и на общий n-мерный случай, но мы не будем на этом останавливаться. Важным для дальнейшего является понятие прямой в n-мерном пространстве.

Определение 24. *Пусть $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in R^n$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — некоторые фиксированные числа $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$. Множество точек $x=$ $=(x_1, \ldots, x_n)$ пространства R^n, координаты которых представимы в виде*

$$x_i=x_i^{(0)}+\alpha_i t, \quad i=1, 2, \ldots, n, \quad -\infty < t < +\infty,$$

называется прямой в пространстве R^n, проходящей через точку $x^{(0)}$.

Часть прямой, соответствующая изменению параметра t в некотором отрезке $[a, b]$, называется *прямолинейным отрезком* (прямой), а ее часть, соответствующая изменению параметра в бесконечном промежутке $t \geqslant a$, — *лучом*. Очевидно, что в случае $n=3$ получается прямая, соответственно отрезок или луч, в обычном трехмерном пространстве, а $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ является направляющим вектором этой прямой. Если даны две различные точки $(x_1', \ldots, x_n')$

и $(x''_1, \ldots, x''_n)$, то уравнение прямой, проходящей через эти точки, имеет вид

$$x_i = x'_i + (x''_i - x'_i)\,t;\ i = 1, 2, \ldots, n;\ -\infty < t < +\infty.$$

Определение 25. *Множество $E \subset R^n$, любые две точки которого можно соединить целиком лежащей в нем непрерывной кривой, называется линейно связным* *).

Иначе говоря, множество E называется линейно связным, если, каковы бы ни были точки $x^{(1)} \in E$ и $x^{(2)} \in E$, существует непрерывная кривая $x(t) = \{x_i(t);\ \alpha \leqslant t \leqslant b\}$ такая, что ее началом является точка $x^{(1)}$, т. е. $x(a) = x^{(1)}$, концом — точка $x^{(2)}$, т. е. $x(b) = x^{(2)}$, и все точки этой кривой принадлежат множеству E, т. е. $x(t) \in E$ для всех $t \in [a, b]$.

Примерами линейно связных множеств являются точка, отрезок, а примером линейно несвязного множества — пара различных точек.

Лемма 9. *Если линейно связное множество пересекается с некоторым множеством и с его дополнением в R^n, то оно пересекается и с границей этого множества.*

Доказательство. Пусть A — линейно связное множество $A \subset R^n$, B — некоторое множество, $B \subset R^n$, и пусть пересечения $A \cap B$ и $A \cap (R^n \setminus B)$ не пусты. Пусть $x^{(1)} \in A \cap B$ и $x^{(2)} \in A \cap (R^n \setminus B)$. Поскольку A — линейно связное множество, то существует такая непрерывная кривая $x(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, что $x(a) = x^{(1)}$, $x(b) = x^{(2)}$ и $x(t) \in A$ для всех $t \in [a; b]$. Обозначим через τ верхнюю грань тех $t \in [a, b]$, для которых $x(t) \in B$. Очевидно, $a \leqslant \tau \leqslant b$. В любой окрестности точки $x(\tau)$ содержатся как точки, принадлежащие B, так и не принадлежащие B (почему?). Следовательно, $x(\tau) \in \partial B$. Поскольку $x(\tau) \in A$, пересечение $\partial B \cap A$ не пусто. $\square$

Определение 26. *Открытое линейно связное множество называется областью.* **)

Примеры. В случае $n = 1$ всякий интервал является областью, а множество, состоящее из двух или более непересекающихся интервалов (рис. 83), хотя и представляет собой открытое множество, но не является областью.

Рис. 83

В случае $n = 2$ всякий открытый круг есть область, а множество, состоящее из двух или более непересекающихся открытых кругов (рис. 84), хотя и открыто, но не является областью, так как две точки x и y,

---

*) Кроме понятия линейной связности в математике существует понятие связности множества, которое в нашем курсе не рассматривается.

**) Не следует смешивать понятие области определения функции и понятие области в смысле этого определения.

принадлежащие разным кругам, нельзя соединить непрерывной кривой, лежащей целиком внутри рассматриваемого множества.

Всякий n-мерный открытый шар является областью.

Определение 27. *Область, любые две точки которой можно соединить отрезком, целиком в ней лежащим, называется выпуклой областью.*

Всякий n-мерный открытый шар является выпуклой областью.

Определение 28. *Множество, лежащее в пространстве R^n и являющееся замыканием некоторой области, называется замкнутой областью.*

Замкнутый n-мерный шар является замкнутой областью.

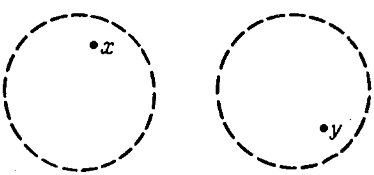


Рис. 84

Упражнение 10. Построить пример невыпуклой области.

Задача 15 (теорема Жордана *)). Доказать, что всякий простой контур (см. п. 16.1) на плоскости разбивает плоскость на две области (ограниченную и неограниченную); это означает, во-первых, что он является границей каждой из этих областей, во-вторых, что никакие две точки, принадлежащие различным указанным областям, нельзя соединить кривой, не пересекающей данный контур.

18.3 КОМПАКТЫ

В этом пункте будут рассмотрены некоторые свойства множеств, называемых *компактами* и играющих важную роль в анализе.

Определение 29. *Множество $A \subset R^n$ называется компактом, если из любой последовательности его точек можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит множеству A.*

Важное свойство, характеризующее компакты в R^n, устанавливается следующей теоремой.

Теорема 3. *Для того, чтобы множество $E \subset R^n$ было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и замкнутым.*

Доказательство необходимости. Пусть $A \subset R^n$ и A — компакт. Если множество A было бы неограниченным, то для любого натурального числа m нашлась бы такая точка $x^{(m)} \in A$, что $\rho(O, x^{(m)}) > m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Здесь, как всегда, $O = (0, 0, \ldots, 0)$. Очевидно, $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$. Поэтому любая подпоследовательность последовательности $\{x^{(m)}\}$ также имеет пределом ∞, и, следовательно, из $\{x^{(m)}\}$ нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность, что противоречит тому, что A — компакт. Итак, A — ограниченное множество.

*) К. Жордан (1838—1922) — французский математик.

Если множество A не было бы замкнутым, то существовала бы его точка прикосновения x, которая ему не принадлежала бы $x \notin A$. Для этой точки нашлась бы такая последовательность $x^{(m)} \subset A$, $m=1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$. Поэтому любая ее подпоследовательность также имела бы своим пределом точку $x \notin A$, т. е. множество A снова не было бы компактом. Следовательно, A — замкнутое множество.

Доказательство достаточности. Пусть E — ограниченное замкнутое множество и $\{x^{(m)}\}$ — какая-либо последовательность его точек: $x^{(m)} \in E$ $(m=1, 2, \ldots)$. В силу ограниченности множества E эта последовательность также ограничена. Следовательно, по теореме 2 п. 18.1, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$. Обозначим ее предел через x: $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)} = x$. Очевидно x — точка прикосновения множества E, ибо $x^{(m_k)} \in E$, а поскольку E — замкнутое множество, то $x \in E$, т. е. E действительно компакт. $\square$

Доказанная теорема позволяет легко устанавливать компактность многих часто встречающихся множеств, например, отрезков, замкнутых шаров и параллелепипедов, сфер в пространствах $\boldsymbol{R}^n$ любой размерности — все перечисленные множества, будучи ограниченными и замкнутыми, являются компактами. Так же легко с помощью теоремы 3 устанавливается и некомпактность многих множеств. Например, конечные интервалы, не будучи замкнутыми, а бесконечные, не будучи ограниченными множествами, не являются компактами.

Отметим, что в силу той же теоремы 3, лемму 7 из п. 18.2 можно сформулировать следующим образом: *если два замкнутых множества не пересекаются и по крайней мере одно из них является компактом, то расстояние между ними больше нуля.*

Прежде чем перейти к другим характеристическим свойствам компактов, введем ряд определений и докажем одно вспомогательное утверждение.

Последовательность n-мерных кубов $\{Q_k\}$, $k=1, 2, \ldots$, называется последовательностью *вложенных кубов*, если

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_k \supset Q_{k+1} \supset \ldots$$

Лемма 10. *Для последовательности замкнутых вложенных кубов $\{Q_k\}$, длины ребер которых стремятся к нулю при $k \to \infty$, существует одна и только одна точка, принадлежащая всем кубам рассматриваемой последовательности.*

Доказательство. Пусть кубы

$$Q_k = \{x = (x_i) : a_i^{(k)} \leqslant x_i \leqslant a_i^{(k)} + d^{(k)};\quad i = 1, 2, \ldots, n\} \tag{18.23}$$

с ребрами длин $d^{(k)}$ образуют последовательность вложенных кубов *) и пусть $\lim\limits_{k\to\infty} d^{(k)}=0$. Тогда отрезки $\left[a_i^{(k)}, a_i^{(k)}+d_i^{(k)}\right]$, $k=1, 2, \ldots$, образуют систему вложенных отрезков, длины $d_i^{(k)}$ которых стремятся к нулю при $k\to\infty$. Поэтому существуют и притом единственные числа ξ_i, такие, что при фиксированном $i=1, 2, \ldots, n$ и любом $k=1, 2, \ldots$ имеет место включение $\xi_i\in\in\left[a_i^{(k)}, a_i^{(k)}+d^{(k)}\right]$. Отсюда следует, что точка $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ принадлежит всем кубам рассматриваемой последовательности $\xi\in Q_k$, $k=1, 2, \ldots$, и эта точка единственна.

Определение 30. Пусть $E\subset \boldsymbol{R}^n$. Система

$$\Omega=\{E_\alpha\},\ \alpha\in\mathfrak{A} \tag{18.24}$$

множеств $E_\alpha\subset\boldsymbol{R}^n$ ($\mathfrak{A}=\{\alpha\}$ — некоторая совокупность индексов α) называется *покрытием множества* E, если

$$E\subset\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} E_\alpha.$$

Таким образом, система (18.24) называется покрытием множества E, если каждая точка этого множества принадлежит хотя бы одному множеству E_α системы Ω.

Покрытие (18.24) множества E, состоящее из конечного числа множеств E_α, называется *конечным покрытием* этого *множества*.

В случае, когда все множества системы Ω открытые, покрытие Ω называется *открытым покрытием множества* E.

Теорема 4. *Для того чтобы множество $E\subset\boldsymbol{R}^n$ было компактом, необходимо и достаточно, чтобы из любого его открытого покрытия можно было выделить конечное покрытие.*

Доказательство необходимости. Пусть A — компакт и пусть система

$$\Omega=\{G_\alpha\},\quad \alpha\in\mathfrak{A} \tag{18.25}$$

— его открытое покрытие. Допустим, что из этого покрытия нельзя выделить конечного покрытия компакта A. Согласно теореме 3 из того, что множество A является компактом, следует, что оно ограничено. Поэтому существует замкнутый куб Q, содержащий множество A.

Пусть

$$Q=\{x=(x_i): a_i\leqslant x_i\leqslant a_i+d,\quad i=1, 2, \ldots, n\}.$$

Разобьем куб Q на 2^n равных замкнутых кубов Q_j, определяемых набором n неравенств вида

$$a_i+\frac{d}{2}\leqslant x_i\leqslant a_i+d \quad\text{или}\quad a_i\leqslant x_i\leqslant a_i+\frac{d}{2}$$

*) Напомним, что мы договорились (см. п. 18.1) под кубом всегда понимать лишь кубы, задаваемые неравенствами вида (18.23) при данной фиксированной системе координат.

(на рис. 85 изображен случай, когда $n=2$), тогда

$$Q=\bigcup_{j=1}^{2^n} Q_j. \tag{18.26}$$

Система (18.25) образует открытое покрытие каждого из множеств $A \cap Q_j$ $(j=1, 2, \ldots, 2^n)$. Среди этих множеств существует такое непустое множество — обозначим его через $A \cap Q_{j_1}$ —, что из покрытия (18.25) нельзя выделить конечное покрытие этого множества — в противном случае из системы (18.25) можно было бы в силу равенства (18.26) выделить конечное покрытие и всего множества A, что противоречило бы сделанному предположению.

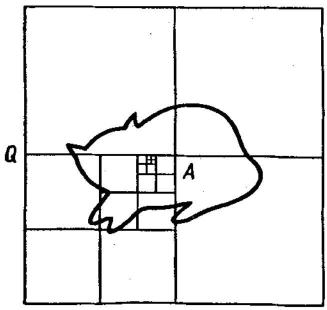


Рис. 85

Разобьем куб Q_{j_1} снова на 2^n равных замкнутых кубов $Q_{j_1 j}$ $(j=1, 2, \ldots, 2^n)$. Обозначим через $Q_{j_1 j_2}$ тот из кубов $Q_{j_1 j}$, пересечение которого с компактом A нельзя покрыть конечным числом множеств системы Ω и т. д. В результате получим последовательность вложенных замкнутых кубов

$$Q_{j_1} \supset Q_{j_1 j_2} \supset \ldots \supset Q_{j_1 j_2 \ldots j_k} \supset \ldots, \tag{18.27}$$

длины ребер которых равны, соответственно, $d/2, d/4, \ldots, d/2^k, \ldots$, и, следовательно, стремятся к нулю при $k \to \infty$.

Каждый из кубов $Q_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ последовательности (18.27) обладает тем свойством, что из системы (18.25) нельзя выделить конечное покрытие непустого множества

$$A \cap Q_{j_1 j_2 \ldots j_k},$$

j_ν принимает одно из значений $1, 2, 3, \ldots, 2^n$; $\nu=1, 2, \ldots, k$; $k=1, 2, \ldots$. Согласно лемме 10 существует, и притом единственная, точка ξ, принадлежащая всем кубам системы (18.27). Поскольку ребра кубов этой системы стремятся к нулю и каждый куб имеет непустое пересечение с множеством A, то в любой окрестности точки ξ имеются точки множества A. Действительно, заметим, что диагональ куба $Q_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ равна $d\sqrt{n}/2^k$. Далее, каково бы ни было $\varepsilon > 0$ выберем k_0 так, что

$$d\sqrt{n}/2^{k_0} < \varepsilon. \tag{18.28}$$

Это возможно, ибо $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{d\sqrt{n}}{2^k}=0$. Теперь, замечая, что любая точка $x \in Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$ находится от точки $\xi \in Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$ на расстоянии, не превышающем диагонали куба $Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$, будем иметь

$$\rho(x, \xi) \leqslant \frac{d\sqrt{n}}{2^{k_0}} < \varepsilon.$$

Это означает, что x лежит в ε-окрестности точки ξ. Следовательно, весь куб $Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$, в том числе и его точки, принадлежащие множеству A, содержатся в рассматриваемой ε-окрестности точки ξ. Таким образом, ξ является точкой прикосновения множества A. Согласно же теореме 3, множество A, будучи компактом, замкнуто, и поэтому $\xi \in A$.

Построенная вспомогательная последовательность кубов (18.27) легко позволяет доказать невозможность выполнения сделанного предположения о том, что из покрытия (18.25) компакта A нельзя выделить конечного покрытия этого компакта. В самом деле, поскольку система (18.25) является покрытием множества A, то существует такой индекс $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, что $\xi \in G_{\alpha_0}$. Множество G_{α_0} открыто, следовательно, найдется такое число $\varepsilon > 0$, что ε-окрестность $U(\xi; \varepsilon)$ точки ξ будет целиком содержаться в G_{α_0}:

$$U(\xi; \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}. \tag{18.29}$$

Заметим теперь, что для любого $\varepsilon > 0$, в частности для ε, удовлетворяющего условию (18.29), найдется, как показано выше, такой номер k_0, что будет выполнено включение

$$Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}} \subset U(\xi; \varepsilon). \tag{18.30}$$

Из (18.29) и (18.30) имеем

$$A \cap Q_{j_1, j_2 \ldots j_{k_0}} \subset Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}} \subset U(\xi, \varepsilon) \subset G_{\alpha_0},$$

и, следовательно, из системы (18.25) можно выделить конечное покрытие множества $A \cap Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$, а именно покрытие, состоящее только из одного множества G_{α_0}. Это противоречит допущению в соответствии с которым выбраны кубы $Q_{j_1 j_2 \ldots j_k}$. Таким образом предположив, что из системы (18.25) нельзя выделить конечного покрытия компакта, мы пришли к противоречию. Тем самым необходимость условия доказана.

Доказательство достаточности. Пусть $E \subset R^n$ и пусть из любого открытого покрытия множества E можно выделить конечное покрытие. Допустим, что E не является компактом. Это согласно определению 29 означает, что существует последовательность $\{x^{(m)}\} \subset E$, $m = 1, 2, \ldots$, из которой нельзя выделить сходящуюся к некоторой точке из E подпоследовательность. Следовательно, какова бы ни была точка $x \in E$, она не является частичным пределом последовательности $\{x^{(m)}\}$. Поэтому у каждой точки $x \in E$ найдется окрестность — обозначим ее через G_x, содержащая лишь конечное число элементов последовательности $\{x^{(m)}\}$;

в противном случае из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно было бы выделить сходящуюся к x подпоследовательность (если все элементы последовательности $\{x^{(m)}\}$, лежащие в G_x, таковы, что $x^{(m)} \neq x$, то из того, что этих элементов лишь конечное число, очевидно, следует, что у точки x можно выбрать даже такую окрестность, которая вовсе не будет содержать элементов последовательности $\{x^{(m)}\}$).

В силу выбора окрестностей G_x, каждая точка x множества E принадлежит соответствующей окрестности: $x \in G_x$. Поэтому совокупность $\Omega = \{G_x\}$, $x \in E$, всех таких окрестностей образует открытое покрытие множества E. Согласно условию теоремы, из него можно выделить конечное покрытие. Пусть им будет

$$\Omega_0 = \{G_{x_1}, G_{x_2}, \ldots, G_{x_k}\}.$$

Каждый элемент этого покрытия содержит лишь конечное число членов последовательности $\{x^{(m)}\}$. Следовательно, все элементы покрытия Ω_0 также содержат лишь конечное число членов последовательности $\{x^{(m)}\}$. Это, однако, невозможно, так как покрывая все множество E, элементы конечного покрытия Ω_0 должны содержать все члены последовательности $\{x^{(m)}\}$, которых бесконечно много. Полученное противоречие доказывает достаточность условий теоремы. $\square$

Замечание. Необходимость условий теоремы, т. е. утверждение, что из всякого открытого покрытия компакта можно выделить конечное покрытие, обычно называют **леммой Гейне—Бореля** *).

Подчеркнем, что в теореме 4 существенным является то, что рассматриваются покрытия, состоящие именно из открытых множеств. Так, например, из покрытия отрезка $[0, 1]$ (который, как уже отмечалось, будучи ограниченным замкнутым множеством, является компактом) отрезками $[1/(n+1), 1/n]$, $n = 1, 2, \ldots$, и отрезком $[-1, 0]$ нельзя выделить конечного покрытия. Это объясняется тем, что здесь покрытие состоит не из открытых, а из замкнутых множеств.

Упражнение 11. Доказать, что для любого конечного открытого покрытия $\Omega = \{G_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ компакта $A \subset R^n$ существует такое число $l > 0$, что каково бы ни было множество $E \subset A$, для которого $\sup\limits_{x, y \in E} \rho(x, y) \leqslant l$, существует такой элемент G_{k_0} покрытия Ω, что $E \subset G_{k_0}$.

В заключение этого пункта докажем еще одно вспомогательное утверждение. Предварительно введем следующее обозначение: для всякого множества $E \subset R^n$ обозначим через E_η, где $\eta > 0$, совокупность всех точек, расстояния которых от E не превосходят

---

*) Э. Борель (1871—1956) — французский математик.

числа η, т. е. положим

$$E_\eta \overset{\text{def}}{=} \{x\colon \rho(x, E) \leqslant \eta\}.$$

Лемма 11. *Если A — компакт, $A \subset R^n$, то при любом $\eta > 0$ множество A_η также является компактом.*

Доказательство. Согласно теореме 3, множество A, будучи компактом, ограничено и замкнуто. Ограниченность множества A означает, что существует такое $a > 0$, что A содержится в шаре $U(O, a)$.

Покажем, что $A_\eta \subset U(O, a+\eta)$. Если $x \in A_\eta$, то согласно лемме 8 найдется такая точка $y \in A$, что $\rho(x, y) = \rho(x, A) \leqslant \eta$. Из условия же $A \subset U(O, a)$ следует, что $\rho(O, y) < a$, поэтому

$$\rho(O, x) \leqslant \rho(O, y) + \rho(y, x) < a + \eta.$$

Таким образом, $x \in U(O, a+\eta)$. Точка x является произвольной точкой множества A_η. Следовательно, $A_\eta \subset U(O, a+\eta)$ и поэтому множество A_η ограничено.

Покажем теперь, что A_η — замкнутое множество. Если x — точка прикосновения множества A_η: $x \in \bar{A}_\eta$ то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая точка $y \in A_\eta$, что $\rho(x, y) < \varepsilon$. Из определения множества A_η и леммы 8 следует, что существует такая точка $z_0 \in A$, что $\rho(y, z_0) = \rho(y, A) \leqslant \eta$; поэтому

$$\rho(x, A) = \inf_{z \in A} \rho(x, z) \leqslant \rho(x, z_0) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z_0) < \varepsilon + \eta.$$

Это неравенство верно для любого $\varepsilon > 0$. Устремляя ε к нулю, получаем $\rho(x, A) \leqslant \eta$, т. е. $x \in A_\eta$, что и доказывает замкнутость множества A_η.

Итак, множество A_η ограничено и замкнуто, а следовательно, в силу той же теоремы 3 является компактом. $\square$

18.4. МНОГОМЕРНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В п. 15.1 отмечалось, что при фиксированной системе координат в трехмерном пространстве задание вектора равносильно заданию трех его координат. При сложении векторов и их умножении на числа те же действия выполняются и с их координатами. В n-мерном случае вектор можно определить при помощи его координат.

Определение 31. *Упорядоченная система n действительных чисел*

$$(x_1, \ldots, x_n); \quad x_i \in \boldsymbol{R}; \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

называется n-мерным действительным вектором $\boldsymbol{x}$, а числа $x_1, \ldots, x_n$ — его координатами. Число n называется размерностью вектора.

Суммой $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ *векторов* $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $\boldsymbol{y}=(y_1, \ldots, y_n)$ *называется вектор* $(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$, т. е.

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \overset{\text{def}}{=} (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n),$$

а произведением вектора $\boldsymbol{x}$ *на число* $\lambda \in \boldsymbol{R}$ *называется вектор*

$$\lambda x \overset{\text{def}}{=} x\lambda \overset{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Множество всех n-мерных векторов, в котором введены операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число, называется *n-мерным действительным векторным пространством, или, более полно, n-мерным арифметическим векторным пространством над полем действительных чисел.*

Вектор $0=(0, 0, \ldots, 0)$ называется *нулевым вектором* или *нулем n-мерного векторного пространства.*

По определению вектор $-\boldsymbol{x} \overset{\text{def}}{=} (-1)\,\boldsymbol{x}$ называют противоположным вектору $\boldsymbol{x}$.

Упражнение 12. Доказать, что если $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ — любые векторы, а числа λ, $\mu \in \boldsymbol{R}$ произвольны, то 1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$; 2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$; 3) $\boldsymbol{x}+0=\boldsymbol{x}$; 4) $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$; 5) $\lambda(\mu\boldsymbol{x})=(\lambda\mu)\boldsymbol{x}$; 6) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$; 7) $\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$.

Таким образом, n-мерное арифметическое пространство (см. определение 1 в п. 18.1) превращается в n-мерное арифметическое векторное пространство, если в нем ввести сложение его элементов и умножение их на число согласно определению 31.

В трехмерном случае связь между точками пространства и векторами в нем можно установить (как всегда, считая систему координат фиксированной), сопоставляя каждой точке $M=(x_1, x_2, x_3)$ этого пространства ее радиус-вектор, т. е. вектор $\overrightarrow{OM}=(x_1, x_2, x_3)$. Это сопоставление является взаимно однозначным соответствием между точками трехмерного пространства и векторами в нем.

Иногда n-мерное арифметическое пространство, введенное в определении 1 п. 18.1 в отличие от n-мерного векторного пространства называют *точечным пространством.*

Итак, как n-мерное точечное, так и n-мерное векторное пространство состоят из одних и тех же элементов — из упорядоченных совокупностей n действительных чисел. Поэтому как то, так и другое пространство будет обозначаться одним и тем же символом R^n. Они отличаются друг от друга тем, что в арифметическом n-мерном пространстве вводится понятие расстояния между его элементами (см. определение 1 в п. 18.1), а в n-мерном векторном — определяются операции сложения векторов и умножения их на действительные числа (см. определение 31 этого пункта).

Если через e_k обозначить n-мерный вектор, все координаты которого равны нулю, кроме k-й, равной единице, k — фиксированное натуральное число ($k \in \{1, 2, \ldots, n\}$), то для любого n-мерного вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ справедливо равенство

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n, \tag{18.31}$$

правая часть которого называется разложением вектора $\boldsymbol{x}$ по векторам $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. При этом коэффициенты $x_1, \ldots, x_n$ этого разложения единственны, т. е. однозначно определяются самим вектором $\boldsymbol{x}$, и, следовательно, в силу равенства (18.31) совпадают с его координатами $x_1, \ldots, x_n$.

Векторы $\boldsymbol{e}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ называются *координатными* или *базисными векторами, а их совокупность* $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — *стандартным базисом* пространства R^n (общее определение базиса будет дано в п. 57.2).

Подмножество L векторного пространства R^n называется *подпространством* пространства R^n, если для любых векторов $\boldsymbol{x} \in L$, $\boldsymbol{y} \in L$ и любых чисел $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\mu \in \boldsymbol{R}$ имеет место включение

$$\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y} \in L$$

Определение 32. *Скалярным произведением векторов* $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *и* $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $n > 3$, *называется число, обозначаемое через* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *и определяемое по формуле*

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n. \tag{18.32}$$

Из элементарной математики известно, что формула (18.32) справедлива и при обычном определении скалярного произведения векторов, т. е. и для $n \leqslant 3$.

Всякое n-мерное векторное пространство, в котором введено скалярное произведение, называется *евклидовым*.

Число $\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ называется *длиной вектора* $\boldsymbol{x}$ и обозначается через $|\boldsymbol{x}|$:

$$|\boldsymbol{x}| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{18.33}$$

Очевидно, что для любого вектора $\boldsymbol{x} \in R^n$ и любого числа $\lambda \in \boldsymbol{R}$ имеет место равенство

$$|\lambda\boldsymbol{x}| = |\lambda|\,|\boldsymbol{x}|, \tag{18.34}$$

а из неравенства (18.3) (см. п. 18.1) следует, что для любых $\boldsymbol{x} \in R^n$, $\boldsymbol{y} \in R^n$ выполняется неравенство

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|, \tag{18.35}$$

называемое *неравенством треугольника*.

Из (18.35) следует, что

$$||\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{y}|| \leqslant |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|. \tag{18.36}$$

Действительно, $|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y}|$, поэтому

$$|\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|.$$

В силу равноправия $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ имеем также

$$|\boldsymbol{y}|-|\boldsymbol{x}|\leqslant|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|.$$

Из двух последних неравенств и следует (18.36). $\square$

Если $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y}=(x_1, \ldots, y_n)$, то $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=(x_1-y_1, \ldots$ $\ldots, x_n-y_n)$ и поэтому

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}=\rho(x, y), \qquad (18.37)$$

где x и y — точки точечного n-мерного пространства с теми же координатами, что и векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Таким образом, в n-мерном векторном пространстве со скалярным произведением определено расстояние $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ между его элементами, совпадающее с расстоянием $\rho(x, y)$, определенным в п. 18.1. Поэтому все понятия, введенные в п. 18.1 — 18.3 для точечных пространств имеют смысл и для векторных пространств со скалярным произведением.

В качестве примера использования векторной символики отметим, что замкнутый шар $Q^n(x_0, r)$ радиуса r с центром в точке x_0 в векторных обозначениях определяется равенством

$$Q^n(x_0, r)=\{\boldsymbol{x}: |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\leqslant r\},$$

а ограничивающая его $(n-1)$-мерная сфера $S^{n-1}(x_0, r)$ — равенством

$$S^{n-1}(x_0, r)=\{\boldsymbol{x}: |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=r\}.$$

Скалярное произведение обладает следующими непосредственно проверяемыми свойствами:

1^0. Коммутативность. Для любых $\boldsymbol{x}\in R^n$, $y\in R^n$: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

2^0. Дистрибутивность. Для любых $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{y}\in R^n$, $\boldsymbol{z}\in R^n$: $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

3^0 Однородность. Для любого $\boldsymbol{x}\in R^n$ и любого числа $\lambda\in \boldsymbol{R}: (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

4^0. Невырожденность. Для любого $\boldsymbol{x}\in R^n$: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\geqslant 0$, причем

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=0.$$

Дистрибутивность и однородность скалярного произведения составляют вместе свойство, называемое *линейностью скалярного произведения.*

Если $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — координатные векторы в R^n, то согласно (18.32)

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=\begin{cases} 1 \text{ при } i=j, \\ 0 \text{ при } i\neq j, \end{cases} \quad i, j=1, 2, \ldots, n.$$

Поэтому для любого вектора $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ в силу свойств скалярного произведения получим:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)=(x_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+x_n\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_i)=x_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_i)+\ldots+x_n(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_i)=$$
$$=x_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i)=x_i, \qquad (18.38)$$

т. е. i-ая координата вектора $\boldsymbol{x}$ равна скалярному произведению $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)$.

Используя обозначение скалярного произведения и длины вектора, неравенство Коши—Шварца (см. (18.2) в п. 18.1) для векторов $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y}=(y_1, \ldots, y_n)$ можно записать в виде

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqslant |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|. \tag{18.39}$$

Углом φ между векторами $\boldsymbol{x} \in R^n$ и $\boldsymbol{y} \in R^n$, $n > 3$, называется угол φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, определяемый равенством

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}. \tag{18.40}$$

В силу неравенства Коши—Шварца (18.39) это определение корректно, ибо в силу (18.39) для φ, определяемого формулой (18.40), имеет место неравенство $|\cos\varphi| \leqslant 1$.

Здесь снова, как и в случае определения скалярного произведения за исходное определение принимается высказывание, аналогичное которому в пространстве R^n, $n \leqslant 3$, является доказываемым утверждением. Благодаря этому формулы (18.32) и (18.40) оказываются справедливыми во всех пространствах $\boldsymbol{R}^n$, $n=1, 2, \ldots$

Векторы, скалярное произведение которых равно нулю, называются *ортогональными*.

Вектор единичной длины кратко называют *единичным вектором*.

Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — единичные векторы, то для косинуса угла между ними из формулы (18.40) получаем

$$\cos\varphi = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \quad |\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = 1. \tag{18.41}$$

Если $\boldsymbol{a}=(a_1, \ldots, a_n)$ — единичный вектор, то обозначая через α_i угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e}_i$ согласно (18.38) и (18.41) имеем:

$$a_i = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_i) = \cos\alpha_i, \text{ т. е. } \boldsymbol{a} = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n).$$

Косинусы $\cos\alpha_i$, $i=1, \ldots, n$, называются *направляющими косинусами вектора* $\boldsymbol{a}$.

Поскольку $|\boldsymbol{a}|=1$, то в силу (18.33)

$$\cos^2\alpha_1 + \ldots + \cos^2\alpha_n = 1. \tag{18.42}$$

Если $\boldsymbol{a}$ — не единичный вектор и $\boldsymbol{a} \neq 0$, то, очевидно, вектор $\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ уже единичный, и его направляющие косинусы называются также и направляющими косинусами вектора $\boldsymbol{a}$.

Уравнение прямой в пространстве R^n (см. определение 24 в п. 18.2) в векторной записи имеет вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(0)} + t\boldsymbol{a}, \quad -\infty < t < +\infty, \tag{18.43}$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad \boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}), \quad \boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$$

(при сложении координат векторов сами векторы также складываются, а при умножении их координат на число они сами умножаются на то же число). Прямая (18.43) называется *прямой, проходящей через* точку $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ точечного пространства в направлении вектора $\boldsymbol{a}$.

Если $\boldsymbol{a}$ — единичный вектор $|\boldsymbol{a}|=1$ и, следовательно, $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n)$ ($\cos\alpha_i$ — направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a}$; $i=1, 2, \dots, n$), то прямая (18.43) в координатной записи имеет вид

$$x_i=x_i^{(0)}+t\cos\alpha_i; \quad i=1, 2, \dots, n; \quad -\infty<t<+\infty. \tag{18.44}$$

Пусть заданы две точки $x'=(x_1', \dots, x_n')$ и $x''=(x_1'', \dots, x_n'')$ точечного пространства; обозначим через $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$ векторы с теми же координатами. Тогда уравнением прямой, проходящей через точки x' и x'' (см. п. 18.2), в векторной записи будет

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'+(\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}')t, \quad -\infty<t<+\infty. \tag{18.45}$$

По аналогии с § 15 можно рассмотреть n-мерную вектор-функцию

$$\boldsymbol{r}(t)=(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad t\in E\subset \boldsymbol{R}$$

($\boldsymbol{R}$ — как всегда, множество всех действительных чисел). Совершенно аналогично тому, как это было сделано в § 15, при любом натуральном n определяются понятия предела, непрерывности и производной вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)\in \boldsymbol{R}^n$. Как и для $n\leqslant 3$ при дифференцировании вектор-функции дифференцируются ее координаты: $\boldsymbol{r}'(t)=(x_1'(t), \dots, x_n'(t))$, и утверждение $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=0$ равносильно тому, что $\lim\limits_{t\to t_0}|\boldsymbol{r}(t)|=0$.

§ 19. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

19.1. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В этом параграфе рассматриваются функции, которые определены на множествах n-мерного арифметическвго евклидова пространства R^n и значениями которых являются действительные числа. Таким образом, все функции будут являться функциями точек пространства. Это означает, что если имеется какая-либо функция $f(x_1, \dots, x_n)$ и в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ задана система координат $x_1, \dots, x_n$, то в другой системе координат $\xi_1, \dots, \xi_n$, связанной с исходной преобразованием

$$x_i=x_i(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad i=1, 2, \dots, n,$$

под той же функцией понимается не $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$, а функция

$$f[x_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, x_n(\xi_1, \dots, \xi_n)].$$

Рассматриваемые функции будут обозначаться либо одной буквой, например f, либо более подробно, с указанием аргумента, через $f(x)$ или $f(x_1, \ldots, x_n)$. При $n > 1$ они называются *функциями многих переменных*. В случае $n=2$ вместо $f(x_1, x_2)$ будем писать также $f(x, y)$, в случае $n=3$ вместо $f(x_1, x_2, x_3)$ — также $f(x, y, z)$.

Каждой функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответствует ее график в n-мерном пространстве точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$. Определим это понятие для рассматриваемого здесь случая.

Определение 1. *Пусть на множестве E евклидова пространства R^n определена функция $y = f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, и пусть R^{n+1}_{xy} — $(n+1)$-мерное евклидово пространство точек $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$. Множество точек пространства R^{n+1}_{xy} вида $(x, f(x)) = (x_1, \ldots, x_n, f(x))$, где $x \in E$, называется графиком функции f.*

График функции многих переменных, так же как и график функции одной переменной, удобно использовать для геометрической интерпретации вводимых понятий и доказываемых утверждений. Конечно изображение графика на чертеже в случае, когда число независимых переменных больше единицы, сложнее, чем в одномерном случае. На рис. 86 изображен вид графика функции двух переменных $y = f(x_1, x_2)$.

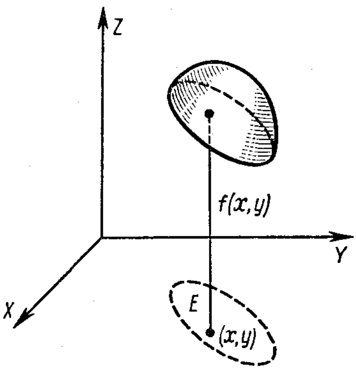


Рис. 86

Сформулированное здесь определение графика функции n переменных является частным случаем общего определения графика функции, сформулированного в п. 1.2*.

Пусть снова функция f определена на множестве $E \subset R^n$. Множество точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ пространства R^n удовлетворяющих уравнению

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c,$$

где c — некоторая постоянная, называется *множеством уровня* функции f, соответствующим данному значению c.

В случае $n=2$ множество уровня называется также *линией уровня*, в случае $n=3$ — *поверхностью уровня*, а при $n>3$ — *гиперповерхностью уровня*.

19.2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определим понятие предела функции многих переменных.

Определение 2. *Пусть функция f определена на множестве $X_f \subset R^n$, E — некоторое подмножество множества X_f и $x^{(0)}$ — предельная точка множества E.*

Число a называется пределом функции f по множеству E в точке $x^{(0)}$ (или при x, стремящемся к $x^{(0)}$), если для любой последовательности точек

$$x^{(m)} \in E, \quad x^{(m)} \neq x^{(0)}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

такой, что $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x^{(0)}$ числовая последовательность $\{f(x^{(m)})\}$ сходится к числу a,

$$\lim_{m \to \infty} f(x^{(m)}) = a.$$

В этом случае будем писать

$$\lim_{x \to x^{(0)},\ x \in E} f(x) = a.$$

При сделанных предположениях можно дать и другое, эквивалентное предыдущему определение предела функции многих переменных по аналогии с тем, как это было сделано раньше для функции одной переменной (см. п. 4.4 и п. 4.5).

Определение 3. *Пусть $x^{(0)}$ является предельной точкой множества E содержащегося в области определения X_f функции f.*

Число a называется пределом функции f по множеству E в точке $x^{(0)}$ (или, что то же, при x, стремящемся к $x^{(0)}$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой точки $x \in E$, $x \neq x^{(0)}$, $\rho(x_1, x^{(0)}) < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Совершенно аналогично случаю функции одной переменной доказывается эквивалентность определений 2 и 3.

Иногда наряду с обозначением $\lim\limits_{x \to x^{(0)},\ x \in E} f(x)$ применяется равносильное обозначение $\lim\limits_{\rho(x,\ x^{(0)}) \to 0,\ x \in E} f(x)$

Упражнения. 1. Доказать эквивалентность двух приведенных определений предела функции многих переменных по множеству.

2. По аналогии со случаем функции одной переменной сформулировать и доказать критерий Коши существования предела функции многих переменных.

Употребляя термин сужения функции (см. п. 4.1), можно сказать, что существование предела функции и его значение в точке $x^{(0)}$ не зависят от выбора сужения функции на пересечении какой-либо окрестности точки $x^{(0)}$ с областью определения данной функции, т. е. в конечном итоге не зависят от выбора указанной окрестности. Точная формулировка этого утверждения состоит в следующем: если функция f, определенная на множестве X_f, имеет предел по множеству $E \subset X_f$ в предельной точке $x^{(0)}$ этого множества, то для любой окрестности $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$ функция f имеет предел в точке $x^{(0)}$ по множеству $E \cap U(x^{(0)})$; при этом, если указанные пределы существуют, то они совпадают

$$\lim_{x \to x^{(0)},\ x \in E} f(x) = \lim_{x \to x^{(0)},\ x \in E \cap U(x^{(0)})} f(x);$$

если же функция f имеет предел в точке $x^{(0)}$ по множеству $E \cap U(x_0)$ хотя бы для одной окрестности $U(x_0)$, то она имеет предел в этой точке и по множеству E. Все это совсем легко проверить и поэтому может быть самостоятельно проделано читателем.

Свойство функции, не зависящее от выбора достаточно малой окрестности, содержащей данную точку, называется *локальным свойством функции* в этой точке. Очевидно, существование предела функции и его значение в некоторой точке (если он, конечно, существует) являются локальными свойствами функции в этой точке.

Из определения предела функции следует также, что существование предела функции в точке $x^{(0)}$ (по некоторому множеству), а если он существует, то и его значение, не зависят от значения самой функции в точке $x^{(0)}$ (если она определена в этой точке).

При определении предела функции многих переменных так же, как и в случае одной переменной, удобно использовать понятие проколотой окрестности, т. е. окрестности точки, из которой удалена сама эта точка: если $U(x^{(0)})$ — окрестность точки $x^{(0)}$, то множество

$$\overset{\circ}{U}(x^{(0)}) \stackrel{\text{def}}{=} U(x^{(0)}) \setminus \{x^{(0)}\}$$

называется *проколотой окрестностью* точки $x^{(0)}$.

Определение 4. *Если функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, то предел функции f в точке $x^{(0)}$ по этой проколотой окрестности называется просто пределом функции в точке f и обозначается через* $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$.

Определение 5. *Пусть через точку $x^{(0)}$ проведена прямая l* (см. определение 24 в п. 18.2) *и $\overset{\circ}{U}(x^{(0)})$ — некоторая проколотая окрестность точки $x^{(0)}$. Предел функции f в точке $x^{(0)}$ по пересечению $\overset{\circ}{U}(x^{(0)}) \cap l$ называется пределом функции f в точке $x^{(0)}$ в направлении прямой l.*

Определение 6. *Если множество E* (см. определение 2) *является множеством точек некоторой кривой, проходящей через $x^{(0)}$, то в этом случае предел функции f по множеству E при x, стремящемся к $x^{(0)}$, называется пределом функции по данной кривой в точке $x^{(0)}$.*

Очевидно, что если у функции f существует предел в точке x_0, то он существует в этой точке и по любому направлению и по любой кривой, причем все эти пределы совпадают.

Пример. Пусть $f(x, y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$. Эта формула задает функцию во всех точках плоскости, кроме начала координат (0, 0). Исследуем пределы этой функции по различным направлениям в точке (0, 0). Уравнение прямой, проходящей через начало координат (0, 0) в направлении вектора (α, β), имеет вид $x=\alpha t$, $y=\beta t$, $\alpha^2+\beta^2>0$. Имеем: $f(\alpha t, \beta t)=\frac{\alpha^2\beta t}{\alpha^4 t^2+\beta}\to 0$ при $t\to 0$, т. е. предел по любому направлению существует и равен нулю. Если же $y=x^2$, то $f(x, x^2)\equiv\frac{1}{2}$, и, значит, предел вдоль параболы $y=x^2$ также существует, но равен 1/2.

Таким образом, для рассмотренной функции существует один и тот же предел по любому направлению, а предел по указанной параболе, хотя и существует, отличен от общего значения пределов по направлениям, тем самым просто предел в точке (0, 0) не существует.

Упражнение 3. Исследовать пределы по направлению в точке (0, 0) функции $f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$.

Аналогично случаю функций одного переменного для пределов функций многих переменных по множеству имеют место соответствующие теоремы о пределах суммы, произведения и частного, так как в силу приведенного выше определения, предел функции n переменных по множеству также сводится к понятию предела последовательности (см. п. 4.7).

Наряду с указанными пределами у функций многих переменных можно рассматривать и пределы других видов, связанные с последовательным переходом к пределу, например по различным координатам, т. е. пределы вида

$$\lim_{x_{i_1}\to x_{i_1}^{(0)}}\ \lim_{x_{i_2}\to x_{i_2}^{(0)}}\ \ldots \lim_{x_{i_n}\to x_{i_n}^{(0)}} f(x_1, \ldots, x_n),$$

где $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$, $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, а функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки $x^{(0)}$.

Пределы указанного вида называются *повторными пределами*. Они представляют собой специфику функций многих переменных.

Рассмотрим определенную на всей плоскости функцию

$$f(x, y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0 \text{ и } y\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0 \text{ или } y=0.\end{cases}$$

Исследуем различные ее пределы в точке (0, 0).

Очевидно, $\lim\limits_{(x,\ y) \to (0,\ 0)} f(x,\ y) = 0$. Что же касается повторных пределов

$$\lim_{y \to 0}\left[\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{y} + \lim_{x \to 0} y \sin\frac{1}{x}\right] \text{ и } \lim_{x \to 0}\left[\lim_{y \to 0} x \sin\frac{1}{y} + \lim_{y \to 0} y \sin\frac{1}{x}\right],$$

то они не существуют, так как не существуют даже пределы

$$\lim_{x \to 0} y \sin\frac{1}{x}\ (y \neq 0) \quad \text{и} \quad \lim_{y \to 0} x \sin\frac{1}{y} \qquad (x \neq 0).$$

Для функции же $f(x,\ y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, определенной этой формулой на всей плоскости, кроме начала координат, оба повторных предела в точке (0, 0), существуют, и $\lim\limits_{y \to 0}\lim\limits_{x \to 0} f(x,\ y) = \lim\limits_{x \to 0}\lim\limits_{y \to 0} f(x,\ y) = 0$. Однако предела функции f в точке (0, 0) не существует, ибо, как легко видеть, предел вдоль координатных осей равен нулю, а вдоль прямой $y = x$ он равен 1/2.

Таким образом, из одного лишь существования предела функции в данной точке не следует существования повторных пределов в этой точке, и наоборот, из существования повторных пределов не следует существования предела в соответствующей точке. Тем не менее определенная связь между этими понятиями может быть установлена.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,\ y)$ определена на множестве E, содержащем все точки некоторой прямоугольной окрестности $P((x_0,\ y_0);\ \delta_1,\ \delta_2)$ точки $(x_0,\ y_0)$, кроме, быть может, точек прямых $x = x_0$ и $y = y_0$. Если существует предел функции f в точке $(x_0,\ y_0)$ по множеству E и при любом $y \in (y_0 - \delta_2,\ y_0 + \delta_2)$, $y \neq y_0$, существует предел* *)

$$\lim_{x \to x_0} f(x,\ y) = g(y), \tag{19.1}$$

то повторный предел $\lim\limits_{y \to y_0}\lim\limits_{x \to x_0} f(x,\ y)$ существует, и

$$\lim_{y \to y_0}\lim_{x \to x_0} f(x,\ y) = \lim_{(x,\ y) \to (x_0,\ y_0),\ (x,\ y) \in E} f(x,\ y). \tag{19.2}$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{(x,\ y) \to (x_0,\ y_0),\ (x,\ y) \in E} f(x,\ y) = A$ и пусть фиксировано произвольное $\varepsilon > 0$. Существует прямоугольная окрестность $P = P((x_0,\ y_0);\ \eta_1,\ \eta_2)$, $0 < \eta_1 < \delta_1$, $0 < \eta_2 < \delta_2$, такая, что если $0 < |x - x_0| < \eta_1$, $0 < |y - y_0| < \eta_2$, то

$$|f(x,\ y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{19.3}$$

---

*) Как всегда, под пределами, если не оговорено что-либо другое, понимаются конечные пределы.

В силу существования предела (19.1) для любого числа y, такого, что $0<|y-y_0|<\eta_2$, из (19.3) следует, что

$$|g(y)-A|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

(для этого достаточно перейти к пределу при $x\to x^{(0)}$ в равенстве (19.3)), а это и означает, что $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=A$. □

Пример. Рассмотрим функцию $f(x, y)=x\sin\frac{1}{y}$, $y\neq 0$. Эта функция определена во всей плоскости, кроме точек оси x-ов. Обозначим ее область определения через E. Очевидно, существуют пределы

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0),\ x\in E} f(x,\ y)=0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0} f(x,\ y)=0, \qquad y\neq 0;$$

поэтому, согласно доказанной теореме, существует и повторный предел $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,\ y)=0$. Это конечно, ясно и непосредственно. Заметим, что другой повторный предел $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,\ y)$ в этом случае не существует.

Как и для случая функций одной переменной, для функций $f(x)$ многих переменных можно определить предел $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, т. е. предел, когда точка $x=(x_1, \ldots, x_n)$ неограниченно удаляется от начала координат, иначе говоря, когда $\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\to+\infty$, а также повторный предел по переменным $x_i\to\infty$ и $x_j\to\infty$ ($i,\ j=1,\ 2, \ldots, n$). Отметим, что и в этом случае имеет место утверждение, аналогичное теореме 1. Можно ввести и понятие бесконечных пределов. Мы всего этого делать не будем, предоставляя это проделывать читателю по мере потребности.

Замечание 1. В дальнейшем будут рассматриваться композиции функций многих переменных. Для сложных функций многих переменных справедлив аналог правила замены переменного для пределов функций, установленного ранее для функций одного переменного (см. п. 4.8*). Его формулировку и доказательство (также аналогичное одномерному случаю) предоставляем читателю.

Замечание 2. Данное в настоящем параграфе определение предела функции расширяет это понятие и для функций одного переменного. Определение предела функции, сформулированное в п. 4.4 и в п. 4.5, является определением предела по интервалу (т. е. когда множество E в определении 2 этого пункта является интервалом). Конечно, и в случае функций одной переменной можно рассматривать пределы по произвольным множествам. В качестве примера рассмотрим функцию Дирихле (см. п. 4.2).

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рациональное},\\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное}.\end{cases}$$

Для предела в нуле по множеству рациональных чисел и по множеству иррациональных чисел имеем соответственно

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Замечание 3. Если множество $X \subset R^2$, на котором определена функция $f: X \to R$, состоит только из точек x, координаты которых суть натуральные числа: $x = (m, n)$, $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$, то функция f называется *двойной последовательностью* и ее значение $y = f(m, n)$ обозначается через y_{mn}, а сама последовательность — через $\{y_{mn}\}$.

Для двойных последовательностей $\{y_{mn}\}$ можно рассматривать предел $\lim\limits_{(m,\, n) \to \infty} y_{mn}$ (см. п. 38.1) и повторные пределы

$$\lim_{m \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} y_{mn}, \quad \lim_{n \to +\infty} \lim_{m \to +\infty} y_{mn}.$$

Пример. Пусть $y_{mn} = \cos^m 2\pi n!x$, $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $x \in \boldsymbol{R}$; тогда

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{m \to +\infty} \cos^m 2\pi n!x = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное число.} \end{cases}$$

Действительно, если $x = p/q$, $p \in \boldsymbol{Z}$, $q \in \boldsymbol{Z}$, $q > 0$, то при $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant q$, имеет место равенство $\cos 2\pi n!\, x = 1$ и, следовательно, $\lim\limits_{m \to +\infty} \cos^m 2\pi n!\, x = 1$, $n \geqslant q$, а поэтому $\lim\limits_{n \to +\infty} \lim\limits_{m \to +\infty} \cos^m 2\pi n!\, x = 1$. Если же число x иррационально, то при любом натуральном n справедливо неравенство $|\cos 2\pi n!\, x| < 1$, из которого и вытекает, что $\lim\limits_{n \to +\infty} \lim\limits_{m \to +\infty} \cos^m 2\pi n!\, x = 0$. $\square$

В результате нами получено аналитическое задание функции Дирихле (см. замечание 2):

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{m \to +\infty} \cos^m 2\pi n!x, \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

19.3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Определение 7. *Функция f, определенная на множестве $E \subset R^n$, называется непрерывной в точке $x^{(0)} \in E$ по множеству E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x^{(0)}) < \delta$, выполняется неравенство*

$$|f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon. \tag{19.4}$$

Заметим, что это определение в случае $n = 1$ шире соответствующего определения непрерывности, данного в п. 5.1, так как мы здесь не предполагаем, что функция f определена обязательно в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$.

Определение непрерывности, данное здесь (в отличие от сформулированного в п. 19.2 определения предела), не предполагает и того, что точка $x^{(0)}$ является предельной для множества E. Точка $x^{(0)}$ может быть и изолированной; при этом в изолированной точке множества E функция f всегда непрерывна, ибо в этом случае в качестве $\delta > 0$, участвующего в определении непрерывности, всегда можно взять такое δ, что окрестность $U(x^{(0)}; \delta)$ не содержит других точек множества E, кроме самой точки $x^{(0)}$, а для точки $x = x^{(0)}$ условие (19.4), очевидно, выполняется при любом $\varepsilon > 0$.

Например, раньше для элементарной функции $y = \sqrt{\ln \cos 2\pi x}$, определенной лишь для целочисленных значений $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, мы не могли говорить о ее непрерывности, так как множество, на котором она определена, состоит только из изолированных точек. В смысле же определения 7 эта функция непрерывна во всех точках ее области задания.

Если же точка $x^{(0)}$ является предельной для множества E, то данное определение непрерывности функции f в точке $x^{(0)}$ по множеству E эквивалентно условию

$$\lim_{x \to x^{(0)},\ x \in E} f(x) = f(x^{(0)}). \tag{19.5}$$

Из сказанного следует, что если функция f, определенная на множестве E, непрерывна в точке $x^{(0)} \in E$ по множеству E, то либо $x^{(0)}$ является предельной точкой множества E и тогда выполняется условие (19.5), либо $x^{(0)}$ является изолированной точкой.

Если в равенстве (19.5) перенести $f(x^{(0)})$ в левую часть и положить $\Delta y = f(x) - f(x^{(0)})$, то условие (19.5) перепишется в виде

$$\lim_{\rho(x,\ x^{(0)}) \to 0,\ x \in E} \Delta y = 0.$$

Число Δy называется приращением функции в точке $x^{(0)}$, соответствующим изменению аргумента от точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ до точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Так как $\rho(x, x^{(0)}) = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$, где $\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots n$, то непрерывность функции f в точке $x^{(0)}$ по множеству E означает, что ее приращение Δy в этой точке стремится к нулю, когда приращения Δx_i всех ее аргументов одновременно стремятся к нулю, (т. е. таким образом, когда $\rho(x, x^{(0)}) \to 0$).

Можно, конечно, сформулировать понятие непрерывности функции и на языке последовательностей.

Функция $f(x)$, определенная на множестве E, непрерывна по этому множеству в точке $x^{(0)} \in E$ в том и только в том случае, когда для любой последовательности точек $x^{(k)} \in E$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{x \to \infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)}). \tag{19.6}$$

Действительно, точка $x^{(0)}$ является либо предельной точкой множества E, либо его изолированной точкой. В случае, когда $x^{(0)}$ — предельная точка множества E, равенство (19.6) равносильно равенству (19.5) в силу определения предела функции. Если же $x^{(0)}$ является изолированной точкой, то, как это отмечалось выше, в этой точке функция $f(x)$ всегда непрерывна. С другой стороны, поскольку в этом случае существует окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, в которой не содержится точек множества E, кроме самой точки $x^{(0)}$, и поскольку последовательность точек $x^{(k)} \in E$, $k=1, 2, \ldots$ сходится к точке $x^{(0)}$, то в указанной окрестности содержатся все точки этой последовательности, начиная с некоторого номера $k_0: x^{(k)} \in U(x^{(0)})$, $k \geq k_0$, что возможно лишь когда $x^{(k)} = x^{(0)}$, $k \geq k_0$. Очевидно, что в этом случае равенство (19.6) также справедливо. □

Когда говорят, что функция f определена на множестве E, это означает, что она заведомо определена во всех точках этого множества, но не исключает того, что она может быть определена и на некотором большем множестве $D \supset E$. Может, конечно, случиться, что функция f будет непрерывной в какой-то точке $x^{(0)} \in E$ по множеству E и не будет непрерывной в этой точке по множеству D (например, функция Дирихле, см. п. 4.2 и 19.2, непрерывна в точке $x=0$ по множеству рациональных чисел и не является непрерывной в этой точке по множеству всех действительных чисел). Поэтому слова «по множеству E» в определении непрерывности существенны. Впрочем, иногда в случаях, когда это не может привести к недоразумениям, они опускаются.

Лемма 1. *Если функция f определена на множестве $E \subset R^n$ и непрерывна в точке $x^{(0)} \in E$ по этому множеству, причем $f(x^{(0)}) \neq 0$, то существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что для всех $x \in U(x^{(0)}) \cap E$ справедливы неравенства*

$$f(x) > \frac{f(x^{(0)})}{2}, \quad \text{если} \quad f(x^{(0)}) > 0,$$

и

$$f(x) < \frac{f(x^{(0)})}{2}, \quad \text{если} \quad f(x^{(0)}) < 0,$$

в частности, во всех точках множества $U(x^{(0)}) \cap E$ значения функции $f(x)$ имеют тот же знак, что и $f(x_0)$.

Следствие. *Если функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству $E \subset R^n$ и $f(x^{(0)}) > c$ (соответственно, $f(x^{(0)}) < c$), то существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что для любых $x \in U(x^{(0)}) \cap E$ выполняется неравенство $f(x) > c$ (соответственно $f(x) < c$).*

Доказательство леммы. Пусть $\varepsilon = \frac{|f(x^{(0)})|}{2}$, тогда в силу непрерывности функции f в точке $x^{(0)}$ по множеству E существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in U(x^{(0)}; \delta) \cap E$ справедливо нераве нство $|f(x)-f(x^{(0)})|<\varepsilon=\frac{|f(x^{(0)})|}{2}$, и поэтому

$$f(x^{(0)})-\frac{|f(x^{(0)})|}{2}<f(x)<f(x^{(0)})+\frac{|f(x^{(0)})|}{2}.$$

Если $f(x^{(0)})>0$, то $f(x^{(0)})-\frac{|f(x^{(0)})|}{2}=\frac{f(x^{(0)})}{2}$ и, следовательно, $f(x)>\frac{f(x^{(0)})}{2}$; если же $f(x^{(0)})<0$, то

$$f(x^{(0)})+\frac{|f(x^{(0)})|}{2}=\frac{f(x^{(0)})}{2} \text{ и, следовательно } f(x)<\frac{f(x^{(0)})}{2}. \square$$

Чтобы получить утверждение следствия достаточно применить лемму к функции $g(x)\stackrel{\text{def}}{=}f(x)-c$.

Совершенно аналогично случаю $n=1$ доказывается, что, *если функции f и g непрерывны в точке $x^{(0)}$ множества E, то функции $f+g$, cf (c — постоянная), fg, а если $g(x^{(0)})\neq 0$, то и f/g также непрерывны в точке $x^{(0)}$.*

Для функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n>1$, наряду с их непрерывностью в вышеопределенном смысле, которую называют также *непрерывностью по совокупности переменных* $x_1, \ldots, x_n$, можно рассматривать и непрерывность по отдельным переменным x_i.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная в некоторой окрестности точки $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, называется *непрерывной в точке $x^{(0)}$ по переменной x_i*, если функция

$$\varphi(x_i)\stackrel{\text{def}}{=}f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$$

одной переменной x_i непрерывна в точке $x_i^{(0)}$.

Отметим, что из непрерывности функции по всем переменным в отдельности не следует ее непрерывность по совокупности. Например, функция

$$f(x, y)=\begin{cases} xy/(x^2+y^2), & \text{если } x^2+y^2>0, \\ 0, & \text{если } x=y=0 \end{cases}$$

непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности в каждой точке плоскости, но не непрерывна по их совокупности в точке $(0, 0)$, так как не имеет в этой точке даже предела (проверьте это).

19.4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ КОМПОЗИЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть на некотором множестве $E_t\subset R^k$ задана система n функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\ldots$, $\varphi_n(t)$, $t=(t_1, \ldots, t_k)\in E_t$ и пусть на некотором множестве $E_x\subset R^n$ задана функция $f(x)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)\in E_x$.

Если $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))\in E_x$ для любой точки $t\in E_t$, то имеет смысл говорить о с л о ж н о й ф у н к ц и и $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, т. е. функции, ставящей в соответствие каждой точке $t\in E_t$

число $f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$. Функция $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ называется также *композицией* функций f и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Теорема 2. *Пусть имеет смысл сложная функция $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Если функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ непрерывны в точке $t^{(0)} \in E_t \subset R^k$ по множеству E_t, а функция f непрерывна в точке $x^{(0)} = (\varphi_1(t^{(0)}), \ldots, \varphi_n(t^{(0)})) \in E_x \subset R^n$ по множеству E_x, то сложная функция $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ непрерывна в точке $t^{(0)}$ по множеству E_t.*

Доказательство. В силу непрерывности функции f в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ по множеству E_x для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon \tag{19.7}$$

для всех точек $x \in P(x^{(0)}; \eta) \cap E_x$ *), т. е. для всех точек $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_x$, для которых

$$|x_i - x_i^{(0)}| < \eta, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{19.8}$$

В силу же непрерывности по множеству E_t в точке $t^{(0)}$ каждой из функций φ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, для указанного $\eta > 0$ существуют такие $\delta_i = \delta_i(\eta) > 0$, что для всех $t \in E_t \cap U(t^{(0)}; \delta_i)$ выполняется неравенство

$$|\varphi_i(t) - \varphi_i(t^{(0)})| < \eta. \tag{19.9}$$

Обозначим через δ наименьшее из чисел δ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для всех $t \in E_t \cap U(t^{(0)}; \delta)$ и всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется неравенство (19.9), т. е. неравенство (19.8), где

$$x_i = \varphi_i(t), \quad x_i^{(0)} = \varphi_i(t^{(0)}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

По условиям теоремы имеет смысл сложная функция $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, т. е. при $t \in E_t$ выполняется включение $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in E_x$, а следовательно, в силу (19.9) при $t \in E_t \cap U(t^{(0)}; \delta)$ — включение $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in P(x^{(0)}; \eta) \cap E_x$. Поэтому для всех $t \in E_t \cap U(t^{(0)}; \delta)$ выполняется условие

$$|f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon,$$

где $x = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $x^{(0)} = (\varphi_1(t^{(0)}), \ldots, \varphi_n(t^{(0)}))$. Это и означает непрерывность сложной функции $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ в точке $t^{(0)}$. $\square$

Как видно из проведенных рассуждений, доказательство теоремы 2 по идее повторяет доказательство соответствующей теоремы для $n = 1$ (см. п. 5.2).

Замечание. Если функции $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, определенные на множестве $E_t \subset R^k$, непрерывны по этому множеству E_t в точке $t^{(0)} \in E_t \subset R^k$, а функция f определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (\varphi_1(t^{(0)}), \ldots, \varphi_n(t^{(0)}))$, то существует такая окрест-

*) Здесь удобнее воспользоваться кубической окрестностью $P(x^{(0)}; \eta)$, чем сферической.

ность $U(t^{(0)})$ точки $t^{(0)}$, что для всех $t \in U(t^{(0)}) \cap E_t$ имеет смысл композиция $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

В силу этого, когда функция f определена на множестве, содержащем некоторую окрестность точки $x^{(0)}$, то требование существования композиции $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ в условиях теоремы 2 можно отбросить.

Действительно, если функция f определена в какой-то окрестности точки $x^{(0)}$, то существует и прямоугольная окрестность $P(x^{(0)}; \eta)$ этой точки, в которой функция f также определена. В качестве же искомой окрестности точки $t^{(0)}$ можно взять δ-окрестность этой точки, построенную при доказательстве теоремы 2. В самом деле, если $t \in U(t^{(0)}; \delta) \cap E_t$, то, согласно неравенству (19.9), получим $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in P(x^{(0)}; \eta)$, следовательно, сложная функция определена на $U(t^{(0)}; \delta) \cap E_t$. $\square$

С помощью теоремы 2 можно легко установить непрерывность функций, большей частью встречающихся на практике, а именно так называемых элементарных функций многих переменных.

Определение 8. *Функции, получающиеся из переменных $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ с помощью конечного числа композиций элементарных функций одного переменного, операций сложения, умножения и деления, называются элементарными функциями переменных $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$.*

Например, функция $f(x, y) = xe^{y \sin \frac{xy}{x+y}}$ является элементарной функцией двух переменных x и y. Действительно,

$$f(x, y) = xw, \quad w = e^v, \quad v = yz, \quad z = \sin t, \quad t = \alpha/\beta, \quad \alpha = xy, \quad \beta = x + y.$$

Из теоремы 2 и сохранения непрерывности в соответствующих точках при арифметических операциях над непрерывными функциями (см. п. 19.3) следует, что *всякая элементарная функция любого числа переменных непрерывна в каждой точке области своего определения.*

19.5. ТЕОРЕМЫ О ФУНКЦИЯХ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА МНОЖЕСТВАХ

Функция f называется *непрерывной на множестве E*, если она непрерывна по этому множеству в каждой его точке. Иногда в этом случае говорят также, что функция f *непрерывна во множестве E*.

Докажем ряд теорем о функциях, непрерывных на множествах. Эти теоремы доказываются аналогично соответствующим теоремам для функций одного переменного. Мы рассмотрим их при достаточно общих предположениях, это позволит более глубоко выяснить, с чем связаны рассматриваемые свойства непрерывных функций. Начнем с обобщения теоремы Вейерштрасса (см. п. 6.1) на многомерный случай. Определение ряда понятий, которые будут рассматриваться ниже, как, например, ограниченность функции, верхняя и нижняя грани функции и т. п. — см. в п. 4.1.

Теорема 3. *Всякая функция, непрерывная на компакте, ограничена на нем и достигает своей верхней и своей нижней грани* *).

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на компакте $A \subset R^n$ и пусть $M = \sup\limits_A f$. Выберем по аналогии с одномерным случаем (см. доказательство теоремы 1 в п. 6.1) последовательность таких чисел a_m, что $\lim\limits_{m \to \infty} a_m = M$ и $a_m < M$, $m = 1, 2, \dots$.

Для каждого $m = 1, 2, \dots$ существует такая точка $x^m \in A$, что $f(x^{(m)}) > a_m$. Поскольку множество A — компакт, то из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$, предел $x^{(0)}$ которой лежит в A: $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x^{(0)} \in A$.

Для любого $k = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство $a_{m_k} < f(x^{(m_k)}) \leqslant M$. Переходя в нем к пределу при $k \to \infty$, получим $\lim\limits_{k \to \infty} f(x^{(m_k)}) = M$. В силу же непрерывности функции f в точке $x^{(0)}$ по множеству A имеем $\lim\limits_{k \to \infty} f(x^{(m_k)}) = f(x^{(0)})$, и, следовательно, $M = f(x^{(0)})$.

Таким образом, верхняя грань функции f конечна, и поэтому функция f ограничена сверху; кроме того, эта верхняя грань достигается в точке $x^{(0)} \in A$. Аналогично доказывается, что функция f ограничена снизу и что ее нижняя грань достигается в некоторой точке множества A. □

Перейдем теперь к рассмотрению обобщения теоремы Коши о промежуточных значениях (см. п. 6.2) для случая функций многих переменных.

Теорема 4. *Пусть функция f определена и непрерывна в области $G \subset R^n$, тогда, принимая какие-либо два значения в G, функция f принимает в G и любое значение, заключенное между ними.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна в области $G \subset R^n$, пусть $x^{(1)} \in G$, $x^{(2)} \in G$, $f(x^{(1)}) = a$, $f(x^{(2)}) = b$ и, например, $a < b$. Пусть далее, c — какое-либо число, такое, что $a < c < b$. Согласно определению области (см. определения 25 и 26 в п. 18.2), существует такая кривая $x(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, что $x(\alpha) = x^{(1)}$, $x(\beta) = x^{(2)}$ и $x(t) \in G$ при всех $t \in [\alpha, \beta]$.

Если $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, то, по определению кривой, функции $x_i(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Согласно же теореме 2 о суперпозиции непрерывных функций многих переменных, функция $f(x(t)) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ также непрерывна на

*) Иначе говоря, функция, непрерывная на компакте, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

отрезке $[\alpha, \beta]$. Так как $f(x(\alpha))=a$, $f(x(\beta))=b$ и $a<c<b$, то согласно теореме Коши (см. п. 6.2), существует точка $t_0 \in (\alpha, \beta)$ такая, что $f(x(t_0))=c$. Полагая $x^{(0)}=x(t_0)$, имеем $x^{(0)} \in G$ и $f(x^{(0)})=c$. □

Следствие. *Функция f, определенная и непрерывная в замкнутой области $\bar{G}$, принимая какие-либо два значения, принимает в G и любое промежуточное.*

Доказательство. Пусть G — область, функция f определена и непрерывна на ее замыкании $\bar{G}$, $x^{(1)} \in \bar{G}$, $x^{(2)} \in \bar{G}$, $f(x^{(1)})=a$, $f(x^{(2)})=b$ и пусть для определенности $a<c<b$. Докажем, что существует точка $\zeta \in G$, такая, что $f(\zeta)=c$.

Возьмем число $\varepsilon>0$, определяемое равенством

$$\varepsilon=\min\{c-a,\ b-c\}.$$

В силу непрерывности функции f в точке $x^{(1)}$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что если $x \in U(x^{(1)};\ \delta) \cap \bar{G}$, то $|f(x)-f(x^{(1)})|<\varepsilon$ и, значит, $|f(x)-a|<c-a$ в частности, $f(x)<c$. Точка $x^{(1)} \in \bar{G}$, т. е. точка $x^{(1)}$ является точкой прикосновения множества G, поэтому в окрестности $U(x^{(1)};\ \delta)$ заведомо существует точка, принадлежащая G; обозначим ее $y^{(1)}$. Таким образом, $y^{(1)} \in U(x^{(1)};\ \delta) \cap G$, и поэтому $f(y^{(1)})<c$. Аналогичным методом доказывается существование точки $y^{(2)} \in G$, такой, что $f(y^{(2)})>c$. Из существования в области G точек $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ с указанным свойством в силу теоремы 4 вытекает существование в G точки ζ такой, что $f(\zeta)=c$. □

Отметим, что ни при доказательстве самой теоремы 4, ни при доказательстве ее следствия не использовалось то, что множество G открыто. Использовалось лишь то, что любые две его точки можно соединить кривой, принадлежащей самому множеству, т. е. что оно линейно связно.

Упражнение 4. Пусть функция f непрерывна и принимает значения разных знаков на открытом множестве. Доказать, что множество точек, в которых $f \neq 0$ является открытым множеством, но не является областью.

Задача 16. Построить пример области G, в замыкании $\bar{G}$ которой не существуют две точки, не соединяемые в $\bar{G}$ непрерывной кривой.

19.6. РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ. МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Наряду с понятием непрерывности функции в точке в математическом анализе большую роль играет так называемое понятие равномерной непрерывности функции на множестве.

Определение 9. *Функция $f(x)$, определенная на множестве $E \subset R^n$, называется равномерно непрерывной на E, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любых двух точек*

$x \in E$, $x' \in E$, *удовлетворяющих условию*

$$\rho(x, x') < \delta, \tag{19.10}$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{19.11}$$

Отметим, что если функция f равномерно непрерывна на множестве E, то она и просто непрерывна на E, т. е. непрерывна в каждой точке $x^{(0)} \in E$. Чтобы в этом убедиться, достаточно, например, в (19.10) и (19.11) положить $x' = x^{(0)}$.

Если же функция f непрерывна в каждой точке $x \in E$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует лишь $\delta = \delta(\varepsilon; x)$ такое, что для всех $x' \in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x') < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. В этом случае выбор δ зависит не только от ε, но, вообще говоря, и от точки x.

Подчеркнем, что в случае, когда функция f равномерно непрерывна на множестве E, выбор соответствующего δ зависит только от ε и не зависит от выбора рассматриваемых точек множества E.

Сказанное хорошо видно при записи указанных определений с помощью логических символов. Условие непрерывности функции f на множестве E имеет вид

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall x \in E)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x' \in E,\ \rho(x', x) < \delta) : |f(x') - f(x)| < \varepsilon,$$

а условие ее равномерной непрерывности на E — вид

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\ \rho(x', x) < \delta) : |f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

Примеры 1. Функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна на всей числовой оси, ибо, если задано $\varepsilon > 0$, достаточно взять $\delta = \varepsilon$, тогда если $|x - x'| < \delta$, то в силу равенств $f(x) = x$, $f(x') = x'$ получим $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

2. Функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, не будет равномерно непрерывной на своей области определения, т. е. на числовой оси, из которой удалена точка $x = 0$. В самом деле, если взять, например, $\varepsilon = 1$, то при любом сколь угодно малом $\delta > 0$ найдутся точки x и x', например точки вида

$$x = 1\Big/\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \quad \text{и} \quad x' = 1\Big/\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi n\right)$$

(n — достаточно большое натуральное число) такие, что $|x - x'| < \delta$, а вместе с тем $|f(x) - f(x')| > 1$.

В качестве достаточного признака равномерной непрерывности функций одного переменного на интервале отметим следующий.

Лемма 2. *Если функция $f(x)$ определена и имеет ограниченную производную на некотором интервале (a, b), то она равномерно непрерывна на этом интервале.*

Действительно, если $|f'(x)| \leqslant c$ (c — постоянная) на (a, b), то с помощью формулы конечных приращений Лагранжа (см. п. 11.2) получим

$$|f(x') - f(x)| = |f'(\xi)(x' - x)| \leqslant c|x' - x|,$$
$$a < x < b, \quad a < x' < b, \quad a < \xi < b. \tag{19.12}$$

Поэтому для $\varepsilon > 0$ достаточно взять $\delta = \varepsilon/c$; тогда если $|x' - x| < \delta$, $a < x < b$, $a < x' < b$, то в силу (19.12) справедливо неравенство $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, что и означает равномерную непрерывность функции f на (a, b). □

Аналогичный результат имеет место для любого промежутка, конечного или бесконечного. Обобщение этого критерия на многомерный случай будет дано в п. 39.2.

Принципиальное значение имеет следующая теорема.

Теорема 5 (Кантор). *Функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна.*

Следствие. *Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна.*

Доказательство теоремы. Воспользуемся методом от противного. Допустим, что существует функция f, определенная и непрерывная на некотором компакте $E \subset R^n$, но не равномерно непрерывная на нем. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки $x'_\delta \in E$ и $x''_\delta \in E$ (индекс «δ» у точек означает, что они зависят от выбора δ), для которых $\rho(x'_\delta, x''_\delta) < \delta$ и вместе с тем $|f(x''_\delta) - f(x'_\delta)| \geqslant \varepsilon_0$. Возьмем какую-либо последовательность чисел δ_m, так, чтобы $\lim\limits_{m \to \infty} \delta_m = 0$, например, $\delta_m = 1/m$, $m = 1, 2, \ldots$. Пусть $x'^{(m)} = x'_{\delta_m}$, $x''^{(m)} = x''_{\delta_m}$ и, значит,

$$\rho(x'^{(m)}, x''^{(m)}) < \frac{1}{m}, \quad |f(x''^{(m)}) - f(x'^{(m)})| \geqslant \varepsilon_0. \tag{19.13}$$

Множество E является компактом, поэтому из последовательности $\{x'^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x'^{(m_k)}\}$, предел ζ которой принадлежит компакту E, $\lim\limits_{k \to \infty} x'^{(m_k)} = \zeta \in E$. Точка ζ является точкой прикосновения замкнутого множества E, и поэтому $\zeta \in E$.

Рассмотрим теперь подпоследовательность $\{x''^{(m_k)}\}$ последовательности $\{x''^{(m)}\}$, соответствующую подпоследовательности $\{x'^{(m_k)}\}$. Докажем, что $\lim\limits_{k \to \infty} x''^{(m_k)} = \zeta$. Действительно,

$$\rho(x''^{(m_k)}, \zeta) \leqslant \rho(x''^{(m_k)}, x'^{(m_k)}) + \rho(x'^{(m_k)}, \zeta) < \frac{1}{m_k} + \rho(x'^{(m_k)}, \zeta),$$

и так как $\rho(x'^{(m_k)}, \zeta) \to 0$ и $\frac{1}{m_k} \to 0$ при $k \to \infty$, то и $\rho(x''^{(m_k)}, \zeta) \to 0$ при $k \to \infty$, а это и означает, что $x''^{(m_k)} \to \zeta$ при $k \to \infty$.

В силу непрерывности функции f в точке $\zeta \in E$ имеем $f(x'^{(m_k)}) \to f(\zeta)$ и $f(x''^{(m_k)}) \to f(\zeta)$ при $k \to \infty$, и, следовательно,

$$f(x''^{(m_k)}) - f(x'^{(m_k)}) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{19.14}$$

Но, по способу построения последовательностей $\{x'^{(m)}\}$ и $\{x''^{(m)}\}$ (см. (19.13))

$$|f(x''^{(m_k)}) - f(x'^{(m_k)})| \geqslant \varepsilon_0 \tag{19.15}$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$.

Очевидно, условия (19.14) и (19.15) противоречат друг другу. Это и доказывает теорему 5. □

Справедливость следствия вытекает из того, что отрезок является компактом.

Отметим, что при отказе от требования, чтобы множество, на котором рассматриваемая функция непрерывна, было компактом она может уже не оказаться равномерно непрерывной. Например, функция $f(x) = 1/x$ определена и непрерывна на интервале $(0, 1)$, который хотя и является ограниченным множеством, но не является замкнутым; эта функция не будет равномерно непрерывной на интервале $(0; 1)$. Функция $y = x^2$ определена и непрерывна на всей вещественной оси, которая хотя и является замкнутым множеством, но не является ограниченным. Эта функция также неравномерно непрерывна на вещественной оси. Доказательство того, что функции $y = 1/x$ и $y = x^2$ неравномерно непрерывны на указанных множествах будет дано в этом пункте несколько дальше.

Часто оказывается более удобным другой подход к понятию равномерной непрерывности, а именно с помощью так называемого м о д у л я н е п р е р ы в н о с т и функции.

Определение 10. *Пусть функция f определена на множестве $E \subset R^n$. Ее модулем непрерывности $\omega(\delta; f; E)$ называется функция*

$$\omega(\delta; f; E) = \sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} [f(x'') - f(x')], \quad x' \in E, \quad x'' \in E. \tag{19.16}$$

Часто для краткости вместо $\omega(\delta; f; E)$ пишется просто $\omega(\delta; f)$ или даже $\omega(\delta)$.

Нетрудно убедиться, что

$$\sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} [f(x') - f(x'')] = \sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} |f(x'') - f(x')|, \quad x' \in E, \quad x'' \in E,$$

т. е. в правой части равенства (19.16) под знаком верхней грани можно писать или не писать знак абсолютной величины, от чего величина указанной верхней грани не меняется.

Очевидно, также, что $\omega(\delta) \geqslant 0$.

Далее, если $0<\delta_1<\delta_2$, то

$$\{y : y=f(x'')-f(x'),\ \rho(x',\ x'')\leqslant\delta_1\}\subset$$
$$\subset\{y : y=f(x'')-f(x'),\ \rho(x',\ x'')\leqslant\delta_2\},$$

откуда

$$\sup_{\rho(x',\ x'')\leqslant\delta_1}[f(x'')-f(x')]\leqslant\sup_{\rho(x',\ x'')\leqslant\delta_2}[f(x'')-f(x')]$$

(так как при расширении числового множества его верхняя грань может только возрастать), т. е. $\omega(\delta_1)\leqslant\omega(\delta_2)$, иначе говоря, *модуль непрерывности является монотонно возрастающей функцией.*

Задача 17. Пусть G — область в R^n. Доказать, что если $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{\omega(\delta;\ f;\ G)}{\delta}=0$, то f — постоянная функция.

Примеры 1. Найдем $\omega(\delta)$ для функции $y=x^2$, $-\infty<x<+\infty$. Для любого $\delta>0$ и произвольного фиксированного x_0 имеем:

$$\omega(\delta;\ x^2)=\sup_{|x''-x'|\leqslant\delta}\left(x''^2-x'^2\right)\geqslant x_0^2-(x_0-\delta)^2=2x_0\delta-\delta^2. \qquad (19.17)$$

Это неравенство верно для всех x_0 и так как при любом фиксированном δ имеем $\lim\limits_{x_0\to+\infty}(2x_0\delta-\delta^2)=+\infty$, то из (19.17) получаем

$$\omega(\delta;\ x^2)=+\infty,\ -\infty<x<+\infty.$$

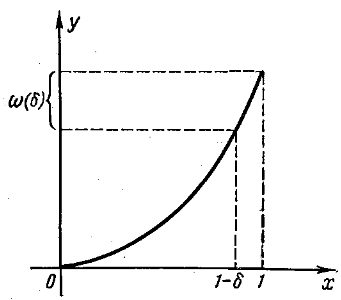


Рис. 87

Найдем теперь модуль непрерывности функции $y=x^2$ на отрезке $[0;\ 1]$. Интуитивно ясно, что поскольку модуль непрерывности $\omega(\delta)$ описывает согласно определению наибольший рост функции на отрезке длины δ, то чтобы получить модуль непрерывности функции в данном случае следует взять отрезок $[1-\delta,\ \delta]$, на котором функция $f(x)=x^2$, $0\leqslant x\leqslant 1$, растет наиболее быстро: модуль непрерывности совпадает с приращением функции на этом отрезке (рис. 87):

$$\omega(\delta)=f(1)-f(1-\delta)=1-(1-\delta)^2=2\delta-\delta^2.$$

Аналитически это проверяется следующим образом. Пусть $0\leqslant x''-\delta\leqslant x'\leqslant x''\leqslant 1$, тогда, в силу неравенства

$$x''^2-x'^2\leqslant x''^2-(x''-\delta)^2=2x''\delta-\delta^2\leqslant 2\delta-\delta^2,$$

получим

$$\omega(\delta;\ x^2)=\sup_{|x''-x'|\leqslant\delta}\left(x''^2-x'^2\right)\leqslant 2\delta-\delta^2, \qquad (19.18)$$

но если взять $x'=1-\delta$, $x''=1$, то

$$\omega(\delta;\ x^2)=\sup_{|x''-x'|\leqslant\delta}\left(x''^2-x'^2\right)\geqslant 1-(1-\delta)^2=2\delta-\delta^2. \qquad (19.19)$$

Из оценок (19.18) и (19.19) следует, что на отрезке $[0;\ 1]$ имеем $\omega(\delta;\ x^2)=2\delta-\delta^2$.

2. Рассмотрим функцию $y=\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$. С одной стороны

$$\omega\left(\delta;\ \sin\frac{1}{x}\right)=\sup_{|x''-x'|\leqslant\delta}\left|\sin\frac{1}{x''}-\sin\frac{1}{x'}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{|x''-x'|\leqslant\delta}\left(\left|\sin\frac{1}{x''}\right|+\left|\sin\frac{1}{x'}\right|\right)\leqslant\sup_{|x''-x'|\leqslant\delta}2=2.$$

С другой стороны, выбрав $x''_n=1/\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $x'_n=1/\left(\frac{3}{2}\pi+2\pi n\right)$ и зафиксировав n так, что $|x'_n|\leqslant\delta/2$, $|x''_n|\leqslant\delta/2$, и поэтому $|x''_n-x'_n|\leqslant|x'_n|+|x''_n|\leqslant\delta$, будем иметь

$$\omega\left(\delta;\ \sin\frac{1}{x}\right)\geqslant\sin\frac{1}{x''_n}-\sin\frac{1}{x'_n}=1+1=2.$$

Из полученных оценок следует, что $\omega\left(\delta;\ \sin\frac{1}{x}\right)=2$.

3. Рассмотрим функцию $y=\frac{1}{x}$ на интервале $(0;\ 1)$.

При любом фиксированном δ, $0<\delta<1$, имеем

$$\omega\left(\delta;\ \frac{1}{x}\right)=\sup_{|x''-x'|\leqslant\delta}\left(\frac{1}{x''}-\frac{1}{x'}\right)=\sup_{x'\leqslant x''\leqslant x'+\delta}\left(\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0+\delta}\,{}^{*)}=\frac{\delta}{x_0(x_0+\delta)}\to+\infty \text{ при } x_0\to+0.$$

Таким образом, $\omega(\delta;\ 1/x)=+\infty$.

В терминах модуля непрерывности равномерная непрерывность может быть выражена следующим образом.

Теорема 6. *Для того чтобы функция f, определенная на множестве E, была равномерно непрерывной на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(\delta;\ f;\ E)=0. \qquad (19.20)$$

Доказательство. Пусть функция f равномерно непрерывна на множестве E, т. е. выполнены условия (19.10) — (19.11); тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta_\varepsilon>0$, что если $x'\in E$, $x''\in E$, $\rho(x',\ x'')<\delta_\varepsilon$, то $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon/2$. Отсюда явствует, что для

---

*) Здесь x_0 таково, что $0<x_0<1-\delta$.

любого $\delta < \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\sup_{\rho(x',\, x'') \leqslant \delta} |f(x'') - f(x')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

т. е. если $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, то $\omega(\delta) < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$. Необходимость условия (19.20) доказана.

Докажем достаточность условия (19.20). Выполнение условия (19.20) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что если $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, то $\omega(\delta;\, f;\, E) < \varepsilon$. Выберем какое-либо из указанных δ. Тогда при $\rho(x',\, x'') < \delta$, $x' \in E$, $x'' \in E$, будем иметь (см. (19.16)): $|f(x'') - f(x')| \leqslant \omega(\delta,\, f,\, E) < \varepsilon$, т. е. функция f равномерно непрерывна на E. $\square$

Мы видели выше, что на отрезке $[0,\, 1]$ $\omega(\delta;\, x^2) = 2\delta - \delta^2$, поэтому $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega(\delta;\, x^2) = 0$, и, следовательно, функция x^2 равномерно непрерывна на этом отрезке, как и должно быть согласно теореме 5. Модуль непрерывности той же функции x^2, но уже рассматриваемой на всей вещественной оси, так же как и модули непрерывности $\omega\left(\delta;\, \sin\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$, и $\omega\left(\delta;\, \frac{1}{x}\right)$, $0 < x < 1$, не стремятся к нулю при $\delta \to +0$ и поэтому все эти функции не являются равномерно непрерывными на соответствующих множествах.

Упражнения. 5. Доказать теорему Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте, с помощью леммы Гейне — Бореля (см. теорему 4 в п. 18.3 и замечание после нее).

6. Непрерывная на отрезке $[a,\, b]$ функция $f(x)$ называется *кусочно линейной*, если существует такое разбиение отрезка $[a,\, b]$ на конечное число отрезков $[x_{i-1},\, x_i]$,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

что функция $f(x)$ линейна на каждом отрезке $[x_{i-1},\, x_i]$, $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1$.

Доказать, что всякая непрерывная на отрезке $[a,\, b]$ функция $F(x)$ может быть с любой степенью точности аппроксимирована кусочно линейной функцией, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такая кусочно линейная функция $f(x)$, что для всех $x \in [a,\, b]$ выполняется неравенство $|F(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Введем теперь еще некоторые понятия, полезные для дальнейшего.

Определение 11. *Пусть* $E \subset R^n$. Число (конечное или бесконечное) $d = \sup\limits_{x' \in E,\, x'' \in E} \rho(x',\, x'')$ *называется диаметром множества* E *и обозначается через* $d(E)$.

Упражнения 7. Пусть Q^n — n-мерный шар с центром в некоторой точке $x^{(0)}$ и радиусом $r: Q^n = O(x^{(0)},\, r)$, тогда $d(Q^n) = 2r$. Доказать, что множество E ограничено тогда и только тогда, когда $d(E) < +\infty$.

Определение 12. *Пусть функция* f *определена на множестве* E; *тогда значение модуля непрерывности* $\omega(\delta;\, f;\, E)$ *при* δ, *равном диаметру множества* E, *т. е.* $\omega(d(E);\, f;\, E)$ *называется колеба-*

нием функции f на множестве E и обозначается через $\omega(f; E)$ или просто $\omega(f)$.

Очевидно, что в силу (19.16)

$$\omega(f; E)=\sup_{x'\in E,\, x''\in E}[f(x'')-f(x')].$$

Замечание. Из сказанного в этом и предыдущем параграфах, в частности, видно, что в ряде вопросов, относящихся к функциям многих переменных, всю их специфику можно в достаточной мере усмотреть уже в двумерном или трехмерном случае. Благодаря удачно выбранным определениям и обозначениям доказательства теорем автоматически переносятся со случая $n=2$ на произвольный n-мерный случай иногда лишь приводя к некоторому техническому усложнению записи. Случай же $n=2$ имеет преимущество геометрической наглядности и более простой записи, когда в ней участвуют координаты точек. Поэтому для большей ясности и простоты изложения мы, как правило, будем подробно рассматривать лишь случаи $n=2$ или $n=3$, а в случае произвольного n — лишь формулировать соответствующие результаты или даже только отмечать возможность их обобщения на случай произвольного n. Если же при рассмотрении какого-либо вопроса при $n>3$ возникают какие-либо специфические трудности, то этот вопрос будет детально рассматриваться в общем случае.

§ 20. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

20.1. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ЧАСТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

Рассмотрим сначала случай функций трех переменных.

Определение 1. *Пусть в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) задана функция $u=u(x, y, z)$. Фиксируя переменные y и z: $y=y_0$, $z=z_0$, получим функцию одного переменного x: $u=u(x, y_0, z_0)$. Обычная производная* (см. п. 9.1) *этой функции в точке $x=x_0$ называется частной производной функции $u(x, y, z)$ в точке (x_0, y_0, z_0) по x и обозначается через $\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$.*

Таким образом,

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}\stackrel{\text{def}}{=}\left.\frac{du(x, y_0, z_0)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Заметим, что обозначение частной производной по переменной x через $\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$ традиционно. Правильнее было бы писать $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, так как $\frac{\partial u}{\partial x}$ является единым символом, обозначающим новую функцию, значение которой и рассматривается в точке (x_0, y_0, z_0).

Если вспомнить определение обычной производной $\frac{du}{dx}$ (см. п. 9.1) то, согласно этому определению, можно написать

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x},$$

или, если ввести обозначение $u(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0) = \Delta_x u$, ($\Delta_x u$ — приращение функции по переменной x),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}.$$

Аналогично вводятся частные производные по y и z:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = \frac{du(x_0, y, z_0)}{dy}\bigg|_{y=y_0},$$

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = \frac{du(x_0, y_0, z)}{dz}\bigg|_{z=z_0},$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\partial z},$$

где $\Delta_y u$ и $\Delta_z u$ — приращения функции соответственно по переменным y и z.

По аналогии с функциями одной переменной линейные функции $\frac{\partial u}{\partial x} dx$, $\frac{\partial u}{\partial y} dy$, $\frac{\partial u}{\partial z} dz$ переменных dx, dy, dz, называемых *дифференциалами независимых переменных*, называются *частными дифференциалами* функции $u(x, y, z)$ соответственно по переменным x, y, z и обозначаются через

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad d_z u = \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Аналогичные определения имеют место для любого числа переменных.

Если функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, то по определению

$$\frac{\partial f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{\partial x_i} \overset{\text{def}}{=} \frac{df(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{dx_i}\bigg|_{x_i = x_i^{(0)}}, \tag{20.1}$$

или, что то же, опуская обозначение аргумента, $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} y}{\Delta x_i}$, где $\Delta_{x_i} y = f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Для обозначения частной производной $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ применяются также обозначения y_{x_i} или f_{x_i}.

Частный дифференциал $d_{x_i}y$ определяется по формуле

$$d_{x_i}y \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial y}{\partial x_i}dx_i, \quad -\infty < dx_i < +\infty, \tag{20.2}$$

и тем самым является линейной функцией переменной dx_i, называемой *дифференциалом независимой переменной* x_i. Здесь везде $i=1, 2 \ldots, n$. В случае $n=1$ частная производная совпадает с обычной производной, а частный дифференциал — с обычным дифференциалом.

Подчеркнем, что $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ — единый символ, т. е. в нем числитель и знаменатель не имеют самостоятельного смысла. С другой стороны, частная производная $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, конечно, может быть записана и в виде частного двух дифференциалов: $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{d_{x_i}y}{dx_i}$.

Из определения частных производных, как обычных производных при условии фиксирования всех переменных, кроме одной, по которой берется производная, следует, что при вычислении частных производных можно пользоваться правилами вычисления обычных производных. Пусть, например, требуется найти производную $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=xye^{x/y}$. Для этого, зафиксировав в этой формуле x, получим функцию одной переменной y; вычисляя ее производную, будем иметь:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{x/y} + xye^{x/y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x(y-x)\,e^{x/y}}{y}.$$

В заключение этого пункта отметим, что из непрерывности в данной точке функции n переменных не вытекает существование у нее в этой точке частных производных. Соответствующий пример в случае $n=1$ был приведен ранее (см. п. 9.2). Важно заметить, что при $n \geqslant 2$ из существования даже всех частных производных в некоторой точке не следует непрерывность функции в этой точке *). Это естественно, поскольку условие непрерывности функции нескольких переменных в точке накладывает определенное ограничение на ее поведение при приближении к этой точке по в с е м направлениям, в то время как существование частных производных в точке означает, что функция удовлетворяет определенным условиям при приближении к указанной точке лишь в направлении координатных осей.

Чтобы в этом наглядно убедиться, рассмотрим функцию $f(x, y)$, равную 0, если $xy=0$, и 1, если $xy \neq 0$. Очевидно,

---

*) Напомним, что при $n=1$, т. е. для функции одной переменной из существования в точке производной вытекает и непрерывность функции в этой точке (см. п. 9.2).

$f(x, 0) \equiv f(0, y) \equiv 0$, и, следовательно,

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

Однако эта функция разрывна в точке $(0, 0)$, так как, например, ее предел вдоль прямой $y = x$ при $(x, y) \to (0, 0)$ равен 1, а $f(0, 0) = 0$.

Более того, существуют функции, имеющие частные производные во всех точках и все-таки разрывные. Примером такой функции является функция

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2+y^2) & \text{при} \quad x^2+y^2 > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = y = 0. \end{cases} \tag{20.3}$$

Эта функция имеет частные производные во всей плоскости и разрывна в точке $(0, 0)$ (почему?).

20.2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ В ТОЧКЕ

Рассмотрим сначала случай функций двух переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой δ-окрестности $U = U(M_0; \delta)$ точки $M_0 = (x_0, y_0)$ и пусть (рис. 88)

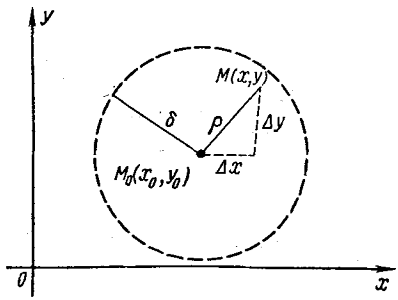


Рис. 88

$$M = (x, y) \in U(M_0; \delta),$$
$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0$$

и, значит,

$$\rho = \rho(M, M_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta.$$

Пусть, наконец, $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

Обычно Δz называется *полным приращением функции*; это название объясняется тем, что здесь, вообще говоря, все независимые переменные получают приращения, отличные от нуля.

Определение 2. *Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если существуют два такие числа A и B, что*

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y), \tag{20.4}$$

где при $\rho \neq 0$:

$$\alpha(\Delta x; \Delta y) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\,\rho, \quad \lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0\,^{*)}. \tag{20.5}$$

---

*) Напомним, что, согласно сделанному соглашению, запись $\lim\limits_{\rho \to 0} f$ равносильна записи $\lim\limits_{M \to M_0} f$, где $\rho = \rho(M, M_0)$.

Из (20.4) следует, что $\alpha(0, 0)=0$.

Вместе с тем заметим, что значение функции $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ в точке $(0, 0)$ не определено формулой (20.5).

Определение 3. *В случае дифференцируемости функции f в точке (x_0, y_0) линейная функция $A\,\Delta x+B\,\Delta y$ переменных Δx и Δy называется полным дифференциалом, или просто дифференциалом, функции f в точке (x_0, y_0) и обозначается через dz.*

Таким образом $dz=A\,\Delta x+B\,\Delta y$.

Вместо Δx и Δy употребляются также равнозначные обозначения dx и dy, т. е. пишут $dz=A\,dx+B\,dy$. Из (20.5) следует, что

$$\lim_{M\to M_0}\frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho}=0. \tag{20.6}$$

Функции $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, обладающие свойством (20.6), будем обозначать по аналогии с функциями одного переменного через $o(\rho)$ при $\rho\to 0$ *). Применяя это обозначение, определение дифференцируемости можно переписать в виде

$$\Delta z=A\,\Delta x+B\,\Delta y+o(\rho),\quad \rho\to 0. \tag{20.7}$$

Лемма 1. *Условие* (20.5) *эквивалентно условию*

$$\alpha(\Delta x, \Delta y)=\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x+\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y,\quad \rho\neq 0, \tag{20.8}$$

где $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_1=\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_2=0$.

Доказательство. Пусть выполнено условие (20.5), т. е. $\alpha=\varepsilon\rho$, $\rho\neq 0$, где $\varepsilon\to 0$ при $\rho\to 0$; тогда

$$\alpha=\varepsilon\rho=\varepsilon\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=$$
$$=\varepsilon\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\Delta x+\varepsilon\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\Delta y=\varepsilon_1\,\Delta x+\varepsilon_2\,\Delta y,$$

где $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon\,\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$, $\varepsilon_2=\dfrac{\varepsilon\,\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$. Замечая, что $\left|\Delta x/\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right|\leqslant 1$, $\left|\Delta y/\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right|\leqslant 1$, имеем $|\varepsilon_1|\leqslant|\varepsilon|$, $|\varepsilon_2|\leqslant|\varepsilon|$, откуда $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_1=\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_2=0$, т. е. получилось представление функции α в виде (20.8).

Пусть, наоборот, выполнено условие (20.8), т. е. $\alpha=\varepsilon_1\,\Delta x+\varepsilon_2\,\Delta y$, $\rho\neq 0$, где $\varepsilon_1\to 0$ и $\varepsilon_2\to 0$ при $\rho\to 0$; тогда

$$\alpha=\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\varepsilon_1+\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\varepsilon_2\right)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\varepsilon\rho,$$

---

*) Вообще для функций α и β многих переменных $\alpha=o(\beta)$ при $x\to x^{(0)}$, $x\in E\subset R^n$, $x^{(0)}\in R^n$, если $\alpha(x)=\varepsilon(x)\beta(x)$, где $\lim\limits_{x\to x^{(0)},\ x\in E}\varepsilon(x)=0$. В этом случае будем говорить, что функция α является бесконечно малой по сравнению с функцией β при $x\to x^{(0)}$, $x\in E$.

где $\varepsilon = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_1 + \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_2$ и, значит, $|\varepsilon| \leqslant |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$; поэтому $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$. Таким образом получилось представление функции α в виде (20.5). □

Теорема 1. *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то она непрерывна в этой точке.*

Действительно, так как $|\Delta x| \leqslant \rho$ и $|\Delta y| \leqslant \rho$, то из формул (20.4) и (20.5) следует, что $\Delta z \to 0$ при $\rho \to 0$, что и означает непрерывность функции f в точке (x_0, y_0). □

Теорема 2. *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) и $dz = A\,dx + B\,dy$ — ее дифференциал в этой точке, то в точке (x_0, y_0) у функции f существуют все частные производные и*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = A, \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = B. \tag{20.9}$$

Таким образом,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{20.10}$$

Доказательство. Согласно определению дифференцируемости (см. (20.4) и (20.8)),

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

где

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0. \tag{20.11}$$

Полагая $\Delta y = 0$, получим $\Delta z = \Delta_x z = A\,\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = 0$ (это следует из (20.11), поскольку, полагая $\Delta y = 0$, получим $\rho = |\Delta x|$). Отсюда

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \varepsilon_1, \tag{20.12}$$

где при $\Delta x \to 0$ правая часть стремится к пределу, равному A, поэтому и левая часть при $\Delta x \to 0$ имеет тот же предел, а это и означает (см. (20.1)), что в точке (x_0, y_0) существует частная производная $\frac{\partial z}{\partial x} = A$. Аналогично, полагая в (20.4) $\Delta x = 0$ и переходя к пределу, при $\Delta y \to 0$ получим $\frac{\partial z}{\partial y} = B$. □

Следствие. *Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то она имеет единственный дифференциал.*

Единственность дифференциала непосредственно вытекает из формул (20.9), так как частные производные в данной точке определяются однозначно.

Вспоминая определения частных дифференциалов (см. (20.2)), формулу (20.10) можно переписать в виде

$$dz = d_x z + d_y z,$$

т. е. полный дифференциал функции (когда он существует) является суммой ее частных дифференциалов.

Заметим, что утверждение, обратное теореме 2, не имеет места: существуют функции, имеющие все частные производные во всех точках плоскости, но не дифференцируемые в некоторой точке. Примером может служить функция (20.3), приведенная в конце предыдущего пункта: в точке (0, 0) эта функция не непрерывна, откуда в силу теоремы 1 вытекает, что в точке (0, 0) она и не дифференцируема.

Из сказанного следует, что не всегда выражение $d_x z + d_y z$, когда оно имеет смысл, является полным дифференциалом функции. Связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием в этой точке частных производных сложнее, чем связь между дифференцируемостью и существованием производной у функции одной переменной.

Сформулируем достаточные условия в терминах свойств частных производных для дифференцируемости функции.

Теорема 3. *Пусть функция $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) имеет частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, которые непрерывны в самой точке (x_0, y_0); тогда функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в этой точке.*

Следствие. *Если функция $z = f(x, y)$ имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем эти частные производные непрерывны в самой точке (x_0, y_0), то и функция $z = f(x, y)$* также *непрерывна в этой точке.*

Доказательство теоремы. Обозначим через $U(\delta)$ δ-окрестность точки (x_0, y_0), в которой определена вместе со своими частными производными f_x и f_y функция f. Выберем Δx и Δy так, чтобы $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U(\delta)$. Замечая, что

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)],$$

применим к выражениям, стоящим в квадратных скобках и являющимся приращениями функций только по одной переменной, формулу конечных приращений Лагранжа (см. п. 11.2). Это возможно, поскольку функция $f(x, y_0 + \Delta y)$, рассматриваемая как функция одного переменного x, имеет на отрезке с концами в точках x_0 и $x_0 + \Delta x$ производную (являющуюся частной производной по x функции f), поэтому она и непрерывна на указанном отрезке. Таким образом, функция $f(x, y_0 + \Delta y)$ удовлетворяет всем условиям, при которых была доказана формула конечных приращений Лагранжа. Аналогично проверяется и возможность применения формулы Лагранжа к функции $f(x_0, y)$, рассматриваемой как функция одного переменного y, на отрезке с концами в точках y_0 и $y_0+\Delta y$. Тогда

$$\Delta z = f_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\Delta y)\,\Delta x + f_y(x_0,\ y_0+\theta_2\Delta y)\,\Delta y,$$
$$0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1, \tag{20.13}$$

причем θ_1 и θ_2 зависят, конечно, от выбора точки $(x_0+\Delta x,$ $y_0+\Delta y)$, т. е. от Δx и Δy.

Если

$$f_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f_x(x_0,\ y_0) = \varepsilon_1,$$
$$f_y(x_0,\ y_0+\theta_2\Delta y) - f_y(x_0,\ y_0) = \varepsilon_2, \tag{20.14}$$

то в силу непрерывности частных производных f_x и f_y в точке $(x_0,\ y_0)$ имеем

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon_1 = \lim_{\rho\to 0}\varepsilon_2 = 0. \tag{20.15}$$

Подставив (20.14) в (20.13), получим:

$$\Delta z = f_x(x_0,\ y_0)\,\Delta x + f_y(x_0,\ y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y, \tag{20.16}$$

что в силу выполнения условий (20.15) и означает дифференцируемость функции f в точке $(x_0,\ y_0)$ (см. (20.4) и (20.8)). □

Следствие из теоремы вытекает из того обстоятельства, что функция, дифференцируемая в некоторой точке, является и непрерывной в ней (см. теорему 1).

Теорема 3 имеет важное значение, связанное с тем, что понятие дифференцируемости функции играет первостепенную роль в ряде разделов теории функций многих переменных. Однако непосредственная проверка дифференцируемости функции (например, для выяснения возможности применения тех или иных теорем) часто бывает затруднительна, в то время как проверка непрерывности частных производных, для вычисления которых имеется удобный аналитический аппарат, оказывается проще.

Определение 4. *Функция, имеющая в некоторой точке (или соответственно на некотором множестве) непрерывные частные производные, называется непрерывно дифференцируемой в этой точке (соответственно на этом множестве).*

Сопоставим определение дифференцируемости функции (определение 2) и определение непрерывной дифференцируемости (определение 4). Дифференцируемость функции в точке означает существование в этой точке дифференциала, т. е. справедливость для этой точки формулы (20.4). Непрерывная же дифференцируемость функции в точке означает непрерывность в этой точке ее частных производных. Таким образом, дифференцируемость функции связана с понятием дифференциала, а непрерывная дифференцируемость — с понятием частных производных. Вместе с тем из непрерывной дифференцируемости в точке (на открытом множестве) следует дифференцируемость в этой точке (соответственно на этом множестве); в этом состоит утверждение теоремы 3.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые дополнительные свойства функций ε_1 и ε_2 из формулы (20.16).

Определение 5. *Пусть A и B — два плоских множества, $A \subset R^2_{xy}$, $B \subset R^2_{uv}$ и пусть функция $f = f(x, y, u, v)$ определена для $(x, y) \in A$, $(u, v) \in B$.*

Функция f называется равномерно стремящейся к нулю на множестве A переменных x, y при $(u, v) \to (u_0, v_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех (u, v), удовлетворяющих условию $\sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2} < \delta$, $(u, v) \neq (u_0, v_0)$ и всех $(x, y) \in A$ выполняется условие $|f(x, y, u, v)| < \varepsilon$.

Общее определение равномерного стремления функции к пределу будет дано в п. 39.4.

Теорема 4. *Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывно дифференцируема на открытом множестве $G \subset R^2$. Тогда*

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \qquad (20.17)$$

где функции $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x, y, \Delta x, \Delta y)$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(x, y, \Delta x, \Delta y)$ равномерно стремятся к нулю при $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ на любом компакте $A \subset G$.

Доказательство. Пусть A — компакт, лежащий в G. Тогда замкнутые множества A и $R^2 \setminus G$ не пересекаются, и так как A ограничено (см. п. 18.3, теорему 3), то $d = \rho(A, R^2\setminus G) > 0$ (см. лемму 7, п. 18.2).

Множество $A_{d/2} = \{(x, y) : \rho((x, y), A) \leqslant d/2\}$ содержится во множестве G и является компактом (см. лемму 11 п. 18.3).

Пусть теперь $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < d/2$; тогда при $(x_0, y_0) \in A$ получим (см. (20.13)):

$$(x_0 + \theta_1 \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \in A_{d/2},\quad (x_0,\ y_0 + \theta_2 \Delta y) \in A_{d/2},$$

и, следовательно, согласно формулам (20.14), имеем неравенства

$$|\varepsilon_1| \leqslant \omega(\rho;\ f_x;\ A_{d/2}),\qquad |\varepsilon_2| \leqslant \omega(\rho;\ f_y;\ A_{d/2}),$$

где в их правых частях стоят соответственно модули непрерывности функций f_x и f_y. Из непрерывности частных производных f_x и f_y на компакте $A_{d/2}$ следует, что

$$\lim_{\rho \to 0} \omega(\rho;\ f_x;\ A_{d/2}) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\rho \to 0} \omega(\rho;\ f_y;\ A_{d/2}) = 0.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\rho < \delta$ выполняются неравенства

$$\omega(\rho;\ f_x;\ A_{d/2}) < \varepsilon,\quad \omega(\rho;\ f_y;\ A_{d/2}) < \varepsilon.$$

Следовательно, для всех $\rho < \delta$ и всех $(x_0, y_0) \in A$ справедливы неравенства

$$|\varepsilon_1| < \varepsilon,\quad |\varepsilon_2| < \varepsilon.$$

Это и означает равномерное стремление к нулю при $\rho\to 0$ функций ε_1 и ε_2 на компакте A. □

Замечание. В предположениях теоремы 2 приращение функции Δz представимо также в виде

$$\Delta z = f_x(x,\ y)\,\Delta x + f_y(x,\ y)\,\Delta y + \varepsilon\rho, \tag{20.18}$$

где $\varepsilon=\varepsilon(x,\ y,\ \Delta x,\ \Delta y)$ равномерно на каждом компакте $A\subset G$ стремится к нулю, когда $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$. Для доказательства достаточно в формуле (20.18) положить $\varepsilon=\varepsilon_1\frac{\Delta x}{\rho}+\varepsilon_2\frac{\Delta y}{\rho}$ (сравните с доказательством леммы в начале этого пункта).

Все определения и утверждения этого пункта переносятся и на случай функции $y=f(x)$, $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, любого числа n переменных, определенной в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Например, условие дифференцируемости в данной точке $x^{(0)}$ в общем случае выглядит так:

$$\Delta y = A_1\,\Delta x_1+\ldots+A_n\,\Delta x_n+o(\rho),\quad \rho\to 0, \tag{20.19}$$

где

$$\rho=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2},\ \Delta y=f(x_1,\ \ldots,\ x_n)-f(x_1^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)}),$$

$$\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

причем в этом случае $A_i=\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Таким образом, если функция f дифференцируема, то

$$f(x)=f(x^{(0)})+A_1(x_1-x_1^{(0)})+\ldots+A_n(x_n-x_n^{(0)})+o(\rho),$$

$$\rho\to 0, \tag{20.20}$$

т. е. функция f в окрестности данной точки с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $\rho=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^{(0)})^2}$, равна линейной функции *). Образно говоря, дифференцируемость функции в данной точке означает, что функция f «почти линейна» в окрестности этой точки; точный смысл выражения «почти линейна» заключается в формуле (20.20).

В случае, когда имеет место (20.19), линейная функция $\frac{\partial f(x)}{\partial x}\Delta x_1+\ldots+\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\Delta x_n$ от переменных $\Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n$ (здесь вместо $x^{(0)}$ написано x) называется *дифференциалом функции*, или, подробнее, полным дифференциалом функции в данной точке x и обо-

*) Функции вида $y=c_0+c_1x_1+\ldots+c_nx_n$, где c_i — постоянные, $i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, называются *линейными функциями* n переменных, или, что то же самое, *линейными функциями точки* $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)\in R^n$.

значается $df(x)$:

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\Delta x_n. \tag{20.21}$$

Дифференциал, как и всякая линейная функция n переменных определен на всем n-мерном пространстве R^n. Таким образом, *формула* (20.21) *имеет смысл для всех значений* Δx_i, $i=1, 2, \ldots, n$, в то время как *формула* (20.19) — *только для тех, которые не выводят за область определения функции* f.

Переменные Δx_i называются также *дифференциалами переменных* x_i и обозначаются dx_i, $i=1, 2, \ldots, n$. В этих обозначениях дифференциал функции f записывается в виде

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}dx_n.$$

Очевидно, что $\Delta f(x) = df(x) + o(\rho)$ при $\rho \to 0$.

Если же рассматривать дифференциал и при изменении точки $x=(x_1, \ldots, x_n)$, то он будет уже являться функцией от $2n$ переменных: $x_1, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n$.

Теоремы 1 — 4 настоящего параграфа очевидным образом обобщаются на функции n переменных, поэтому мы не будем приводить их формулировки.

20.3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 5. *Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ одного переменного t дифференцируемы в точке t_0 (что, как мы знаем, эквивалентно существованию у них производных в точке t_0,* см. п. 9.2) *и пусть $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$. Если функция $z=f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то сложная функция $z=f(x(t), y(t))$ определена в некоторой окрестности точки t_0, имеет в t_0 производную и эта производная вычисляется по формуле*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \tag{20.22}$$

или, подробнее,

$$\frac{df(x(t_0), y(t_0))}{dt} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{dx(t_0)}{dt} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{dy(t_0)}{dt}.$$

Доказательство. Функция $f(x, y)$, согласно определению дифференцируемости функции, определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Из дифференцируемости же функций $x(t)$ и $y(t)$ следует их непрерывность в точке t_0. Поэтому, согласно замечанию к теореме 2 в п. 19.4, в некоторой окрестности точки t_0 определена сложная функция $f(x(t), y(t))$.

Дифференцируемость функции $z=f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) означает, что ее полное приращение $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$

представимо в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \varepsilon \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \tag{20.23}$$

где функция $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ такова, что $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$. Здесь, как обычно, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Доопределим функцию $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ в точке $(0, 0)$, положив $\varepsilon(0, 0) = 0$ (ср. с доказательством теоремы 4 в п. 9.7). Так, доопределенная функция $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ является непрерывной в точке $(0, 0)$.

Пусть теперь Δt — приращение переменной t и $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$, $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$. Разделим обе части равенства (20.23) на Δt:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} \pm \varepsilon \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}. \tag{20.24}$$

При $\Delta t \to 0$ в силу непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ в точке t_0 получим $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, а значит, и $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \rho = 0$. Отсюда, по теореме о композиции непрерывных функций (см. п. 19.3), $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$. Заметим, наконец, что существует конечный предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}.$$

Из всего этого следует, что при $\Delta t \to 0$ правая часть формулы (20.24) стремится к конечному пределу $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ $(t = t_0)$, поэтому и левая часть этой формулы, т. е. $\frac{\Delta z}{\Delta t}$, стремится к тому же пределу, а это и означает, что в точке t_0 существует производная $\frac{dz}{dt}$ и выражается формулой (20.22). □

Отметим, что, хотя в окончательную формулу производной сложной функции (20.22) входят только частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x, y)$, по ходу доказательства существенно использовалось более сильное свойство этой функции, чем существование частных производных, а именно ее дифференцируемость.

Упражнение 1. Показать, что при отказе от требования дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0), а лишь при предположении существования в этой точке частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ и существования производных $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ в точке t_0 формула (20.22), вообще говоря, несправедлива и, более того, сложная функция $f[x(t), y(t)]$ (предполагается, что она имеет смысл), вообще говоря, не имеет производной в точке t_0.

Следствие. *Пусть функции $x=x(u, v)$ и $y=y(u, v)$ определены в некоторой окрестности точки (u_0, v_0), а функция $z=f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0=y(u_0, v_0)$.*

Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) и если в точке (u_0, v_0) существуют частные производные $\frac{\partial x}{\partial u}$ и *$\frac{\partial y}{\partial u}$, то в этой точке (u_0, v_0) существует и частная производная $\frac{\partial z}{\partial u}$ сложной функции $z=f[x(u, v), y(u, v)]$, причем*

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{20.25}$$

Доказательство. Зафиксируем $v=v_0$ и рассмотрим сложную функцию $z=f[x(u, v_0), y(u, v_0)]$ одного переменного u. Согласно теореме 5, эта функция определена в некоторой окрестности точки u_0 и имеет в этой точке производную. Таким образом, производная $\frac{\partial z}{\partial u}$ в точке (u_0, v_0) существует и из формулы (20.22) вытекает формула (20.25). □

Аналогично, если в точке (u_0, v_0) существуют частные производные $\frac{\partial x}{\partial v}$ и $\frac{\partial y}{\partial v}$, то у сложной функции $z=f(x(u, v), y(u, v))$ существует в точке (u_0, v_0) частная производная по v и для нее справедлива формула

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Рассмотрим общий n-мерный случай. *Пусть в окрестности точки $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ задана функция $y=y(x_1, \ldots, x_n)$, а на некотором множестве $E_t \subset R^k$ — функции $x_i=x_i(t_1, \ldots, t_k)$, $i=1, 2, \ldots, n$, такие, что $x_i(t_1^{(0)}, \ldots, t_k^{(0)})=x_i^{(0)}$. Если функция $y=y(x)=y(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и если в точке $t^{(0)}=(t_1^{(0)}, \ldots, t_k^{(0)})$ существуют частные производные $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $j=1, 2, \ldots, k$, $i=1, 2, \ldots, n$, то сложная функция $y(x(t))$ имеет в точке $t^{(0)}$ частные производные $\frac{\partial y}{\partial t_j}$, $j=1, 2, \ldots, k$, причем*

$$\frac{\partial y}{\partial t_j}=\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}, \; j=1, 2, \ldots, k. \tag{20.26}$$

Заметим, что если при сделанных предположениях частные производные $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, n$, непрерывны ссответственно в точках $x^{(0)}$ и $t^{(0)}$, то в силу формулы (20.26) частные производные сложной функции $y=y(x(t))$ также будут непрерывными в точке $t^{(0)}$, и, следовательно, она будет дифференцируемой в этой точке (см. теорему 3 п. 20.2). В следующем пункте будет доказана дифференцируемость композиций функций при более слабых предположениях.

20.4. ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ПЕРВОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ВЫБОРА ПЕРЕМЕННЫХ. ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Теорема 6. *Пусть функция $f(x)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, а функции $x_i=x_i(t)$, $t=(t_1, \ldots, t_k)$, $i=1, 2, \ldots, n$, определены в некоторой окрестности точки $t^{(0)}=(t_1^{(0)}, \ldots, t_k^{(0)})$ и пусть $x_i^{(0)}=x_i(t^{(0)})$, $i=1, 2, \ldots, n$.*

Тогда, если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$, а функции $x_i=x_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, дифференцируемы в точке $t^{(0)}$, то сложная функция $f(x(t))=f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ определена в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$ и дифференцируема в этой точке. При этом дифференциал df функции $f(x(t))$ в точке $t^{(0)}$ может быть записан в следующих двух видах:

$$df=\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f(x(t^{(0)}))}{\partial t_j} dt_j, \tag{20.27}$$

$$df=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i, \text{ где } dx_i=dx_i(t)\big|_{t=t^{(0)}}. \tag{20.28}$$

Доказательство. Поскольку функции $x_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, определены в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$ и поскольку из дифференцируемости функций следует их непрерывность, то сложная функция $f(x(t))$ определена в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$ (см. замечание к теореме 2 п. 19.4). Зафиксируем какие-либо два числа $\delta>0$ и $\eta>0$ так, чтобы функция $f(x)$ была бы определена на η-окрестности точки $x^{(0)}$, функции $x_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, на δ-окрестности точки $t^{(0)}$ и чтобы $(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in U(x^{(0)}; \eta)$ при $t \in U(t^{(0)}; \delta)$. Тогда на окрестности $U(t^{(0)}; \delta)$ определена сложная функция $f(x(t))$. Возможность выбора таких чисел δ и η (очевидно δ зависит от выбора η) была показана в п. 19.4. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$; поэтому при $r=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}<\eta$ имеем

$$\Delta f=f(x_1^{(0)}+\Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)}+\Delta x_n)-f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \Delta x_i+\varepsilon r, \tag{20.29}$$

где $\varepsilon=\varepsilon(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ таково, что $\lim\limits_{r\to 0}\varepsilon=0$. Положим $\varepsilon(0, \ldots, 0)=$ $=0$. Доопределенная таким образом функция ε является непрерывной в точке $(0, \ldots, 0)$.

В силу дифференцируемости функций $x_i=x_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, в точке $t^{(0)}$ при $\rho=\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{k}\Delta t_j^2}<\delta$ получим:

$$\Delta x_i=x_i(t_1^{(0)}+\Delta t_1, \ldots, t_k^{(0)}+\Delta t_k)-x_i(t_1^{(0)}, \ldots, t_k^{(0)})=$$
$$=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j}\Delta t_i+\varepsilon_i\rho, \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{20.30}$$

где $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_i=0$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Подставив значения Δx_i из (20.30) в (20.29), получим

$$\Delta f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j}\Delta t_j+\beta, \tag{20.31}$$

где

$$\beta=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\varepsilon_i\rho+\varepsilon r. \tag{20.32}$$

Переставив порядок суммирования в (20.31), будем иметь

$$\Delta f=\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j}\right)\Delta t_j+\beta. \tag{20.33}$$

Теперь, для того чтобы доказать, что сложная функция $f(x(t))$ дифференцируема в точке $t^{(0)}$, надо показать, что $\beta=o(\rho)$ при $\rho\to 0$. В силу непрерывности функций $x_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$ в точке $t^{(0)}$ имеем $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta x_i=0$ и, следовательно, $\lim\limits_{\rho\to 0}r=0$. Отсюда в силу теоремы о суперпозиции непрерывных функций (см. п. 19.2)

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon=0. \tag{20.34}$$

Из (20.32) имеем:

$$\frac{\beta}{\rho}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\varepsilon_i+\varepsilon\frac{r}{\rho}. \tag{20.35}$$

Докажем, что отношение r/ρ ограничено. Использовав формулы (20.30), получим

$$\frac{r}{\rho}=\frac{1}{\rho}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}\leqslant\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i|^{*)}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left|\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j}\right|\frac{|\Delta t_j|}{\rho}+\varepsilon_i.$$

Поскольку $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_i=0$, то в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$ функции ε_i ограничены, и так как $|\Delta t_j|/\rho\leqslant 1$, то функция r/ρ ограничена в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$. Поэтому из (20.34) и (20.35) следует, что $\lim\limits_{\rho\to 0}(\beta/\rho)=0$, т. е. что $\beta=o(\rho)$ при $\rho\to 0$. Дифференцируемость сложной функции $f(x(t))$ в точке $t^{(0)}$ доказана.

Из формулы (20.31) имеем

$$df(x^{(0)})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t}\Delta t_j.$$

Отсюда, замечая, что $\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j}\Delta t_j=dx_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, мы и получаем формулу (20.28). Формула же (20.27) является обычной формулой для дифференциала (см. (20.21)). □

Формально обе записи (20.27) и (20.28) дифференциала функции выглядят одинаково: в обеих формулах дифференциал равен сумме произведений частных производных на соответствующие дифференциалы, однако в случае формулы (20.27) dt_j являются дифференциалами независимых переменных, а в случае формулы (20.28) dx_i суть дифференциалы функций. Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала* относительно выбора переменных.

Замечание 1. Из формулы (20.33) следует, что

$$df(x^{(0)})=\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j}\right)dt_j.$$

Но коэффициенты дифференциала функции при дифференциалах независимых переменных определяются однозначно и равны соответствующим частным производным, поэтому, сравнивая эту фор-

---

*) Мы воспользовались неравенством $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|$, которое является следствием очевидного неравенства $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|\right)^2$ (см. (18.11)).

мулу с формулой (20.27), получим

$$\frac{\partial f}{\partial t_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j},$$

т. е. снова формулу (20.26). Правда, на этот раз она выведена при более сильных ограничениях, чем раньше; на этот раз предполагалась дифференцируемость функций $x_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, в то время как в п. 20.3 — лишь существование у этих функций соответствующих частных производных.

Замечание 2. Если функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $x_i=x_i(t)$, $t=(t_1, \ldots, t_k)\in R^k$, $i=1, 2, \ldots, n$, имеют непрерывные частные производные соответственно в точке $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\in R^n$ и в точке $t^{(0)}\in R^k$, где $x_i^{(0)}=x_i(t^{(0)})$, то эти функции, согласно теореме 3 п. 20.2 (см. также замечания в конце п. 20.2 об общем случае), дифференцируемы в указанных точках и потому удовлетворяют условиям теоремы 6. Следовательно, для них справедливо утверждение этой теоремы и вытекающая из него формула для вычисления частной производной сложной функции (см. предыдущее замечание).

Инвариантность формы первого дифференциала широко используется при практическом вычислении дифференциалов и частных производных. Если u и v суть функции какого-то числа переменных, то с помощью формулы (20.28) легко получаются следующие:

$$\begin{aligned}&1.\quad d(u+v)=du+dv.\\&2.\quad d(uv)=v\,du+u\,dv. \qquad\qquad (20.36)\\&3.\quad d(u/v)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}.\end{aligned}$$

Докажем, например, формулу 3. Пусть $z=u/v$, где $u=u(x_1, \ldots, x_n)$, $v=v(x_1, \ldots, x_n)$. Замечая, что $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{v}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{u}{v^2}$, согласно формуле (20.28) имеем

$$dz=\frac{1}{v}\,du-\frac{u}{v^2}\,dv=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}. \quad \square$$

При вычислении конкретных дифференциалов функций многих переменных можно широко использовать формулы, полученные нами раньше (см. § 9) для дифференциалов элементарных функций. Заметим для этого следующее: пусть функция $y=y(x_1, \ldots, x_n)$ представлена в виде $y=F(u)$, где $u=u(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда при соответствующих предположениях, согласно формуле (20.28),

$$dy=F'(u)\,du,\quad u=u(x_1, \ldots, x_n).$$

Например, если $y=\sin u$, то $dy=\cos u\,du$; если $y=\ln u$, то $dy=\frac{du}{u}$; если $y=\operatorname{arctg} u$, то $dy=\frac{du}{1+u^2}$ и т. д. (подчеркнем, что здесь везде $u=u(x_1, \ldots, x_n)$).

В качестве примера найдем дифференциал функции $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$. Вычисления производятся в следующем порядке:

$$dz=d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x^2}{x^2+y^2}\,\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Если требуется вычислить частные производные функции многих переменных, особенно если надо вычислить все производные, то целесообразно вычислить дифференциал этой функции, тогда искомыми частными производными будут коэффициенты при соответствующих дифференциалах.

Так, в рассмотренном примере $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, беря коэффициенты при dx и dy из найденного нами выражения для дифференциала, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Замечание 3. *Всякую функцию $y=f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных можно рассматривать в определенном смысле и как функцию от любого числа $n+m>n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ $\ldots, x_{n+m}$.* Именно, для всякой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, заданной на множестве $E\subset R^n$, определим функцию $f^*(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+m})$ на множестве точек $(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+m})$ таких, что $(x_1, \ldots, x_n)\in E$, $-\infty<x_j<+\infty$, $j=n+1, \ldots, n+m$, следующим образом:

$$f^*(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+m})=f(x_1, \ldots, x_n). \tag{20.37}$$

Таким образом, рассмотрение функции n переменных, как функции $n+m$ переменных, означает фактически продолжение по формуле (20.37) функции f с множества ее определения $E\subset R^n$ на множество

$$E^*=\{(x_1, \ldots, x_{n+m}):(x_1, \ldots, x_n)\in E,\ -\infty<x_j<+\infty,\ j=n+1, \ldots, n+m\},$$

лежащее уже в пространстве R^{n+m}. Для функции f^*, полученной после такого продолжения, имеем

$$\frac{\partial f^*(x_1, \ldots, x_{n+m})}{\partial x_i}=\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i},\quad i=1, 2, \ldots, n,$$

$$\frac{\partial f^*(x_1, \ldots, x_{n+m})}{\partial x_j}=0,\quad j=n+1, \ldots, n+m,$$

поэтому

$$df^*(x_1, \ldots, x_{n+m}) = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f^*(x_1, \ldots, x_{n+m})}{\partial x_i} dx_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} dx_i = df(x_1, \ldots, x_n).$$

Например, когда мы говорим, что функцию одного переменного $z = f(x)$, определенную на некотором интервале (a, b), мы рассматриваем как функцию двух переменных $f(x) = F(x, y)$, $x \in (a, b)$, $-\infty < y < +\infty$, это означает, что функция $F(x, y)$ является постоянной, равной $f(x)$ на любой прямой, проходящей через точку x интервала (a, b) оси Ox параллельно оси Oy. При этом

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = f'(x), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0, \quad dF(x, y) = df(x),$$
$$a < x < b, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Полезно для дальнейшего отметить в известном смысле обратный факт. Пусть $E \subset R^n$. Если функция $f^*(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ определена на множестве

$$E^* = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) : (x_1, \ldots, x_n) \in E, \quad a < x_{n+1} < b\}$$

и

$$\frac{\partial f^*(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} = 0 \text{ на } E^*, \tag{20.38}$$

то существует функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных, определенная на множестве E и такая, что $f^*(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ для всех $(x_1, \ldots, x_n) \in E$, $x_{n+1} \in (a, b)$. В этом случае говорят, что функция f^* фактически *не зависит от переменной* x_{n+1}. В самом деле, из условия (20.38) следует, что функция f^* постоянна как функция x_{n+1} (см. следствие 1 теоремы 3 из п. 11.2) при фиксированной точке $(x_1, \ldots, x_n)$, т. е. зафиксировав какое-либо $c \in (a, b)$ для любой точки $(x_1, \ldots, x_n) \in E$ и $x_{n+1} \in (a, b)$, имеем $f^*(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f^*(x_1, \ldots, x_n, c)$. Искомая функция f, очевидно, определяется равенством $f(x_1, \ldots, x_n) = f^*(x_1, \ldots, x_n, c)$, причем она не зависит от выбора $c \in (a, b)$.

Из вышесказанного, в частности, следует, что формулы (20.36) для дифференциалов остаются справедливыми и в том случае, когда функции u и v зависят от разного числа переменных, так как всегда в силу указанного приема этот случай можно свести к вышеразобранному случаю функций одного числа переменных.

20.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Для большей геометрической наглядности и для того, чтобы не вводить новых понятий, в этом пункте ограничимся рассмотрением функций двух переменных.

Рассмотрим функцию $z=f(x, y)$, определенную на плоском открытом множестве G, т. е. множестве G, лежащем на плоскости R^2. Пусть $(x_0, y_0)\in G$ и пусть в точке (x_0, y_0) существует частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$. Ее геометрический смысл сразу получается из определения частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ как обычной производной функции $f(x, y)$ по x при фиксированном y и из геометрического смысла обычной производной (см. п. 9.3). В самом деле, возьмем замкнутый круг Q радиуса r с центром в точке (x_0, y_0) и лежащий в G*). Пусть γ — кривая, заданная представлением

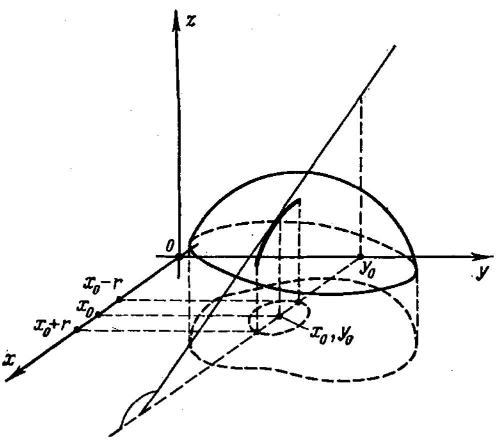


Рис. 89

$$z=f(x, y_0),\quad y=y_0,$$
$$x_0-r\leqslant x\leqslant x_0+r,$$

т. е. кривая, которая получается сечением графика функции $z=f(x, y)$, $(x, y)\in Q$ плоскостью $y=y_0$ (рис. 89). Как известно, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}=\left.\frac{df(x, y_0)}{dx}\right|_{x=x_0}=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол, образованный касательной к графику функции $f(x, y_0)$ в точке $(x_0, f(x_0, y_0))$ с осью Ox, т. е. угол, образованный касательной к кривой γ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ с осью Ox.

Таким образом,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}=\operatorname{tg}\alpha$$

— в этом и состоит геометрический смысл частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}$.

---

*) Такой круг Q всегда существует. Действительно, в силу определения открытого множества существует такая δ-окрестность U точки (x_0, y_0), что $U\subset G$. Тогда замкнутый круг Q радиуса $\delta/2$ с центром в точке (x_0, y_0) будет заведомо лежать в G.

Аналогично устанавливается и геометрический смысл частной производной $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ как тангенса угла наклона, образованного касательной в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ к кривой, получающейся сечением графика функции $z=f(x, y)$, $(x, y) \in Q$ плоскостью $x=x_0$, с осью Oy.

Что же касается геометрического смысла дифференциала, то из формул (20.20) и (20.9) для нашего случая, т. е. при $n=2$, получим

$$f(x, y)=z_0+A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\rho), \ \rho \to 0, \tag{20.39}$$
$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \qquad z_0=f(x_0, y_0).$$

Уравнение

$$z=z_0+A(x-x_0)+B(y-y_0) \tag{20.40}$$

является уравнением плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и не параллельной оси Oz. Как мы знаем, коэффициенты A и B однозначно определяются из соотношения (20.39), причем

$$A=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad B=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \tag{20.41}$$

и, значит, плоскость (20.40) однозначно определена соотношением (20.39). Эта плоскость называется *касательной плоскостью* к графику функции $z=f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0).

Таким образом, мы пришли к следующему определению.

Определение 6. *Касательной плоскостью к графику функции $f(x, y)$ в данной точке называется такая плоскость, что разность ее аппликаты и значения функции $f(x, y)$ является величиной, бесконечно малой по сравнению с ρ при $\rho \to 0$.*

В силу (20.41) уравнение этой касательной плоскости имеет вид

$$z-z_0=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y-y_0). \tag{20.42}$$

В дальнейшем (см. т. 2, п. 50.4) мы познакомимся с другим подходом к понятию касательной плоскости.

Полагая $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, правую часть уравнения (20.42) запишем в виде

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y.$$

Это есть обычная запись дифференциала dz функции $z=f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) и поэтому уравнение (20.42) можно переписать:

$$z-z_0=dz.$$

Таким образом, геометрически *полный дифференциал функции в точке* (x_0, y_0) *равен приращению аппликаты плоскости, касательной к графику функции* (рис. 90).

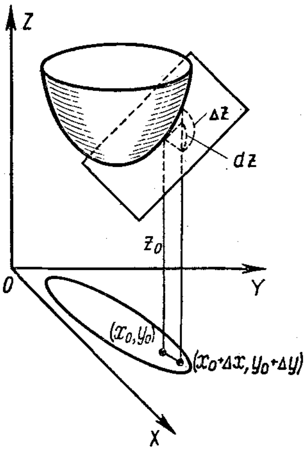


Рис. 90

Более подробно, дифференциал

$$dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta y,$$

$$\Delta x = x - x_0, \qquad \Delta y = y - y_0$$

совпадает с приращением в точке $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ аппликаты плоскости касательной к графику функции в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

20.6. ГРАДИЕНТ ФУНКЦИИ

Пусть функция $F(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), а кривая γ такова, что функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, с помощью которых она задана в параметрической форме, удовлетворяют уравнению

$$F(x, y) = 0,$$

т. е. посредством его осуществлено неявное задание кривой γ. Пусть $t_0 \in [a, b]$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, а функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы при $t = t_0$.

Дифференцируя при $t = t_0$ тождество $F(x(t), y(t)) = 0$, $a \leqslant t \leqslant b$, получим

$$x'_t \frac{\partial F}{\partial x} + y'_t \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad t = t_0,$$

т. е. векторы $(x'(t_0), y'(t_0))$ и $\left(\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$ ортогональны. Вектор $a = (x'_t, y'_t)$ в случае, когда он не равен нулю, является, как известно, касательным вектором к кривой γ в точке $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$. Вектор $\left(\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$ называется *градиентом функции* F в точке (x_0, y_0) и обозначается через $\operatorname{grad} F(x_0, y_0)$. Из сказанного следует, что градиент функции F ортогонален касательной к кривой, неявно задаваемой уравнением $F(x, y) = 0$. Прямая, перпендикулярная касательной к плоской кривой и лежащая в одной плоскости с ней, называется (см. п. 17.3) *нормалью* к данной кривой.

Таким образом, градиент функции F коллинеарен нормали в соответствующей точке к кривой, задаваемой уравнением $F(x, y) = 0$.

В случае дифференцируемой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ ее градиентом называется вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

20.7. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Частные производные от функции являются производными «в направлениях координатных осей». Естественно поставить вопрос об определении и вычислении производной по любому фиксированному направлению. Прежде всего определим это понятие. Проведем рассмотрение этого вопроса на примере функций трех переменных.

Пусть функция f определена в δ-окрестности $U(M_0;\ \delta)$ точки $M_0 \in R^3$, пусть $M_1 \in U(M_0;\ \delta)$. Проведем через точки M_0 и M_1 прямую. За положительное направление на этой прямой возьмем направление вектора $\boldsymbol{l} = \overrightarrow{M_0M_1}$, т. е. направление от точки M_0 к точке M_1. Для всякой точки M этой прямой обозначим через M_0M ориентированную длину отрезка с началом в точке M_0 и концом в точке M, т. е. длину этого отрезка со знаком плюс, если вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет то же направление, что и вектор $\boldsymbol{l}$ и со знаком минус в противном случае.

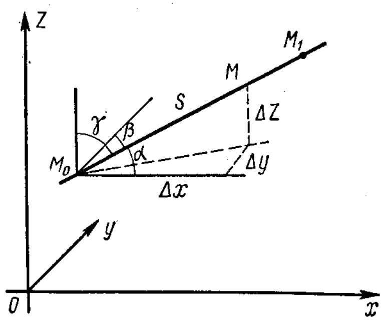


Рис. 91

Определение 7. *Предел* $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}$, *если он существует, называется производной функции* f *в точке* M_0 *по направлению вектора* $\boldsymbol{l}$ *и обозначается* $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}$.

Пусть теперь в пространстве R^3 зафиксирована некоторая система координат x, y, z. Пусть $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $M = (x, y, z)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$ и $s = M_0M$. Найдем связь между координатами точки M и ориентированной длиной s отрезка M_0M. Пусть α, β и γ — углы, образованные вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$ соответственно с осями Ox, Oy и Oz, тогда (рис. 91)

$$x - x_0 = s\cos\alpha, \quad y - y_0 = s\cos\beta, \quad z - z_0 = s\cos\gamma.$$

Вдоль прямой M_0M функция f является функцией одной переменной s, а именно

$$f(x, y, z) = f(x_0 + s\cos\alpha,\ y_0 + s\cos\beta,\ z_0 + s\cos\gamma).$$

Производная этой функции по s (если она, конечно, существует) и является *производной функции* f *в точке* M_0 *по направлению вектора* $\overrightarrow{M_0M_1}$.

Заметим, что направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ через координаты точек $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и $M_1 =$

$=(x_1, y_1, z_1)$ определяются следующим образом:

$$\cos\alpha = \frac{x_1-x_0}{\rho}, \quad \cos\beta = \frac{y_1-y_0}{\rho}, \quad \cos\gamma = \frac{z_1-z_0}{\rho}, \tag{20.43}$$
$$\rho = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}.$$

Вычисляется производная по направлению по правилу дифференцирования сложной функции. Пусть функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0, z_0) и пусть

$$x = x_0 + s\cos\alpha, \quad y = y_0 + s\cos\beta, \quad z = z_0 + s\cos\gamma. \tag{20.44}$$

Согласно определению производной по направлению и формуле производной сложной функции имеем:

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial l} = \lim_{M\to M_0} \frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M} =$$
$$= \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0+s\cos\alpha,\ y_0+s\cos\beta,\ z_0+s\cos\gamma)-f(x_0, y_0, z_0)}{s} =$$
$$= \left.\frac{df}{ds}\right|_{s=0} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\frac{dz}{ds},$$

но из (20.44) следует, что

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma, \tag{20.45}$$

поэтому окончательно

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial s} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma. \tag{20.46}$$

Это и есть искомая формула.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0, z_0). Тогда в этой точке функция f имеет производную по любому направлению и эта производная находится по формуле* (20.46).

Любопытно отметить, что из полученной формулы (20.46) для производной по направлению сразу не видно, что эта производная не зависит от выбора системы координат. Эта независимость непосредственно следует из самого определения производной по направлению, откуда в свою очередь вытекает, что правая часть формулы (20.46) не зависит от выбора прямоугольной декартовой системы координат, а определяется только точками M_0 и M_1, или, что то же, точкой M_0 и вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$.

Вектор с координатами $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}$, $\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}$ называется, как мы знаем, *градиентом* функции $f(M)$ в точке M_0 и обозначается $\operatorname{grad} f$. (Мы уже встречались с понятием градиента функций при рассмотрении кривых, заданных неявным образом: см. п. 20.6.)

Таким образом, если $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — координатные орты, то

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{20.47}$$

Часто оказывается удобным использование символического вектора Гамильтона *)

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

называемого *наблой*. Набла является обозначением определенной операции, которую следует произвести над той или иной функцией.

Для функции f, по определению, полагаем

$$\nabla f = \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Формально это равенство можно рассматривать как «произведение» вектора ∇ на число f. Итак, $\operatorname{grad} f$ и ∇f являются обозначениями одного и того же выражения.

Пусть теперь вектор $\boldsymbol{l}$ единичный, и, следовательно, $\boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. С помощью градиента формула для производной функции f по направлению вектора $\boldsymbol{l}$ запишется следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial f}{\partial z} = \boldsymbol{l}\operatorname{grad} f, \tag{20.48}$$

где в правой части стоит скалярное произведение вектора $\boldsymbol{l}$ и $\operatorname{grad} f$. Отсюда, поскольку $\boldsymbol{l}$ — единичный вектор,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\operatorname{grad} f|\cos\varphi,$$

где φ — угол, образованный вектором $\boldsymbol{l}$ и $\operatorname{grad} f$. Из этой формулы видно, что в случае, если в данной точке

$$|\operatorname{grad} f|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \neq 0,$$

то производная дифференцируемой функции по направлению достигает наибольшего значения в **единственном** направлении, а именно том, при котором $\cos\varphi = 1$, т. е. в направлении градиента. Из этого следует, что для заданной функции точки $f(M)$ градиент в каждой точке однозначно определяется самой функцией, а не зависит от выбора системы координат, как это могло бы сначала показаться из формулы (20.47).

---

*) У. Гамильтон (1805—1865) — ирландский математик.

Действительно, прежде всего, если градиент равен нулю в одной декартовой системе координат, то он равен нулю и в каждой другой подобной системе координат. В самом деле, равенство нулю градиента в некоторой точке, согласно формуле (20.48), равносильно равенству нулю в этой точке производных по всем направлениям, последнее же не зависит от выбора декартовой системы координат, поскольку от этого выбора не зависит производная по направлению. Если же градиент не равен нулю, то его независимость от выбора декартовой системы координат следует непосредственно из доказанного выше его геометрического смысла: направление градиента показывает направление наибыстрейшего роста функции (оно единственно), а его величина равна производной в этом направлении.

Возьмем теперь любую непрерывно дифференцируемую кривую без особых точек, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0), и такую, что вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ является ее касательным вектором. Обозначим через s переменную длину дуги этой кривой, отсчитываемую от точки M_0 в таком направлении, чтобы вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ давал положительное направление на касательной. Если $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ — представление этой кривой, то, как мы знаем (см. п. 16.5), $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{ds} = \cos\beta$, $\frac{dx}{ds} = \cos\gamma$, т. е. также выполняется (20.45). Поэтому если взять производную в точке (x_0, y_0, z_0) от дифференцируемой функции $f(x, y, z)$ по данной кривой, т. е. при $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, иначе говоря, взять производную от функции $f(x(s), y(s), z(s))$ по s, то для этой производной будет справедлива формула (20.46). Это означает, что производная в некоторой точке от функции вдоль кривой, проходящей через указанную точку, совпадает с производной по направлению касательной к этой кривой в той же точке.

Все сказанное переносится на функции любого числа n переменных ($n \geqslant 2$). Сформулируем лишь определение производной по направлению.

Пусть в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ определена функция $f(x)$ и пусть $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ — точка этой окрестности, $x^{(1)} \neq x^{(0)}$.

Проведем прямую через точки $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$. Ее уравнение имеет вид (см. (18.44) и (18.45))

$$x_i = x_i^{(0)} + s\cos\alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad -\infty < s < +\infty,$$

где $\cos\alpha_i$ — направляющие косинусы вектора

$$\boldsymbol{l} = (x_1^{(1)} - x_1^{(0)}, \ \ldots, \ x_n^{(1)} - x_n^{(0)}).$$

Рассмотрим заданную функцию f только на точках этой прямой, т. е. рассмотрим функцию

$$f(x_1^{(0)} + s\cos\alpha_1, \ \ldots, \ x_n^{(0)} + s\cos\alpha_n).$$

Производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ *функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *в точке* $x^{(0)}$ *в направлении точки* $x^{(1)}$, *или, что то же, в направлении* $(\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$, *определяется как производная* $\frac{\partial f}{\partial s}$ *от сложной функции* $f(x_1^{(0)} + s\cos\alpha_1, \ldots, x_n^{(0)} + s\cos\alpha_n)$.

В случае, если функция f дифференцируема в точке $x^{(0)}$, то, согласно формуле для производной сложной функции, имеем в этой точке

$$\frac{\partial f}{\partial l} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cos\alpha_n.$$

Вспоминая определение градиента функции n переменных (см. п. 20.6), с помощью скалярного произведения n-мерных векторов (см. (18.32)) формулу производной функции f по направлению вектора $\boldsymbol{l}$ для любого n-мерного пространства R^n можно записать в виде (20.48), т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\operatorname{grad} f, \boldsymbol{l}_0),$$

где $\boldsymbol{l}_0 = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$.

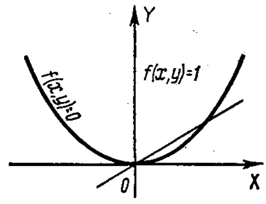


Рис. 92

В заключение отметим, что из того, что функция в некоторой точке имеет производные по всем направлениям, не следует, что функция в этой точке дифференцируема. Например, функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y \neq x^2, \quad \text{или } x = y = 0, \\ 1, & \text{если} \quad y = x^2, \quad x^2 + y^2 > 0, \end{cases}$$

имеет в точке (0, 0) по любому направлению производную, равную нулю. Однако, в точке (0, 0) функция f разрывна и, тем более, не дифференцируема (рис. 92).

20.8. ПРИМЕР ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

С помощью частных производных можно изучать поведение функций многих переменных, подобно тому как исследовалось поведение функции одной переменной с помощью ее производной. Вопросом отыскания наибольших и наименьших значений мы займемся позже в § 40 и § 43, здесь же ограничимся одним примером изучения функции двух переменных, который позволит нам получить одно полезное для дальнейшего неравенство.

Покажем, что для любых $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $p > 1$ и числа q, определяемого равенством

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{20.49}$$

справедливо неравенство

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{20.50}$$

Прежде всего отметим, что уравнение (20.49), связывающее числа p и q, равносильно соотношению

$$(p-1)(q-1) = 1, \tag{20.51}$$

которое эквивалентно условию

$$q = \frac{p}{p-1}. \tag{20.52}$$

Это устанавливается непосредственной проверкой.

Для доказательства неравенства (20.50) рассмотрим функцию

$$F(x, y) = xy - \frac{x^p}{p} - \frac{y^q}{q}, \quad x \geqslant 0, \ y \geqslant 0. \tag{20.53}$$

Вычислим ее частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y - x^{p-1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x - y^{q-1}. \tag{20.54}$$

Из (20.51) следует, что при $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ уравнения

$$y - x^{p-1} = 0 \tag{20.55}$$

и

$$x - y^{q-1} = 0 \tag{20.56}$$

равносильны. Таким образом, точки (x, y), удовлетворяющие как условию $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0$, так и условию $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$ лежат на кривой (20.55) или, что то же, на кривой (20.56).

В силу (20.49) и (20.52) вдоль кривой (20.55) имеем:

$$F(x, x^{p-1}) = x^p - \frac{x^p}{p} - \frac{x^{(p-1)q}}{q} =$$

$$= x^p - \frac{x^p}{p} - \frac{x^p}{q} = x^p\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = 0. \tag{20.57}$$

Обозначим теперь через G^+ множество всех точек, расположенных выше кривой (20.55), включая саму кривую:

$$G^+ \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) : y \geqslant x^{p-1}, \ x \geqslant 0\},$$

а через G^- — множество всех точек первой координатной четверти (включая ось x-ов), лежащих ниже этой кривой:

$$G^- \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) ; 0 \leqslant y \leqslant x^{p-1}, \ x \geqslant 0\}.$$

Согласно формулам (20.54) при $(x, y) \in G^+$, $y \neq x^{p-1}$ имеем $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) > 0$, а при $(x, y) \in G^-$, $y \neq x^{p-1}$, соответственно $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ (здесь использована эквивалентность уравнений (20.55) и (20.56)). Поэтому вдоль любого отрезка, лежащего во множестве G^+ и параллельного оси x-ов (рис. 93) функция $F(x, y)$ строго возрастает. Следовательно, если $(x, y) \in G^+$, $y \neq x^{p-1}$, то (см. (20.57))

$$F(x, y) < F(x, x^{p-1}) = 0.$$

Аналогично, на любом отрезке, лежащем во множестве G^- и параллельном оси y-ов функция $F(x, y)$ также строго возрастает. Поэтому, если $(x, y) \in G$ и $y \neq x^{p-1}$, то опять

$$F(x, y) < F(x, x^{p-1}) = 0.$$

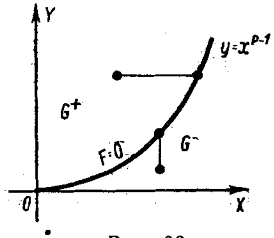


Рис. 93

Таким образом, если $y \neq x^{p-1}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, то всегда $F(x, y) < 0$.

Итак, вспоминая вид функции F (см. (20.53)), имеем: если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{при} \quad b \neq a^{p-1},$$

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{при} \quad b = a^{p-1}.$$

Тем самым неравенство (20.50) доказано.

§ 21. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

21.1. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть задана функция $f(x, y)$. Тогда каждая из ее частных производных (если они, конечно, существуют) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, которые называются также *частными производными первого порядка*, снова является функцией независимых переменных x, y и может, следовательно, также иметь частные производные. Частная производная $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ обозначается через $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ или f_{xx}, а $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ через $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ или f_{xy}. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = f_{xy}$$

и, аналогично,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = f_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

Производные f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} и f_{yy} называются *частными производными второго порядка*. Рассматривая частные производные от них, получим всевозможные частные производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial x},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x}\ \text{и т. д.}$$

Аналогично определяются частные производные произвольного порядка и для функций любого числа переменных.

Определение 1. *Частная производная* (по любой из независимых переменных) *от частной производной порядка* $m-1$, $m=1, 2, \dots$ $\dots$,[*] *называется частной производной порядка* m.

Частная производная, полученная дифференцированием по различным переменным, называется смешанной частной производной. Частная же производная, полученная дифференцированием только по одной переменной, называется чистой частной производной.

Число различных частных производных при увеличении m, очевидно, возрастает, однако оказывается, что при определенных предположениях многие из них совпадают, а именно смешанные частные производные по одним и тем же переменным не зависят от порядка дифференцирования.

Более точно имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x, y)$ *определена вместе со своими частными производными* f_x, f_y, f_{xy} *и* f_{yx} *в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0), *причем* f_{xy} *и* f_{yx} *непрерывны в этой точке; тогда*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \tag{21.1}$$

Доказательство. Пусть функция $f(x, y)$ определена вместе с производными f_x, f_y, f_{xy} и f_{yx} в δ-окрестности точки (x_0, y_0) и пусть Δx и Δy фиксированы так, что $\Delta x^2 + \Delta y^2 < \delta^2$. Будем обозначать, как и раньше (см. п. 20.1), символом Δ_x, соответственно Δ_y, приращение функций f по аргументу x, соответственно y, в точке (x_0, y_0)[**]. Введем обозначения

$$\Delta_{xy} f = \Delta_x(\Delta_y f),\quad \Delta_{yx} f = \Delta_y(\Delta_x f)$$

и покажем, что

$$\Delta_{xy} f = \Delta_{yx} f. \tag{21.2}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\Delta_{xy} f = \Delta_x(\Delta_y f) = \Delta_x[f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)] =\\ = [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)] -\\ - [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)];\end{aligned} \tag{21.3}$$

[*] *Частной производной нулевого порядка* для удобства обозначений считается сама функция.

[**] Для всякой функции $F(x, y)$ имеем:

$$\Delta_x F(x_0, y_0) = F(x_0+\Delta x, y_0) - F(x_0, y_0),$$
$$\Delta_y F(x_0, y_0) = F(x_0, y_0+\Delta y) - F(x_0, y_0).$$

аналогично,

$$\Delta_{yx}f=\Delta_y(\Delta_x f)=[f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0+\Delta y)]-$$
$$-[f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)].\qquad(21.4)$$

Сравнивая (21.3) и (21.4), убеждаемся в справедливости соотношения (21.2).

Положим теперь

$$\varphi(x)=f(x,\ y_0+\Delta y)-f(x,\ y_0);$$

тогда (21.3) можно переписать в виде

$$\Delta_{xy}f=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0).$$

В силу того, что в рассматриваемой окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ существует частная производная f_x, функция $\varphi(x)$ дифференцируема на отрезке с концами в точках x_0 и $x_0+\Delta x$. Из теоремы Лагранжа о конечных приращениях следует, что

$$\Delta_{xy}f=\varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\,\Delta x,\quad 0<\theta_1<1.$$

Но $\varphi'(x)=f_x(x,\ y_0+\Delta y)-f_x(x,\ y_0)$, а поэтому

$$\Delta_{xy}f=[f_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0)]\,\Delta x.$$

Применяя еще раз ту же теорему о конечных приращениях, но теперь уже по переменной y, будем иметь

$$\Delta_{xy}f=f_{xy}(x+\theta_1\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)\,\Delta x\Delta y,$$
$$0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1.\qquad(21.5)$$

Совершенно аналогично, полагая $\psi(y)=f(x_0+\Delta x,\ y)-f(x_0,\ y)$, имеем

$$\Delta_{yx}f=\psi(y_0+\Delta y)-\psi(y_0)=\psi'(y_0+\theta_3\Delta y)\,\Delta y=$$
$$=[f_y(x_0+\Delta x,\ y_0+\theta_3\Delta y)-f_y(x_0,\ y_0+\theta_3\Delta y)]\,\Delta y=$$
$$=f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,\ y_0+\theta_3\Delta y)\,\Delta x\Delta y,\ 0<\theta_3<1,\ 0<\theta_4<1.\qquad(21.6)$$

Согласно (21.2), левые части равенства (21.5) и (21.6) равны между собой, значит, равны и правые; приравнивая их и сокращая на $\Delta x\Delta y$ при $\Delta x\neq 0$ и $\Delta y\neq 0$, получим

$$f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)=f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,\ y_0+\theta_3\Delta y),$$
$$0<\theta_i<1,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4.\qquad(21.7)$$

В силу непрерывности частных производных f_{xy} и f_{yx} в точке x_0, y_0, переходя в (21.7) к пределу при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, получаем (21.1). $\square$

Замечание 1. Из доказанной теоремы по индукции легко следует, что если у функции n переменных смешанные частные производные m-го порядка непрерывны в некоторой точке, то они не зависят от порядка дифференцирования.

Это следует из того, что любые две последовательности дифференцирования, отличающиеся только порядком дифференцирования (т. е. такие, что по каждому фиксированному аргументу они содержат одно и то же суммарное число дифференцирований), можно перевести одну в другую конечным числом шагов, при каждом из которых меняется порядок дифференцирования только по двум переменным, а другие остаются при этом фиксированными. Таким образом, при каждом шаге фактически рассматривается изменение порядка дифференцирования у функции лишь двух переменных, т. е. в этом случае мы находимся в условиях вышедоказанной теоремы. Тем самым общий случай и сводится к случаю функций двух переменных.

Поясним это на примере. Докажем, например, что

$$f_{xyz}=f_{zyx}.$$

Согласно вышесказанному, имеем последовательно

$$f_{xyz}=(f_x)_{yz}=(f_x)_{zy}=(f_{xz})_y=(f_{zx})_y=(f_z)_{xy}=(f_z)_{yx}=f_{zyx}.$$

Замечание 2. В заключение этого пункта отметим, что, на первый взгляд, доказанная теорема может показаться не очень содержательной: для того чтобы судить о том, имеет ли место равенство $f_{xy}=f_{yx}$, надо, согласно этой теореме, проверить непрерывность функций f_{xy} и f_{yx}, а для этого надо как будто бы их знать, но если мы их уже знаем, то без всякой теоремы можем выяснить, равны они или нет. Тем не менее теорема 1 все-таки содержательна. Дело в том, что о непрерывности функции можно иногда судить на основании некоторых общих теорем, не прибегая к конкретному вычислению и исследованию самой функции. Так, мы знаем, что все элементарные функции многих переменных непрерывны в своей области определения (см. п. 19.4). С другой стороны, частные производные элементарных функций сами являются элементарными, поэтому если, например, частная производная некоторой элементарной функции определена на некоторой окрестности какой-либо точки, то эта производная и непрерывна в каждой точке указанной окрестности.

Задача 18. Докажите, что если функция $f(x, y)$ определена вместе со своими частными производными f_x, f_y и f_{xy} в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), причем частная производная f_{xy} непрерывна в точке (x_0, y_0), то в этой точке существует частная производная f_{yx} и

$$f_{yx}(x_0, y_0)=f_{xy}(x_0, y_0).$$

Функция, имеющая в некоторой точке (или, соответственно, на некотором открытом множестве) непрерывные частные производные всех порядков до некоторого порядка m включительно, называется *m раз непрерывно дифференцируемой* в этой точке (на этом множестве).

Заметим, что, для того чтобы функция имела в точке (на открытом множестве) непрерывные частные производные всех порядков до некоторого порядка m включительно, достаточно, чтобы она имела в этой точке (на этом множестве) непрерывные частные производные порядка m. Действительно, из непрерывности всех частных производных порядка m в точке (на открытом множестве), согласно следствию из теоремы 3 в п. 20.2, вытекает непрерывность всех частных производных порядка $m-1$ в рассматриваемой точке (на рассматриваемом множестве). Из непрерывности же частных производных порядка $m-1$ вытекает (в случае $m>1$) непрерывность частных производных порядка $m-2$ и т. д.

21.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Функция от $2n$ переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, или, что то же, от упорядоченной пары точек n-мерного пространства $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$ вида

$$A(x, y)=A(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)=\sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik}x_iy_k,$$

где a_{ik} — заданные числа $(i, k=1, 2, \ldots, n)$, называется *билинейной формой* от x и y. Это название объясняется тем, что если одну из точек x или y зафиксировать, то функция будет линейной относительно координат оставшейся точки.

Функция $A(x, x)$ называется *квадратичной формой*, соответствующей данной билинейной форме $A(x, y)$:

$$A(x, x)=A(x_1, \ldots, x_n; x_1, \ldots, x_n)=\sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k.$$

В случае, когда $a_{ik}=a_{ki}$, $i, k=1, 2, \ldots, n$, билинейная форма $A(x, y)$ и соответствующая ей квадратичная форма $A(x, x)$ называются *симметричными*.

Например, скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ n-мерного евклидова пространства R^n

$$\boldsymbol{xy}=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$$

является симметричной билинейной формой точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, а квадрат длины вектора $|\boldsymbol{x}|$ — соответствующей ей квадратичной:

$$|\boldsymbol{x}|^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2.$$

В дальнейшем для удобства изложения будем обозначать дифференциалы не только символом d, но и символом δ, например, писать не только

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy, \text{ но и } \delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\delta y,$$

причем дифференциал какой-либо функции будем называть также и ее первым дифференциалом.

Пусть функция $z=z(x, y)$ имеет непрерывные первые и вторые частные производные на некотором открытом плоском множестве G (такие функции, согласно определению предыдущего пункта, называются дважды непрерывно дифференцируемыми на множестве G). Из непрерывности на множестве G частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следует, как мы знаем (см. теорему 3 в п. 20.2), дифференцируемость самой функции $z(x, y)$ в каждой точке этого множества. Таким образом, для всех точек $(x, y)\in G$ определен дифференциал

$$dz=\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}dx+\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}dy.$$

Поскольку, согласно сделанным предположениям, частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ имеют на открытом множестве непрерывные частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \text{ и } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

то в силу теоремы 3 из п. 20.2 $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ также дифференцируемы на множестве G. Поэтому дифференциал dz, рассматриваемый как функция только переменных x и y, в свою очередь является дифференцируемой на множестве G функцией. Вычислим дифференциал от первого дифференциала dz, считая dx и dy фиксированными, а точку (x, y) — принадлежащей области G: $(x, y)\in G$, при этом новое дифференцирование обозначим символом δ:

$$\begin{aligned}\delta(dz)&=\delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=\left(\delta\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\left(\delta\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy=\\&=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\delta x+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\delta y\right)dx+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\delta x+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\delta y\right)dy=\\&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx\,\delta x+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(dx\,\delta y+\delta x\,dy)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\,\delta y.\end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что непрерывность вторых производных была использована не только для того, чтобы проведенные вычисления имели смысл (т. е. для того чтобы во всех рассматриваемых точках существовали дифференциалы $\delta\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\delta\frac{\partial z}{\partial y}$), но и для того, чтобы в процессе вычислений не обращать внимания на порядок дифференцирования. Действительно, было показано (см. п. 21.1), что в случае непрерывности смешанных частных производных $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$ они совпадают, поэтому для их обозначения может быть использован один и тот же символ, что и было сделано при указанных вычислениях.

В результате получилась симметричная билинейная форма переменных dx, dy, δx, δy. Полагая $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, получим соответствующую ей квадратичную форму, которая и называется *вторым дифференциалом* функции $z = z(x, y)$ в данной точке $(x, y) \in G$ и обозначается $d^2 z$.

Таким образом, мы пришли к следующему определению.

Определение 2. *Вторым дифференциалом d^2z функции $z = f(x, y)$ в данной точке называется квадратичная форма от дифференциалов dx и dy независимых переменных, соответствующая билинейной форме дифференциала от первого дифференциала, т. е.*

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\, dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \tag{21.8}$$

На практике при конкретном вычислении дифференциалов обычно совмещаются оба шага — вычисление дифференциала от дифференциала $\delta(dz)$ и приравнивание дифференциалов аргументов при последовательных дифференцированиях: $\delta x = dx$, $\delta y = dy$. Например, пусть $z = x^3 \cos^2 y$ и требуется найти $d^2 z$. Последовательно имеем:

$$dz = 3x^2 \cos^2 y\, dx - x^3 \sin 2y\, dy,$$

$$d^2 z = 6x \cos^2 y\, dx^2 - 3x^2 \sin 2y\, dx\, dy - 3x^2 \sin 2y\, dx\, dy -$$

$$- 2x^3 \cos 2y\, dy^2 = 6x \cos^2 y\, dx^2 - 6x^2 \sin 2y\, dx\, dy - 2x^3 \cos^2 2y\, dy^2.$$

Аналогичным образом при непрерывности частных производных третьего порядка можно вычислить и дифференциал от второго дифференциала $\delta(d^2 z)$, после чего, полагая $\delta x = dx$ и $\delta y = dy$, мы получим по определению третий дифференциал. По индукции определяется и дифференциал $(m+1)$-го порядка $d^{m+1} z$, $m = 1, 2, \ldots$. Именно, чтобы в предположении непрерывности у рассматриваемой функции $z(x, y)$ всех ее частных производных до порядка $m+1$ включительно на некотором открытом множестве получить ее дифференциал $d^{m+1} z$, надо взять дифференциал от дифференциала $d^m z$ порядка m: $\delta(d^m z)$ и положить $\delta x = dx$, $\delta y = dy$. При этом для дифференциалов порядка $m = 1, 2, \ldots$ справедлива формула

$$d^m z = \sum_{k=0}^{m} C_n^k \frac{\partial^m z}{\partial x^{m-k} \partial y^k}\, dx^{m-k} dy^k, \tag{21.9}$$

ее обычно символически записывают в следующем виде, более удобном для запоминания:

$$d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{\{m\}} f(x, y). \qquad (21.10)$$

Докажем формулу (21.9) по индукции. При $m=1$ она, очевидно, верна. Пусть она справедлива при некотором m, покажем ее справедливость при $m+1$. Имеем

$$\delta(d^m z) = \\ = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left(\frac{\partial^{m+1}z}{\partial x^{m-k+1}\partial y^k}\delta x dx^{m-k}dy^k + \frac{\partial^{m+1}z}{\partial x^{m-k}\partial y^{k+1}}dx^{m-k}\delta y dy^k\right).$$

Положим $\delta x = dx$ и $\delta y = dy$; тогда

$$d^{m+1}z = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m-k+1}\partial y^k}dx^{m-k+1}dy^k + \\ + \sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m-p}\partial y^{p+1}}dx^{m-p}dy^{p+1}.$$

Заменим во второй сумме индекс суммирования p на $k-1$ и заметим, что $C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k$; окончательно получим:

$$d^{m+1}z = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m-k+1}\partial y^k}dx^{m-k+1}dy^k + \\ + \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} \frac{\partial^{m+1}z}{\partial x^{m-k+1}\partial y^k}dx^{m-k+1}dy^k = \\ = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1-k}\partial y^k}dx^{m+1-k}dy^k. \quad \square$$

З а м е ч а н и е. Следует иметь в виду, что если имеется сложная функция $z=f(x, y)$, где $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, то второй дифференциал функции f, записанный через дифференциалы переменных x и y, уже не будет, вообще говоря, иметь вид (21.8), а будет, как правило, выглядеть сложнее. Таким образом, в случае дифференциала высшего порядка (т. е. порядка, большего или равного двум) не имеет места инвариантность формы дифференциала относительно выбора переменных. Чтобы в этом убедиться, вычислим в рассматриваемом случае второй дифференциал функции $z=f(x, y)$, где $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$. В силу инвариантности формы первого дифференциала имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Далее вычислим дифференциал $\delta(dz)$, считая, что $\delta u = du$, $\delta v = dv$. Использовав инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных и заметив, что дифференциал $\delta(dx)$ есть дифференциал функции и, значит, вообще говоря, не ноль, получим

$$dz^2 = \delta(dz)\Big|_{\substack{\delta u = du \\ \delta v = dv}} = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)\Big|_{\substack{\delta u = du \\ \delta v = dv}} =$$
$$= \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial z}{\partial x}\delta(dx) + \frac{\partial z}{\partial y}\delta(dy)\Big|_{\substack{\delta v = du \\ \delta u = dv}} =$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y.$$

На практике и в этом случае обе операции: вычисление дифференциалов и приравнивание дифференциалов $\delta u = du$, $\delta v = dv$ — производятся одновременно, т. е. запись $\delta(dz)\Big|_{\substack{\delta x = dx \\ \delta y = dy}}$ считается равноправной записи $d(dz)$.

Все сказанное, в частности определение дифференциалов высших порядков, естественным образом переносится на функции большего числа переменных. Отметим, что дифференциал m-го порядка от функций n переменных $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ имеет вид

$$d^m y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{(m)} y(x_1, \ldots, x_n). \qquad (21.11)$$

Доказывается эта формула аналогично формуле (21.10).

Упражнения. 1. Найти частные производные первого порядка функции $z = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{y}$.

2. Найти полный дифференциал функции $u = z^{xy}$.

3. Найти все частные производные второго порядка функции

$$u = x\sin(x+y) + y\cos(x+y).$$

4. Найти d^2z, если $z = \frac{1}{y}\ln(x^2+y^2)$.

5. Найти производные первых двух порядков от функции $w = f(u, v)$ где $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 22. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

22.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

В этом параграфе рассматривается задача отыскания функции, для которой заданная функция является производной.

Определение 1. *Пусть функция f определена на некотором конечном или бесконечном промежутке Δ числовой оси $\boldsymbol{R}$, т. е. на интервале, полуинтервале или отрезке**).

Функция F, определенная на этом же промежутке, называется первообразной функцией (или просто первообразной) функции f на Δ, если

1) *функция F непрерывна на промежутке Δ;*

2) *во всех внутренних точках x промежутка Δ функция F имеет производную и $F'(x)=f(x)$.*

Иногда вместо «первообразная данной функции» говорят «первообразная для данной функции».

Таким образом, если a — конец промежутка Δ и $a \in \Delta$, то в точке a первообразная F обязательно непрерывна. При $x=a$ она может иметь или не иметь одностороннюю производную, которая, если она существует, может и не совпадать со значением функции f в точке a.

Пример. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0<x\leqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad x=0. \end{cases}$$

Тогда функция $F(x)=x$, $0\leqslant x\leqslant 1$, является первообразной для f, так как оба условия определения 1 очевидно выполняются. Отметим, что функция $F(x)=x$, $0\leqslant x\leqslant 1$, является и первообразной для функции $f_1(x)=1$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

На этом примере видно, что одна и та же функция может быть первообразной для разных функций, однако они могут отли-

*) Если рассматриваемый промежуток является отрезком, то само собой разумеется, что он может быть только конечным.

чаться друг от друга только на концах промежутка Δ, так как во всех внутренних точках в силу условия 2) определения 1 указанные функции совпадают.

Очевидно, что если F — первообразная функции f на промежутке Δ, т. е. функция F непрерывна на Δ и во всех внутренних точках x промежутка Δ выполняется условие $F'(x)=f(x)$, то для любой постоянной C функция $F(x)+C$ также непрерывна на Δ и во внутренних точках x имеем

$$[F(x)+C]'=F'(x)+C'=f(x),$$

т. е. функция $F(x)+C$ тоже является первообразной функции f на Δ.

С другой стороны, в силу следствия 2 теоремы 3 п. 11.2, если F и Φ — две первообразные для функции f на Δ, т. е. если F и Φ — непрерывны на Δ и во всех внутренних точках x промежутка Δ выполняются равенства $F'(x)=f(x)$, $\Phi'(x)=f(x)$, и, следовательно,

$$[F(x)-\Phi(x)]'=0,$$

то рассматриваемые первообразные отличаются на Δ на некоторую постоянную C:

$$\Phi(x)=F(x)+C, \qquad x\in\Delta. \tag{22.1}$$

Итак, если функция F является какой-либо первообразной функции f на промежутке Δ, то всякая функция Φ вида (22.1) также является первообразной функции f, и всякая первообразная функции f представима в виде $F(x)+C$.

Определение 2. *Совокупность всех первообразных функции f, определенных на некотором промежутке Δ, называется неопределенным интегралом от функции f на этом промежутке и обозначается через*

$$\int f(x)\,dx. \tag{22.2}$$

Символ $\int$ называется *знаком интеграла*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*.

Если F — какая-либо первообразная функции f на E, то пишут

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C, \tag{22.3}$$

хотя было бы правильнее писать

$$\int f(x)\,dx=\{F(x)+C\}. \tag{22.4}$$

Мы, как обычно принято, будем употреблять запись (22.3). Тем самым один и тот же символ $\int f(x)\,dx$ будет обозначать как всю совокупность первообразных функции f, так и любой элемент этого множества, т. е. какую-то первообразную функции f.

Следует, однако, иметь в виду, что *всякое равенство, в обеих частях которого стоят неопределенные интегралы, есть равенство между множествами.*

Под знаком интеграла пишут для удобства не саму функцию f, а ее произведение на дифференциал dx. Это делается прежде всего для того, чтобы указать, по какой переменной ищется первообразная. Например,

$$\int x^2z\,dx = \frac{x^3z}{3}+C, \quad \int x^2z\,dz = \frac{x^2z^2}{2}+C;$$

здесь в обоих случаях подынтегральная функция равна x^2z, но ее неопределенные интегралы в рассмотренных случаях оказываются различными; в первом случае она рассматривается как функция от переменной x во втором — как функция от z.

Другие удобства, вытекающие из употребления записи $\int f(x)\,dx$, будут указаны в дальнейшем (см. замену переменного в интеграле, п. 22.3).

Если F — первообразная функции f на промежутке Δ, то согласно определению 2 в формуле (22.2) под знаком интеграла стоит дифференциал функции F во внутренних точках промежутка Δ:

$$dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Будем считать по определению, что этот дифференциал под знаком интеграла можно записывать в любом из указанных видов, т. е. согласно этому соглашению

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = \int dF(x). \tag{22.5}$$

Основные свойства неопределенного интеграла

Будем предполагать, что все рассматриваемые функции определены на одном и том же конечном или бесконечном промежутке Δ.

1°. *Пусть функция F непрерывна на промежутке Δ и дифференцируема в его внутренних точках; тогда*

$$\int dF(x) = F(x)+C,$$

или, что то же (см. (22.5)):

$$\int F'(x)\,dx = F(x)+C.$$

Справедливость этого равенства вытекает из определения неопределенного интеграла как совокупности всех функций, непрерывных на данном промежутке Δ, дифференциал которых (во внутренних точках $x \in \Delta$) стоит под знаком интеграла (см. (22.5)), и общего вида (22.1) всех первообразных данной функции.

2°. *Пусть функция f имеет первообразную на промежутке Δ; тогда для любой внутренней точки промежутка Δ имеет место равенство*

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

В данной формуле под интегралом $\int f(x)\,dx$ понимается любая первообразная F функции f. Справедливость этой формулы очевидна в силу определения первообразной.

3°. *Если функции f_1 и f_2 имеют первообразные на Δ, то и функция f_1+f_2 также имеет первообразную на Δ, причем*

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx. \qquad (22.6)$$

Это равенство выражает собой совпадение двух множеств функций и означает, что сумма каких-либо первообразных для функций f_1 и f_2 является первообразной для функции f_1+f_2 и что наоборот, всякая первообразная для функции f_1+f_2 является суммой некоторых первообразных для функций f_1 и f_2.

Свойство интеграла, выражаемое формулой (22.6) называется *аддитивностью интеграла относительно функций.*

Пусть $\int f_1(x)\,dx = F_1(x)+C_1$, $\int f_2(x)\,dx = F_2(x)+C_2$, и, следовательно, функции F_1 и F_2 непрерывны на промежутке Δ и во всех его внутренних точках x справедливы равенства $F_1'(x)=f_1(x)$, $F_2'(x)=f_2(x)$.

Положим $F=F_1+F_2$. Тогда функция F непрерывна на промежутке Δ, как сумма непрерывных функций F_1 и F_2 и для любой внутренней точки x промежутка Δ

$$F'(x) = [F_1(x)+F_2(x)]' = F_1'(x)+F_2'(x) = f_1(x)+f_2(x).$$

Это означает, что F является первообразной для функции f_1+f_2 на Δ, а поэтому

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = F(x)+C = F_1(x)+F_2(x)+C.$$

Таким образом, левая часть формулы (22.6) состоит из функций вида $F_1(x)+F_2(x)+C$, правая — из функций вида $F_1(x)+ C_1+F_2(x)+C_2$. Ввиду произвольности постоянных C, C_1 и C_2 эти совокупности совпадают.

4°. *Если функция f имеет первообразную на промежутке Δ и k — число, то функция kf также имеет на Δ первообразную, причем при $k \neq 0$ справедливо равенство*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx. \qquad (22.7)$$

Действительно, пусть $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, т. е. F — непрерывна на Δ и во внутренних точках x промежутка Δ выполняется условие $F'(x)=f(x)$. Тогда функция kF также непрерывна на этом промежутке и в его внутренних точках x имеет место равенство $[kF(x)]'=kF'(x)=kf(x)$. Это означает, что функция kF является первообразной для kf, а поэтому $\int kf(x)\,dx=kF(x)+C_1$.

Таким образом левая часть формулы (22.7) представляет собой совокупность функций вида $kF(x)+C_1$, а правая состоит из функций вида $k[F(x)+C]=kF(x)+kC$. Ввиду произвольности постоянных C и C_1 при условии $k\neq 0$ обе совокупности совпадают.

Вопрос о существовании первообразной будет изучаться несколько позже (см. п. 29.2), а теперь рассмотрим простейшие методы вычисления первообразных для элементарных функций.

Упражнение 1. Доказать, что для функции $\operatorname{sign} x$ не существует такой функции F, что для всех $x\in R$ выполнялось бы равенство $F'(x)=\operatorname{sign} x$.

22.2. ТАБЛИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции, называемая *интегрированием*, является действием, обратным дифференцированию, т. е. операции нахождения по данной функции ее производной (см. свойства 1 и 2 неопределенного интеграла в п. 22.1). Поэтому всякая формула, выражающая производную той или иной функции, т. е. формула вида $F'(x)=$ $=f(x)$, может быть обращена (записана в виде интегральной формулы):

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Используя это соображение, напишем таблицу значений ряда неопределенных интегралов, получающуюся непосредственно из соответствующей таблицы производных элементарных функций (см. § 9)

1. $\int x^\alpha\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad x>0,\ \alpha\neq -1.$

Если число α таково, что степень x^α имеет смысл и для всех $x\leqslant 0$, то формула 1 справедлива на любом промежутке. Например, формула

$$\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C$$

справедлива на всей числовой оси.

Однако для интеграла $\int\frac{dx}{x^2}$ уже нельзя написать подобную единую формулу, справедливую для всей ее области определения, т. е. для всей числовой оси, из которой исключено число ноль. В этом случае имеем:

$$\int\frac{dx}{x^2}=\begin{cases}-\frac{1}{x}+C_1 & \text{для}\quad x>0\\ -\frac{1}{x}+C_2 & \text{для}\quad x<0.\end{cases}$$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

на любом промежутке, на котором $x \neq 0$.

3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1.$

В частности, $\int e^x\,dx = e^x + C$.

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

9. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

11. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C.$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C, \quad |x| < |a|.$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C,$

причем, когда под корнем стоит $x^2 - a^2$, предполагается, что $|x| > |a|$.

Само собой разумеется, что если знаменатель подынтегральной функции обращается в ноль в некоторой точке, то написанные формулы будут справедливы лишь для тех промежутков, в которых не происходит обращения в ноль указанного знаменателя (см. формулы 2, 6, 7, 11, 13, 15). Это замечание относится и к аналогичным ситуациям, которые встретятся нам в дальнейшем и не будут каждый раз специально оговариваться.

То, что производными функций, стоящих в правых частях этих формул, являются соответствующие подынтегральные выражения, проверяется непосредственным дифференцированием (см. примеры в § 9).

С помощью интегралов 1 — 15, называемых обычно *табличными интегралами*, и доказанных выше свойств неопределенного интеграла можно выразить интегралы и от более сложных элементарных функций также через элементарные функции.

Например,

$$\int \left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx=$$
$$=5\int \cos x\,dx+2\int dx-3\int x^2 dx+\int\frac{dx}{x}-4\int\frac{dx}{x^2+1}=$$
$$=5\sin x+2x-x^3+\ln|x|-4\operatorname{arctg} x+C.$$

Отметим, что для всякого многочлена степени n существует первообразная и она является многочленом степени $n+1$, точнее,

$$\int (a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)\,dx=$$
$$=a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_2x^3}{3}+\ldots+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}+C. \quad (22.8)$$

Это следует из свойств 3 и 4 неопределенного интеграла (см. п. 22.1) и формулы 1 этого пункта.

Если первообразная некоторой функции f является элементарной функцией, то говорят, что интеграл $\int f(x)\,dx$ выражается через элементарные функции или что этот интеграл вычисляется.

22.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОДСТАНОВКОЙ (ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ)

В этом и следующем пунктах будут рассмотрены два свойства неопределенного интеграла, часто оказывающиеся полезными при вычислении первообразных элементарных функций.

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ определены соответственно на промежутках Δ_x и Δ_t, $\varphi(\Delta_t)\subset\Delta_t$, функция φ непрерывна на промежутке Δ_t и дифференцируема в его внутренних точках. Тогда, если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ на Δ_x и, следовательно, $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, то функция $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ имеет на Δ_t первообразную $F[\varphi(t)]$ и поэтому*

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt=F[\varphi(t)]+C. \quad (22.9)$$

Доказательство. Функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на Δ_x по условию теоремы $\varphi(\Delta_t)\subset\Delta_x$, поэтому имеют смысл сложные функции $f[\varphi(t)]$ и $F[\varphi(t)]$. Поскольку функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на Δ_x, она непрерывна на Δ_x, и во внутренних точках x промежутка Δ_x справедливо равенство $F'(x)=f(x)$. Функция $\varphi(t)$ по условию теоремы непрерывна на промежутке Δ_t и дифференцируема в его внутренних точках. Поэтому функция $F[\varphi(t)]$ непрерывна на Δ_t как композиция непрерывных функций, и согласно правилу дифференцирования сложных функций для всех внутренних точек промежутка Δ_t имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}F[\varphi(t)]=\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=\varphi(t)}\frac{d\varphi(t)}{dt}=f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

т. е. функция $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ имеет в качестве одной из своих первообразных функцию $F[\varphi(t)]$. Отсюда сразу и следует формула (22.9). □

Формула (22.9) часто применяется на практике при вычислении интегралов. Для удобства ее использования придадим ей несколько другой вид. Заметив, что

$$\int f(x)\,dx\,|_{x=\varphi(t)}=[F(x)+C]_{x=\varphi(t)}=F[\varphi(t)]+C,$$

перепишем формулу (22.9) в виде

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=\int f(x)\,dx\,|_{x=\varphi(t)}. \tag{22.10}$$

Отсюда видно, что можно сначала вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$, а затем вместо x подставить функцию $\varphi(t)$. Эта формула и называется обычно *формулой интегрирования подстановкой*. Ее левую часть можно записать в другом виде согласно равенству

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=\int f[\varphi(t)]\,d\varphi(t).$$

Отметим также, что формулу (22.10) бывает целесообразно использовать и в обратном порядке, т. е. справа налево. Именно, иногда бывает удобно вычисление интеграла

$$\int f(x)\,dx$$

с помощью соответствующей замены переменного $x=\varphi(t)$ свести к вычислению интеграла

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

(если этот интеграл в каком-то смысле «проще», чем исходный), т. е. использовать формулу (22.10) в виде

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt\,|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \tag{22.11}$$

Эта формула непосредственно следует из (22.10), если в обеих ее частях сделать замену переменного $t=\varphi^{-1}(x)$, где φ^{-1}, как всегда, обозначает функцию, обратную функции φ. Чтобы функция φ^{-1} существовала, в дополнение к условиям теоремы 1 достаточно, например, потребовать, чтобы на рассматриваемом промежутке функция φ была строго монотонной. В этом случае, как известно (см. п. 6.3), будет существовать однозначная обратная функция φ^{-1}.

Формула (22.11) обычно называется *формулой интегрирования заменой переменной*.

Примеры. 1. Для вычисления интеграла $\int \cos a x\,dx$ естественно сделать подстановку $u=ax$, тогда

$$\int \cos ax dx=\frac{1}{a}\int \cos u du=\frac{1}{a}\sin u+C=\frac{\sin ax}{a}+C,\quad a\neq 0.$$

2. Для вычисления интеграла $\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2}$ удобно применить подстановку $u=x^2+a^2$:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C.$$

3. При вычислении интегралов вида $\int \frac{\varphi'(x)\,dx}{\varphi(x)}$, $\varphi(x)\neq 0$, полезна подстановка $u=\varphi(x)$:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx=\int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)}=\ln|\varphi(x)|+C.$$

Например,

$$\int \operatorname{tg} x\,dx=-\int \frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x}=\int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\,\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

4. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $a\neq 0$, в случае, когда подкоренное выражение неотрицательно на некотором интервале *), легко сводятся с помощью замены переменного к табличным.

Действительно, замечая, что $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$, сделаем замену переменной $t=\sqrt{|a|}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$ и положим $d=c-\frac{b^2}{4a}$. Тогда $dx=\frac{dt}{\sqrt{|a|}}$, и в силу формулы (22.11) получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int \frac{dt}{\sqrt{\pm t^2+d}}$$

(перед t^2 стоит знак «+», если $a>0$, и знак «−», если $a<0$). Интеграл, стоящий справа, является табличным (см. формулы 14 и 15 в п. 22.2). Найдя его по соответствующим формулам и вернувшись от переменной t к x, получим искомый интеграл.

Подобным же приемом вычисляются и интегралы вида

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c},\quad a\neq 0$$

(см. об этом в п. 24.1).

---

*) В противном случае, т. е. когда подкоренное выражение отрицательно для всех $x\in R$, получится интеграл от комплекснозначной функции. Такие интегралы здесь не рассматриваются.

5. Интеграл $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ можно вычислить с помощью подстановки $x=a\sin t$ (см. также пример 2 в п. 22.4). Имеем $dx = a\cos t\,dt$, а поэтому

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2 \int \cos^2 t\,dt = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$
$$= \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t\,dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C.$$

Подставляя в полученное выражение $t=\arcsin\frac{x}{a}$ и замечая, что $\sin 2\arcsin\frac{x}{a} = 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) = 2\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{2}{a^2}x\sqrt{a^2-x^2}$ окончательно будем иметь

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Заметим, что для проверки результата, полученного при вычислении неопределенного интеграла, достаточно его продифференцировать, после чего должно получиться подынтегральное выражение вычисляемого интеграла.

Другие примеры на интегрирование с помощью замены переменного будут рассмотрены в § 25, 26.

22.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Теорема 2. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на некотором промежутке, дифференцируемы в его внутренних точках и на этом промежутке существует интеграл $\int v\,du$, то на нем существует и интеграл $\int u\,dv$, причем*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{22.12}$$

Доказательство. Для внутренних точек указанного в условиях теоремы промежутка по правилу дифференцирования произведения имеем

$$d(uv) = v\,du + u\,dv, \text{ и поэтому } u\,dv = d(uv) - v\,du.$$

Интеграл от каждого слагаемого правой части существует, ибо по свойству 1° п. 22.1

$$\int d(uv) = uv + C,$$

а интеграл $\int v\,du$ существует по условию теоремы. Поэтому согласно свойству 3° п.22.1 существует и интеграл $\int u\,dv$, причем

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du. \tag{22.13}$$

Подставляя в правую часть (22.13) $uv+C$ вместо $\int d(uv)$ и относя произвольную постоянную C к интегралу $\int v\,du$, получим формулу (22.12). □

С помощью формулы (22.12) вычисляются многие интегралы. При ее практическом использовании задана левая часть (22.12), т. е. функция u и дифференциал dv, а поэтому v определяется неоднозначно: Обычно в качестве v выбирается функция, записываемая наиболее простой формулой.

Примеры. 1. Пусть требуется вычислить интеграл $\int xe^x\,dx$. Полагая

$$u=x,\quad dv=e^x dx,\ \text{откуда}\ du=dx,\quad v=e^x,$$

имеем

$$\int xe^x dx=\int x\,de^x=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C.$$

Заметим, что, взяв $u=e^x$ и $dv=x\,dx$, откуда $u=e^x$ и $v=x^2/2$, мы имели бы

$$\int xe^x dx=\frac{1}{2}x^2e^x-\frac{1}{2}\int x^2e^x dx,$$

т. е. интегрирование по частям привело бы к интегралу, более сложному, чем исходный. Отсюда видно, что при вычислении интегралов с помощью формулы (22.12) не каждый способ выбора функций u и v приводит к интегралу, более простому, чем первоначальный.

2. Вычислим интеграл $I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ посредством интегрирования по частям (ранее, см. п. 22.3, пример 5, он был вычислен с помощью замены переменного).

Полагая $u=\sqrt{a^2-x^2}$, $dv=dx$ и, следовательно, $du=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$, $v=x$, получим

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{22.14}$$

Добавим и вычтем a^2 в числителе подынтегральной функции интеграла, стоящего в правой части равенства; тогда, произведя деление на $\sqrt{a^2-x^2}$, будем иметь

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\arcsin\frac{x}{a}-I.$$

Подставив это выражение в (2.14), получим:

$$I=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}-I. \tag{22.15}$$

Как уже отмечалось, всякое равенство такого вида представляет собой равенство между двумя множествами функций, элементы каждого из которых отличаются друг от друга на постоянную. Поэтому общее выражение для элемента множества I, согласно (22.15), имеет вид

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

3. Иногда для вычисления интеграла правило интегрирования по частям приходится применять несколько раз, например,

$$\int \arcsin^2 x dx = x\arcsin^2 x - 2\int \arcsin x \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= x\arcsin^2 x + 2\int \arcsin x d\sqrt{1-x^2} =$$
$$= x\arcsin^2 x + 2\arcsin x\sqrt{1-x^2} - 2x + C.$$

4. Если $P_n(x)$ — многочлен степени x, то для вычисления интеграла $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$ следует формулу интегрирования по частям применить n раз. Выполнив это, получим

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx = e^{\alpha x}\left(\frac{P_n(x)}{\alpha} - \frac{P'_n(x)}{\alpha^2} + \ldots + (-1)^n\frac{P_n^{(n)}(x)}{\alpha^{n+1}}\right) + C.$$

Другие примеры на применение интегрирования по частям будут рассмотрены в § 26.

§ 23. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЛАХ И МНОГОЧЛЕНАХ

23.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Как известно из алгебры *комплексными числами* называются выражения вида

$$z = x + iy,$$

где $i^2 = -1$, а x и y — любые действительные числа. Множество всех комплексных чисел обозначается через $\boldsymbol{C}$. Число x называется действительной частью, y — мнимой частью комплексного числа $z = x + iy$. Это записывается следующим образом: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ *).

*) От латинских слов realis — действительный и imaginarius — мнимый.

Комплексное число z, не являющееся действительным, т. е. у которого $\operatorname{Im} z \neq 0$, будем называть *существенно комплексным числом*. Число $\sqrt{x^2+y^2}$ называется модулем комплексного числа $z=x+iy$ и обозначается $|z|$, т. е. $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Каждому комплексному числу $z=x+iy$ соответствует упорядоченная пара действительных чисел (x, y), и обратно, каждой упорядоченной паре действительных чисел (x, y) соответствует комплексное число $z=x+iy$. В силу этого взаимно однозначного соответствия (а также и в силу других обстоятельств, о которых речь будет ниже) комплексное число $z=x+iy$ геометрически удобно интерпретировать либо как точку (x, y), либо как радиус-вектор на плоскости с координатами x и y (при некоторой фиксированной прямоугольной декартовой системе координат).

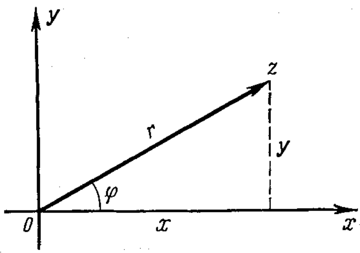


Рис. 94

Координатная плоскость, точка (x, y) которой (при любых x, $y \in \boldsymbol{R}$), отождествлена с числом $x+yi$, называется *комплексной плоскостью*. В ней ось Ox называется действительной, а Oy — мнимой осью.

Угол φ, образованный радиус-вектором z, $z \neq 0$, с положительным направлением оси Ox, называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Значения φ аргумента комплексного числа z, такие, что $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, обычно обозначают $\arg z$. Очевидно, что $\operatorname{Arg} z$ определяется комплексным числом $z \neq 0$ с точностью до целочисленного кратного 2π, в то время как $\arg z$ определяется уже числом $z \neq 0$ однозначно. Очевидно также, что

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi,$$

где $k=0$ для первой и четвертой координатных четвертей, $k=1$ для второй и $k=-1$ для третьей. Если $x=0$, то при $y \neq 0$ считается, что $\arg z = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y$, а при $x=y=0$ $\arg z$ не определен.

Пусть $|z|=r$, $\operatorname{Arg} z = \varphi$, тогда (рис. 94) $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, и поэтому

$$z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Правая часть этого равенства называется *тригонометрической формой комплексного числа* z.

Комплексные числа x_1+y_1i и x_2+y_2i считаются равными тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$. По определению полагают также $x+0i=x$, $0+yi=yi$, $0+0i=0$.

Сумма двух комплексных чисел $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ определяется согласно формуле

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i\,(y_1+y_2). \tag{23.1}$$

Иначе говоря, действительная и мнимая части суммы z_1+z_2 равны суммам соответственно действительных и мнимых частей z_1 и z_2.

Разность комплексных чисел определяется как действие, обратное сложению, т. е. разность $z=z_1-z_2$ является таким числом z, что $z_2+z=z_1$. Следовательно, если $z=x+iy$, то $x_2+x+{}+i\,(y_2+y)=x_1+iy_1$. Отсюда $x=x_1-x_2$, $y=y_1-y_2$, т. е. действительная и мнимая части разности z_1-z_2 равны разностям соответственно действительных и мнимых частей чисел z_1 и z_2.

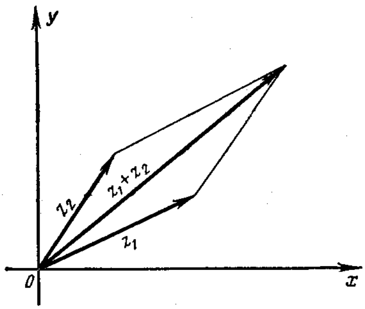


Рис. 95

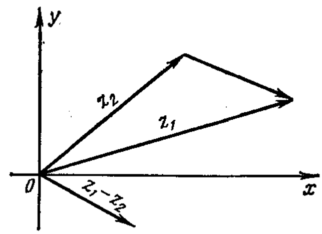


Рис. 96

Поскольку геометрически действительная и мнимая части комплексного числа являются его координатами и при сложении (вычитании) координат векторов сами векторы также складываются (вычитаются), то формула (23.1) означает, что геометрически комплексные числа складываются и вычитаются как векторы (рис. 95 и 96).

Произведение двух комплексных чисел $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+{}+iy_2$ определяется по формуле

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i\,(x_1y_2+y_1x_2). \tag{23.2}$$

Найдем формулы умножения комплексных чисел в тригонометрической форме. Если

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\qquad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

то

$$\begin{aligned}z_1z_2=r_1r_2\,[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+{}\\+i\,(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)]={}\\=r_1r_2\,[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\end{aligned}$$

и, таким образом,

$$|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2\,^{*)}. \qquad (23.3)$$

Методом математической индукции легко показать, что

$$|z_1z_2 \ldots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_n|,$$
$$\operatorname{Arg}(z_1z_2 \ldots z_n) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + \ldots + \operatorname{Arg} z_n.$$

Отсюда, полагая $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, для степени z^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, комплексного числа z имеем

$$|z^n| = |z|^n, \qquad \operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,^{**)}$$

в частности, при $|z| = 1$, т. е. когда $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \qquad (23.4)$$

Это соотношение называется формулой Муавра.***)

Деление $\frac{z_1}{z_2}$ комплексного числа z_1 на комплексное число $z_2 \neq 0$ определяется как операция, обратная умножению, т. е. число $z = \frac{z_1}{z_2}$ называется *частным от деления* z_1 на z_2, если $z_1 = z_2 z$. Поэтому

$$|z_1| = |z_2||z| \quad \text{и} \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + \operatorname{Arg} z,$$

откуда

$$|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \qquad (23.5)$$

Формулами (23.5) комплексное число $z = \frac{z_1}{z_2}$ при заданных z_1 и $z_2 \neq 0$ очевидно, определено однозначно. Ряд других свойств комплексных чисел, как, например, коммутативность и ассоциативность сложения и умножения, дистрибутивность умножения относительно сложения и другие свойства, непосредственно следуют из формул, с помощью которых определены эти операции для комплексных чисел, и из соответствующих свойств действительных чисел. Поэтому не будем на них подробно останавливаться.

Корень n-й степени $w = \sqrt[n]{z}$ из комплексного числа z определяется как такое число w, n-я степень которого равна подкоренному выражению:

$$w^n = z.$$

Если

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \text{а} \quad w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

---

*) Это равенство, как и вообще все равенства, содержащие Arg, следует понимать как равенство соответствующих множеств.

**) Заметим, что $\operatorname{Arg} z^n \neq n \operatorname{Arg} z$, $n = 2, 3, \ldots$.

***) А. Муавр (1667—1754) — французский математик.

то

$$\rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r (\cos \varphi + i \sin \varphi);$$

отсюда

$$\rho = \sqrt[n]{r}.$$

Здесь корень понимается в арифметическом смысле — как неотрицательное действительное число, ибо по определению модуля комплексного числа $\rho \geqslant 0$.

Далее,

$$n\psi = \varphi + 2k\pi \quad (k \text{ — целое}), \quad \text{или} \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

По существу различные значения аргумента получатся при значениях $k = 0, 1, \ldots, n-1$: различные в том смысле, что если обозначить эти значения аргумента через ψ_k и положить $w_k = \rho (\cos \psi_k + i \sin \psi_k)$, то при $\rho \neq 0$ получатся различные комплексные числа. При всех остальных k значения ψ будут отличаться от указанных чисел ψ_k на кратное 2π, т. е. эти значения аргумента будут приводить к одному из комплексных чисел w_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Таким образом, корень $\sqrt[n]{z}$ имеет при $z \neq 0$ в точности n значений $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$.

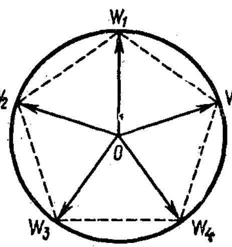


Рис. 97

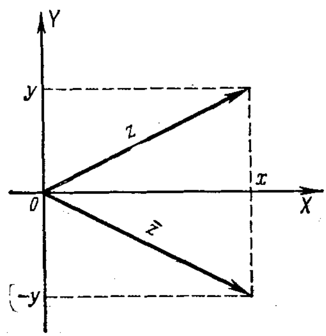


Рис. 98

В комплексной плоскости числа w_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса ρ с центром в начале координат. Это следует из того, что аргумент числа w_k отличается от аргумента числа w_{k-1} при всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$ на одно и то же число $2\pi/n$. На рис. 97 изображен случай $n = 5$.

Каждому комплексному числу $z = x + iy$ соответствует число $x - iy$, которое называется *сопряженным* с z и обозначается $\bar{z}$; $\bar{z} = x - iy$. Геометрически число $\bar{z}$ изображается вектором, симметричным с вектором z относительно оси Ox (рис. 98).

Свойства сопряженных комплексных чисел

1°. $|\bar z| = |z|$, $\arg \bar z = -\arg z$.

2°. $z\bar z = |z|^2$.

3°. $\bar{\bar z} = z$.

4°. $\overline{z_1 + z_2} = \bar z_1 + \bar z_2$.

5°. $\overline{z_1 - z_2} = \bar z_1 - \bar z_2$.

6°. $\overline{z_1 z_2} = \bar z_1 \bar z_2$.

7°. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar z_1}{\bar z_2}$, $z_2 \neq 0$.

Свойство 1 очевидно (см. рис. 98).

Далее, согласно правилу умножения комплексных чисел,

$$z\bar z = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2. \; \square$$

Свойство 3 также очевидно: если $z = x + iy$, то $\bar z = x - iy$ и $\bar{\bar z} = \overline{x - iy} = x + iy = z$. $\square$

В справедливости свойства 4 можно убедиться геометрически, взяв параллелограмм, симметричный относительно оси Ox с параллелограммом, построенным на векторах z_1 и z_2 как на сторонах (рис. 99), т. е. параллелограмм, натянутый на векторы $\bar z_1$ и $\bar z_2$. Диагонали этих параллелограммов будут также симметричными друг другу относительно оси Ox и, следовательно, будут соответственно равными $z_1 + z_2$ и $\overline{z_1 + z_2}$. С другой стороны, последняя диагональ, как сумма векторов $\bar z_1$ и $\bar z_2$, равна также и $\bar z_1 + \bar z_2$. $\square$

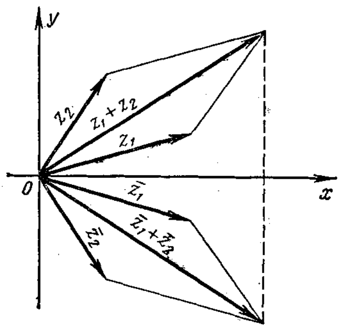


Рис. 99

Свойство 5° доказывается аналогично.

Свойства 6° и 7° следует из того, что модули и аргументы выражений, стоящих в разных частях соответствующих равенств, совпадают. Действительно, используя свойство 1, получим

$$|\overline{z_1 z_2}| = |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = |\bar z_1| \cdot |\bar z_2| = |\bar z_1 \cdot \bar z_2|,$$

$$\operatorname{Arg} \overline{z_1 z_2} = -\operatorname{Arg} z_1 z_2 = -(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) =$$

$$= -\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} \bar z_1 + \operatorname{Arg} \bar z_2 = \operatorname{Arg} \bar z_1 \bar z_2. \; \square$$

Аналогично доказывается свойство 7°.

Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо *неравенство треугольника*

$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$ и его следствие $||z_1|-|z||\leqslant|z_1-z_2|$.

Первое из этих неравенств геометрически означает, что длина стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других его сторон (см. рис. 95), а второе — что разность длин двух сторон треугольника не превосходит длины третьей стороны (см. рис. 96).

23.2*. ФОРМАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Вдумчивый читатель обратил внимание на то, что приводимая в п. 23.1 формулировка «выражения вида $z=x+iy$ называются комплексными числами» не является четким определением комплексных чисел.

Множество комплексных чисел $\boldsymbol{C}$ можно определить как множество упорядоченных пар (x, y) действительных чисел, $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in\boldsymbol{R}$, в котором введены операции сложения и умножения согласно следующему определению:

$$(x, y)+(x', y')\overset{\text{def}}{=}(x+x', y+y'),$$
$$(x, y)(x', y')\overset{\text{def}}{=}(xx'-yy', xy'+x'y),$$
$$(x, y)\in\boldsymbol{C},\ (x', y')\in\boldsymbol{C}.$$

Нетрудно проверить, что в результате этого определения множество указанных пар превращается в поле, т. е. удовлетворяет условиям I, II, III п. 2.1. Полученное таким образом поле, а также каждое изоморфное ему, называется *полем комплексных чисел*.

Пары $(x, 0)$ обозначаются просто через x (их совокупность изоморфна полю действительных чисел), а пара $(0, 1)$ обозначается через i: $i\overset{\text{def}}{=}(0, 1)$.

Согласно определенной операции умножения

$$i^2=(0, 1)(0, 1)=(-1, 0)=-1, \text{ т. е. } i^2=-1.$$

Для любого комплексного числа (x, y) имеет место легко проверяемое тождество

$$(x, y)=x+iy.$$

Действительно,

$$(x, y)=(x, 0)+(0, y)=(x, 0)+(0, 1)(y, 0)=x+iy,$$

и мы снова пришли к записи комплексных чисел, из которой исходили в п. 23.1.

23.3. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ АНАЛИЗА В ОБЛАСТИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Понятия числовой последовательности и ее предела легко обобщаются и на случай комплексных чисел.

Функция, определенная на множестве натуральных чисел и имеющая своими значениями комплексные числа, называется *последовательностью комплексных чисел.* Как и в случае действительных чисел, комплексное число z, соответствующее натуральному числу n, снабжается индексом n: z_n, $n=1, 2, \ldots$.

Определение 1. *Пусть задана последовательность комплексных чисел* $z_n=x_n+iy_n$, $n=1, 2, \ldots$. *Число* $\zeta=\xi+i\eta$ *называется ее пределом, если для любого действительного числа* $\varepsilon>0$ *существует такой номер* n_ε, *что при* $n\geqslant n_\varepsilon$ *выполняется неравенство*

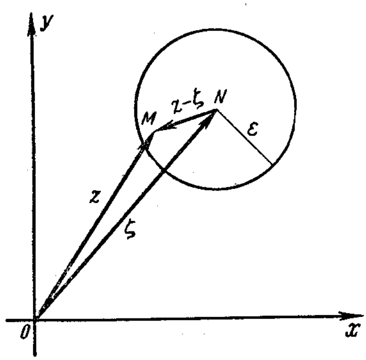


Рис. 100

$$|z_n-\zeta|<\varepsilon.$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\zeta$ и говорят, что последовательность $\{z_n\}$ сходится к числу ζ.

Таким образом, по форме это определение совершенно такое же, как для предела последовательности действительных чисел.

Геометрически, если обозначить через M_n конец радиус-вектора z_n, т. е. точку с координатами (x_n, y_n), а через N — точку с координатами (ξ, η), то равенство $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\zeta$ будет иметь место в том и только том случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=N$ в смысле п. 18.1. Это непосредственно следует из того, что совокупность концов $M=(x, y)$ векторов $z=x+iy$ таких, что $|z-\zeta|<\varepsilon$, образует ε-окрестность точки $N=(\xi, \eta)$ (рис. 100).

Из сказанного следует (см. п. 18.1), что последовательность $z_n=x_n+iy_n$ сходится к числу $\zeta=\xi+i\eta$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\xi, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n=\eta.$$

Последовательность комплексных чисел, имеющая своим пределом ноль, называется *бесконечно малой*.

На последовательности комплексных чисел естественным образом переносится ряд теорем о пределах последовательностей действительных чисел, например, теорема о единственности предела, об ограниченности последовательности, имеющий предел, критерий Коши и т. п.

В § 8 были введены обозначения «o» и «O» для сравнения функций. В дальнейшем понадобятся такие же обозначения и для последовательностей.

Определение 2. *Будем говорить, что последовательность* $\{z_n\}$ *ограничена относительно последовательности* $\{w_n\}$ *и писать* $z_n = O(w_n)$ *), *если существует постоянная* $c > 0$, *такая, что* $|z_n| \leqslant c|w_n|$, $n = 1, 2, \ldots$.

Это определение в случае $w_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, эквивалентно следующему: для двух данных последовательностей $\{z_n\}$ и $\{w_n\}$ существуют постоянная $c' > 0$ и номер n_0, такие, что

$$|z_n| \leqslant c'|w_n|, \quad n = n_0, n_0 + 1, \ldots.$$

Действительно, полагая в этом случае

$$c = \max\left\{\left|\frac{z_1}{w_1}\right|, \left|\frac{z_2}{w_2}\right|, \ldots, \left|\frac{z_{n_0-1}}{w_{n_0-1}}\right|, c'\right\},$$

получим

$$|z_n| \leqslant c|w_n|, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

т. е. первоначальное определение.

Определение 3. *Если* $z_n = O(w_n)$ *и* $w_n = O(z_n)$, *то будем говорить, что последовательности* $\{z_n\}$ *и* $\{w_n\}$ *одного порядка* и писать $z_n \asymp w_n$.

Определение 4. *Будем говорить, что последовательность* $\{z_n\}$ *является бесконечно малой по сравнению с последовательностью* $\{w_n\}$ *и писать* $z_n = o(w_n)$, *если существует бесконечно малая последовательность* $\{\alpha_n\}$ *такая, что* $z_n = \alpha_n w_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Определение 5. *Последовательности* $\{z_n\}$ *и* $\{w_n\}$ *называются эквивалентными, или асимптотически равными, если существует такая последовательность* $\{\varepsilon_n\}$, *что*

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 1 \quad \text{и} \quad z_n = \varepsilon_n w_n, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

В этом случае пишется $z_n \sim w_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Упражнения. 1. Доказать, что для того чтобы $z_n \sim w_n$, необходимо и достаточно, чтобы $z_n = w_n + o(w_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

2. Доказать: если $z_n = cw_n + o(w_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, то $z_n = O(w_n)$.

Можно рассматривать и функции комплексного аргумента. Например, $f(z) = |z|$, $f(z) = z^2$. Обе эти функции определены на множестве всех комплексных чисел, первая из них принимает только неотрицательные действительные значения, вторая и существенно комплексные.

---

*) Иногда к этому добавляют: при $n \to \infty$.

Геометрически, если функция $f(z)$ определена на некотором множестве E n-мерного евклидова пространства R^n и принимает комплексные значения, то она задает отображение множества E в плоскость. Например, функция $w=|z|$ отображает плоскость на полупрямую, а функция $w=z^2$ всю плоскость на всю плоскость, как говорят, двукратным образом — в данном случае это означает, что при отображении $w=z^2$ каждая точка образа, кроме нуля, имеет прообраз, состоящий из двух точек.

Если множество E, на котором задана некоторая функция, лежит на плоскости R^2, то его можно рассматривать всегда при фиксированной системе координат как множество комплексных чисел, а заданную функцию как функцию комплексного аргумента.

Для комплекснозначных функций, определенных на множестве E n-мерного пространства R^n, можно ввести многие из понятий, введенных ранее для действительнозначных функций (предел, непрерывность, частные производные, дифференцируемость, интеграл и др.). В ближайших параграфах нам придется встретиться лишь с понятием ограниченности и непрерывности комплекснозначных функций.

Комплекснозначная функция $f(P)$, $P\in E$, называется *ограниченной на множестве* E, если на этом множестве ограничена функция $|f(P)|$.

Таким образом, понятие ограниченности комплекснозначной функции f сводится к понятию ограниченности действительнозначной функции $|f|$.

Определение 6. *Пусть комплекснозначная функция f определена на множестве $E\subset R^n$ и пусть $P_0\in E$. Функция f называется непрерывной в точке P_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех точек $P\in E$, удовлетворяющих условию $\rho(P, P_0)<\delta$, выполняется неравенство*

$$|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon.$$

Мы видим, что по форме это определение полностью совпадает с определением непрерывности для действительнозначных функций (ср. с п. 19.3).

В случае, когда E — плоское множество и, стало быть, его точки можно рассматривать как комплексные числа z, определение непрерывности примет вид: функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0\in E$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех $z\in E$, удовлетворяющих условию $|z-z_0|<\delta$, выполняется неравенство

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon.$$

Комплекснозначная функция, непрерывная в каждой точке некоторого множества, называется непрерывной на этом множестве. В силу определения непрерывности функции и неравенства

$$||f(P)|-|f(P_0)||\leq|f(P)-f(P_0)|,$$

очевидно, что если функция $f(P)$, определенная на множестве $E \subset R^n$, непрерывна в какой-то точке P_0 этого множества: $P_0 \in E$, то и действительнозначная функция $|f(P)|$ непрерывна на этом множестве. Поэтому, если комплекснозначная функция f непрерывна на компакте $E \subset R^n$, то, согласно сказанному, функция $|f|$ также непрерывна, а следовательно, и ограничена на этом компакте. Это, по данному выше определению ограниченности функции, означает ограниченность и самой функции f. Таким образом, для непрерывных комплекснозначных функций справедлив аналог первого утверждения теоремы Вейерштрасса (см. теорему 3 в п. 19.4): функция, непрерывная на компакте, ограничена на нем.

Переносятся на комплекснозначные функции и теоремы о том, что если две функции f и g, определенные на некотором множестве $E \subset R^n$, непрерывны в точке $P_0 \in E$, то и функции $f+g$, fg, а если $g(P_0) \neq 0$, то и f/g непрерывны в этой точке. Из этой теоремы следует, например, что любой многочлен $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ с комплексными коэффициентами a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ непрерывен в любой точке $z_0 \in C$ (ср. с п. 7.1).

23.4. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

Пусть
$$P_n(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0 \tag{23.6}$$
— многочлен с комплексными в общем случае коэффициентами A_j, $j = 0, 1, \ldots, n$. Если $A_n \neq 0$, то число n называется *степенью многочлена*.

Из алгебры известно, что если степень m многочлена $Q_m(x)$ не превышает степени n многочлена $P_n(x)$, то существуют такие многочлены $S_k(x)$ степени k и $R_l(x)$ степени l, что $n = m + k$, $0 \leqslant l < m$, и многочлен $P_n(x)$ представим в виде
$$P_n(x) = S_k(x) Q_m(x) + R_l(x).$$

При этом такое представление единственно.

Операция нахождения многочленов $S_k(x)$ и $R_l(x)$ по заданным многочленам $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ называется *делением многочлена* $P_n(x)$ на $Q_m(x)$, многочлен $P_n(x)$ — *делимым*, $Q_m(x)$ — *делителем*, $S_k(x)$ — *частным*, $R_l(x)$ — остатком от деления $P_n(x)$ на $Q_m(x)$.

Отметим, что из $m = 1$ следует, что $l = 0$, т. е. в этом случае остаток от деления является константой.

Комплексное число z_0 такое, что
$$P_n(z_0) = 0,$$
называется *корнем* данного многочлена (23.6).

Если многочлен $P_n(z)$ степени $n \geqslant 1$ разделить на $z-\zeta$, где ζ — какое-либо комплексное число, то получим

$$P_n(z) = (z-\zeta)\, Q_{n-1}(z) + r,$$

где $Q_{n-1}(z)$ — многочлен степени $n-1$, а остаток r — постоянная. Отсюда непосредственно следует, что число z_0 является корнем многочлена $P_n(z)$ тогда и только тогда, когда многочлен $P_n(z)$ делится без остатка на $z-z_0$ (теорема Безу *)).

Если многочлен $P_n(z)$ делится на $(z-z_0)^k$ (k — положительное целое) и не делится на $(z-z_0)^{k+1}$, то число k называется *кратностью корня* z_0.

Таким образом, если комплексное число z_0 является корнем кратности k многочлена $P_n(z)$, то

$$P_n(z) = (z-z_0)^k\, Q_{n-k}(z),$$

где $Q_{n-k}(z)$ — такой многочлен степени $n-k$, что $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

В курсе алгебры доказывается, что *всякий многочлен $P_n(z)$ степени $n \geqslant 1$ имеет по крайней мере один корень* z_1. Если его кратность равна k_1, то, как отмечалось, справедливо разложение

$$P_n(z) = (z-z_1)^{k_1} Q_{n-k_1}(z), \quad Q_{n-k_1}(z_1) \neq 0,$$

где степень многочлена $Q_{n-k_1}(z)$ меньше n. Многочлен $Q_{n-k_1}(z)$, если его степень больше 1, также имеет хотя бы один корень z_2. Если кратность этого корня равна k_2, то

$$P_n(z) = (z-z_1)^{k_1} (z-z_2)^{k_2} Q_{n-k_1-k_2}(z),$$

$$Q_{n-k_1-k_2}(z_1) \neq 0, \quad Q_{n-k_1-k_2}(z_2) \neq 0.$$

Продолжая этот процесс дальше, через конечное число m шагов получим многочлен нулевой степени $P_{n-k_1-\ldots-k_m}(z) = A_n$ и, следовательно, для многочлена $P_n(z)$ справедливо следующее разложение на множители:

$$P_n(z) = A_n (z-z_1)^{k_1} (z-z_2)^{k_2} \ldots (z-z_m)^{k_m}, \tag{23.7}$$

где $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, откуда следует, что *каждый многочлен степени $n \geqslant 1$ имеет в точности n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

Для многочлена (23.6) обозначим через $\bar{P}_n(z)$ многочлен, коэффициенты которого являются комплексными числами, сопряженными коэффициентам многочлена $P_n(z)$:

$$\bar{P}_n(z) = \bar{A}_n z^n + \bar{A}_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \bar{A}_1 z + \bar{A}_0.$$

Многочлен $\bar{P}_n(z)$ называется многочленом, *сопряженным* многочлену $P_n(z)$.

---

*) Э. Безу (1730—1783) — французский математик.

В силу свойств сопряженных комплексных чисел имеем

$$\overline{P_n(z)} = \bar{P}_n(\bar{z}).$$

Действительно,

$$\overline{P_n(z)} = \overline{A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_n z + A_0} =$$
$$= \bar{A}_n \bar{z}^n + \bar{A}_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \ldots + \bar{A}_1 \bar{z} + \bar{A}_0 = \bar{P}_n(\bar{z}).$$

Очевидно также, что $\bar{\bar{P}}(z) = P(z)$.

Покажем, что если число z_0 является корнем многочлена $P_n(z)$ кратности k, то сопряженное ему число $\bar{z}_0$ является корнем сопряженного многочлена $\bar{P}_n(z)$ и притом той же кратности.

В самом деле, переходя в формулах

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z), \quad Q_{n-k}(z_0) \neq 0,$$

к сопряженным выражениям, получим

$$\bar{P}_n(\bar{z}) = (\bar{z} - \bar{z}_0)^k \bar{Q}_{n-k}(\bar{z}), \quad \bar{Q}_{n-k}(\bar{z}_0) \neq 0.$$

Полагая для наглядности $\zeta = \bar{z}$ ($\bar{z}$, как и z — произвольные комплексные числа), перепишем полученные формулы в виде

$$\bar{P}_n(\zeta) = (\zeta - \bar{z}_0)^k \bar{Q}_{n-k}(\zeta), \quad \bar{Q}_{n-k}(\bar{z}_0) \neq 0.$$

Это и означает, что число $\bar{z}_0$ является корнем кратности k для многочлена $\bar{P}_n(z)$.

Пусть теперь все коэффициенты многочлена $P_n(z)$ суть действительные числа. В этом случае сопряженный многочлен $\bar{P}_n(z)$, очевидно, совпадает с самим многочленом $P_n(z)$. Поэтому из доказанного следует, что если комплексное число z_0 является корнем кратности k многочлена $P_n(z)$ с действительными коэффициентами, то и сопряженное ему число $\bar{z}_0$ также является корнем кратности k этого многочлена.

Отметим далее, что произведение $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$ всегда является многочленом (относительно z) с действительными коэффициентами. Действительно, пусть $z_0 = a + bi$, где a и b действительны. Тогда $\bar{z}_0 = a - bi$, и поэтому

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = (z - a - bi)(z - a + bi) =$$
$$= (z - a)^2 + b^2 = z^2 - 2az + a^2 + b^2 = z^2 + pz + q, \tag{23.8}$$

где положено $p = -2a$ и $q = a^2 + b^2$; очевидно, p и q действительны. Отметим, что $\frac{p^2}{4} - q = -b^2$, поэтому при $b \neq 0$, т. е. тогда, когда корень z_0 является существенно комплексным числом, выполняется неравенство

$$\frac{p^2}{4} - q < 0. \tag{23.9}$$

Обратим внимание и на справедливость обратного утверждения: если выполнено неравенство (23.9), то корни трехчлена z^2+pz+q (p и q действительны) — существенно комплексные числа.

Из сказанного следует, что для всякого многочлена степени n с действительными коэффициентами справедливо разложение на множители вида

$$P_n(x)=A_n(x-a_1)^{\alpha_1}\dots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\dots \\ \dots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}, \quad (23.10)$$

где

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i+2\sum_{i=1}^{s}\beta_i=n, \quad \frac{p_j^2}{4}-q_j<0, \quad j=1,\ 2,\ \dots,\ s,$$

и все коэффициенты A_n, a_1, ..., a_r; p_1,q_1, ..., p_s, q_s действительны. При этом a_1, ..., a_r суть все действительные корни многочлена $P_n(x)$, а каждому существенно комплексному корню z_0 и ему сопряженному корню $\bar{z}_0$ соответствует множитель вида $x^2+px+q=(x-z_0)(x-\bar{z}_0)$. Вместо буквы z, употреблявшейся выше для обозначения аргумента рассматриваемого многочлена, здесь по традиции написана буква x, чтобы подчеркнуть, что все рассмотрения происходят в действительной области (это означает, что коэффициенты многочлена x^2+px+q действительны).

Формула (23.10) непосредственно следует из формул (23.7) и (23.8): нужно в разложении (23.7) сгруппировать попарно множители с сопряженными корнями и записать произведения вида $(z-z_0)(z-\bar{z}_0)$ в форме (23.8). Тогда, замечая, что кратность сопряженных корней z_0 и $\bar{z}_0$ одинакова, мы и получим формулу (23.10).

Разложение многочлена на множители вида (23.10) единственно, ибо оно однозначно определяется корнями этого многочлена и их кратностями.

23.5*. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть дан многочлен $P(x)$. Всякий многочлен $R(x)$, на который делится многочлен $P(x)$, т. е.

$$P(x)=R(x)\,r(x), \quad (23.11)$$

где $r(x)$ — также многочлен, называется *делителем* многочлена $P(x)$.

Мы видели, что многочлен $P(x)$ можно записать в виде

$$P(x)=A(x-a_1)^{\alpha_1}\dots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\dots \\ \dots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}, \quad (23.12)$$

где $a_1, \ldots, a_r$ — действительные корни многочлена, а множители вида $x^2+p_jx+q_j$ соответствуют существенно комплексным корням этого многочлена,

$$\frac{p_j^2}{4}-q_j<0, \quad j=1,\ 2, \ldots, s;$$

коэффициенты A, p_j и q_j $(j=1,\ 2, \ldots, s)$ действительны. Отсюда следует, что всякий делитель $R(x)$ многочлена $P(x)$ может быть записан в виде

$$R(x)=B(x-a_1)^{\lambda_1}\ldots(x-a_r)^{\lambda_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s}, \qquad (23.13)$$

где $\lambda_i \leqslant \alpha_i, \quad i=1,\ 2, \ldots, r, \quad \mu_j \leqslant \beta_j, \quad j=1,\ 2, \ldots, s. \qquad (23.14)$

Действительно, никаких других множителей вида

$$x-a \text{ и } x^2+px+q, \qquad (23.15)$$

где a, p и q действительны и $\frac{p^2}{4}-q<0$ в разложении многочлена $R(x)$ быть не может, ибо, с одной стороны, многочлен $R(x)$, как всякий многочлен, может быть разложен на множители вида (23.15), с другой стороны, из формулы (23.11) следует, что если в разложении $R(x)$ на множители имеется множитель вида $x-a$, соответственно вида x^2+px+q, то $x=a$, соответственно корни трехчлена x^2+px+q, являются и корнями многочлена $P(x)$; поэтому указанные множители входят в разложение (23.12). Неравенства (23.14) также очевидны: из той же формулы (23.11) следует, что кратность корня многочлена $R(x)$ не может превышать кратности того же корня многочлена $P(x)$.

Пусть теперь даны два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$. Всякий многочлен, являющийся делителем как многочлена $P(x)$, так и многочлена $Q(x)$, называется их *общим делителем*. Общий делитель двух многочленов, который делится на любой общий делитель этих многочленов, называется их *наибольшим общим делителем*.

Если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ записаны в виде (23.12):

$$P(x)=A'(x-a_1')^{\alpha_1'}\ldots(x-a_{r'}')^{\alpha_{r'}'}(x^2+p_1'+q_1')^{\beta_1'}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_{s'}'x+q_{s'}')^{\beta_{s'}'}, \qquad (23.16)$$

$$Q(x)=A''(x-a_1'')^{\alpha_1''}\ldots(x-a_{r''}'')^{\alpha_{r''}''}(x^2+p_1''x+q_1'')^{\beta_1''}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_{s''}''x+q_{s''}'')^{\beta_{s''}''}, \qquad (23.17)$$

то всякий их общий делитель $R(x)$ можно записать в виде (23.13), где множители

$$x-a_k \ (k=1,\ 2, \ \ldots, \ r), \ x^2+p_lx+q_l \ (l=1,\ 2, \ \ldots, \ s) \qquad (23.18)$$

входят как в разложение (23.16), так и в разложение (23.17).

Пусть индексы y коэффициентов множителей (23.18) в разложениях (23.16) и (23.17) равны соответственно i'_k, j'_l и i''_k, j''_l, тогда в силу неравенств (23.14) имеем

$$\begin{aligned} &\lambda_k \leqslant \alpha'_{i'_k}, \quad \lambda_k \leqslant \alpha''_{i''_k}, \qquad k=1, 2, \ldots, r, \\ &\mu_l \leqslant \beta'_{j'_l}, \quad \mu_l \leqslant \beta''_{j''_l}, \qquad l=1, 2, \ldots, s. \end{aligned} \tag{23.19}$$

Для того чтобы многочлен (23.13) был наибольшим общим делителем многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, необходимо и достаточно, чтобы показатели степени λ_k, $k=1, 2, \ldots, r$ и μ_l, $l=1, 2, \ldots, s$ были максимальными из возможных, т. е. чтобы

$$\begin{aligned} &\lambda_k = \min\left\{\alpha'_{i'_k}, \alpha''_{i''_k}\right\}, \qquad k=1, 2, \ldots, r, \\ &\mu_l = \min\left\{\beta'_{j'_l}, \beta''_{j''_l}\right\}, \qquad l=1, 2, \ldots, s. \end{aligned} \tag{23.20}$$

Действительно, при выполнении этих условий многочлен $R(x)$ будет общим делителем многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, кроме того он будет делиться на любой многочлен вида (23.13), для которого выполнены условия (23.19), т. е. $R(x)$ будет делиться на любой общий делитель многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. $\square$

Из найденного вида общего делителя, и в частности, наибольшего общего делителя следует, во-первых, что наибольший общий делитель двух многочленов не единственен; однако два наибольших общих делителя двух данных многочленов могут отличаться друг от друга лишь постоянным множителем (постоянную B в формуле (23.13) можно брать произвольной, неравной нулю); во-вторых, что наибольший общий делитель двух многочленов имеет степень, бо́льшую, чем любой их общий делитель, не являющийся наибольшим общим делителем.

В качестве примера, полезного для дальнейшего, найдем наибольший общий делитель многочлена $P(x)$ и его производной $P'(x)$.

Предварительно заметим, что если число a является действительным корнем кратности α многочлена $P(x)$, т. е.

$$P(x) = (x-a)^{\alpha} P_1(x), \quad P_1(a) \neq 0, \tag{23.21}$$

то a является корнем кратности $\alpha - 1$ для многочлена $P'(x)$.

Действительно, дифференцируя (23.21), имеем

$$P'(x) = \alpha (x-a)^{\alpha-1} P_1(x) + (x-a)^{\alpha} P'_1(x) = (x-a)^{\alpha-1} P_2(x),$$

где

$$P_2(x) = \alpha P_1(x) + (x-a) P'_1(x)$$

и

$$P_2(a) = \alpha P_1(a) \neq 0.$$

Подобным образом, если

$$P(x) = (x^2+px+q)^{\beta} P_3(x), \tag{23.22}$$

где $\frac{p^2}{4}-q<0$, и, значит, корни z_1 и z_2 ($z_2=\bar{z}_1$) трехчлена x^2+ $+px+q$ существенно комплексны, и если

$$P_3(z_1)\neq 0,\ P_3(z_2)\neq 0, \quad \text{то} \quad P'(x)=(x^2+px+q)^{\beta-1}P_4(x),$$

где $P_4(z_1)\neq 0$, $P_4(z_2)\neq 0$, т. е. $P_4(z)$ не делится на x^2+px+q.

Действительно, дифференцируя (23.22), получим:

$$P'(x)=\beta(x^2+px+q)^{\beta-1}(2x+p)P_3(x)+$$
$$+(x^2+px+q)^{\beta}P_3'(x)=(x^2+px+q)^{\beta-1}P_4(x),$$

где $P_4(x)=\beta(2x+p)P_3(x)+(x^2+px+q)P_3'(x)$, откуда следует, что

$$P_4(z_1)=\beta(2z_1+p)P_3(z_1)\neq 0, \quad P_4(z_2)=\beta(2z_2+p)P_3(z_2)\neq 0,$$

ибо $z_1\neq -p/2$ и $z_2\neq -p/2$, так как они существенно комплексны. □

Из доказанного следует, что если многочлен $P(x)$ записан в виде (23.12), то его производную $P'(x)$ можно представить в виде

$$P'(x)=C(x-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}P_5(x),$$

где многочлен $P_5(x)$ не делится ни на $x-a_i$, $i=1, 2, \ldots, r$, ни на $x^2+p_jx+q_j$, $j=1, 2, \ldots, s$, т. е. не имеет общих корней с многочленом $P(x)$.

Из формул (23.13) и (23.20) получаем, что наибольший общий делитель $R(x)$ многочлена $P(x)$ и его производной $P'(x)$ имеет вид

$$R(x)=(x-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}. \quad (23.23)$$

Изложенный метод получения наибольшего общего делителя двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ принципиально полностью решает вопрос о существовании и виде наибольшего общего делителя. Практическое же его применение может, однако, вызвать существенные затруднения: для использования этого метода надо знать разложения на множители вида (23.16) и (23.17) данных многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, которые далеко не всегда удается написать в явном виде.

Существует, однако, другой способ получения наибольшего общего делителя двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, называемый обычно *алгоритмом Евклида*.*) Опишем его.

Пусть для определенности степень многочлена $P(x)$ больше или равна степени многочлена $Q(x)$. Разделив $P(x)$ на $Q(x)$,

*) Евклид (ок. 365—ок. 300 до н. э.)—древнегреческий математик.

получим в качестве частного некоторый многочлен $Q_1(x)$ и остаток $R_1(x)$, степень которого, очевидно, меньше степени многочлена $Q(x)$ (в противном случае процесс деления на $Q(x)$ можно было бы продолжить):

$$P(x) = Q(x)Q_1(x) + R_1(x).$$

Из этой формулы следует: 1) если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ делятся на некоторый многочлен $r(x)$, то и многочлен $R_1(x)$ делится на этот многочлен; 2) если многочлены $Q(x)$ и $R_1(x)$ делятся на какой-то многочлен $r(x)$, то и многочлен $P(x)$ делится на этот многочлен $r(x)$. Отсюда в свою очередь следует, что общие делители многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, в частности их наибольшие общие делители, совпадают с общими делителями, соответственно с наибольшими общими делителями, многочленов $Q(x)$ и $R_1(x)$.

Разделим далее многочлен $Q(x)$ на многочлен $R_1(x)$:

$$Q(x) = R_1(x)Q_2(x) + R_2(x),$$

продолжая процесс дальше, будем иметь

$$R_1(x) = R_2(x)Q_3(x) + R_3(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R_{k-2}(x) = R_{k-1}(x)Q_k(x) + R_k(x).$$

Степени многочленов $R_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$ убывают, поэтому существует номер (мы его обозначим $m+1$) такой, что $R_{m+1}(x) = 0$, и следовательно,

$$R_{m-1}(x) = R_m(x)Q_{m+1}(x).$$

Пары многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, $Q(x)$ и $R_1(x)$, $R_1(x)$ и $R_2(x)$, $\ldots$, $R_{m-1}(x)$ и $R_m(x)$ имеют одинаковые общие делители, а значит, и одинаковые наибольшие общие делители. Но $R_{m-1}(x)$ делится на $R_m(x)$, поэтому $R_m(x)$ является наибольшим общим делителем $R_{m-1}(x)$ и $R_m(x)$, а значит, и наибольшим общим делителем многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

23.6. РАЗЛОЖЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами.

Рациональная дробь $P(x)/Q(x)$ называется правильной, если степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$.

Если рациональная дробь $P(x)/Q(x)$ не является правильной, то, произведя деление числителя на знаменатель по правилу деления многочленов, ее можно представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \tag{23.24}$$

где $R(x)$, $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ — некоторые многочлены, а $P_1(x)/Q_1(x)$ — правильная рациональная дробь.

Лемма 1. *Пусть $P(x)/Q(x)$ — правильная рациональная дробь. Если число a является действительным корнем кратности $\alpha \geqslant 1$ многочлена $Q(x)$, т. е.*

$$Q(x) = (x-a)^\alpha Q_1(x) \quad \text{и} \quad Q_1(a) \neq 0,$$

то существуют действительное число A и многочлен $P_1(x)$ с действительными коэффициентами такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} Q_1(x)},$$

где дробь $\dfrac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} Q_1(x)}$ также является правильной.

Доказательство. Каково бы ни было действительное число A, прибавляя и вычитая из дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}$$

выражение $\dfrac{A}{(x-a)^\alpha}$, получим:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \left[\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha}\right] = \\ = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}. \tag{23.25}$$

По условию, степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x) = (x-a)^\alpha Q_1(x)$. Очевидно, что и степень многочлена $Q_1(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$ (ибо $\alpha \geqslant 1$), поэтому при любом выборе числа A рациональная дробь $\dfrac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}$ является правильной.

Выберем теперь число A таким образом, чтобы число a было корнем многочлена $P(x) - AQ_1(x)$ и, следовательно, чтобы этот многочлен делился на $x - a$. Иначе говоря, определим A из условия

$$P(a) - AQ_1(a) = 0;$$

поскольку, по условию, $Q_1(a) \neq 0$, то отсюда $A = \dfrac{P(a)}{Q_1(a)}$. При таком выборе A второе слагаемое правой части в формуле (23.25) можно сократить на $x - a$, в результате получим дробь вида

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} Q_1(x)}.$$

Поскольку она получена сокращением правильной рациональной дроби с действительными коэффициентами на множитель $x - a$, где a действительно, то и сама она является также правильной рациональной дробью с действительными коэффициентами. □

Лемма 2. *Пусть* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — *правильная рациональная дробь. Если комплексное число* $z_1=a+bi$ *(a и b действительны, $b\neq 0$) является корнем кратности* $\beta\geqslant 1$ *многочлена* $Q(x)$, *т. е.*

$$Q(x)=(x^2+px+q)^{\beta}Q_1(x),$$

где $Q_1(z_1)\neq 0$, *а* $x^2+px+q=(x-z_1)(x-\bar z_1)$, *то существуют действительные числа* M, N *и многочлен* $P_1(x)$ *с действительными коэффициентами такие, что*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\beta}}+\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{\beta-1}Q_1(x)},$$

где дробь $\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{\beta-1}Q_1(x)}$ *также является правильной.*

Доказательство. Для любых действительных M и N имеем

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^{\beta}Q_1(x)}=$$
$$=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\beta}}+\left[\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^{\beta}Q_1(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\beta}}\right]=$$
$$=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\beta}}+\frac{P(x)-(Mx+N)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^{\beta}Q_1(x)}, \qquad (23.26)$$

причем второе слагаемое правой части равенства (23.26) является, как нетрудно видеть, правильной дробью.

Постараемся теперь подобрать M и N так, чтобы числитель этой дроби делился на $x^2+px+q=(x-z_1)(x-\bar z_1)$. Для этого достаточно выбрать M и N так, чтобы z_1 было корнем многочлена $P(x)-(Mx+N)Q_1(x)$. Действительно, тогда, согласно сказанному в п. 23.3, число $\bar z_1$, сопряженное с z_1, также будет являться корнем указанного многочлена. Отсюда и следует, что этот многочлен в силу существования его разложения вида (23.10) делится на x^2+px+q. Итак, пусть

$$P(z_1)-(Mz_1+N)Q_1(z_1)=0. \qquad (23.27)$$

Если это имеет место, то $Mz_1+N=\frac{P(z_1)}{Q_1(z_1)}$, где, по условию, $Q_1(z_1)\neq 0$.

Пусть $z_1=a+bi$, $P(z_1)/Q(z_1)=A+Bi$; тогда

$$A+iB=Mz_1+N=M(a+bi)+N.$$

Отсюда, приравнивая действительные и мнимые части, получим уравнения $Ma+N=A$ и $Mb=B$ и следовательно,

$$M=\frac{B}{b} \quad \text{и} \quad N=A-\frac{a}{b}B. \qquad (23.28)$$

При этих значениях M и N многочлен

$$P(x)-(Mx+N)Q_1(x)$$

будет делиться на многочлен x^2+px+q. Сокращая второе слагаемое правой части равенства (23.26) на x^2+px+q, получим дробь вида

$$\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{\beta-1}Q_1(x)}.$$

Поскольку она получена сокращением правильной рациональной дроби с действительными коэффициентами на многочлен с действительными коэффициентами, то и сама она является также правильной рациональной дробью с действительными коэффициентами. $\square$

Сформулируем теперь основную теорему этого пункта.

Теорема 1. *Пусть $P(x)/Q(x)$ — правильная рациональная дробь* *), *$P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами. Если*

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}, \qquad (23.29)$$

где a_i — попарно различные действительные корни многочлена $Q(x)$ кратности α_i, $i=1, 2, \ldots, r$, а $x^2+p_jx+q_j=(x-z_j)(x-\bar{z}_j)$, где z_j и $\bar{z}_j$ — попарно различные при разных j существенно комплексные корни многочлена $Q(x)$ кратности β_j, $j=1, 2, \ldots, s$, то существуют действительные числа $A_i^{(\alpha)}$, $i=1, 2, \ldots, r$, $\alpha=1, 2, \ldots, \alpha_i$,

$$M_j^{(\beta)} \text{ и } N_j, \quad j=1, 2, \ldots, s, \quad \beta=1, 2, \ldots, \beta_j,$$

такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+\ldots+\frac{A_1^{(\alpha_1)}}{x-a_1}+\ldots+$$
$$+\frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{\alpha_r}}+\frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}}+\ldots+\frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x-a_r}+$$
$$+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}}+\frac{M_1^{(2)}x+N_1^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_s-1}}+\ldots+\frac{M_1^{(\beta_1)}x+N_1^{(\beta_1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+$$
$$+\frac{M_s^{(1)}x+N_s^{(1)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}}+\frac{M_s^{(2)}x+N_s^{(2)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}}+\ldots+\frac{M_s^{(\beta_s)}x+N_s^{(\beta_s)}}{x^2+p_sx+q_s}. \qquad (23.30)$$

---

*) Без ограничения общности можно считать, что коэффициент у старшего члена многочлена $Q(x)$ равен единице, так как в случае, когда он равен какому-то другому числу (отличному от нуля), можно разделить числитель и знаменатель дроби $P(x)/Q(x)$ на это число, после чего у получившегося в знаменателе многочлена коэффициент у старшего члена окажется равным единице.

Доказательство. Из разложения (23.29) имеем:

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}Q_1(x).$$

Здесь

$$Q_1(x)=(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}$$

и, следовательно, $Q_1(a_1)\neq 0$, поэтому, согласно лемме 1,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a)^{\alpha_1}}+\frac{P_1(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}Q_1(x)}.$$

Применяя в случае $\alpha_1>1$ подобным образом ту же лемму к рациональной дроби $\dfrac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha_1-1}Q_1(x)}$, получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+\frac{P_2(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-2}Q_2(x)}.$$

Продолжая этот процесс дальше, пока показатель степени у сомножителя x_1-a не станет равным нулю, а затем поступая аналогичным образом относительно множителей $x-a_i$, $i=2, \ldots, r$, будем иметь

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+\ldots+\frac{A_1^{(\alpha_1)}}{x-a_1}+\ldots+$$
$$+\frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{\alpha_r}}+\frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}}+\ldots+\frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x-a_r}+\frac{P^*(x)}{Q^*(x)},$$

где $\dfrac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ — снова правильная рациональная дробь, причем $P^*(x)$ и $Q^*(x)$ суть многочлены с действительными коэффициентами и многочлен $Q^*(x)$ не имеет действительных корней.

Применяя последовательно лемму 2 к дроби $P^*(x)/Q^*(x)$ и к получающимся при этом выражениям, в результате получим формулу (23.30). □

Рациональные дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}} \text{ и } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\beta}},$$

где a, p, q, A, M и N — действительные числа и $\frac{p^2}{4}-q<0$ (корни трехчлена x^2+px+q существенно комплексные), называются *элементарными рациональными дробями*.

Таким образом, доказанная теорема утверждает, *что всякая правильная рациональная дробь может быть разложена в сумму элементарных рациональных дробей*.

При выполнении разложения вида (23.30) для конкретно заданной дроби обычно оказывается удобным так называемый метод неопределенных коэффициентов. Он состоит в следующем. Для данной дроби $P(x)/Q(x)$ пишется разложение (23.30), в котором коэффициенты $A_i^{(\alpha)}$, $M_j^{(\beta)}$, $N_j^{(\beta)}$ считаются неизвестными ($i=1, 2, \ldots, r$, $\alpha=1, 2, \ldots, \alpha_i$, $j=1, 2, \ldots, s$, $\beta=1, 2, \ldots, \beta_j$). После этого обе части равенства приводятся к общему знаменателю и у получившихся в числителе многочленов приравниваются коэффициенты. При этом если степень многочлена $Q(x)$ равна n, то, вообще говоря, в числителе правой части равенства (23.30) после приведения к общему знаменателю получается многочлен степени $n-1$, т. е. многочлен с n коэффициентами, число же неизвестных $A_i^{(\alpha)}$, $M_j^{(\beta)}$, $N_j^{(\beta)}$ также равняется n (см. (23.10)):

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + 2\sum_{j=1}^{s} \beta_j = n.$$

Таким образом, мы получаем систему n уравнений с n неизвестными. Существование у нее решения вытекает из доказанной теоремы.

Отметим, что после приведения выражения (23.30) к общему знаменателю и его отбрасывания, в случае когда $Q(x)$ имеет действительные корни, целесообразно подставить в обе части получившегося равенства последовательно эти корни; в результате получаются некоторые соотношения между искомыми коэффициентами, полезные для их окончательного определения.

Примеры. 1. Разложим дробь $x/((x^2-1)(x-2))$ на элементарные дроби. Согласно (22.30), искомое разложение имеет вид

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, получим

$$x = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1). \qquad (23.31)$$

Мы имеем случай, когда все корни знаменателя действительны. Полагая в равенстве (23.31), согласно сказанному выше, последовательно $x=1$, $x=-1$ и $x=2$, находим

$$1=-2A, \quad -1=6B, \quad 2=3C,$$

откуда

$$A=-\frac{1}{2}, \quad B=-\frac{1}{6}, \quad C=\frac{2}{3}.$$

Таким образом, искомое разложение будет

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)}. \qquad (23.32)$$

2. Найдем разложение на элементарные дроби для $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$. Общий вид разложения в этом случае

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, имеем

$$x^2-1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x + (Dx+E)(x^2+1)x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$-1 = A,\ 0 = C+E,\ 1 = 2A+B+D,\ 0 = E,\ 0 = A+D,$$

отсюда находим

$$A = -1,\ B = 2,\ C = 0,\ D = 1,\ E = 0,$$

и, поэтому, искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}. \tag{23.33}$$

Следует заметить, что в отдельных случаях разложение на элементарные дроби можно получить быстрее и проще, не прибегая к методу неопределенных коэффициентов, а действуя каким-либо другим путем. Например, для разложения дроби

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}$$

на сумму элементарных проще всего дважды прибавить и вычесть в числителе x^2 и произвести деление так, как это указано ниже:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} =$$
$$= \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Полученное в результате разложение и является разложением данной дроби на сумму элементарных дробей.

Упражнение 3. Доказать, что разложение вида (23.30) правильной рациональной дроби единственно.

§ 24. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

24.1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

В этом и следующем параграфах будут рассмотрены методы интегрирования некоторых классов элементарных функций. При этом каждый раз, не оговаривая этого специально, будем предполагать, что речь идет о вычислении интеграла на некотором промежутке, во всех точках которого определена подынтегральная элементарная функция (иначе говоря, на котором формула, задающая подынтегральную функцию, имеет смысл, см. об этом в п. 4.3).

В предыдущем параграфе показано, что всякая рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и элементарных рациональных дробей (см. (23.24) и (23.30)). Интеграл от многочлена вычисляется, и притом очень просто (см. п. 22.2). Рассмотрим вопрос об интегрировании элементарных рациональных дробей.

Сначала рассмотрим вычисление интегралов от дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

Если $n=1$, то (см. формулу 2 в п. 22.2)

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a|+C, \tag{24.1}$$

а если $n \neq 1$, то (см. формулу 1 в п. 22.2)

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C. \tag{24.2}$$

Рассмотрим теперь интегралы от дробей

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

где $\frac{p^2}{4}-q<0$, $n=1,\ 2,\ \ldots$. Снова начнем со случая $n=1$. Замечая, что

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right),$$

и полагая $t=x+\frac{p}{2}$, $a^2=q-\frac{p^2}{4}>0$, получим:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}\,dt = M\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} +$$
$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=$$
$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2a}+C. \tag{24.3}$$

В случае $n>1$, полагая, как и выше, $t=x+\frac{p}{2}$, $a^2=q-\frac{p^2}{4}$, подобным же образом получим

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx = M\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n}+\frac{2N-pM}{2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}. \tag{24.4}$$

Рассмотрим в отдельности каждый из получившихся интегралов в правой части этого равенства. Что касается первого из них, то он вычисляется сразу:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + C. \quad (24.5)$$

Второй же интеграл правой части равенства (24.4) вычисляется несколько сложнее. Пусть

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Проинтегрируем интеграл I_n по частям, положив

$$u = \frac{1}{(t^2+a^2)^n},\quad dv = dt, \text{ и, следовательно, } du = -\frac{2nt\,dt}{(t^2+a^2)^{n+1}},\quad v = t,$$

а затем, добавив и вычтя a^2 в числителе получившейся под знаком интеграла функции и произведя деление так, как это указано ниже, получим

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\,dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\,dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\left[\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}\right],$$

т. е. $I_n = \dfrac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$, откуда

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\,\frac{t}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots. \quad (24.6)$$

Интеграл I_1 легко вычисляется (см. в п. 22.2 формулу 12); формула (24.6) позволяет вычислить I_2; зная же I_2, по той же формуле можно найти значение и I_3, продолжая этот процесс дальше, можно найти и выражение для любого интеграла I_n $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$.

24.2. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Из результатов п. 23.6 и предыдущего п. 24.1 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Неопределенный интеграл от любой рациональной дроби на всяком промежутке, на котором знаменатель дроби не обращается в ноль, существует и выражается через элементарные функции, а именно он является алгебраической суммой суперпозиций рациональных дробей, арктангенсов и натуральных логарифмов.*

Теорема 1 есть прямое следствие формул (23.24), (23.30), (22.6), (22.8), (24.1) — (24.6). Эти формулы дают и конкретный способ вычисления интеграла от рациональной функции: сначала делением числителя на знаменатель выделяется «целая часть», т. е. данная рациональная дробь представляется в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби (23.24), затем получившаяся правильная рациональная дробь раскладывается на сумму элементарных дробей (23.30), после чего, используя линейность интеграла (22.6), можно вычислить интегралы от каждого слагаемого в отдельности, согласно формулам (22.8) и (24.1) — (24.6).

Примеры. 1. Вычислим $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x-2)}$. Уже известно (см. (23.32)), что

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)},$$

поэтому

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-2} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + C.$$

2. Вычислим $\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,dx$. Согласно общему правилу, выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель; получим

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2} = x + \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}.$$

Для получившейся правильной рациональной дроби уже найдено ее разложение на элементарные дроби (см. формулу (23.33)):

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1},$$

поэтому

$$\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,dx = \int x\,dx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} +$$
$$+ \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$
$$= \frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Следует иметь в виду, что указанный метод вычисления неопределенного интеграла от рациональной дроби является общим: с помощью его можно вычислить неопределенный интеграл от любой рациональной дроби, если можно получить конкретное разложение знаменателя на множители вида (23.10). Однако естественно, что в отдельных частных случаях бывает целесообразнее для существенного сокращения вычислений действовать иными путями.

Например, для вычисления интеграла

$$I=\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^3}$$

проще не раскладывать подынтегральную функцию на элементарные дроби, а применить правило интегрирования по частям. Положив

$$u=x, \quad dv=\frac{x\,dx}{(1-x^2)^3} \quad \text{и следовательно,} \quad du=dx, \quad v=\frac{1}{4(1-x^2)^2},$$

получим

$$I=-\frac{1}{2}\int x\frac{d(1-x^2)}{(1-x^2)^3}=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{1}{(1-x^2)^2}\,dx.$$

Прибавляя и вычитая к числителю получившейся подынтегральной функции x^2, производя деление, получаем два интеграла, из которых первый табличный, а второй легко вычисляется интегрированием по частям:

$$I=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)^2}\,dx=$$

$$=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1-x^2}-\frac{1}{4}\int\frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^2}=$$

$$=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{8}\int x\frac{d(1-x^2)}{(1-x^2)^2}=$$

$$=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{x}{8(1-x^2)}+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{1-x^2}=$$

$$=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{x}{8(1-x^2)}+C.$$

24.3*. МЕТОД ОСТРОГРАДСКОГО

В пункте (24.1) было показано, что всякая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы элементарных дробей. Но из п. 24.1 следует, что первообразные элементарных дробей $\frac{1}{x-a}$ и $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ $\left(\frac{p^2}{4}-q<0\right)$ являются трансцендентными функциями вида $A\operatorname{arctg}(a_1x+a_2)+B\ln(b_1x+b_2)+C$ (см. (24.1) и (24.3)); первообразная элементарной дроби

$$A/(x-a)^\alpha, \quad \alpha=2,\ 3,\ \ldots,$$

является рациональной дробью; первообразная же элементарной дроби $(Mx+N)/(x^2+px+q)^\beta$, $\beta=2,\ 3,\ \ldots$, в силу формул (24.4), (24.5), (24.6) и формулы 12 п. 22.2 может быть, вообще говоря, представлена в виде суммы правильной рациональной дроби и трансцендентной функции вида $A\operatorname{arctg}(a_1x+a_2)+C$, являющейся первообразной от дроби вида $\frac{B}{x^2+px+q}$ $\left(\frac{p^2}{4}-q<0\right)$. Поэтому всякая первообразная любой рациональной дроби представима, вообще говоря, в виде суммы рациональной дроби (алгебраическая часть) и трансцендентной функции, являющейся первообразной от суммы дробей вида

$$\frac{A}{x-a} \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \frac{p^2}{4}-q<0.$$

Таким образом, если $P(x)/Q(x)$ — правильная рациональная дробь и

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}$$

разложение ее знаменателя в виде (23.10), то

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{A_i}{x-a_i}+\sum_{j=1}^{s}\frac{M_jx+N_j}{x^2+p_jx+q_j}\right]dx; \tag{24.7}$$

отсюда, произведя под знаком интеграла сложение дробей, имеем

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx, \tag{24.8}$$

где $Q_2(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_r)(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x_2+p_sx+q_s)$. Из формул (24.2) и (24.6) следует, что многочлен $Q_1(x)$ имеет вид

$$Q_1(x)=$$
$$=(x-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1},$$

т. е. многочлен $Q_1(x)$ является наибольшим общим делителем многочлена $Q(x)$ и его производной $Q'(x)$ (см. (23.23)).

Формула (24.8) называется формулой *Остроградского* *). Второе слагаемое правой части формулы (24.8) называется трансцендентной частью интеграла $\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$; это естественно, ибо из сказанного выше следует, что всякая первообразная дроби $P_2(x)/Q_2(x)$ с точностью до постоянного слагаемого представляет собой линейную комбинацию логарифмов и арктангенсов от рациональных функций и, значит, как это можно показать, будет являться, вообще говоря, трансцендентной функцией. Первое же слагаемое, называемое алгебраической частью, может быть найдено чисто алгебраическим путем, если известны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ (а значит, и $Q'(x)$), т. е. без интегрирования каких-либо функций. В самом деле, многочлен $Q_1(x)$, являясь наибольшим общим делителем многочленов $Q(x)$ и $Q'(x)$, всегда может быть найден с помощью алгоритма Евклида (см. п. 23.5*), тем самым для отыскания

*) М. В. Остроградский (1801—1861) — русский математик.

многочлена $Q_1(x)$ не требуется знания корней многочлена $Q(x)$; однако, если корни многочлена $Q(x)$ известны, а значит, известно и его разложение вида (23.17), то многочлен $Q_1(x)$ сразу выписывается по формуле (23.23). Многочлен $Q_2(x)$ находится как частное от деления $Q(x)$ на $Q_1(x)$.

Для отыскания же многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ можно применить метод неопределенных коэффициентов. Поясним его. Обозначим степень многочлена $Q_1(x)$ через n_1, степень многочлена $Q_2(x)$ — через n_2; тогда из равенства

$$Q(x)=Q_1(x)\,Q_2(x) \tag{24.9}$$

получим $n=n_1+n_2$. В силу того что дроби $P_1(x)/Q_1(x)$ и $P_2(x)/Q_2(x)$ правильные, степени многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ соответственно не выше, чем n_1-1 и n_2-1 и, значит, в этих многочленах число отличных от нуля коэффициентов соответственно не превышает n_1 и n_2; таким образом, число неизвестных коэффициентов равно $n_1+n_2=n$. Дифференцируя первообразные, входящие в обе части формулы (24.8), получим (опуская для краткости обозначение аргумента) соотношение

$$\frac{P}{Q}=\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)'+\frac{P_2}{Q_2}.$$

Производя дифференцирование, будем иметь

$$\frac{P}{Q}=\frac{P_1'Q_1-P_1Q_1'}{Q_1^2}+\frac{P_2}{Q_2}. \tag{24.10}$$

Заметим, что

$$\frac{P_1'Q_1-P_1Q_1'}{Q_1^2}=\frac{P_1'Q_2-P_1R}{Q_1Q_2}, \tag{24.11}$$

где $R=Q_1'Q_2/Q_1$ является многочленом. Действительно, если z — корень многочлена Q_1 кратности λ, то, как мы знаем (см. п. 23.4), z является корнем кратности $\lambda-1$ для производной Q_1' и однократным корнем многочлена Q_2, поэтому в этом случае z является и корнем кратности λ для многочлена $Q_1'Q_2$. Отсюда, согласно формуле (23.7), сразу следует, что многочлен $Q_1'Q_2$ нацело делится на многочлен Q_1, т. е. что R также является многочленом. Итак, из (24.9), (24.10) и (24.11) имеем

$$\frac{P}{Q}=\frac{P_1'Q_2-P_1R}{Q}+\frac{P_2}{Q_2},$$

откуда

$$P=P_1'Q_2-P_1R+P_2Q_1. \tag{24.12}$$

Многочлен P имеет степень не выше, чем $n-1$ (ибо дробь P/Q — правильная). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях k, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, переменного x в обеих частях равенства (24.12), получим n линейных уравнений относительно n неизвестных. Выше было доказано (см. (24.8)), что многочлены P_1 и P_2 всегда (в частности, при некотором фиксированном многочлене Q и при любом многочлене P степени, не превышающей $n-1$) существуют; поэтому полученная система линейных уравнений имеет решение при любой правой части *). Отсюда следует, что определитель этой системы не равен нулю, а значит, про рассматриваемую систему можно сказать, что она не только имеет решение, но и что оно единственно. Тем самым не только получен метод для определения неизвестных коэффициентов в формуле (24.8), но и доказана единственность этого представления.

Формула (24.8) сводит, вообще говоря, задачу интегрирования любой правильной рациональной дроби к задаче интегрирования правильной рациональной дроби, у которой знаменатель $Q(x)$ имеет только простые корни. С помощью этой формулы при интегрировании правильной рациональной дроби можно найти указанным выше путем алгебраическую часть интеграла $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, а затем проинтегрировать более простую рациональную дробь $P_2(x)/Q_2(x)$, если, конечно, случайно не окажется, что $P_2(x)$ — тождественный ноль: в этом случае задача будет уже решена.

Описанный здесь метод интегрирования рациональных дробей носит название *метода Остроградского*.

При использовании метода Остроградского для интегрирования рациональных дробей часто оказывается целесообразней записывать формулу Остроградского (24.8) в виде (24.7), так как в этом случае после нахождения неизвестных коэффициентов в подынтегральной функции ее сразу можно проинтегрировать.

Неизвестные коэффициенты в формуле (24.7) находятся тем же методом, который был описан для формулы (24.8): следует продифференцировать обе части равенства (24.7), привести к общему знаменателю все рациональные дроби, получившиеся в обеих частях равенства, приравнять коэффициенты у одинаковых степеней переменной x в многочленах, стоящих в числителях, и решить получившуюся систему линейных уравнений.

Пример. Применим метод Остроградского для вычисления интеграла $\int \frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}\,dx$. Согласно формуле (24.8),

$$\int \frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}\,dx = \frac{Kx^3+Lx^2+Mx+N}{(1-x)^2(1+x^2)} + \int \frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}\,dx,$$

поэтому

$$\frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(x^2+1)^2} = \left[\frac{Kx^2+Lx^2+Mx+N}{(1-x)^2(1+x^2)}\right]' + \frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}.$$

*) Как обычно, предполагается, что все члены уравнений, содержащие неизвестные, и только они перенесены в левую часть равенства.

Произведя дифференцирование, получим

$$\frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{\begin{array}{r}(3Kx^2+2Lx+M)(1-x)(x^2+1)-(Kx^3+Lx^2+Mx+N)\times\\ \times[-2(1+x^2)+(1-x)2x]\end{array}}{(1-x)^3(1+x^2)^2}+$$

$$+\frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}.$$

Отсюда имеем:

$$x^4+2x^3-2x^2+x=(3Kx^2+2Lx+M)(-x^3+x^2-x+1)-$$
$$-(Kx^3+Lx^2+Mx+N)(-4x^2+2x-2)+$$
$$+(kx^2+lx+m)(x^4-2x^3+2x^2+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\begin{gathered}M+2N+m=0,\\ -M+2L+2M-2N-2m+l=1,\\ 3K-2L+M+2L-2M+4N+k-2l+2m=-2,\\ -M+2L-3K+2K-2L+4M-2K+2l-2m=2,\\ 3K-2L-2K+4L+2k-2l+m=1,\\ -3K+4K-2k+l=0,\\ k=0,\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}M+2N+m=0,\\ 2L+M-2N+l-2m=1,\\ 3K-M+4N+k-2l+2m=-2,\\ -K+3M-2k+2l-2m=2,\\ K+2L+2k-2l+m=1,\\ K-2k+l=0,\\ k=0.\end{gathered}$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$K=\frac{1}{2},\quad L=-\frac{1}{2},\quad M=\frac{3}{2},\quad N=-1,$$
$$k=0,\quad l=-\frac{1}{2},\quad m=\frac{1}{2};$$

поэтому

$$\int\frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(x^2+1)^2}\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{x^3-x^2+3x-2}{(1-x)^2(1+x^2)}+$$
$$+\frac{1}{2}\int\frac{-x+1}{(1-x)(1+x^2)}\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{x^3-x^2+3x-2}{(1-x)^2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

§ 25. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

25.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Функции вида

$$R(u_1, \ldots, u_n) = \frac{P(u_1, \ldots, u_n)}{Q(u_1, \ldots, u_n)}, \tag{25.1}$$

где P и Q — многочлены от переменных $u_1, \ldots, u_n$, т. е. функции вида

$$\sum_{k_1+\ldots+k_n \leqslant k} a_{k_1, \ldots, k_n} u_1^{k_1} \ldots u_n^{k_n},$$

называются *рациональными функциями от* $u_1, \ldots, u_n$.

Если в формуле (25.1) переменные $u_1, \ldots, u_n$ в свою очередь являются функциями переменной $x: u_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то функция

$$R[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)]$$

называется *рациональной функцией* от функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Например, функция

$$f(x) = \frac{x + \sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x^2+1}}$$

является рациональной функцией от x и радикалов $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2-1}$, и $\sqrt{x^2+1}$:

$$f(x) = R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x^2-1}, \sqrt{x^2+1}\right);$$

здесь $R(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{u_1 + u_3^2}{u_2 - u_4}$, $u_1 = x$, $u_2 = \sqrt{x}$, $u_3 = \sqrt[3]{x^2-1}$, $u_4 = \sqrt{x^2+1}$.

Если в формуле (25.1) переменные $u_1, \ldots, u_n$ являются элементарными тригонометрическими функциями, то получающаяся сложная функция называется рациональной относительно элементарных тригонометрических функций. Примером такой функции является следующая:

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^3 x + \cos x} = R(\sin x, \cos x).$$

Перейдем теперь к интегралам от функций рассмотренных типов и покажем, что в ряде случаев они сводятся к интегралам от рациональных функций.

25.2. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx$.

Рассмотрим интегралы, указанные в заглавии пункта, при условии, что постоянные $r_1, \ldots, r_s$ рациональны, и $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (a, b, c, d — постоянные). Последнее предположение естественно, так как если $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, то коэффициенты a, b были бы пропорциональны коэффициентам c, d и поэтому отношение $\frac{ax+b}{cx+d}$ не зависело бы от x. Подынтегральная функция в этом случае была бы обыкновенной рациональной дробью от одного переменного, вопрос об интегрировании которой был рассмотрен выше.

Пусть m — общий знаменатель чисел $r_1, \ldots, r_s$:

$$r_i = \frac{p_i}{m}, \quad p_i \text{ — целое}, \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Положим

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}, \tag{25.2}$$

откуда

$$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} = \rho(t); \tag{25.3}$$

$\rho(t)$ является рациональной функцией, поэтому $\rho'(t)$ также рациональная функция; далее,

$$dx = \rho'(t)\, dt, \tag{25.4}$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i} = t^{mr_i} = t^{p_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{25.5}$$

Подставляя (25.3), (25.4) и (25.5) в подынтегральное выражение рассматриваемого интеграла, получим

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx =$$

$$= \int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \ldots, t^{p_s}\right) \rho'(t)\, dt = \int R^*(t)\, dt,$$

где $R^*(t) = R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \ldots, t^{p_s}\right) \rho'(t)$, очевидно, является рациональной функцией переменного t. Таким образом, вычисление интеграла

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx \tag{25.6}$$

сводится к интегрированию рациональных дробей.

Конечно, для того чтобы найти выражение для исходного интеграла, надо после вычисления интеграла $\int R^*(t)\, dt$, сделав обратную замену переменного $t=((ax+b)/(cx+d))^{1/m}$, вернуться к первоначальной переменной x. В дальнейшем в аналогичных ситуациях мы не будем каждый раз оговаривать необходимость обратного перехода к исходной переменной x.

Отметим, что, в частности, к рассмотренному типу интегралов относятся интегралы вида

$\int R[x, (ax+b)^{r_1}, \ldots, (ax+b)^{r_s}]\,dx$, в частности $\int R(x, x^{r_1}, \ldots, x^{r_s})\,dx$.

Пример. Вычислим интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. Полагая, согласно общему правилу, $x=t^6$, $dx=6t^5\,dt$, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=6\int \frac{t^3}{t+1}dt=6\left[\int (t^2-t+1)\,dt-\int \frac{dt}{t+1}\right]=$$
$$=6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right]+C=$$
$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C.$$

К интегралам вида (25.6) сводятся иногда с помощью элементарных преобразований и интегралы других типов, например, типа

$$\int \sqrt{(x-a)(x-b)}\,dx.$$

Покажем метод вычисления подобных интегралов на примере интеграла

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)}\,dx. \tag{25.7}$$

Вынося в подынтегральной функции множитель $(x-1)$ за знак радикала, получим интеграл вида (25.6): именно при $x \geqslant 2$

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)}\,dx=\int (x-1)\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\,dx,$$

а при $x<1$

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)}\,dx=\int (1-x)\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\,dx.$$

При $1<x<2$ подынтегральное выражение чисто мнимое.

Рассмотрим, например, случай $x \geqslant 2$. Положим здесь (см. (25.2)) $t^2=\frac{x-2}{x-1}$, тогда

$$x=\frac{2-t^2}{1-t^2},\quad dx=\frac{2t\,dt}{(1-t^2)^2},$$

поэтому

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)}\,dx=\int \left(\frac{2-t^2}{1-t^2}-1\right)\frac{2t^2\,dt}{(1-t^2)^2}=2\int \frac{t^2\,dt}{(1-t^2)^3}$$

— получился интеграл от рациональной дроби, который был вычислен раньше (см. п. 24.2).

25.3. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$. ПОДСТАНОВКИ ЭЙЛЕРА

Указанные интегралы могут быть сведены с помощью замены переменного к рациональным функциям. Рассмотрим три замены переменного, носящие название *подстановок Эйлера* *). Итак, пусть дан интеграл

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \quad a \neq 0. \tag{25.8}$$

Первый случай: $a>0$.

Сделаем замену x на t следующим образом:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t \tag{25.9}$$

(знаки можно брать в любой комбинации). Возведем обе части написанного равенства в квадрат:

$$ax^2+bx+c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}\,xt + t^2,$$

отсюда

$$x = \frac{t^2-c}{b \mp 2t\sqrt{a}} = R_1(t),$$

$R_1(t)$ — рациональная функция от t, значит $R_1'(t)$ — также рациональная функция.

Далее, $dx = R_1'(t)\,dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm R_1(t)\sqrt{a} \pm t = R_2(t)$, где, очевидно, $R_1(t)$ — рациональная функция. Окончательно,

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx =$$
$$= \int R(R_1(t), R_2(t))\, R_1'(t)\, dt = \int R^*(t)\, dt,$$

где $R^*(t) = R(R_1(t), R_2(t))\, R_1'(t)$ — рациональная дробь. □

Второй случай: корни трехчлена ax^2+bx+c действительные.

Пусть x_1 и x_2 действительны и являются корнями трехчлена ax^2+bx+c. Если $x_1=x_2$, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)^2} = |x-x_1|\sqrt{a}.$$

Отсюда следует, что в этом случае либо под корнем стоит отрицательная при всех значениях $x \neq x_1$ величина, т. е. корень принимает только чисто мнимые выражения, — этот случай имеет место при $a<0$ и мы его не рассматриваем, либо при $a \geqslant 0$ после указанного элементарного преобразования получаем, что переменное x не входит под знак корня, т. е. под интегралом

*) Л. Эйлер (1707—1783) — швейцарский математик.

стоит просто рациональная функция от x, вообще говоря, разная для каждого из промежутков $(-\infty, x_1)$ и $(x_1, +\infty)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $x_1 \neq x_2$. Замечая, что $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, и вынося $x-x_1$ из-под знака корня, получаем, что

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = R\left(x, |x-x_1| \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right) = \\ = R_3\left(x, \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right), \quad (25.10)$$

здесь $R_3(u, v)$ — рациональная функция переменных u и v.

Как известно (см. п. 25.1), интеграл от функции (25.10) может быть вычислен с помощью подстановки (см. 25.2) $t^2=\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}$, что в нашем случае дает

$$\pm(x-x_1)t=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)},$$

или, беря $t>0$ при $x \geqslant x_1$ и $t<0$ при $x \leqslant x_1$, $(x-x_1)t = \sqrt{ax^2+bx+c}$. $\square$

Рассмотренный в предыдущем пункте интеграл (25.7) является примером случая 2; этот интеграл был сведен выше к рациональной дроби приемом, разобранным сейчас в общем случае.

Два изученных нами способа вычисления интеграла (25.8) позволяют всегда свести этот интеграл к интегралу от рациональной дроби на любом промежутке, если только корень $\sqrt{ax^2+bx+c}$ на этом промежутке не принимает чисто мнимые значения (естественно, изучая анализ в действительной области, исключить этот случай из рассмотрения). В самом деле, допустим, что ни первый, ни второй случай не имеют места, т. е. $a<0$ и корни x_1 и x_2 трехчлена ax^2+bx+c существенно комплексны: $x_1=g+hi$, $x_2=g-hi$, $h \neq 0$. Тогда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}= \\ =\sqrt{a(x-g-hi)(x-g+hi)}=\sqrt{a[(x-g)^2+h^2]},$$

и так как $a<0$, а $h \neq 0$, то под корнем при любых x стоит отрицательное выражение. $\square$

Третий случай: $c>0$.

В этом случае можно применить подстановку

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c} \pm xt$$

(комбинация знаков произвольна). Возводя в квадрат, получим равенство

$$ax^2+bx=\pm 2\sqrt{c}\,xt+x^2t^2,$$

откуда

$$x=\frac{b \mp 2t\sqrt{c}}{t^2-a}=R_4(t), \quad dx=R_4'(t)\,dt,$$

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm R_4(t)\,t=R_5(t)$, где $R_4(t)$, $R_4'(t)$ и $R_5(t)$ суть рациональные функции t. Поэтому

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(R_4(t), R_5(t)\right)R_4'(t)\,dt=\int \tilde{R}(t)\,dt,$$

где $\tilde{R}(t)=R\left(R_4(t), R_5(t)\right)R_4'(t)$ — рациональная дробь. $\square$

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\right)dx$ сводятся подстановкой

$$t^2=ax+b \tag{25.11}$$

к рассмотренным интегралам вида (25.8).

В самом деле, из (25.11) имеем:

$$x=\frac{t^2-b}{a},\quad dx=\frac{2}{a}t\,dt, \sqrt{cx+d}=\sqrt{\frac{c}{a}t^2-\frac{cb}{a}+d}=\sqrt{At^2+B},$$

где $A=\frac{c}{a}$, $B=-\frac{cb}{a}+d$, поэтому

$$\int R\left(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\right)dx=\int R_6\left(t, \sqrt{At^2+B}\right)dt,$$

где $R_6(u, v)$—рациональная функция переменных u и v. В правой части последнего равенства стоит интеграл типа (25.8). $\square$

Вычисление интегралов с помощью подстановок Эйлера обычно приводит к громоздким выражениям, поэтому их следует применять, вообще говоря, лишь тогда, когда рассматриваемый интеграл не удается вычислить другим более коротким способом. Например, замечая, что $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$, нетрудно убедиться, что интеграл (25.8) в случае, когда подкоренное выражение положительно на некотором интервале, с помощью линейной подстановки может быть приведен (ср. п. 22.3) к одному из трех интегралов:

$$\int R\left(t, \sqrt{1-t^2}\right)dt,\quad \int R\left(t, \sqrt{t^2-1}\right)dt,\quad \int R\left(t, \sqrt{t^2+1}\right)dt$$

(конечно, здесь символом R обозначена, вообще говоря, другая, чем в формуле (25.8), рациональная функция). Для вычисления полученных интегралов часто оказывается очень удобным использовать тригонометрические подстановки

$$t=\sin u,\quad t=\cos u,\quad t=\operatorname{tg} u,$$

а также гиперболические подстановки

$$t=\operatorname{sh} u,\quad t=\operatorname{ch} u,\quad t=\operatorname{th} u.$$

25.4. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО БИНОМА

Выражение $x^m(a+bx^n)^p\,dx$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$ называется *дифференциальным биномом*. Будем рассматривать случаи, когда n, m и p — рациональные, а a и b действительные числа.

Положим

$$x=t^{1/n}, \tag{25.12}$$

тогда

$$dx=\frac{1}{n}t^{1/n-1}\,dt \quad \text{и} \quad \int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{1}{n}\int (a+bt)^p t^{\frac{m+1}{n}-1}\,dt.$$

Таким образом, интеграл

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx \tag{25.13}$$

сводится подстановкой (25.12) к интегралу типа

$$\int (a+bt)^p t^q\,dt, \tag{25.14}$$

где p и q рациональны. В рассматриваемом случае

$$q=\frac{m+1}{n}-1.$$

Первый случай: p—целое число.

Пусть $q=\frac{r}{s}$, где r и s—целые числа. Согласно результатам п. 25.2 в этом случае подстановка $z=t^{1/s}$ сводит интеграл (25.14) к интегралу от рациональной дроби.

Второй случай: q—целое число.

Пусть теперь $p=r/s$, r и s—целые числа. Согласно результатам пункта 25.2, интеграл (25.14) приводится в этом случае подстановкой $z=(a+bt)^{\frac{1}{s}}$ к интегралу от рациональной дроби.

Третий случай: $p+q$—целое.

Пусть $p=r/s$ и s—целые. Запишем для наглядности интеграл (25.14) несколько в другом виде:

$$\int (a+bt)^p t^q\,dt=\int\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p+q}dt.$$

Снова имеем интеграл типа, рассмотренного в том же п. 25.2. На этот раз к интегралу от рациональной дроби его приводит подстановка

$$z=\left(\frac{a+bt}{t}\right)^{1/s}.$$

Итак, в трех случаях, когда одно из чисел p, q или $p+q$ является целым, интеграл (25.14) при помощи указанных выше подстановок приводится к интегралу от рациональной дроби.

Применительно к интегралу (25.13) этот результат выглядит следующим образом: когда одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n}+p$ является целым, интеграл (25.13) может быть сведен к интегралу от рациональной дроби. При этом в случае, когда p целое, это сведе́ние осуществляет подстановка

$$z = x^{n/s},$$

где число s является знаменателем дроби $\frac{m+1}{n}$, т. е. $\frac{m+1}{n} = \frac{r}{s}$; в случае, когда $\frac{m+1}{n}$ целое, — подстановка

$$z = (a + bx^n)^{1/s},$$

где число s является знаменателем дроби p, т. е. $p = r/s$; а в случае, когда $\frac{m+1}{n} + p$ целое, — подстановка

$$z = (ax^{-n} + b)^{1/s},$$

где число s также является знаменателем дроби p.

П. Л. Чебышев*) показал, что при показателях m, n и p, не удовлетворяющих вышеуказанным условиям, интеграл (25.13) не выражается через элементарные функции.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I = \int \sqrt{x} \sqrt[4]{1 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}}\, dx = \int x^{1/2} \left(1 - x^{-\frac{3}{2}}\right)^{1/4} dx.$$

Здесь $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{3}{2}$, $p = \frac{1}{4}$ и $(m+1)/n = -1$; имеем второй случай.

Сделаем указанную выше подстановку:

$$z = (1 - x^{-3/2})^{1/4}; \tag{25.15}$$

отсюда

$$x = (1 - z^4)^{-2/3}, \quad dx = \frac{8}{3} (1 - z^4)^{-5/3} z^3\, dz,$$

и потому

$$I = \frac{8}{3} \int \frac{z^4}{(1-z^4)^2} dz = \frac{2}{3} \int z d \frac{1}{1-z^4} = \frac{2}{3} \left(\frac{z}{1-z^4} - \int \frac{dz}{1-z^4} \right) =$$
$$= \frac{2z}{3(1-z^4)} - \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{1+z^2} \right) dz =$$
$$= \frac{2z}{3(1-z^4)} - \frac{1}{6} \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} z + C,$$

где z выражается через x согласно формуле (25.15).

*) П. Л. Чебышев (1821 — 1894) — русский математик.

25.5. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \quad a \neq 0,$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 1$. С принципиальной точки зрения этот интеграл всегда можно свести к интегралу от рациональной дроби с помощью одной из подстановок Эйлера (см. п. 25.3). Однако в данном конкретном случае значительно быстрее к цели приводит обычно другой прием.

Именно покажем, что справедлива формула

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \\ = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (25.16)$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени не выше, чем $n-1$, а α — некоторое число.

Итак, пусть многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \qquad (25.17)$$

задан. Если существует многочлен

$$P_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0, \qquad (25.18)$$

удовлетворяющий условию (25.16), то, дифференцируя это равенство, получим:

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \\ = P'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{P_{n-1}(x)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\alpha}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

или

$$2P_n(x) = 2P'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + P_{n-1}(x)(2ax+b) + 2\alpha. \qquad (25.19)$$

Здесь слева стоит многочлен степени n, а справа каждое слагаемое также является многочленом степени не больше n.

Замечая, что

$$P'_{n-1}(x) = (n-1)b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + kb_k x^{k-1} + \ldots + b_1, \qquad (25.20)$$

и подставляя (25.17), (25.18) и (25.20) в (25.19), имеем равенства

$$2(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) = \\ = 2(ax^2+bx+c)[(n-1)b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + kb_k x^{k-1} + \ldots + b_1] + \\ + (2ax+b)(b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_k x^k + \ldots + b_0) + 2\alpha.$$

Приравнивая коэффициенты у одинаковых степеней x, получим следующую систему $n+1$ линейных уравнений с $n+1$ неизвестными $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, \alpha$:

$$
\begin{gathered}
2a_0 = 2cb_1 + bb_0 + 2\alpha, \\
2a_1 = 2bb_1 + 4cb_2 + 2ab_0 + bb_1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
2a_k = 2(k-1)ab_{k-1} + 2kbb_k + 2(k+1)cb_{k+1} + 2ab_{k-1} + bb_k, \qquad (25.21) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
2a_{n-1} = 2(n-2)ab_{n-2} + 2(n-1)bb_{n-1} + 2ab_{n-2} + bb_{n-1}, \\
2a_n = 2(n-1)ab_{n-1} + 2ab_{n-1}.
\end{gathered}
$$

Из последнего уравнения сразу находится b_{n-1}:

$$b_{n-1} = \frac{a_n}{na}.$$

Подставляя это выражение в предпоследнее уравнение и замечая, что в этом уравнении коэффициент у неизвестного b_{n-2} равен $2a(n-1) \neq 0$ найдем значение b_{n-2}. Подставляя далее значения b_{n-1} и b_{n-2} в предыдущее уравнение, найдем значение b_{n-3}, и т. д. Последовательно получим все значения неизвестных b_k ($k=0$, $1 \ldots, n-1$). После этого из первого уравнения сразу находится неизвестное α.

Таким образом, система (25.21) имеет решение при любых значениях $a_0, a_1, \ldots, a_n$, поэтому определитель этой системы не равен нулю и указанное решение единственно.

На практике многочлен $P_{n-1}(x)$ в формуле (26.16) пишут с неопределенными коэффициентами, которые находят, решая систему (25.21). После этого вычисление данного интеграла сводится к вычислению интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

который в случае, когда подкоренное выражение положительно на некотором промежутке, легко сводится к табличному (см. п. 22.3).

Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(x-\lambda)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

подстановкой

$$t = \frac{1}{x-\lambda}$$

сводятся к интегралам рассмотренного типа (25.16).

§ 26. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

26.1. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Подстановка

$$u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi,$$

сводит указанный в заглавии интеграл к интегралу от рациональной дроби. Действительно, имеем

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \tag{26.1}$$

$$x = 2\operatorname{arctg} u, \quad dx = \frac{2\,du}{1+u^2},$$

поэтому

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2}.$$

Таким образом, получился интеграл от рациональной функции.

Вычислим указанным методом интеграл $\int \frac{dx}{1+\sin x}$. Используя формулы (26.1), получим:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = 2\int \frac{du}{(1+u)^2} = -\frac{2}{1+u}+C = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$$

Следует, однако, иметь в виду, что, хотя с принципиальной точки зрения рассматриваемые интегралы всегда можно привести к интегралу от рациональной дроби указанным методом, при практическом его применении он часто приводит к громоздким вычислениям; вместе с тем другие методы, в частности подстановки вида

$$u = \sin x, \quad u = \cos x, \quad u = \operatorname{tg} x, \tag{26.2}$$

иногда значительно быстрее позволяют вычислить нужный интеграл.

Примеры. 1. Рассмотрим интеграл $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. Представим его в виде $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x}$. Сразу видно, что в этом случае очень удобна подстановка $u=\operatorname{tg} x$:

$$\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\int(1+\operatorname{tg}^2 x)\,d\operatorname{tg} x=\int(1+u^2)\,du=$$
$$=u+\frac{u^3}{3}+C=\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+C.$$

2. Представляя интеграл $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$ в виде $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}=$ $=\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^4 x\cos x}$, убеждаемся в целесообразности подстановки $u=$ $=\cos x$. Действительно,

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}=-\int\frac{d\cos x}{\sin^4 x\cos x}=-\int\frac{du}{(1-u^2)^2 u}=-\frac{1}{2}\int\frac{du^2}{(1-u^2)^2u^2}=$$
$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dv}{(1-v)^2v}{}^{*)}=-\frac{1}{2}\int\frac{(1-v)+v}{(1-v)^2v}\,dv=$$
$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dv}{(1-v)v}-\frac{1}{2}\int\frac{dv}{(1-v)^2}=-\frac{1}{2}\int\frac{(1-v)+v}{(1-v)v}\,dv-\frac{1}{2}\frac{1}{1-v}=$$
$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dv}{v}-\frac{1}{2}\int\frac{dv}{1-v}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-v}=-\frac{1}{2}\ln|v|+$$
$$+\frac{1}{2}\ln|1-v|-\frac{1}{2}\frac{1}{1-v}+C=\ln|\operatorname{tg} x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C.$$

Конечно, интегралы, рассмотренные в примерах 1 и 2, могут быть вычислены и с помощью подстановки (26.1), например,

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}=\frac{1}{4}\int\frac{(1+u^2)^3\,du}{u^3(1-u^2)};$$

однако, при таком способе пришлось бы интегрировать более сложную рациональную дробь, чем в результате применения подстановки $u=\cos x$.

3. Иногда при вычислении интегралов, подынтегральное выражение которых содержит $\sin x$ и $\cos x$, бывает полезно прибегать и к другим искусственным приемам, используя известные тригонометрические формулы, как, например, формулу $\sin^2 x+\cos^2 x=$ $=1$. Покажем на рассмотренном только что примере способ применения этой формулы:

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cos x}\,dx=\int\frac{dx}{\sin x\cos x}+\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x}=$$
$$=\int\frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}+\int\frac{d\sin x}{\sin^3 x}=\int\frac{du}{u}+\int\frac{dv}{v^3}{}^{*)}=$$
$$=\ln|u|-\frac{1}{2}\frac{1}{v^2}+C=\ln|\operatorname{tg} x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C.$$

Как и следовало ожидать, получился тот же результат, что и выше.

*) Здесь сделана подстановка $v=u^2$.

26.2. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Пусть m и n — рациональные числа. Интеграл $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ с помощью подстановок $u = \sin x$ или $u = \cos x$ сводится к интегралу от дифференциального бинома.

Действительно, полагая, например, $u = \sin x$, получим

$$\cos x = (1 - u^2)^{1/2}, \quad du = \cos x\, dx, \quad dx = (1 - u^2)^{-1/2}\, du,$$

и потому

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int u^m (1 - u^2)^{\frac{n-1}{2}}\, du.$$

Таким образом, интеграл $\int \sin^m x \cos^m x\, dx$ выражается или нет через элементарные функции в зависимости от того, обладает этим свойством или нет получающийся интеграл от дифференциального бинома.

В случае когда m и n целые (не обязательно положительные) числа, интеграл $\int \sin^m x \cos^m x\, dx$ относится к типу интегралов, рассмотренных в предыдущем пункте, в частности, для их вычисления целесообразно применять подстановки (26.2).

Например, если $m = 2k + 1$ (соответственно $n = 2k + 1$) — нечетное число, то можно сделать подстановку $u = \cos x$ (соответственно $u = \sin x$):

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x\, dx = -\int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x d \cos x =$$
$$= -\int (1 - u^2)^k u^n\, du.$$

Рассматриваемый интеграл сведен к интегралу от рациональной дроби.

Аналогичный результат можно получить и для интеграла $\int \sin^m x \cos^{2k+1} x\, dx$ с помощью подстановки $u = \sin x$.

Если $m = 2k + 1$, $n = 2l + 1$, то бывает полезной подстановка $t = \cos 2x$:

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^{2l+1} x\, dx = \int \sin^{2k} x \cos^{2l} x \sin x \cos x\, dx =$$
$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^l \left(-\frac{1}{2}\, d \cos 2x\right) =$$
$$= -\frac{1}{2^{k+l+1}} \int (1 - t)^k (1 + t)^l\, dt,$$

т. е. снова получился интеграл от рациональной дроби.

Если оба показателя m и n положительны и четны (или один из них ноль), то целесообразно применять формулы

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

которые, очевидно, приводят рассматриваемый интеграл к интегралам того же типа, но с меньшими, также неотрицательными показателями. Например,

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

26.3. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int \sin\alpha x \cos\beta x\,dx$

Указанные в заглавии пункта интегралы непосредственно вычисляются, если в них подынтегральные функции преобразовать согласно формулам

$$\sin\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x],$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x],$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x].$$

Например,

$$\int \sin 2x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin 3x + \sin x)\,dx = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C.$$

26.4. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ, ВЫЧИСЛЯЮЩИЕСЯ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

К числу интегралов, указанных в заглавии этого пункта, относятся, например, интегралы

$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$, $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$, $\int x^n\cos\alpha x\,dx$, $\int x^n\sin\alpha x\,dx$, $\int x^n e^{\alpha x}\,dx$, $\int x^n\arcsin x\,dx$, $\int x^n\arccos x\,dx$, $\int x^n \operatorname{arctg} x\,dx$, $\int x^n \operatorname{arcctg} x\,dx$, $\int x^n\ln x\,dx$ (n — целое неотрицательное).

Все эти интегралы вычисляются с помощью, вообще говоря, повторного интегрирования по частям.

Действительно, имеем:

$$I = \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \int e^{\alpha x}\,d\,\frac{\sin\beta x}{\beta} = \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}d\left(-\frac{\cos\beta x}{\beta}\right) =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} + \frac{\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}I,$$

откуда

$$I = \frac{e^{\alpha x}(\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} + C. \qquad (26.3)$$

Аналогично вычисляется и интеграл $\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx$.

В интегралах $\int x^n \cos \alpha x \, dx$, $\int x^n \sin \alpha x \, dx$, $\int x^n e^{\alpha x} \, dx$, положив $u = x^n$ и соответственно $dv = \cos \alpha x \, dx$, $dv = \sin \alpha x \, dx$, $dv = e^{\alpha x} \, dx$, после интегрирования по частям снова придем к интегралу одного из указанных видов, но уже с меньшим на единицу показателем степени. Применяя этот прием n раз, придем к интегралу рассматриваемого типа с $n = 0$, который, очевидно, сразу берется. Например,

$$\int x^2 \sin x \, dx = \int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx =$$
$$= -x^2 \cos x + 2 \int x d \sin x = -x^2 \cos x + 2x \sin x -$$
$$- 2 \int \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Используя интегралы, рассмотренные выше, можно вычислять и более сложные интегралы. Вычислим, например, интеграл

$$\int x^n e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx.$$

Интегрируя по частям и применяя (26.3), имеем:

$$\int x^n e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx = \int x^n d \left[\frac{e^{\alpha x}(\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} \right] =$$
$$= x^n e^{\alpha x} \frac{\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{n\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \int x^{n-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx -$$
$$- \frac{n\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \int x^{n-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx.$$

Полученные в правой части интегралы — того же типа, что и исходный, только степень у x на единицу меньше. Применяя последовательно указанный прием, мы придем к интегралам вида

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx \quad \text{и} \quad \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx,$$

которые были рассмотрены выше.

Наконец, интегралы

$$\int x^n \arcsin x \, dx, \ \int x^n \arccos dx, \ \int x^n \operatorname{arctg} x \, dx,$$
$$\int x^n \operatorname{arcctg} x \, dx \ \text{ и } \ \int x^n \ln x \, dx$$

сводятся интегрированием по частям к интегралу от алгебраической функции, если в них положить $dv = x^n dx$, а за функцию u взять оставшуюся трансцендентную функцию, т. е. одну из функций: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\ln x$. Например,

$$\int x \ln x \, dx = \int \ln x \, d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

26.5. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$

Подстановка

$$u = \operatorname{th}\frac{x}{2}$$

сводит интеграл $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$ к интегралу от рациональной дроби.

Действительно, при указанной замене переменной имеем

$$\operatorname{sh} x = \frac{2u}{1-u^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+u^2}{1-u^2}, \quad dx = \frac{2du}{1-u^2},$$

поэтому

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1-u^2}, \frac{1+u^2}{1-u^2}\right)\frac{du}{1-u^2}.$$

В конкретных примерах иногда оказывается значительно удобнее использовать подстановки вида $u = \operatorname{sh} x$, $u = \operatorname{ch} x$ или $u = \operatorname{th} x$, позволяющие вычислить интеграл существенно проще (ср. п. 26.1).

Интегралы вида

$$\int \operatorname{sh}^m x \operatorname{ch}^n x\,dx,$$

где m и n — рациональные числа, с помощью подстановок $v = \operatorname{sh} x$ $(u = \operatorname{ch} x)$ приводятся к интегралу от дифференциального бинома (ср. п. 26.2).

26.6. ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ИНТЕГРАЛАХ, НЕ ВЫРАЖАЮЩИХСЯ ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Мы рассмотрели различные классы элементарных функций и нашли их первообразные, которые также являются элементарными функциями. Однако не всякая элементарная функция имеет в качестве своей первообразной элементарную же функцию. С подобным обстоятельством мы уже встретились при рассмотрении интеграла от дифференциального бинома: в этом случае подынтегральная функция — элементарная (иррациональная), а интеграл от нее, как отмечалось, вычисляется далеко не всегда.

Можно показать, что интегралы

$$\int \frac{e^x}{x^n}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x^n}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x^n}\,dx$$

(n — натуральное число) также не выражаются через элементарные функции.

Имеется ряд интегралов от элементарных функций, не выражающихся через элементарные функции и играющих большую роль как в самом математическом анализе, так и в его разнообразных приложениях. К таким интегралам относится, например, интеграл

$$\int e^{-x^2}\,dx,$$

а также так называемые *эллиптические интегралы*

$$\int R\left(x,\ \sqrt{P(x)}\right)dx,$$

где $P(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени. В общем случае эти интегралы не выражаются через элементарные функции. Особенно часто встречаются интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \text{и} \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad 0<k<1,$$

которые подстановкой $x=\sin\varphi$ приводятся к линейным комбинациям интегралов

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{и} \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi;$$

они называются соответственно эллиптическими интегралами *первого и второго рода в форме Лежандра* *).

Упражнения. Вычислить интегралы.

1. $\int |x|\,dx.$
2. $\int (2x-5)^3\,dx.$
3. $\int \sin^2 x\,dx.$
4. $\int \left(2x^2-3x+\frac{1}{x}\right)dx.$
5. $\int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$
6. $\int x^2\sqrt[5]{2x^3-1}\,dx.$
7. $\int \frac{dx}{\cos x}.$
8. $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$
9. $\int xe^{-x}\,dx.$
10. $\int \ln x\,dx.$
11. $\int \operatorname{arctg} x\,dx.$
12. $\int x^2\ln x\,dx.$
13. $\int \sqrt{x^2+3}\,dx.$
14. $\int \sqrt{x^2-1}\,dx.$
15. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}.$
16. $\int \frac{x^4+1}{x^2(x-1)(x+1)^2}\,dx.$
17. $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx.$
18. $\int \frac{dx}{(1-x)(1+x^3)}.$
19. $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx.$
20. $\int \frac{x^7\,dx}{x^{16}+1}.$
21. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}.$
22. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx.$
23. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}.$
24. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$
25. $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx.$
26. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}.$
27. $\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+2x+4}}.$
28. $\int \sin^3 x\cos^8 x\,dx.$
29. $\int \sin^4 x\,dx.$

*) А. Лежандр (1752—1833) — французский математик.

30. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$.

31. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x}$.

32. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$.

33. $\int \sin 3x \cos 5x\,dx$.

34. $\int \arccos^2 x\,dx$.

35. $\int x^2 \arcsin^2 x\,dx$.

36. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x - 2\operatorname{ch} x}$.

37. $\int x^3 \ln^3 x\,dx$.

38. $\int xe^x \sin x\,dx$.

39. $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$.

40. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

§ 27. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

27.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ПО РИМАНУ

Напомним (см. п. 16.5), что *разбиением* τ отрезка $[a, b]$ называется любая конечная система его точек x_i, $i=0, 1, 2, \ldots, k$, такая, что

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{k-1}<x_k=b.$$

При этом пишется $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$. Каждый из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \ldots, k$, называется *отрезком разбиения* τ, его длина обозначается через Δx_i, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, k$.

Величину

$$\delta_\tau=\max_{i=1, 2, \ldots, k} \Delta x_i$$

назовем *мелкостью разбиения* τ.

Разбиение τ' отрезка $[a, b]$ называется следующим за разбиением τ (или продолжающим разбиение τ) того же отрезка, а также вписанным в разбиение τ, если каждая точка разбиения τ является и точкой разбиения τ'; иначе говоря, если каждый отрезок разбиения τ' содержится в некотором отрезке разбиения τ (говорят еще, что τ' — измельчение разбиения τ). В этом случае пишут $\tau' \succ \tau$, или, что то же, $\tau \prec \tau'$.

Совокупность всех разбиений данного отрезка обладает следующими свойствами.

1°. Если $\tau_1 \prec \tau_2$, а $\tau_2 \prec \tau_3$, то $\tau_1 \prec \tau_3$.

2°. Для любых τ_1 и τ_2 существует такое τ, что $\tau \succ \tau_1$ и $\tau \succ \tau_2$.

В самом деле, первое свойство следует просто из того, что в силу условия $\tau_3 \succ \tau_2$ каждый отрезок разбиения τ_3 содержится в некотором отрезке разбиения τ_2, который в свою очередь, согласно условию $\tau_2 \succ \tau_1$, содержится в каком-то отрезке разбиения τ_1; таким образом, всякий отрезок разбиения τ_3 лежит на определенном отрезке разбиения τ_1, а это и означает, что $\tau_3 \succ \tau_1$.

Для доказательства второго свойства разбиений заметим лишь, что если заданы два разбиения τ_1 и τ_2, то разбиение τ, состоящее из всех точек, входящих как в разбиение τ_1, так и в разбиение τ_2, очевидно, будет следовать за τ_1 и за τ_2.

Пусть теперь на отрезке $[a, b]$ определена функция f и пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — некоторое разбиение этого отрезка,

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

а δ_τ — мелкость этого разбиения.

Зафиксируем произвольным образом точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, и составим сумму

$$\sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Суммы вида $\sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k)$ называются *интегральными суммами Римана* *) функции f (рис. 101). Иногда для краткости мы будем их обозначать через $\sigma_\tau(f)$, $\sigma_\tau(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ или даже просто через σ_τ.

Геометрически в случае, когда функция f неотрицательна (рис. 101) каждое слагаемое интегральной суммы Римана σ_τ равно площади прямоугольника с основанием длины Δx_i и с высотой $f(\xi_i)$. Вся же сумма σ_τ равна площади «ступенчатой фигуры», получающейся объединением всех указанных прямоугольников.

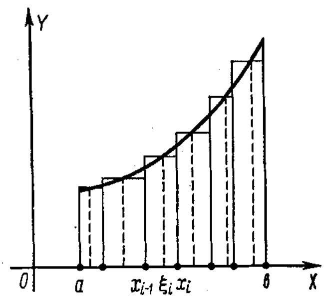


Рис. 101

Определение 1. *Функция f называется интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a, b]$, если существует такое число A, что для любой последовательности разбиений отрезка $[a, b]$*

$$\tau_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=0}^{i=k_n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

у которой $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_{\tau_n} = 0$, и для любого выбора точек

$$\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}], \quad i = 1, 2, \ldots, k_n, \; n = 1, 2, \ldots,$$

существует предел последовательности интегральных сумм $\sigma_{\tau_n}(f; \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k_n}^{(n)})$ и он равен A:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})\,\Delta x_i^{(n)} = A, \tag{27.1}$$

где

$$\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}; \quad i = 1, 2, \ldots, k_n; \; n = 1, 2, \ldots.$$

*) Б. Риман (1826—1866) — немецкий математик.

При выполнении этих условий число A называется (римановым) определенным интегралом функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначается через $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Выражение $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ читается «интеграл от a до b $f(x)\,dx$; x называется *переменной интегрирования*, f — *подынтегральной функцией*, a — *нижним*, а b — *верхним пределом интеграла*; отрезок $[a, b]$ называется *промежутком интегрирования*.

Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n}\left(f;\ \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k_n}^{(n)}\right),$$

где последовательность τ_n такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_{\tau_n} = 0$.

Для краткости записи будем в этом случае просто писать

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta_\tau\to 0} \sigma_\tau(f).$$

Подобно тому как определение предела функции можно сформулировать двумя эквивалентными способами с помощью пределов последовательностей и с помощью «($\varepsilon - \delta$)-языка», так и определение интеграла можно сформулировать иначе.

Определение 2. *Число A называется определенным интегралом функции f на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что каково бы ни было разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, мелкость которого меньше δ: $\delta_\tau < \delta$, и каковы бы ни были точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, выполняется неравенство*

$$\left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i - A\right| < \varepsilon,$$

где

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Упражнение 1. Доказать, что два данных выше определения определенного интеграла эквивалентны.

Из определения 1 следует, что для неотрицательных функций определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ является пределом, при $\delta_\tau \to 0$, последовательности площадей соответствующих ступенчатых фигур; поэтому он, естественно, оказывается связанным с понятием площади, а именно он равен площади фигуры*) (называемой

*) Привычный из элементарной геометрии термин «фигура» употребляется здесь всюду в смысле «плоское множество».

«криволинейной трапецией»), границей которой является график функции f, отрезок $[a, b]$ оси x-ов и, быть может, отрезки прямых $x=a$ и $x=b$, ординаты точек которых меняются соответственно от нуля до $f(a)$ и до $f(b)$ (рис. 102). Для того чтобы это доказать, надо прежде всего уточнить само понятие площади рассматриваемых фигур. Все это будет сделано ниже, в § 31.

Заметим, что введенное здесь понятие предела интегральных сумм Римана является новым понятием, не укладывающимся ни в понятие предела последовательности, ни в понятие предела функции.

В дальнейшем придется использовать аналогичное понятие предела не только для интегральных сумм Римана, но и для других объектов. Поэтому сформулируем общее определение предела этого вида.

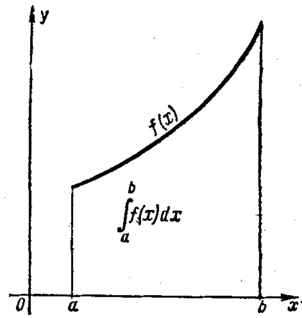


Рис. 102

Определение 3. *Рассмотрим множество* $\mathfrak{T}=\{\tau\}$ *всех разбиений отрезка* $[a, b]$. *Пусть на этом множестве определена числовая, вообще говоря, многозначная функция* $\Phi(\tau)$, $\tau\in\mathfrak{T}$. *Будем говорить, что функция* $\Phi(\tau)$ *при* $\delta_\tau\to 0$ *имеет предел, равный* A, *и будем писать*

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\Phi(\tau)=A,$$

если для любой последовательности разбиений $\tau_n\in\mathfrak{T}$, $n=1, 2, \ldots$, *такой, что* $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_{\tau_n}=0$, *при любом выборе значений* $\Phi(\tau_n)$ *числовая последовательность* $\Phi(\tau_n)$ *сходится к числу* A, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(\tau_n)=A.$$

Это понятие предела определено с помощью понятия предела последовательности, поэтому для него оказываются справедливыми многие свойства, аналогичные соответствующим свойствам предела последовательности. С соответствующими примерами мы встретимся в дальнейшем.

Как и в случае предела интегральных сумм Римана, понятие этого предела можно сформулировать на «$(\varepsilon-\delta)$-языке», что предоставляется читателю.

Заметим в заключение, что многозначность функции Φ, о которой идет речь в определении 3 в случае интегральных сумм Римана, связана с различным способом выбора точек

$$\xi_i\in[x_{i-1}, x_i],\qquad i=1, 2, \ldots, k.$$

27.2. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ

Установим прежде всего необходимое условие, которому удовлетворяют интегрируемые функции — их ограниченность.

Теорема 1. *Если функция интегрируема на некотором отрезке, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция f не ограничена на отрезке $[a, b]$ и пусть фиксировано некоторое разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ этого отрезка. В силу неограниченности функции f на всем отрезке $[a, b]$ она не ограничена по крайней мере на одном отрезке разбиения τ. Пусть для определенности функция f не ограничена на отрезке $[x_0, x_1]$. Тогда на этом отрезке существует последовательность $\xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1]$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что*)

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\xi_1^{(n)}\right) = \infty. \tag{27.2}$$

Зафиксируем теперь каким-либо образом точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 2, 3, \ldots, k$. Тогда сумма

$$\sum_{i=2}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i$$

будет иметь вполне определенное значение. Поэтому в силу (27.2)

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_\tau\left(f;\ \xi_1^{(n)},\ \xi_2, \ldots,\ \xi_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left[f\left(\xi_1^{(n)}\right)\Delta x_1 + \sum_{i=2}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i\right] = \infty$$

и, значит, каково бы ни было число $M > 0$, всегда можно подобрать такой номер n_0, что если на первом отрезке $[x_0, x_1]$ взять точку $\xi_i^{(n_0)}$, то

$$\left|\sigma_\tau\left(f;\ \xi_1^{n_0}, \xi_2, \ldots,\ \xi_k\right)\right| > M.$$

Отсюда следует, что суммы σ_τ не могут стремиться ни к какому конечному пределу при $\delta_\tau \to 0$.

Действительно, если бы существовал конечный предел $\lim\limits_{\delta_\tau\to 0} \sigma_\tau = A$, то для любого $\varepsilon > 0$ нашлось бы такое $\delta_\varepsilon > 0$, что для всех разбиений $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ мелкости $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$ при любом выборе точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, выполнялось бы неравенство $|\sigma_\tau - A| < \varepsilon$ и, следовательно,

$$|\sigma_\tau| = |(\sigma_\tau - A) + A| \leqslant |\sigma_\tau - A| + |A| < \varepsilon + |A|.$$

---

*) Действительно, в силу неограниченности функции f на отрезке $[x_0, x_1]$, например для любого натурального $n = 1, 2, \ldots$, существует такая точка $\xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1]$, что $\left|f\left(\xi_1^n\right)\right| > n$. Очевидно, что последовательность $\left\{\xi_1^{(n)}\right\}$ и удовлетворяет условию (27.2).

В нашем случае, т. е. в случае неограниченности функции f, для любого разбиения τ (в том числе и такого, что $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$, если существовало бы указанное δ_ε) при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ можно так выбрать точки ξ_i, что будет выполняться неравенство

$$|\sigma_\tau| > |A| + \varepsilon.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. □

Условие ограниченности функции f будучи необходимым для ее интегрируемости, не является вместе с тем достаточным. Примером, доказывающим это утверждение, может служить так называемая *функция Дирихле* (см. п. 4.2)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Рассмотрим ее на отрезке $[0, 1]$. Она, очевидно, ограничена на нем. Покажем, что она не интегрируема. Зафиксируем произвольное разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[0, 1]$. Если выбрать точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$ рациональными, то получим

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = 1,$$

а если взять ξ_i иррациональными, то

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i = 0.$$

Так как это верно для любого разбиения τ, то интегральные суммы σ_τ заведомо не стремятся ни к какому пределу при $\delta_\tau \to 0$.

27.3. ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ СУММЫ ДАРБУ. ВЕРХНИЙ И НИЖНИЙ ИНТЕГРАЛЫ ДАРБУ

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — некоторое его разбиение и $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Положим (рис. 103)

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$S_\tau = S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i, \tag{27.3}$$

$$s_\tau = s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i. \tag{27.4}$$

Очевидно, $s_\tau \leqslant S_\tau$.

Сумма S_τ называется *верхней*, а s_τ — *нижней суммой Дарбу*.

Свойства сумм Дарбу

1°. *Если функция f ограничена, то при любом разбиении суммы S_τ и s_τ определены.*

В самом деле, в этом случае M_i и m_i, $i=1, 2, \ldots, k$ конечны, и поэтому выражения (27.3) и (27.4) имеют смысл.

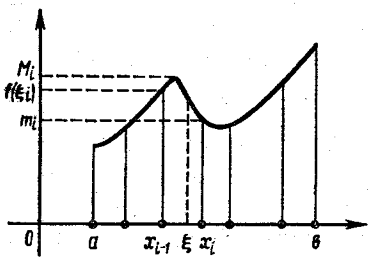


Рис. 103

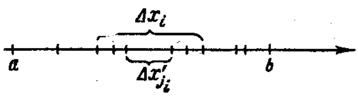


Рис. 104

2°. *Если* $\tau' \succ \tau$, *то* $S_{\tau'} \leqslant S_\tau$ *и* $s_\tau \leqslant s_{\tau'}$.

Доказательство. Пусть $\tau = \{\tau_i\}_{i=0}^{i=k}$ и $\tau' = \{x'_j\}_{j=0}^{j=k'}$ — два разбиения отрезка $[a, b]$, таких, что $\tau \prec \tau'$ и

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad i=1, 2, \ldots, k,$$

$$m'_j = \inf_{x'_{j-1} \leqslant x \leqslant x'_j} f(x), \quad j=1, 2, \ldots, k'.$$

Если $[x'_{j-1}, x'_j] \subset [x_{i-1}, x_i]$, то, очевидно,

$$m_i \leqslant m'_j. \tag{27.5}$$

(нижняя грань при уменьшении множества может только увеличиться).

В силу условия $\tau \prec \tau'$ каждый отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения τ является объединением каких-то отрезков разбиения τ'; будем обозначать эти отрезки через $[x'_{(j-1)_i}, x'_{j_i}]$. Таким образом, если

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ и } \Delta x'_{j_i} = x'_{j_i} - x'_{(j-1)_i},$$

то (рис. 104)

$$\Delta x_i = \sum_{j_i} \Delta x'_{j_i}.$$

Используя эти обозначения и неравенство (27.5), получим:

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} m_i \sum_{j_i} \Delta x'_{j_i} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j_i} m_i \Delta x'_{j_i} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \sum_{j_i} m'_{j_i} \Delta x'_{j_i} = \sum_{j=1}^{k'} m'_j \Delta x'_j = s_{\tau'}.$$

Мы доказали, что $s_\tau \leqslant s_{\tau'}$.

Аналогично доказывается, что $S_\tau \geqslant S_{\tau'}$ при $\tau \prec \tau'$. $\square$

Следствие. *Для любых двух разбиений* τ_1 *и* τ_2 *отрезка* $[a, b]$ *выполняется неравенство*

$$s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}, \tag{27.6}$$

т. е. любая нижняя сумма Дарбу меньше любой верхней.

Действительно, если даны два разбиения τ_1 и τ_2 отрезка $[a, b]$, то существует разбиение τ этого отрезка, такое, что $\tau \succ \tau_1$ и $\tau \succ \tau_2$ (см. п. 27.1). Применяя свойство 2°, получим

$$s_{\tau_1} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant S_{\tau_2}. \square$$

Очевидно, что суммы Римана и Дарбу связаны неравенствами

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau.$$

Следующее свойство является уточнением этого утверждения.

3°. *Если* $\sigma_\tau = \sigma(f; \xi_1, \ldots, \xi_k)$ — *какая-либо интегральная сумма Римана, соответствующая данному разбиению* τ, *то*

$$s_\tau = \inf_{\xi_1, \ldots, \xi_k} \sigma_\tau, \quad S_\tau = \sup_{\xi_1, \ldots, \xi_k} \sigma_\tau.$$

Доказательство. Пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — разбиение отрезка $[a, b]$ и $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Если заданы какие-либо числовые множества X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ и постоянные $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то для множества

$$X = \left\{x : x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i, \ x_i \in X_i, \ i = 1, 2, \ldots, k\right\},$$

как легко видеть, справедливы равенства (почему?)

$$\sup X = \sum_{i=1}^{k} a_i \sup X_i, \quad \inf X = \sum_{i=1}^{k} a_i \inf X_i.$$

В силу этого имеем:

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \inf_{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i} f(\xi_i) \Delta x_i = \inf_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i=1, 2, \ldots, k}} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \Delta x_i =$$

$$= \inf_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i=1, 2, \ldots, k}} \sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k).$$

Аналогично,

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \sup_{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i} f(\xi_i) \Delta x_i =$$

$$= \sup_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i=1, 2, \ldots, k}} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \Delta x_i = \sup_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i=1, 2, \ldots, k}} \sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k). \square$$

4°. $S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\,\Delta x_i$, *где* $\omega_i(f)$ — *колебание функции* f *на отрезке* $[x_{i-1}, x_i]$ (см. п. 19.6), $i = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Отметим сначала, что если для двух данных числовых множеств X и Y положить

$$Z = \{z\colon\ z = x - y,\ x \in X,\ y \in Y\},$$

то $\sup Z = \sup X - \inf Y$ (почему?).

Используя это, получим

$$M_i - m_i = \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x) = \sup_{\substack{x_{i-1} \leqslant x' \leqslant x_i \\ x_{i-1} \leqslant x'' \leqslant x_i}} [f(x'') - f(x')] = \omega_i(f),\quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

поэтому

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\,\Delta x_i. \ \square$$

Положим теперь

$$I_* = \sup_\tau s_\tau,\quad I^* = \inf_\tau S_\tau.$$

I_* называется *нижним интегралом Дарбу* функции f на отрезке $[a, b]$, а I^* — ее *верхним интегралом.*

Из свойств 1° и 2° сумм Дарбу следует, что если функция f ограничена, то как ее нижний интеграл Дарбу, так и верхний конечны. В силу следствия из свойства 2° будем иметь также

$$I_* \leqslant I^*. \tag{27.7}$$

27.4. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Теорема 2. *Для того чтобы ограниченная на некотором отрезке функция была интегрируемой на нем, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{27.8}$$

Условие (27.8) означает (см. определение 3 в п. 27.1), что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения τ мелкости $\delta_\tau < \delta$ выполняется неравенство

$$|S_\tau - s_\tau| < \varepsilon. \tag{27.9}$$

Поскольку $s_\tau \leqslant S_\tau$, то (27.9) равносильно неравенству

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

Доказательство необходимости. Пусть ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция f интегрируема на нем и пусть $I=\int\limits_a^b f(x)\,dx$; тогда $\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau=I$. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что если $\delta_\tau<\delta$, то

$$|\sigma_\tau-I|<\varepsilon, \text{ или } I-\varepsilon<\sigma_\tau<I+\varepsilon.$$

Отсюда при $\delta_\tau<\delta$, согласно свойству 3° сумм Дарбу (см. п. 27.3), получаем неравенство

$$I-\varepsilon\leqslant s_\tau\leqslant S_\tau\leqslant I+\varepsilon.$$

Таким образом, если $\delta_\tau<\delta$, то

$$0\leqslant S_\tau-s_\tau\leqslant 2\varepsilon,$$

а это и означает выполнение условия (27.8).

Доказательство достаточности. Пусть функция f ограничена и выполняется условие (27.8). Из определения нижнего и верхнего интегралов Дарбу и из неравенства (27.7) имеем

$$s_\tau\leqslant I_*\leqslant I^*\leqslant S_\tau, \tag{27.10}$$

поэтому

$$0\leqslant I^*-I_*\leqslant S_\tau-s_\tau,$$

откуда в силу (27.8) следует, что $I^*-I_*=0$. Обозначая общее значение верхнего и нижнего интегралов Дарбу через I, т. е. полагая $I=I_*=I^*$, из (27.10) получим

$$s_\tau\leqslant I\leqslant S_\tau,$$

и поэтому

$$0\leqslant I-s_\tau\leqslant S_\tau-s_\tau,\quad 0\leqslant S_\tau-I\leqslant S_\tau-s_\tau.$$

Отсюда в силу (27.8) вытекает, что

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}(I-s_\tau)=\lim_{\delta_\tau\to 0}(S_\tau-I)=0,$$

а значит,

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}s_\tau=\lim_{\delta_\tau\to 0}S_\tau=I. \tag{27.11}$$

Но в силу свойства 3° интегральных сумм Дарбу (см. п. 27.3)

$$s_\tau\leqslant\sigma_\tau\leqslant S_\tau. \tag{27.12}$$

Из (27.11) и (27.12) следует (ср. аналогичные утверждения в п. 3.3 и 4.7), что

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau=I,$$

а это и означает интегрируемость функции f. □

Следствие 1. *Если функция f интегрируема, то не только ее интегральные суммы Римана, но и ее суммы Дарбу стремятся к ее интегралу при стремлении мелкости разбиения к нулю.*

Действительно, если функция f интегрируема, то выполняется условие (27.8), а из него, как мы видели, и следует утверждение следствия, т. е. равенство (27.11). □

Следствие 2. *Для того чтобы ограниченная на некотором отрезке функция f была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{i=1}^{k}\omega_i(f)\,\Delta x_i=0,$$

где $\omega_i(f)$ — колебание функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$.

Это следует непосредственно из свойства 4° сумм Дарбу (см. п. 27.3). □

Задача 19. Доказать, что, для того чтобы функция была интегрируемой на отрезке, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной на нем и чтобы ее нижний и верхний интегралы Дарбу совпадали; при этом общее значение этих интегралов и является ее интегралом.

27.5. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ И МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 3. *Функция, определенная и непрерывная на некотором отрезке, интегрируема на нем.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$; тогда, как известно, она ограничена (см. теорему 1 в п. 6.1) и равномерно непрерывна (см. теорему 5 в п. 19.6) на этом отрезке. Зафиксируем произвольно $\varepsilon>0$. В силу равномерной непрерывности существует такое $\delta>0$, что для любых точек $\xi\in[a, b]$ и $\eta\in[a, b]$, удовлетворяющих условию $|\eta-\xi|<\delta$, выполняется неравенство

$$|f(\eta)-f(\xi)|<\frac{\varepsilon}{b-a}. \qquad (27.13)$$

Возьмем какое-либо разбиение $\tau=\{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ мелкости $\delta_\tau<\delta$. Пусть, как всегда, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $m_i=\inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i=\sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $i=1, 2, \ldots, k$. Поскольку непрерывная на отрезке функция достигает своей нижней и верхней грани на этом отрезке, то существуют такие точки $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$ и $\eta_i\in[x_{i-1}, x_i]$, что

$$f(\xi_i)=m_i,\quad f(\eta_i)=M_i.$$

Точки ξ_i и η_i принадлежат одному и тому же отрезку разбиения τ, поэтому

$$|\eta_i-\xi_i|\leqslant\Delta x_i\leqslant\delta_\tau<\delta.$$

Отсюда, в силу (27.13), вытекает неравенство

$$f(\eta_i)-f(\xi_i)=|f(\eta_i)-f(\xi_i)|<\frac{\varepsilon}{b-a},\quad i=1, 2, \ldots, k.$$

Следовательно, для любого разбиения τ мелкости $\delta_\tau < \delta$ выполняется условие

$$0 \leqslant S_\tau - s_\tau =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} [f(\eta_i) - f(\xi_i)]\,\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$. Поэтому, согласно теореме 2, функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. □

Теорема 4. *Функция, определенная и монотонная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$, например, монотонно возрастает на нем. Тогда

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b), \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Таким образом, функция f ограничена на отрезке $[a, b]$. Далее, для любого разбиения $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, очевидно, имеем

$$m_i = f(x_{i-1}), \qquad M_i = f(x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, k,$$

поэтому

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\,\Delta x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]\,\Delta x_i \leqslant \delta_\tau \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = [f(b) - f(a)]\,\delta_\tau,$$

ибо в сумме $\sum\limits_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]$ взаимно уничтожаются все слагаемые, кроме $f(b)$ и $f(a)$.

Из полученного неравенства следует, что

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} [S_\tau(f) - s_\tau(f)] = 0.$$

Поэтому (см. п. 27.4) функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. □

Упражнение 2. Доказать, что если функция ограничена и непрерывна на некотором отрезке, кроме, быть может, конечного числа точек, то она интегрируема на этом отрезке.

Задача 20. Доказать, что, для того чтобы ограниченная на некотором отрезке функция была интегрируемой на нем, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовала конечная или счетная система интервалов, которые содержали бы все точки разрыва заданной функции и сумма длин которых была бы меньше заданного ε.

§ 28. СВОЙСТВА ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

28.1. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Будем систематически, не делая специальных ссылок, употреблять обозначения и терминологию, введенную в предыдущем параграфе.

Прежде всего заметим, что поскольку интеграл от функции является числом, сопоставляемым заданной функции согласно данному выше определению, то само собой разумеется, что это число не зависит от выбора обозначения для аргумента подынтегральной функции, т. е. от обозначения *переменной интегрирования*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\xi)\,d\xi.$$

Перейдем теперь к рассмотрению основных свойств определенного интеграла.

1°. $\int_a^b dx = b - a$.

Действительно, здесь подынтегральная функция равна единице, поэтому для любой интегральной суммы Римана σ_τ имеем

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = b - a. \ \square$$

2°. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[a^*, b^*]$, содержащемся в $[a, b]$.*

Доказательство. Прежде всего, если функция f ограничена на отрезке $[a, b]$, то она, очевидно, ограничена и на $[a^*, b^*]$. Далее, каково бы ни было разбиение $\tau^* = \{x_i^*\}_{i=0}^{i=k^*}$ отрезка $[a^*, b^*]$ мелкости δ_{τ^*}, его всегда можно продолжить в разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ такой же мелкости $\delta_\tau = \delta_{\tau^*}$; для этого достаточно добавить к точкам x_i^*, $i = 1, 2, \ldots, k^*$ конечное число соответствующим образом выбранных точек, принадлежащих отрезку $[a, b]$, но не принадлежащих отрезку $[a^*, b^*]$.

Полагая

$$m_i^* = \inf_{x_{i-1}^* \leqslant x \leqslant x_i^*} f(x), \qquad M_i^* = \sup_{x_{i-1}^* \leqslant x \leqslant x_i^*} f(x),$$
$$\Delta x_i^* = x_i^* - x_{i-1}^*, \qquad i = 1, 2, \ldots, k^*,$$

и замечая, что каждое слагаемое суммы $\sum_{i=1}^{k} (M_i^* - m_i^*)\,\Delta x_i^*$ является и слагаемым суммы $\sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\,\Delta x_i$ и что все слагаемые обеих сумм неотрицательны, имеем

$$0 \leqslant S_{\tau^*} - s_{\tau^*} = \sum_{i=1}^{k^*} (M_i^* - m_i^*)\,\Delta x_i^* \leqslant \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\,\Delta x_i = S_\tau - s_\tau. \tag{28.1}$$

Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то, как мы знаем (см. п. 27.4),

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{28.2}$$

Поскольку $\delta_\tau = \delta_\tau^*$, то из (28.2) и из неравенства (28.1) следует, что

$$\lim_{\delta_{\tau^*} \to 0} (S_{\tau^*} - s_{\tau^*}) = 0, \tag{28.3}$$

т. е. (см. п. 27.4) функция f интегрируема на отрезке $[a^*, b^*]$. □

3°. *Пусть $a < c < b$. Если функция f интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a, b]$, причем*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{28.4}$$

Доказательство. Если функция f интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, то она ограничена на каждом из этих отрезков, а значит и на всем отрезке $[a, b]$, т. е. существует постоянная $A > 0$ такая, что

$$|f(x)| \leqslant A, \qquad a \leqslant x \leqslant b. \tag{28.5}$$

Пусть τ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Если точка c не входит в разбиение τ, то обозначим через τ' разбиение отрезка $[a, b]$, получающееся из τ добавлением точки c; очевидно,

$$\tau' \succ \tau. \tag{28.6}$$

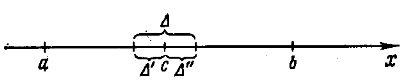


Рис. 105

Если же точка c входит в разбиение τ, то положим $\tau' = \tau$.

В первом случае обозначим через Δ' и Δ'' длины двух отрезков разбиения τ', примыкающих к точке c с двух сторон. Очевидно, что $\Delta = \Delta' + \Delta''$ является длиной отрезка разбиения τ, содержащего точку c (рис. 105). Верхние суммы Дарбу S_τ и $S_{\tau'}$ функции f на отрезке $[a, b]$ отличаются только слагаемыми, соответствующими отрезкам разбиения τ и τ', которые содержат точку c.

Обозначая через M', M'' и M верхнюю грань функции $|f|$ на рассматриваемых отрезках, длины которых обозначены соответственно Δ', Δ'' и Δ, получим (см. также (28.5))

$$0 \leqslant S_\tau - S_{\tau'} \leqslant M'\Delta' + M''\Delta'' + M\Delta \leqslant A(\Delta' + \Delta'' + \Delta) = 2A\Delta \leqslant 2A\delta_\tau.$$

Во втором случае, т. е. при $\tau' = \tau$ просто $S_{\tau'} = S_\tau$, $s_{\tau'} = s_\tau$.

Поэтому в обоих случаях

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - S_{\tau'}) = 0 \tag{28.7}$$

и аналогично,

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (s_\tau - s_{\tau'}) = 0. \tag{28.8}$$

Совокупность точек разбиения τ', принадлежащих отрезку $[a, c]$, образует его разбиение, которое обозначим $\tau'[a, c]$; совокупность же точек разбиения τ', принадлежащих отрезку $[c, b]$, образует разбиение этого отрезка, которое обозначим через $\tau'[c, b]$.

Очевидно,

$$S_{\tau'} = S_{\tau'[a, c]} + S_{\tau'[c, b]}, \qquad s_{\tau'} = s_{\tau'[a, c]} + s_{\tau'[c, b]}, \tag{28.9}$$

а поэтому

$$S_{\tau'} - s_{\tau'} = (S_{\tau'[a, c]} - s_{\tau'[a, c]}) + (S_{\tau'[c, b]} - s_{\tau'[c, b]}), \tag{28.10}$$

и так как функция f, по предположению, интегрируема на $[a, c]$ и на $[c, b]$, то

$$\lim_{\delta_{\tau'[a, c]} \to 0} (S_{\tau'[a, c]} - s_{\tau'[a, c]}) = 0, \qquad \lim_{\delta_{\tau'[c, b]} \to 0} (S_{\tau'[c, b]} - s_{\tau'[c, b]}) = 0.$$

Замечая, что $\delta_{\tau'[a, c]} \leqslant \delta_{\tau'}$, $\delta_{\tau'[c, b]} \leqslant \delta_{\tau'}$, находим в силу (28.10)

$$\lim_{\delta_{\tau'} \to 0} (S_{\tau'} - s_{\tau'}) = \lim_{\delta_{\tau'} \to 0} (S_{\tau'[a, c]} - s_{\tau'[a, c]}) + \lim_{\delta_{\tau'} \to 0} (S_{\tau'[c, b]} - s_{\tau'[c, b]}) = 0. \tag{28.11}$$

Мы видели выше, что выполнение подобного условия для любых разбиений τ влечет за собой интегрируемость функции. Здесь же рассматриваемые разбиения τ' имеют специальный вид: они обязательно содержат точку c. Для того чтобы перейти к произвольному разбиению τ, представим разность $S_\tau - s_\tau$ в виде

$$S_\tau - s_\tau = (S_\tau - S_{\tau'}) + (S_{\tau'} - s_{\tau'}) + (s_{\tau'} - s_\tau).$$

Теперь из (28.7), (28.8) и (28.11) имеем

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0; \tag{28.12}$$

и, так как τ было произвольным разбиением отрезка $[a, b]$, то из ограниченности функции f на отрезке $[a, b]$ и выполнения условия (28.12) следует ее интегрируемость на этом отрезке.

Из интегрируемости функции f на отрезках $[a, c]$, $[c, b]$ и $[a, b]$ следует (см. п. 27.4), что

$$\lim_{\delta_{\tau'[a,c]}\to 0} S_{\tau'[a,c]}=\int_a^c f(x)\,dx,\qquad \lim_{\delta_{\tau'[c,b]}\to 0} S_{\tau'[c,b]}=\int_c^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{\delta_{\tau'}\to 0} S_{\tau'}=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Поэтому, переходя к пределу при $\delta_{\tau'}\to 0$ в первом равенстве (28.9), получаем формулу (28.4). □

4°. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то их сумма $f+g$ также интегрируема на нем, причем*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.13}$$

Доказательство. В самом деле, каковы бы ни были разбиение $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ и точки $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \ldots$ $\ldots, k$, имеем

$$\sigma_\tau(f+g)=\sum_{i=1}^{k}[f(\xi_i)+g(\xi_i)]\,\Delta x_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i+\sum_{i=1}^{k} g(\xi_i)\,\Delta x_i=\sigma_\tau(f)+\sigma_\tau(g). \tag{28.14}$$

Поскольку в силу интегрируемости функций f и g существуют пределы интегральных сумм $\sigma_\tau(f)$ и $\sigma_\tau(g)$ при $\delta_\tau\to 0$, то из (28.14) следует, что существует и предел (почему?) интегральной суммы $\sigma_\tau(f+g)$, причем

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(f+g)=\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(f)+\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(g), \tag{28.15}$$

что и означает интегрируемость функции $f+g$ на отрезке $[a, b]$.

Согласно же определению интеграла,

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(f+g)=\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx,$$

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(f)=\int_a^b f(x)\,dx,\qquad \lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(g)=\int_a^b g(x)\,dx.$$

Подставляя эти выражения в формулу (28.15), получим (28.13). □

5°. *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и c — постоянная; тогда функция cf также интегрируема на этом отрезке и*

$$\int_a^b cf(x)\,dx=c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Каковы бы ни были разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ и точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, имеем

$$\sigma_\tau(cf) = \sum_{i=1}^{k} cf(\xi_i)\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = c\sigma_\tau(f),$$

отсюда, проводя рассуждения по той же схеме, как и при доказательстве предыдущего свойства, получим

$$\int_a^b cf(x)\,dx = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(cf) = \lim_{\delta_\tau \to 0} c\sigma_\tau(f) = c \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f) = c\int_a^b f(x)\,dx. \quad \square$$

Из последних двух свойств вытекает следствие: *если каждая из функций f_i, $i = 1, \ldots, n$, интегрируема на отрезке $[a, b]$, а λ_i — произвольные постоянные, то функция $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ — интегрируема на $[a, b]$, причем*

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_a^b f_i(x)\,dx.$$

Это свойство определенного интеграла называется его *линейностью*.

6°. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда и их произведение $f(x)g(x)$ интегрируемо на нем.*

Доказательство. В силу интегрируемости функций f и g на отрезке $[a, b]$ они ограничены на этом отрезке, т. е. существуют постоянные $A > 0$ и $B > 0$, такие, что

$$|f(x)| \leqslant A, \qquad |g(x)| \leqslant B \tag{28.16}$$

для всех $x \in [a, b]$. Поэтому произведение $f(x)g(x)$ также ограничено: для всех точек $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x)g(x)| \leqslant AB.$$

Пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — какое-либо разбиение отрезка $[a, b]$. Оценим выражение $f(x'')g(x'') - f(x')g(x')$; для этого добавим и вычтем из него $f(x')g(x'')$:

$$f(x'')g(x'') - f(x')g(x') = [f(x'') - f(x')]g(x'') + [g(x'') - g(x')]f(x'). \tag{28.17}$$

Для точек $x' \in [x_{i-1}, x_i]$ и $x'' \in [x_{i-1}, x_i]$ из (28.16) и (28.17) следует, что

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leqslant B\omega_i(f) + A\omega_i(g), \tag{28.18}$$

где $\omega_i(f)$ и $\omega_i(g)$ суть колебания функций f и g на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Из неравенства (28.18) для колебания $\omega_i(fg)$ произведения fg на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ вытекает оценка

$$\omega_i(fg) \leqslant B\omega_i(f) + A\omega_i(g).$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i(fg)\,\Delta x_i \leqslant B \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\,\Delta x_i + A \sum_{i=1}^{k} \omega_i(g)\,\Delta x_i. \qquad (28.20)$$

В силу интегрируемости функций f и g (см. следствие 2 из теоремы 2 в п. 27.4)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\,\Delta x_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(g)\,\Delta x_i = 0.$$

Поэтому из оценки (28.20) следует равенство

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(fg)\,\Delta x_i = 0,$$

которое и влечет за собой интегрируемость произведения fg на отрезке $[a, b]$. □

Методом математической индукции легко доказать, что если каждая из функций $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, интегрируема на отрезке $[a, b]$, то и их произведение интегрируемо на $[a, b]$. В частности, вместе с функцией $f(x)$ интегрируема и $[f(x)]^n$ при любом натуральном n.

7°. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и нижняя грань функции $|f(x)|$ на $[a, b]$ положительна, то и $1/f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Если всюду на $[a, b]$: $|f(x)| \geqslant m > 0$, то $\frac{1}{|f(x)|} \leqslant \frac{1}{m}$ для всех $x \in [a, b]$; поэтому $\left|\frac{1}{f(x_2)} - \frac{1}{f(x_1)}\right| \leqslant \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{m^2}$ при любых $x_1, x_2 \in [a, b]$. Отсюда следует, что если $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, то

$\omega_i\left(\frac{1}{f}\right) \leqslant \frac{1}{m^2}\,\omega_i(f)$, следовательно

$$0 \leqslant \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i\left(\frac{1}{f}\right) \Delta x_i \leqslant \frac{1}{m^2} \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\,\Delta x_i = 0. \ \square$$

Следствие. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и нижняя грань функции $|g|$ положительна, то и f/g интегрируема на $[a, b]$.*

Это вытекает, в силу свойств 6° и 7°, из того, что $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$. □

8°. *Если функция f неотрицательна и интегрируема на отрезке $[a, b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0. \tag{28.21}$$

Доказательство. В самом деле, каковы бы ни были разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ и точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$ для функции $f \geqslant 0$ имеем

$$\sigma_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i \geqslant 0. \tag{28.22}$$

Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то, переходя к пределу в (28.22) при $\delta_\tau \to 0$, получим неравенство (28.21). □

Следствие. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и для всех $x \in [a, b]$*

$$f(x) \geqslant g(x), \tag{28.23}$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.24}$$

Если интегрируемые функции f и g удовлетворяют неравенству (28.23), то

$$f(x) - g(x) \geqslant 0, \quad x \in [a, b];$$

поэтому, замечая, что на основании следствия из свойств 4° и 5° функция $f - g$ интегрируема, в силу неравенства (28.21) имеем

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \geqslant 0.$$

Но (см. выше указанное следствие)

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

и, значит,

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0. \ \square$$

Доказанное следствие утверждает, что обе части неравенства вида (28.23) можно интегрировать по одному и тому же промежутку. (В связи с этим заметим, что дифференцирование обеих частей неравенства без специальных дополнительных предположений недопустимо).

9°. *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Если она неотрицательна на нем: $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$, и существует точка $x_0 \in [a, b]$, в которой функция f непрерывна и положительна: $f(x_0) > 0$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Доказательство. Согласно лемме п. 19.3 существует такое $\delta > 0$, что $f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$ для всех $x \in U(x_0, \delta) \cap [a, b]$. Пусть $[\alpha, \beta] \subset U(x_0, \delta) \cap [a, b]$, $\alpha < \beta$; тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)\,dx \geqslant \frac{f(x_0)}{2}(\beta - \alpha) > 0. \square$$

Отметим, что если отказаться от условия непрерывности функции f в точке x_0, то может случиться, что для интегрируемой неотрицательной на отрезке функции, положительной в некоторой точке, интеграл по всему отрезку равен нулю. Так, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

интегрируема и неотрицательна, $f(0) > 0$, но $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Это равенство легко следует из определения интеграла.

10°. Нами было введено понятие определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ от функции f по отрезку $[a, b]$, где, согласно принятым обозначениям, $a < b$.

Для любой функции f, определенной в точке a, положим, по определению,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{28.25}$$

а для функции f, интегрируемой на отрезке $[a, b]$,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad a < b. \tag{28.26}$$

Эти определения в известной мере естественны. В первом случае, т. е. при $a = b$, следует считать, что все промежутки разбиения отрезка $[a, b]$ становятся точками, а их длины Δx_i равны нулю. Поэтому все интегральные суммы $\sum\limits_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ в этом случае также равны нулю, а вместе с ними обращается в ноль и интеграл, стоящий в левой части (28.25).

Во втором случае следует считать отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ ориентированными в отрицательном направлении оси Ox (понятие ориентированного отрезка знакомо читателю из аналитической геометрии), и поэтому их длины Δx_i отрицательными. Отсюда следует, что все интегральные суммы, образуемые для интеграла $\int\limits_b^a f(x)\,dx$ отличаются лишь знаком от соответствующих интегральных сумм интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, что и делает естественной формулу (28.26).

Этим интуитивным соображениям можно, конечно, придать и строгую логическую форму, введя соответствующие определения, однако гораздо проще и короче ввести равенства (28.25) и (28.26) по определению.

11°. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то и функция $|f|$ интегрируема на нем и*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx, \quad a<b. \tag{28.27}$$

Действительно, во-первых, из ограниченности функции f, очевидно, следует и ограниченность функции $|f|$, а во-вторых, для любых двух точек $\xi\in[a, b]$ и $\eta\in[a, b]$ имеет место неравенство

$$||f(\xi)|-|f(\eta)||\leqslant|f(\xi)-f(\eta)|,$$

откуда следует, что, каково бы ни было разбиение $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, обозначая через $\omega_i(f)$ и $\omega_i(|f|)$ соответственно колебания функций f и $|f|$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, получим

$$\omega_i(|f|)\leqslant\omega_i(f); \quad i=1, 2, \ldots, k,$$

поэтому

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{k}\omega_i(|f|)\,\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{k}\omega_i(f)\,\Delta x_i.$$

Отсюда следует, что если

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{i=1}^{k}\omega_i(f)\,\Delta x_i=0, \text{ то и } \lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{i=1}^{k}\omega_i(|f|)\,\Delta x_i=0.$$

Это означает (см. п. 27.4,) что из интегрируемости функции следует интегрируемость функции $|f|$.

Пусть теперь $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \ldots, k$; тогда

$$|\sigma_\tau(f)|=\left|\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)\,\Delta x_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{k}|f(\xi_i)|\,\Delta x_i=\sigma_\tau(|f|).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\delta_\tau \to 0$ и замечая, что

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} |\sigma_\tau(f)| = \left| \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f) \right| = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|, \quad \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(|f|) = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

получим неравенство (28.27). $\square$

Если отказаться от ограничения $a < b$, т. е. допускать случаи $a = b$ и $a > b$, то аналог неравенства (28.27), имеет вид

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|. \tag{28.28}$$

В самом деле, пусть $a < b$. Поскольку (см. свойство 8°)

$$\left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right| = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

то неравенство (28.28) совпадает в этом случае с неравенством (28.27). Если же $a > b$, то, используя свойство (28.26) и неравенство (28.27), получим

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_b^a f(x)\,dx \right| \leqslant \int_b^a |f(x)|\,dx = \left| \int_b^a |f(x)|\,dx \right| = \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|.$$

Наконец, при $a = b$ неравенство (28.28) очевидно.

28.2. ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Теорема 1. *Пусть*

1) *функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$;*

2) $$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in [a, b]; \tag{28.29}$$

3) *функция g не меняет знака на отрезке $[a, b]$, т. е. либо неотрицательна, либо неположительна на нем; тогда существует такое число μ, что*

$$m \leqslant \mu \leqslant M \tag{28.30}$$

и

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.31}$$

Следствие. *При дополнительном предположении непрерывности функции f на отрезке $[a, b]$ существует такая точка ξ на интервале (a, b), что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.32}$$

В частности, при $g(x)=1$ *на* $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{28.33}$$

Последняя формула в случае неотрицательной на отрезке $[a, b]$ функции f имеет простой геометрический смысл: площадь криволинейной трапеции, порожденной графиком функции f, равна площади прямоугольника с основанием длины $b-a$ и высотой длины $f(\xi)$ (рис. 106)

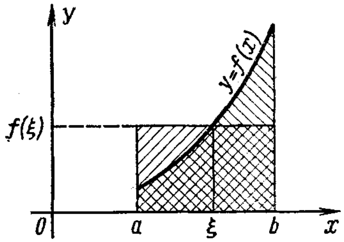


Рис. 106

Доказательство теоремы. Умножая неравенство (28.29) на $g(x)$, получаем при $g(x)\geqslant 0$

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x),$$

а при $g(x)\leqslant 0$

$$mg(x)\geqslant f(x)g(x)\geqslant Mg(x).$$

Интегрируя эти неравенства будем иметь, на основании следствия из свойства 8° (п. 28.1),

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx, \tag{28.34}$$

соответственно,

$$m\int_a^b g(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \geqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.35}$$

Если $\int_a^b g(x)\,dx=0$, то как в первом, так и во втором случаях

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0.$$

Таким образом, если $\int_a^b g(x)\,dx=0$, то обе части равенства (28.31) при любом μ обращаются в ноль, т. е. при выполнении условия $\int_a^b g(x)\,dx=0$ равенство (28.31) справедливо при любом выборе числа μ, в частности и при $m\leqslant\mu\leqslant M$.

Если же $\int_a^b g(x)\,dx\neq 0$, то при $g(x)\geqslant 0$, $x\in[a, b]$, имеем $\int_a^b g(x)\,dx>0$, а при $g(x)\leqslant 0$, $x\in[a, b]$, соответственно, $\int_a^b g(x)\,dx<0$.

Деля неравенство (28.34) и (28.35) на интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$, получим в обоих случаях одно и то же неравенство

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M. \tag{28.36}$$

Полагая

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}, \tag{28.37}$$

убеждаемся, что при таком выборе μ выполняются как условие (28.30) (в силу (28.36)), так и (28.31) (в силу (28.37)). □

Доказательство следствия. Если $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, то в силу равенства (28.31) получим $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$ и, следовательно, формула (28.32) справедлива при любом выборе точки $\xi \in (a, b)$. В дальнейшем для простоты будем считать, что $g(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$ (случай $g(x) \leqslant 0$, $x \in [a, b]$, рассматривается аналогично или сводится к предыдущему заменой функции $g(x)$ на функцию $-g(x)$).

Пусть теперь $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$; тогда в силу неотрицательности функции $g(x)$ выполняется неравенство

$$\int_a^b g(x)\,dx > 0. \tag{28.38}$$

В дальнейшем будем считать, что $m = \inf\limits_{[a,\,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,\,b]} f(x)$. Это предположение допустимо, так как при таком выборе m и M выполняется условие (28.29). В формуле (28.31) согласно условию (28.30) возможны три случая: $m < \mu < M$, $\mu = M$ и $\mu = m$.

Если $m < \mu < M$, то согласно теореме о достижении непрерывной на отрезке функции своих наибольшего и наименьшего значений (см. теорему 1 в п. 6.1) существуют такие точки $\alpha \in [a, b]$ и $\beta \in [a, b]$, что $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$. Поэтому в силу теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции (см. теорему 2 и следствие 2 из нее в п. 6.2) на интервале с концами α и β найдется такая точка ξ, что $f(\xi) = \mu$. Очевидно, $\xi \in (a, b)$ (рис. 107).

Если $\mu = M$ (случай $\mu = m$ рассматривается аналогично), то равенство (28.31) принимает вид

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = M \int_a^b g(x)\, dx,$$

откуда

$$\int_a^b [M - f(x)] g(x)\, dx = 0. \tag{28.39}$$

Покажем, что существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f(\xi) = M$. Предварительно заметим, что

$$\int_a^b g(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\, dx. \tag{28.40}$$

В самом деле, функция $g(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, а поэтому и ограничена на нем, т. е. существует такая постоянная $A > 0$, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|g(x)| \leqslant A$. Отсюда имеем

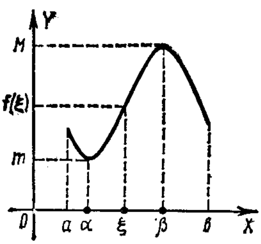


Рис. 107

$$\left| \int_a^b g(x)\, dx - \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\, dx \right| = \left| \int_a^{a+\varepsilon} g(x)\, dx + \int_{b-\varepsilon}^{b} g(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^{a+\varepsilon} |g(x)|\, dx + \int_{b-\varepsilon}^{b} |g(x)|\, dx \leqslant A \int_a^{a+\varepsilon} dx + A \int_{b-\varepsilon}^{b} dx = 2A\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < b - a.$$

Из этого неравенства сразу следует (28.40).

В силу неравенства (28.38) из (28.40) вытекает существование такого ε_0, $0 < \varepsilon_0 < b - a$, что

$$\int_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} g(x)\, dx > 0.$$

Если бы не существовало точки $\xi \in (a, b)$, в которой $f(\xi) = M$, то непрерывная функция $M - f(\xi)$ была бы положительной на интервале (a, b), а, следовательно, и на отрезке $[a + \varepsilon_0, b - \varepsilon_0]$. В частности, она была бы положительной и в той точке x_0, в которой она принимает свое наименьшее значение

$$M - f(x) \geqslant \min_{[a+\varepsilon_0,\, b-\varepsilon_0]} [M - f(x)] = M - f(x_0) > 0.$$

Поэтому

$$\int_a^b [M - f(x)]g(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} [M - f(x)]g(x)\,dx \geqslant [M - f(x_0)] \int_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} g(x)\,dx > 0,$$

а это противоречит равенству (28.39). □

Следствие теоремы 1 обычно называется *интегральной теоремой о среднем*. Это название объясняется тем, что в нем утверждается существование некоторой точки на отрезке — «средней точки», обладающей определенным свойством, связанным с интегралом от функции.

Формулы (28.31) и (28.32) остаются очевидным образом верными и при $a \geqslant b$.

28.3. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Обобщим теперь теорему 3 предыдущего параграфа об интегрируемости непрерывных функций на так называемые кусочно-непрерывные функции.

Определение 1. *Функция f, определенная на отрезке $[a, b]$, называется кусочно-непрерывной на нем, если существует такое разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ этого отрезка, что функция f непрерывна на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) и существуют конечные пределы*

$$f(x_{i-1}+0) = \lim_{x \to x_{i-1}+0} f(x) \quad \text{и}$$

$$f(x_i - 0) = \lim_{x \to x_i - 0} f(x), \ i = 1, 2 \ldots, k.$$

Короче, функция кусочно-непрерывна на отрезке, если она имеет на нем только конечное число точек разрыва и притом только первого рода (рис. 108).

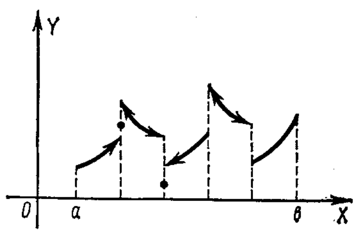


Рис. 108

Лемма 1. *Пусть функции f и φ определены на отрезке $[a, b]$ и $f(x) = \varphi(x)$ на интервале (a, b). Тогда если функция f интегрируема на $[a, b]$, то и функция φ интегрируема на $[a, b]$ и*

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Иначе говоря, изменение значений функции на концах отрезка не влияет ни на интегрируемость функции, ни на значение интеграла, если функция интегрируема. Аналогичное утверждение, конечно, справедливо при изменении значений функции в любом конечном числе точек.

Доказательство леммы. Функция f интегрируема и, следовательно, ограничена: $|f(x)|\leqslant M$, для всех $x\in[a, b]$. Пусть $M_0=\max\{M, \varphi(a), \varphi(b)\}$. Рассмотрим какое-либо разбиение $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ и составим интегральные суммы Римана $\sigma_\tau(f)$ и $\sigma_\tau(\varphi)$, выбирая одни и те же точки $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$. Пусть, как всегда, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, k$. Поскольку

$$|f(\xi_1)\,\Delta x_1|\leqslant M_0\delta_\tau, \quad |f(\xi_k)\,\Delta x_k|\leqslant M_0\delta_\tau,$$
$$|\varphi(\xi_1)\,\Delta x_1|\leqslant M_0\delta_\tau \quad \text{и} \quad |\varphi(\xi_k)\,\Delta x_k|\leqslant M_0\delta_\tau,$$

то

$$\lim_{\delta_\tau\to 0} f(\xi_1)\,\Delta x_1=\lim_{\delta_\tau\to 0} f(\xi_k)\,\Delta x_k=\lim_{\delta_\tau\to 0}\varphi(\xi_1)\,\Delta x_1=\lim_{\delta_\tau\to 0}\varphi(\xi_k)\,\Delta x_k=0.$$

Поэтому

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(\varphi)=\lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{i=1}^{k}\varphi(\xi_1)\,\Delta x_i=\lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{i=2}^{k-1}\varphi(\xi_i)\,\Delta x_i=$$
$$=\lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{i=2}^{k-1}f(\xi_i)\,\Delta x_i=\lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)\,\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Следовательно, интеграл $\int_a^b\varphi(x)\,dx$ существует и равен $\int_a^b f(x)\,dx$. □

Упражнение 1. Доказать, что изменение значения функции в конечном числе точек не влияет ни на интегрируемость функции, ни на значение интеграла, если он существует.

Теорема 2. *Функция f, кусочно-непрерывная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на нем.*

Доказательство. Пусть функция f *кусочно-непрерывна на отрезке* $[a, b]$ и $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — его разбиение, указанное в определении 1. Положим

$$f_i(x)=\begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x_{i-1}<x_i<x_i,\\ f(x_{i-1}+0) & \text{при} \quad x=x_{i-1},\\ f(x_i-0) & \text{при} \quad x=x_i.\end{cases}$$

На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ функция отличается от непрерывной функции f_i, быть может, только на концах этого отрезка. Следовательно, по лемме, функция f интегрируема на $[x_{i-1}, x_i]$ и

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx=\int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,dx, \quad i=1, 2, \ldots, k.$$

Применяя свойство 3^0 интегралов, получим, что функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{x_{i-1}}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,dx. \quad \Box \tag{28.41}$$

Замечание. В п. 44.5 будет доказано более общее достаточное условие интегрируемости (см. теорему 10 в п. 44.5 и замечание 2 в п. 44.7), из которого в частности следует, что всякая ограниченная на отрезке функция, непрерывная на нем всюду, кроме конечного числа точек, интегрируема. Тем самым условие наличия у функции f только конечного числа точек разрыва первого рода не является существенным в теореме 2: они могут быть и второго рода — утверждение теоремы остается верным.

28.4*. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ГЁЛЬДЕРА*) И МИНКОВСКОГО**)

Пусть функции f и g определены и интегрируемы на отрезке $[a, b]$, $1 < p < +\infty$, а число q определяется равенством

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{28.42}$$

(см. (20.49), (20.51) и (20.52)). Тогда имеем:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{1/q}, \tag{28.43}$$

(неравенство Гёльдера)

$$\left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}, \tag{28.44}$$

(неравенство Минковского).

Докажем эти неравенства. Введем для краткости обозначения

$$\|f\|_p \overset{\text{def}}{=} \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}, \quad \|g\|_q \overset{\text{def}}{=} \left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{1/q}. \tag{28.45}$$

В неравенстве (20.53)

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a \geqslant 0, \ b \geqslant 0,$$

*) О. Л. Гёльдер (1859—1937) — немецкий математик.

**) Г. Минковский (1864—1906) — родился в России, работал в Швейцарии и Германии.

положим

$$a=\frac{|f(x)|}{\|f\|_p},\quad b=\frac{|g(x)|}{\|g\|_q},\quad x\in[a,\ b].$$

Тогда для любого $x\in[a,\ b]$

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\,\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\leqslant\frac{1}{p}\,\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{q}\,\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Проинтегрировав это неравенство по отрезку $[a,\ b]$ и использовав (28.45) и (28.42), найдем

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int\limits_a^b|f(x)g(x)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{p\|f\|_p^p}\int\limits_a^b|f(x)|_p^p\,dx+\frac{1}{q\|g\|_q^q}\int\limits_a^b|g(x)|^q\,dx=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Поэтому

$$\int\limits_a^b|f(x)g(x)|\,dx\leqslant\|f\|_p\|g\|_q,$$

т. е. неравенство (28.44) доказано.

Докажем неравенство (28.44). Легко убедиться в справедливости неравенства

$$\int\limits_a^b|f(x)+g(x)|^p\,dx=\int\limits_a^b|f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_a^b|f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx+\int\limits_a^b|g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx.$$

Применив к каждому из полученных интегралов неравенство Гельдера и заметив, что $q(p-1)=p$ (см. (28.42)), получим:

$$\int\limits_a^b|f(x)+g(x)|^p\,dx\leqslant\left[\int\limits_a^b|f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int\limits_a^b|f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\,dx\right]^{1/q}+$$

$$+\left[\int\limits_a^b|g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int\limits_a^b|f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\,dx\right]^{1/q}=$$

$$=\left\{\left[\int\limits_a^b|f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}+\left[\int\limits_a^b|g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\right\}\left[\int\limits_a^b|f(x)+g(x)|^p\,dx\right]^{1/q}. \quad (28.46)$$

Если левая часть этого неравенства равна нулю, то неравенство (28.44) очевидно справедливо, если же она не равна нулю, то, сократив обе части неравенства (28.46) на множитель $\left[\int\limits_a^b|f(x)+g(x)|^p\,dx\right]^{1/q}$, в силу соотношения (28.42), получим неравенство Минковского. □

Отметим важный частный случай неравенства Гёльдера. При $p=q=2$ имеем

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \sqrt{\int_a^b |f(x)|\,dx}\sqrt{\int_a^b |g(x)|\,dx}. \qquad (28.47)$$

(*неравенство Коши*).

§ 29. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

29.1. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ИНТЕГРАЛА ПО ВЕРХНЕМУ ПРЕДЕЛУ

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда она интегрируема и на любом отрезке $[a, x]$, где $a \leqslant x \leqslant b$, т. е. для любого $x \in [a, b]$ имеет смысл интеграл $\int_a^x f(t)\,dt$.

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \qquad (29.1)$$

Эта функция F определена на отрезке $[a, b]$ и называется *интегралом с переменным верхним пределом*. Установим ее основные свойства.

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на отрезке* $[a, b]$, *то функция* (29.1) *непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть $x \in [a, b]$, $x+\Delta x \in [a, b]$. Тогда из формулы (29.1) следует, что

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = F(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt,$$

поэтому (рис. 109)

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt. \qquad (29.2)$$

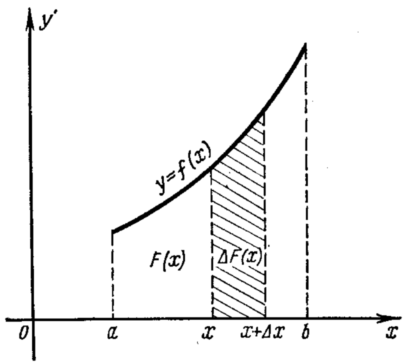


Рис. 109

Поскольку функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, она ограничена на этом отрезке, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in [a, b]$. Применяя это неравенство для оценки выражения $|\Delta F|$, получим (см. п. 28.1):

$$|\Delta F| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt\right| \leqslant \left|\int_x^{x+\Delta x} M\,dt\right| \leqslant M|\Delta x|.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F = 0$ для любого $x \in [a, b]$, а это означает непрерывность функции F в каждой точке $x \in [a, b]$. □

29.2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ИНТЕГРАЛА ПО ВЕРХНЕМУ ПРЕДЕЛУ, СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ У НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 2. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема в точке x_0 и*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. Покажем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0),$$

где $\Delta F = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$, $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Для этого оценим модуль разности $\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)$.

Заметив, что $\frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = 1$, и следовательно $f(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt$, будем иметь

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} - f(x_0)\right| =$$

$$= \left|\frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt}{\Delta x}\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,dt\right|. \qquad (29.3)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции f в точке x_0 существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что если $|x - x_0| < \delta$ и $x \in [a, b]$, то

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \qquad (29.4)$$

Выберем Δx так, что $|\Delta x| < \delta$. Тогда для значений t на отрезке, по которому ведется интегрирование, будем иметь $|t - x_0| \leqslant \leqslant |\Delta x| < \delta$ и, следовательно, из неравенств (29.3) и (29.4), получим

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x}^{x_0+\Delta x} dt\right| = \varepsilon,$$

а это означает, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0)$.

В случае, когда точка x_0 совпадает с одним из концов отрезка $[a, b]$, под $F'(x_0)$ следует подразумевать соответствующую одностороннюю производную функции $F(x)$. □

Теперь можно решить вопрос о существовании первообразной для произвольной непрерывной функции.

Теорема 3. *Если функция интегрируема на отрезке и непрерывна в его внутренних точках, то на этом отрезке существует ее первообразная.*

Следствие. *Непрерывная на отрезке функция имеет первообразную.*

Доказательство. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна на интервале (a, b), то согласно теоремам 1 и 2 ее первообразной на отрезке $[a, b]$ является, например, функция

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

В самом деле, во всех внутренних точках x отрезка $[a, b]$ т. е. в точках интервала (a, b), согласно теореме 2 функция F дифференцируема и $F'(x) = f(x)$, а на концах отрезка $[a, b]$ согласно теореме 1 функция F непрерывна. Это и означает (см. определение 1 в п. 22.1), что F является первообразной для f на $[a, b]$. □

Покажем справедливость следствия: если функция непрерывна на некотором отрезке, то она, согласно теореме 3 п. 27.5, интегрируема на нем и, следовательно, удовлетворяет условиям доказанной теоремы. □

Таким образом, операция интегрирования с переменным верхним пределом, примененная к непрерывной функции, приводит к первообразной функции, т. е. является операцией, обратной дифференцированию

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)\,dt = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{29.5}$$

Это утверждение (называемое *формулой дифференцирования определенного интеграла по верхнему пределу*) является основополагающим для дифференциального и интегрального исчисления. Из него следует, в частности, что любая первообразная функции

$f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, имеет вид

$$\int_a^x f(t)\,dt + C, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Действительно, согласно доказанному функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для функции $f(x)$, а всякая другая ее первообразная может отличаться от $F(x)$ лишь на постоянную (см. п. 22.1). Таким образом установлена связь между неопределенным и определенным интегралами в виде

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C.$$

Доказанные теоремы показывают, что операция интегрирования с переменным верхним пределом приводит к «улучшению» или «сглаживанию» свойств функции: интегрируемая функция переходит в непрерывную, а непрерывная — в дифференцируемую.

Заметим, что операция дифференцирования в определенном смысле «ухудшает» свойства функции: например, призводная непрерывной функции, если она существует, может быть уже разрывной функцией.

Из формулы дифференцирования по верхнему пределу (29.5) можно легко получить и формулу дифференцирования по нижнему пределу. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда на этом отрезке определена и функция

$$G(x) = \int_x^b f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

причем из тождества

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt$$

имеем

$$G(x) = \int_a^b f(t)\,dt - F(x). \tag{29.6}$$

Если функция f непрерывна в точке $x \in [a, b]$, то, как доказано выше, функция F дифференцируема в этой точке. Из формулы (29.6) следует, что в этом случае функция $G(x)$ в точке x также дифференцируема и

$$\frac{dG(x)}{dx} = -\frac{dF(x)}{dx}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x).$$

Замечание. Из формул дифференцирования интеграла от непрерывной функции по верхнему (нижнему) пределу интегрирования следует также, что всякая функция, непрерывная на некотором промежутке (конечном или бесконечном), имеет на нем первообразную. Действительно, пусть например, функция f непрерывна на интервале (a, b). Выберем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$ и положим

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

Тогда для всех $x \in (a, b)$ справедливо равенство $F'(x) = f(x)$, т. е. $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на интервале (a, b).

Упражнение. Пусть функция $f(x)$ непрерывна, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — дифференцируемы всюду в R. Доказать следующие обобщения формулы (29.5):

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{\varphi(x)} f(t)\, dt = f(\varphi(x))\, \varphi'(x); \qquad \frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\, dt = f(\varphi(x))\, \varphi'(x) - f(\psi(x))\, \psi'(x).$$

29.3. ФОРМУЛА НЬЮТОНА—ЛЕЙБНИЦА

Теорема 4 (основная теорема интегрального исчисления). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если функция Φ является произвольной ее первообразной на этом отрезке, то*

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{29.7}$$

Эта формула называется *формулой Ньютона — Лейбница* *).

Доказательство. Положим $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, dt$. Согласно доказательству следствия из теоремы 3 п. 29.2 функция F является первообразной для функции f на отрезке $[a, b]$. Таким образом F и Φ — две первообразные одной и той же функции f на отрезке $[a, b]$, поэтому

$$F(x) = \Phi(x) + C, \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

где C — некоторая определенная постоянная, т. е.

$$\int_{a}^{x} f(t)\, dt = \Phi(x) + C, \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

---

*) И. Ньютон (1643—1727) — английский физик, механик, астроном и математик.

При $x=a$ отсюда следует, что $C=-\Phi(a)$, следовательно,

$$\int_a^x f(t)\,dt=\Phi(x)-\Phi(a).$$

Полагая здесь $x=b$, получим формулу (25.7). $\square$

Для краткости записи часто употребляется обозначение

$$\Phi(x)\Big|_a^b \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(b)-\Phi(a),$$

или

$$[\Phi(x)]_a^b \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(b)-\Phi(a).$$

Если в приведенном доказательстве теоремы 4 вместо следствия из теоремы 3 использовать саму эту теорему, то получится доказательство более общего утверждения. Сформулируем его также в виде теоремы.

Теорема 4*. *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в его внутренних точках. Если функция Φ является какой-либо ее первообразной на этом отрезке, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Отметим еще, что формула Ньютона — Лейбница (29.7) справедлива и для $a>b$. Действительно, если a и b поменять местами, то обе части равенства (29.7) изменят знак.

Замечание. Можно показать, что условие интегрируемости функции на отрезке при условии ее непрерывности во внутренних его точках равносильно ограниченности функции на этом отрезке. Это непосредственно следует из ограниченности интегрируемой функции и замечания в конце п. 28.3.

Примеры. 1. Найдем $\int_0^1 x^2\,dx$. Известно, что

$$\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C, \text{ поэтому } \int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

2. Найдем $\int_0^\pi \sin x\,dx$. Имеем

$$\int_0^\pi \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^\pi=-\cos\pi+\cos 0=2.$$

Теорема 4* может быть усилена за счет отказа от выполнения условия $F'(x)=f(x)$ в конечном числе точек. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть f — интегрируемая, а F — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функции и пусть всюду на $[a, b]$, кроме конеч-*

ного множества точек, справедливо равенство $F'(x)=f(x)$. Тогда справедлива и формула Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{29.8}$$

Доказательство. Обозначим через $a_1, \ldots, a_m$ точки конечного множества, в которых не выполняется равенство $F'(x)=f(x)$, $a_j \in [a, b]$, $j=1, \ldots, m$, и рассмотрим какое-либо разбиение $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, содержащее все точки $a_1, \ldots$ $\ldots, a_m$. Тогда на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция F непрерывна, а внутри него она имеет производную $F'(x)=f(x)$. Поэтому к функции F на указанном отрезке можно применить формулу конечных приращений (теорему Лагранжа о среднем значении):

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)\,\Delta x_i = f(\xi_i)\,\Delta x_i, \tag{29.9}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i=1, \ldots, k$.

Суммируя получившиеся равенства от 1 до k и замечая, что

$$\sum_{i=1}^{k} F(x_i) - F(x_{i-1}) = F(x_k) - F(x_0) = F(b) - F(a),$$

получим

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \tag{29.10}$$

В правой части этого равенства стоит интегральная сумма Римана функции f.

Пусть теперь $\tau=\tau_n$, $n=1, 2, \ldots$ — последовательность разбиений, содержащих точки $a_1, \ldots, a_m$, для которой $\delta_{\tau_n} \to 0$ при $n \to \infty$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в (29.10) и замечая, что левая часть этого равенства постоянна и равна $F(b)-F(a)$, а правая в силу интегрируемости функции f (см. теорему 3 в п. 28.3) стремится к интегралу $\int_a^b f(x)\,dx$ получим формулу (29.8). $\square$

В случае, когда функция f кусочно-непрерывна, нетрудно доказать, что всегда существует функция F, удовлетворяющая условиям теоремы 5. Для этого надо взять разбиение $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, состоящее из точек a, b и точек разрыва функции f. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ существует первообразная F_i функции f (теорема 3). При любых постоянных C_i функции F_i+C_i также будут первообразными для f на $[x_{i-1}, x_i]$. Выбрав одну из постоянных C_i произвольно, остальные можно последовательно выбрать так, что в результате получится непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция F, для которой $F'(x)=f(x)$, $x \neq x_i$, $i=0,1, \ldots, k$.

Функция F, удовлетворяющая условиям теоремы 5, т. е. непрерывная на отрезке $[a, b]$ и такая, что для всех его точек, кроме конечного множества, выполняется условие $F'(x) = f(x)$, также называется *первообразной функцией* функции f. Это некоторое обобщение определения 1 п. 22.1.

§ 30. ФОРМУЛЫ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ В ИНТЕГРАЛЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

30.1. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

Теорема 1. *Пусть*

1) *функция* $f(x)$ *непрерывна на интервале* (a, b);

2) *функция* $\varphi(t)$ *определена и непрерывна вместе со своей производной* $\varphi'(t)$ *на интервале* (α, β), *причем для всех* $t \in (\alpha, \beta)$ *выполняется неравенство* $a < \varphi(t) < b$. Тогда, если $\alpha_0 \in (\alpha, \beta)$, $\beta_0 \in (\alpha, \beta)$, $a_0 = \varphi(\alpha_0)$, $b_0 = \varphi(\beta_0)$, то

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \tag{30.1}$$

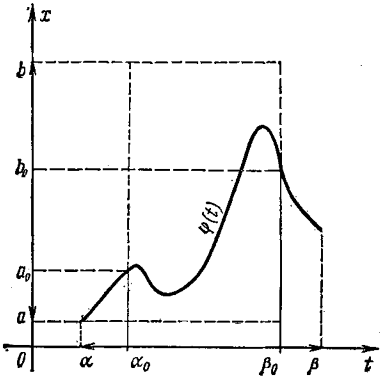


Рис. 110

Эта формула называется формулой *замены переменной* в определенном интеграле или формулой интегрирования *подстановкой*.

Доказательство. Прежде всего заметим, что, по условию, функция f заведомо определена на множестве значений функции φ (рис. 110), поэтому имеет смысл сложная функция $f[\varphi(t)]$. В силу сделанных предположений подынтегральные функции в обеих частях формулы (30.1) непрерывны, поэтому оба интеграла в этой формуле существуют.

Пусть $\Phi(x)$ — какая-либо первообразная функция $f(x)$ на интервале (a, b). Тогда для точек t интервала (α, β) имеет смысл сложная функция $\Phi[\varphi(t)]$, которая является первообразной для функции $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. По формуле Ньютона — Лейбница (см. п. 29.3),

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx = \Phi(b_0) - \Phi(a_0),$$

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = \Phi[\varphi(\beta_0)] - \Phi[\varphi(\alpha_0)] = \Phi(b_0) - \Phi(a_0).$$

Из этих равенств и следует формула (30.1). □

Как видно из доказательства, формула (30.1) справедлива как при $\alpha_0 \leqslant \beta_0$, так и при $\alpha_0 > \beta_0$.

Интересно отметить, что некоторые значения функции $\varphi(t)$ могут и не принадлежать отрезку $[a_0, b_0]$, по которому происходит интегрирование (см. рис. 110) в левой части равенства (30.1).

Если воспользоваться формулой для односторонних производных сложной функции (см. замечание 2 в п. 9.7), то формулу (30.1) можно доказать для случая, когда функция f задана на отрезке $[a, b]$, функция $\varphi(t)$ — на отрезке $[\alpha, \beta]$ и множество значений функции φ содержится в отрезке $[a, b]$, причем $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ (рис. 111). В этом случае формула замены переменной может быть применена ко всему отрезку $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{30.2}$$

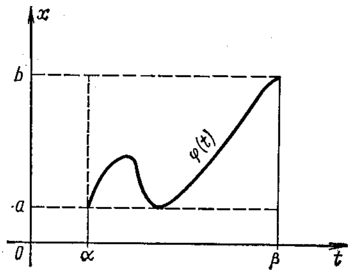


Рис. 111

При употреблении символа определенного интеграла мы всегда писали под знаком интеграла выражение $f(x)\,dx$, где x — независимая переменная. При этом, когда давалось определение определенного интеграла, не предполагалось, что $f(x)\,dx$ является дифференциалом какой-либо функции. Затем (см. п. 29.2) было показано, что, по крайней мере, для непрерывной функции f выражение $f(x)\,dx$ всегда является дифференциалом некоторой функции $F(x)$: $dF(x) = f(x)\,dx$. Поэтому естественно считать, что в этом случае записи $\int_a^b dF(x)$ и $\int_a^b f(x)\,dx$ равнозначны, т. е.

$$\int_a^b dF(x) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Будем вообще допускать под знаком определенного интеграла любую запись дифференциала, т. е. положим, по определению, для дифференцируемой функции $g(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

(если, конечно, интеграл, стоящий в правой части равенства, существует). С помощью этого обозначения, например, формула (30.2) примет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,d\varphi(t).$$

Таким образом, при замене переменного $x=\varphi(t)$ в определенном интеграле $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ следует всюду формально заменить x на $\varphi(t)$ и соответственным образом изменить пределы интегрирования.

Обратим внимание на то, что при применении формулы (30.1) (соответственно формулы (30.2)) ее, подобно случаю неопределенного интеграла, можно использовать как слева направо, так и справа налево. Однако в отличие от неопределенного интеграла, где мы в конце вычисления должны были возвращаться к первоначальной переменной интегрирования, здесь этого делать не нужно, так как наша цель найти число, которое в силу доказанных формул равно значению каждого из рассматриваемых интегралов.

Примеры. 1. Вычислим интеграл $\int\limits_0^2 e^{x^2}x\,dx$. Применив формулу (30.1) справа налево (здесь роль переменной t играет x), получим

$$\int\limits_0^2 e^{x^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 e^{x^2}\,dx^2=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 e^y\,dy=\frac{1}{2}e^y\Big|_0^4=\frac{e^4-1}{2}.$$

2. Пусть требуется вычислить интеграл $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$. Попытаемся упростить подынтегральное выражение, положив $\sqrt{e^x-1}=t$. Иначе говоря, сделаем замену переменного $x=\ln(1+t^2)$; тогда $dx=\frac{2t\,dt}{1+t^2}$ и, поскольку при $0\leqslant t\leqslant 1$ имеем $0\leqslant x\leqslant \ln 2$, то применив формулу (30.1) слева направо, получим

$$\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx=2\int\limits_0^1\frac{t^2\,dt}{1+t^2}=2\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=$$
$$=2[t-\operatorname{arctg}t]_0^1=\frac{4-\pi}{2}.$$

Упражнение 1. Доказать, что если функция f непрерывна на $[a, b]$ и для всех $t\in[0, b-a]$ $f(a+t)=f(b-t)$, то

$$\int\limits_a^b xf(x)\,dx=\frac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

30.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Теорема 2. *Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a, b]$, то*

$$\int\limits_a^b u\,dv=[uv]_a^b-\int\limits_a^b v\,du. \tag{30.3}$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.*

Доказательство. Имеем:

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b (uv' + u'v)\,dx = \int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du. \tag{30.4}$$

Все эти интегралы существуют, ибо подынтегральные функции непрерывны. Но согласно формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b (uv)'\,dx = [uv]_a^b. \tag{30.5}$$

Сравнив формулы (30.4) и (30.5), получим равенство

$$\int_a^b u\,du + \int_a^b v\,du = [uv]_a^b,$$

откуда и следует формула (30.3). □

Теорема 2 легко обобщается на случай так называемых кусочно-непрерывно дифференцируемых функций. Определим эти функции.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, существует такое разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, что $f(x)$ непрерывна на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) и существуют конечные пределы $f(x_{i-1}+0)$, $f(x_i-0)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. (Следовательно, функция f кусочно-непрерывна на отрезке $[a, b]$, см. определение 1 в п. 28.3). Введем, как и выше (см. доказательство теоремы 2 в п. 28.3), функции

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x_{i-1} < x < x_i, \\ f(x_{i-1}+0), & \text{если } x = x_{i-1}, \\ f(x_i - 0), & \text{если } x = x_i. \end{cases}$$

Определение 1. *Если каждая функция $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, (непрерывно) дифференцируема на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, то функция $f(x)$ называется кусочно (непрерывно) дифференцируемой на отрезке $[a, b]$.*

Теорема 2'. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны и кусочно-непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$; тогда для них справедлива формула (30.3) интегрирования по частям.*

Доказательство теоремы 2 остается в силе и в этом случае. Действительно, произведение uv — непрерывно, а его производная $(uv)' = uv' + u'v$ — кусочно-непрерывна. Поэтому согласно теореме 5 п. 29.2 к интегралу, стоящему в левой части (30.5), можно также применить формулу Ньютона — Лейбница. □

Примеры. 1. Найдем значение интеграла $\int\limits_1^2 \ln x\,dx$. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_1^2 \ln x\,dx = x\ln x\,\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 dx = 2\ln 2 - 1.$$

2. Покажем, что для любого $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & \text{при } n \text{ четном}^{*)}, \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases} \tag{30.7}$$

Заметим прежде всего, что равенство интегралов, входящих в (30.7), легко установить с помощью замены переменного $x = \pi/2 - t$. Далее, проинтегрировав по частям, получим:

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\,d(-\cos x) =$$

$$= -\sin^{n-1} x\cos x\,\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)\,dx = (n-1)\,I_{n-2} - (n-1)\,I_n,$$

отсюда

$$I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}.$$

Заметим, что $I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 1$. Поэтому при $n = 2k+1$, т. е. нечетном, будем иметь

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1}\,I_{2k-1} = \ldots = \frac{2k(2k-2)\ldots 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 1}\,I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},$$

а при $n = 2k$, т. е. четном —

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k}\,I_{2k-2} = \ldots = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 1}{2k(2k-2)\ldots 2}\,I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{\pi}{2}. \ \square$$

Из формулы (30.7) легко получается так называемая формула Валлиса**), которая нам понадобится в дальнейшем:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \tag{30.8}$$

*) Под $n!!$, $n \in N$, $n > 1$, подразумевается произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и обладающих той же четностью, что и число n.

**) Дж. Валлис (1616—1703) — английский математик.

Докажем ее. Интегрируя неравенство

$$\sin^{2n+1} x \leqslant \sin^{2n} x \leqslant \sin^{2n-1} x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,$$

по отрезку $[0, \pi/2]$ будем иметь

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x\,dx$$

(нетрудно показать, что в действительности здесь имеют место строгие неравенства). В силу (30.7)

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

откуда

$$x_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{1}{2n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \overset{\text{def}}{=} y_n. \tag{30.9}$$

Поскольку в силу этого неравенства

$$y_n - x_n = \frac{1}{2n}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \leqslant \frac{1}{2n}\frac{\pi}{2} \to 0$$

при $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$, т. е. длины отрезков $[x_n, y_n] \ni \pi/2$ стремятся к нулю и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pi/2, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = \pi/2.$$

Первое из этих равенств, в силу определения x_n (см. (30.9)), и означает справедливость формулы Валлиса. $\square$

Упражнения. Вычислить определенные интегралы:

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

3. $\displaystyle\int_0^2 |x-1|\,dx$.

4. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\sin x}{1+\cos^2 x} + \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right)dx$.

30.3*. ВТОРАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Лемма 1. *Пусть f — непрерывная, а g — возрастающая неотрицательная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция. Тогда существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что*

$$\int_a^b g(x) f(x)\,dx = g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{30.10}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int_x^b f(t)\,dt, \qquad a \leqslant x \leqslant b. \tag{30.11}$$

Функция F, являясь интегралом с переменным нижним пределом от интегрируемой (даже непрерывной) функции f, непрерывна на отрезке $[a, b]$ и поэтому достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений. Если

$$m = \min_{[a,\, b]} F(x), \quad M = \max_{[a,\, b]} F(x), \tag{30.12}$$

то, очевидно,

$$m \leqslant F(x) \leqslant M, \quad x \in [a, b]. \tag{30.13}$$

Заметив, что $dF(x) = -f(x)\,dx$ и проинтегрировав по частям интеграл, стоящий в левой части равенства (30.10), получим

$$\int_a^b g(x) f(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\,dF(x) = g(x)F(x)\Big|_a^b + \int_a^b F(x) g'(x)\,dx =$$

$$= g(a)F(a) + \int_a^b F(x) g'(x)\,dx, \tag{30.14}$$

ибо в силу (30.11) $F(b) = 0$.

Вследствие возрастания функции g имеем $g'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [a, b]$. Применив это неравенство, неравенства (30.13) и заметив, что из неотрицательности g на $[a, b]$ следует в частности, что и $g(a) \geqslant 0$, получим оценки

$$g(a)F(a) + \int_a^b F(x) g'(x)\,dx \leqslant Mg(a) + M\int_a^b g'(x)\,dx =$$

$$= Mg(a) + M[g(b) - g(a)] = Mg(b),$$

$$g(a)F(a) + \int_a^b F(x) g'(x)\,dx \geqslant mg(a) + m[g(b) - g(a)] = mg(b).$$

Таким образом, (см. (30.14)) имеем

$$mg(b) \leqslant \int_a^b g(x) f(x)\,dx \leqslant Mg(b).$$

Если $g(b) = 0$, то из неотрицательности и возрастания функции g следует, что $g(x) \equiv 0$ на $[a, b]$. В этом случае формула (30.10) справедлива при любом выборе $\xi \in [a, b]$.

Если же $g(b) > 0$, то

$$m \leqslant \frac{1}{g(b)} \int_a^b g(x) f(x)\,dx \leqslant M.$$

Поскольку непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция F принимает на этом отрезке любое значение, лежащее между ее минимальным значением m и максимальным M (см. (30.12)), то существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$F(\xi) = \frac{1}{g(b)} \int_a^b g(x) f(x)\, dx.$$

В силу условия (30.11) это и есть формула (30.10). $\square$

Теорема 3 (Бонне*)). *Пусть f — непрерывная, а g — монотонная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция. Тогда существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что*

$$\int_a^b g(x) f(x)\, dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\, dx + g(b) \int_\xi^b f(x)\, dx. \tag{30.15}$$

Доказательство. Допустим сначала, что функция g возрастает на отрезке $[a, b]$; тогда функция $h(x) \overset{\text{def}}{=} g(x) - g(a)$, $a \leqslant x \leqslant b$, будет неотрицательной возрастающей непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функцией. Поэтому согласно лемме существует такое $\xi \in [a, b]$, что

$$\int_a^b h(x) f(x)\, dx = h(b) \int_\xi^b f(x)\, dx.$$

Подставив сюда выражение для $h(x)$, получим

$$\int_a^b [g(x) - g(a)] f(x)\, dx = [g(b) - g(a)] \int_\xi^b f(x)\, dx,$$

откуда

$$\int_a^b g(x) f(x)\, dx = g(a) \int_a^b f(x)\, dx - g(a) \int_\xi^b f(x)\, dx + \\ + g(b) \int_\xi^b f(x)\, dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\, dx + g(b) \int_\xi^b f(x)\, dx,$$

т. е. получилась формула (30.15).

Если функция g убывает на отрезке $[a, b]$, то для доказательства теоремы достаточно применить формулу (30.15) к функции $-g$, которая, очевидно, возрастающая. $\square$

Отметим, что теорема 2 справедлива и при более слабых ограничениях: от функции f достаточно потребовать лишь ее интегрируемость, а от g — ее монотонность.

30.4. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Аналогично тому, как были определены интегралы от числовых функций, можно определить и интегралы от вектор-функций, значения которых принадлежат n-мерному векторному пространству R^n (см. п. 18.4).

*) О. Бонне (1819—1892) — французский математик.

Пусть $\boldsymbol{r}(t)\in R^n$, $a\leqslant t\leqslant b$, — вектор-функция, $\tau=\{t_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $\xi_i\in[t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, i_0$, δ_τ — мелкость разбиения τ. Если при любом указанном выборе точек ξ_i существует предел *)

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{i=1}^{i_0}\boldsymbol{r}(\xi_i)\Delta t_i,$$

не зависящий от выбора последовательности разбиений, то он называется *интегралом от функции* $\boldsymbol{r}(t)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt.$$

При постоянных a и b он представляет собой постоянный вектор в R^n.

Пусть $\boldsymbol{r}(t)=(x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Поскольку при сложении векторов складываются их координаты, при умножении векторов на число их координаты умножаются на то же число, а предел вектор-функции равен вектору, координаты которого являются пределами ее соответствующих координат, то

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt=\left(\int_a^b x_1(t)\,dt, \ \ldots, \int_a^b x_n(t)\,dt\right).$$

В силу этого равенства многие свойства интегралов от числовых функций переносятся на интегралы от вектор-функций. В частности, вектор-функция $\boldsymbol{F}(t)$, определенная на некотором конечном или бесконечном промежутке E числовой прямой, называется *первообразной для данной функции* $\boldsymbol{r}(t)\in R^n$, определенной на том же промежутке E, если во всех его внутренних точках t имеет место равенство $\boldsymbol{F}'(t)=\boldsymbol{r}(t)$, а на каждом конце промежутка E, входящем в E, функция $\boldsymbol{F}$ непрерывна.

Для вектор-функций справедливо предложение, аналогичное основной теореме интегрального исчисления (см. теорему 4 п. 29.3):

если вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)\in R^n$ *интегрируема на отрезке* $[a, b]$ *и непрерывна в его внутренних точках (в частности, если она непрерывна на всем отрезке* $[a, b]$*), то у нее существует на этом отрезке первообразная, и для любой ее первообразной* $\boldsymbol{F}(t)$, *справедлива формула*

$$\int_a^b \boldsymbol{r}'(t)\,dt=\boldsymbol{F}(b)-\boldsymbol{F}(a)$$

*) Понятие предела в этом случае определяется с помощью предела векторной последовательности либо на $(\varepsilon-\delta)$-языке совершенно аналогично случаю скалярных функций, рассмотренному в п. 27.1, и предоставляется читателю.

называемая, как и в случае скалярных функций, формулой Ньютона — Лейбница.

Справедливость этого утверждения следует из справедливости формулы Ньютона — Лейбница для всех координат функции $\boldsymbol{r}(t)$.

Замечание. В п. 15.2 была доказана следующая теорема: если вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема внутри него, то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)| \leqslant |\boldsymbol{r}'(\xi)|(b-a).$$

Приведенное в п. 15.2 доказательство этого утверждения имело несколько искусственный характер — надо было догадаться воспользоваться некоторой вспомогательной функцией. С помощью понятия интеграла (предполагая непрерывность производной рассматриваемой вектор-функции) доказательство можно провести более естественным образом.

Пусть вектор-функция $\boldsymbol{r}(t) \in R^n$ имеет непрерывную на отрезке $[a, b]$ производную. Тогда, применяя формулу Ньютона — Лейбница, получаем

$$|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)| = \left|\int_a^b \boldsymbol{r}'(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt.$$

В правой части получился интеграл от непрерывной скалярной функции. Согласно интегральной теореме о среднем (см. следствие из теоремы 1 в п. 28.2) существует такая точка $\xi \in$ $\in (a, b)$, что

$$\int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt = |\boldsymbol{r}'(\xi)|(b-a);$$

следовательно,

$$|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)| \leqslant |\boldsymbol{r}'(\xi)|(b-a), \quad \xi \in (a, b). \ \square$$

§ 31. МЕРА ПЛОСКИХ ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ

31.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕРЫ (ПЛОЩАДИ) ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ

Рассмотрим плоскость, на которой зафиксирована некоторая прямоугольная система координат. Обозначим через T_0 разбиение этой плоскости на замкнутые квадраты, получающиеся при проведении всевозможных прямых $x=p$, $y=q$, $p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $q=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Такое разбиение назовем *квадрильяжем плоскости ранга* 0, а указанные квадраты — *квадратами нулевого ранга.* Разобьем каждый из квадратов нулевого ранга на 100 равных квадратов прямыми, параллельными осям координат (любые две соседние параллельные прямые отстоят друг от друга на расстояние 1/10). Совокупность получившихся квадратов обозначим T_1. Продолжая этот процесс дальше, получаем квадрильяжи T_m, $m=1, 2, \ldots$, плоскости, состоящие из квадратов, образовавшихся в результате проведения всевозможных прямых вида

$$x=\frac{p}{10^m},\quad y=\frac{q}{10^m},\quad p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\quad q=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

и, следовательно, со сторонами длины $1/10^m$. Квадраты, принадлежащие квадрильяжу T_m, будем называть *квадратами ранга* m, $m=1, 2, \ldots$

Пусть G — плоское открытое множество. Обозначим через $s_0=s_0(G)$ совокупность точек всех квадратов нулевого ранга, лежащих вместе со своей границей во множестве G, а через $s_1=s_1(G)$ — совокупность точек всех квадратов первого ранга, лежащих в G вместе с границей. Вообще через $s_m=s_m(G)$ обозначим совокупность всех квадратов ранга m, лежащих вместе со своей границей во множестве G, $m=0, 1, \ldots$ Очевидно, что (рис. 112)

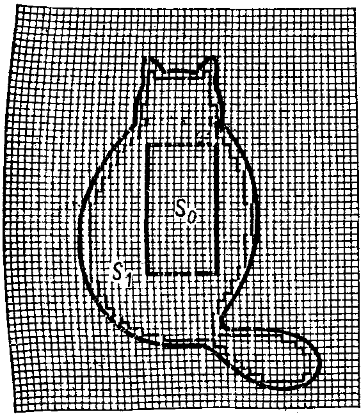


Рис. 112

$$s_0 \subset s_1 \subset \ldots \subset s_m \subset \ldots \subset G. \qquad (31.1)$$

Множества $s_0, s_1, \ldots, s_m, \ldots$ представляют собой «многоугольники», составленные из конечного или бесконечного числа квадратов соответствующего ранга. В случае, если s_m состоит из конечного числа квадратов, обозначим площадь многоугольника s_m через пл. s_m, если же s_m состоит из бесконечного числа квадратов, положим пл. $s_m=+\infty$. Если какое-то s_m состоит из бесконечного числа квадратов, то и все следующие s_m, $m \geqslant m_0$ также состоят из бесконечного числа квадратов.

Из включений (31.1) в силу соглашения об использовании символа $+\infty$ (см. п. 2.5) следует, что всегда

$$\text{пл. } s_0 \leqslant \text{пл. } s_1 \leqslant \ldots \leqslant \text{пл. } s_m \leqslant \ldots \qquad (31.2)$$

Возможны два случая.

1. Все пл. s_m конечны, тогда (31.2) является монотонно возрастающей последовательностью, и поэтому она имеет либо конечный предел, либо стремится к $+\infty$. Этот предел в этом случае и называется *площадью, или мерой, открытого множества* G и обозначается $\operatorname{mes} G$ *).

---

*) От французского слова mésure — мера, размер.

2. Если же существует такой номер m_0, что пл. $s_{m_0}=+\infty$, то пл. $s_m=+\infty$ и для всех номеров $m \geqslant m_0$. В этом случае положим

$$\operatorname{mes} G=+\infty.$$

Согласно определению предела последовательности элементов расширенной числовой прямой $\overline{R}$ (см. п. 3.2) последовательность элементов a_n, $n=1, 2, \ldots$, принадлежащих расширенному множеству действительных чисел $\overline{R}$, таких, что начиная с некоторого номера они все равны $+\infty$, имеет своим пределом $+\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$. Используя это понятие, оба рассмотренных выше случая можно объединить в один. Сформулируем окончательное определение.

Определение 1. *Предел* $\lim\limits_{m\to\infty}$ пл. $s_m(G)$ *(конечный или бесконечный) называется площадью, или мерой, открытого множества* G *и обозначается* $\operatorname{mes} G$:

$$\operatorname{mes} G=\lim_{m\to\infty} \text{пл. } s_m(G). \tag{31.3}$$

Такое определение меры открытого множества естественно, так как последовательность множеств s_m, $m=0, 1, \ldots$, исчерпывает открытое множество, т. е.

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} s_m=G,$$

иначе говоря, для любой точки $P \in G$ существует такой многоугольник s_{m_0}, что

$$P \in s_{m_0}.$$

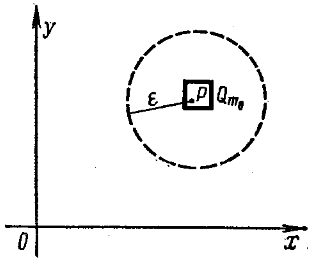


Рис. 113

Действительно, какова бы ни была точка $P \in G$, в силу открытости множества G существует сферическая окрестность $U(P;\ \varepsilon) \subset G$, $\varepsilon>0$. Заметив теперь, что диаметр квадрата ранга m равен $\sqrt{2}/10^m$; выберем m_0 так, чтобы

$$\frac{1}{10^{m_0}}<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}. \tag{31.4}$$

Для всякой точки плоскости существует по крайней мере один квадрат каждого ранга, содержащий эту точку. Пусть Q_{m_0} — квадрат ранга m_0, содержащий точку P. В силу неравенства (31.4) $Q_{m_0} \subset U(P;\ \varepsilon)$, значит, $Q_{m_0} \subset G$ и, следовательно, $Q_{m_0} \subset s_{m_0}$, но $P \in Q_{m_0}$, поэтому $P \in s_{m_0}$ (рис. 113). $\square$

Если открытое множество G ограничено, то всегда $\operatorname{mes} G< <+\infty$. В самом деле, если G ограничено, то существует замкнутый квадрат Q, содержащий множество G ($G \subset Q$) и являющийся объединением квадратов нулевого ранга, тогда $s_m(G) \subset Q$ при любом $m=0, 1, \ldots$, и, значит, пл. $s_m(G) \leqslant$ пл. Q.

Таким образом, последовательность (31.2) ограничена сверху и, значит, предел (31.3) конечен.

Задача 21. Доказать, что мера плоского открытого множества не зависит от выбора прямоугольной системы координат на плоскости, на которой оно расположено.

Из курса элементарной математики известно, что в случае, если открытое множество S является многоугольником, то его площадь, являющаяся, по определению, и площадью замкнутого многоугольника $\bar{S}$, совпадает с определенной нами мерой:

$$\text{пл. } \bar{S} = \text{пл. } S = \operatorname{mes} S^{*)}.$$

31.2. СВОЙСТВА МЕРЫ ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ

Теорема 1 (монотонность меры). *Если G и Γ — плоские открытые множества и*

$$G \subset \Gamma, \tag{31.5}$$

то

$$\operatorname{mes} G \leqslant \operatorname{mes} \Gamma. \tag{31.6}$$

Доказательство. Обозначим, как и выше, через $s_m(G)$ и $s_m(\Gamma)$ совокупности квадратов ранга m, лежащих вместе со своей границей соответственно в множествах G и Γ, $m=1, 2, \ldots$. Тогда из условия (31.5) следует, что

$$s_m(G) \subset s_m(\Gamma),$$

откуда

$$\text{пл. } s_m(G) \leqslant \text{пл. } s_m(\Gamma). \tag{31.7}$$

В случае, когда оба множества $s_m(G)$ и $s_m(\Gamma)$ состоят из конечного числа квадратов, это следует из того, что площадь объемлющего многоугольника не меньше площади объемлемого, а в случае, когда хоть одно из множеств $s_m(G)$ и $s_m(\Gamma)$ содержит бесконечно много квадратов, — из соглашения об употреблении символа $+\infty$.

Переходя к пределу в неравенстве (31.7) при $m \to \infty$ в силу (31.3) получим неравенство (31.6). □

Теорема 2. *Пусть G и G_k, $k=1, 2, \ldots$, — плоские открытые множества, $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset \ldots$ и $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$,* тогда

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = \operatorname{mes} G. \tag{31.8}$$

*) См. также п. 44.2 (квадрируемые множества).

Заметим, что если при некотором k_0 имеет место $\operatorname{mes} G_k = +\infty$, то, согласно теореме 1, и для всех $k \geqslant k_0$ также $\operatorname{mes} G_k = +\infty$; в этом случае равенство (31.8) означает, что $\operatorname{mes} G = +\infty$.

Докажем предварительно лемму.

Лемма 1. *Пусть G_k, $k=1, 2, \ldots,$ — открытые плоские множества,*

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset G_{k+1} \subset \ldots \tag{31.9}$$

и

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k. \tag{31.10}$$

Тогда если E — компакт и

$$E \subset G, \tag{31.11}$$

то существует номер k_0, такой, что

$$E \subset G_{k_0}. \tag{31.12}$$

Доказательство леммы. Из (31.10) и (31.11) следует, что система $\{G_k\}$, $k=1, 2, \ldots,$ образует открытое покрытие множества E. Поэтому, согласно теореме об открытых покрытиях компакта (см. теорему 4 в п. 18.3) существует конечное покрытие $\{G_k, \ldots, G_{k_m}\}$ множества E

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_{k_i}.$$

Обозначим через k_0 наибольший из номеров $k_1, \ldots, k_m$. В силу условия (31.9) имеем равенство

$$\bigcup_{i=1}^{m} G_{k_i} = G_{k_0}.$$

Следовательно, $E \subset G_{k_0}$. □

Доказательство теоремы 2. Предварительно заметим, что из условия $G_1 \subset G_2 \subset \ldots G_k \subset \ldots$ следует (см. теорему 1), что

$$\operatorname{mes} G_1 \leqslant \operatorname{mes} G_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{mes} G_k \leqslant \ldots, \tag{31.13}$$

поэтому последовательность G_k, $k=1, 2, \ldots,$ всегда имеет предел, конечный или равный $+\infty$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть все множества $s_m(G)$, $m=0, 1, \ldots,$ состоят из конечного числа квадратов. В этом случае каждое из множеств $s_m(G)$ является ограниченным замкнутым множеством и, следовательно, компактом. Поэтому по лемме 1, для всякого номера m существует такой номер k_m, что

$$s_m(G) \subset G_{k_m}, \quad m=1, 2, \ldots. \tag{31.14}$$

При этом выберем k_m так, что $k_{m'} > k_m$ при $m' > m$. Это всегда можно сделать, например, следующим образом. Если выбраны номера $k_1 < k_2 < \ldots < k_{m-1}$ и для множества $s_m(G)$, согласно лемме 1, найдено множество G_n такое, что

$$s_m(G) \subset G_n, \tag{31.15}$$

то обозначим через k_m какое-либо натуральное число такое, что $k_m > k_{m-1}$ и $k_m \geqslant n$; тогда $G_n \subset G_{k_m}$ и, значит, $s_m(G) \subset G_{k_m}$. Таким образом построенная последовательность k_m, $m = 1, 2, \ldots$, является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел.

Обозначим теперь через $\tilde{s}_m(G)$ совокупность всех внутренних точек множества $s_m(G)$. Очевидно, $\tilde{s}_m(G)$ — открытое множество и $\tilde{s}_m(G) \subset s_m(G) \subset G_{k_m}$, поэтому в силу теоремы 1

$$\operatorname{mes} \tilde{s}_m(G) \leqslant \operatorname{mes} G_{k_m}, \tag{31.16}$$

Поскольку $G_k \subset G$, $k = 1, 2, \ldots$, то в силу той же теоремы 1

$$\operatorname{mes} G_{k_m} \leqslant \operatorname{mes} G. \tag{31.17}$$

Объединяя неравенства (31.16) и (31.17), получим:

$$\operatorname{mes} s_m(G) = \operatorname{mes} \tilde{s}_m(G) \leqslant \operatorname{mes} G_{k_m} \leqslant \operatorname{mes} G.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, будем иметь

$$\lim_{m \to \infty} \operatorname{mes} G_{k_m} = \operatorname{mes} G,$$

ибо, согласно (31.3): $\lim\limits_{m \to \infty} \operatorname{mes} s_m(G) = \operatorname{mes} G$.

Последовательность $\{\operatorname{mes} G_k\}$, как отмечалось выше, имеет конечный или бесконечный предел, поэтому он совпадает с пределом любой ее подпоследовательности, следовательно,

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = \operatorname{mes} G,$$

т. е. выполняется равенство (31.8).

2. Пусть существует множество $s_m(G)$, содержащее бесконечно много квадратов; тогда пл. $s_m(G) = +\infty$, поэтому и $\operatorname{mes} G = +\infty$. Покажем, что в этом случае и

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = +\infty. \tag{31.18}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$ и пусть $s_m(G)$ состоит из бесконечного множества квадратов. Площадь каждого квадрата ранга m равна $\frac{1}{10^{2m}}$. Зафиксируем натуральное число n так, чтобы

$$n/10^{2m} > \varepsilon, \tag{31.19}$$

и выберем из $s_m(G)$ n каких-либо квадратов. Обозначим множество их точек через D. Множество D является многоугольником (оно является объединением конечного числа квадратов) и, следовательно, ограниченным замкнутым множеством, т. е. компактом, причем

$$\text{пл. } D = \frac{n}{10^{2m}}. \tag{31.20}$$

В силу леммы существует такой номер k, что

$$D \subset G_k. \tag{31.21}$$

Обозначим через $\tilde{D}$ множество внутренних точек многоугольника D. Согласно теореме 1 и формулам (31.19), (31.20), получим

$$\operatorname{mes} G_k \geqslant \text{пл. } \tilde{D} = \text{пл. } D > \varepsilon$$

В силу же (31.13) и для всех $k' \geqslant k$

$$\operatorname{mes} G_k > \varepsilon.$$

Это и означает выполнение условия (31.18). □

Примером неограниченной плоской области, имеющей бесконечную меру, является полоса

$$G = \{(x, y): 0 < y < 1\}.$$

Она содержит в себе бесконечное множество, например, квадратов первого ранга и потому

$$\operatorname{mes} G = +\infty.$$

Для того, чтобы построить пример неограниченной области с конечной площадью, поступим следующим образом. Пусть Q — единичный квадрат:

$$Q = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Положим

$$G_1 = \left\{(x, y): 0 < x < 1,\ 0 < y < \frac{1}{2}\right\},$$

$$G_2 = G_1 \cup \left\{(x, y): 1 \leqslant x < 2,\ 0 < y < \frac{1}{4}\right\},$$

вообще

$$G_{k+1} = G_k \cup \left\{(x, y): k \leqslant x < k+1,\ 0 < y < \frac{1}{2^{k+1}}\right\},\quad k = 1, 2 \ldots.$$

Каждое множество G_k открыто (почему?).

Наглядно образование множеств G_k можно представить себе следующим образом: G_1 — половина квадрата Q; для получения G_2 берется половина оставшейся половины квадрата Q и прикладывается соответствующим образом к G_1, получается G_2; далее, половина оставшейся части квадрата Q прикладывается уже к G_3 (рис. 114) и т. д.

Очевидно, имеем цепочку включений

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset \ldots$$

и

$$\text{пл. } G_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^k}.$$

Положим $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$.

Множество G открыто и неограничено. Найдем, применив теорему 2, ее площадь:

$$\operatorname{mes} G = \lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = \lim_{k \to \infty}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = 1.$$

Мера (объем) открытых множеств в трехмерном и вообще n-мерном пространстве ($n = 1, 2, 3, 4, \ldots$) определяется с помощью аналогичной конструкции, следует только, естественно, исходить не из разбиений плоскости на квадраты (квадрильяжей),

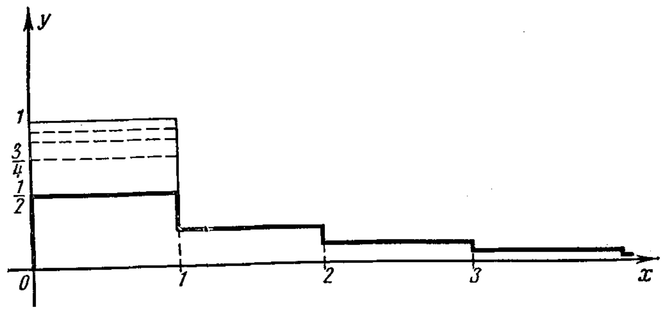


Рис. 114

а из разбиений пространства на соответствующие n-мерные кубы (кубильяжей). На n-мерный случай переносятся и теоремы, доказанные в этом параграфе. Мы вернемся еще к изучению меры множеств в дальнейших главах, см. п. 44.1. В этом пункте будут излагаться дальнейшие свойства меры (например, ее поведение при объединении множеств — так называемая аддитивность меры); его можно читать непосредственно вслед за настоящим параграфом.

Упражнение 1. Доказать, что площадь прямоугольника равна произведению его сторон.

2. Пусть G — прямой круговой цилиндр, основанием которого является круг K, а высота которого имеет длину h. Доказать, что $\operatorname{mes} G = h \operatorname{mes} K$, где $\operatorname{mes} G$ есть мера G в пространстве, а $\operatorname{mes} K$ — мера K на плоскости.

§ 32. НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

32.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

В этом пункте будут выведены формулы для вычисления площадей некоторых плоских областей. При этом воспользуемся известными из элементарной математики свойствами площади простейших плоских фигур (многоугольников, секторов), например, тем, что при объединении таких фигур, не имеющих общих внутренних точек, их площади складываются. Впрочем, это утверждение будет строго доказано в п. 44.1.

Теорема 1. *Пусть функция f определена, неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда площадь S множества*

$$G=\{(x, y): a<x<b,\ 0<y<f(x)\}$$

выражается формулой

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{32.1}$$

Множество G является открытым ограниченным множеством. Действительно, его ограниченность следует из того, что функция f, будучи непрерывной на отрезке $[a, b]$, ограничена на нем.

Покажем, что множество G открыто. Пусть $(x_0, y_0)\in G$; тогда $0<y_0<f(x_0)$. Возьмем какое-либо число $\eta>0$, такое, что $0<y_0-\eta<y_0<y_0+\eta<f(x_0)$. В силу непрерывности функции f в точке x_0 существует такое $\delta>0$, что для всех $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ выполняется неравенство $f(x)>y_0+\eta$. Ясно, что прямоугольная окрестность $P((x_0, y_0); \delta, \eta)$ принадлежит множеству G, т. е. точка (x_0, y_0) является его внутренней точкой.

Граница множества G содержится в объединении графика функции f, отрезка $[a, b]$ оси Ox и отрезков $[0, f(a)]$ и $[0, f(b)]$ соответственно прямых $x=a$ и $x=b$. Оно обычно называется *криволинейной трапецией* (см. рис. 90), порожденной графиком функции f.

Доказательство. Пусть $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Обозначим через G_τ и g_τ замкнутые многоугольники, составленные из всех прямоугольников вида

$$G_{\tau, i}=\{(x, y): x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\ 0\leqslant y\leqslant M_i,\ i=1, 2, \ldots, k\},$$
$$g_{\tau, i}=\{(x, y): x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\ 0\leqslant y\leqslant m_i,\ i=1, 2, \ldots, k\},$$

где $m_i=\inf\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x)$, $M_i=\sup\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x)$, т. е. (рис. 115)

$$G_\tau=\bigcup_{i=1}^{k} G_{\tau, i},\quad g_\tau=\bigcup_{i=1}^{k} g_{\tau, i}. \tag{32.2}$$

Если обозначить через $\tilde{G}_\tau$ и $\tilde{g}_\tau$ множество внутренних точек многоугольников G_τ и g_τ, то

$$\tilde{g}_\tau \subset G \subset \tilde{G}_\tau. \tag{32.3}$$

Если S_τ и s_τ — соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу функции f на отрезке $[a, b]$, соответствующие его разбиению τ,

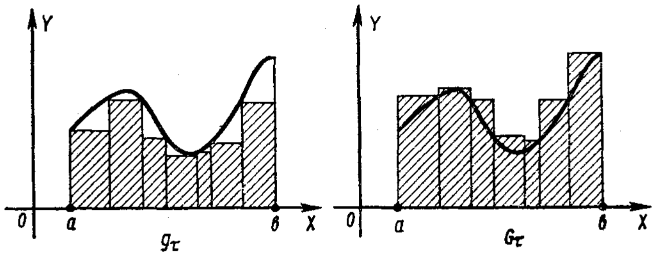


Рис. 115

то очевидно, что пл. $\tilde{g}_\tau = s_\tau$, пл. $\tilde{G}_\tau = S_\tau$. Поэтому из (32.3) в силу монотонности меры следует, что

$$s_\tau \leqslant \operatorname{mes} G \leqslant S_\tau. \tag{32.4}$$

Поскольку

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{32.5}$$

то

$$\operatorname{mes} G = \int_a^b f(x)\,dx. \quad \square$$

Как известно (см. п. 27.4),

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \int_a^b f(x)\,dx,$$

поэтому в силу формулы (32.1)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \operatorname{mes} G.$$

Таким образом, геометрически интегральные суммы Римана и суммы Дарбу равны приближенному значению площади рассматриваемой криволинейной трапеции, причем любая точность достигается выбором достаточной мелкости разбиения τ, а предел интегральных сумм равен истинному значению указанной площади.

Пусть теперь функция f непрерывна и неположительна на отрезке $[a, b]$. Положим в этом случае

$$G = \{(x, y) : a < x < b,\ f(x) < y < 0\}.$$

Пусть $\hat{G}$ — множество, симметричное множеству G относительно оси Ox *) (рис. 116), тогда

$$\operatorname{mes}\hat{G} = \operatorname{mes} G. \tag{32.6}$$

В рассматриваемом случае функция $-f$ неотрицательна на отрезке $[a, b]$, поэтому

$$\operatorname{mes}\hat{G} = \int_a^b [-f(x)]\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{32.7}$$

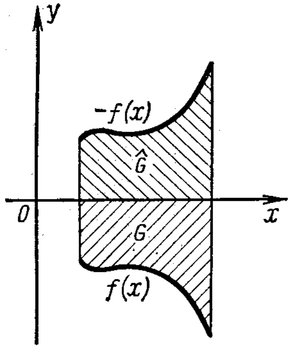


Рис. 116

Сравнив (32.6) и (32.7), получим

$$\operatorname{mes} G = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

т. е. здесь интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ равен, с точностью до знака, значению площади криволинейной трапеции G. Если же функция f меняет знак на отрезке $[a, b]$ в конечном числе точек, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ равен алгебраической сумме площадей соответствующих криволинейных трапеций, ограниченных частями графика функции f, отрезками оси Ox и, быть может, отрезками, параллельными оси Oy (рис. 117).

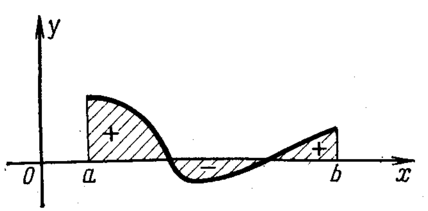


Рис. 117

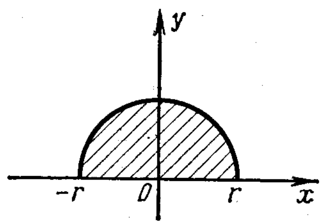


Рис. 118

Как видно, одной из задач, естественным образом приводящих к понятию определенного интеграла, является задача вычисления площадей. Развитый аппарат интегрального исчисления дает общий и единый метод вычисления площадей разнообразных плоских фигур.

Примеры. 1. Найдем площадь S круга радиуса r. Поместим начало координат в центр указанного круга. Тогда уравнение

---

*) Это означает, что $\hat{G} = \{(x, y) : (x, -y) \in G\}$.

полуокружности, лежащей в верхней полуплоскости, имеет вид $y=\sqrt{r^2-x^2}$ (рис. 118). Поэтому площадь полукруга радиуса r вычисляется, согласно теореме 1, по формуле (32.1)

$$S=\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=r^2\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=r^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=\frac{\pi r^2}{2}$$

(при вычислении интеграла сделана замена переменного $x=r\cos t$), откуда искомая площадь круга равна πr^2.

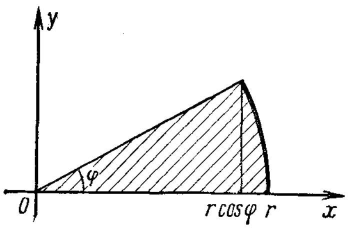


Рис. 119

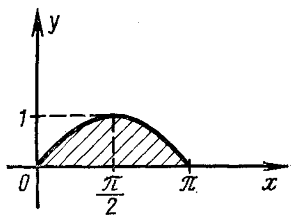


Рис. 120

Подобным же образом находится и площадь S_φ сектора круга (радиуса r), соответствующего центральному углу φ. Считая для простоты $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, имеем (рис. 119):

$$S_\varphi=\int_0^{r\cos\varphi}x\operatorname{tg}\varphi\,dx+\int_{r\cos\varphi}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{x^2\operatorname{tg}\varphi}{2}\Big|_0^{r\cos\varphi}+$$
$$+r^2\int_0^{\varphi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=\frac{r^2\sin\varphi\cos\varphi}{2}+\frac{r^2\varphi}{2}-\frac{r^2\sin 2\varphi}{4}=\frac{r^2\varphi}{2}.$$

2. Найдем площадь S, ограниченную осью Ox и одной аркой синусоиды (рис. 120)

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2.$$

Здесь, как и всегда в дальнейшем, говоря об области, ограниченной некоторой кривой, являющейся простым замкнутым контуром (см. п. 16.1), мы всегда будем иметь в виду ограниченную область, границей которого является данный контур. Всякую неограниченную область, границей которой является подобный контур, будем называть внешней (для данного контура). В рассматриваемом случае внешней областью является «внешность» области, заштрихованной на рис. 120. Внешняя область всегда имеет бесконечную площадь. Действительно, всякая кривая ограничена (см. п. 16.3), поэтому во внешней области любого простого контура содержится, например, квадрат со сколь угодно большой стороной. Отсюда сразу и следует бесконечность площади внешней области.

3. Найдем площадь S, ограниченную гиперболой $y=1/x$, осью Ox, отрезком прямой $x=1$ и отрезком прямой, проходящей через точку оси Ox с абсциссой, равной x и параллельной оси ординат (рис. 121):

$$S=\int_1^x \frac{dt}{t}=\ln\Big|_1^x=\ln x.$$

4. Вычислим площадь, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Поскольку лежащий выше оси абсцисс полуэллипс описывается уравнением $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, то для четверти искомой площади S имеем (см. пример 5 в п. 22.3 или пример 1 в п. 22.4):

$$\frac{1}{4}S=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a}{b}\left[\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^a=\frac{ab\pi}{4},$$

откуда $S=\pi ab$.

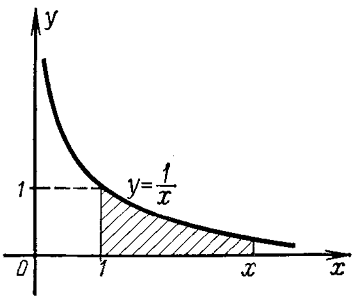


Рис. 121

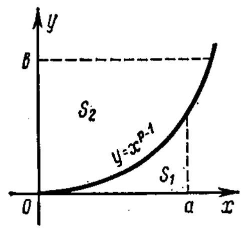


Рис. 122

5. Доказанное в п. 20.8 неравенство (20.50) имеет простой геометрический смысл. Рассмотрим кривую $y=x^{p-1}$ или, что то же, $x=y^{q-1}$, где $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (см. (20.55) и (20.56)). Выберем произвольно $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$ и подсчитаем площади S_1 и S_2 (рис. 122):

$$S_1=\int_0^a x^{p-1}\,dx=\frac{a^p}{p},\quad S_2=\int_0^b y^{q-1}\,dy=\frac{b^q}{q}.$$

Геометрически ясно, что площадь прямоугольника со сторонами a и b не превышает суммы S_1+S_2, т. е. $ab\leqslant S_1+S_2$ или, подробнее,

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\quad p>1,$$

а это и есть неравенство (20.50). При этом очевидно, что $ab = S_1 + S_2$ в том и только том случае, когда $b = a^{p-1}$.

Найдем теперь формулу для площади сектора кривой, заданной уравнением, связывающим ее полярные координаты: $\rho = \rho(\varphi)$, где $\rho = \rho(\varphi)$ — неотрицательная, непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция, $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2\pi$. Пусть G — открытое множество, граница которого состоит из кривой $\overset{\frown}{AB}$, описываемой в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ и, быть может, из отрезков OA и OB лучей $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (рис. 123), $G = \{(\rho, \varphi): \alpha < \varphi < \beta,\ 0 < \rho < \rho(\varphi)\}$.

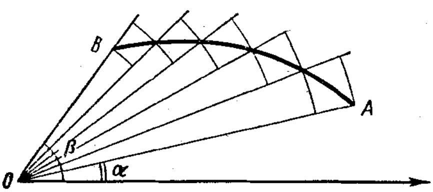


Рис. 123

Пусть $\tau = \{\varphi_i\}_{i=0}^{i=k}$ — некоторое разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$. Положим

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1},\quad m_i = \inf_{\varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i} \rho(\varphi),\quad M_i = \sup_{\varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i} \rho(\varphi),$$

$$g_{i,\tau} = \{(\rho, \varphi): \varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i,\ 0 \leqslant \rho \leqslant m_i\},$$

$$G_{i,\tau} = \{(\rho, \varphi): \varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i,\ 0 \leqslant \rho \leqslant M_i\}.$$

Впишем во множество G и опишем вокруг него ступенчатые фигуры g_τ и G_τ, составленные из круговых секторов $g_{i,\tau}$ и $G_{i,\tau}$, $i = 1, 2, \ldots, k$:

$$g_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} g_{i,\tau},\quad G_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} G_{i,\tau}.$$

Обозначим через $\tilde{g}_\tau$ и $\tilde{G}_\tau$ совокупности всех внутренних точек множеств g_τ и G_τ. Очевидно, $\tilde{g}_\tau$ и $\tilde{G}_\tau$ — открытые множества и $\tilde{g}_\tau \subset G \subset \tilde{G}_\tau$; поэтому, согласно свойству монотонности площади,

$$\text{пл. } \tilde{g}_\tau \leqslant \operatorname{mes} G \leqslant \text{пл. } \tilde{G}_\tau.$$

Но пл. $\tilde{g}_\tau =$ пл. g_τ, пл. $\tilde{G}_\tau =$ пл. G_τ, следовательно,

$$\text{пл. } g_\tau \leqslant \operatorname{mes} G \leqslant \text{пл. } G_\tau. \tag{32.8}$$

Площади круговых секторов $g_{i,\tau}$ и $G_{i,\tau}$ равны соответственно $\frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i$ и $\frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i$. Из элементарной математики известно, что при объединении плоских фигур их площади складываются (см. об этом также в п. 44.1), значит

$$\text{пл. } g_\tau = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} m_i^2 \Delta\varphi_i,\quad \text{пл. } G_\tau = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} M_i^2 \Delta\varphi_i.$$

Из этих равенств видно, что пл. g_i и пл. G_τ являются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу для функции $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$: $s_\tau =$ пл. g_τ, $S_\tau =$ пл. G_τ, следовательно

$$s_\tau \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi \leqslant S_\tau.$$

Вычитая это неравенство из неравенства (32.8), переписанного в виде $S_\tau \geqslant \operatorname{mes} G \geqslant s_\tau$, получим

$$s_\tau - S_\tau \leqslant \operatorname{mes} G - \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

Отсюда, перейдя к пределу при $\delta_\tau \to 0$, имеем

$$\operatorname{mes} G = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi. \quad \square \qquad (32.9)$$

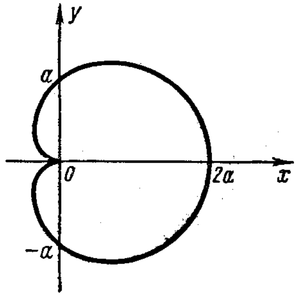


Рис. 124

В качестве примера найдем площадь S фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1+\cos\varphi)$ (см. п. 17.5), которая изображена на рис. 124. По формуле (32.9) получим

$$S = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi + a^2\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi + \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

32.2. ОБЪЕМ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

В конце п. 31.2 отмечалось, что понятие объема в пространстве вводится аналогично понятию площади на плоскости. Выведем формулу для вычисления объемов тел вращения.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x) \geqslant 0$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а Q — тело, полученное вращением криволинейной трапеции G, порожденной графиком функции f. Тогда для его объема* $\operatorname{mes} Q$ *справедлива формула*

$$\operatorname{mes} Q = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (32.10)$$

Доказательство. Обозначим через q_τ и Q_τ тела, образованные вращением вокруг оси Ox ступенчатых фигур $\tilde{g}_\tau$ и $\tilde{G}_\tau$ (см. доказательство теоремы 1). Из включения (32.3) следует, что

$q_\tau \subset Q \subset Q_\tau$, а потому и

$$\operatorname{mes} q_\tau \leqslant \operatorname{mes} Q \leqslant \operatorname{mes} Q_\tau. \qquad (32.11)$$

Объемы v_τ и V_τ множеств q_τ и Q_τ равны суммам объемов цилиндров, образованных вращением прямоугольников $g_{\tau,i}$ и $G_{\tau,i}$ (рис. 125):

$$v_\tau = \operatorname{mes} q_\tau = \sum_{i=1}^{k} \pi m_i^2 \, \Delta x_i,$$

$$V_\tau = \operatorname{mes} Q_\tau = \sum_{i=1}^{k} \pi M_i^2 \, \Delta x_i.$$

Из этих равенств видно, что v_τ и V_τ являются нижними и верхними суммами Дарбу функции $\pi f^2(x)$; поэтому

$$v_\tau \leqslant \pi \int_a^b f^2(x)\, dx \leqslant V_\tau, \qquad (32.12)$$

и так как функция f^2 непрерывна и, следовательно, интегрируема, то

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} [V_\tau - v_\tau] = 0. \qquad (32.13)$$

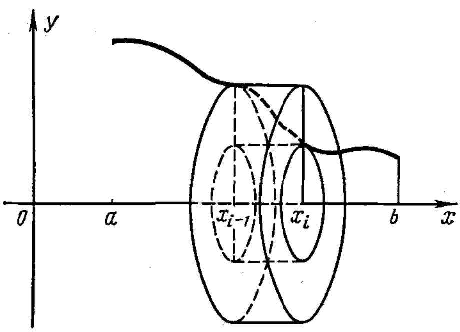


Рис. 125

Из неравенств (32.11) и (32.12) следует, что

$$v_\tau - V_\tau \leqslant \pi \int_a^b f^2(x)\, dx - \operatorname{mes} Q \leqslant V_\tau - v_\tau,$$

откуда в силу (32.13) и вытекает формула (32.10).

Примеры. 1. Найдем объем V шара радиуса r. Рассматривая этот шар как тело, образованное вращением полуокружности $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leqslant x \leqslant r$ вокруг оси Ox (см. рис. 96), по формуле (32.10) получим:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi r^2 x \Big|_{-r}^{r} - \frac{\pi x^3}{3} \Big|_{-r}^{r} = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

2. Найдем объем V прямого кругового конуса с высотой, равной h, и радиусом основания r. Рассматривая указанный конус, как тело, полученное вращением треугольника с вершинами в точках $(0, 0)$, $(h, 0)$ и (h, r) вокруг оси Ox (рис. 126),

получим, согласно формуле (32.10),

$$V=\frac{\pi r^2}{h^2}\int\limits_0^h x^2\,dx=\frac{\pi r^2x^3}{3h^2}\Big|_0^h=\frac{\pi r^2 h}{3}.$$

3. Найдем объем V тела, полученного вращением вокруг оси Ox графика функции $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $-b\leqslant x\leqslant b$. Эта кривая называется *цепной линией* (рис. 127). По формуле (32.10) имеем

$$V=\pi a^2\int\limits_{-b}^{b}\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\,dx=\frac{\pi a^2}{2}\int\limits_{-b}^{b}\left(1+\operatorname{ch}\frac{2x}{a}\right)dx=$$
$$=\left[\frac{\pi a^2x}{2}+\frac{\pi a^3}{4}\operatorname{sh}\frac{2x}{a}\right]_{-b}^{b}=\pi a^2b+\frac{\pi a^3}{2}\operatorname{sh}\frac{2b}{a}.$$

Из рассмотренных в этом параграфе примеров уже отчетливо видна сила и общность методов интегрального исчисления: еди-

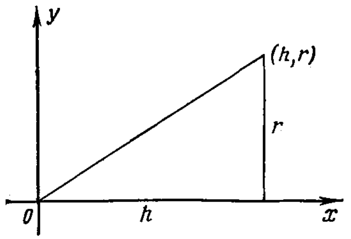


Рис. 126

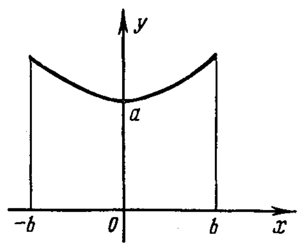


Рис. 127

ным методом быстро и просто получаются формулы для площадей и объемов, как известные ранее из курса элементарной математики, так и совершенно новые. В ближайших пунктах мы рассмотрим еще ряд задач, также легко решаемых методами интегрального исчисления.

32.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ КРИВОЙ

Мы рассмотрели ряд задач, приводящих к понятию определенного интеграла. Все они имеют то общее, что в них нахождение значения какой-то величины приводилось к определению предела некоторой интегральной суммы при стремлении мелкости разбиения к нулю, т. е. к определенному интегралу.

Существует, однако, и другой круг задач, приводящих к понятию определенного интеграла. В них известна скорость изменения одной величины относительно другой и требуется найти первую величину или, говоря точнее, дана производная функции, а требуется найти саму функцию, т. е. по заданной функции найти одну из ее первообразных. Эта задача также решается с помощью определенного интеграла, так как такой первообразной является, например, определенный интеграл с переменным верхним пределом. В качестве примера подобной задачи рассмотрим вычисление длины дуги кривой.

Пусть кривая Г задана параметрическим векторным представлением

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t), \qquad a\leqslant t\leqslant b,$$

где функция $\boldsymbol{r}(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда, как мы знаем, кривая Г спрямляема и переменная длина дуги $s(t)$, отсчитываемая от начальной точки (ее радиус-вектором служит $\boldsymbol{r}(a)$) кривой Г, является также непрерывно дифференцируемой функцией параметра t на отрезке $[a, b]$, причем (см. п. 16.3)

$$\frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|.$$

Поэтому в силу формулы Ньютона — Лейбница, замечая, что $s(a)=0$) для длины $S=s(b)$ кривой Г, получим

$$S=s(b)-s(a)=\int\limits_a^b \frac{ds}{dt}\,dt, \quad \text{откуда} \quad S=\int\limits_a^b \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt.$$

Если $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$, то

$$S=\int\limits_a^b \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt. \tag{32.14}$$

В случае, когда кривая Г является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, формула (32.14) принимает вид

$$S=\int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \tag{32.15}$$

Примеры. 1. Найдем длину S дуги параболы $y=ax^2$, $0\leqslant x\leqslant b$. Замечая, что $y'=2ax$, согласно формуле (32.15), имеем

$$S=\int\limits_0^b \sqrt{1+4a^2x^2}\,dx. \tag{32.16}$$

Неопределенный интеграл $I=\int\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx$ вычислим следующим образом: проинтегрируем его сначала по частям; затем к числителю дроби, получившейся под знаком интеграла, прибавим и вычтем единицу, произведем деление и проинтегрируем (подстановкой $y=2ax$) получившуюся дробь:

$$I=\int\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx=x\sqrt{1+4a^2x^2}-\int\frac{4a^2x^2}{\sqrt{1+4a^2x^2}}\,dx=$$

$$=x\sqrt{1+4a^2x^2}-\int\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx+\int\frac{dx}{\sqrt{1+4a^2x^2}}=$$

$$=x\sqrt{1+4a^2x^2}-I+\frac{1}{2a}\ln\left|2ax+\sqrt{1+4a^2x^2}\right|.$$

Это равенство, рассматриваемое как уравнение относительно интеграла I, дает возможность найти его значение:

$$I=\frac{1}{2}x\sqrt{1+4a^2x^2}+\frac{1}{4a}\ln\left|2ax+\sqrt{1+4a^2x^2}\right|+C.$$

Теперь легко получить величину интеграла (32.16):

$$S=\frac{1}{2}b\sqrt{1+4a^2b^2}+\frac{1}{4a}\ln\left|2ab+\sqrt{1+4a^2b^2}\right|.$$

2. Найдем длину астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ (см. рис. 75). Астроида симметрична относительно начала координат. Ее части, лежащей в первой четверти, соответствует изменение параметра t от 0 до $\pi/2$. Вычислим длину S этой части (равной, очевидно, одной четвертой длины всей астроиды). Заметив, что

$$x'=-3a\cos^2 t\sin t,\qquad y'=3a\sin^2 t\cos t,$$

по формуле (32.14) (в которой следует положить $z'=0$) получим:

$$S=\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=\frac{3a}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt=\frac{3a}{2}$$

3. Найти длину S дуги эллипса $x=a\sin t$, $y=b\cos t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $0<b\leqslant a$ от верхнего конца малой полуоси до его точки, соответствующей значению параметра $t\in[0,\ 2\pi]$. Положим $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ (ε — эксцентриситет эллипса), тогда

$$\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}=a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t},$$

поэтому

$$S=a\int_0^t\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt,\qquad 0\leqslant\varepsilon<1. \tag{32.17}$$

Мы получили эллиптический интеграл второго ряда, который, как известно (см. п. 26.6), не выражается через элементарные функции, т. е. формула (32.17) в данном случае является окончательным ответом. Приближенные значения длин дуг эллипса можно получить, либо непосредственно, вычислив приближенно интеграл (32.17), либо воспользовавшись имеющимися таблицами значений эллиптических интегралов.

Упражнения. 1. Доказать, что если плоская кривая задана в полярных координатах непрерывно дифференцируемым представлением $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то для ее длины S справедлива формула

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi. \tag{32.18}$$

2. Найти длину дуги *логарифмической спирали* $r = ae^{b\varphi}$ от точки (φ_0, r_0) до точки (φ, r).

Интегральная формула для длины кривой позволяет выразить ее длину не только как верхнюю грань длин всевозможных вписанных в нее ломаных, но и как их предел при условии, что мелкости соответствующих разбиений стремятся к нулю. Чтобы это доказать, нам потребуется одна лемма.

Лемма. *Пусть* $\gamma = \{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s),\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ — *непрерывно дифференцируемая кривая в* R^3, s — *ее переменная длина дуги и* $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s + \Delta s) - \boldsymbol{r}(s)$. *Тогда отношение* $\frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{|\Delta s|}$ *стремится к единице при* $\Delta s \to 0$ *равномерно на отрезке* $[0, S]$. *Это означает, что для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что для любой точки* $s \in [0, S]$ *и для любого приращения* $\Delta s\ (s + \Delta s \in [0, S])$, *удовлетворяющего неравенству* $|\Delta s| < \delta$, *выполняется неравенство*

$$\left| \left| \frac{\Delta r}{\Delta s} \right| - 1 \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Допустим противное, т. е. что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется такая точка $s_\delta \in [0, S]$ и такое приращение Δs_δ, $|\Delta s_\delta| < \delta$, что для $\Delta \boldsymbol{r}_\delta = \boldsymbol{r}(s_\delta + \Delta s_\delta) - \boldsymbol{r}(s_\delta)$ выполняется неравенство

$$\left| \left| \frac{\Delta \boldsymbol{r}_\delta}{\Delta s_\delta} \right| - 1 \right| \geqslant \varepsilon_0.$$

Будем брать последовательно $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, причем соответствующие точки s_δ и приращения Δs_δ будем обозначать через s_n и Δs_n. Тогда для всех натуральных n будут выполняться неравенства

$$\left| \left| \frac{\Delta \boldsymbol{r}_n}{\Delta s_n} \right| - 1 \right| \geqslant \varepsilon_0, \quad |\Delta s_n| < \frac{1}{n},$$

где $\Delta \boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{r}(s_n + \Delta s_n) - \boldsymbol{r}(s_n)$.

Выделим из последовательности $\{s_n\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{s_{n_k}\}$, тогда $s_0 \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{k \to \infty} s_{n_k} \in [0, S]$. В силу непрерывности производной $\boldsymbol{r}'(s)$ в точке s_0 существует такое $\delta_0 > 0$, что при $|s - s_0| < \delta_0$ справедливо неравенство

$$|\boldsymbol{r}'(s) - \boldsymbol{r}'(s_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

или, что то же самое,

$$\boldsymbol{r}'(s)=\boldsymbol{r}'(s_0)+\boldsymbol{\alpha}(s),\quad |\boldsymbol{\alpha}(s)|<\frac{\varepsilon_0}{2}\quad \text{при}\quad |s-s_0|<\delta,\quad s\in[0,\ S].$$

Выберем теперь натуральное k_0 так, чтобы имели место неравенства

$$|s_{n_{k_0}}-s_0|<\frac{\delta_0}{2},\quad \frac{1}{n_{k_0}}<\frac{\delta_0}{2};$$

тогда, замечая, что согласно выбору приращений Δs_n выполняется неравенство $|\Delta s_{n_{k_0}}|<\frac{1}{n_{k_0}}$, имеем $|\Delta s_{n_{k_0}}|<\frac{\delta_0}{2}$. Следовательно, для всех s, лежащих на отрезке с концами в точках $s_{n_{k_0}}$ и $s_{n_{k_0}}+\Delta s_{n_{k_0}}$, будем иметь

$$|s-s_0|\leqslant|s-s_{n_{k_0}}|+|s_{n_{k_0}}-s_0|<|\Delta s_{n_{k_0}}|+\frac{\delta_0}{2}<\delta_0.$$

Поэтому, заметив, что $|\boldsymbol{r}'(s_0)|=1$ и что

$$\Delta\boldsymbol{r}_{n_{k_0}}=\boldsymbol{r}(s_{n_{k_0}}+\Delta s_{n_{k_0}})-\boldsymbol{r}(s_{n_{k_0}})=\int\limits_{s_{n_{k_0}}}^{s_{n_{k_0}}+\Delta s_{n_{k_0}}}\boldsymbol{r}'(s)\,ds=$$

$$=\int\limits_{s_{n_{k_0}}}^{s_{n_{k_0}}+\Delta s_{n_{k_0}}}[\boldsymbol{r}'(s_0)+\boldsymbol{\alpha}(s)]\,ds=\boldsymbol{r}'(s_0)\,\Delta s_{n_{k_0}}+\int\limits_{s_{n_{k_0}}}^{s_{n_{k_0}}+\Delta s_{n_{k_0}}}\boldsymbol{\alpha}(s)\,ds,$$

получим

$$\left|\left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}_{n_{k_0}}}{\Delta s_{n_{k_0}}}\right|-1\right|=\left|\left|\boldsymbol{r}'(s_0)+\frac{1}{\Delta s_{n_{k_0}}}\int\limits_{s_{n_{k_0}}}^{s_{n_{k_0}}+\Delta s_{n_{k_0}}}\boldsymbol{\alpha}(s)\,ds\right|-|\boldsymbol{r}'(s_0)|\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{|\Delta s_{n_{k_0}}|}\int\limits_{s_{n_{k_0}}}^{s_{n_{k_0}}+\Delta s_{n_{k_0}}}|\boldsymbol{\alpha}(s)|\,ds\right|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2}<\varepsilon_0.$$

Это противоречит сделанному предположению. $\square$

Теорема 3. *Пусть* $\gamma=\{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),\ 0\leqslant s\leqslant S\}$ — *непрерывно дифференцируемая кривая в* R^3, s — *ее переменная длина дуги,* $\tau=\{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ — *разбиение отрезка* $[0,\ S]$, $\lambda_\tau=\sum\limits_{i=1}^{k}|\boldsymbol{r}(s_i)-\boldsymbol{r}(s_{i-1})|$; *тогда*

$$S=\lim_{\delta_\tau\to 0}\lambda_\tau.$$

Здесь λ_τ является, очевидно, длиной вписанной в кривую γ ломаной с вершинами в точках $r(s_i)$, $i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k$.

Доказательство. Положим $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$, $\Delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}(s_i) - \boldsymbol{r}(s_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Заметив, что $s = \sum\limits_{i=1}^{k} \Delta s_i$ и $\lambda_\tau = \sum\limits_{i=1}^{k} |\Delta \boldsymbol{r}_i|$, получим

$$|S - \lambda_\tau| = \left| \sum_{i=1}^{k} \Delta s_i - \sum_{i=1}^{k} |\Delta \boldsymbol{r}_i| \right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \left| 1 - \left| \frac{\Delta \boldsymbol{r}_i}{\Delta s_i} \right| \right| \Delta s_i.$$

Согласно лемме для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что как только $|\Delta s_i| < \delta$, то имеет место неравенство

$$\left| \left| \frac{\Delta \boldsymbol{r}_i}{\Delta s_i} \right| - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{S}.$$

Поэтому для всякого разбиения τ мелкости $\delta_\tau < \delta$ выполняется неравенство

$$|S - \lambda_\tau| < \frac{\varepsilon}{S} \sum_{i=1}^{k} \Delta s_i = \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \lambda_\tau = S$. $\square$

32.4. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Понятие поверхности и ее площади будет специально изучаться в § 50. Здесь же мы ограничимся специальным случаем поверхностей, образованных вращением кривых вокруг некоторых осей. Как всегда будем предполагать, что в пространстве R^3 фиксирована прямоугольная декартова система координат.

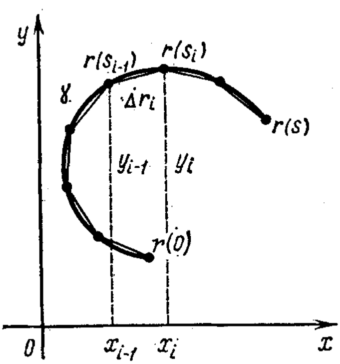


Рис. 128

Пусть $\gamma = \{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — кривая, лежащая в полуплоскости $y > 0$ плоскости переменных x, y, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=k}$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Впишем в кривую γ ломаную с вершинами в точках $r(t_i) = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ (рис. 128). При вращении звена $\Delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})$ этой ломаной вокруг оси Ox получится поверхность усеченного конуса (в частности, быть может, цилиндра) с площадью

$$l_i = \pi (y_{i-1} + y_i) |\Delta r_i|,$$

а при вращении всей ломаной — поверхность с площадью

$$L_\tau = \sum_{i=1}^{k} l_i = \pi \sum_{i=1}^{k} (y_{i-1} + y_i) \, | \Delta \boldsymbol{r}_i |.$$

Определение 1. *Если существует предел* $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} L_\tau$, *то он называется площадью* L *поверхности, образованной вращением кривой* γ *вокруг оси* Ox.

Таким образом,

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta_\tau \to 0} L_\tau. \tag{32.19}$$

Теорема 4. *Пусть* $\gamma = \{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — *непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек, лежащая в полуплоскости* $y > 0$ *плоскости переменных* x, y. *Тогда для площади* L *поверхности, полученной вращением кривой* γ *вокруг оси* x-*ов, справедлива формула*

$$L = 2\pi \int_a^b y \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} \, dt = 2\pi \int_0^S y(s) \, ds, \tag{32.20}$$

где s — *переменная длина дуги кривой* γ, $0 \leqslant s \leqslant S$.

Доказательство. Как известно, при сделанных в теореме предположениях (см. п. 16.5) функция $s = s(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, является допустимым преобразованием параметра, и, следовательно, длина дуги s может быть принята за параметр:

$$\gamma = \{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) = (x(s),\ y(s)),\quad 0 \leqslant s \leqslant S\}.$$

Пусть $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ — разбиение отрезка $[0, S]$,

$$\Delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}(s_i) - \boldsymbol{r}(s_{i-1}), \quad \Delta s_i = s_i - s_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots k.$$

Сравним сумму

$$L_\tau = \pi \sum_{i=1}^{k} (y_{i-1} + y_i) \, | \Delta r_i |, \quad y_i \stackrel{\text{def}}{=} y_i(s), \quad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{32.21}$$

с интегральной суммой (функции $2\pi y(s)$)

$$\sigma_\tau = 2\pi \sum_{i=1}^{k} y_i \, \Delta s_i. \tag{32.22}$$

Для этого заметим, что функция $y(s)$, будучи непрерывной на отрезке $[0, S]$ ограничена на нем, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $s \in [0, S]$ выполняется неравенство $|y(s)| \leqslant M$. Обозначая через $\omega(\delta;\ y)$ модуль непрерывности функции $y(s)$, а через λ_τ — длину ломаной с вершинами в точках

$r(s_i)$ и заметив, что $|\Delta r_i| \leqslant \Delta s_i$, $i=1, 2, \ldots, k$, получим

$$|\sigma_\tau - L_\tau| = \left| \pi \sum_{i=1}^{k} 2y_i \Delta s_i - \pi \sum_{i=1}^{k} [2y_i + (y_{i-1} - y_i)] |\Delta r_i| \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \sum_{i=1}^{k} |y_i| (\Delta s_i - |\Delta r_i|) + \pi \sum_{i=1}^{k} |y_i - y_{i-1}| |\Delta r_i| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi M \left(\sum_{i=1}^{k} \Delta s_i - \sum_{i=1}^{k} |\Delta r_i| \right) + \pi\omega(\delta_\tau; y) \sum_{i=1}^{k} |\Delta r_i| =$$

$$= 2\pi M (S - \lambda_\tau) + \pi\omega(\delta_\tau; y) \lambda_\tau.$$

Здесь $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (S - \lambda_\tau) = 0$ (см. теорему 3), $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \omega(\delta_\tau, y) = 0$ (см. теорему 5 в п. 19.6) и $0 \leqslant \lambda_\tau \leqslant S$. Поэтому $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (\sigma_\tau - L_\tau) = 0$, а поскольку $\lim \sigma_\tau = 2\pi \int\limits_0^S y(s)\,ds$, то и $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} L_\tau = 2\pi \int\limits_0^S y(s)\,ds$. Сделав в последнем интеграле замену переменного $s = s(t)$ и вспоминая, что $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$, получим:

$$L = 2\pi \int\limits_a^b y \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt.$$

Если кривая γ задана явным уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, то формула для площади поверхности, образованной вращением графика функции f вокруг оси Ox, имеет вид

$$L = 2\pi \int\limits_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{32.23}$$

Вспоминая, что (см. п. 16.4) $\sqrt{1 + y'^2}\,dx = ds$, формулу (32.23) можем переписать в виде

$$L = 2\pi \int\limits_0^S y\,ds.$$

Предложенный вывод формулы (32.20) имеет некоторый недостаток, так как в этом выводе по ходу дела уже использовалось понятие площади поверхности и ее аддитивность, правда, лишь в простейшем случае — для поверхностей усеченного конуса и их объединений. Можно ввести общее понятие площади поверхности, не используя понятие площади поверхности для каких-либо элементарных поверхностей, и получить ее необходимые свойства. Эти вопросы будут рассмотрены в дальнейшем в п. 50.5.

Примеры. 1. Найдем площадь S сферы радиуса r. Указанная сфера может быть получена вращением полуокружности $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $-r\leqslant x\leqslant r$, вокруг оси Ox. Однако это явное представление полуокружности не является непрерывно дифференцируемым: производная $y'=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ обращается в бесконечность при $x=\pm r$. Гораздо удобнее взять параметрическое представление полуокружности

$$x=r\cos t,\quad y=r\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant\pi.$$

Тогда $x'=-r\sin t$, $y'=r\cos t$; поэтому площадь S поверхности сферы радиуса r легко вычисляется по формуле (32.20):

$$S=\int_0^\pi y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=2\pi r^2\int_0^\pi \sin t\,dt=4\pi r^2.$$

2. Найдем площадь S поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги цепной линии (см. рис. 107) $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $-b\leqslant x\leqslant b$ (эта поверхность называется *катеноидом*). По формуле (32.23) имеем:

$$S=2\pi a\int_{-b}^{b}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx=$$

$$=2\pi a\int_{-b}^{b}\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\,dx=\pi a\int_{-b}^{b}\left(1+\operatorname{ch}\frac{2x}{a}\right)dx=\pi a\left(2b+a\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right).$$

32.5. РАБОТА СИЛЫ

Пусть материальная точка M движется по непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma=\{r=r(s)\}$, где s — переменная длина дуги, $0\leqslant s\leqslant S$. Пусть на рассматриваемую материальную точку, находящуюся в положении $r(s)$, действует сила $F(s)$, направленная по касательной к траектории в направлении движения.

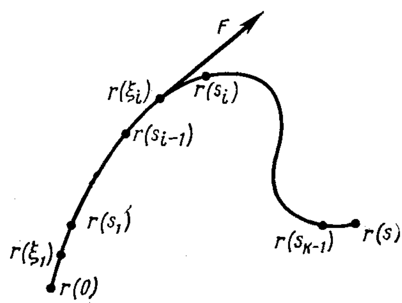


Рис. 129

Возьмем какое-либо разбиение $\tau=\{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[0, S]$. Ему соответствует разбиение траектории Γ на части

$$\Gamma_i=\{r(s),\quad s_{i-1}\leqslant s\leqslant s_i\},\quad i=1,\ldots,k.$$

Выберем произвольно по точке $\xi_i\leqslant[s_{i-1}, s_i]$, $i=1, 2, \ldots, k$ (рис. 129). Величина $F(\xi_i)\Delta s_i$, $\Delta s_i=s_i-s_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, k$ называется *эле-*

ментарной работой силы F на участке Γ_i и принимается за приближенное значение работы, которую производит сила F, воздействующая на материальную точку, когда последняя проходит кривую Γ_i. Сумма всех элементарных работ $\sum_{i=1}^{k} F(\xi_i)\Delta s_i$ является интегральной суммой Римана функции $F(s)$.

Определение 2. *Предел, к которому стремится сумма* $\sum_{i=1}^{k} F(\xi_i)\Delta s_i$ *всех элементарных работ, когда мелкость* δ_τ *разбиения* τ *стремится к нулю, называется работой силы* F *вдоль кривой* Γ.

Таким образом, если обозначить эту работу буквой W, то в силу данного определения

$$W = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} F(\xi_i)\Delta s_i$$

и, следовательно,

$$W = \int_0^S F(s)\,ds. \tag{32.24}$$

Если положение точки на траектории ее движения описывается с помощью какого-либо другого параметра t (например, времени) и если величина пройденного пути $s = s(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, является непрерывно дифференцируемой функцией, то из формулы (32.24) получим:

$$W = \int_a^b F[s(t)]\,s'(t)\,dt.$$

32.6. ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ И ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ КРИВОЙ

Пусть M — материальная точка массы m с координатами x и y. Произведения my и mx называются ее *моментами* соответственно *относительно осей* Ox и Oy.

Пусть $\Gamma = \{r(s),\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ — спрямляемая кривая, где s — переменная длина дуги. Будем считать, что кривая Γ имеет массу и что масса ее дуги прямо пропорциональна длине дуги; если Δm — масса дуги длиной Δs, то $\Delta m = \rho\Delta s$, где ρ — некоторая постоянная, называемая *линейной плотностью кривой* Γ. Такие кривые в механике называются *однородными*. Поскольку $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta s}$, то плотность равна массе длины дуги кривой, приходящейся на единицу длины дуги. Будем считать для простоты, что $\rho = 1$, т. е. что масса части кривой длины Δs также равна Δs, в частности, что масса всей кривой численно равна S.

Пусть теперь $\tau=\{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ — какое-либо разбиение отрезка $[0, S]$, $\Delta s=s_i-s_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, k$. Разбиению τ соответствует разбиение кривой Γ на части $\Gamma_i=\{r(s), s_{i-1}\leqslant s\leqslant s_i\}$. Выберем по какой-либо точке $\xi_i\in[s_{i-1}, s_i]$ и положим $x_i=x(\xi_i)$, $y_i=y(\xi_i)$, $i=1, 2, \ldots, k$.

Величины $y_i\Delta s_i$ при любом выборе указанных точек ξ_i называются *элементарными статическими моментами* части Γ_i кривой Γ относительно оси Ox. Очевидно, элементарный статический момент Γ_i численно равен моменту материальной точки массы Δs с ординатой y_i, т. е. мы как бы заменили данную непрерывную кривую Γ k материальными точками.

Определение 3. *Предел, к которому стремится сумма*

$$\sum_{i=1}^{k} y_i\,\Delta s_i \tag{32.25}$$

всех элементарных моментов, когда мелкость разбиения τ стремится к нулю, называется моментом M_x кривой Γ относительно оси Ox.

Этот предел всегда существует, ибо, по определению кривой, функция $r=r(s)$, а значит, и координатные функции $x=x(s)$, $y=y(s)$ непрерывны на отрезке $[0, S]$; сумма же (32.25) является интегральной суммой Римана функции $y(s)$ и потому при $\delta\to 0$ стремится к интегралу $\int\limits_0^S y(s)\,ds$. Таким образом,

$$M_x=\int\limits_0^S y\,ds. \tag{32.26}$$

Аналогично определяется и вычисляется момент M_y кривой Γ относительно оси Ox:

$$M_y=\int\limits_0^S x\,ds. \tag{32.27}$$

Определение 4. *Точка плоскости $P=(x_0, y_0)$, обладающая тем свойством, что если в нее поместить материальную точку массы, равной массе кривой (в рассматриваемом нами случае массы S), то эта точка относительно любой координатной оси имеет статический момент, численно равный статическому моменту кривой относительно той же оси, называется центром тяжести данной кривой.*

Таким образом,

$$Sx_0=M_y, \quad Sy_0=M_x.$$

откуда в силу формул (32.26) и (32.27) для координат центра тяжести получаем формулы

$$x_0=\frac{1}{S}\int\limits_0^S x\,ds, \quad y_0=\frac{1}{S}\int\limits_0^S y\,ds. \tag{32.28}$$

Сравнивая формулы для ординаты центра тяжести кривой $y_0S=\int\limits_0^S y\,ds$ и для площади L поверхности, полученной от вращения этой кривой вокруг некоторой оси $L=2\pi\int\limits_0^S y\,ds$, получим интересное соотношение $L=2\pi y_0 S$ (здесь под кривой понимается непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек), составляющее содержание так называемой первой теоремы Гульдина*).

Теорема 5 (Гульдин). *Площадь поверхности, полученной от вращения кривой около некоторой не пересекающей ее оси, равна длине этой кривой, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести этой кривой.*

В случае, когда известно положение центра тяжести кривой, теорема Гульдина позволяет просто находить площадь соответствующей поверхности вращения. Например, площадь поверхности, полученной от вращения окружности $(x-a)^2+y^2=r^2$, $0<r<a$, вокруг оси Oy (такая поверхность называется *тором*) легко вычисляется указанным способом: $L=2\pi a\cdot 2\pi r=4\pi^2 ar$, так как центр тяжести окружности совпадает с ее центром.

В качестве примера вычисления центра тяжести кривой по формуле (32.28) найдем центр тяжести цепной линии $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $-b\leqslant x\leqslant b$. В силу симметрии цепной линии относительно оси Oy имеем $M_y=0$. Действительно, выбирая за начало отсчета дуг точку цепной линии, лежащую на оси Oy, и обозначив длину всей цепной линии через $2S$, получим

$$M_y=\int\limits_{-S}^{S} x(s)\,ds=0,$$

ибо $x(s)$ — нечетная функция. Из равенства $M_y=0$ в силу формулы (32.28) следует, что $x_0=0$. Далее,

$$M_x=\int\limits_{-S}^{S} y\,ds.$$

Как отмечалось выше, $2\pi M_x=L_x$, где L_x — площадь поверхности, образованной вращением цепной линии вокруг оси Ox, и, следовательно (см. п. 32.4),

$$L_x=\pi a\left(2b+a\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right), \text{ поэтому } M_x=\frac{a}{2}\left(2b+a\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right).$$

*) П. Гульдин (1577—1643) — швейцарский математик.

С другой стороны, заметив, что длина $2S$ цепной линии легко вычисляется по формуле (32.15):

$$S=\int_{-b}^{b}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{-b}^{b}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx=$$

$$=\int_{-b}^{b}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx=a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_{-b}^{b}=2a\operatorname{sh}\frac{b}{a};$$

в силу формулы (32.28) получим

$$y_0=\left(2b+a\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right)\Big/4\operatorname{sh}\frac{b}{a}.$$

Упражнения. 3. Найти площадь конечной области, ограниченной параболой $y^2=2x+1$ и прямой $y=x-1$.

4. Найти площадь области, ограниченной циклоидой

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

и прямой $y=0$.

5. Найти площадь области, ограниченной кривой $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ (эта кривая называется лемнискатой).

6. Найти объем тела вращения, образованного вращением одной арки синусоиды $y=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$ вокруг оси Ox.

7. Найти длину кривой $y=\ln\cos x$, $0\leqslant x\leqslant a<\frac{\pi}{2}$.

8. Найти длину дуги *спирали Архимеда* $\rho=a\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ вокруг оси Ox.

10. Найти координаты центра тяжести дуги круга

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad |\varphi|\leqslant\alpha\leqslant\pi.$$

11. Доказать существование центра тяжести для непрерывно дифференцируемой кривой, иначе говоря, доказать, что точка плоскости, определяемая формулами (32.28), не зависит от выбора декартовых координат на плоскости.

§ 33. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

33.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Функция, неограниченная на отрезке, не интегрируема на нем по Риману (теорема 1, п. 27.2). Если функция определена на бесконечном промежутке, то нельзя говорить о ее интегрируемости по Риману просто потому, что определение интеграла относится только к функциям, заданным на отрезке. В настоящем параграфе понятие интеграла обобщается как на случай функций, определенных на неограниченных промежутках, так и на случай функций, определенных на ограниченных промежутках, но неограниченных на них. Это делается с помощью предельного перехода, дополнительного к пределу, с помощью которого вводится интеграл Римана.

Определение 1. *Пусть функция f определена на конечном или бесконечном полуинтервале $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$. Если существует $\lim\limits_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx$, то функция f называется интегрируемой в несобственном смысле на промежутке $[a, b)$, а указанный предел называется ее несобственным интегралом и обозначается через $\int\limits_a^b f(x)\,ax$.*

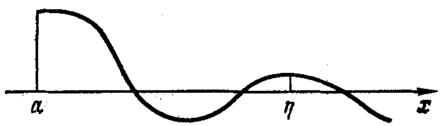


Рис. 130

Таким образом (рис. 130)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx. \quad (33.1)$$

Если предел (33.1) существует (и, следовательно, конечен), то говорят также, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ с х о д и т с я, в противном случае — что он р а с х о д и т с я. В отличие от несобственного интеграла обычный интеграл Римана называют иногда с о б с т в е н н ы м и н т е г р а л о м.

Существование несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ эквивалентно существованию несобственного интеграла $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ при любом $c \in (a, b)$. В самом деле, интеграл $\int\limits_c^\eta f(x)\,dx$ отличается от интеграла $\int\limits_c^\eta f(x)\,dx$ (при $c < \eta < b$) на конечную, не зависящую от η, величину $\int\limits_a^c f(x)\,dx$:

$$\int\limits_a^\eta f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^\eta f(x)\,dx.$$

Поэтому при $\eta \to b$ оба интеграла $\int\limits_a^\eta$ и $\int\limits_c^\eta$ одновременно имеют или не имеют предел, причем в случае его существования

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \quad (33.2)$$

Из определения (33.1) несобственного интеграла и из (33.2) следует, что если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, то

$$\lim_{c\to b}\int\limits_c^b f(x)\,dx=0. \tag{33.3}$$

Отметим, что выполнение этого условия нельзя принять в качестве определения сходящегося интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, так как интеграл $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ также является несобственным и говорить о его стремлении к нулю при $c\to b$ можно лишь уже обладая определением сходящегося несобственного интеграла.

Если функция f неотрицательна и непрерывна на промежутке $[a, b)$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равен площади неограниченного открытого множества

$G=\{(x, y): a<x<b;\ \ 0<y<f(x)\}$,

т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\operatorname{mes} G. \tag{33.4}$$

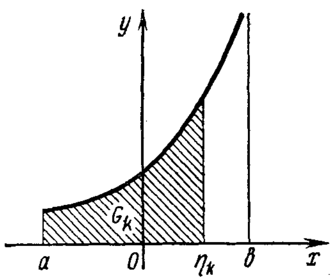


Рис. 131

Действительно (на рис. 131 изображен случай конечного b), выберем какую-либо последовательность $\eta_k\in[a, b)$, $k=1, 2, \ldots$ так, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty}\eta_k=b$ и положим

$$G_k=\{(x, y): a<x<\eta_k,\ \ 0<y<f(x)\}.$$

Тогда согласно теореме 1 из п. 32.1

$$\operatorname{mes} G_k=\int\limits_a^{\eta_k} f(x)\,dx. \tag{33.5}$$

Поскольку G_k — открытые множества, $k=1, 2, \ldots$, и

$$G_1\subset G_2\subset\ldots\subset G_k\subset\ldots \quad \text{и} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k=G,$$

то, в силу теоремы 2 п. 31.2

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{mes} G_k=\operatorname{mes} G.$$

Согласно же определению несобственного интеграла

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^{\eta_k} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Поэтому, перейдя к пределу в равенстве (33.5) при $k\to\infty$, получим (33.4).

Отметим, что определение (33.1) несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ в случае конечного промежутка $[a, b)$ содержательно лишь в случае, когда функция f неограничена в любой окрестности точки $x=b$, т. е. на любом интервале $(b-\varepsilon, b)$ $(0<\varepsilon<b-a)$. Это связано с тем, что (как нетрудно показать) всякая функция, интегрируемая по Риману на любом отрезке $[a, \eta]$, $a\leqslant\eta<b<+\infty$, и ограниченная на полуинтервале $[a, b)$ будет интегрируемой по Риману и на отрезке $[a, b]$ при любом ее доопределении в точке $x=b$. При этом интеграл Римана от таким образом доопределенной функции равен пределу (33.1) и, тем самым, не зависит от выбора дополнительного значения функции при $x=b$. В этом смысле интеграл Римана является частным случаем несобственного интеграла. Поэтому все дальнейшее изложение содержательно лишь когда функция определена на бесконечном промежутке или конечном, причем в последнем случае неограничена (рис. 132). Содержательность здесь понимается в том смысле, что для ограниченных подынтегральных функций, определенных на ограниченных промежутках, доказываемые ниже теоремы либо тривиальны, либо доказаны раньше.

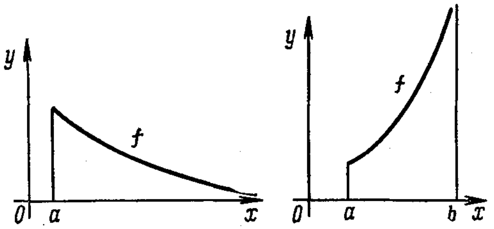


Рис. 132

Упражнения. 1. Пусть функция f ограничена на полуинтервале $[a, b)$, $-\infty<a<b<+\infty$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, \eta]$, $a\leqslant\eta<b$. Доказать, что в этом случае предел $\lim\limits_{\eta\to b}\int_a^{\eta} f(x)\,dx$ всегда существует, причем если функцию f произвольным образом доопределить при $x=b$, то этот предел будет равен интегралу Римана по отрезку $[a, b]$ от доопределенной функции.

2. Привести пример неотрицательной при $x\geqslant 1$ и неограниченной в любой окрестности $+\infty$ функции f, для которой сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Если функция f определена на полуинтервале вида $(a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, и интегрируема по Риману на всех отрезках $[\xi, b]$, $a < \xi \leqslant b$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ определяется по формуле

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\xi \to a} \int\limits_\xi^b f(x)\,dx. \tag{33.6}$$

Если же функция f определена на интервале (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, и при некотором выборе точки $c \in (a, b)$ существуют несобственные интегралы $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ (в смысле (33.6)) и $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ (в смысле (33.1)), то по определению полагается

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \tag{33.7}$$

При этом существование и значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ не зависит от выбора точки $c \in (a, b)$. В самом деле, в рассматриваемом случае функция f очевидно интегрируема по Риману на любом отрезке $[\xi, \eta]$, $a < \xi < \eta < b$, и определение (33.7) в силу определений (33.1) и (33.6) равносильно следующему:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\xi \to a \\ \eta \to b}} \int\limits_\xi^\eta f(x)\,dx, \quad a < \xi < \eta < b.$$

Здесь правая часть является пределом функции двух переменных ξ и η. Образно говоря, переменные ξ и η стремятся соответственно к a и b независимо друг от друга.

Пусть теперь существует конечное число точек x_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, $-\infty \leqslant a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b \leqslant +\infty$ (под x_0 можно подразумевать также $-\infty$, а под x_k — $+\infty$) таких, что все несобственные интегралы

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx, \qquad i = 1, 2, \ldots, k,$$

существуют. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ определяется по формуле

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx. \tag{33.8}$$

Из этого определения и определения (33.7) следует, что несобственный интеграл в общем случае сводится к интегралам вида (33.1) и (33.6). Поэтому в дальнейшем ограничимся лишь изучением несобственных интегралов двух указанных видов.

Упражнение 3. Доказать, что существование и значение несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ в определении (33.8) не зависит от выбора точек x_i, $i=0, 1, 2, \ldots, k$, удовлетворяющих сформулированным выше условиям.

Примеры. 1. Покажем, что несобственный интеграл от функции $f(x)=\frac{1}{x}$ по полуинтервалу $(0, 1]$ расходится. Действительно,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \to +0} \int\limits_\xi^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \to +0} \ln x \Big|_\xi^1 = -\lim_{\xi \to +0} \ln \xi = +\infty.$$

Обычно проведенные вычисления записываются короче:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_0^1 = +\infty.$$

2. Выясним при каких $\alpha \neq 1$ сходится, а при каких — расходится интеграл от функции $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ по промежутку $(0, 1]$. Имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_0^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{при} \quad \alpha < 1, \\ +\infty & \text{при} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

Отметим, что при $\alpha \leqslant 0$ рассматриваемый интеграл является собственным. Объединив результаты, полученные в примерах 1 и 2, получим

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{сходится} & \text{при} \quad \alpha < 1, \\ \text{расходится} & \text{при} \quad \alpha \geqslant 1. \end{cases} \tag{33.9}$$

3. Рассмотрим теперь функцию $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ на бесконечном промежутке $[1, +\infty)$. Если $\alpha=1$, то

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = +\infty.$$

Если же $\alpha \neq 1$, то

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^{+\infty} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при} \quad \alpha > 1, \\ +\infty & \text{при} \quad \alpha < 1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{сходится} & \text{при} \quad \alpha > 1, \\ \text{расходится} & \text{при} \quad \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

Мы ввели новое понятие — понятие несобственного интеграла. Прежде всего естественно выяснить, какими свойствами обладает этот интеграл. Сохраняются ли для него свойства обычного интеграла? Возникают ли для несобственного интеграла (а если возникают, то такие) новые задачи и вопросы, специфические именно для него? Мы получим ответы на эти вопросы в дальнейших пунктах этого параграфа.

33.2. ФОРМУЛЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В этом и в дальнейших пунктах при рассмотрении свойств несобственных интегралов будем останавливаться более подробно лишь на интегралах от функций, определенных на конечных или бесконечных промежутках вида $[a, b)$ и интегрируемых по Риману на всех отрезках $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$. Любые другие предположения будут специально оговариваться.

В силу свойств предела и определения несобственного интеграла, как предела обычного интеграла Римана, на несобственные интегралы переносятся многие свойства определенного интеграла. Рассмотрим некоторые из них.

1° **(Формула Ньютона—Лейбница для несобственных интегралов).** *Если функция f непрерывна на полуинтервале $[a, b)$ и F — какая-либо ее первообразная на нем, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} F(b-0) - F(a), & \text{если } b \text{ конечно} \\ F(+\infty) - F(a), & \text{если } b = +\infty \end{cases} \tag{33.11}$$

Здесь $F(b-0) = \lim\limits_{x \to b-0} F(x)$ в случае, когда b конечно, и $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$, а под первообразной F функции f на промежутке $[a, b)$ понимается функция F, непрерывная на нем, дифференцируемая во всех его внутренних точках и такая, что $F'(x) = f(x)$, $a < x < b$.

Равенство (33.11) понимается в том смысле, что либо обе его части одновременно имеют смысл, и тогда они равны, либо они одновременно не имеют смысла, т. е. стоящие в них пределы не существуют. Действительно, согласно формуле Ньютона — Лейбница для функций, интегрируемых по Риману (см. п. 29.3), для любого $\eta \in [a, b)$ имеем

$$\int\limits_a^\eta f(x)\,dx = F(\eta) - F(a).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\eta \to b$, $a \leqslant \eta < b$, получаем формулу (33.11).

Подчеркнем, что эта формула доказана в предположении, что функция f интегрируема в обычном смысле на каждом отрезке вида $[a, \eta)$, $a \leqslant \eta < b$. Для интегралов вида (33.8) в случае, когда в правой части имеется более чем одно слагаемое, аналогичная формула верна не всегда. Образно говоря, если в некоторой внутренней точке данного промежутка функция обращается в бесконечность, то на всем этом промежутке нельзя, вообще говоря, применять формулу Ньютона — Лейбница. Например, если к интегралу $\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$ формально применить формулу Ньютона — Лейбница, то он будет равен числу $-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2$. Однако, как мы уже знаем, рассматриваемый интеграл не существует. Таким образом, в этом примере применение формулы Ньютона — Лейбница сразу на всем промежутке интегрирования невозможно по существу.

Формула, аналогичная (33.11), справедлива, конечно, для несобственных интегралов вида (33.6). Если же несобственный интеграл определяется равенством (33.8), то формулу Ньютона — Лейбница следует применять (если это возможно) отдельно к каждому слагаемому правой части.

2°. **(Линейность несобственного интеграла).** *Если несобственные интегралы* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *сходятся, то для любых чисел* λ, μ *сходится и несобственный интеграл* $\int\limits_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx$, *причем*

$$\int\limits_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)\,dx + \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

В самом деле

$$\int\limits_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lim_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx =$$

$$= \lim_{\eta \to b} \left[\lambda \int\limits_a^\eta f(x)\,dx + \mu \int\limits_a^\eta g(x)\,dx\right] =$$

$$= \lambda \lim_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx + \mu \lim_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta g(x)\,dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)\,dx + \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

$$a \leqslant \eta < b.$$

Подобным же образом доказываются и нижеследующие свойства несобственных интегралов, аналогичные соответствующим свойствам интеграла Римана.

3° **(Интегрирование неравенств).** *Если интегралы* $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ *сходятся, и для всех* $x \in [a, b)$ *выполняется неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

4° **(Правило интегрирования по частям).** *Если функции* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на промежутке* $[a, b)$, *то*

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v\,du, \tag{33.12}$$

причем, если любые два из выражений $\int_a^b u\,dv$, $uv\Big|_a^b$ и $\int_a^b v\,du$ *имеют смысл* (т. е. соответствующие пределы конечны), *то имеет смысл и третье.*

5° **(Замена переменного в несобственном интеграле).** *Пусть функция* f *непрерывна на* $[a, b)$, *функция* $\varphi(t)$ *непрерывно дифференцируема на полуинтервале* $[\alpha, \beta)$, $-\infty < \alpha < \beta \leqslant +\infty$, *причем* $a = \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(t) < b = \lim\limits_{t \to \beta} \varphi(t)$ при $\alpha \leqslant t < \beta$; *тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)]\,dt. \tag{33.13}$$

При этом интегралы в обеих частях этой формулы одновременно сходятся или нет.

Может случиться, что с помощью замены переменного несобственный интеграл превратится в обычный. Например, выполняя в несобственном интеграле $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ замену переменной $x = \sin t$, $0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}$, получаем собственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Отметим, что всякий несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ по конечному промежутку $[a,\ b)$ может быть заменой переменной сведен к несобственному интегралу по неограниченному промежутку. Действительно, сделав, например, замену переменной

$$x=\frac{bt+a}{t+1},\quad dx=\frac{b-a}{(t+1)^2}\,dt,$$

получим

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int\limits_0^{+\infty} f\left(\frac{bt+a}{t+1}\right)\frac{dt}{(t+1)^3}.$$

По аналогии с интегралом Римана для сходящегося несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $a<b$, по определению полагается:

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx=-\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Следует обратить внимание на то, что не все свойства определенного интеграла Римана переносятся на несобственные интегралы. Так, например, произведение двух функций, интегрируемых по Риману на некотором отрезке, является функцией, также интегрируемой по Риману на нем. Аналог этого утверждения для несобственных интегралов не всегда справедлив. Существуют функции f и g, интегралы от которых на некотором промежутке сходятся, а интеграл от их произведения на том же промежутке расходится. В самом деле, пусть например, $f(x)=g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Как мы знаем (п. 33.1) интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, а интеграл

$$\int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx=\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}\ \text{расходится.}$$

Сделанное замечание еще раз напоминает о том, что, используя при обращении с несобственным интегралом аналоги свойств интеграла Римана, следует всегда не забывать о необходимости проверки справедливости для несобственного интеграла всякого утверждения, аналогичного соответствующему утверждению для собственного интеграла.

П р и м е р ы. Вычислим нижеследующие несобственные интегралы, используя сформулированные выше свойства:

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. Посредством замены переменной $x=\frac{1}{t}$, полу-

чим

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2};$$

2. $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n \, dx$. $n = 0, 1, 2, \ldots$ Интегрируя по частям (при $n > 0$), имеем

$$I_n = x(\ln x)^n \Big|_0^1 - n\int_0^1 (\ln x)^{n-1}\, dx = -nI_{n-1},$$

ибо $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln x)^n = 0$. Это равенство легко получить, если применить n раз правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} x(\ln x)^n = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)^n}{1/x} = -n\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)^{n-1}}{1/x} = \ldots =$$
$$= (-1)^{n+1} n! \lim_{x\to 0} x = 0)$$

Заметив, что $I_0 = \int_0^1 dx = 1$, получим $I_n = (-1)^n n!$*);

3. $J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Снова проинтегрировав по частям заданный интеграл при $n > 0$, получим

$$J_n = -x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\, dx = nI_{n-1}$$

и поскольку

$$J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

то $J_n = n!$

4. Остаются справедливыми для несобственных интегралов неравенства Минковского и Гельдера (см. п. 28.4*):

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |(x)|^p\, dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\, dx\right)^{1/p},$$

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\, dx\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{1/q},$$

$$1 < p < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

---

*) Напомним, что по определению $0! = 1$.

Для доказательства достаточно написать соответствующие неравенства для интегралов на отрезке $[a, \eta]$ и перейти к пределу при $\eta \to b$.

В следующем пункте мы займемся специфической задачей теории несобственных интегралов: установлением признаков их сходимости.

Упражнения. Вычислить несобственные интегралы:

4. $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}}, \quad a > 0.$

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + a^3}, \quad a > 0.$

6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx.$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+ax+a^2}, \quad a > 0.$

8. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad 0 \leqslant a < b.$

9. Найти $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x (t^p + a^p)^q\, dt}{x^{pq+1}}, \quad a, p, q > 0.$

Указание: воспользоваться правилом Лопиталя.

33.3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Изучение признаков сходимости несобственных интегралов начнем со случая, когда подынтегральная функция неотрицательна. При этом будем придерживаться соглашения, сформулированного в начале предыдущего пункта.

Лемма 1. *Если функция f неотрицательна на полуинтервале $[a, b)$, то для сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\, dx$ необходимо и достаточно, чтобы все интегралы*

$$\int_a^\eta f(x)\, dx, \quad a \leqslant \eta < b$$

были ограниченными в совокупности, т. е. чтобы существовала такая постоянная $M > 0$, что для всех $\eta \in [a, b)$ выполняется неравенство

$$\int_a^\eta f(x)\, dx \leqslant M. \tag{33.14}$$

При выполнении этого условия

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sup_{a \leqslant \eta < b} \int_a^\eta f(x)\, dx. \tag{33.15}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(\eta)=\int_a^\eta f(x)\,dx,\quad a\leqslant\eta<b. \tag{33.16}$$

В силу того, что $f\geqslant 0$ функция φ возрастает: действительно, если $a\leqslant\eta<\eta'<b$, то (см. свойство 8° интеграла в п. 28.1)

$$\int_\eta^{\eta'} f(x)\,dx\geqslant 0,$$

и поэтому

$$\varphi(\eta')=\int_a^{\eta'} f(x)\,dx=\int_a^{\eta} f(x)\,dx+\int_\eta^{\eta'} f(x)\,dx\geqslant\int_a^{\eta} f(x)\,dx=\varphi(\eta).$$

Теперь заметим, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует предел $\lim\limits_{\eta\to b}\int_a^\eta f(x)\,dx=\lim\limits_{\eta\to b}\varphi(\eta)$, а последний предел существует в том и только том случае (см. теорему 5 в п. 4.10), когда функция φ ограничена сверху, т. е. когда выполняется условие (33.14). При этом,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\eta\to b}\varphi(\eta)=\sup_{a\leqslant\eta<b}\int_a^\eta f(x)\,dx.\ \square$$

Из доказанной леммы следует, что для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ от неотрицательной функции расходился, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(\eta)$ (см. (33.16)) была неограниченной сверху; но тогда в силу ее возрастания

$$\lim_{\eta\to b}\int_a^\eta f(x)\,dx=\lim_{\eta\to b}\varphi(\eta)=+\infty.$$

Поэтому, если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ от неотрицательной функции расходится, то пишут $\int_a^b f(x)\,dx=+\infty$. При таком соглашении остается справедливым равенство (33.15).

Теорема 1 (признак сравнения). *Пусть функции f и g неотрицательны на полуинтервале* $[a,\ b)$ и

$$f(x)=O(g(x))\ \text{при}\ x\to b^{*)}. \tag{33.17}$$

*) В частности $f(x)\leqslant g(x)$, $x\in[a,\ b)$.

Тогда

1) *если интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$;

2) *если интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *расходится, то расходится и интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Следствие. *Пусть функции* f, g *неотрицательны на полуинтервале* $[a, b)$, $g(x) \neq 0$, $x \in [a, b)$ *и существует*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad a \leqslant x < b. \tag{33.18}$$

Тогда

1) *если интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *сходится и* $0 \leqslant k < +\infty$, *то интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *также сходится,*

2) *если интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *расходится и* $0 < k \leqslant +\infty$, *то интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *также расходится.*

В частности, если f *и* g — *эквивалентные при* $x \to b$ *функции:* $f \sim g$, $x \to b$ (см. п. 8.2), *то интегралы* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство теоремы. Пусть интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится. Из условия (33.17) следует существование такого η_0, $a \leqslant \eta_0 < b$, и такого $c > 0$, что для всех $x \in [\eta_0, b)$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant cg(x) \tag{33.19}$$

(см. п. 8.2). Из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ следует и сходимость интеграла $\int\limits_{\eta_0}^b g(x)\,dx$. В силу же необходимости условий леммы для сходимости интеграла, существует такое число $M>0$, что для любого $\eta\in[\eta_0, b)$ справедливо неравенство

$$\int_{\eta_0}^{\eta} g(x)\,dx\leqslant M.$$

Отсюда и из неравенства (33.19) имеем

$$\int_{\eta_0}^{\eta} f(x)\,dx\leqslant c\int_{\eta_0}^{\eta} g(x)\,dx\leqslant cM.$$

Из этого неравенства, в силу достаточности условий леммы для сходимости интеграла от неотрицательной функции получаем, что интеграл $\int\limits_{\eta_0}^{b} f(x)\,dx$, а, следовательно, и интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ сходятся.

Первое утверждение теоремы доказано. Второе — логически равносильно первому. В частности, если интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ расходится, то $\int\limits_{a}^{b} g(x)\,dx$ не может сходиться, так как если он был бы сходящимся, то в силу уже доказанного первого утверждения теоремы, сходился бы и интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$. Таким образом, интеграл $\int\limits_{a}^{b} g(x)\,dx$ расходится. $\square$

Доказательство следствия. Из выполнения условия (33.18) для k, удовлетворяющего условию $0\leqslant k<+\infty$, следует, что существует такое $\eta\in[a, b)$, что если $\eta<x<b$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)}<k+1, \text{ т. е. } f(x)<(k+1)\,g(x),$$

а это означает, что

$$f(x)=O(g(x)),\qquad x\to b.$$

Поэтому утверждение 1) следствия непосредственно вытекает из утверждения теоремы 1) теоремы 1.

Пусть теперь условие (33.18) выполнено при некотором k, удовлетворяющем условию $0<k\leqslant+\infty$. Тогда для любого $k'\in(0, k)$ существует такое $\eta\in[a, b)$, что если $\eta<x<b$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)}>k',\quad \text{или}\quad g(x)<\frac{1}{k'}f(x).$$

Это и означает, что $g(x)=O(f(x))$, $x\to b$. Поэтому утверждение 2) следствия непосредственно вытекает из утверждения 2) теоремы 1. $\square$

Функция $g(x)$ в утверждении 1 теоремы 1 и в ее следствии, с помощью которой устанавливается сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, называется *функцией сравнения*. Если, в частности, $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in [a, b)$, то говорят также, что $f(x)$ мажорируется функцией $g(x)$ или что $g(x)$ служит *мажорантой* для $f(x)$.

Эффективность использования критерия сравнения для решения вопроса о сходимости интеграла зависит, конечно, от запаса функций сравнения, о которых известно, сходится или расходится несобственный интеграл от них, взятый по рассматриваемому промежутку, и которые, тем самым, можно пытаться использовать для исследования сходимости данного интеграла. Заметим, что утверждение, аналогичное теореме 1, справедливо, конечно, и для несобственных интегралов типа (33.6).

В качестве функций сравнения $g(x)$ часто достаточно брать степенные функции. Именно, в случае конечных промежутков $[a, b)$ и $(a, b]$ берутся, соответственно, функции $g(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ и $g(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$, интегралы от которых $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \geqslant 1$ (в этом легко убедиться, сведя указанные интегралы линейной заменой переменной к интегралам $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, рассмотренным в п. 33.1). В случае же бесконечных промежутков $[a, +\infty)$ и $(-\infty, b]$ за функции сравнения берутся, соответственно, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ и $g(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$, интегралы от которых $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ и $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{|x|^\alpha}$ сходятся при $\alpha > 1$ и расходятся при $\alpha \leqslant 1$ (см. примеры в п. 33.1).

Отметим еще, что, очевидным образом, все сформулированные признаки сходимости и расходимости интегралов остаются в силе (с очевидными изменениями), если в них условие неотрицательности функции f заменить условием ее неположительности (это следует из того, что интеграл $\int\limits_a^b (-f(x))\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$).

Примеры. 1. Интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx \tag{33.20}$$

сходится. В самом деле, обозначая через f подынтегральную функцию $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ и беря в качестве функции сравнения

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}},\quad \text{здесь}\ \alpha=\frac{1}{3},$$

имеем

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1-0}\sqrt[3]{1-x}\,\frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

поэтому, согласно следствию из теоремы 1, интеграл (33.20) сходится.

2. Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{1-x^2}\,dx$ расходится. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять в качестве функции сравнения $g(x)=\frac{1}{1-x}$, здесь $\alpha=1$.

В рассмотренных примерах выбор показателя α у функции сравнения можно было сделать сразу, исходя из конкретного вида заданной подынтегральной функции. Иногда, когда такой выбор сразу не ясен, приходится предварительно проделывать некоторые дополнительные исследования, например, попытаться выделить ее главную часть, прибегнув к формуле Тейлора. Рассмотрим подобные примеры.

3. Интеграл

$$\int\limits_0^1 \ln x\,dx \qquad (33.21)$$

сходится. Действительно, по правилу Лопиталя при любом $\alpha>0$, в частности при $0<\alpha<1$, имеем

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^\alpha}}=\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=$$
$$=-\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+0}x^\alpha=0,$$

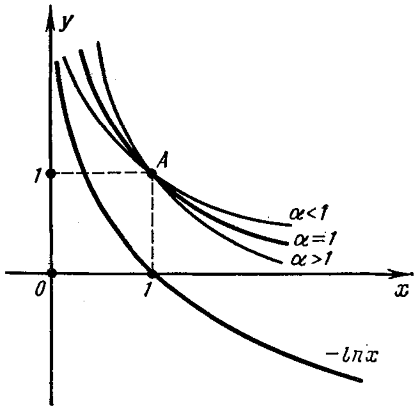


Рис. 133

поэтому, согласно следствию из теоремы 1 (точнее, его аналогу для неположительных функций), интеграл (33.21) сходится.

Геометрически сходимость и расходимость интегралов (33.9), (33.10) и (33.21) означает конечность или бесконечность площадей соответствующих «бесконечных криволинейных трапеций», сравнительное расположение которых изображено на рис. 133.

4. Для выяснения вопроса о сходимости интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{\ln x} \tag{33.22}$$

заметим, что $\ln x = \ln[1+(x-1)] \sim x-1$ при $x \to 1$, и возьмем за функцию сравнения $g(x) = \frac{1}{x-1}$, $(\alpha = 1)$. Тогда $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x}{\ln x} = -1$, и, следовательно, интеграл (33.22) расходится.

5. Интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}}\,dx \tag{33.23}$$

сходится. Действительно, возьмем $\alpha = \frac{3}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тогда, применив снова правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}-\varepsilon}\ln x}{\sqrt{x^3+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^3+1}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\varepsilon}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon x^{\varepsilon}} = 0.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\frac{3}{2} - \varepsilon > 1$; в этом случае интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2-\varepsilon}}$ сходится, а потому, в силу следствия из теоремы 1, сходится и интеграл (33.23).

6. Исследуем сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}\,dx. \tag{33.24}$$

Здесь подынтегральная функция всюду отрицательна. Очевидно, интеграл (33.24) сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_1^{+\infty} \left(-\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}\right)dx, \tag{33.25}$$

у которого подынтегральная функция всюду положительна. Разложив функцию $\ln\cos\frac{1}{x}$ по формуле Тейлора, получим

$$-\ln\cos\frac{1}{x} = -\frac{\ln\left[1-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]}{x^p} =$$

$$= -\frac{-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^p} = \frac{1}{2x^{2+p}} + o\left(\frac{1}{x^{2+p}}\right), \quad x \to +\infty.$$

Таким образом, $-\dfrac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p} \sim \dfrac{1}{2x^{2+p}}$ при $x \to +\infty$ и, следовательно, интеграл (33.24) сходится при $2+p>1$, т. е. при $p>-1$, и расходится при $p \leqslant -1$.

В примерах 2 и 3 сходимость рассмотренных там интегралов можно было бы установить, вычислив их по формуле Ньютона — Лейбница. Однако, выяснение сходимости интегралов с помощью признака сравнения обычно требует меньше вычислений, чем посредством предварительного их нахождения по формуле Ньютона — Лейбница. Важно отметить, что используя признак сравнения, можно выяснить сходимость интегралов, конечно, и в случае, когда первообразная подынтегральной функции не является элементарной, и, следовательно, обычным приемом, с помощью формулы Ньютона — Лейбница, интеграл заведомо не вычисляется, как это было в примерах 4 и 5.

Подчеркнем еще раз, что признак сравнения для выяснения вопроса о сходимости несобственного интеграла можно применять только для функций, не меняющих знака. Возникает вопрос: как выяснить, сходится или расходится несобственный интеграл в случае, когда подынтегральная функция меняет знак? В следующих пунктах мы и займемся изучением этого вопроса.

33.4. КРИТЕРИЙ КОШИ СХОДИМОСТИ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Теорема 2. *Для сходимости интеграла* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *существовало такое число* $\eta=\eta(\varepsilon)$, $a \leqslant \eta < b$, *что если* $\eta<\eta'<b$, $\eta<\eta''<b$, *то*

$$\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon. \qquad (33.26)$$

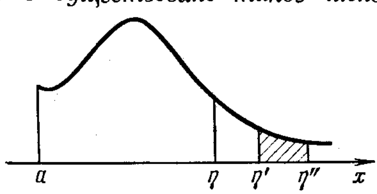


Рис. 134

Доказательство. Положим $\varphi(\eta)=\int\limits_a^{\eta} f(x)\,dx$, $a \leqslant \eta < b \leqslant +\infty$. Тогда сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, т. е. существование предела (33.1), означает существование предела $\lim\limits_{\eta \to b} \varphi(\eta)$. В силу же критерия Коши для наличия конечного предела функции $\varphi(\eta)$ при $\eta \to b$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовала такая левосторонняя проколотая окрестность $\mathring{U}(b;\ \eta)=\{x: \eta<x<b\}$ точки b, т. е. существовало такое число η_0,

$a \leqslant \eta < b$, что для всех $\eta' \in \mathring{U}(b;\ \eta)$ и $\eta'' \in \mathring{U}(b;\ \eta)$ (что равносильно условию: $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$) выполнялось бы неравенство

$$|\varphi(\eta'') - \varphi(\eta')| < \varepsilon. \tag{33.27}$$

Поскольку

$$\varphi(\eta'') - \varphi(\eta') = \int_a^{\eta''} f(x)\,dx - \int_a^{\eta'} f(x)\,dx = \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx,$$

то неравенство (33.27) равносильно условию (33.26) (рис. 134). $\square$

Теорема 2 называется *критерием Коши сходимости интеграла.*

33.5. АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЕСЯ ИНТЕГРАЛЫ

Важным понятием для несобственных интегралов от функций, меняющих знак, является понятие абсолютно сходящегося интеграла.

Определение 2. *Несобственный интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл* $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Функции, для которых интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ абсолютно сходится называются абсолютно интегрируемыми (в несобственном смысле) на промежутке с концами a и b. В случае, когда a и b конечны, говорят также, что функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Из теоремы 2 непосредственно следует критерий абсолютной сходимости интеграла.

Теорема 3. *Для того чтобы интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое* $\eta = \eta(\varepsilon)$, *что если* $\eta < \eta' < b$ и $\eta < \eta'' < b$, *то*

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\,dx \right| < \varepsilon.$$

Эта теорема называется *критерием Коши абсолютной сходимости интеграла.*

Напомним, что, как всегда, здесь предполагается, что функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, \eta]$, где $a \leqslant \eta < b$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

Признак сходимости интегралов от неотрицательных функций, очевидно, применим также и для выяснения абсолютной сходимости интегралов. Пусть, например, требуется выяснить: сходится или нет интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx. \tag{33.28}$$

Поскольку $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$, и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то согласно признаку сравнения сходится и интеграл $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$, т. е. интеграл (33.28) абсолютно сходится.

Важная связь между сходимостью и абсолютной сходимостью интегралов устанавливается следующей теоремой.

Теорема 4. *Если интеграл абсолютно сходится, то он и просто сходится.*

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Если интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ абсолютно сходится, то в силу критерия Коши абсолютной сходимости интеграла (см. теорему 3) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta = \eta(\varepsilon)$, что если $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$, то

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon. \tag{33.29}$$

Поскольку $\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\,dx\right|$, то в силу неравенства (33.29) для любых указанных η' и η'' имеем

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

поэтому в силу критерия Коши сходимости интегралов (см. теорему 2) интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится. $\square$

Упражнение 10. Если несобственный интеграл от функции, определенной на отрезке абсолютно сходится, то он и просто сходится. Интеграл Римана является частным случаем несобственного интеграла. Следовательно, если существует интеграл Римана от абсолютной величины функции, то существует и интеграл Римана от самой функции. Это неверно (привести соответствующий пример!). Где ошибка в проведенном рассуждении?

Существенно отметить, что интеграл может сходиться, но не сходиться абсолютно. В качестве примера рассмотрим интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{33.30}$$

Прежде всего, заметим, что поскольку $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то подынтегральная функция, доопределенная единицей при $x=0$, будет непрерывной на полупрямой $x \geqslant 0$ и, значит, интегрируемой, по Риману на любом отрезке $[0, \eta]$, в частности — на отрезке $[0, 1]$. Поэтому вопрос о сходимости, соответственно абсолютной сходимости, интеграла (33.30) эквивалентен вопросу о сходимости, соответственно абсолютной сходимости, интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx. \tag{33.31}$$

Для исследования его сходимости выполним интегрирование по частям:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = -\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, d(\cos x) =$$
$$= -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int\limits_1^{+\infty} \cos x\, d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos 1 - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

В правой части получился интеграл (33.28), который, как известно, абсолютно, а значит и просто, сходится.

Таким образом, оба получившихся выражения в правой части имеют смысл, и следовательно, конечны. Поэтому, во-первых, проделанное интегрирование по частям законно, а во-вторых, левая часть также конечна, т. е. интеграл (33.31) сходится.

Заметим, что в результате интегрирования по частям мы заменили интеграл (33.31) суммой некоторого конечного выражения и другого несобственного интеграла, у которого в знаменателе подынтегрального выражения стоит более высокая степень переменной интегрирования, чем в (33.31), а в числителе — ограниченная, как в (33.31), функция. В получившемся интеграле подынтегральная функция быстрее стремится к нулю, чем в исходном, в том смысле, что

$$\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ при } x \to \infty.$$

Поэтому его сходимость оказалось легче непосредственно исследовать, чем сходимость исходного интеграла: он оказался даже не просто сходящимся, а абсолютно сходящимся.

Метод, позволяющий свести исследование сходимости данного интеграла к исследованию сходимости другого интеграла, который в каком-то смысле «лучше сходится», чем данный, называется *методом улучшения сходимости*.

Покажем теперь, что интеграл (33.31) не сходится абсолютно, т. е. что интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \tag{33.32}$$

расходится. Действительно, из неравенства

$$|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

при любом $\eta > 1$ имеем:

$$\int_1^{\eta} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \frac{1}{2}\int_1^{\eta}\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^{\eta}\frac{\cos 2x}{x}\,dx. \tag{33.33}$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ расходится и равен $+\infty$. Интеграл же $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,dx$ сходится. Чтобы в этом убедиться, проинтегрируем его по частям:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,d(\sin 2x) = \frac{\sin 2x}{2x}\Big|_1^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\sin 2x\,d\left(\frac{1}{x}\right) =$$
$$= \frac{\sin 2}{2} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}\,dx.$$

В силу этой формулы сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,dx$ непосредственно следует из абсолютной сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}\,dx$, которая в свою очередь вытекает из очевидного неравенства

$$\left|\frac{\sin 2x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

Перейдя теперь к пределу при $\eta \to +\infty$ в неравенстве (33.33), получаем, что правая, а следовательно, и левая части этого неравенства стремятся к $+\infty$ и потому интеграл (33.32) расходится.

Таким образом, интеграл (33.31), значит, и интеграл (33.30) не сходятся абсолютно.

Докажем еще одно полезное для дальнейшего вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Если функция f абсолютно интегрируема, а функция g интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то их произведение gf также абсолютно интегрируемо на $[a, b]$.*

Доказательство. Как было договорено выше, рассматриваются только такие функции f, которые при любом $\eta \in [a, b)$ интегрируемы по Риману на отрезке $[a, \eta]$. Поскольку по условию функция g интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема по Риману и на всяком отрезке $[a, \eta]$, $\eta \in [a, b)$ (см. свойство 2 в п. 28.1). Поэтому произведение gf также интегрируемо по Риману на любом указанном отрезке $[a, \eta]$ (см. свойство 6 в п. 28.1). Это означает, что имеет смысл рассмотрение несобственного интеграла $\int\limits_a^b g(x) f(x)\, dx$.

В силу интегрируемости по Риману функции g на отрезке $[a, b]$, она ограничена на нем, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|g(x)| \leqslant M$. Следовательно, для всех $x \in [a, b)$ справедливо и неравенство $|g(x) f(x)| \leqslant M |f(x)|$. Заметив, что, в силу абсолютной интегрируемости функции f на отрезке $[a, b]$ интеграл $\int\limits_a^b M |f(x)|\, dx = M \int\limits_a^b |f(x)|\, dx$ сходится, получим по признаку сравнения, что сходится и интеграл $\int\limits_a^b |g(x) f(x)|\, dx$, т. е., что произведение gf абсолютно интегрируемо на отрезке $[a, b]$. □

Все сказанное в этом пункте естественным образом переносится и на несобственные интегралы других видов, рассмотренных в п. 33.1, т. е. на интегралы вида (33.6), а также на интегралы общего типа (33.8).

33.6. ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛОВ

Докажем один достаточный признак сходимости интегралов, называемый обычно *признаком Дирихле.*

Теорема 5 (признак Дирихле). *Пусть*

1) *функция f непрерывна и имеет ограниченную первообразную F при $x \geqslant a$;*

2) *функция g непрерывно дифференцируема и убывает при $x \geqslant a$;*

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$;

тогда интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x) g(x)\, dx \tag{33.34}$$

сходится.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу сделанных предположений функция fg непрерывна, а значит, и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, b]$, $a < b < +\infty$, и поэтому имеет смысл говорить о несобственном интеграле (33.34).

Проинтегрировав по частям произведение $f(x)g(x)$ на отрезке $[a, b]$, получим:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dF(x) = g(x)F(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx. \qquad (33.35)$$

Исследуем поведение обоих слагаемых правой части при $b \to +\infty$. В силу ограниченности функции F (см. условие 1 теоремы)

$$M = \sup |F(x)| < +\infty, \text{ поэтому } |g(b)F(b)| \leqslant Mg(b).$$

В силу же условия 3 теоремы $\lim\limits_{b \to +\infty} g(b)F(b) = 0$.

Далее, из монотонного убывания функции g следует, что $g'(x) \leqslant 0$ при $x \geqslant a$ и поэтому

$$\int_a^b |F(x)g'(x)|\,dx \leqslant M\int_a^b |g'(x)|\,dx =$$

$$= -M\int_a^b g'(x)\,dx = M[g(a) - g(b)] \leqslant Mg(a),$$

ибо из условий 2 и 3 теоремы следует, что $g(x) \geqslant 0$, в частности, что $g(b) \geqslant 0$.

Таким образом, интегралы $\int_a^b |F(x)g'(x)|\,dx$ ограничены в совокупности при всех $b > a$, и поэтому интеграл

$$\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx$$

абсолютно, а значит, и просто сходится, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

Мы доказали, что в правой части равенства (33.35) оба слагаемых при $b \to +\infty$ имеют конечный предел, а значит, и предел левой части при $b \to +\infty$ конечен, что означает сходимость интеграла (33.34). $\square$

Примеры 1. Применим признак Дирихле к исследованию сходимости интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx, \qquad \alpha > 0, \qquad (33.36)$$

Функция $f(x)=\sin x$ имеет ограниченную первообразную $F(x)= =-\cos x$, а непрерывно дифференцируемая функция $g(x)=1/x^\alpha$ при $\alpha>0$ монотонно убывает и стремится к нулю при $x\to+\infty$. Все условия теоремы 5 выполнены, поэтому интеграл (33.36) сходится.

2. Следует, однако, иметь в виду, что признак Дирихле дает только достаточные, а не необходимые условия сходимости интеграла; поэтому не всегда с помощью его можно решить вопрос о сходимости интеграла. Например, исследуем сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{x^\alpha-\sin x},\qquad \alpha>0. \tag{33.37}$$

Попытаемся применить признак Дирихле, положив $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\frac{1}{x^\alpha-\sin x}$. Очевидно, что $g(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. Найдем производную:

$$g'(x)=\frac{-\alpha x^{\alpha-1}+\cos x}{(x^\alpha-\sin x)^2}.$$

Отсюда видно, что при $\alpha<1$ эта производная при $x\to+\infty$ бесконечно много раз меняет знак и, следовательно, сама функция $g(x)$ не является монотонно убывающей функцией.

Таким образом, при $\alpha<1$ признак Дирихле не применим указанным способом к выяснению вопроса о сходимости интеграла (33.37). В этом случае естественно попробовать прибегнуть снова к методу выделения главной части.

Применяя разложение функции $(1-t)^{-1}$, $-1<t<1$, по формуле Тейлора (см. п. 13.3), получим, при $x\to+\infty$

$$\frac{\sin x}{x^\alpha-\sin x}=\frac{\sin x}{x^\alpha}\frac{1}{1-\frac{\sin x}{x^\alpha}}=\frac{\sin x}{x^\alpha}\left[1+\frac{\sin x}{x^\alpha}+o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right]=$$

$$=\frac{\sin x}{x^\alpha}+\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)=\frac{\sin x}{x^\alpha}+\frac{1}{2x^{2\alpha}}-\frac{\cos 2x}{2x^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right). \tag{33.38}$$

Интегралы

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \quad \text{и} \quad \int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^{2\alpha}}\,dx \tag{33.39}$$

сходятся по признаку Дирихле при всех $\alpha>0$. Интеграл же

$$\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{2x^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)\right]dx \tag{33.40}$$

сходится при $2\alpha>1$, т. е. при $\alpha>\frac{1}{2}$, и расходится при $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.

Действительно, из формулы (33.38) следует, что функция $o(1/x^{2\alpha})$ в указанной формуле непрерывна по x при $x \geqslant 1$, $\alpha > 0$, и, следовательно, имеет смысл говорить об интеграле (33.40). Функции $\frac{1}{2x^{2\alpha}}$ и $\frac{1}{2x^{2\alpha}} + o(1/x^{2\alpha})$ неотрицательны в некоторой окрестности $+\infty$ и эквивалентны при $x \to +\infty$, поэтому интеграл (33.40) сходится и расходится при тех же значениях параметра α, что и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha}}$ (см. следствие из теоремы 1 в п. 33.3).

Таким образом, при $\alpha > \frac{1}{2}$ все интегралы (33.39) и (33.40) сходятся, а значит, в силу (33.38) сходится и интеграл (33.37). При $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ интегралы (33.39) сходятся, а интеграл (33.40) расходится, следовательно, расходится и интеграл (33.37).

Заметим, что при $\alpha \leqslant 0$ интеграл (33.37) расходится. Действительно, в этом случае знаменатель подынтегральной функции обращается в ноль бесконечно много раз; причем, если $x_0^\alpha - \sin x_0 = 0$, то функция $x^\alpha - \sin x$ в окрестности точки x_0, согласно формуле Тейлора, имеет вид (почему?) $x^\alpha - \sin x = (x - x_0)^k \varphi(x)$, где k — некоторое натуральное число, а $\varphi(x_0) \neq 0$. Поскольку $\sin x_0 \neq \neq 0$, то в каждой подобной точке x_0 мы имеем неинтегрируемую особенность.

Следует обратить внимание на то, что для каждого фиксированного $\alpha > 0$ функции

$$\frac{\sin x}{x^\alpha - \sin x} \quad \text{и} \quad \frac{\sin x}{x^\alpha}$$

эквивалентны при $x \to +\infty$, т. е.

$$\frac{\sin x}{x^\alpha} = \varepsilon(x) \frac{\sin x}{x^\alpha - \sin x},$$

где $\varepsilon(x) = 1 - \frac{\sin x}{x^\alpha} \to 1$ при $x \to +\infty$, однако если $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, то интеграл (33.37) от первой из них расходится, а интеграл (33.36) от второй из них сходится.

Таким образом, замена подынтегральной функции на эквивалентную может изменить сходимость интеграла (если, конечно, интеграл не сходится абсолютно).

3. Исследуем на сходимость и абсолютную сходимость интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\sin x}{x}\right) dx. \qquad (33.41)$$

Поскольку $\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right| \sim \frac{|\sin x|}{x}$ при $x \to +\infty$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$

расходится (см. (33.32)), то расходится и интеграл

$$\int_1^{+\infty} \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\sin x}{x}\right) \right| dx,$$

т. е. интеграл (33.41) не сходится абсолютно.

Легко проверить, что при $y \to 0$

$$\operatorname{tg} y = y + O(y^3), \tag{33.42}$$

причем в качестве окрестности, участвующей в определении символа O (см. определение 1 в п. 8.2), здесь можно взять интервал $(-1, 1)$: существует такая постоянная $c > 0$, что

$$|O(y^3)| \leqslant c|y|^3, \qquad |y| < 1.$$

Далее, в силу формулы (33.42) при $y = \frac{\sin x}{x}$ интеграл (33.41) можно представить в виде

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\sin x}{x}\right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{x^3}\right) dx. \tag{33.43}$$

Поскольку интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится (например, по признаку Дирихле), а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ абсолютно сходится, то интеграл (33.41) — сходящийся.

Упражнения. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость следующие интегралы:

11. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2+1}$.

12. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

14. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

15. $\int\limits_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\,dx$.

16. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^x}{x^{10}}\,dx$.

17. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

18. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$.

19. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

20. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

21. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2\,dx.$

22. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{1+x}}\,dx.$

23. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{\alpha} x\,dx, \quad -\infty<\alpha<+\infty.$

24. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+(\ln x)^p}, \quad -\infty<p<+\infty.$

25. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$

26. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+\cos x)^{\alpha}}\,dx.$

27. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx.$

§ 34*. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Часто при решении задач оказывается необходимым не только установить сходимость или расходимость рассматриваемого интеграла, но и уметь оценить в определенном смысле порядок «скорости» его сходимости или характер расходимости. Мы не будем здесь доказывать каких-либо общих теорем, относящихся к этому вопросу (о некоторых общих методах изучения асимптотического поведения функций см. в п. 37.10*), и формулировать определение скорости сходимости, а лишь проиллюстрируем его на отдельных примерах нахождения порядка убывания сходящихся и роста расходящихся интегралов с переменными пределами интегрирования.

Примеры. 1. Исследуем интеграл

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^{\beta} t} \tag{34.1}$$

при различных действительных значениях параметров α и β. Рассмотрим сначала случай $\alpha>0$ и любого $\beta\in R$. При таких значениях параметров интеграл (34.1) сходится, что легко устанавливается по признаку сравнения, если в качестве функции сравнения взять, например, функцию $g(t)=t^{-\frac{\alpha}{2}-1}$, интеграл от которой $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{\alpha}{2}+1}}$ сходится.

В силу сходимости интеграла (34.1) при указанных значениях параметров α и β в равенстве $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^{\beta} t} = \int\limits_{2}^{x} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^{\beta} t} + \int\limits_{x}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^{\beta} t}$ второе слагаемое его правой части стремится к 0 при $x\to\infty$.

Изучим порядок его убывания, а именно, покажем справедливость асимптотического равенства

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t} \sim \frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x}, \quad x \to +\infty. \tag{34.2}$$

Для доказательства положим

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t}, \quad \Phi(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x}.$$

В силу сходимости интеграла (34.1) при $\alpha > 0$, $\beta \in \boldsymbol{R}$, имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$. Очевидно и $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 0$. Поскольку

$$F'(x) = -\frac{1}{x^{\alpha+1}\ln^\beta x}, \quad \Phi'(x) = -\frac{1}{x^{\alpha+1}\ln^\beta x} - \frac{1}{\alpha x^{\alpha+1}\ln^{\beta+1} x},$$

то, применив правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi(x)}{F(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi'(x)}{F'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha \ln x}\right) = 1,$$

т. е. соотношение (34.2) доказано.

В случае $\alpha = 0$, $\beta > 1$ непосредственным интегрированием получим даже явное выражение интересующего нас интеграла:

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^\beta t} = \int_x^{+\infty} \frac{d\ln t}{\ln^\beta t} = \frac{1}{(1-\beta)\ln^{\beta-1} t}\Bigg|_x^{+\infty} = \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1} x}. \tag{34.3}$$

Покажем теперь, что для $\alpha < 0$ и любого $\beta \in \boldsymbol{R}$ интеграл (34.1) расходится и, более того, имеет место асимптотическое равенство

$$\int_2^x \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t} \sim -\frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x}, \quad x \to +\infty. \tag{34.4}$$

Положив в этом случае

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int_2^x \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t}, \quad \Phi(x) \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x},$$

и применив правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi(x)}{F(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi'(x)}{F'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha \ln x}\right) = 1,$$

т. е. равенство (34.4) доказано.

Для оставшихся значений параметров α и β интеграл

$$\int_2^x \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t} \tag{34.5}$$

вычисляется в элементарных функциях. Если $\alpha=0$ и $\beta<1$, то

$$\int_2^x \frac{dt}{t\ln^\beta t}=\int_2^x \frac{d\ln t}{\ln^\beta t}=\frac{1}{(1-\beta)\ln^{\beta-1}t}\Bigg|_2^x=\frac{\ln^{1-\beta}x-\ln^{1-\beta}2}{1-\beta},$$

а если $\alpha=0$, $\beta=1$, то

$$\int_2^x \frac{dt}{t\ln t}=\int_2^x \frac{d\ln t}{\ln t}=\ln\ln t\Big|_2^x=\ln\frac{\ln x}{\ln 2}.$$

Итак, интеграл (34.1) сходится при $\alpha>0$ любом $\beta\in R$, а также при $\alpha=0$ и $\beta>1$; при этом установлены асимптотическое, соответственно точное, равенства (34.2) и (34.3) для интеграла $\int\limits_x^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t}$. При остальных значениях параметров α и β интеграл (34.1) расходится и получена асимптотическая или точная характеристика интеграла (34.5).

2. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t}\,dt.$$

Покажем, что он расходится и что имеет место асимптотическое равенство

$$\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t}\,dt \asymp \ln x,\qquad x\to+\infty \tag{34.6}$$

т. е. функции в левой и правой частях этой формулы одного порядка (см. п. 8.2).

С одной стороны, принимая во внимание неравенство $|\sin t|\leqslant\leqslant|t|$, получим при $x>\pi/2$,

$$\int_0^x\frac{\sin^2 t}{t}\,dt=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 t}{t}\,dt+\int_{\pi/2}^x\frac{\sin^2 t}{t}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{\pi/2}t\,dt+\int_{\pi/2}^x\frac{dt}{t}=\frac{\pi^2}{8}+\ln x-\ln\frac{\pi}{2}=O(\ln x),\quad x\to+\infty. \tag{34.7}$$

С другой стороны, для любого натурального n имеем

$$\int_0^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 t}{t}\,dt=\sum_{k=0}^n\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin^2 t}{t}\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^n\int_0^\pi\frac{\sin^2 u}{u+k\pi}\,du\geqslant\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^n\frac{1}{k+1}\int_0^\pi\sin^2 u\,du=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^n\frac{1}{k+1}.$$

В дальнейшем (см. п. 35.7) независимо от содержания настоящего пункта будет показано, что

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} = O(\ln n), \qquad n \to \infty.$$

Таким образом,

$$\int_0^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t}\, dt \geqslant O(\ln n), \qquad n \to \infty.$$

Это означает, что существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ имеет место неравенство

$$\int_0^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t}\, dt \geqslant c \ln n. \tag{34.8}$$

Заметим еще, что из легко проверяемого, например с помощью правила Лопиталя соотношения

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{\ln (n+2)\pi} = 1$$

следует существование такого натурального n_0, что при $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$\frac{\ln n}{\ln (n+2)\pi} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{34.9}$$

Далее, для каждого $x > 0$ найдется такое целое n, что

$$(n+1)\pi \leqslant x < (n+2)\pi.$$

Теперь для любого $x \geqslant n_0$ согласно неравенствам (34.8) и (34.9) получим

$$\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t}\, dt \geqslant \int_0^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t}\, dt \geqslant c \ln n = c \frac{\ln n}{\ln (n+2)\pi} \ln (n+2)\pi \geqslant \frac{c}{2} \ln x,$$

т. е.

$$\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t}\, dt \geqslant O(\ln x), \qquad x \to +\infty. \tag{34.10}$$

Из (34.7) и (34.10) непосредственно следует (34.6).

В рассмотренных примерах асимптотическое поведение интегралов было установлено с помощью более или менее специальных методов, оказавшихся удобными в рассмотренных конкретных случаях. Более общим методом, дающим часто возможность находить асимптотическое поведение интегралов, является обычное интегрирование по частям.

3. Рассмотрим в качестве примера так называемые интегралы Френеля*.

$$\int_0^\infty \cos\theta^2\,d\theta, \qquad \int_0^\infty \sin\theta^2\,d\theta,$$

скорость сходимости которых определяется порядком убывания интегралов.

$$\int_x^{+\infty} \cos\theta^2\,d\theta, \qquad \int_x^{+\infty} \sin\theta^2\,d\theta, \qquad x>0. \tag{34.11}$$

Изучение асимптотического поведения интегралов (34.11) при $x\to+\infty$ проводится одинаковым методом. Поэтому рассмотрим только один из них, например, первый. Сделав в нем замену переменной $\theta^2=t$, сразу убеждаемся по признаку Дирихле, что он сходится. Затем дважды проинтегрировав по частям получившийся интеграл, будем иметь

$$\int_x^{+\infty} \cos\theta^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt=\frac{1}{2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\cdot\Big|_{x^2}^{+\infty}+\frac{1}{4}\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\,dt=$$

$$=-\frac{\sin x^2}{2x}+\frac{1}{4}\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\,dt=-\frac{\sin x^2}{2x}+\frac{\cos x^2}{4x^3}-\frac{3}{8}\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2\sqrt{t}}\,dt \tag{34.12}$$

(согласно прежней терминологии, см. п. 33.5, мы посредством интегрирования по частям улучшили сходимость интеграла).

Поскольку $\frac{\cos x^2}{4x^3}=O\left(\frac{1}{x^3}\right)$, $x\to\infty$, и

$$\left|\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2\sqrt{t}}\,dt\right|\leqslant\int_{x^2}^{+\infty}\frac{dt}{t^2\sqrt{t}}=-\frac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}\Big|_{x^2}^{+\infty}=\frac{2}{3x^3},$$

то будем иметь

$$\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2\sqrt{t}}\,dt=O\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad x\to+\infty.$$

Следовательно,

$$\int_x^{+\infty}\cos\theta^2\,d\theta=-\frac{\sin x^2}{2x}+O\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad x\to+\infty.$$

Таким образом, нам удалось с точностью до $O\left(\frac{1}{x^3}\right)$, $x\to+\infty$, найти простое выражение для интеграла $\int_x^{+\infty}\cos\theta^2\,d\theta$, дающее,

---

* А. Френель (1788—1827)—французский физик.

в частности, представление о характере его убывания при $x \to +\infty$. Если произвести дальнейшее интегрирование по частям интеграла, стоящего в правой части формулы (34.11), то можно получить асимптотические формулы для интеграла $\int\limits_x^{+\infty} \cos \theta^2 \, d\theta$ с точностью до $O\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$, $x \to +\infty$, при любом натуральном n.

Упражнения. Исследовать скорость сходимости (расходимости) следующих интегралов при различных действительных значениях параметров α и β:

1. $\int\limits_0^{\infty} e^{-2\alpha t - t^2} t^{\beta - 1} \, dt.$

2. $\int\limits_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{3} t^3 + \alpha t\right) dt.$

3. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 (\alpha + \ln t)^{1/3}}.$

4. Доказать, что $\int\limits_0^x \frac{\sin^2 t}{t} \, dt \sim \frac{1}{2} \ln x$ при $x \to +\infty$ (см. пример 2).

Указание. Воспользоваться тождеством $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ
РЯДЫ

§ 35. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

35.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЯДА И ЕГО СХОДИМОСТЬ

В настоящем параграфе понятие суммы обобщается на некоторые случаи бесконечного множества слагаемых и изучаются свойства таких обобщенных сумм. Многие из рассматриваемых ниже вопросов справедливы не только для действительных чисел, но и для комплексных. Поэтому в отличие от предыдущего в настоящей главе будем вести рассмотрения в комплексной области.

Аналитическое выражение, имеющее формально вид суммы, содержащей бесконечно много слагаемых, называется *бесконечным рядом* или, короче, *рядом*. Дадим строгое определение ряда и его суммы.

Определение 1. *Пусть задана последовательность комплексных чисел u_n, $n = 1, 2, \ldots$. Составим новую последовательность чисел s_n, $n = 1, 2, \ldots$, следующим образом:*

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, \\ s_2 &= u_1 + u_2, \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n \end{aligned}$$

Пара последовательностей $\{u_n\}$ и *$\{s_n\}$ называется числовым рядом (подробнее: числовым рядом с общим членом u_n) и обозначается через*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{35.1}$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{35.2}$$

Элементы исходной последовательности $\{u_n\}$ называются членами ряда (35.1), *а элементы последовательности $\{s_n\}$ — частичными суммами этого ряда, при этом u_n называется n-м членом ряда, а конечная сумма s_n — n-й частичной суммой ряда, $n = 1, 2, \ldots$.*

Если последовательность частичных сумм ряда (35.1) *сходится, то он называется **сходящимся рядом**, а **если она** расходится, то расходящимся.*

Определение 2. *Ряд, членами которого являются члены ряда* (35.1), *начиная с* $(n+1)$*-го взятые в том же порядке, что и в исходном ряде, называется* n*-м остатком ряда* (35.1) *и обозначается через*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \quad \text{или} \quad u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots$$

Определение 3. *Если ряд* (35.1) *сходится, то предел*

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n$$

называется его суммой.

В этом случае пишут

$$s=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$

или

$$s=\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{35.3}$$

Таким образом, мы будем употреблять один и тот же символ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ как для обозначения самого ряда (35.1), так и для обозначения его суммы, если он сходится.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=+\infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=-\infty$, то соответственно пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n=+\infty \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n=-\infty.$$

Итак, каждый ряд является парой двух последовательностей, таких, что первая может быть взята произвольной (последовательность членов ряда), а вторая составлена определенным образом из членов первой (последовательность частичных сумм членов ряда). Однако ряд однозначно определяется каждой из этих последовательностей. Действительно, если задана последовательность членов u_n ряда, то члены последовательности его частичных сумм находятся согласно определению 1 по формулам $s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$, $n=1, 2, \ldots$. Если же задана последовательность $\{s_n\}$ частичных сумм ряда, то его члены определяются по формулам $u_1=s_1$, $u_n=s_n-s_{n-1}$, $n=2, 3, \ldots$. Отсюда следует, что для всякой последовательности всегда можно найти такой ряд, что она будет последовательностью его частичных сумм.

Действительно, пусть дана последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$. Положим

$$u_1 = z_1, \quad u_2 = z_2 - z_1, \ \ldots, \ u_n = z_n - z_{n-1}, \ \ldots$$

и рассмотрим ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots.$$

Тогда для его частичных сумм имеем:

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n =$$
$$= z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) = z_n.$$

Это означает, что рассмотрение рядов эквивалентно рассмотрению последовательностей. Всякий вопрос, сформулированный в терминах рядов, можно перефразировать в вопрос, сформулированный в терминах последовательностей и наоборот. Например, задача изучения сходимости рядов равносильна задаче изучения сходимости последовательностей.

Подчеркнем, что всюду, где не оговорено противное, члены рассматриваемых рядов подразумеваются комплексными.

Если n-й остаток ряда(35.1) (см. определение 2) сходится, то его сумму будем обозначать через r_n:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k, \tag{35.4}$$

и называть для краткости просто *остатком ряда*.

Всякую сумму конечного числа слагаемых

$$s_{n_0} = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

можно рассматривать как ряд, добавив к ней члены

$$u_{n_0+1} = u_{n_0+2} = \ldots = 0.$$

Сумма получившегося ряда, очевидно, будет совпадать с заданной суммой, ибо при всех $n \geqslant n_0$ его частичные суммы равны s_{n_0}.

Если заранее неизвестно, содержит сумма конечное или бесконечное число слагаемых, то иногда удобно в обоих случаях называть ее рядом, считая, что конечная сумма является рядом в вышеуказанном смысле.

Отметим одно существенное свойство сходящихся рядов.

Теорема 1 (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд* (35.1) *сходится, то*

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0. \tag{35.5}$$

Доказательство. Если ряд (35.1) сходится, то последовательности его частичных сумм s_n, $n=1, 2, \ldots$, и s_{n-1}, $n=2, 3, \ldots$, очевидно имеют один и тот же предел, равный сумме s этого ряда. Поэтому, замечая, что $u_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0. \quad \square$$

С помощью теоремы 1 иногда удается установить расходимость рассматриваемого ряда: *если для данного ряда условие* (35.5) *не выполняется, то он расходится.*

Примеры 1. Пусть q — комплексное число и $|q| < 1$. Тогда ряд $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots$ с членами $u_n = q^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, образующими *бесконечную убывающую геометрическую прогрессию*, сходится.

Действительно,

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q},$$

и так как $\lim \frac{q^{n+1}}{1-q} = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}.$$

2. Ряд, члены которого образуют геометрическую прогрессию, $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots$, при $|q| \geqslant 1$ расходится, ибо его общий член $u_n = q^n$ не стремится к нулю: $|u_n| = |q|^n \geqslant 1$.

3. Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$ с членами $u_n = (-1)^{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, расходится.

В самом деле, в этом случае

$$s_{2k} = 0, \ k = 1, 2, \ldots, \quad s_{2k+1} = 1, \ k = 0, 1, \ldots,$$

поэтому последовательность частичных сумм $\{s_n\}$ не имеет предела.

Расходимость рассматриваемого ряда, следует, конечно, и из того, что все его члены по абсолютной величине равны единице, и поэтому не выполняется необходимое условие (35.5) сходимости ряда.

35.2. СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

Теорема 2. *Пусть c — комплексное число. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in \boldsymbol{C}$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$, называемый произведением данного ряда на число c, также сходится и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{35.6}$$

Эта теорема означает, что числовой множитель «можно выносить за скобку» и в случае бесконечного множества слагаемых, если они образуют сходящийся ряд. «Можно» в том смысле, что справедливо равенство (35.6).

Доказательство. Пусть $s_n=\sum_{k=1}^{n} u_k$ и $s'_n=\sum_{k=1}^{n} cu_k$, тогда, очевидно,

$$s'_n=cs_n. \tag{35.7}$$

По условию, $\lim_{n\to\infty} s_n$ существует, поэтому в силу (35.7) $\lim_{n\to\infty} s'_n$ также существует и

$$\lim_{n\to\infty} s'_n=c\lim_{n\to\infty} s_n.$$

Согласно определению суммы ряда отсюда сразу следует (35.6). □

Теорема 3. *Пусть ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходятся, тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n)$, *называемый суммой данных рядов, также сходится и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n+\sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{35.8}$$

Эта теорема означает, что сходящиеся ряды «можно складывать почленно» (n-й член с n-м) «можно» в том смысле, что справедливо равенство (35.8).

Доказательство. Пусть

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} u_k,\quad s'_n=\sum_{k=1}^{n} v_k \text{ и } \sigma_n=\sum_{k=1}^{n} (u_k+v_k),$$

тогда $\sigma_n=s_n+s'_n$, и так как $\lim_{n\to\infty} s_n$ и $\lim_{n\to\infty} s'_n$, по условию, существуют, то $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ также существует и

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n=\lim_{n\to\infty} (s_n+s'_n)=\lim_{n\to\infty} s_n+\lim_{n\to\infty} s'_n.$$

Это равенство эквивалентно равенству (35.8). □

Теорема 4. *Если ряд сходится, то любой его остаток сходится. Если какой-либо остаток ряда* (35.1) *сходится, то и сам ряд также сходится. При этом если*

$$s=\sum_{k=1}^{\infty} u_k,\quad s_m=\sum_{k=1}^{m} u_k,\quad r_m=\sum_{k=m+1}^{\infty} u_k,$$

то

$$s=s_m+r_m.$$

Доказательство. Пусть $s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$, $n=1, 2, \ldots$, — частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, а $s_k^{(m)}=u_{m+1}+\ldots+u_{m+k}$ — частичные суммы его m-го остатка

$$u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots+u_{m+k}+\ldots$$

Очевидно, что

$$s_n=s_m+s_k^{(m)}, \qquad n=m+k, \tag{35.9}$$

откуда при фиксированном m следует, что предел

$$\lim_{n\to\infty} s_n$$

существует тогда и только тогда, когда существует

$$\lim_{k\to\infty} s_k^{(m)}.$$

Иначе говоря, ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится некоторый его остаток $r_m=\lim\limits_{k\to\infty} s_k^{(m)}$. Поскольку натуральное число m было произвольным, то первая часть теоремы доказана.

Наконец, переходя к пределу в равенстве (35.9) при $k\to\infty$ и фиксированном m, имеем $s=s_m+r_m$, так как $n=m+k\to+\infty$ при $k\to+\infty$, а $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$, $\lim\limits_{k\to\infty} s_k^{(m)}=r_m$. $\square$

Из этой теоремы следует, что отбрасывание или добавление конечного числа членов к данному ряду не влияет на его сходимость.

Из формулы $s=s_m+r_m$, очевидно, следует, что если ряд сходится, то его остаток стремится к нулю:

$$\lim_{m\to\infty} r_m=\lim_{m\to\infty}(s-s_m)=0 \tag{35.10}$$

Отметим, что само собой разумеется, что условие (35.10) нельзя принять в качестве определения сходящегося ряда, так как остаток ряда сам является рядом, и говорить о его стремлении к нулю, можно лишь уже обладая определением сходимости ряда.

35.3. КРИТЕРИЙ КОШИ СХОДИМОСТИ РЯДА

Критерий Коши для сходимости последовательностей может быть легко перефразирован применительно к рядам. Действительно, как известно (см. п. 3.7 и 23.3), для того чтобы последовательность комплексных чисел $\{s_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал такой номер n_ε, что для любых номеров $n\geqslant n_\varepsilon$ и любых целых $p\geqslant 0$

выполнялось неравенство

$$|s_{n+p}-s_{n-1}|<\varepsilon.$$

Для удобства использования этого критерия в случае рядов мы пишем здесь разность $s_{n+p}-s_{n-1}$ вместо разности $s_{n+p}-s_n$, которую писали раньше в п. 3.7. Это, конечно, не влияет на суть дела. При этом, поскольку сумма s_0 не определена, мы всегда будем считать, по определению, что $s_0=0$.

Если теперь под $\{s_n\}$ подразумевать последовательность частичных сумм ряда (35.1), то

$$s_{n+p}-s_{n-1}=u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+p},$$

и сформулированный критерий в этих обозначениях принимает следующий вид.

Теорема 5 (критерий Коши). *Для того чтобы ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *существовал такой номер* n_ε, *что при любом* $n\geqslant n_\varepsilon$ *и любом целом* $p\geqslant 0$ *выполнялось неравенство*

$$|u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+p}|<\varepsilon. \tag{35.11}$$

Из критерия Коши сходимости ряда легко можно получить снова необходимое условие (35.5) сходимости ряда. Действительно, в этом случае неравенство (35.11) выполняется для любого $p\geqslant 0$ и, в частности, для $p=0$. Поэтому для всех $n\geqslant n_\varepsilon$ имеем $|u_n|<\varepsilon$, а это в силу произвольности $\varepsilon>0$ и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

Кратко свойство (35.5) выражают, говоря, что *«общий член сходящегося ряда стремится к нулю»*.

Примеры 1. Рассмотрим так называемый *гармонический ряд*

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots.$$

Здесь n-й член $u_n=1/n$ стремится к нулю при $n\to\infty$, но ряд расходится. Действительно, для любого $n=1,\ 2,\ \ldots$ имеем

$$u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{2n-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}>$$
$$>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}, \tag{35.12}$$

т. е. для любого n при $\varepsilon=\frac{1}{2}$ и $p=n-1$ неравенство (35.11) не выполняется.

Таким образом, из критерия Коши следует, что гармонический ряд расходится. Этот пример показывает, что условие (35.5), будучи необходимым для сходимости ряда, не является вместе с тем достаточным.

Из рассмотренного примера следует также, что ряд

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots \tag{35.13}$$

при $\alpha<1$ расходится. В самом деле, замечая, что при $\alpha<1$ для любого $n=2, 3, \ldots$ справедливо неравенство $n^\alpha<n$, имеем в силу (35.12) неравенства

$$\frac{1}{n^\alpha}+\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^\alpha}>\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)}+\ldots+\frac{1}{2n+1}>\frac{1}{2}.$$

Поэтому в случае ряда (35.13) при $\alpha<1$ для любого $n=1, 2, \ldots$ при $\varepsilon=1/2$ и $p=n-1$ неравенство (35.11) также не выполняется, и, следовательно, в силу критерия Коши, ряд (35.13) при $\alpha<1$ также расходится.

2. Рассмотрим теперь ряд (35.13) при $\alpha>1$. Покажем, что в этом случае он сходится. Возьмем сначала частичные суммы этого ряда порядков $n=2^k-1$, $k=1, 2, 3, \ldots$, объединив их слагаемые в k групп, общий вид которых

$$\frac{1}{2^{p\alpha}}+\frac{1}{(2^p+1)^\alpha}+\frac{1}{(2^p+2)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2^{p+1}-1)^\alpha},\quad p=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1,$$

т. е.

$$s_{2^k-1}=1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{(k-1)\alpha}}+\ldots+\frac{1}{(2^k-1)^\alpha}\right).$$

Заметив, что для каждого слагаемого p-й группы справедливо неравенство

$$\frac{1}{(2^p+m)^\alpha}\leqslant\frac{1}{2^{p\alpha}},\quad m=0,\ 1,\ \ldots,\ 2^p-1,$$

и что в этой группе 2^p слагаемых, получим

$$s_{2^k-1}<1+\frac{2}{2^\alpha}+\frac{2^2}{2^{2\alpha}}+\ldots+\frac{2^{k-1}}{2^{(k-1)\alpha}}<$$
$$<\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{(k-1)(\alpha-1)}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}=\frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.$$

Таким образом последовательность частичных сумм s_{2^k-1} ряда (35.13) при $\alpha>1$ ограничена сверху. Далее, в силу положительности членов рассматриваемого ряда последовательность его частичных сумм возрастает. Поэтому существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$. Но тогда и любая подпоследовательность $\{s_n\}$, в частности последовательность $\{s_{2^k-1}\}$ имеет тот же предел s, а поскольку по доказанному эта последовательность ограничена, то предел s конечен.

Упражнения. Доказать, исходя из определения 1, что следующие ряды — сходящиеся и найти сумму каждого из них:

1. $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)}+\ldots+\frac{1}{(a+(n-1)b)(a+nb)}+\ldots\ (a,\ b>0)$.
2. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$
3. $a+(a+d)q-(a+2d)q^2+\ldots+(a+nd)q^n+\ldots,\ |q|<1$.

Задача 22. Доказать, что для всякого сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами $a_n\geqslant 0$, существует такая возрастающая бесконечно большая последовательность $\{b_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$, $b_n\leqslant b_{n+1}$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ также сходится.

35.4. РЯДЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

В этом пункте займемся изучением рядов, все члены которых неотрицательные действительные числа.

Лемма 1. *Пусть все члены ряда* (35.1) *неотрицательны*:

$$u_n\geqslant 0,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,\tag{35.14}$$

Для того, чтобы этот ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы существовала хотя бы одна сходящаяся подпоследовательность последовательности его частичных сумм.

Действительно, из условия (35.14) следует, что

$$s_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1} u_k=s_n+u_{n+1}\geqslant s_n,$$

т. е. последовательность частичных сумм $\{s_n\}$ рассматриваемого ряда является возрастающей. Монотонная же последовательность сходится в том и только том случае, когда сходится хотя бы одна ее подпоследовательность (см. замечание после теоремы 3 в п. 3.5). $\square$

Лемма 2. *Для того чтобы ряд* (35.1) *с неотрицательными членами сходился, необходимо, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной сверху и достаточно, чтобы была ограниченной сверху хотя бы одна подпоследовательность* $\{s_{n_k}\}$

последовательности $\{s_n\}$ *его частичных сумм, причем если*

$$s=\sup_k \{s_{n_k}\}$$

то s *является суммой ряда* (35.1).

В самом деле, сходимость ряда означает сходимость последовательности его частичных сумм, а всякая сходящаяся последовательность ограничена, в частности, ограничена сверху. Таким образом, первая часть леммы справедлива и без предположения неотрицательности членов ряда.

Однако, в общем случае условие ограниченности даже всех частичных сумм ряда (а не только некоторой их подпоследовательности) не является достаточным для сходимости ряда, как это показывает, например, пример 3, разобранный в п. 35.1. Поэтому условие неотрицательности членов ряда существенно для справедливости второй части леммы 2. Докажем ее.

Из неотрицательности членов ряда, как мы убедились при доказательстве предыдущей теоремы, следует, что последовательность его частичных сумм — неубывающая. Поэтому, если существует ограниченная сверху подпоследовательность $\{s_{n_k}\}$ последовательности частичных сумм $\{s_n\}$ рассматриваемого ряда, то она тоже не убывает (как всякая подпоследовательность неубывающей последовательности) и, следовательно (см. теорему 3 в п. 3.5) сходится, причем

$$s=\sup_k \{s_{n_k}\}=\lim_{k\to\infty} s_{n_k}.$$

Согласно предыдущей лемме из сходимости подпоследовательности частичных сумм $\{s_{n_k}\}$ следует сходимость ряда, т. е. существование конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, и поскольку предел сходящейся последовательности совпадает с пределом любой ее подпоследовательности, то

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{k\to\infty} s_{n_k}=s. \quad \square$$

Из леммы 2 следует, что если ряд с неотрицательными членами расходится, то последовательность его частичных сумм не ограничена сверху и в силу ее монотонности

$$\lim_{n\to\infty} s_n=+\infty.$$

Поэтому для расходящихся рядов с неотрицательными членами, согласно сделанному в п. 35.1 соглашению, пишут

$$\sum_{u=1}^{\infty} u_n=+\infty$$

Доказанные леммы по своей формулировке внешне напоминают соответствующие утверждения для несобственных интегралов (см. п. 33.3). Между сходимостью рядов с неотрицательными членами и сходимостью несобственных интегралов от неотрицательных функций можно иногда установить и более непосредственную связь. Для убывающих функций это будет сделано в п. 35.7.

35.5. ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ ДЛЯ РЯДОВ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ. МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ ЧЛЕНА РЯДА

Перейдем теперь к признакам сравнения для рядов, также по своей форме весьма напоминающих соответствующие признаки сходимости несобственных интегралов.

Теорема 6 (признак сравнения). *Пусть*

$$u_n \geqslant 0, \quad v_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{35.15}$$

и

$$u_n = O(v_n)\,^{*)}. \tag{35.16}$$

Тогда, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{35.17}$$

сходится, то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{35.18}$$

а если ряд (35.18) *расходится, то расходится и ряд* (35.17).

Доказательство. Пусть выполнено условие (35.16). Тогда существует такое $c > 0$, что

$$u_k \leqslant c v_k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{35.19}$$

Если теперь ряд (35.17) сходится, то, согласно лемме 2, последовательность $\{s_n\}$ его частичных сумм ограничена, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant M, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{35.20}$$

Обозначим через σ_n частичную сумму ряда (35.18). Тогда в силу неравенств (35.19) и (35.20]

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant c \sum_{k=1}^{n} v_k = c s_n \leqslant cM, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

---

*) В частности, $u_n \leqslant v_n$. Объяснение обозначения «O» см. в п. 23.3.

Согласно лемме 2, из ограниченности сверху частичных сумм ряда (35.18) следует его сходимость. Итак, если ряд (35.17) сходится, то ряд (35.18) также сходится.

Если же ряд (35.18) расходится, то и ряд (35.17) расходится, так как если бы он сходился, то, по доказанному, сходился бы и ряд (35.18), что противоречит условию. $\square$

Следствие. *Пусть* $v_n \neq 0$, $n=1, 2, \ldots,$ *и*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = k, \tag{35.21}$$

тогда

1) *если ряд* (35.17) *сходится и* $0 \leqslant k < +\infty$, *то ряд* (35.18) *также сходится;*

2) *если ряд* (35.17) *расходится и* $0 < k \leqslant +\infty$, *то ряд* (35.18) *также расходится.*

В частности, если $u_n \sim v_n$ (u_n *и* v_n *эквивалентны, см. п.* 23.3 , *то ряды* (35.17) и (35.18) *сходятся или расходятся одновременно.*

Из выполнения условия (35.21) для $0 \leqslant k < +\infty$ следует существование такого n_0, что если $n \geqslant n_0$, то

$$\frac{u_n}{v_n} < k+1, \quad \text{т. е.} \quad u_n < (k+1) v_n,$$

а это означает, что

$$u_n = O(v_n).$$

Поэтому утверждение 1 следствия непосредственно вытекает из утверждения 1 теоремы.

Из выполнения условия (35.21) для $0 < k \leqslant +\infty$ следует, что если зафиксировать такое k', что $0 < k' < k$, то существует номер $n_0 = n_0(k')$, обладающий тем свойством, что если $n \geqslant n_0$, то

$$\frac{u_n}{v_n} > k', \quad \text{т. е.} \quad v_n < \frac{1}{k'} u_n,$$

а это означает, что

$$v_n = O(u_n).$$

Поэтому утверждение 2 следствия непосредственно вытекает из утверждения 2 теоремы. $\square$

Примеры. 1. Пусть $u_n = \frac{\sin^2 n\alpha}{2^n}$.

Тогда $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2^n}$, $n=1, 2, \ldots,$ и так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится (см. п. 35.1), то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{2^n}$.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ расходится, ибо $\frac{1}{1+\sqrt{n}} \geqslant \frac{n}{2\sqrt{n}}$, $p=1, 2, \ldots$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, как мы видели (см. исследование ряда (35.13), расходится.

Эффективность использования критерия сравнения для исследования сходимости ряда зависит, конечно, от запаса «рядов сравнения», т. е. рядов, о которых мы уже знаем, сходятся ли они или расходятся, и которые мы тем самым можем пытаться использовать для исследования сходимости данного ряда.

Если в качестве «ряда сравнения» (35.17) взять ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, о котором мы уже знаем, при каких α он сходится, то из теоремы 6 непосредственно следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 7. *Пусть* $u_n \geqslant 0$, $n=1, 2, \ldots$ *Тогда если* $u_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ *и* $\alpha > 1$, *то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{35.22}$$

сходится; если же $\frac{1}{n^{\alpha}} = O(u_n)$ *и* $\alpha \leqslant 1$, *то ряд* (35.22) *расходится.*

Следствие. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha} u_n = k$, *тогда*

1) *если* $\alpha > 1$ *и* $0 \leqslant k < +\infty$, *то ряд* (35.22) *сходится;*
2) *если* $\alpha \leqslant 1$ *и* $0 < k \leqslant +\infty$, *то ряд* (35.22) *расходится.*

В частности, если $u_n \sim \frac{1}{n^{\alpha}}$, *то ряд* (35.22) *сходится при* $\alpha > 1$ *и расходится при* $\alpha \leqslant 1$.

Если члены u_n ряда (35.22) заданы с помощью формулы, представляющей собой функцию от n, которая имеет смысл для всех действительных достаточно больших неотрицательных значений переменной n и, более того, является «достаточно гладкой» функцией этой переменной, то для практического применения теоремы 7 обычно бывает целесообразно разложить член u_n с помощью формулы Тейлора по степеням $1/n$.

Если главный член получившегося разложения будет иметь вид $1/n^{\alpha}$, то, беря в качестве ряда сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ и применив теорему 7, можно определить, сходится ли данный ряд или расходится.

В известном смысле можно сказать, что этот метод исследования сходимости ряда является наиболее удобным и вместе с тем достаточно общим.

Примеры. Исследуем сходимость рядов, общие члены u_n которых задаются нижеуказанными формулами.

1) $u_n = 1 - \cos\frac{\pi}{n}$. Очевидно, $u_n > 0$. Так как (см. замечание в конце п. 13.3) $\cos x = 1 + O(x^2)$, $x \to 0$, и, следовательно,

$$u_n = 1 - \left[1 + O\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)\right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty,$$

то в силу теоремы 7 ряд с общим членом u_n сходится.

2) $u_n = \ln\cos\frac{1}{n}$. Здесь $u_n < 0$. Вспомнив, что $\ln(1+x) = O(x)$, $x \to 0$, и применив последовательно формулу Тейлора для косинуса и логарифма, получим:

$$u_n = \ln\cos\frac{1}{n} = \ln\left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty,$$

и поэтому в силу теоремы 7 ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}(-u_n)$ сходится, а вместе с ним сходится и данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

3) $u_n = \ln\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$, $n = 3, 4, \ldots$. Имеем $u_n \geqslant 0$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$, поэтому

$$u_n = \ln\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) - \ln\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) = 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} + o\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, $u_n \sim \frac{2\pi}{n}$; так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=3}^{\infty}\ln\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$.

35.6. ПРИЗНАКИ ДАЛАМБЕРА И КОШИ ДЛЯ РЯДОВ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Иногда оказываются полезными некоторые специальные признаки сходимости ряда. Отметим среди них так называемый признак Даламбера *) и признак Коши, непосредственно получающиеся

*) Ж. Даламбер (1717—1783) — французский философ и математик.

из признака сравнения, если в качестве ряда сравнения взять соответствующим образом выбранную геометрическую прогрессию.

Теорема 8 (признак Даламбера). *Пусть дан ряд с положительными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n > 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{35.23}$$

Тогда

1) *если существуют такое число q, $0 < q < 1$, и такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q,$$

то данный ряд сходится;

2) *если существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1,$$

то данный ряд расходится.

Доказательство. Пусть $0 < q < 1$ и пусть существует такой номер n_0, что при $n \geqslant n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q, \text{ т. е. } u_{n+1} \leqslant q u_n.$$

Тогда

$$\begin{gathered} u_{n_0+1} \leqslant u_{n_0} q, \\ u_{n_0+2} \leqslant u_{n_0+1} q \leqslant u_{n_0} q^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{n_0+p} \leqslant u_{n_0+p-1} q \leqslant \ldots \leqslant u_{n_0} q^p, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

и так как ряд $u_{n_0} q + u_{n_0} q^2 + \ldots + u_{n_0} q^p + \ldots$ сходится, являясь суммой бесконечной убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q\,(0 < q < 1)$, то по признаку сравнения сходится и ряд

$$u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \ldots + u_{n_0+p} + \ldots,$$

а значит, и исходный ряд (35.23).

Если же существует такое n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, то

$$\begin{gathered} u_{n_0+1} \geqslant u_{n_0}, \\ u_{n_0+2} \geqslant u_{n_0+1} \geqslant u_{n_0}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

и так как, по предположению, $u_{n_0} > 0$, то n-й член ряда, будучи ограничен снизу положительной постоянной, не стремится к нулю.

Следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости ряда (см. теорему 1 этого параграфа), и потому ряд (35.23) расходится. □

Следствие. *Пусть существует* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$. *Тогда если* $l<1$, *то ряд* (35.23) *сходится, а если* $l>1$, *то ряд* (35.23) *расходится.*

Это вытекает непосредственно из доказанной теоремы.

В качестве примера рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Здесь $u_n=\frac{1}{n!}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, поэтому, согласно следствию теоремы 10, данный ряд сходится. Его сходимость, конечно, можно установить и сравнив его, например со сходящимся рядом $\sum\limits_{n\to 1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Более содержательные примеры на применение признака Даламбера будут даны в дальнейшем (см., например, п. 36.1).

Теорема 9 (признак Коши). *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\quad u_n\geqslant 0,\quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{35.24}$$

Тогда

1) *если существуют такое* q, $0\leqslant q<1$, *и такое* n_0, *что для всех* $n\geqslant n_0$ *выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n}\leqslant q,$$

то данный ряд сходится;

2) *если существует такой номер* n_0, *что для всех* $n\geqslant n_0$ *выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1,$$

то данный ряд расходится.

Доказательство. Если при $n\geqslant n_0$

$$\sqrt[n]{u_n}\leqslant q,\ \text{т. е. } u_n\leqslant q^n,$$

то по признаку сравнения ряд (35.24) сходится, ибо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ при $0<q<1$ сходится.

Если же

$$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1,\quad n\geqslant n_0,$$

то $u_n\geqslant 1$, и, значит, ряд (35.24) расходится (см. теорему 1). □

Следствие. *Пусть существует*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Тогда если $l<1$, *то ряд* (35.24) *сходится, а если* $l>1$, *он расходится.*

Доказательство следствия очевидно.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то, согласно следствию из теоремы 9, данный ряд сходится. Его сходимость легко устанавливается и с помощью теоремы 7.

Замечание. Если о ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n>0$, $n=1, 2, \ldots$, известно лишь, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1, \tag{35.25}$$

то ничего определенного о его сходимости сказать нельзя: ряд может как сходиться, так и расходиться. Например, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

удовлетворяют обоим условиям (35.25), однако первый из них расходится, а второй сходится.

35.7. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДОВ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Если для данного ряда (35.1) удается подобрать функцию, определенную при $x \geqslant 1$ и такую, что $f(n) = u_n$, то при определенных условиях из сходимости или расходимости интеграла

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

можно судить и о сходимости или расходимости ряда (35.1).

Теорема 10 (интегральный признак сходимости рядов). *Если функция* $f(x)$, *определенная при всех* $x \geqslant 1$, *неотрицательна и убывает, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{35.26}$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{35.27}$$

Доказательство. Если $k \leqslant x \leqslant k+1$, то в силу убывания

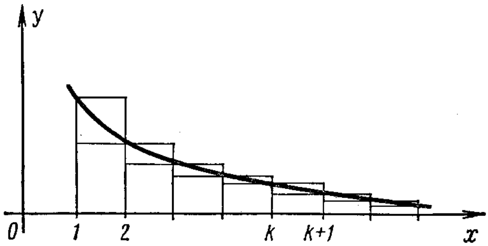


Рис. 135

функция $f(x)$ (рис. 135)

$$f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k+1), \quad k=1,\ 2,\ \ldots;$$

поэтому, интегрируя по отрезку $[k,\ k+1]$, будем иметь

$$f(k) \geqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geqslant f(k+1), \quad k=1,\ 2,\ \ldots.$$

Суммируя эти неравенства от $k=1$ до $k=n$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int_1^{n+1} f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k+1),$$

и, полагая

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

будем иметь

$$s_n \geqslant \int_1^{n+1} f(x)\,dx \geqslant s_{n+1} - f(1), \quad n=1,\ 2,\ \ldots. \tag{35.28}$$

Если интеграл (35.27) сходится, то в силу леммы 1 п. 33.3 при любом $n=1,\ 2,\ \ldots$

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Отсюда и из неравенства (35.28) следует, что

$$s_{n+1} \leqslant f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx,$$

т. е. последовательность частичных сумм ряда (35.26) ограничена сверху, а значит, согласно предыдущей теореме, этот ряд сходится.

Если ряд (35.26) сходится и его сумма равна s, то, согласно той же теореме, $s_n \leqslant s$ для всех $n=1, 2, \ldots$, и, значит, в силу неравенства (35.17) для всех $n=1, 2, \ldots$,

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant s.$$

Если теперь $\xi \geqslant 1$, то, беря n так, чтобы $n \geqslant \xi$, получим в силу неотрицательности функцию f

$$\int_1^{\xi} f(x)\,dx \leqslant \int_1^{n} f(x)\,dx \leqslant s.$$

Итак, совокупность всех интегралов $\int_1^{\xi} f(x)\,dx$, $\xi \geqslant 1$, ограничена сверху, а потому интеграл (35.27) сходится (см. лемму 1 п. 33.3). $\square$

Эта теорема часто существенно облегчает исследование сходимости рядов, так как, если для данного ряда удается подобрать соответствующую функцию f, а значит, свести вопрос об изучении сходимости ряда к изучению сходимости интеграла, то это дает возможность применить развитый в предшествующей главе аппарат интегрального исчисления.

Примеры. 1. Рассмотрим снова (см. п. 35.3) ряд

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots \tag{35.13}$$

с n-м членом $u_n = 1/n^\alpha$, $n=1, 2, \ldots$.

В данном случае функция $f(x)$, указанная в теореме, подбирается легко:

$$f(x)=\frac{1}{x^\alpha}, \quad x \geqslant 1.$$

Так как интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$, то и ряд (35.13) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Эти факты были установлены ранее другим методом в п. 35.3 (см. там примеры 1 и 2). Как видно из вышеизложенного, применение к изучению ряда (35.13) интегрального признака сходимости рядов значительно упростило задачу исследования сходимости этого ряда.

2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}. \tag{35.29}$$

Этот ряд легко можно исследовать с помощью интегрального признака сходимости: из того, что интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} =$ $= \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t}$ расходится, следует, что и ряд (35.29) расходится.

Сформулируем теперь одно простое, но часто полезное в приложениях следствие из теоремы 10.

Если существует такое натуральное n_0, что неотрицательная функция f убывает при $x \geqslant n_0$, то ряд

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Этот случай сводится к рассмотренному в теореме заменой переменного $x = y + n_0 - 1$.

Упражнения. Исследовать сходимость рядов:

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \pi \sqrt{n^2+a^2}$ $(a = \text{const} \in R)$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{n}{n+1}\right)$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \ln \frac{2n+1}{2n-1}\right)$.

10. Пусть $0 < p < q < 1$. Доказать, что ряд

$$p + q^2 + p^3 + q^4 + \ldots$$

сходится и $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} = \infty$.

11. Пусть $0 < \alpha < \beta < 1$. Доказать, что ряд

$$\frac{1}{1^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\beta}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\beta}} + \ldots$$

сходится и $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \infty$.

35.8*. НЕРАВЕНСТВА ГЕЛЬДЕРА И МИНКОВСКОГО ДЛЯ КОНЕЧНЫХ И БЕСКОНЕЧНЫХ СУММ

Пусть заданы числа (вообще говоря, комплексные) $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$, $1<p<+\infty$, и число q определяется равенством $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (см. п. 20.8 и п. 28.4*). Тогда справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q} \tag{35.30}$$

(неравенства Гёльдера) и

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} \tag{35.31}$$

(неравенство Минковского).

Их доказательство проводится по той же схеме, что и в случае соответствующих интегральных неравенств (см. п. 28.4*).

Введем для краткости обозначения

$$\|x\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad \|y\|_q \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}. \tag{35.32}$$

Применив неравенство (20.53) $ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ к

$$a=\frac{|x_i|}{\|x\|_p}, \quad b=\frac{|y_i|}{\|y\|_q}, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

будем иметь

$$\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \frac{|x_i|}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}.$$

Просуммировав эти неравенства по i от 1 до n, в силу (35.32) и условия $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, получим:

$$\frac{1}{\|x\|_q \|y\|_q} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p\|x\|_p^p} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{q\|y\|_q^q} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q;$$

тем самым неравенство (35.30) доказано.

Неравенство Минковского (35.31) следует из неравенства Гёльдера (35.30): из очевидного соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i|\,|x_i+y_i|^{p-1},$$

применив к каждому слагаемому в правой части неравенство Гёльдера, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q} + \\ + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q}.$$

Если левая часть равна нулю, то неравенство Минковского очевидно справедливо; если же она не равна нулю, то, сокращая обе части на множитель $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p\right)^{1/q}$ и заметив, что $\frac{1}{p}+ \frac{1}{q}=1$, $q(p-1)=p$, получим неравенство (35.31).

Для любых двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ справедливы аналогичные неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q}. \qquad (35.33)$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{1/p}. \qquad (35.34)$$

Действительно, для всех частичных сумм одного и того же порядка заданных рядов справедливы неравенства Гёльдера и Минковского. Переходя в них к пределу при $n\to\infty$, мы и получим неравенства (35.33) и (35.34).

Из доказанных неравенств следует, в частности, что если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q$$

сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|$ сходится, а если сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p,$$

то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p$.

35.9. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

В этом пункте рассматриваются ряды с действительными членами, знаки которых, вообще говоря, изменяются при изменении номера; такие ряды называются *знакопеременными.*

Рассмотрим прежде всего так называемые *знакочередующиеся* ряды, т. е. ряды, члены которых поочередно то положительны, то отрицательны.

Теорема 11 (Лейбниц). *Если*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{35.35}$$

и

$$u_n \geqslant u_{n+1} > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{35.36}$$

то знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \tag{35.37}$$

сходится. При этом любая частичная сумма s_n ряда (35.37) *отличается от его суммы s на величину, меньшую следующего члена u_{n+1}, иначе говоря, абсолютная величина остатка ряда r_n в этом случае не превышает абсолютной величины его первого члена, т. е.*

$$|r_n| = |s - s_n| \leqslant u_{n+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы четного порядка ряда (35.37)

$$s_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} u_n.$$

Их можно записать в виде

$$s_{2k} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2k-1} - u_{2k}), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

В силу условия (35.36) выражения в круглых скобках неотрицательны и потому $s_{2k} \leqslant s_{2k+2}$, т. е. последовательность частичных сумм четного порядка ряда (35.37) возрастает.

Замечая, что частичные суммы s_{2k} можно записать также и в виде

$$s_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

и что выражения в круглых скобках в силу условия (35.36) неотрицательны, а $u_{2k} > 0$, получаем, что $s_{2k} < u_1$, т. е. последовательность $\{s_{2k}\}$ ограничена сверху. Из монотонного возрастания и ограниченности сверху последовательности $\{s_{2k}\}$ следует, что она сходится:

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} = s. \tag{35.38}$$

Покажем, что и частичные суммы нечетного порядка ряда (35.37) стремятся к тому же пределу. Действительно,

$$s_{2k+1}=s_{2k}+u_{2k+1},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{35.39}$$

и так как, согласно (35.35), $\lim\limits_{k\to\infty} u_{2k+1}=0$, то в силу (35.38) и (35.39) имеем

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k+1}=s. \tag{35.40}$$

Из (35.38) и (35.40) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} s_n=s.$$

Теперь отметим, что для ряда (35.37) справедливо неравенство

$$s_{2k}\leqslant s\leqslant s_{2k-1},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{35.41}$$

Действительно, с одной стороны, мы уже видели, что s является пределом монотонно возрастающей последовательности $\{s_{2k}\}$, поэтому $s_{2k}\leqslant s$. С другой стороны,

$$s_{2k+1}=s_{2k-1}-(u_{2k}-u_{2k+1})\leqslant s_{2k-1},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

т. е. последовательность $\{s_{2k-1}\}$ монотонно убывает, и так как s является пределом и последовательности $\{s_{2k-1}\}$ (см. (35.40), то $s\leqslant s_{2k-1}$. Из неравенства (35.41) следует

$$s-s_{2k}\leqslant s_{2k+1}-s_{2k}=u_{2k+1},$$

$$s_{2k-1}-s\leqslant s_{2k-1}-s_{2k}=u_{2k},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

а это и означает, что для всех $n=1,\ 2,\ \ldots$, выполняется неравенство $|s-s_n|\leqslant u_{n+1}$. □

Если условия чередования знаков ряда и монотонности будут выполняться не с первого члена, а лишь начиная с некоторого номера n_0, то при выполнении условия (35.35), т. е. при стремлении общего члена ряда к нулю, рассматриваемый ряд будет также сходиться. Это следует из того, что отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (см. теорему 4 в п. 35.2).

В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}. \tag{35.42}$$

Его члены удовлетворяют, очевидно, условиям теоремы 11, и поэтому он сходится. Замечая, что у него $s_1=1$ и $s_2=1/2$, для его суммы S имеем оценку

$$1/2\leqslant S\leqslant 1. \tag{35.43}$$

На ряды переносятся не все свойства конечных сумм. Поясним это на примере того же ряда (35.42). Если

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots, \qquad (35.44)$$

то

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots,$$

сложив этот ряд с рядом (35.44), получим равенство

$$\frac{3}{2} S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{8} + \ldots, \qquad (35.45)$$

т. е. ряд, составленный из тех же членов, что и данный ряд (35.44), взятых только в несколько другом порядке, поэтому $\frac{3}{2} S = S$, откуда следует, что $S = 0$, что противоречит неравенству (35.43).

Несмотря на кажущуюся очевидность законности наших рассуждений, мы где-то совершили грубую ошибку. Где? Подробный анализ этого будет дан в одном из следующих пунктов.

35.10. АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ. ПРИМЕНЕНИЕ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ СХОДИМОСТИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ РЯДОВ

В этом пункте снова изучаются ряды, члены которых, вообще говоря, комплексные числа.

Определение 4. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \in \boldsymbol{C}, \qquad (35.46)$$

называется абсолютно сходящимся, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (35.47)$$

сходится.

Применяя критерий Коши сходимости ряда к ряду (35.47), получим: *для того, чтобы ряд* (35.46) *абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* n_ε, *что для всех* $n \geqslant n_\varepsilon$ *и всех целых* $p \geqslant 0$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Примеры. 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} \sin \frac{\pi n}{n+1}$ абсолютно сходится, ибо $\left| \frac{i^n}{2^n} \sin \frac{\pi n}{n+1} \right| \leqslant \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, как мы знаем, сходится, однако не абсолютно, ибо ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т. е. гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, расходится.

Теорема 12. *Если ряд абсолютно сходится, то он и просто сходится.*

Доказательство. Пусть ряд (35.46) абсолютно сходится, т. е. ряд (35.47) сходится. Тогда в силу необходимости выполнения условия Коши для сходимости ряда (см. теорему 5), для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех целых $p \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства $\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k|$ следует, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $p = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon.$$

А это и означает в силу достаточности выполнения условия Коши для сходимости ряда, что ряд (35.46) сходится. □

Замечание. Следует иметь в виду, что свойство абсолютной величины суммы не превышать сумму абсолютных величин слагаемых остается справедливым и для сходящихся рядов:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{35.48}$$

Это неравенство содержательно, когда его правая часть конечна, т. е. когда рассматриваемый ряд абсолютно сходится. В этом случае левая часть неравенства всегда имеет смысл, так как из абсолютной сходимости ряда следует и его обычная сходимость. Формально неравенство (35.48), по нашему соглашению об употреблении символа $+\infty$ (см. с. 33 и с. 546), верно и для любого сходящегося ряда, у которого ряд, стоящий в правой части (35.48), расходится.

Для доказательства неравенства (35.48) в случае сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ заметим, что для любого натурального m

$$\left|\sum_{n=1}^{m} u_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{m} |u_n|.$$

Переходя здесь к пределу при $m \to \infty$, получим неравенство (35.44).

Обозначим через

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* \tag{35.49}$$

ряд, составленный из тех же членов, что и ряд (35.46), но взятых, вообще говоря, в другом порядке.

Теорема 13. *Если ряд* (35.46) *абсолютно сходится, то ряд* (35.49) *также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.*

Доказательство. Пусть ряд (35.46) абсолютно сходится, т. е. сходится ряд (35.47), и пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \tilde{s}$. Обозначим частичные суммы ряда (35.47) через $\tilde{s}_n$. Тогда (см. п. 35.4)

$$\tilde{s}_n \leqslant \tilde{s}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Далее, какова бы ни была частичная сумма $\tilde{s}_m^* = \sum\limits_{k=1}^{m} |u_k^*|$ ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} |u_m^*|, \tag{35.50}$$

найдется номер $n = n(m)$ такой, что все члены ряда (35.50), входящие в сумму $\tilde{s}_m^*$ (таких членов конечное число), имеют в ряде (35.47) номера, не превышающие n, а поэтому

$$\tilde{s}_m^* \leqslant \tilde{s}_n,$$

где $n = n(m)$, $m = 1, 2, \ldots$. Следовательно,

$$\tilde{s}_m^* \leqslant \tilde{s}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Отсюда (см. лемму 2 в п. 35.4) и следует сходимость ряда (35.50), т. е. абсолютная сходимость ряда (35.49).

Покажем теперь, что если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = s$, то и сумма ряда (35.49) также равна s. Обозначим частичные суммы ряда (35.46) через s_n. Пусть фиксировано $\varepsilon > 0$. Тогда в силу сходимости ряда (35.47) существует такой номер $\tilde{n}_\varepsilon$, что

$$\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| = \tilde{s} - \tilde{s}_{n_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{35.51}$$

следовательно, выполняется и неравенство

$$|s - s_{n_\varepsilon}| = \left| \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{35.52}$$

Выберем, далее, номер m_ε так, чтобы частичная сумма $s^*_{m_\varepsilon}$ ряда (35.49) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (35.46), входящие в сумму s_{n_ε} (иначе говоря, номер m_ε таков, что все члены ряда (35.46) с номерами, не превышающими n_ε, имеют в ряде (35.49) номера, не превышающие m_ε). Пусть $m \geqslant m_\varepsilon$. Положим $s^{**}_m = s^*_m - s_{n_\varepsilon}$. Поскольку $|s^{**}_m|$ не превышает сумму абсолютных величин слагаемых, входящих в s^{**}_m, и поскольку номера этих слагаемых больше, чем n_ε, а следовательно, все они содержатся в сумме $\sum\limits_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n|$, то в силу (35.51) имеем

$$|s^{**}_m| \leqslant \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{35.53}$$

Используя (35.52) и (35.53), получим при $m \geqslant m_\varepsilon$,

$$|s - s^*_m| = |s - (s_{n_\varepsilon} + s^{**}_m)| \leqslant |s - s_{n_\varepsilon}| + |s^{**}_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} u^*_m = s. \ \square$$

Теорема 14. *Если ряд* (35.46) *абсолютно сходится и c — какое-либо число, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ также абсолютно сходится.*

Это следует из критерия Коши сходимости рядов и равенства

$$\sum_{k=n}^{n+p} |cu_k| = |c| \sum_{k=n}^{n+p} |u_k|.$$

Теорема 15. *Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся, то их сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ также абсолютно сходится.*

Это следует из критерия Коши сходимости рядов и из неравенства

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k+v_k| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k| + \sum_{k=n}^{n+p} |v_k|.$$

Теорема 16. *Если ряды*

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{35.54}$$

абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $u_m v_n$ членов этих рядов, расположенных в произвольном порядке, также абсолютно сходится. Если сумма этого ряда равна s, а суммы рядов (35.54) *равны соответственно s' и s'', т. е.*

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = s', \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = s'',$$

то

$$s = s's''. \tag{35.55}$$

Доказательство. Образуем следующую таблицу попарных произведений членов рядов (35.54):

u_1v_1	u_1v_2	...	u_1v_n	...
u_2v_1	u_2v_2	...	u_2v_n	...
...	...	...	...	...
u_mv_1	u_mv_2	...	u_mv_n	...
...	...	...	...	...

Составим из элементов этой таблицы ряд

$$u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1 + \ldots, \tag{35.56}$$

в котором ее элементы расположены в порядке, показанном на нижеследующей схеме, где на месте каждого произведения из таблицы указан его порядковый номер как члена ряда (35.56):

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

Докажем, что ряд (35.56) абсолютно сходится, т. е. что сходится ряд

$$|u_1v_1|+|u_1v_2|+|u_2v_2|+|u_2v_1|+\ldots \tag{35.57}$$

Для этого в силу неотрицательности его членов достаточно доказать, что существует по крайней мере одна ограниченная сверху подпоследовательность его частичных сумм (см. лемму 2 в п. 35.4)

Обозначим через $\tilde{s}'_n$ и $\tilde{s}''_n$ частичные суммы соответственно рядов

$$\tilde{s}' \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} |u_m|, \quad \tilde{s}'' \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |v_n|,$$

которые в силу абсолютной сходимости рядов (35.54) сходятся, т. е. $0 \leqslant \tilde{s}' < +\infty$, $0 \leqslant \tilde{s}'' < +\infty$. Тогда для частичных сумм порядка n^2 ряда (35.57) будем иметь

$$\tilde{s}_1 = |u_1v_1| = \tilde{s}_1\tilde{s}''_1 \leqslant \tilde{s}'\tilde{s}'',$$

$$\tilde{s}_4 = |u_1v_1|+|u_1v_2|+|u_2v_2|+|u_2v_1| =$$
$$= (|u_1|+|u_2|)(|v_1|+|v_2|) = \tilde{s}'_2\tilde{s}''_2 \leqslant \tilde{s}'\tilde{s}'',$$

. . . .

$$\tilde{s}_{n^2} = |u_1v_1|+\ldots+|u_1v_n|+\ldots+|u_nv_n|+\ldots+|u_nv_1| =$$
$$= (|u_1|+\ldots+|u_n|)(|v_1|+\ldots+|v_n|) = \tilde{s}'_n\tilde{s}''_n \leqslant \tilde{s}'\tilde{s}'',$$

. . . .

Итак, подпоследовательность частичных сумм $\{\tilde{s}_{n^2}\}$ ряда (35.57) ограничена сверху, и, следовательно, этот ряд сходится. Это означает абсолютную сходимость ряда (35.56) и любого ряда, полученного произвольной перестановкой его членов (см. теорему 13). Таким образом, любой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{m_k}v_{n_k}, \tag{35.58}$$

составленный из всевозможных попарных произведений u_mv_n членов рядов (35.54), сходится и притом абсолютно.

Для доказательства формулы (35.55) воспользуемся тем, что сумма ряда (35.58) не зависит от порядка его членов и снова расположим их наиболее удобным для нас способом; именно, рассмотрим снова ряд (35.56). Обозначая через s'_n и s''_n частичные суммы рядов (35.54), для частичных сумм s_{n^2}, $n=1, 2, \ldots$, ряда (35.56), очевидно, получаем

$$s_{n^2} = s'_n s''_n. \tag{35.59}$$

Но

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = s', \quad \lim_{n\to\infty} s''_n = s'', \quad \lim_{n\to\infty} s_{n^2} = s,$$

поэтому, переходя к пределу в равенстве (35.59) при $n \to \infty$, получаем равенство (35.55). $\square$

Теоремы 13—16 показывают, что свойства абсолютно сходящихся рядов во многом похожи на свойства конечных сумм: величина суммы такого ряда не зависит от порядка слагаемых, абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно и т. п. В следующем пункте будет доказано, что для сходящихся рядов, не сходящихся абсолютно, эти свойства не имеют места.

Замечание. В заключение этого пункта подчеркнем, что, когда члены ряда комплексные или действительные, но меняющие знак, вопрос о сходимости этого ряда нельзя решить только с помощью определения порядка убывания n-го члена. Например, n-е члены рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ имеют одинаковый порядок при $n\to\infty$, однако первый ряд расходится, а второй сходится.

Более того, нетрудно привести пример двух рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$, n-е члены которых эквивалентны ($u_n\sim v_n$, $n=1, 2, \ldots,$), из которых один сходится, а другой расходится.

В качестве таких рядов можно взять, например, ряд с n-м членом

$$u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

и ряд с n-м членом

$$v_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

С одной стороны, здесь $u_n\sim v_n$, $n=1, 2, \ldots,$ ибо

$$\frac{v_n}{u_n}=\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}=1+\frac{(-1)^{n+1}n}{(n+1)\ln(n+1)},$$

и потому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1.$$

С другой стороны, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ есть ряд вида (35.37), поэтому он сходится. Ряд же $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ расходится. В самом деле, если бы он сходился, то сходился бы и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(v_n-u_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)},$$

т. е. ряд (35.29), который, как мы видели, расходится.

Было бы ошибкой, однако, считать, что метод выделения главной части годится лишь в случае рядов с действительными членами, имеющими один и тот же знак. Метод выделения главной части может с успехом применяться для выяснения сходимости любых рядов. Суть этого метода в рассматриваемом случае основана на следующем замечании: пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Если представить его члены в виде $u_n = v_n + w_n$, где ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ (почему)? В силу этого для исследования сходимости ряда $\sum\limits_{v=1}^{\infty} u_n$ целесообразно попытаться представить его члены, например, в виде $u_n = v_n + w_n$, так чтобы $w_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ при $\alpha > 1$. Тогда поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится (и даже абсолютно), то сходимость данного ряда сводится к исследованию сходимости ряда $\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty} v_n$. Этот прием, конечно, целесообразен в том случае, если получившийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ проще поддается исследованию на сходимость, чем данный ряд (ср. с аналогичным исследованием сходимости интегралов в п. 33.6).

Примеры. 1. Рассмотрим ряд с общим членом $u_n = \frac{(-1)^n n^2 + \ln^2 n}{n^2 \ln n}$, $n = 2, 3, \ldots$. Беря $v_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$, а $w_n = \frac{\ln n}{n^2}$, получаем, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$ сходится, ибо ряд из главных частей $\sum\limits_{n=2}^{\infty} v_n$ сходится по признаку Лейбница, а для «остатков» имеем, например,

$$w_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

откуда следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} w_n$.

2. Рассмотрим ряд с общим членом $u_n = \ln\left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right]$.

Поскольку (см. замечание в п. 13.3)

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+O(x^3), \text{ то } u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Положим $v_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}$ и $w_n=u_n-v_n$. Тогда $w_n=O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится как ряд, являющийся разностью сходящегося (согласно признаку Лейбница) ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ и расходящегося $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ (отличающегося от гармонического ряда лишь множителем 1/2). Ряд же $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$, согласно теореме 9, абсолютно сходится.

Таким образом, данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, хотя его «главная часть» $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ и представляет собой сходящийся ряд. Тем самым эти ряды дают еще один пример двух рядов, члены которых образуют эквивалентные последовательности и из которых один сходится, а другой расходится.

35.11. ПРИЗНАКИ ДАЛАМБЕРА И КОШИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Если в случае числового ряда (35.1) $u_n \neq 0$, $u_n \in C$, $n=1, 2, \ldots$, существует такое q, $0<q<1$, и такой номер n_0, что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\leq q \quad \text{или} \quad \sqrt[n]{|u_n|}\leq q,$$

то согласно признаку Даламбера, соответственно Коши (см. п. 35.6) данный ряд сходится и притом абсолютно.

Если же существует такой номер n_0, что для всех $n \geq n_0$ имеет место неравенство

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\geq 1 \tag{35.60}$$

или

$$\sqrt[n]{|u_n|}\geq 1, \tag{35.61}$$

то по признакам Даламбера и Коши можно лишь утверждать, что в этом случае ряд из абсолютных величин членов ряда (35.1), т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ расходится, что лишь означает, что заданный ряд не сходится абсолютно.

На самом деле из (35.60) и из (35.61) следует, что данный ряд (35.1) вообще расходится. Действительно, как видно из доказательства признака Даламбера, соответственно признака Коши, применительно к ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ (см. теоремы 8 и 9 в п. 35.6) при выполнении каждого из условий (35.60) и (35.61) в отдельности последовательность $\{|u_n|\}$ не стремится к нулю, следовательно не стремится к нулю и последовательность $\{u_n\}$, т. е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда.

Полученные признаки расходимости ряда также обычно называются *признаками Даламбера и Коши.*

35.12. СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ, НЕ СХОДЯЩИЕСЯ АБСОЛЮТНО. ТЕОРЕМА РИМАНА

Если ряд сходится, но не абсолютно, то, как ниже будет показано, уже нельзя утверждать, что, переставив его члены в другом порядке, получим сходящийся к той же сумме ряд. Парадокс в конце п. 35.9 и объясняется этим обстоятельством: получившийся там ряд (35.45) отличается порядком членов от данного сходящегося, но не абсолютно, ряда (35.42), и потому нельзя было утверждать, что его сумма также равна S. Более того, получившееся противоречие показывает, что это заведомо не так.

Итак, сумма ряда зависит от порядка слагаемых, т. е. коммутативный закон сложения не имеет места для неабсолютно сходящихся рядов.

Если в данном ряде сгруппировать каким-либо образом его члены, не нарушая их порядка, и сложить, то последовательность частичных сумм получившегося ряда будет являться подпоследовательностью частичных сумм исходного ряда. Поэтому, если исходный ряд сходится, то будет сходиться и вновь полученный, причем суммы обоих рядов будут одинаковы. Однако, если данный ряд расходится, то второй ряд может сходиться. Например, ряд $1-1+1-1+1-1+\ldots$ расходится. Объединив же попарно его члены: $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$, получим сходящийся ряд. Таким образом, вообще говоря, для рядов неверен и ассоциативный закон сложения.

Рассмотрим некоторые свойства сходящихся, но не абсолютно, рядов с действительными членами. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \qquad (35.62)$$

Обозначим через u_1^+, u_2^+, ..., u_n^+, ... его неотрицательные члены: $u_n^+ \geqslant 0$, а через $-u_1^-$, $-u_2^-$, ..., $-u_n^-$, ... его отрицательные члены: $u_n^- > 0$, взятые в том же порядке, в каком они расположены в ряде (35.56). Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+, \tag{35.63}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-. \tag{35.64}$$

Отметим, что если ряд (35.63) содержит лишь конечное число членов, отличных от нуля, или ряд (35.64), все члены которого по определению отличны от нуля, состоит лишь из конечного числа членов, то начиная с некоторого номера, все члены исходного ряда (35.62) имеют один и тот же знак, и, следовательно, его сходимость равносильна абсолютной сходимости.

Лемма 3. *Если ряд* (35.62) *сходится, но не абсолютно, то оба ряда* (35.63) *и* (35.64) *расходятся.*

Доказательство. Пусть ряд (35.62) сходится, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} s_n, \tag{35.65}$$

где s_n — его частичные суммы, $n=1, 2, \ldots$ Обозначим через s_m^+, $m=1, 2, \ldots$ частичную сумму порядка m ряда (35.63), а через s_k^-, $k=1, 2, \ldots$, — частичную сумму порядка k ряда (35.64). Для удобства положим еще $s_0^+=s_0^-=0$. Тогда для любого натурального n существуют такие неотрицательные целые $m=m(n)$ и $k=k(n)$, что

$$s_n = s_m^+ - s_k^-, \quad n = m + k; \tag{35.66}$$

при этом поскольку ряд (35.62) сходится не абсолютно, то оба ряда (35.63) и (35.64) содержат бесконечно много членов, отличных от нуля, и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} m(n) = \lim_{n\to\infty} k(n) = +\infty \tag{35.67}$$

Обозначим теперь через $\tilde{s}_n$ частичную сумму порядка n ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{35.68}$$

Тогда, очевидно,

$$\tilde{s}_n = s_m^+ + s_k^-. \tag{35.69}$$

Поскольку данный ряд (35.62) не сходится абсолютно, т. е. поскольку расходится ряд (35.68), то

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{s}_n = +\infty. \tag{35.70}$$

Оба слагаемых правой части равенства (35.69) неотрицательны, поэтому из (35.70) и (35.67) следует, что хоть одно из указанных слагаемых стремится к бесконечности, когда $n \to \infty$. Возвращаясь теперь к равенству (35.66), видим что левая часть этого равенства имеет конечный предел (см. (35.65)), а одна из сумм s_m^+ и s_k^-, по доказанному, стремится к бесконечности при $n \to \infty$. Это возможно лишь при условии, что вторая из рассматриваемых сумм также стремится к бесконечности при $n \to \infty$.

Итак, оба ряда (35.63) и (35.64) расходятся. ☐

Теорема 17 (Риман). *Если ряд* (35.62) *сходится, но не абсолютно, то, каково бы ни было число A, можно так переставить члены этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равной A.*

Доказательство. Снова рассмотрим ряды (35.63) и (35.64). Согласно лемме,

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^+ = +\infty, \tag{35.71}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^- = +\infty. \tag{35.72}$$

Пусть для определенности $A \geqslant 0$. Выберем число n_1 так, чтобы

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{n_1}^+ > A, \tag{35.73}$$

причем в случае, когда номер $n_1 = 1$ не удовлетворяет этому условию, выбор n_1 произведем еще таким образом, чтобы при этом выполнялось также и неравенство

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{n_1-1}^+ \leqslant A. \tag{35.74}$$

Существование номеров n_1, для которых выполняется условие (35.73), следует из условия (35.71); для того, чтобы при этом выполнялось и условие (35.74), надо взять наименьший из этих номеров n_1.

Далее, выберем из ряда (35.64) n_2 первых членов так, чтобы

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- < A,$$

причем в случае, когда номер $n_2 = 1$ не удовлетворяет этому условию, то выбор n_2 произведем таким образом, чтобы при этом выполнялось еще и неравенство

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1-1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2-1}^- \geqslant A.$$

Существование такого номера n_2 доказывается, исходя из (35.72), аналогично существованию номера n_1.

Снова выберем подряд из ряда (35.63) члены до некоторого номера n_3 так, чтобы выполнялось неравенство

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots + u_{n_3}^+ > A$$

и (при $n_3 > n_1 + 1$) — неравенство

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots + u_{n_3-1}^+ \leqslant A.$$

Продолжая этот процесс дальше, получим ряд

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots + u_{n_3}^+ - \\ - u_{n_2+1}^- - \ldots - u_{n_4}^- + \ldots \qquad (35.75)$$

Для последовательности его частичных сумм

$$s_{n_1},\ s_{n_1+n_2},\ s_{n_2+n_3},\ \ldots,\ s_{n_k+n_{k+1}},\ \ldots,\ k=1,\ 2,\ \ldots,$$

в силу построения выполняются неравенства

$$s_{n_1} > A,\ s_{n_1+n_2} < A,\ s_{n_2+n_3} > A,\ \ldots,$$

причем отклонение от числа A каждой из указанных частичных сумм $s_{n_k+n_{k+1}}$ не превышает ее последнего члена:

$$|A - s_{n_k+n_{k+1}}| \leqslant u_{n_{k+1}}^{\pm}. \qquad (35.76)$$

Здесь через $u_{n_{k+1}}^{\pm}$ обозначена абсолютная величина члена ряда (35.75) с номером n_{k+1}, наверху у него в ряде (35.75) стоит индекс «+» или «—».

В силу сходимости исходного ряда (35.62) имеем

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

и так как при $k \to \infty$ номер члена $u_{n_{k+1}}^{\pm}$ в ряде (35.62) также стремится к ∞, то

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_{k+1}}^{\pm} = 0.$$

Поэтому из (35.76) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} s_{n_k+n_{k+1}} = A. \qquad (35.77)$$

Если теперь взять любую частичную сумму s_n ряда (35.75), то в силу конструкции этого ряда всегда можно найти такой номер $k = k(n)$, что будет иметь место либо неравенство

$$s_{n_k+n_{k+1}} \leqslant s_n \leqslant s_{n_{k+1}+n_{k+2}},$$

либо неравенство

$$s_{n_k+n_{k+1}} \geqslant s_n \geqslant s_{n_{k+1}+n_{k+2}},$$

а потому из (35.77) следует, что и

$$\lim_{n\to\infty} s_n = A. \ \square$$

Упражнение 12. Доказать, что если ряд (35.62) сходится, но не абсолютно, то можно так переставить его члены, что полученный ряд будет расходиться. В частности, можно сделать так, чтобы его сумма равнялась $+\infty$, $-\infty$, а также и так, чтобы последовательность его частичных сумм не имела бы ни конечного, ни бесконечного предела.

35.13. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АБЕЛЯ. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ И АБЕЛЯ

В этом пункте будут доказаны достаточные признаки сходимости числовых рядов, пригодные и для рядов с комплексными членами.

Предварительно рассмотрим одно преобразование сумм вида

$$S = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n, \tag{35.78}$$

где a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — комплексные числа. Положим

$$B_1 = b_1, \ B_2 = b_1 + b_2, \ \ldots, \ B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

тогда

$$b_1 = B_1, \ b_2 = B_2 - B_1, \ \ldots, \ b_n = B_n - B_{n-1}$$

и

$$S = a_1B_1 + a_2(B_2 - B_1) + \ldots + a_n(B_n - B_{n-1}).$$

Раскрыв скобки и группируя по-новому члены, получим равенство

$$S = (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_nB_n.$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1})B_i + a_nB_n. \tag{35.79}$$

Это преобразование сумм вида (35.78) называется *преобразованием Абеля* *); оно является в известном смысле аналогом интегрирования по частям. Эта аналогия особенно бросается в глаза, если формулу (35.79) записать в виде

$$\sum_{i=2}^{n} a_i(B_i - B_{i-1}) = (a_nB_n - a_1B_1) - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)B_i.$$

Докажем с помощью преобразования Абеля лемму.

Лемма 4 (неравенство Абеля). *Если*

$$a_i \geqslant a_{i+1}, \ i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{35.80}$$

или

$$a_i \leqslant a_{i+1}, \ i = 1, 2, \ldots, n-1 \ ^{**)} \tag{35.81}$$

и

$$|b_1 + \ldots + b_i| \leqslant B, \ b_i \in C, \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{35.82}$$

то

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right| \leqslant B(|a_1| + 2|a_n|). \tag{35.83}$$

---

*) Н. Абель (1802—1829) — норвежский математик.

**) Из этих неравенств следует, что числа a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, действительны.

Действительно, согласно условиям (35.80) или (37.81), все разности $a_i - a_{i+1}$ в формуле (35.79) одного знака, и поэтому в силу формулы (35.79) и условия (35.82) имеем:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}|\,|B_i| + |a_n|\,|B_n| \leqslant$$

$$\leqslant B\left[\left|\sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1})\right| + |a_n|\right] = B[|a_1 - a_n| + |a_n|] \leqslant B[|a_1| + 2|a_n|]. \square$$

Существенно обратить внимание на то, что в неравенстве Абеля оценка рассматриваемой суммы дается через первый и последний ее члены и не зависит от числа слагаемых в этой сумме.

Теорема 18 (признак Дирихле). *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{35.84}$$

такой, что последовательность $\{a_n\}$ *монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм* $\{B_n\}$ *ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n \in \boldsymbol{C}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ограничена, тогда ряд (35.78) *сходится.*

Доказательство. В силу ограниченности последовательности $\{B_n\}$ существует такое число $B > 0$, что $|B_n| \leqslant B$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что для любого $n = 2, 3, \ldots$ и любого целого $p \geqslant 0$

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p} b_i\right| = |B_{n+p} - B_{n-1}| \leqslant |B_{n+p}| + |B_{n-1}| \leqslant 2B \tag{35.85}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ следует существование такого номера n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}. \tag{35.86}$$

Теперь, применив неравенство Абеля (35.83) к сумме $\sum\limits_{i=n}^{n+p} a_i b_i$, где $n \geqslant n_\varepsilon$, и приняв во внимание неравенства (35.85) и (35.86), получим:

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p} a_i b_i\right| \leqslant 2B\,(|a_n| + 2\,|a_{n+p}|) < \varepsilon,$$

отсюда, согласно критерию Коши, и следует, что ряд (35.84) сходится. □

В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}. \tag{35.87}$$

Прежде всего, если $\alpha \neq 2\pi m$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin k\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

и поэтому

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

Если же $\alpha = 2\pi m$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то все члены сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\alpha$ равны нулю, поэтому эти суммы при любом n равны нулю и, следовательно, ограничены. Таким образом при всех α суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\alpha$ ограничены.

С другой стороны, последовательность $\{1/n\}$ монотонно убывает и стремится к нулю, поэтому по признаку Дирихле ряд (35.87) сходится при любом α.

Заметим, что признак Лейбница (см. п. 35.9) следует из признака Дирихле. Действительно, если в ряде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \tag{35.88}$$

где $a_n \geq a_{n+1} > 0$, положить $b_n = (-1)^n$, то, очевидно, суммы $b_1 + \ldots + b_n$, $n=1, 2, \ldots$, равны нулю или единице и потому ограничены и, значит, по признаку Дирихле ряд (35.88) сходится.

Из неравенства Абеля (35.83) можно получить еще один признак сходимости ряда.

Теорема 19 (признак Абеля). *Если последовательность* $\{a_n\}$ *монотонна и ограничена, а ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n \in C$, $n=1, 2, \ldots$, *сходится, то ряд* (35.78) *также сходится.*

Доказательство. В силу ограниченности последовательности $\{a_n\}$ существует такое число $M>0$, что для всех $n=1$, $2, \ldots$ выполняется неравенство $|a_n| \leqslant M$.

Пусть теперь задано $\varepsilon>0$. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует существование такого номера n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех целых $p \geqslant 0$ выполняется неравенство $\left|\sum_{k=0}^{p} b_{n+k}\right| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Поэтому для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех целых $p \geqslant 0$, согласно лемме 4, справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=0}^{p} a_{n+k} b_{n+k}\right| < \frac{\varepsilon}{3M}(|a_n| + 2|a_{n+p}|) < \varepsilon.$$

В силу критерия Коши сходимости рядов это означает, что ряд (35.84) сходится. □

Пример. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \cos \frac{\pi}{n}}{\ln \ln n}. \tag{35.89}$$

Заметим, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln \ln n}$ сходится согласно признаку Дирихле: последовательность $\frac{1}{\ln \ln n}$ монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \sin n\alpha$ ограничена (см. предыдущий пример). Последовательность же $\cos \frac{\pi}{n}$, $n=2$, $3, \ldots$, монотоннна, поэтому по признаку Абеля ряд (35.89) сходится при всех α.

35.14*. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОСТАТКОВ СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ И РОСТА ЧАСТИЧНЫХ СУММ НЕКОТОРЫХ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

Подобно несобственным интегралам для рядов бывает нужно выяснить не только вопрос об их сходимости, но в случае сходимости ряда оценить ее скорость, а в случае расходимости выяснить характер поведения его частичных сумм при возрастании их номера.

В случае рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

где f — неотрицательная убывающая функция, на подобные вопросы иногда удается получить ответы с помощью метода, примененного при доказательстве интегрального признака сходимости рядов (см. п. 35.7). Действительно, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, а следовательно, сходится и интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$, то, обозначив, как обычно, через r_n остаток рассматриваемого ряда, получим неравенство

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_{n}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{35.90}$$

Это и есть искомая оценка остатка ряда, показывающая, что при $n \to \infty$ этот остаток убывает не медленнее, чем интеграл $\int\limits_n^{+\infty} f(x)dx$.

Аналогично получается и оценка снизу для остатка ряда:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \geqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx = \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{35.91}$$

Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится, а следовательно, расходится и интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$, то, заметив, что

$$0 \leqslant f(k) - \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k) - f(k+1)$$

и просуммировав эти неравенства по k от 1 до n, получим:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(1) - f(n+1) < f(1).$$

Из приведенных неравенств следует, что последовательность

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

монотонно возрастает и ограничена сверху, а потому стремится к конечному пределу. Иначе говоря, существует такая постоянная c, что

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx\right] = c. \tag{35.92}$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx + c + \varepsilon_n, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{35.93}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Оно показывает, что с точностью до бесконечно малой последовательности частные суммы расходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ растут так же, как $\int\limits_{1}^{n+1} f(x)\,dx + c$, где c — некоторая постоянная.

Примеры. 1. Рассмотрим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{1}{n}$, который полагая $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geqslant 1$, запишем в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Функция $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geqslant 1$, удовлетворяет условиям теоремы 10, и поскольку $\int\limits_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$, то из доказанного следует, что существует такая постоянная C, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln(n+1) + C + \varepsilon_n, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

где $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Эта постоянная C называется *постоянной Эйлера*. Замечая, что $\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 0$ при $n \to \infty$, в полученной формуле можно заменить $\ln(n+1)$ на $\ln n$ (при этом, конечно, изменится и последовательность ε_n, но она останется бесконечно малой последовательностью):

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots. \tag{35.94}$$

Любопытно заметить, что до сих пор не удается выяснить природу эйлеровой постоянной в том смысле, что неизвестно даже, является ли она рациональным числом или нет.

Из формулы (35.94) очевидно следует асимптотическое равенство

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\sim\ln n,\quad n\to\infty.$$

2. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, $0<\alpha<1$.

В этом случае возьмем функцию $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$, $x\geqslant 1$, тогда

$$\int\limits_1^{n+1}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.$$

Из (35.92) и (35.93) для данного случая следует, что существует такая постоянная c_α, что

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}=\frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}+c_\alpha+\varepsilon_n,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. Отсюда получаем асимптотическое равенство

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}\sim\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

3. Рассмотрим сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha>1$.

Взяв снова в качестве функции f функцию $1/x^\alpha$ и замечая, что

$$\int\limits_n^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}$$

в силу формул (35.90) и (35.91) получим:

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\leqslant\frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}},$$

откуда

$$r_n=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\sim\frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}.$$

4. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.\tag{35.95}$$

Оценим его остаток:

$$0 \leqslant r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)^2 n!} < \frac{1}{n!n}.$$

В дальнейшем будет показано, что сумма ряда (35.95) равна числу e (см. (37.40) в п. 37.6). Следовательно, если s_n — частичная сумма ряда (35.95) порядка n, то $e = s_n + r_n$, $r_n \geqslant 0$, откуда

$$0 \leqslant e - s_n < \frac{1}{n!n}.$$

Таким образом, число e можно приближенно вычислять в виде суммы

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

причем полученная оценка указывает точность получающихся приближений.

35.15. О СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ МЕТОДОМ СРЕДНИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ

Иногда представляет интерес изучение расходящихся рядов т. е. рядов, частичные суммы которых не стремятся к конечному пределу. Как мы уже видели, подобные ряды дают возможность получать асимптотические формулы (см. п. 35.14*, а также п. 37.10*). Изучение расходящихся рядов целесообразно, в частности, в том случае, когда для них удается определить надлежащим способом понятие суммы. Различные методы определения сумм рядов называются *методами суммирования рядов*. Метод суммирования ряда называется регулярным, если для сходящегося ряда его сумма, определенная по этому методу, совпадает с обычной его суммой (в этом случае говорят: регулярный метод суммирует сходящийся ряд к его сумме).

Рассмотрим так называемый метод суммирования ряда средними арифметическими его частичных сумм. Пусть дан ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

и пусть

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

— последовательность его частичных сумм. Обозначим через σ_n среднее арифметическое первых n членов этой последовательности

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}.$$

Определение 5. *Ряд называется суммируемым методом средних арифметических к числу σ, если последовательность $\{\sigma_n\}$ средних арифметических его частичных сумм сходится к σ:*

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sigma.$$

Метод суммирования средними арифметическими является регулярным методом суммирования, так как из того, что некоторая последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, следует, что последовательность, составленная из средних арифметических первых ее n членов

$$\left\{\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

имеет тот же предел (см. пример 5 в п. 3.1).

С другой стороны существуют расходящиеся ряды, которые суммируются методом средних арифметических. Таким примером является ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{35.96}$$

В этом случае $s_{2k} = 0$, $s_{2k-1} = 1$, $\sigma_{2k} = \frac{1}{2}$, $\sigma_{2k-1} = \frac{k}{2k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$, т. е. ряд (35.96) суммируется методом средних арифметических.

С применением суммирования рядов методом средних арифметических мы встретимся в п. 55.6.

Упражнения. Исследовать сходимость и абсолютную сходимость следующих рядов:

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{-n}}{n^3+1}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n \ln n}{n^2}$.

16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$.

22. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$.

23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n-1}{n+1}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\right]$.

25. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}\right]$.

Задача 23 (признак Дю Буа Реймона*) сходимости ряда). Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ (a_n и b_n — комплексные числа) сходится, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ абсолютно сходится.

Задача 24 (признак Дедекинда сходимости ряда). Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ (a_n и b_n — комплексные числа) сходится, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ абсолютно сходится, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ и частные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ ограничены.

§ 36. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

36.1. СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЯДОВ

В настоящем параграфе будут рассматриваться последовательности и ряды, членами которых являются некоторые, вообще говоря, комплекснозначные функции, т. е. последовательности

$$f_n(x)\in C,\quad n=1,\ 2\ \ldots \tag{36.1}$$

и соответственно ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),\quad u_n(x)\in C,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{36.2}$$

При каждом фиксированном значении аргумента x эти последовательности и ряды, очевидно, представляют собой уже рассматривавшиеся числовые последовательности и ряды.

Пусть E — некоторое множество элементов, в частности множество точек прямой, плоскости n-мерного пространства или вообще элементов произвольной природы, и пусть (36.1) — последовательность функций, которые определены на множестве E и значениями которых являются, вообще говоря, комплексные числа.

*) П. Дю Буа Реймон (1831—1889) — немецкий математик.

Определение 1. *Последовательность* (36.1) *называется ограниченной на множестве E, если существует такая постоянная $M>0$, что для всех $x \in E$ и всех $n=1, 2, \ldots$ выполняются неравенства*

$$|f_n(x)| \leqslant M.$$

(Иногда в этом случае последовательность (36.1) называется также *равномерно ограниченной*.)

Определение 2. *Последовательность* (36.1) *называется убывающей* (*возрастающей*) *на множестве E, если для всех $x \in E$ и всех $n=1, 2, \ldots$ выполняются неравенства*

$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$$

(*соответственно, если для всех $x \in E$ и всех $n=1, 2, \ldots$ выполняются неравенства*

$$f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)).$$

Это определение, очевидно, предполагает, что функции $f_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, принимают действительные значения.

Определение 3. *Последовательность* (36.1) *называется сходящейся в точке**) $x_0 \in E$, *если числовая последовательность* $\{f_n(x_0)\}$ *сходится.*

Последовательность (36.1) *называется сходящейся на множестве E, если она сходится в каждой точке множества E.*

Если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in E$, *то говорят, что последовательность* (36.1) *сходится к функции* $f(x)$, $x \in E$.

Аналогичное определение можно дать и для ряда (36.2).

Определение 3′. *Ряд* (36.2) *называется сходящимся в точке* $x_0 \in E$, *если сходится числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Ряд (36.2) *называется сходящимся на множестве E, если он сходится в каждой точке этого множества.*

Определение 4. *Ряд* (36.2) *называется абсолютно сходящимся на множестве E, если на множестве E сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

Подобно случаю числовых рядов, сумма

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \qquad n=1, 2, \ldots,$$

называется n-й *частичной суммой* ряда (36.2); предел частичных сумм сходящегося на множестве E ряда (36.2) называется его

*) Мы называем элементы множества E точками.

суммой $s(x)$:

$$s(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x).$$

Ряд

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \tag{36.3}$$

называется n-м *остатком ряда* (36.2). Остаток ряда сходится на E тогда и только тогда, когда на E сходится сам ряд (36.2). Если в этом случае сумму остатка ряда обозначить через $r_n(x)$, то

$$s(x)=s_n(x)+r_n(x).$$

Как и в случае числовых рядов, согласно определению, каждый функциональный ряд является парой последовательностей $\{u_n(x)\}$ и $\{s_n(x)\}$, где $u_n(x)$ — его члены, а $s_n(x)$ — частичные суммы:

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x),\quad n=1,\ 2\ldots.$$

При этом для каждой функциональной последовательности (36.1) существует ряд (36.2), для которого она является последовательностью его частичных сумм. Члены этого ряда определяются однозначно:

$$u_1(x)=f_1(x),\quad u_n(x)=f_n(x)-f_{n-1}(x),\quad n=2,\ 3\ldots.$$

Это обстоятельство дает возможность перефразировать всякую теорему, доказанную для функциональных рядов, в соответствующую теорему для функциональных последовательностей, и наоборот. Мы неоднократно будем использовать это обстоятельство.

Примеры. 1. Пусть дан ряд

$$1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots, \tag{36.4}$$

z — комплексное число. Исследуем его абсолютную сходимость, т. е. сходимость ряда с n-м членом $u_n=\frac{|z|^n}{n!}$. Применив признак Даламбера, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{n+1}=0$$

при любом комплексном z. Таким образом, ряд (36.4) абсолютно, а значит, и просто сходится при любом комплексном z, или, как обычно говорят, на всей комплексной плоскости.

2. Изучим сходимость ряда

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\ldots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\ldots, \tag{36.5}$$

x — вещественное число. Этот ряд сходится при всех x. Действительно, если $x \neq 0$, то мы имеем сумму геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \frac{1}{1+x^2}, \quad 0 < q < 1.$$

И в этом случае сумма $s(x)$ ряда (36.5) легко вычисляется:

$$s(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Если же $x = 0$, то все члены ряда (36.5) равны нулю, поэтому он, очевидно, сходится и $s(0) = 0$.

Таким образом,

$$(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x = 0, \\ 1 + x^2 & \text{для } x \neq 0. \end{cases}$$

График функции $s(x)$ изображен на рис. 136.

Как видно, несмотря на то, что все члены ряда (36.5) являются непрерывными функциями и ряд сходится во всех точках действительной оси, его сумма является разрывной функцией. Следовательно, в случае сходящихся рядов (36.2), членами которых являются непрерывные действительные функции $u_n(x)$, их сумма $s(x)$, вообще говоря, не является непрерывной, т. е.

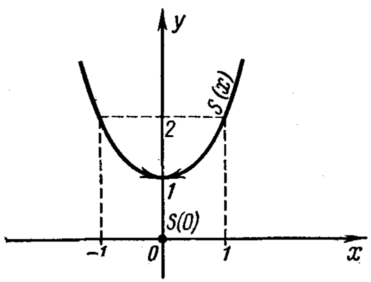


Рис. 136

$$\lim_{x \to x_0} s(x) \neq s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

или, что то же,

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u(x) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x).$$

Таким образом, предел суммы бесконечного числа слагаемых не обязательно равен сумме их пределов.

Рассмотренный ряд (36.5) показывает, как при предельных процессах (геометрическая прогрессия) из простых непрерывных функций возникают функции значительно более сложной природы — разрывные функции.

В дальнейшем мы выясним условия, при которых можно гарантировать непрерывность суммы сходящегося ряда непрерывных функций.

Упражнения. Исследовать сходимость и абсолютную сходимость рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^2}$

36.2. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Определение 5. *Пусть заданы последовательность функций* (36.1) *и функция* f, *определенные на множестве* E. *Будем говорить, что указанная последовательность сходится к функции* f *равномерно на множестве* E, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* n_ε, *что если* $n \geqslant n_\varepsilon$, *то для всех* $x \in E$ *выполняется неравенство*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{36.6}$$

Последовательность (36.1) *называется равномерно сходящейся на множестве* E, *если существует функция* f, *к которой она равномерно сходится на* E.

Очевидно, что если последовательность (36.1) равномерно сходится к функции f на множестве E, то она и просто сходится к этой функции на E.

Если последовательность $\{f_n\}$ сходится на множестве E к функции f, то мы будем символически записывать это следующим образом:

$$f_n \xrightarrow[E]{} f.$$

Если же эта последовательность равномерно сходится на E к функции f, то будем писать

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f.$$

Заметим, что если последовательность (36.1) просто сходится к функции f на множестве E, то это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $x \in E$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon; x)$, зависящий как от ε, так и от x, такой, что для всех номеров $n \geqslant n_0$ имеет место неравенство (36.6).

Сущность равномерной сходимости последовательности функций состоит в том, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такой номер n_ε, зависящий только от заданного ε и не зависящий от выбора точки $x \in E$, что при $n \geqslant n_\varepsilon$ неравенство (36.6) будет выполняться всюду на множестве E, т. е. «графики» функций f_n будут расположены в «ε-полоске», окружающей график функции f (рис. 137).

Таким образом, в случае равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n (именно при $n \geqslant n_\varepsilon$) значения функций f_n приближают функцию f с погрешностью, меньшей ε, сразу на всем множестве E.

Запишем для наглядности определения сходящихся и равномерно сходящихся на множестве E последовательностей с помощью символов существования и всеобщности:

$$f_n \xrightarrow[E]{} f \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in E)(\exists n_\varepsilon)(\forall n \geqslant n_\varepsilon) \, | f_n(x) - f(x) | < \varepsilon;$$

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon)(\forall x \in E)(\forall n \geqslant n_\varepsilon) : | f_n(x) - f(x) | < \varepsilon.$$

В этой записи одно определение от другого отличается перестановкой символов $(\forall x \in E)$ и $(\exists n_\varepsilon)$.

Примеры. 1. Последовательность

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n \ldots \tag{36.7}$$

на отрезке $[0, q]$, $0 < q < 1$, сходится равномерно к функции, тождественно равной нулю. Действительно, если $0 \leqslant x \leqslant q$, то

$$0 \leqslant x^n \leqslant q^n, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots \tag{36.8}$$

Поскольку $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$, то для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такое n_ε, что $q^n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$. В силу неравенства (36.8) $0 \leqslant x^n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in [0, q]$.

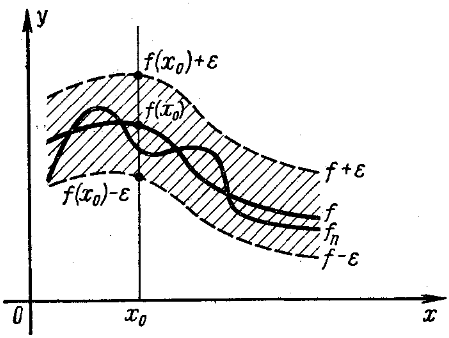


Рис. 137

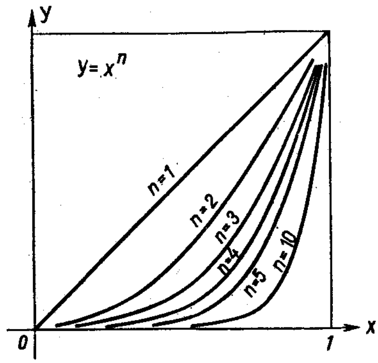


Рис. 138

2. Та же последовательность (36.7) на полуинтервале $[0, 1)$ также, очевидно, сходится к функции, тождественно равной нулю: $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = 0$, $0 \leqslant x < 1$. Однако, в этом случае сходимость уже не является равномерной (рис. 138). Действительно, если последовательность x^n, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, равномерно сходилась бы на полуинтервале $[0, 1)$ к некоторой функции, то она и просто сходилась бы к этой функции. В силу этого последовательность (36.7) может равномерно на полуинтервале $[0, 1)$ сходиться

только к функции, равной нулю во всех точках этого полуинтервала.

Заметим, что при любом фиксированном натуральном n $\lim\limits_{x\to 1} x^n = 1$. Следовательно, каково бы ни было ε, $0<\varepsilon<1$, при фиксированном n найдется такое x_ε, $0<x_\varepsilon<1$, что $x_\varepsilon^n \geqslant \varepsilon$, (например, при $x_\varepsilon = \sqrt[n]{\varepsilon}$ будем иметь $x_\varepsilon^n = \varepsilon$). Поэтому при фиксированном ε, $0<\varepsilon<1$, не существует такого номера N, что для всех $n \geqslant N$ и всех $x \in [0, 1)$ будет выполняться неравенство (36.6) при $f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$, $0 \leqslant x < 1$. Более того, какое бы N ни взять, для *каждого* $n \geqslant N$ найдется такое $x \in [0, 1)$, что для него будет выполняться неравенство, противоположное неравенству (36.6), т. е.

$$|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$$

(в качестве конкретного x здесь можно взять, например, x_ε).

Итак, неравномерная сходимость последовательности (36.7) на полуинтервале $[0, 1)$ доказана. Заметим, что из проведенных рассуждений следует, что последовательность (36.7) не сходится равномерно и на любом интервале вида $(r, 1)$, где $0 \leqslant r < 1$, в частности, на интервале $(0, 1)$.

Следует обратить внимание на то, что если последовательность функций $f_n(x)$, определенных на множестве E, не сходится равномерно на некотором его подмножестве $E_0 \subset E$, то она заведомо не сходится равномерно и на самом множестве E: если условия определения 1 не выполняются для всех точек $x \in E_0$, то они заведомо не выполняются и для всех точек множества E. Вместе с тем, если последовательность функций равномерно сходится на некотором множестве, то она и подавно равномерно сходится на каждом его подмножестве.

Отсюда следует, например, что последовательность (36.7), сходящаяся на отрезке $[0, 1]$ к функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 \text{ при } x = 1 \end{cases}$$

не сходится на нем равномерно, ибо она уже не сходится равномерно на полуинтервале $[0, 1)$.

Перейдем к описанию критериев равномерной сходимости. Для функции f и последовательности функций $\{f_n\}$, заданных на некотором множестве E, будем рассматривать последовательность чисел (конечных или бесконечных)

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.9}$$

принадлежащих, вообще говоря, расширенному множеству действительных чисел $\overline{R}$ (см. п. 2.5), и ее предел (см. п. 3.2).

Если последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве E к функции f, то существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ верхние грани (36.9) конечны. Действительно, если $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$, то согласно определению равномерной сходимости, для любого $\varepsilon > 0$, например, для $\varepsilon = 1$ существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ и всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < 1,$$

а следовательно, и неравенство

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant 1.$$

Поэтому при $n \geqslant n_0$ все верхние грани (36.9) конечны.

Теорема 1. *Последовательность функций $\{f_n\}$, определенных на множестве E, равномерно сходится на этом множестве к функции f в том и только том случае, когда*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{36.10}$$

Следствие. *Для того чтобы последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходилась на множестве E к функции f необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая числовая последовательность $\{a_n\}$,* что

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \quad a_n \geqslant 0, \tag{36.11}$$

и существовал такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ и всех $x \in E$ выполнялось неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n. \tag{36.12}$$

Доказательство теоремы. Если выполнены условия определения 5, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Взяв указанное n_ε для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ будем иметь

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

а это, согласно определению предела числовой последовательности, и означает выполнение условия (36.10).

Обратно, если условие (36.10) выполнено, то по определению конечного предела последовательности элементов из $\boldsymbol{R}$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$ справедливо неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

т. е. выполняются условия определения 5. $\square$

В силу того, что почти все члены последовательности верхних граней (36.9) для равномерно сходящихся последовательностей функций конечны, критерий (36.10) по существу сводит понятие равномерной сходимости функциональной последовательности к понятию сходимости числовой последовательности.

Доказательство следствия. Если $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$, то согласно сказанному выше существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ все верхние грани (36.9) конечны. Поэтому за последовательность $\{a_n\}$ можно взять,

$$a_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|, \quad n = n_0, \ n_0 + 1, \ \ldots,$$

(очевидно $a_n \geqslant 0$), выбрав первые члены, $a_1, \ \ldots, \ a_{n_0-1}$ произвольным образом. Тогда при $n \geqslant n_0$ условие (36.12) выполняется очевидным образом, а в силу (36.10) будем иметь $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Если же существует числовая последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющая условиям (36.11) и (36.12), то в силу (36.12) для любого $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n.$$

Перейдя в нем к пределу при $n \to \infty$, получим согласно (36.11), что

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Выполнение этого условия и означает (см. теорему 1) равномерную сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f на множестве E. $\square$.

Примеры 3. Докажем еще раз с помощью условия (36.10), что последовательность x^n, $n = 1, 2, \ldots$, не сходится равномерно на полуинтервале $[0, 1)$. Поскольку предел указанной последовательности на рассматриваемом полуинтервале равен нулю, то сделанное утверждение сразу следует из очевидного (при любом фиксированном $n = 1, 2, \ldots$) равенства $\sup\limits_{x \in [0, 1)} |x^n - 0| = 1$, из которого явствует, что условие (36.10) равномерной сходимости в данном случае не выполняется.

4. Последовательность $f_n(x) = \frac{1}{n} x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$ (рис. 139).

Действительно, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ и $0<\frac{1}{n}x^n\leqslant\frac{1}{n}$, $0\leqslant x\leqslant\leqslant 1$, $n=1, 2, \ldots$, то высказанное утверждение следует из следствия теоремы 1.

Сформулируем и докажем критерий равномерной сходимости последовательности, обычно также называемый критерием Коши.

Теорема 2 (критерий Коши равномерной сходимости последовательностей). *Для того чтобы последовательность функций f_n, $n=1, 2, \ldots$, определенных на некотором множестве E, равномерно сходилась на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал такой номер n_ε, что для всех номеров $n\geqslant n_\varepsilon$, всех целых $p\geqslant 0$ и всех точек $x\in E$ выполнялось неравенство*

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon. \tag{36.13}$$

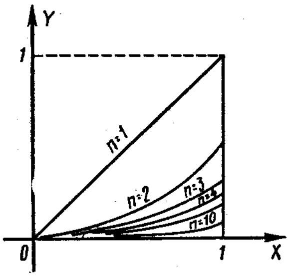


Рис. 139

Доказательство необходимости. Пусть последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве E. Тогда, согласно определению равномерной сходимости, существует функция f такая, что для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n\geqslant n_\varepsilon$ и всех $x\in E$ выполняется неравенство

$$|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, если $n\geqslant n_\varepsilon$ и $p\geqslant 0$, то для всех $x\in E$ получим

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leqslant|f_{n+p}(x)-f(x)|+|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon.$$

Доказательство достаточности. Если выполнено условие (36.13), то при любом фиксированном $x\in E$ последовательность

$$f_n(x),\quad n=1, 2, \ldots, \tag{36.14}$$

является числовой последовательностью, удовлетворяющей критерию Коши (см. п. 3.7 и п. 23.3) и потому она сходится.

Обозначим предел последовательности (36.14) на множестве E через $f(x)$. Покажем, что последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно к функции f на множестве E. Действительно, в силу условия (36.13) для любого $\varepsilon>0$ существует такое n_ε, что для всех $n\geqslant n_\varepsilon$, всех целых $p\geqslant 0$ и всех $x\in E$ справедливо неравенство

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{36.15}$$

Заметив, что $\lim\limits_{p\to\infty}f_{n+p}(x)=f(x)$, перейдем к пределу в неравенстве (36.15) при $p\to\infty$, тогда для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$ получим

$$|f(x)-f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

а это и означает, что $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$. $\square$

В заключение отметим два свойства равномерно сходящихся последовательностей.

1°. *Если последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ равномерно на множестве E сходятся соответственно к функциям f и g, то любая линейная комбинация $\{\lambda f_n + \mu g_n\}$, $\lambda \in \boldsymbol{C}$, $\mu \in \boldsymbol{C}$, данных последовательностей также равномерно на этом множестве сходится к такой же линейной комбинации предельных функций, т. е. к $\lambda f + \mu g$.*

Доказательство. Если $\lambda = \mu = 0$, то утверждение очевидно. Пусть хоть одно из чисел λ или μ отлично от нуля, т. е. $|\lambda| + |\mu| > 0$. Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. В силу условий $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ и $g_n \underset{E}{\rightrightarrows} g$ существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ и всех $x \in E$ выполняются неравенства

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}, \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|},$$

а потому и неравенство

$$|[\lambda f_n(x) + \mu g_n(x)] - [\lambda f(x) + \mu g(x)]| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda|\,|f_n(x) - f(x)| + |\mu|\,|g_n(x) - g(x)| <$$
$$< |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} + |\mu| \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} = \varepsilon.$$

Согласно определению равномерной сходимости это и означает, что $\lambda f_n + \mu g_n \underset{E}{\rightrightarrows} \lambda f + \mu g$. $\square$

2°. *Если последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве E к функции f, а функция g ограничена на этом множестве, то последовательность $\{g f_n\}$ также равномерно сходится на E к функции gf.*

Доказательство. Ограниченность функции g на множестве E означает, что существует такое $M > 0$, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство $|g(x)| \leqslant M$. В силу же равномерной сходимости на множестве E последовательности $\{f_n\}$ к функции f существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ и всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{M},$$

а потому и неравенство

$$|g(x) f_n(x) - g(x) f(x)| = |g(x)|\,|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Это и означает, что $g f_n \underset{E}{\rightrightarrows} gf$. $\square$

36.3. РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИЕСЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Для рядов, естественно, также можно ввести понятие равномерной сходимости.

Определение. 6. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{36.16}$$

члены которого являются функциями, определенными на множестве E, называется равномерно сходящимся на этом множестве, если последовательность его частичных сумм равномерно сходится на E.

Таким образом, равномерная сходимость ряда (36.16) означает существование такой функции $s(x)$, что

$$s_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} s(x) \tag{36.17}$$

(здесь, как всегда $s_n(x)$ — частичная сумма порядка n ряда (36.16), $n=1,\ 2,\ \ldots$).

Поскольку из (36.17) следует, что $s_n(x) \to s(x)$ на E, то $s(x)$ является суммой ряда (36.16).

Положим

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Тогда $s(x) - s_n(x) = r_n(x)$ и условие (36.17) для сходящегося на множестве E ряда можно переписать в эквивалентной форме:

$$r_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} 0, \tag{36.18}$$

откуда в силу эквивалентности определения 5 равномерной сходимости последовательности функций и условия (36.10) следует, что, *для того чтобы сходящийся на E ряд* (36.16) *равномерно сходился на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |r_n(x)| = 0. \tag{36.19}$$

Таким образом, из равномерной сходимости ряда, в частности, вытекает, что начиная с некоторого номера верхние грани

$$\sup_{x\in E} |r_n(x)|$$

конечны, а условие (36.19) сводит понятие равномерной сходимости ряда к стремлению к нулю числовой последовательности этих верхних граней.

Укажем существенное свойство равномерно сходящихся рядов.

Теорема 3 (необходимое условие равномерной сходимости ряда). *Если ряд* (36.16) *равномерно сходится на множестве E, то по-*

следовательность его членов $u_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, *равномерно стремится к нулю на множестве* E, т. е.

$$u_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} 0.$$

Коротко это свойство выражается следующим образом: *у равномерно сходящегося ряда общий член равномерно стремится к нулю.*

Доказательство. Пусть ряд (36.16) равномерно сходится на множестве E. Обозначим его частичные суммы, как обычно, через $s_n(x)$, а его сумму — через $s(x)$, $x \in E$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon/2.$$

Поэтому для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$ справедливо также неравенство

$$\begin{aligned}|u_{n+1}(x)| &= |s_{n+1}(x) - s_n(x)| = \\ &= |[s_{n+1}(x) - s(x)] + [s(x) - s_n(x)]| \leqslant \\ &\leqslant |s_{n+1}(x) - s(x)| + |s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Это и означает равномерную (на множестве E) сходимость к нулю последовательности членов равномерно сходящегося на этом множестве ряда. □

Отметим, что в силу условия (36.10) равномерное стремление к нулю общего члена ряда (36.16) означает, что

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in E} |u_n(x)| = 0.$$

С помощью теоремы 3 иногда удается установить, что рассматриваемый ряд не сходится равномерно. Так, ряд, члены которого образуют геометрическую прогрессию, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ не сходится равномерно на интервале $(0, 1)$, ибо, как это было показано в п. 36.2 (см. пример 2) последовательность x^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, членов этого ряда не сходится равномерно к нулю на этом интервале. Отсюда, кстати, следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, где z — комплексное число, также не сходится равномерно в единичном круге $|z| < 1$, ибо он не сходится равномерно уже на подмножестве $(0, 1)$ этого круга.

Часто бывает полезным следующий достаточный признак равномерной сходимости.

Теорема 4 (признак Вейерштрасса). *Пусть даны два ряда: функциональный* (36.16), *членами которого являются функции*

$u_n(x)$, *определенные на множестве* E, *и числовой*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geqslant 0, \ n=1, \ 2, \ \ldots. \tag{36.20}$$

Если ряд (36.20) *сходится и для любого* $x \in E$ выполняется неравенство

$$|u_n(x)| \leqslant a_n, \qquad n=1, \ 2, \ \ldots, \tag{36.21}$$

то ряд (36.16) абсолютно и равномерно сходится на множестве E.

Абсолютная сходимость ряда (36.16) на E в случае сходимости ряда (36.20) сразу следует по признаку сравнения из неравенства (36.21). Равномерная же сходимость этого ряда легко следует из теоремы 1 этого пункта. Мы, однако, приведем ее непосредственное доказательство.

Пусть $s(x)$ — сумма ряда (36.21) и $s_n(x)$ — его частичная сумма. В силу сходимости ряда (36.20) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_\varepsilon > 0$, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство (см. (35.10)) $\sum\limits_{m=n}^{\infty} a_m < \varepsilon$. Но тогда для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$ для остатков $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ ряда (36.16) (по доказанному выше он абсолютно, а следовательно, и просто сходится, поэтому равенство $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ имеет смысл) будем иметь

$$|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| = \left| \sum_{m=n}^{\infty} u_m(x) \right| \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} |u_m(x)| \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} a_m < \varepsilon.$$

Это и означает согласно определению 5 равномерную сходимость ряда (36.16) на множестве E. $\square$

Отметим, что ряд (26.20) называется рядом, мажорирующим ряд (36.16).

В качестве примера возьмем снова ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, члены которого образуют геометрическую прогрессию. Рассмотрим его в круге радиуса $r: |z| \leqslant r$, где $0 < r < 1$. Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$ с неотрицательными членами, образующими бесконечно убывающую геометрическую последовательность, сходится, а для членов данного функционального ряда справедлива оценка $|z^n| \leqslant r^n$, ибо $|z| \leqslant r$, то он по признаку Вейерштрасса равномерно сходится во всяком круге $|z| \leqslant r < 1$. Вместе с тем, как это было показано выше, этот ряд не сходится равномерно в круге $|z| < 1$.

Признак Вейерштрасса дает только достаточные условия равномерной сходимости ряда, которые отнюдь не являются необходимыми. Убедиться в этом для рядов, у которых с возрастанием номеров членов чередуются их знаки совсем легко. Действительно, сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (как и всякий сходящийся числовой ряд) можно рассматривать как равномерно сходящийся, например, на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$ ряд: его члены $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ суть функции постоянные на $\boldsymbol{R}$. Вместе с тем всякий числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющий условию $|u_n| \leqslant a_n$, т. е. в данном случае условию $\frac{1}{n} \leqslant a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, расходится по признаку сравнения. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится равномерно, а сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющего условиям признака Вейерштрасса, не существует.

Можно показать, что более того условия признака Вейерштрасса не являются необходимыми для равномерной сходимости даже рядов, все члены которых неотрицательны. Чтобы в этом убедиться, приведем пример равномерно сходящегося на отрезке $[0, 1]$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ с неотрицательными членами, для которого тоже не существует сходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющего условию (36.21).

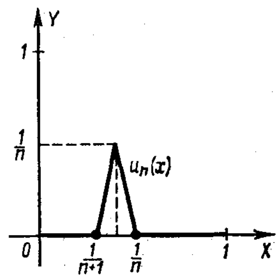


Рис. 140

Определим член ряда $u_n(x)$ следующим образом: $u_n(x) = 0$ на отрезках $\left[0, \frac{1}{n+1}\right]$ и $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $u\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}$ и функция $u_n(x)$ линейна и непрерывна на каждом из отрезков $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right]$ и $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right), \frac{1}{n}\right]$. Ее график изображен на рис. 140.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$. Действительно, если $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ — остаток этого ряда, $n = 1, 2, \ldots$, то для любого $x \in [0, 1]$ среди его членов существует не более одного, для которого $u_k(x) \neq 0$, $k \geqslant n+1$. При этом, очевидно,

$$0 \leqslant u_k(x) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n+1}, \quad \text{поэтому} \quad 0 \leqslant r_n(x) \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

и, следовательно, $r_n(x) \underset{[0,\,1]}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, т. е. рассматриваемый ряд равномерно сходится на отрезке $[0, 1]$.

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ такой числовой ряд, что для всех $x \in [0, 1]$ выполняется неравенство $0 \leqslant u_n(x) \leqslant a_n$, то

$$\frac{1}{n} = \max_{[0,\,1]} u_n(x) \leqslant a_n.$$

Поскольку гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Таким образом, в рассмотренном случае числового ряда, удовлетворяющего, по отношению к функциональному ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, условиям признака Вейерштрасса, заведомо нет.

Перейдем теперь к условиям равномерной сходимости ряда, являющимися одновременно необходимыми и достаточными.

Замечая, что

$$s_{n+p}(x) - s_{n-1}(x) = \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x), \tag{36.22}$$

из теоремы 2 получаем следующий критерий равномерной сходимости.

Теорема 5 (критерий Коши равномерной сходимости рядов). *Для того чтобы ряд* (36.16) *равномерно сходился на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер n_ε,* что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$, *всех целых* $p \geqslant 0$ и всех $x \in E$ *выполнялось неравенство*

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon. \tag{36.23}$$

Очевидно, что из критерия Коши равномерной сходимости ряда еще раз (если в (36.23) положить $p = 0$) получается теорема 3, т. е. необходимое условие равномерной сходимости ряда (36.16).

Упражнение 3. Выяснить, может ли ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (a_n и z — комплексные числа), у которого бесконечно много коэффициентов отличны от нуля, равномерно сходиться на всей комплексной плоскости.

Примеры. 1. Рассмотрим снова (см. п. 36.1) ряд

$$1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots \tag{36.4}$$

и покажем, что, каково бы ни было число $r>0$, ряд (36.4) сходится равномерно в круге $|z|\leqslant r$.

Как мы уже видели, ряд (36.4) сходится при любом комплексном z, в частности, при $z=r$, т. е. числовой ряд

$$1+r+\frac{r^2}{2!}+\ldots+\frac{r^n}{n!}+\ldots$$

сходится. Беря его в качестве ряда сравнения (36.20) для ряда (36.4), при $|z|\leqslant r$ имеем $\left|\frac{z^n}{n!}\right|\leqslant\frac{r^n}{n!}$. Поэтому наше утверждение о равномерной сходимости ряда (36.4) непосредственно следует из теоремы 4.

Покажем, что ряд (36.4) не сходится равномерно на всей комплексной плоскости. Это следует из невыполнения в данном случае необходимого условия равномерной сходимости ряда (см. теорему 3). Действительно, при любом фиксированном n_0

$$\lim_{|z|\to\infty}|z^{n_0}/n_0!|=+\infty. \tag{36.24}$$

Поэтому, если задано $\varepsilon>0$, то, каково бы ни было $n_0>0$, в силу (36.24) можно подобрать z_0 так, чтобы

$$|z_0^{n_0}/n_0!|>\varepsilon,$$

т. е. $z^n/n!$ не стремится равномерно к нулю на всей комплексной плоскости.

2. Исследуем равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\sin nx}{\sqrt{1+n^2}\,(1+nx^2)},\qquad -\infty<x<+\infty. \tag{36.25}$$

Прежде всего заметим, что

$$\left|\frac{x\sin nx}{\sqrt{1+n^2}\,(1+nx^2)}\right|\leqslant\frac{|x|}{\sqrt{1+n^2}\,(1+nx^2)}. \tag{36.26}$$

Далее, $1+nx^2\geqslant 2|x|\sqrt{n}$ *), поэтому

$$\frac{|x|}{\sqrt{1+n^2}\,(1+nx^2)}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}\,(1+n^2)}\leqslant\frac{1}{2n^{3/2}}. \tag{36.27}$$

*) Мы воспользовались здесь неравенством $2ab\leqslant a^2+b^2$, которое сразу получается из очевидного неравенства $(a-b)^2\geqslant 0$.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса в силу неравенства (36.26) и (36.27) исходный ряд (36.25) равномерно сходится на всей действительной оси.

3. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^5x^2} \sin nx. \tag{36.28}$$

Очевидно, $|e^{-n^5x^2} \sin nx| \leqslant n|x|e^{-n^5x^2}$. Найдем максимум функции

$$v_n(x) = n|x|e^{-n^5x^2}$$

при фиксированном n. Функция $v_n(x)$ четная, поэтому достаточно рассмотреть лишь случай $x \geqslant 0$ (почему?). Производная $v_n'(x) = n(1-2n^5x^2)e^{-n^5x^2}$ обращается в ноль в точке $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\,n^{5/2}}$. Поскольку $v_n(x) \geqslant 0$ для всех x, $v_n(0) = 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n(x) = 0$, то в точке x_0 функция $v_n(x)$ имеет максимум (почему?).

Поэтому

$$v_n(x) \leqslant v_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,n^{5/2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\,n^{3/2}} e^{-1/2} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$$

и так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса ряд (36.28) равномерно сходится на всей вещественной оси.

Метод, примененный для установления равномерной сходимости ряда (36.28) (исследование на экстремум модуля общего члена или его мажоранты методами дифференциального исчисления), является достаточно общим и часто применяется на практике. Этим методом можно было бы исследовать и равномерную сходимость ряда (36.25), однако примененный выше способ исследования этого ряда значительно быстрее приводит к цели.

4. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}. \tag{36.29}$$

По признаку Лейбница (см. п. 35.5) он сходится при любом вещественном x и, как было отмечено там же, остаток ряда оценивается первым своим членом

$$|r_n(x)| < \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Из этого следует, что

$$r_n(x) \rightrightarrows 0 \quad \text{при} \quad -\infty < x < +\infty,$$

т. е. ряд (36.29) равномерно сходится на всей действительной оси.

Покажем, что этот ряд не сходится абсолютно во всех точках. Действительно, выберем для данного числа x какое-либо натуральное n_x так, чтобы $x^2 \leqslant n_x$. Тогда для всех $n \geqslant n_x$ будет выполняться неравенство $x^2 \leqslant n$, а следовательно, и неравенство

$$\frac{1}{x^2+n} \geqslant \frac{1}{2n}.$$

А так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то в силу признака сравнения ряд (36.29) не сходится абсолютно.

Упражнение 4. Привести пример ряда, который абсолютно сходится во всех точках некоторого множества, но не сходится на этом множестве равномерно.

Указание. Полезно вспомнить пример 2 из п. 36.1.

Докажем теперь достаточный признак равномерной сходимости, применимый в отличие от признака Вейерштрасса и к не абсолютно сходящимся рядам. Он напоминает по своей формулировке признак Дирихле для сходимости числовых рядов (см. п. 35.13) и впервые встречается в работах Харди *.

Теорема 6. *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x), \tag{36.30}$$

в котором функции $a_n(x)$ *и* $b_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, *определены на множестве* E *и таковы, что*

1) *последовательность* $\{a_n(x)\}$ *монотонна при каждом* $x \in E$ *и равномерно стремится к нулю на* E;

2) *последовательность частичных сумм* $B_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$ *ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

ограничена на множестве E.

Тогда ряд (36.30) *равномерно сходится на множестве* E.

Доказательство. В силу условия 2 теоремы существует такое $B > 0$, что $|B_n(x)| \leqslant B$ для всех $x \in E$ и всех $n=1, 2, \ldots$ и поэтому

$$\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x) = |B_{n+p}(x) - B_{n-1}(x)| \leqslant |B_{n+p}(x)| + |B_{n-1}(x)| \leqslant 2B$$

для всех $x \in E$, всех $n = 2, 3, \ldots$, и всех целых $p \geqslant 0$. Из условия же 1 теоремы следует, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$

* Г. Харди (1877—1947) — английский математик.

существует такой номер n_ε, что для всех $x \in E$ и всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$0 \leqslant |a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6B}.$$

Теперь, применив неравенство Абеля (см. п. 35.13), получим, что

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k(x)\, b_k(x)\right| \leqslant 2B\left[\,|a_n(x)| + 2\,|a_{n+p}(x)|\,\right] < \varepsilon$$

для всех $x \in E$, всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех целых $p \geqslant 0$. Это и доказывает равномерную сходимость ряда (36.30). □

В качестве примера на применение теоремы 6 рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Согласно теореме 6 этот ряд равномерно сходится на любом отрезке $[a, b]$, не содержащем точек вида $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Действительно, последовательность $a_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, в данном случае является числовой последовательностью, она монотонно убывает и стремится к нулю (а значит, и равномерно стремится к нулю), а суммы $\sum\limits_{k+1}^{\infty} \sin kx$ удовлетворяют неравенству

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \dfrac{x}{2}\right|} \leqslant \max_{[a,\, b]} \frac{1}{\sin \dfrac{x}{2}} < +\infty$$

(см. п. 35.13), т. е. ограничены на любом указанном отрезке.

На всяком отрезке, содержащем точки вида $x = 2k\pi$, рассматриваемый ряд не сходится равномерно. В силу свойств синуса это достаточно доказать для отрезка $[0, \pi]$. Положим $x_n = \frac{1}{2n}$; тогда для всех $k = n+1, n+2, \ldots, 2n$ будем иметь $0 < kx_n \leqslant \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, в силу неравенства $\frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{2}{\pi}$, $0 < \alpha < < \frac{\pi}{2}$ (см. (14.1)), получим

$$\frac{\sin kx_n}{k} = \frac{\sin kx_n}{kx_n}\,\frac{1}{2n} \geqslant \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{2n} = \frac{1}{\pi n}, \qquad k = n+1, \ldots, 2n.$$

Отсюда

$$\frac{\sin(n+1)\,x_n}{n+1} + \frac{\sin(n+2)\,x_n}{n+2} + \ldots + \frac{\sin 2nx_n}{2n} > \underbrace{\frac{1}{\pi n} + \ldots + \frac{1}{\pi n}} = \frac{1}{\pi}.$$

Поэтому ни для какого $\varepsilon < \frac{1}{\pi}$ на отрезке $[0, \pi]$ не выполняется критерий Коши равномерной сходимости.

Заметим, что доказать равномерную сходимость рассматриваемого ряда на отрезке, не содержащем точек вида $x=2k\pi$ с помощью признака Вейерштрасса нельзя. Например, для отрезка $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ имеем

$$\max_{\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]} \left|\frac{\sin nx}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Поэтому не существует такого сходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ что $\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leqslant a_n$ на $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, ибо тогда $a_n \geqslant \frac{1}{n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Подобно случаю числовых рядов, применяя неравенство Абеля, можно получить еще один признак равномерной сходимости функциональных рядов, аналогичный признаку Абеля для числовых рядов. Он также впервые встречается в работах Харди.

Теорема 7. *Если*

1) *последовательность* $\{a_n(x)\}$ *ограничена на множестве* E:

$$|a_n(x)| \leqslant M, \quad x \in E, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и убывает или возрастает при каждом $x \in E$,

2) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* E, *то ряд* (36.30) *также равномерно сходится на* E.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$, всех целых $p \geqslant 0$ и всех точек $x \in E$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=0}^{p} b_{n+k}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Отсюда, в силу неравенства Абеля (см. 35.77) для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ всех целых $p \geqslant 0$ и всех точек $x \in E$ будет справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=0}^{p} a_{n+k}(x)\, b_{n+k}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}\left(|a_n(x)| + 2\,|a_{n+p}(x)|\right) \leqslant \varepsilon.$$

Согласно критерию Коши, это и означает равномерную сходимость ряда (36.30). □

Пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sin nx \cos \frac{x}{n}}{\ln \ln n}$.

На любом отрезке, не содержащем точек вида $2\pi m$, $m=0$, $\pm 1, \ldots$, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{\ln \ln n}$ согласно теореме 6 равномерно сходится, а последовательность $\cos \frac{x}{n}$, $n=2, 3, \ldots$ ограничена и монотонно возрастает начиная с некоторого номера, причем можно выбрать такой номер, что начиная с этого номера эта последовательность будет возрастать во всех точках указанного отрезка. Поэтому на отрезке, не содержащем точек вида $2\pi m$; $m=0, \pm 1, \ldots$, рассматриваемый ряд равномерно сходится.

В заключение заметим, что из двух свойств равномерно сходящихся последовательностей, доказанных в конце п. 36.2, непосредственно следует справедливость соответствующих свойств для равномерно сходящихся рядов:

1°. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ *сходятся равномерно на множестве* E, *то для любых чисел* $\lambda \in \boldsymbol{C}$ *и* $\mu \in \boldsymbol{C}$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda u_n(x) + \mu v_n(x)$ *также сходится равномерно на множестве* E.

2°. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* E, *а функция* $g(x)$ *ограничена на этом множестве, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(x) u_n(x)$ *также равномерно сходится на* E.

Упражнения. Исследовать на сходимость абсолютную сходимость и равномерную сходимость ряды:

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1-x) x^n$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^\alpha}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+x^n)$.

(везде x — вещественное число)

36.4. СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Мы видели, что сумма сходящегося ряда, все члены которого непрерывные функции, может и не быть непрерывной функцией. Следующая теорема содержит достаточные условия непрерывности суммы ряда.

Следует обратить внимание на то, что рассмотрение непрерывных на некотором множестве функций накладывает дополнительные ограничения на само множество — оно уже не может быть множеством произвольной природы (каковым до сих пор было множество E, на котором были заданы члены рассматриваемых рядов, элементы последовательностей и т. д.), а должно быть таким, что для функций, заданных на нем, определено понятие непрерывности. Когда речь пойдет о производных и интегралах, придется еще более сузить класс допустимых множеств E.

Теорема 8. *Если функции $u_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, непрерывны в точке x_0 множества $E \subset R^m$ *) и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E, то его сумма $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ также непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Пусть функции $u_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, непрерывны в точке $x_0 \in E$. Докажем, что тогда функция $s(x)$ также непрерывна в этой точке.

Зафиксируем какое-либо $\varepsilon > 0$. Пусть

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x),\ x \in E.$$

Согласно условию теоремы,

$$s_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} s(x),$$

поэтому существует такой номер n_ε, что

$$|s(x)-s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (36.31)$$

для всех $x \in E$ и всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и, в частности, для $n=n_\varepsilon$. Функция $s_{n_\varepsilon}(x)$ как сумма конечного числа непрерывных на E функций $u_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, n_\varepsilon$, непрерывна в точке $x_0 \in E$. Поэтому существует $\delta=\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех точек $x \in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x_0) < \delta$,

$$|s_{n_\varepsilon}(x)-s_{n_\varepsilon}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (36.32)$$

Теперь, заметив, что $s(x)-s(x_0)=[s(x)-s_{n_\varepsilon}(x)]+[s_{n_\varepsilon}(x)-s_{n_\varepsilon}(x_0)]+[s_{n_\varepsilon}(x_0)-s(x_0)]$

*) Здесь, как и везде, где не оговорено что-либо другое, рассматриваются комплекснозначные функции $u_n(x)$; понятие непрерывности для таких функций см. в п. 23. 3; R^m, как обычно, обозначает m-мерное евклидово пространство.

(рис. 141), из неравенства (36.31), взятого в точках x_0 и x, и неравенства (36.32) получим при $\rho(x, x_0) < \delta$ и $x \in E$

$$|s(x) - s(x_0)| < |s(x) - s_{n_\varepsilon}(x)| + |s_{n_\varepsilon}(x) - s_{n_\varepsilon}(x_0)| + \\ + |s_{n_\varepsilon}(x_0) - s(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

что и доказывает непрерывность функции $s(x)$ в точке x_0. □

В случае, если x_0 предельная точка множества E утверждению теоремы можно придать вид

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} s(x) = s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

и так как каждая функция $u(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывна в точке $x \in E$, то $u_n(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} u_n(x)$, поэтому

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} u_n(x).$$

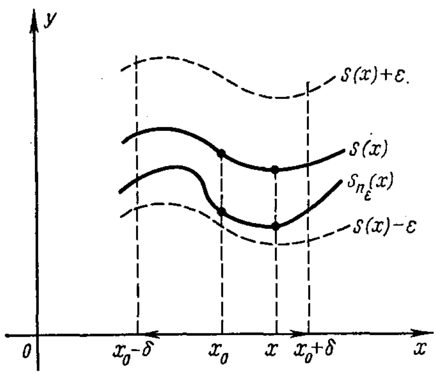


Рис. 141

Таким образом, в условиях теоремы 8 предел суммы ряда равен сумме пределов его членов, т. е. в рассматриваемом ряде допустим почленный переход к пределу.

Выше отмечалось, что каждой последовательности функций соответствует функциональный ряд, для которого она является последовательностью частичных сумм. При этом если данная последовательность равномерно сходится на некотором множестве, то и указанный ряд также, очевидно, равномерно сходится на этом множестве. Это обстоятельство позволяет перефразировать теоремы о равномерно сходящихся рядах в соответствующие теоремы о равномерно сходящихся последовательностях. Например, теорема 8 может быть перефразирована следующим образом.

Теорема 8′. *Если функции f_n, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны в точке $x_0 \in E \subset R^m$ и $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$, то f непрерывна в x_0.*

Это означает, что для точки $x_0 \in E$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f_n(x),$$

т. е. предельные переходы по n и по x можно переставлять.

Действительно, предел f последовательности f_n, $n=1, 2, \ldots$ является в силу теоремы 8' непрерывной в точке $x_0 \in E$ функцией, а поэтому левая часть равенства равна $f(x_0)$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = f(x_0),$$

но и правая часть рассматриваемого равенства в силу непрерывности функций f_n также равна $f(x_0)$:

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0). \ \square$$

Задача 25 (теорема Дини *)). Пусть функции f_n, $n=1, 2 \ldots$ непрерывны и, монотонно убывая или монотонно возрастая, стремятся на компакте $E \subset R^m$ к функции f. Доказать, что для того чтобы функция f была непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n\}$ сходилась на множестве E равномерно. Перефразировать этот результат для рядов.

Теперь перейдем к вопросу о почленном интегрировании и дифференцировании рядов. Поскольку производная и интеграл определялись только в действительной области, то, начиная отсюда и до конца параграфа, будем считать, что все рассматриваемые функции определены на промежутках действительной оси и принимают действительные значения.

Рассмотрим сначала пример, который убедит нас в том, что одной лишь сходимости функционального ряда недостаточно для того, чтобы интеграл от функции, равной его сумме, можно было найти почленным интегрированием. Иными словами, покажем, что даже если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx$ сходятся, то равенство

$$\int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx$$

может быть неверным, даже в том случае, когда все написанные интегралы существуют.

Перефразируем сначала это утверждение в терминах последовательностей. Если положить $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, то будем иметь

$$\int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \int\limits_a^b s(x)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{n \to \infty} s_n(x)\,dx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^b u_k(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int\limits_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right] dx = \lim_{n \to \infty} \int\limits_a^b s_n(x)\,dx.$$

*) У. Дини (1845—1918) — итальянский математик.

Покажем, что равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)\,dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n(x)\,dx$$

справедливо не всегда, когда на отрезке $[a, b]$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ и все рассматриваемые функции интегрируемы, т. е. что в этом случае не всегда можно переходить к пределу под знаком интеграла.

Пусть $s_n(x)=nxe^{-nx^2}$, $n=1, 2, \ldots, 0\leqslant x\leqslant 1$. Тогда $s_n(0)=0$ и при любом $x\neq 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=0$. Таким образом $s_n \underset{[0,\,1]}{\longrightarrow} 0$ и, следовательно, интеграл от предельной функции, т. е. от нуля, также равен нулю. Однако

$$\int_0^1 s_n(x)\,dx=n\int_0^1 xe^{-nx^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^n e^{-t}\,dt=\frac{1}{2}(1-e^{-n}).$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 s_n(x)\,dx=\frac{1}{2}$, т. е. действительно, для рассмотренной последовательности $\{s_n(x)\}$ имеет место неравенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(x)\,dx\neq\int_0^1 \lim_{n\to\infty} s_n(x)\,dx=0.$$

Если построить ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, для которого последовательность $\{s_n(x)\}$ является последовательностью частичных сумм, т. е. положить

$$u_1(x)=s_1(x),\quad u_n(x)=s_{n-1}(x)-s_{n-1}(x),\qquad n=2,\ 3,\ \ldots,$$

то для этого ряда будем иметь

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx\neq\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)\,dx.$$

Теорема 9. *Пусть функции* $u_n(x)$, $n=1, 2, \ldots,$ *непрерывны на отрезке* $[a, b]$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{36.33}$$

равномерно сходится на $[a, b]$. *Тогда какова бы ни была точка* $c\in[a, b]$, *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)\,dt \tag{36.34}$$

также равномерно сходится на $[a, b]$, *и если*

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{36.35}$$

то

$$\int_c^x s(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)\,dt, \qquad a\leqslant x\leqslant b. \tag{36.36}$$

Если эту формулу переписать в виде

$$\int_c^x\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right]dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)\,dt,$$

то видно, что она означает законность при условиях, перечисленных в теореме 9, *почленного интегрирования ряда.*

Доказательство. В силу равномерной сходимости ряда (36.33), согласно теореме 8, функция $s(x)$ (см. (36.35)) непрерывна на отрезке $[a, b]$ и поэтому интегрируема на любом отрезке с концами в точках $c\in[a, b]$ и $x\in[a, b]$.

Покажем, что ряд (36.34) равномерно на отрезке $[a, b]$ сходится к функции

$$\sigma(x)=\int_c^x\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right]dt=\int_c^x s(t)\,dt. \tag{36.37}$$

Пусть

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \quad \text{и} \quad r_n(x)=s(x)-s_n(x).$$

Тогда для любого $x\in[a, b]$ имеем

$$\begin{aligned}\left|\sigma(x)-\sum_{k=1}^{n}\int_c^x u_k(t)\,dt\right|&=\left|\int_c^x s(t)\,dt-\int_c^x\left[\sum_{k=1}^{n} u_k(t)\right]dt\right|=\\ &=\left|\int_c^x s(t)\,dt-\int_c^x s_n(t)\,dt\right|\leqslant\left|\int_c^x |s(t)-s_n(t)|\,dt\right|=\\ &=\left|\int_c^x |r_n(t)|\,dt\right|\leqslant\sup_{[a,b]}|r_n(t)|\left|\int_c^x dt\right|\leqslant\\ &\leqslant|x-c|\sup_{[a,b]}|r_n(t)|\leqslant(b-a)\sup_{[a,b]}|r_n(x)|.\end{aligned} \tag{36.38}$$

Последовательность $\sup\limits_{[a,b]}|r_n(x)|$, $n=1, 2, \ldots$ является числовой последовательностью. В силу равномерной сходимости ряда (36.33) имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{[a,b]}|r_n(x)|=0$$

(см. п. 36.3); поэтому из неравенства (36.38), согласно признаку Вейерштрасса равномерной сходимости последовательности, следует, что последовательность частичных сумм ряда (36.34) равномерно сходится к функции (36.37), а это и означает равномерную сходимость ряда (36.34) к функции (36.37). Теорема и, в частности, формула (36.36) доказаны.

Перефразируем полученный результат для последовательностей функций.

Теорема 9′. *Если последовательность непрерывных на отрезке* $[a, b]$ *функций* f_n, $n=1, 2, \ldots$, *равномерно на этом отрезке сходится к функции* f, *то, какова бы ни была точка* $c \in [a, b]$,

$$\int_c^x f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_c^x f(t)\,dt \quad \text{на} \quad [a, b],$$

в частности,

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^x f_n(t)\,dt = \int_c^x [\lim_{n\to\infty} f_n(t)]\,dt.$$

Упражнение 9. Показать, что если

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n & \text{при} \quad x = 1/2n, \\ 0 & \text{при} \quad x=0 \ \text{и} \ \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

и $f_n(x)$ линейна на отрезках $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$ и $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$, то $f_n(x) \xrightarrow[{[0,1]}]{} 0$, а $\lim\limits_{n\to 0} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 1$.

Перейдем теперь к вопросу о дифференцировании рядов.

Теорема 10. *Пусть функции* $u_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[a, b]$ *и ряд, составленный из их производных*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \tag{36.39}$$

равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. *Тогда если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится хотя бы в одной точке* $c \in [a, b]$, *то он сходится равномерно на всем отрезке* $[a, b]$, *его сумма*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{36.40}$$

непрерывно дифференцируема и

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{36.41}$$

Если эту формулу переписать в виде

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),$$

то видно, что она означает законность при сделанных предположениях почленного дифференцирования ряда.

Доказательство. Пусть

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{36.42}$$

В силу равномерной сходимости этого ряда его сумма является непрерывной функцией и его можно почленно интегрировать:

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)], \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{36.43}$$

По теореме 9, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)], \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{36.44}$$

— сходящийся. Сходится, по условию теоремы, и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c), \tag{36.45}$$

а поэтому сходится и сумма рядов (36.44) и (36.45), т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{36.46}$$

Отсюда следует, что равенство (36.43) можно переписать в виде

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c),$$

или, что то же (см. (36.40)), в виде

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = s(x) - s(c). \tag{36.47}$$

Функция, стоящая в левой части имеет производную по x, значит и функция $s(x)$ имеет производную. Дифференцируя равенство (36.47), получим (см. п. 29.2)

$$s'(x) = \sigma(x), \tag{36.48}$$

где функция $\sigma(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, ибо представляет собой сумму равномерно сходящегося ряда (36.39), члены которого — непрерывные функции. Подставляя (36.42) в (36.48), и получим искомую формулу (36.41).

Остается лишь отметить, что из равенства (36.43) в силу доказанной сходимости рядов (36.44) и (36.45) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u'_n(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c).$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_c^x u'_n(t)\, dt$ равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ (см. теорему 9), а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ — числовой ряд, поэтому и их сумма, т. е. ряд (36.40), равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. $\square$

Итак, если сходящийся ряд непрерывно дифференцируемых функций таков, что ряд, составленный из его производных равномерно сходится, то сумма ряда является дифференцируемой функцией и ее производная получается почленным дифференцированием ряда.

Поскольку из предпосылок этой теоремы следует равномерная сходимость ряда, то не ограничивая общности теоремы, ее можно перефразировать следующим образом.

Если ряд непрерывно дифференцируемых функций и ряд, составленный из их производных, равномерно сходятся, то сумма исходного ряда непрерывно дифференцируема и ее производная равна сумме производных членов данного ряда (т. е. ряд можно почленно дифференцировать).

Перефразируем теперь теорему 10 для последовательностей.

Теорема 10′. *Пусть последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций*

$$f_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.49}$$

сходится хотя бы в одной точке $c \in [a, b]$, а последовательность их производных f'_n, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходится на $[a, b]$. Тогда последовательность (36.49) равномерно сходится на $[a, b]$, ее предел является непрерывно дифференцируемой на этом отрезке функцией и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{df_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Примеры применения этих теорем будут приведены в следующем параграфе.

Упражнения. 10. Будет ли справедливым равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\,dx=\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}x^n\right)dx?$$

Можно ли это установить с помощью теоремы 9?

11. Построить пример равномерно сходящейся на отрезке последовательности непрерывно дифференцируемых функций, предел которой также является непрерывно дифференцируемой функцией, однако производные членов последовательности не сходятся к производной предельной функции.

§ 37. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

37.1. РАДИУС СХОДИМОСТИ И КРУГ СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА

Определение 1. *Функциональные ряды вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \tag{37.1}$$

где a_n и z_0 — заданные комплексные числа, а z — комплексное переменное, называются степенными рядами. Числа

$$a_n,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

называются коэффициентами степенного ряда (37.1).

Предполагая, что коэффициенты ряда и число z_0 фиксированы, будем исследовать поведение ряда (37.1) при различных z.

Если в ряде (37.1) выполнить замену переменного, положив $\zeta=z-z_0$, то получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n. \tag{37.2}$$

Очевидно, что исследование сходимости ряда (37.1) эквивалентно исследованию сходимости ряда (37.2), поэтому в дальнейшем будем рассматривать ряды вида (37.2), употребляя, правда, как правило, для обозначения переменной букву z, а не ζ.

Теорема 1 (Абель). *Если степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{37.3}$$

сходится при $z=z_0\neq 0$, то он сходится и притом абсолютно при любом z, для которого $|z|<|z_0|$.

Доказательство. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \tag{37.4}$$

сходится. Тогда его n-й член $a_n z_0^n$ стремится к нулю при $n \to \infty$ (см. п. 35.2), и поэтому последовательность $\{a_n z_0^n\}$ ограничена, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$|a_n z_0^n| \leqslant M, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

В силу этого для n-го члена ряда (37.2) получается оценка

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Если $|z| < |z_0|$ (рис. 142), то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$, являясь суммой геометрической прогрессии со знаменателем $q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, сходится. Поэтому по признаку сравнения (см. п. 35.5) сходится и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$, а это означает абсолютную сходимость ряда (37.3) при $|z| < |z_0|$. $\square$

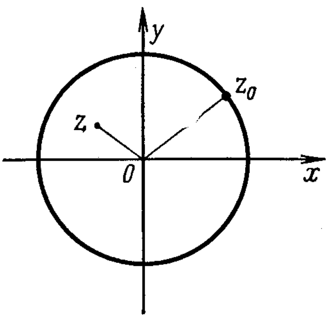


Рис. 142

Следствие 1. *Если степенной ряд (37.3) расходится при $z = z_0$, то он расходится и при всяком z, для которого $|z| > |z_0|$.*

Действительно, если $|z| > |z_0|$ и ряд (37.4) расходится, то расходится и ряд (37.3), так как если бы он сходился, то в силу доказанного сходился бы и ряд (37.4).

Определение 2. *Пусть задан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Если R — неотрицательное число или $+\infty$, обладает тем свойством, что при всех z, для которых $|z| < R$, ряд (37.3) сходится, а при всех z, для которых $|z| > R$, ряд (37.3) расходится, то оно называется радиусом сходимости степенного ряда (37.3).*

Множество точек z, для которых $|z| < R$, называется кругом сходимости ряда (3.3).

Теорема 2. *У всякого степенного ряда (37.3) существует радиус сходимости R. В круге сходимости, т. е. при любом z, для которого $|z| < R$, ряд (37.3) сходится абсолютно. На любом круге $|z| \leqslant r$, где r фиксировано и $r < R$ ряд (37.3) сходится равномерно.*

Доказательство. Разобьем все действительные числа на два класса: к классу A отнесем все неположительные числа и те из положительных $x>0$ (если такие существуют), для которых ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, а к классу B отнесем все остальные.

Если класс B не пуст, то это разбиение является сечением во множестве действительных чисел (см. п. 2.1). В самом деле, класс A всегда не пуст, так как содержит все неположительные числа. Каждое действительное число заведомо попадает в один из классов A или B, поскольку после определения класса A к классу B отнесены все остальные числа. Наконец, если $x \in A$, $y \in B$, то либо $x \leqslant 0$, тогда в силу того, что всегда $y>0$, получим $x<y$ либо $x>0$, тогда согласно теореме Абеля $x<y$. Таким образом, все условия, определяющие сечение в области действительных чисел, выполнены.

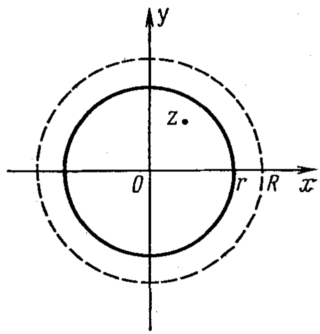


Рис. 143

Обозначим через R число, которое производит это сечение. В случае когда множество B пусто, по определению, положим $R=+\infty$. Величина R является радиусом сходимости ряда (37.3). В самом деле, пусть зафиксировано некоторое z, для которого $|z|<R$. Возьмем действительное x_0 такое, что $|z|<x_0<R$. В силу определения величины R получим $x_0 \in A$, поэтому ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \tag{37.5}$$

сходится. Отсюда, по теореме Абеля, следует, что в зафиксированной точке z, $|z|<R$, ряд (37.3) сходится, и притом абсолютно.

Если $|z|>R$, то выберем вещественное x_0 так, что $R<x_0<|z|$; тогда $x_0 \in B$ и, следовательно, ряд (37.5) расходится. В силу следствия из теоремы Абеля отсюда следует, что в этом случае ряд (37.3) расходится.

Если теперь $0<r<R$, то, по доказанному, ряд (37.3) при $z=r$ абсолютно сходится, т. е. сходится числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n.$$

А так как для любой точки z круга $|z| \leqslant r$ (рис. 143)

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

то, согласно признаку Вейерштрасса (см. п. 36.3), на этом круге ряд (37.3) сходится равномерно. $\square$

Таким образом, областью сходимости всякого степенного ряда является всегда «круг»[*] исключая, быть может, некоторое множество его граничных точек. В граничных же точках круга сходимости ряд может как сходиться, так и расходиться (см. нижеследующие примеры).

Подчеркнем, что радиус сходимости степенного ряда (37.3) обладает следующим свойством: для каждого числа z, такого, что $|z|<R$, указанный ряд абсолютно сходится, а для каждого z такого, что $|z|>R$, он просто, а следовательно, и подавно абсолютно расходится (расходится ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда). Это следует, очевидно, из определения радиуса сходимости и теоремы 2.

Члены степенного ряда являются непрерывными функциями и, как было показано, на всяком круге, лежащем вместе со своей границей внутри круга сходимости, степенной ряд сходится равномерно, а поэтому его сумма непрерывна на всяком указанном круге. Очевидно, что для любой точки z круга сходимости, $|z|<R$, можно подобрать круг, содержащий эту точку и лежащий вместе с границей в круге сходимости (достаточно взять его радиус r таким, что $|z|<r<R$), поэтому *степенной ряд непрерывен в каждой точке своего круга сходимости* $|z|<R$ (подчеркнем, что здесь речь идет об открытом круге).

Рассмотрим теперь случай, когда степенной ряд сходится в точке $z=R$, лежащей на границе его круга сходимости. Отметим, что случай $z=-R$ может быть сведен к случаю $z=R$ простой заменой переменного $\zeta=-z$.

Теорема 3 (Абель). *Если R — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и этот ряд сходится при $z=R$, то он сходится равномерно на отрезке* $[0, R]$.

Следствие. *Если степенной ряд* (37.3) *сходится при $z=R$, то его сумма непрерывна на отрезке* $[0, R]$.

Это утверждение обычно называется *второй теоремой Абеля* о степенных рядах.

Доказательство. Пусть $0\leqslant x\leqslant R$. Представим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n\left(\frac{x}{R}\right)^n$. Поскольку члены ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ не зависят от x, то его сходимость означает и его равномерную сходимость. Последовательность же $\{(x/R)^n\}$ ограничена на отрезке $[0, R]$, ее члены неотрицательны: $0\leqslant\left(\frac{x}{R}\right)^n\leqslant 1$ и она

[*] Слово «круг» написано в кавычках, так как в случае $R=+\infty$ «круг» означает всю плоскость.

монотонно убывает в каждой точке (при $x=R$ она не строго убывает, точнее, является стационарной). Поэтому в силу признака Абеля равномерной сходимости рядов (см. теорему 7 в п. 36.3) ряд (37.3) равномерно сходится на отрезке $[0, R]$. $\square$

Следствие вытекает из того, что сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций является также непрерывной функцией.

Все сказанное с помощью преобразования типа $z=\zeta-\zeta_0$ (ζ — новая переменная, ζ_0 — фиксировано) переносится и на общие степенные ряды вида (37.1). В частности, областью сходимости такого ряда всегда является круг вида $|z-z_0|<R$, конечно, как и выше, с точностью до его граничных точек.

Этот круг называется кругом сходимости ряда (37.1), а R — его радиусом сходимости.

Примеры. 1. Радиус сходимости R ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!z^n$ равен нулю, т. е. этот ряд сходится только при $z=0$*).

Действительно, исследуя абсолютную сходимость этого ряда по признаку Даламбера, при любом $z\neq 0$ получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|(n+1)!\,z^{n+1}|}{|n!\,z^n|}=\lim_{n\to\infty}(n+1)|z|=+\infty.$$

Таким образом, рассматриваемый ряд не сходится абсолютно при любом $z\neq 0$; отсюда, в силу следствия из теоремы Абеля, он расходится при любом $z\neq 0$.

2. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ равен $+\infty$, ибо, как мы видели (см. п. 36.1), этот ряд сходится при любом z.

3. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{37.6}$$

сходится при $|z|<1$ и расходится при $|z|\geqslant 1$. Поэтому ее радиус сходимости $R=1$. Отметим, что во всех точках границы круга сходимости, т. е. во всех точках окружности $|z|=1$, ряд (37.6) расходится, так как для общего члена ряда имеем $|z^n|=1$ и, следовательно, он не стремится к нулю при $n\to\infty$.

4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2} \tag{37.7}$$

---

*) При $z=0$, очевидно, сходится любой ряд вида (37.3).

сходится при $|z|\leqslant 1$, ибо при выполнении этого условия $\left|\frac{z^n}{n^2}\right|<$ $<\frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится.

При $|z|>1$ ряд (37.7) расходится, так как в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|z|^n}{n^2}=+\infty$*), т. е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Радиус сходимости ряда (37.7), как и ряда (37.6), равен единице, однако в каждой точке границы круга сходимости ряд (37.7), в отличие от ряда (37. 6), сходится.

5. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

имеет радиус сходимости $R=1$.

Действительно, применив признак Даламбера для определения z, при которых ряд абсолютно сходится (соответственно, расходится), получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z^{n+1}/(n+1)|}{|z^n/n|}=|z|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=|z|$$

и, следовательно, при $|z|<1$ данный ряд сходится, причем абсолютно, а при $|z|>1$ он расходится. При $z=1$ получается расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, а при $z=-1$ сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ (см. п. 35.3 и 35.9). Таким образом, в этом примере на границе круга сходимости есть точки, в которых ряд сходится, и есть точки, в которых он расходится.

Из рассмотренных примеров (см. также п. 36.1) видно, что иногда радиус сходимости R степенного ряда находится с помощью признака Даламбера сходимости рядов с положительными членами (см. теорему 8 в п. 35.6). Действительно, справедливо следующее утверждение: *если существует предел (конечный или бесконечный)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, *то*

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{37.8}$$

---

*) Действительно, легко, например, с помощью правила Лопиталя убедиться, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|z|^x}{x^2}=+\infty$ (см. пример 2 в п. 12.2).

В самом деле, если число R определено этой формулой и $|z|<R$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{a_n z^n}=|z|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{|z|}{R}<1,$$

и поэтому ряд (37.3) для такого z сходится (и притом абсолютно).

Если же $|z|>R$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|}=\frac{|z|}{R}>1$, и, следовательно, ряд (37.3) абсолютно расходится. Таким образом, R действительно является радиусом сходимости ряда (37.3).

Аналогичным образом можно найти величину радиуса сходимости R и с помощью признака Коши (см. теорему 9 в п. 35.6), если только существует предел (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. В этом случае

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{37.8'}$$

Действительно, если число R задается этой формулой и если $|z|<R$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n z^n|}=|z|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{|z|}{R}<1$$

и потому ряд (37.3) сходится. Если же $|z|>R$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n z^n|}=\frac{|z|}{R}>1$$

и, следовательно, ряд (37.3) абсолютно не сходится.

Таким образом, R является радиусом сходимости ряда (37.3).

Затруднения при применении такого метода определения радиуса сходимости степенного ряда могут возникнуть, например, уже в случае, когда в рассматриваемом ряде имеются коэффициенты со сколь угодно большими номерами, равные нулю. В этом случае можно попробовать применить указанный метод, предварительно перенумеровав подряд все члены ряда с отличными от нуля коэффициентами (отчего его сходимость и сумма в случае, если он сходится, не изменяются).

Поясним сказанное на примере. Пусть требуется определить радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\quad \text{где}\quad a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{если}\quad n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\\ 0, & \text{если}\quad n=0,\ 2,\ 4,\ \ldots.\end{cases}$$

Признак Даламбера неприменим для определения сходимости этого ряда, ибо отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ не имеет смысла для четных номеров n. Не дает ответа здесь и признак Коши, поскольку нетрудно проверить, что здесь предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ не существует. Однако если положить $b_k=\frac{1}{2k+1}$, $k=0, 1, 2, \ldots$, и записать данный ряд в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{2k+1},$$

то, исследовав абсолютную сходимость этого ряда с помощью признака Даламбера, получим

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|b_{k+1}z^{2k+3}|}{|b_k z^{2k+1}|}=|z|^2\lim_{k\to\infty}\frac{2k+1}{2k+3}=|z|^2.$$

Отсюда следует, что рассматриваемый ряд абсолютно сходится, когда $|z^2|<1$, т. е. когда $|z|<1$, и абсолютно расходится, когда $|z|>1$. Таким образом, радиус сходимости этого степенного ряда равен 1.

Подчеркнем, что с помощью признака Даламбера и признака Коши можно найти радиус сходимости не для произвольного степенного ряда, а лишь для такого, у которого существуют указанные выше пределы (быть может, после новой нумерации членов).

Упражнения. Определить радиусы сходимости рядов:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^n$.
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n z^{2n}$.

37.2*. ФОРМУЛА КОШИ — АДАМАРА ДЛЯ РАДИУСА СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА

Найдем теперь формулу для определения радиуса сходимости произвольного степенного ряда через его коэффициенты в общем случае.

Теорема 4. *Пусть R — радиус сходимости степенного ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n; \tag{37.3}$$

тогда

$$R=\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}\ ^{*)}. \tag{37.9}$$

) О верхнем пределе (см. в п. 3.12).

Формула (37.9) называется *формулой Коши — Адамара* *).

Доказательство. Положим $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Рассмотрим сначала случай $\rho = 0$. Покажем, что в этом случае ряд (37.3) сходится при любом z. Возьмем какое-либо $z \neq 0$ и такое ε, что $0 < \varepsilon < 1$. Тогда (см. теорему 10 п. 3.12*) существует такое N_1, что

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\varepsilon}{|z|} \text{ для всех } n \geqslant N_1, \text{ т. е.}$$

$$|a_n||z|^n < \varepsilon^n \text{ для всех } n \geqslant N_1.$$

Отсюда по признаку сравнения следует, что ряд (37.3) абсолютно, а значит, и просто сходится при данном z, а так как z было произвольно, то это означает, что $R = +\infty$.

Возьмем другой крайний случай: пусть $\rho = +\infty$. Покажем, что в этом случае ряд (37.3) расходится при любом $z \neq 0$. Действительно, если $\rho = +\infty$, то существует последовательность n_k, $k = 1, 2, \ldots$, натурального ряда такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty$. Поэтому, каково бы ни было $z \neq 0$, существует такой номер k, что при $k > k_z$

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant \frac{1}{|z|}, \text{ т. е. } \left|a_{n_k} z^{n_k}\right| \geqslant 1.$$

Таким образом, не выполняется необходимое условие сходимости ряда — стремление к нулю n-го члена, поэтому при данном $z \neq 0$ ряд расходится, а так как $z \neq 0$ было произвольно, то это означает, что $R = 0$.

Пусть теперь $0 < \rho < +\infty$. Покажем, что при всяком z таком, что $|z| < \frac{1}{\rho}$ ряд (37.3) сходится. Выберем $\varepsilon > 0$, так, чтобы $|z| < \frac{1}{\rho + \varepsilon}$ **), тогда число q, определяемое равенством $q = (\rho + \varepsilon) \times$ $\times |z|$, будет удовлетворять неравенству $q < 1$. Согласно свойству верхнего предела, существует такой номер N_1, что при $n \geqslant N_1$

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \varepsilon,$$

поэтому при $n \geqslant N_1$

$$|z|\sqrt[n]{|a_n|} < |z|(\rho + \varepsilon) = q, \text{ т. е. } |a_n z^n| < q^n, \; 0 < q < 1,$$

*) Ж. Адамар (1865—1963) — французский математик.

**) Для этого достаточно взять $\varepsilon < \frac{1}{|z| - \rho}$.

и по признаку сравнения ряд (37.3) при рассматриваемом z абсолютно, а значит, и просто сходится.

Покажем теперь, что ряд (37.3) при всяком z таком, что $|z|>\frac{1}{\rho}$, расходится. Выберем $\varepsilon>0$, так, чтобы

$$|z|>\frac{1}{\rho-\varepsilon}>0, \tag{37.10}$$

тогда $|z|(\rho-\varepsilon)>1$. Согласно свойству верхнего предела (см. теорему 10 п. 3.12*), существует подпоследовательность n_k, $k=1, 2, \ldots$, натуральных чисел такая, что

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}>\rho-\varepsilon, \quad k=1, 2, \ldots .$$

Из этого в силу (37.10) следует, что

$$|z|\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}>|z|(\rho-\varepsilon)>1$$

и, следовательно,

$$|a_{n_k}z^{n_k}|>1,$$

т. е. в этом случае не выполняется необходимое условие сходимости ряда — стремление к нулю его n-го члена, и поэтому для рассматриваемого z ряд (37.3) расходится.

Таким образом, ряд (37.3) сходится, если $|z|<\frac{1}{\rho}$, и расходится, если $|z|>\frac{1}{\rho}$, а это и означает, что $R=\frac{1}{\rho}$. $\square$

37.3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Определение 3. *Функция $f(z)$ называется аналитической в точке z_0, если существует такое $R>0$, что в круге $|z-z_0|<R$ она представима степенным рядом вида* (37.1), *т. е. существуют такие комплексные числа a_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, что*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad |z-z_0|<R. \tag{37.11}$$

Сумма, разность и произведение аналитических в точке функций снова является аналитической в этой точке функцией (почему?).

Лемма 1. *Если R — радиус сходимости ряда* (37.11), *$R>0$ и*

$$r_n(z)=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

— остаток ряда (37.11), *то*

$$r_n(z)=O\left((z-z_0)^{n+1}\right) \text{ при } z\to z_0, \tag{37.12}$$

и, следовательно,

$$r_n(z) = o((z-z_0)^n) \quad \textit{при} \quad z \to z_0. \tag{37.13}$$

Доказательство. Если $|z-z_0|<R$, то

$$r_n(z) = (z-z_0)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-n+1},$$

и ряд, получившийся после вынесения множителя $(z-z_0)^{n+1}$, сходится. Поэтому функция $\varphi(z) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-n-1}$, как сумма степенного ряда, непрерывна в круге $|z-z_0|<R$.

Если теперь $0<r<R$, то функция $\varphi(z)$, будучи непрерывной на замкнутом круге $|z-z_0|\leqslant r$, будет и ограничена на нем, т. е. найдется такая постоянная $M>0$, что (см. п. 23.3) при $|z-z_0|\leqslant \leqslant r$ выполняется неравенство $|\varphi(z)|\leqslant M$. Поскольку $r_n(z) = (z-z_0)^{n+1}\varphi(z)$, то при $|z-z_0|\leqslant r$ получим:

$$|r_n(z)| = |z-z_0|^{n+1} |\varphi(z)| \leqslant M|z-z_0|^{n+1},$$

а это и означает (37.12). Условие (37.13) непосредственно следует из (37.12). □

Теорема 5. *Представление аналитической в точке z_0 функции $f(z)$ в виде степенного ряда* (37.11) *единственно, т. е. если*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n, \quad |z-z_0|<R, \quad R>0, \tag{37.14}$$

то

$$a_n = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. Из равенства (37.14) при $n=0$ в силу формулы (37.12) следует, что при $z\to z_0$

$$a_0 + O(z-z_0) = b_0 + O(z-z_0).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $z\to z_0$, получим $a_0=b_0$.

Пусть уже доказано, что

$$a_j = b_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

тогда в силу (37.12) и (37.14)

$$a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots + a_n(z-z_0)^n + O((z-z_0)^{n+1}) = \\ = b_0 + b_1(z-z_0) + \ldots + b_n(z-z_0)^n + O((z-z_0)^{n+1}).$$

Уничтожая одинаковые члены в обеих частях этого равенства и деля обе его части на $(z-z_0)^n$, будем иметь

$$a_n + O(z-z_0) = b_n + O(z-z_0), \quad z\to z_0.$$

Отсюда в пределе при $z\to z_0$ получим, что $a_n=b_n$ (ср. с теоремой 2 в п. 13.2). □

Может случиться, что лишь рассмотрение ряда в области комплексных чисел может объяснить величину его радиуса сходимости. Например, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

являющийся суммой геометрической прогрессии со знаменателем $-x^2$, сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|\geqslant 1$. Его сумма на интервале $(-1;\ 1)$ равна $\frac{1}{1+x^2}$. Функция $\frac{1}{1+x^2}$ определена и бесконечно дифференцируема на всей вещественной оси, поэтому непонятно, почему, раскладывая ее в ряд,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

мы получаем ряд, сходящийся только при $|x|<1$. Это делается совершенно естественным, если рассмотреть эту функцию в области комплексных чисел, поскольку функция $\frac{1}{1+z^2}$ имеет «особую точку» при $z=i$ (в этой точке функция не определена и при приближении к ней стремится к бесконечности), т. е. как раз на границе круга $|z|\leqslant 1$.

37.4. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В настоящем пункте будут в основном изучаться степенные ряды с действительными членами. Однако предварительно докажем одну лемму, справедливую для степенных рядов в комплексной области.

Лемма 2. *Радиусы сходимости рядов*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{37.15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}, \tag{37.16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \tag{37.17}$$

равны.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости ряда (37.15), R_1 — радиус сходимости ряда (37.16), а R_2 — радиус сходимости ряда (37.17). Из неравенств

$$\left|\frac{a_n z^{n+1}}{n+1}\right| \leqslant |z|\,|a_n z^n| \leqslant |z^2|\,|n a_n z^{n-1}|, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

и теоремы сравнения (см. теорему 6 в п. 35.5) следует, что если в некоторой точке z сходится ряд (37.17), то в этой точке сходится и ряд (37.16), и если в некоторой точке z сходится ряд (37.16), то в той же точке сходится и ряд (37.15). Отсюда следует, что

$$R_2 \leqslant R \leqslant R_1. \tag{37.18}$$

Покажем теперь, что

$$R_1 \leqslant R_2. \tag{37.19}$$

Пусть ряд (37.16) сходится в точке z_0 и $0 < |z_0| < R_1$. Выберем такое действительное число r, чтобы $|z_0| < r < R_1$. Тогда при $n = 1, 2, \ldots$ получим

$$|na_n z_0^{n-1}| = \frac{n(n+1)}{|z_0|^2} \left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right| \left|\frac{z_0}{r}\right|^{n+1}. \tag{37.20}$$

В силу сходимости ряда (37.16) при $z = r$ общий член этого ряда при $z = r$ стремится к нулю, когда $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right| = 0.$$

Следовательно, последовательность $\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right|$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена, т. е. существует такое $M > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right| \leqslant M.$$

Положив $q = \left|\frac{z_0}{r}\right|$, из (37.20) получим неравенство

$$|na_n z_0^{n-1}| \leqslant \frac{n(n+1)}{|z_0|^2} Mq^{n+1}, \quad 0 < q < 1.$$

Поскольку ряд с общим членом $\frac{n(n+1)}{|z_0|^2} Mq^{n+1}$ сходится (в этом легко убедиться, например, по признаку Даламбера), то при $z = z_0$ сходится и ряд (37.17). Неравенство (37.19) доказано. Из неравенств (37.18) и (37.19) следует, что

$$R = R_1 = R_2. \ \square$$

Замечание. Утверждение леммы может быть доказано несколько проще, если использовать формулу Коши — Адамара для радиуса сходимости степенного ряда (см. п. 37.2*). Мы не стали этого делать, так как приведенное доказательство также не сложно, а поскольку оно не использует формулы Коши — Адамара, то пункт 37.2* можно пропустить при первом чтении (на что и указывает звездочка при его номере).

В дальнейшем в этом параграфе везде, где не оговорено противное, будем предполагать, что коэффициенты всех рассматриваемых рядов действительны и что переменные z и z_0 также действительны (в этом случае будем их обозначать x и x_0). Правда, все рассматриваемые ниже свойства степенных рядов переносятся в определенном смысле и на степенные ряды в комплексной области, однако для осуществления этого нам пришлось бы обобщить понятие производной и интеграла на функции комплексного аргумента, а это не входит в задачу настоящего курса.

Итак, мы будем рассматривать ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \qquad (37.21)$$

где a_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$, x и x_0 действительны. Если R — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (z-x_0)$, где z — комплексное число, т. е. ряда с теми же коэффициентами, что и у ряда (37.21), но рассматриваемого в комплексной области, то, очевидно, ряд (37.21) сходится, если $|x-x_0|<R$ и расходится, если $|x-x_0|>R$.

В этом случае R по-прежнему называется *радиусом сходимости ряда* (37.21), а интервал (x_0-R, x_0+R) — *его интервалом сходимости*.

Теорема 6. *Если R — радиус сходимости степенного ряда*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \qquad (37.22)$$

$R>0$, *то*

1) *функция f имеет в интервале (x_0-R, x_0+R) производные всех порядков, которые находятся из ряда* (37.22) *почленным дифференцированием;*

2) *для любого $x \in (x_0-R, x_0+R)$*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1},$$

т. е. внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать;

3) *степенные ряды, получающиеся из ряда* (37.22) *в результате почленного дифференцирования или интегрирования, имеют тот же радиус сходимости, что и сам ряд* (37.22).

Доказательство. В силу леммы, доказанной в начале этого пункта, радиусы сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1},$$

получающегося из ряда (37.22) почленным дифференцированием, и ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-x_0)^{n+1}}{n+1},$$

получающегося из того же ряда почленным интегрированием, имеют тот же радиус сходимости что и ряд (37.22) (чтобы в этом убедиться, достаточно сделать замену переменного $x-x_0=z$).

Поскольку всякий степенной ряд вида (37.22) с радиусом сходимости R равномерно сходится на отрезке $[x_0-r, x_0+r]$, $0<r<R$ (см. теорему 2 в п. 37.1), то утверждение теоремы о возможности почленного дифференцирования и интегрирования вещественных степенных рядов непосредственно следует из соответствующих теорем о дифференцируемости и интегрируемости функциональных рядов, доказанных в пункте 36.4. □

Заметим, что, например, возможность почленного интегрирования степенного ряда (37.22) внутри интервала сходимости (x_0-R, x_0+R) сразу вытекает (см. теорему 9 в п. 36.4) из того, что степенной ряд равномерно сходится на всяком отрезке $[x_0-r, x_0+r]$, $0<r<R$. Отсюда следует, что при почленном интегрировании радиус сходимости степенного ряда не уменьшается. Доказанная теорема содержит более полное утверждение, что указанный радиус сходимости, кроме того, и не увеличивается, т. е. остается прежним.

Теорема 7. *Если функция f аналитическая в точке x_0, т. е. представима в окрестности этой точки рядом* (37.22) *с радиусом сходимости $R>0$, то*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n=0,\ 1,\ \ldots, \tag{37.23}$$

т. е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Доказательство. Продифференцировав n раз обе части равенства (37.22), получим (см. теорему 6):

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot a_n + (n+1)n\ldots 2n_{n+1}(x-x_0) + \\ + (n+2)(n+1)\ldots 3a_{n+2}(x-x_0)^2 + \ldots$$

Отсюда при $x=x_0$ и получается формула (37.23). □

Заметим, что из доказанной теоремы следует еще раз свойство единственности разложения функции в степенной ряд (правда, на этот раз в силу сделанных ограничений только в действительной области, ср. с п. 37.3).

37.5. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ЗАПИСИ ОСТАТОЧНОГО ЧИСЛА ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

Определение 4. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{37.24}$$

называется рядом Тейлора функции f в точке x_0.

При $x_0=0$ ряд (37.24) называется также рядом Маклорена функции $f(x)$.

Как мы знаем, всякая аналитическая в точке x_0 функция бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности этой точки и равна в этой окрестности сумме своего ряда Тейлора. Оказывается, что обратное, вообще говоря, неверно: существуют функции, бесконечно дифференцируемые, но не аналитические и, значит, не представимые своим рядом Тейлора.

Примером такой функции является функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{для } x\neq 0, \\ 0 & \text{для } x=0. \end{cases} \tag{37.25}$$

При $x\neq 0$ эта функция имеет производные всех порядков, которые легко вычисляются:

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2},\quad f''(x)=-\frac{6}{x^4}e^{-1/x^2}+\frac{4}{x^6}e^{-1/x^2},$$

и вообще

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2},$$

где $P_n(1/x)$ — многочлен некоторой степени относительно $1/x$ (n — порядковый номер, а не степень многочлена), т. е. $f^{(n)}(x)$ есть линейная комбинация слагаемых вида

$$\frac{1}{x^m}e^{-1/x^2},\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{37.26}$$

Это легко проверяется по индукции. Сделав замену переменного $t=\frac{1}{x^2}$, найдем, применив правило Лопиталя, предел модуля выражения (37.26) при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x^m}e^{-1/x^2}\right| = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{m/2}}{e^t}=0.$$

Отсюда следует, что и предел выражения (37.26) при $x\to 0$ также равен нулю и что при любом $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x)=\lim_{x\to 0} P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}=0. \tag{37.27}$$

Из формулы (37.27) при $n=0$ и $n=1$ следует, что функция f непрерывна в точке $x=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$, поэтому (см. следствие 3 из теоремы 3 п. 11.2) $f'(0)$ существует и $f'(0)=0$. По индукции легко убедиться подобным же образом, что $f^{(n)}(0)=0$, $n=0, 1, 2, \ldots$.

Таким образом, все члены ряда Тейлора функции (37.25) в точке $x_0=0$ равны нулю, поэтому его сумма при всех x также равна нулю и, следовательно, не совпадает с самой функцией f. Заметим еще, что, согласно теореме 5 п. 37.3, функция (37.25) не может быть разложена ни в какой степенной ряд (так как если бы это было возможно, то он оказался бы рядом Тейлора), а это и означает, что она не является аналитической.

Упражнения. 6. Можно ли разложить функцию $f(x)=e^{-1/x}$, $x>0$, на отрезке $[0, 1]$ в ряд Маклорена.

7. Пусть

$$\theta(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } x\geqslant 0, \\ -1 & \text{при } x<0. \end{cases}$$

Доказать, что функцию $\theta(x)e^{-1/x^2}$ можно так доопределить при $x=0$, что в результате получится бесконечно дифференцируемая на всей числовой оси функция.

Заметим, что если функция раскладывается в некоторой окрестности данной точки в степенной ряд, то такой ряд единственен (см. теорему 5 или теорему 7) и является ее рядом Тейлора. Однако, один и тот же степенной ряд может являться рядом Тейлора для разных функций. Так степенной ряд с нулевыми коэффициентами, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 0x^n$, является как рядом Тейлора функции тождественно равной нулю на всей числовой оси: $f(x)=0$, $x\in R$, так и рядом Тейлора функции (37.25) в точке $x=0$.

Возникает вопрос: когда ряд Тейлора (37.24) функции $f(x)$ на некотором интервале сходится к $f(x)$? Чтобы исследовать этот вопрос, напишем формулу Тейлора для функции f (см. п. 13.1):

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x), \tag{37.28}$$

которая справедлива при любом $n=0, 1, 2, \ldots$. В этой формуле $r_n(x)$ обозначает остаточный член формулы Тейлора, а не остаток ряда Тейлора, так как с остатком ряда нельзя оперировать до тех пор, пока не будет установлено, что ряд сходится — лишь в этом случае можно будет утверждать, что остаточный член формулы Тейлора совпадает с остатком ряда Тейлора. Полагая

$$s_n(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

перепишем формулу (37.28) в виде

$$f(x)=s_n(x)+r_n(x), \tag{37.29}$$

где $s_n(x)$ — n-я частичная сумма ряда Тейлора. Отсюда видно, что, для того чтобы функция f равнялась на рассматриваемом интервале сумме своего ряда Тейлора, т. е. чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы *для всех x из этого интервала ее остаточный член в формуле Тейлора стремился к нулю,*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0. \tag{37.30}$$

Если это имеет место, то из формулы (37.29) следует, что остаточный член формулы Тейлора $r_n(x)$ является также и суммой n-го остатка ряда Тейлора (37.24).

Теорема 8. *Пусть функция f определена и непрерывна вместе со всеми своими производными до порядка $n+1$ включительно на интервале $(x_0-h,\ x_0+h)$, $h>0$. Тогда остаточный член $r_n(x)$ ее формулы Тейлора* (37.29) *для всех $x\in(x_0-h,\ x_0+h)$ можно записать в следующих трех видах:*

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt, \tag{37.31}$$

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{37.32}$$

где ξ принадлежит интервалу с концами в точках x_0 и x, и

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, \tag{37.33}$$

где $0<\theta<1$.

Формула (37.31) *называется остаточным членом формулы Тейлора в интегральной форме, формула* (37.32) — *в форме Лагранжа, а* (37.33) — *в форме Коши.*

Доказательство. Из основной теоремы дифференциального и интегрального исчисления (см. п. 29.3, теорему 4) имеем

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt=f(x_0)-\int_{x_0}^{x} f'(t)\,d(x-t).$$

Проинтегрировав по частям интеграл в правой части, получим

$$f(x)=f(x_0)+[-f'(t)(x-t)]_{x_0}^{x}+\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt.$$

Пусть для некоторого $m \leqslant n$ уже доказано, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}\,dt. \qquad (37.34)$$

Проинтегрируем по частям последний член еще раз:

$$\frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}\,dt = -\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)\,d(x-t)^m =$$

$$= -\frac{f^{(m)}(t)(x-t)^m}{m!}\Bigg|_{x_0}^{x} + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt =$$

$$= \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt.$$

и подставим это выражение в (37.34):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt.$$

В результате получилась формула (37.34), в которой m заменено на $m+1$.

Таким образом, формула (37.34) доказана методом индукции для всех $m \leqslant n$. При $m=n$ ее остаточный член имеет вид (37.31).

Применим теперь первую интегральную теорему о среднем значении к интегралу (37.31), вынося за знак интеграла «среднее значение» производной $f^{(n+1)}$ (см. следствие из теоремы 1 в п. 28.2):

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{x_0}^{x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где ξ лежит на интервале с концами в точке x_0 и x.

Формула (37.32) доказана.

Если же применить интегральную теорему о среднем к интегралу (37.31), вынеся за знак интеграла «среднее значение» всей подынтегральной функции (см. п. 28.2), то получим

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0), \qquad (37.35)$$

где ξ, как и выше, лежит на интервале с концами в точках x_0 и x, т. е.

$$\xi = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1.$$

Отсюда $x - \xi = x - x_0 - \theta(x - x_0) = (x - x_0)(1 - \theta)$. Подставив это выражение в (37.35), получим формулу (37.33). $\square$

Укажем теперь одно достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.

Теорема 9. *Пусть функция f и все ее производные ограничены в совокупности на интервале $(x_0 - h,\ x_0 + h)$, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in (x_0 - h,\ x_0 + h)$ и всех $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ выполняется неравенство*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M. \tag{37.36}$$

Тогда на интервале $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ функция f раскладывается в ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < h. \tag{37.37}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что, каково бы ни было число a,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \tag{37.38}$$

Действительно, пусть n_0 такое, что $\frac{|a|}{n_0} < \frac{1}{2}$. Тогда при всех $n \geqslant n_0$ $\frac{|a|}{n} < \frac{1}{2}$, и поэтому

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0}}{n_0!} \frac{a}{n_0 + 1} \cdot \frac{a}{n_0 + 2} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^{n_0}}{n_0!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n - n_0},$$

где правая часть неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, откуда и следует равенство (37.38). Это равенство следует и непосредственно из того, что выражение $a^n/n!$ является — общим членом сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ (см. (36.4)). Для того чтобы доказать формулу (37.37), достаточно убедиться (см. (37.30)), что

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0, \tag{37.39}$$

где $r_n(x)$ — остаточный член в формуле Тейлора функции f. Возьмем $r_n(x)$ в форме Лагранжа (см. (37.32)). Из неравенства (37.36) следует, что

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leqslant M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $|\xi-x_0|<|x-x_0|<h$. Поскольку в силу (37.38)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0,$$

то при $|x-x_0|<h$ выполняется условие (37.39). □

Упражнение 8. Заменим в теореме 8 условие ограниченности производных $f^{(n)}(x)$, $n=1, 2, \ldots$, на интервале (x_0-h, x_0+h) условием их ограниченности только в точке x_0, т. е. пусть существует такое $M>0$, что для всех n выполняется неравенство $|f^{(n)}(x_0)|\leqslant M$. Тогда, очевидно, ряд (37.37) сходится и при том абсолютно на всем интервале (x_0-h, x_0+h), ибо $\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)(x-x_0)^n\right|\leqslant\frac{M(x-x_0)^n}{n!}$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!}$ сходится при всех x см. ряд (36.4)). Следует ли отсюда утверждение теоремы 9?

37.6. РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ В РЯД ТЕЙЛОРА

Прежде всего найдем разложение в ряд некоторых основных элементарных функций.

1. Разложение в ряд функции $f(x)=e^x$. Так как $f^{(n)}(x)=e^x$ то для любого фиксированного $h>0$ при всех $x\in(-h, h)$ и всех $n=0, 1, \ldots$

$$0<f^{(n)}(x)<e^h.$$

Таким образом, условия теоремы 9 выполнены ($x_0=0$), поэтому функция e^x раскладывае ся в ряд Тейлора (37.34) на любом конечном интервале, а значит и на всей действительной оси. Поскольку в данном случае $f^{(n)}(0)=1$, то это разложение имеет вид

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}. \tag{37.40}$$

Напомним, что в п. 36.1 было установлено, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ абсолютно сходится на всей комплексной плоскости *). Мы видим теперь, что для действительных $z=x$ его сумма равна e^x. В случае существенно комплексных z его сумму по аналогии обозначают e^z; таким образом формула

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \tag{37.41}$$

для комплексных z является определением функции e^z.

*) Это следует, согласно теореме Абеля, и из доказанной нами сходимости ряда (37.40) на всей действительной оси.

Данное определение естественно, во-первых, потому, что в случае действительного $z=x$ эта функция совпадает с показательной функцией e^x, а во-вторых, потому, что функция e^z сохраняет ряд характерных свойств функции e^x. Покажем, например, что

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2} \tag{37.42}$$

для любых комплексных z_1 и z_2.

Мы знаем, что ряд (37.41) абсолютно сходится, поэтому ряды

$$e^{z_1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!},\quad e^{z_2}=\sum_{m=}^{\infty}\frac{z_2^m}{m!}$$

можно почленно перемножить (см. п. 35.10), причем, поскольку получающийся при этом ряд также абсолютно сходится, его члены можно располагать в произвольном порядке. Соберем все члены, содержащие произведения $z_1^n z_2^m$ с одинаковой суммой $n+m$, и расположим эти группы членов по возрастанию $n+m$:

$$e^{z_1}e^{z_2}=\sum_{n+m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n+m}\frac{z_1^{(n+m-k)}}{(n+m-k)!}\cdot\frac{z_2^k}{k!}=$$

$$=\sum_{n+m=0}^{\infty}\frac{1}{(n+m)!}\sum_{k=0}^{n+m}\frac{(n+m)!}{(n+m-k)!\,k!}z_1^{n+m-k}z_2^k=$$

$$=\sum_{n+m=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^{n+m}}{(n+m)!}=e^{z_1+z_2}.$$

2. Разложение в ряд $\operatorname{sh}x$ и $\operatorname{ch}x$. Заменив в формуле (37.40) x на $-x$ (это означает просто изменение обозначения), получим

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}. \tag{37.43}$$

Складывая и вычитая равенства (37.40) и (37.43), а затем деля их на два, получим

$$\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \tag{37.44}$$

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{37.45}$$

В правых частях этих формул в силу единственности разложения функций в степенные ряды стоят ряды Тейлора функций $\operatorname{ch}x$ и $\operatorname{sh}x$.

Поскольку функция e^z определена теперь для всех комплексных z, то на существенно комплексные значения аргумента можно распространить и гиперболические функции $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$, положив

$$\operatorname{ch} z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^z+e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^z-e^{-z}}{2}.$$

Определенные таким образом $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$ для комплексных z раскладываются в степенные ряды (37.44) и (37.45), сходящиеся на всей комплексной плоскости (под x в них в этом случае понимается комплексное число).

3. Разложение в ряд $\sin x$ и $\cos x$. Формулы Эйлера. Если $f(x)=\sin x$, то $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ (см. пример 3 п. 10.1), поэтому $|f^{(n)}(x)|\leqslant 1$ для всех действительных x. Согласно теореме 9, отсюда следует, что функция $\sin x$ раскладывается в степенной ряд на всей действительной оси. Вспоминая формулу Тейлора для синуса (см. п. 13.3), получим ряд Тейлора для $\sin x$:

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{37.46}$$

Рассуждая аналогично и вспоминая формулу Тейлора для косинуса (см. п. 13.3), получим и для него ряд Тейлора

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \tag{37.47}$$

также сходящийся на всей действительной оси.

В силу теоремы Абеля (см. п. 37.1) ряды, стоящие в правых частях формул (37.46) и (37.47), сходятся также и при любом комплексном x; это позволяет распространить синус и косинус на комплексные значения аргумента, положив для любого комплексного z

$$\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{37.48}$$

$$\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}. \tag{37.49}$$

В комплексной области легко установить связь между показательной функцией и тригонометрическими. Заменим в ряде (37.41) z сначала на iz, а затем на $-iz$;

$$e^{iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n z^n}{n!}, \quad e^{-iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n z^n}{n!}. \tag{37.50}$$

Замечая теперь, что

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n = 4k, \\ i & \text{при} \quad n = 4k+1, \\ -1 & \text{при} \quad n = 4k+2, \\ -i & \text{при} \quad n = 4k+3, \end{cases}$$

и, следовательно, $i^{2k} = (-1)^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, из (37.50) будем иметь

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Сравнив эти формулы с (37.48) и (37.49), получим

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{37.51}$$

Из них непосредственно следует также формула

$$\cos z + i \sin z = e^{iz}. \tag{37.52}$$

Конечно, эти формулы справедливы, в частности, и для действительных z.

Формулы (37.51) и (37.52) называются *формулами Эйлера*. Отметим два простых их применения.

Если в формуле (37.52) $z = \varphi$ — действительное число, то

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

Поэтому комплексное число с модулем r и аргументом φ

$$r = z(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

можно записать в виде

$$z = re^{i\varphi}.$$

Положив здесь $z = -1$ и, следовательно, $\varphi = \pi$, получим

$$e^{i\pi} = -1$$

— связь между числами e, π и i!

Напомним, что числа π, e и i возникли в математике по совершенно разным и далеким друг от друга поводам: число π — как отношение длины окружности к диаметру, e — как такое основание показательной функции, при котором производная функция совпадает с самой функцией, а мнимая единица i была введена для того, чтобы каждое квадратное уравнение имело решение.

Легко находятся с помощью формул Эйлера модуль и аргумент числа e^z, где $z = x + iy$. Действительно (см. (37.42)),

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

т. е. $|e^z| = e^x$, $\operatorname{Arg} e^z = y$.

Синус и косинус в комплексной области обладают многими свойствами, которыми они обладают и в действительной области, однако далеко не всеми; появляются и новые свойства.

Упражнения. Доказать, что при любом комплексном z:

9. $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$.

10. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

11. $\sin(z + 2\pi) = \sin z$, $\cos(z + 2\pi) = \cos z$.

12. Доказать, что для всех $z \in C$ справедливо неравенство $e^z \neq 0$.

13. Пусть $\operatorname{tg} z \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\sin z}{\cos z}$. Доказать, что для всех $z \in C$ выполняется неравенство $\operatorname{tg} z \neq \pm i$. Указание. Выразить $\operatorname{tg} z$ через показательную функцию e^z.

Покажем, что абсолютные величины синуса и косинуса в комплексной области могут превышать единицу и, более того, не ограничены по абсолютной величине.

Заменим в рядах (37.48) и (37.49) z на iz:

$$\sin iz = i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},\quad \cos iz = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Сравнив получившиеся ряды с рядами (37.44) и (37.45) (при $x = z$), получим

$$i\operatorname{sh} z = \sin iz,\qquad \operatorname{ch} z = \cos iz.$$

В частности, при действительном $z = y$

$$|\sin iy| = |\operatorname{sh} y| \quad \text{и} \quad |\cos iy| = \operatorname{ch} y,$$

откуда и видно, что на мнимой оси функции $\sin z$ и $\cos z$ не ограничены по абсолютной величине.

В качестве свойства нового типа, появляющегося у показательной функции e^z в комплексной области, укажем еще на ее периодичность *). Именно, докажем, что функция e^z имеет период $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x[\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)] =$$
$$= e^x(\cos y + i\sin y) = e^{x+iy} = e^z,\quad z = x + iy.$$

4. Разложение в ряд функции $\ln(1+x)$. Формула Тейлора для $\ln(1+x)$ имеет вид (см. п. 13.3)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

Запишем остаточный член $r_n(x)$ в формуле Лагранжа. Заметив, что

$$[\ln(1+x)]^{n+1} = (-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}},$$

---

*) Если функция f определена на некотором множестве чисел (вообще говоря, комплексных) E, то, число $T \in C$ называется ее *периодом*, если для каждого $x \in E$ имеем $x \pm T \in E$ и $f(x+T) = f(x)$. Функция, имеющая период, называется *периодической*.

получим

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0<\theta<1.$$

Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $0 < \frac{1}{1+\theta x} \leqslant 1$ и поэтому $|r_n(x)| < \frac{1}{n+1}$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \tag{37.53}$$

Если же $-1<x<0$, то целесообразно записать остаточный член $r_n(x)$ в форме Коши:

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}.$$

В этом случае

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} = \frac{1-\theta}{1-\theta|x|} < 1$$

ибо в числителе дроби $\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}$ из единицы вычитается большее число чем в знаменателе; кроме того

$$\frac{1}{1+\theta x} = \frac{1}{1-\theta|x|} < \frac{1}{1-|x|},$$

поэтому

$$|r_n(x)| \leqslant \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \cdot \frac{1}{|1+\theta x|} |x|^{n+1} \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

откуда при $-1<x<0$ также получаем (37.53).

Таким образом,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \tag{37.54}$$

для всех $x \in (-1;\ 1]$.

При $x=-1$ ряд, стоящий в правой части равенства (37.54), отличается от гармонического ряда лишь множителем -1 и потому расходится. Расходится он также и при всех x таких, что $|x|>1$, ибо в этом случае n-й член ряда (37.54) не стремится к нулю, более того (см. п. 12.2),

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^n}{n}\right| = +\infty.$$

5. Разложение в ряд бинома $(1+x)^\alpha$. Формула Тейлора для биномиальной функции имеет вид (см. п. 13.3)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + r_n(x). \tag{37.55}$$

Рассмотрим соответствующий ряд (называемый биномиальным рядом с показателем α):

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n. \qquad (37.56)$$

Если α — неотрицательное целое, то ряд (37.56) содержит лишь конечное число членов, отличных от нуля, и, следовательно, сходится при всех x.

Рассмотрим теперь случай, когда α не является неотрицательным целым. В этом случае в ряде (37.56) все члены отличны от нуля при $x\neq 0$.

Для исследования абсолютной сходимости ряда (37.56) используем признак Даламбера. Иначе говоря, применим признак Даламбера к ряду с n-м членом:

$$u_n=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\right|.$$

Замечая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}x\right|=|x|$, получаем, что ряд (37.56) абсолютно, а значит, и просто сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$.

Однако из одного лишь факта сходимости биномиального ряда (37.56) при $|x|<1$ нельзя еще сделать заключение о том, что его сумма равна $(1+x)^\alpha$. Для этого надо доказать, что в формуле (37.55) $r_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$.

Замечая, что

$$[(1+x)^\alpha]^{(n+1)}=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1},$$

запишем остаточный член $r_n(x)$ формулы (37.55) в форме Коши:

$$r_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}, \quad 0<\theta<1$$

(θ зависит от x и от n). Положим

$$A_n(x)=\frac{(\alpha-1)\ldots[(\alpha-1)-(n-1)]}{n!}x^n,$$

$$B_n(x)=\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}, \qquad C_n(x)=\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n;$$

тогда

$$r_n(x)=A_n(x)B_n(x)C_n(x).$$

Очевидно, $A_n(x)$ является общим членом биномиального ряда с показателем $\alpha-1$ и, следовательно, в силу доказанной выше сходимости биномиального ряда при $|x|<1$

$$\lim_{n\to\infty}A_n(x)=0, \qquad |x|<1.$$

Далее, из того, что $1-|x|<1+\theta x<1+|x|$, следует, что значения $|B_n(x)|$ заключены между величинами

$$|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1} \quad \text{и} \quad |\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1},$$

не зависящими от θ, т. е. последовательность $\{B_n(x)\}$ при фиксированном $x \in (-1, 1)$ ограничена. Наконец,

$$|C_n(x)| = \left|\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right|^n \leqslant \left|\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}\right|^n < 1.$$

Из установленных свойств $A_n(x)$, $B_n(x)$ и $C_n(x)$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \qquad |x| < 1.$$

Таким образом, для любого $x \in (-1; 1)$ справедливо равенство

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Задача 26. Доказать, что 1) в точке $x=1$ при $\alpha > -1$ биномиальный ряд сходится, а при $\alpha \leqslant -1$ — расходится;

2) в точке $x=-1$ при $\alpha \geqslant 0$ биномиальный ряд абсолютно сходится, а при $\alpha < 0$ — расходится.

При этом каждый раз, когда биномиальный ряд (37.56) сходится, его сумма рявна $(1+x)^\alpha$.

37.7. РАЗЛОЖЕНИЕ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И СУММИРОВАНИЕ ИХ МЕТОДОМ ПОЧЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Дифференцируя или интегрируя известные разложения в ряд Тейлора, можно получать разложения новых функций в степенные ряды. Так, например, интегрируя формулу геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^n t^n + \ldots \tag{37.57}$$

в пределах от 0 до x, $|x| < 1$ (что законно, ибо ряд (37.57) равномерно сходится на отрезке с концами в точках 0 и x при $|x| < 1$), получим известную уже формулу (37.54):

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Раньше эта формула была доказана на полуинтервале $(-1; 1]$, а теперь только для интервала $(-1; 1)$. Однако в силу второй теоремы Абеля о степенных рядах (п. 37.1) из справедливости формулы (37.54) на интервале $(-1; 1)$ сразу следует ее справедливость и при $x=1$. Действительно, ряд в правой части этой формулы сходится при $x=1$ и, следовательно, его сумма непрерывна в этой точке (см. теорему 3 в п. 37.1), функция $\ln(1+x)$ также непрерывна при $x=1$, поэтому в обеих частях равенства (37.54) (если известно, что оно справедливо на интервале $(-1;\ 1)$) можно перейти к пределу при $x \to 1-0$ и тем самым доказать его справедливость и при $x=1$:

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

В результате дифференцирования или интегрирования заданного степенного ряда, иногда удается получить ряд, сумма которого уже известна; это позволяет вычислить и сумму исходного степенного ряда.

Примеры. 1. Найдем разложение функции $\arcsin x$ в ряд. Замечая, что

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

разложим $(\arcsin x)'$ в ряд по формуле разложения степени бинома (см. п. 37.6):

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}. \qquad (37.58)$$

Радиус сходимости получившегося ряда равен единице (см. там же). Интегрируя ряд (37.58) от 0 до x, $|x|<1$, получим:

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

2. Разложим функцию $\operatorname{arctg} x$ в степенной ряд и с помощью него найдем числовой ряд, сумма которого равна π.

Поступая при $|x|<1$ аналогично примеру 1, имеем:

$$\operatorname{arctg} x = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \qquad (37.59)$$

Заметим, что полученный ряд при $x=\pm 1$ по признаку Лейбница (см. п. 35.9, теорему 11) сходится, ибо сходится знакопеременный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Поскольку функция $\operatorname{arctg} x$ непрерывна при $x=\pm 1$, то согласно второй теореме Абеля для степенных рядов (см. п. 37.1, теорема 3) сумма ряда (37.59), являясь непрерывной функцией на отрезке $[-1, 1]$ и совпадая с $\operatorname{arctg} x$ на интервале $(-1, +1)$, совпадает с ним и в концевых точках $x = \pm 1$. Иначе говоря, разложение (37.59) справедливо для отрезка $[-1, +1]$. Беря в этом разложении, например, $x = 1$ и замечая, что $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, получим

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Этот ряд называется *рядом Лейбница*.

Отметим, что арктангенс определен на всей действительной числовой оси, в частности и вне отрезка $[-1, 1]$. Однако его разложение в степенной ряд (37.59) справедливо только на этом отрезке. Вне этого отрезка ряд (37.59) расходится, в чем легко убедиться, найдя его радиус сходимости, например, по формуле (37.8′). Анализ этого явления проводится в теории функций комплексного переменного.

3. Найдем сумму ряда

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n. \tag{37.60}$$

Радиус сходимости этого ряда равен единице. В этом легко убедиться, например, по признаку Даламбера

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)\, x^{n+1}}{nx} \right| = |x|.$$

Следовательно, ряд (37.60) абсолютно сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Из (37.60) следует, что

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad |x| < 1.$$

Проинтегрируем этот ряд почленно от 0 до x, $|x| < 1$:

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

и затем продифференцируем получившееся тождество:

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{d}{dx} \frac{x}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

В результате получаем

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

4. Найдем сумму ряда

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}. \tag{37.61}$$

Радиус сходимости этого ряда равен единице; в этом легко убедиться, например, тем же способом, что и в случае ряда (37.60). Продифференцировав ряд (37.61) почленно:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n},$$

и использовав разложение логарифма (см. п. 37.6), получим:

$$xS'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),\quad |x|<1,\quad \text{или}\quad S'(x)=-\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Замечая, что $S(0)=0$, окончательно получим

$$S(x)=-\int_0^x\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt.$$

Таким образом, здесь ответ выражается не в элементарных функциях.

Упражнения. 14. Разложить в степенной ряд функцию $(\arcsin x)^2$.

15. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$.

37.8. ФОРМУЛА СТИРЛИНГА

С помощью разложения логарифмической функции в степенной ряд можно легко найти формулу, описывающую асимптотическое поведение факториала $n!$ при $n\to\infty$. Она называется *формулой Стирлинга* *) и может быть записана в виде

$$n!\sim\frac{\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}; \tag{37.62}$$

согласно определению асимптотического равенства для последовательностей (см. п. 23.3) это означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}=1.$$

*) Дж. Стирлинг (1692—1770) — английский математик.

Из разложения

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},\quad -1<x\leqslant 1,$$

следует, что

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x^n}{n}\right)=2x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k+1}.$$

Полагая здесь $x=\frac{1}{2n+1}$, $n=1, 2, \ldots$, получим

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}=$$
$$=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots\right]\leqslant\frac{2}{2n+1}=\frac{1}{n+\frac{1}{2}},$$

откуда

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1,$$

или, потенцируя и принимая во внимание, что функция $\ln x$ — монотонно возрастающая,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}<e. \tag{37.63}$$

Положим

$$x_n\overset{\text{def}}{=}\frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}; \tag{37.64}$$

поскольку согласно (37.63)

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}<1,$$

то последовательность $\{x_n\}$ убывает, и, кроме того, она ограничена снизу $x_n\geqslant 0$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}x_n\overset{\text{def}}{=}a.$$

Поэтому

$$x_n=a(1+\varepsilon_n), \tag{37.65}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

Подставим (37.65) в (37.64):

$$n! = a\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}(1+\varepsilon_n). \tag{37.66}$$

Для того чтобы получить формулу (37.62) осталось лишь показать, что $a=\sqrt{2\pi}$. По формуле Валлиса (см. (30.8) в п. 30.2)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2, \tag{37.67}$$

а согласно (37.66)

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = a\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{(1+\varepsilon_n)^2}{1+\varepsilon_{2n}}.$$

Подставив это выражение в (37.67), получим

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}a^2\frac{n}{2}\frac{(1+\varepsilon_n)^4}{(1+\varepsilon_{2n})^2} = \frac{a^2}{4},$$

откуда $a=\sqrt{2\pi}$. ☐

37.9*. ФОРМУЛА И РЯД ТЕЙЛОРА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Рассмотрим вектор-функцию $f:[a, b]\to R^n$, где R^n — n-мерное векторное пространство. Как уже отмечалось, на вектор-функции обобщаются понятия предела, непрерывности, производной, дифференциала и интеграла (см. § 15, п. 18.4 и п. 30.4), на которые переносятся многие свойства этих понятий, справедливые для числовых функций. Однако, далеко не для всех свойств это имеет место. Так, в п. 15.2 было показано, что утверждение, аналогичное формуле конечных приращений Лагранжа, уже не справедливо для вектор-функций. Поэтому не справедливо, конечно, и ее обобщение в виде формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Покажем, что для вектор-функций справедлива формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Теорема 10. *Пусть функция $\boldsymbol{f}:(t_0+h,\ t_0-h)\to R^n$ непрерывна вместе со всеми своими производными до порядка $n+1$ включительно на интервале $(t_0-h,\ t_0+h)$, $h>0$. Тогда для любого $t\in(t_0-h,\ t_0+h)$ справедлива формула*

$$\boldsymbol{f}(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\boldsymbol{f}^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^n\boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)\,d\tau. \tag{37.68}$$

Следствие.

$$\left|\boldsymbol{f}(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\boldsymbol{f}^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k\right| \leqslant \frac{1}{n!}(t-t_0)^{n+1}\sup_{(t_0-h,\ t_0+h)}|\boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)|,$$

$$t\in(t_0-h,\ t_0+h).$$

Доказательство теоремы. Прежде всего напомним, что если

$$f(t)=(f_1(t),\ \ldots,\ f_n(t)), \tag{37.69}$$

то

$$f'(t)=(f_1'(t),\ \ldots,\ f_n'(t)),\quad t\in(t_0-h,\ t_0+h), \tag{37.70}$$

$$\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(\tau)\,d\tau=\left(\int_{t_0}^{t}f_1(\tau)\,d\tau,\ \ldots,\ \int_{t_0}^{t}f_n(\tau)\,d\tau\right). \tag{37.71}$$

Из предположений теоремы следует, что каждая координатная функция f_i непрерывна на интервале $(t_0-h,\ t_0+h)$ вместе со всеми своими производными до порядка $n+1$ включительно, и поэтому для нее справедлива формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f_i(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f_i^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k+$$
$$+\frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^n f_i^{(n+1)}(\tau)\,d\tau,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Отсюда в силу (37.70) и (37.71) и следует сразу справедливость формулы (37.68). □

Следствие вытекает из неравенства

$$\left|\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^n\boldsymbol{f}^{n+1}(\tau)\,d\tau\right|\leqslant$$
$$\leqslant|t-t_0|^n\left|\int_{t_0}^{t}|\boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)|\,d\tau\right|\leqslant|t-t_0|^n\sup_{(t_0-h,\ t_0+h)}|\boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)|\left|\int_{t_0}^{t}d\tau\right|=$$
$$=|t-t_0|^{n+1}\sup_{(t_0-h,\ t_0+h)}|\boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)|.\ \square$$

Для вектор-функций справедлива формула Тейлора и с остаточным членом в форме Пеано: если функция $\boldsymbol{f}\colon(t_0-h,\ t_0+h)\to R^n$ имеет в точке t_0 производную порядка n, то

$$\boldsymbol{f}(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\boldsymbol{f}^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k+\boldsymbol{o}((t-t_0)^n).$$

Это также следует сразу из того, что для каждой координатной функции f_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, в предположениях теоремы имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки t_0 (см. п. 13.1).

Если вектор-функция $\boldsymbol{f}\colon(t_0-h,\ t_0+h)\to R^n$ имеет в точке t_0 производные всех порядков и для любого $t\in(t_0-h,\ t_0+h)$

выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k\right]=0,$$

то на интервале $(t_0-h,\ t_0+h)$ функция f раскладывается в степенной ряд с векторными коэффициентами

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n,$$

называемый ее *рядом Тейлора*.

37.10*. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Известно (см. п. 13.1), что если функция f определена в окрестности точки x_0 и n раз в ней дифференцируема, то существует такой многочлен $P_n(x)$ степени, не большей n, а именно многочлен Тейлора, что

$$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0,\quad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{37.72}$$

При этом

$$P_n(x)=P_{n-1}(x)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{37.73}$$

Из (37.72) и (37.73) следует, что разность $f(x)-P_{n-1}(x)$ представима в виде

$$f(x)-P_{n-1}(x)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0,$$

и, тем самым, имеет место асимптотическое равенство

$$f(x)-P_{n-1}(x)\sim\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\quad x\to x_0.$$

Таким образом, члены многочлена Тейлора $P_n(x)$ (ряда Тейлора, если функция f бесконечно дифференцируема в точке x_0) можно последовательно определить как слагаемые вида $a_n(x-x_0)^n$, асимптотически равные разности $f(x)-P_{n-1}(x)$ при $x\to x_0$.

Аналогичным образом можно поступать и при изучении функции в бесконечности. Пусть для определенности функция f определена при $x\geqslant a$, и существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a_0. \tag{37.74}$$

а, следовательно $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-a_0]=0$.

Иногда возникает вопрос как именно разность $f(x)-a_0$ стремится к нулю, каков порядок убывания этой разности? Может случиться, что существует такое число a_1, что

$$f(x)-a_0\sim\frac{a_1}{x},\quad x\to+\infty, \tag{37.75}$$

т. е. (см. теорему 1 в п. 8.3)

$$f(x)-a_0=\frac{a_1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\to+\infty, \tag{37.76}$$

откуда

$$x[f(x)-a_0]=a_1+x\,o(1/x),\quad x\to+\infty,$$

а поскольку в силу определения символа o $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,o(1/x)=0$, то

$$a_1=\lim_{x\to+\infty} x[f(x)-a_0]. \tag{37.77}$$

Наоборот, из (37.77) следует, что

$$x[f(x)-a_0]=a_1+\varepsilon(x),\qquad \lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0,$$

и, следовательно,

$$f(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{\varepsilon(x)}{x}=a_0+\frac{a_1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\to+\infty,$$

т. е. выполняется асимптотическое равенство (37.76). Если указанное a_1 найдено, то часто бывает нужно найти, как говорят, «следующий член асимптотического разложения» функции f, т. е. найти асимптотическое поведение разности $f(x)-\left(a_0+\frac{a_1}{x}\right)$ при $x\to+\infty$. Эта разность согласно (37.76) представляет собой не что иное, как $o(1/x)$, $x\to+\infty$. Может случиться, что существует такое число a_2, что

$$f(x)-\left(a_0+\frac{a_1}{x}\right)\sim\frac{a_2}{x^2},$$

или, что то же

$$f(x)-\left(a_0+\frac{a_1}{x}\right)=\frac{a_2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),\quad x\to+\infty.$$

Это условие равносильно существованию предела

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left[f(x)-\left(a_0+\frac{a_1}{x}\right)\right]=a_2.$$

Вообще, если

$$S_{n-1}(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}},\quad (n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{37.78}$$

— такой многочлен степени не большей $n-1$ относительно переменной $1/x$, что

$$f(x)-\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_{n-2}}{x^{n-2}}\right)\sim\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}},\quad x\to+\infty,\quad n=2,\ 3,\ \ldots,$$

то может случиться, что существует такая постоянная a_n, для которой имеет место асимптотическое равенство

$$f(x)-S_{n-1}(x)\sim\frac{a_n}{x^n},\quad x\to+\infty. \tag{37.79}$$

Это условие равносильно следующему:

$$f(x)-S_{n-1}(x)=\frac{a_n}{x^n}+o\left(\frac{1}{x^n}\right),\quad x\to\infty, \tag{37.80}$$

которое, полагая

$$S_n(x)=S_{n-1}(x)+\frac{a_n}{x^n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{x^k}, \tag{37.81}$$

можно переписать в виде

$$f(x)-S_n(x)=o\left(\frac{1}{x^n}\right),\quad x\to+\infty, \tag{37.82}$$

или, что то же, в виде

$$\lim_{x\to+\infty}x^n[f(x)-S_n(x)]=0. \tag{37.83}$$

Как и выше, при $n=1$, легко показать, что условие (37.80) равносильно существованию конечного предела

$$\lim_{x\to+\infty}x^n[f(x)-S_{n-1}(x)]=a_n. \tag{37.84}$$

Если указанные пределы a_n существуют для всех $n=0, 1, 2, \ldots$, то можно образовать ряд

$$a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}+\ldots \tag{37.85}$$

Ряды такого вида также можно назвать *степенными рядами*, точнее, степенными рядами по целым отрицательным степеням переменной x.

Определение 5. *Пусть функция f определена при $x\geqslant a$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a_0$. Если существует ряд вида* (37.85), *частичные суммы* (37.78) *которого удовлетворяют условию* (37.79), *либо, что равносильно, одному из условий* (37.82) *или* (37.83), *то этот ряд называется асимптотическим рядом (или асимптотическим разложением) в смысле Пуанкаре**) *функции f при $x\to+\infty$.*

В этом случае пишут

$$f\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}. \tag{37.86}$$

Подчеркнем, что здесь знак $\sim$ означает не асимптотическое равенство в том смысле, как оно, например, понимается в фор-

*) А. Пуанкаре (1854—1912) — французский математик.

муле (37.79), т. е. в смысле определения 3 п. 8. 2, а соответствие: ряд (37.85) соответствует функции f.

Как было отмечено, условие (37.80) равносильно условию (37.84), поэтому, если у функции f существует при $x \to +\infty$ асимптотический ряд (37.85), то его коэффициенты a_n, $n=1, 2\ldots$, могут быть последовательно найдены по формулам (37.84). При $n=0$ следует воспользоваться формулой (37.74). Отсюда следует, что если у функции имеется при $x \to +\infty$ асимптотический ряд, то он единственен и его коэффициенты выражаются по формулам (37.74) и (37.84).

Вспомним, что при разложении функции в степенной ряд также была доказана единственность степенного ряда, в который раскладывается функция, а именно было доказано его совпадение с ее рядом Тейлора. Однако, там было отмечено, что один и тот же степенной ряд может являться рядом Тейлора разных функций. Подобная ситуация имеет место и для асимптотических рядов: один и тот же ряд вида (37.85) может оказаться асимптотическим рядом при $x \to +\infty$ разных функций. Например, нулевой ряд, т. е. ряд, все коэффициенты которого равны нулю,

$$a_n=0, \ x=0, \ 1, \ 2, \ldots,$$

является при $x \to +\infty$ как асимптотическим рядом функции, равной нулю во всех точках числовой оси: $f_1(x)=0$, $-\infty < x < +\infty$, так и функции $f_2(x)=e^{-x}$, в чем легко убедиться, вычислив в этих случаях последовательно пределы (37.84).

В отличие от разложения функций в степенные ряды, при котором суммой степенного ряда является заданная функция, и, следовательно, рассматриваемый степенной ряд сходится, при построении асимптотического ряда функции может случиться, что полученный ряд не только не будет сходиться к данной функции, а будет вообще расходиться во всех точках. Тем не менее, асимптотический ряд (37.86) функции является полезным инструментом для ее изучения, в частности для вычисления ее значений. Это, очевидно, связано с тем, что частные суммы асимптотического ряда (37.86) функции в силу условия (37.82) достаточно хорошо приближают саму функцию, причем тем лучше, чем больше x.

Поясним сказанное на примере функции

$$f(x)=\int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t}\,dt, \quad x>0. \tag{37.87}$$

Интегрируя n раз по частям, получим

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}+$$
$$+(-1)^n n!\int_x^{+\infty}\frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\,dt. \tag{37.88}$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \tag{37.89}$$

является асимптотическим разложением функции (37.87). Действительно, если $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$, $n=1, 2, \ldots$,

т. е. $S_n(x)$ — частичные суммы ряда (37.89), то интегрируя по частям в силу (37.88) будем иметь:

$$|f(x)-S_n(x)|=n!\int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\,dt=\frac{n!}{x^{n+1}}-(n+1)!\int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}\,dt \leqslant \frac{n!}{x^{n+1}}=o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

т. е. выполняется условие (37.82).

Вместе с тем легко убедиться по признаку Даламбера, что ряд (37.89) расходится при всех $x\in(-\infty, +\infty)$. Действительно, полагая

$$u_n=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

получим

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{|x|}=+\infty.$$

Итак, асимптотический ряд (37.89) функции (37.87) расходится во всех точках. Однако, несмотря на это значения функции (37.87) могут быть получены с большой степенью точности при помощи частичных сумм этого ряда.

Покажем, что если ряд (37.85) сходится к некоторой функции f:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \qquad x\geqslant a>0, \tag{37.90}$$

то он является и асимптотическим рядом этой функции при $x\to+\infty$.

В самом деле, пусть

$$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{x^k},$$

и, следовательно,

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x).$$

Покажем, что

$$R_n(x)=O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \qquad x\to+\infty, \tag{37.91}$$

а потому, тем более, что

$$R_n(x)=o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x\to+\infty,$$

т. е. что

$$f(x)-S_n(x)=o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x\to+\infty,$$

иначе говоря, что выполняется условие (37.82). Для этого рассмотрим функцию $F(t)\overset{\text{def}}{=}f(1/t)$, $0<t\leqslant 1/a$. В силу (37.90) получим равенство

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

в котором ряд, стоящий в правой части сходится при $0<t<1/a$, откуда по теореме Абеля следует, что он сходится и при всех таких t, что $|t|<1/a$. Если

$$r_n(t)=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k t^k, \quad |t|<1/a,$$

то (см. лемму 1 в п. 37.3) $r_n(t)=O(t^{n+1})$, $t\to 0$. Выполнив здесь замену переменного $t=\frac{1}{x}$, получим (37.91).

В заключение отметим, что условие (37.82) разложения функции в степенной асимптотический ряд можно заменить другим, внешне более сильным, но по существу эквивалентным условием. Сформулируем его в виде леммы.

Лемма 3. *Для того чтобы ряд* (37.85) *являлся асимптотическим при* $x\to+\infty$ *для функции* f *необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(x)-S_n(x)=O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x\to+\infty, \quad n=1,\ 2,\ \ldots. \tag{37.92}$$

Достаточность этого условия очевидна, так как $O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)=o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ (напомним, что подобные равенства читаются только слева направо), а, следовательно, при выполнении условия (37.92) будет выполняться (37.82).

Наоборот, если выполнено условие (37.82):

$$f(x)-S_{n+1}(x)=o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ x\to+\infty,$$

то, поскольку $S_{n+1}(x)=S_n(x)+\frac{a_{n+1}}{x^{n+1}}$ получим

$$f(x)-S_n(x)=\frac{a_{n+1}}{x^{n+1}}+o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)=O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right). \ \square$$

37.11*. СВОЙСТВА АСИМПТОТИЧЕСКИХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

В этом пункте будут сформулированы и доказаны некоторые основные свойства разложений функций в асимптотические степенные ряды. В дальнейшем, в п. 54.6, будут рассмотрены более общие, не обязательно степенные, асимптотические ряды. Поскольку в настоящем пункте будут изучаться только асимптотические разложения функций при $x \to +\infty$ в степенные ряды вида (37.85), то мы будем их называть просто *асимптотическими разложениями.*

I. *Если*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \tag{37.93}$$

то для любых чисел λ и μ

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda a_n + \mu b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty,$$

т. е. асимптотическое разложение линейной комбинации функций, имеющих асимптотическое разложение, равно такой же линейной комбинации асимптотических разложений этих функций.

Действительно, если

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty, \tag{37.94}$$

то для любых чисел λ и μ:

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda a_k + \mu b_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty. \ \square$$

II. *Если имеют место асимптотические разложения* (37.93), *то*

$$f(x) g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}, \quad x \to +\infty,$$

где $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, *т. е. асимптотическое разложение произведения функций, имеющих асимптотические разложения, равно произведению этих разложений, расположенных по возрастающим степеням* $1/x$.

В самом деле, если имеет место (37.94), то

$$f(x) g(x) = \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right)\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right) =$$

$$= a_0 b_0 + \frac{a_0 b_1 + a_1 b_0}{x} + \ldots + \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty. \ \square$$

III. *Если*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \qquad x \to +\infty, \tag{37.95}$$

и $a_0 \neq 0$, *то функция* $1/f(x)$ *также имеет асимптотическое разложение*

$$f(x) \sim \frac{1}{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{x^n}, \qquad x \to +\infty,$$

и коэффициент d_n *этого разложения выражается через коэффициенты* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *разложения* (37.95).

Действительно, из (37.95) следует (см. (37.74)), что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a_0$. Поэтому существует предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0}.$$

Далее, можно последовательно показать существование пределов (37.84) для функции $1/f(x)$, непосредственно вычисляя их. Например,

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a_0}\right) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{a_0}\right) =$$

$$= -\lim_{x \to +\infty} \frac{a_1 + x\,o\left(\frac{1}{x}\right)}{a_0\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = -\frac{a_1}{a_0^2},$$

т. е. $d_1 = -a_1/a_0^2$.

Аналогично вычисляются $d_2, d_3, \ldots$. □

IV. *Если функция f непрерывна при $x \geqslant a > 0$ и имеет асимптотическое разложение, начинающееся с члена порядка* $\frac{1}{x^2}$,

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \qquad x \to +\infty, \tag{37.96}$$

то

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{(n-1)\,x^{n-1}}, \qquad x \to +\infty, \tag{37.97}$$

т. е. в указанном случае асимптотические ряды можно почленно интегрировать.

Докажем это. Пусть

$$S_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{x^k}, \qquad R_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - S_n(x), \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Поскольку функции f и S_n непрерывны при $x \geqslant a$, то и функция R_n непрерывна при $x \geqslant a$. В силу (37.96)

$$R_n(x) = o(1/x^n), \quad x \to +\infty.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $x_\varepsilon \geqslant a$, что для всех $x \geqslant x_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{x^n}.$$

Отсюда следует, во-первых, что интеграл $\int\limits_{x_\varepsilon}^{+\infty} R_n(t)\,dt$, а поэтому и интеграл $\int\limits_{x}^{+\infty} R_n(t)\,dt$, $x \geqslant x_\varepsilon$, существуют, а во-вторых, что при $x \geqslant x_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$\left| x^{n-1} \int\limits_x^{+\infty} R_n(t)\,dt \right| \leqslant x^{n-1} \int\limits_x^{+\infty} |R_n(t)|\,dt \leqslant \varepsilon x^{n-1} \int\limits_x^{+\infty} \frac{dt}{t^n} = \frac{\varepsilon}{n-1},$$

и, следовательно, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} x^{n-1} \int\limits_x^{+\infty} R_n(t)\,dt = 0. \qquad (37.93)$$

Теперь, интегрируя равенство $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$, получим

$$\int\limits_x^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{(k-1)\,x^{k-1}} + \int\limits_x^{+\infty} R_n(t)\,dt. \qquad (37.99)$$

В силу выполнения условия (37.98) равенство (37.99) и означает справедливость асимптотического разложения (37.97) (см. (37.83)). □

V. *Если функция f раскладывается в асимптотический ряд*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \qquad (37.100)$$

и если она имеет при $x \geqslant a$ непрерывную производную, которая также при $x \to +\infty$ раскладывается в асимптотический ряд, то этот ряд получается формальным почленным дифференцированием ряда (37.100)

$$f'(x) \sim -\sum_{n=1} \frac{na_n}{x^{n+1}}, \quad x \to +\infty. \qquad (37.101)$$

В самом деле, пусть

$$f'(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty. \qquad (37.102)$$

По формуле Ньютона — Лейбница для любых $x \geqslant a$ и $y \geqslant a$

$$f(y)-f(x)=\int\limits_x^y f'(t)\,dt=\int\limits_x^y\left[b_0+\frac{b_1}{t}+\left(f'(t)-b_0-\frac{b_1}{t}\right)\right]dt=$$

$$=b_0(y-x)+b_1\ln\frac{y}{x}+\int\limits_x^y\left[f'(t)-b_0-\frac{b_1}{t}\right]dt. \qquad (37.103)$$

Согласно (37.102) $f'(t)-b_0-\frac{b_1}{t}=O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $t\to+\infty$. Следовательно, интеграл

$$\int\limits_x^{+\infty}\left[f'(t)-b_0-\frac{b_1}{t}\right]dt$$

сходится. В силу (37.100) существует конечный предел

$$\lim_{y\to+\infty} f(y)=a_0.$$

Поэтому, переходя к пределу при $y\to+\infty$ в (37.103), убеждаемся в том, что существует конечный предел

$$\lim_{y\to+\infty}\left[b_0(y-x)+b_1\ln\frac{y}{x}\right],$$

Это возможно только в случае, когда $b_0=b_1=0$. Таким образом, равенство (37.103) в пределе перейдет в равенство

$$a_0-f(x)=\int\limits_x^{+\infty} f'(t)\,dt;$$

при этом в силу условия $b_0=b_1=0$ из (37.102) имеем:

$$f'(x)\sim\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{b_n}{x^n}, \qquad x\to+\infty;$$

отсюда, интегрируя почленно в пределах от x до $+\infty$ согласно свойству IV, получим

$$a_0-f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{n+1}}{nx^n}, \qquad x\to+\infty.$$

Но из (37.100) следует, что

$$a_0-f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}.$$

Вспоминая, что разложение функции при $x\to+\infty$ в асимптотический степенной ряд единственно, из сравнения получившихся для функции $a_0-f(x)$ рядов найдем, что

$$b_{n+1}=-na_n,\ n=1,\ 2,\ \ldots . \ \square$$

Замечание. Если непрерывно дифференцируемая при $x \geqslant a$ функция f раскладывается при $x \to +\infty$ в асимптотический ряд, то ее производная может не иметь при $x \to +\infty$ асимптотического разложения. Тем самым требование существования асимптотического разложения у производной в предложении V является существенным. В качестве примера рассмотрим функцию $f(x) = e^{-x} \sin e^x$, $-\infty < x < +\infty$. Нетрудно с помощью формул (37.84) убедиться, что функция f при $x \to +\infty$ раскладывается в нулевой асимптотический ряд, т. е. ряд (37.85), у которого $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Ее производная $f'(x) = -e^{-x} \sin e^x + \cos e^x$ заведомо не имеет асимптотического разложения при $x \to +\infty$, так как она даже не имеет предела при $x \to +\infty$.

Упражнение 16. Доказать, что

а) $$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \ldots, \quad x \to +\infty;$$

б) $$\int_x^{+\infty} e^{x^2-t^2}\, dt \sim \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^3x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4x^7} + \ldots, \quad x \to +\infty.$$

§ 38*. КРАТНЫЕ РЯДЫ

38.1. КРАТНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

В настоящем параграфе будут рассматриваться так называемые кратные ряды вида

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1 \ldots n_k}, \tag{38.1}$$

где $u_{n_1 \ldots n_k}$ — заданные числа (вообще говоря комплексные) занумерованные k индексами n_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, каждый из которых независимо от другого пробегает натуральный ряд чисел: $n_i = 1, 2, \ldots$. Ряд (38.1) называется k-кратным рядом, а числа $u_{n_1 \ldots n_k}$ — его членами.

Определим четко эти понятия. Начнем с понятия кратной последовательности.

Определение 1. *Пусть X — некоторое множество; k-кратной последовательностью элементов множества X называется отображение f: $\underbrace{N \times N \times \ldots \times N}_{k \text{ раз}} \to X$* ($N$, как всегда, обозначает множество натуральных чисел).

Элемент $x = f(n_1, \ldots, n_k)$, $n_1 \in N, \ldots, n_k \in N$, обозначается через $x_{n_1 \ldots n_k}$, а сама последовательность через $\{x_{n_1 \ldots n_k}\}$.

Однократная последовательность называется просто последовательностью.

Итак, элементы k-кратной последовательности «занумерованы» k натуральными индексами. Мы будем рассматривать числовые кратные последовательности, т. е. кратные последовательности, элементами которых являются комплексные, в частности действительные, числа. Для простоты обозначений ограничимся случаем $k=2$. Обобщение на случай произвольного натурального $k \in \boldsymbol{N}$ делается безо всякого труда.

Определение 2. *Число $a \in \boldsymbol{C}$ называется пределом двойной последовательности $\{x_{mn}\}$ и пишется $a = \lim\limits_{m,\, n \to \infty} x_{mn}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_\varepsilon \in \boldsymbol{N}$, что для всех $m \geqslant n_\varepsilon$, $n \geqslant n_\varepsilon$, $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$, выполняется неравенство $|x_{mn} - a| < \varepsilon$.*

Если двойная последовательность имеет предел, то она называется *сходящейся.*

Определение 3. *Двойная последовательность называется последовательностью, стремящейся к $+\infty$, и пишется $\lim\limits_{m,\, n \to \infty} x_{mn} = +\infty$,* если для любого $\varepsilon > 0$ *существует такое $n_\varepsilon \in \boldsymbol{N}$, что для всех $m \geqslant n_\varepsilon$, $n \geqslant n_\varepsilon$, $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in N$, выполняется неравенство $x_{mn} > \varepsilon$.*

Аналогично определяются бесконечные пределы $\lim\limits_{m,\, n \to \infty} x_{mn} = -\infty$ и $\lim\limits_{m,\, n \to \infty} x_{mn} = \infty$.

Как обычно, под пределом (в данном случае двойной последовательности) понимается конечный предел, если не оговорено что-либо другое.

Определим теперь двойной ряд.

Определение 4. *Пусть задана двойная последовательность $\{u_{mn}\}$. Составим двойную числовую последовательность*

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} u_{kl}. \tag{38.2}$$

Пара последовательностей $\{u_{mn}\}$, $\{S_{mn}\}$ называется двойным рядом и обозначается через

$$\sum_{m,\, n=1}^{\infty} u_{mn}. \tag{38.3}$$

Элементы двойной последовательности $\{u_{mn}\}$ называются *членами ряда* (38.3), а элементы двойной последовательности $\{S_{mn}\}$ — *частичными суммами* этого ряда.

Определение 5. *Двойной ряд* (38.3) *называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм сходится. Ее предел называется суммой ряда; причем, если*

$$\lim_{m,\, n \to \infty} S_{mn} = S, \tag{38.4}$$

то пишется

$$\sum_{m,\ n=1}^{\infty} u_{mn} = S.$$

Если конечного предела (38.4) *не существует, то ряд* (38.3) *называется расходящимся. Если существует один из бесконечных пределов*

$$\lim_{m,\ n\to\infty} S_{mn} = +\infty, \quad \lim_{m,\ n\to\infty} S_{mn} = -\infty, \tag{38.5}$$

то соответственно пишется

$$\sum_{m,\ n=1}^{\infty} u_{mn} = +\infty, \quad \sum_{m,\ n=1}^{\infty} u_{mn} = -\infty.$$

Замечание. Содержательность определения ряда как пары последовательностей хорошо видна на примере кратных рядов. Например, если задана последовательность $\{u_{mn}\}$, то соответствующую ей последовательность «частичных сумм» можно задавать не только выше указанным способом (38.2), но и по другому. Наряду с суммами (38.2), определенными выше и называемыми прямоугольными (в них суммируются элементы u_{kl}, которым соответствуют точки $(k,\ l)$ плоскости xy, содержащиеся в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant m$, $0 \leqslant y \leqslant n$) рассматриваются треугольные суммы $T_r = \sum\limits_{k+l\leqslant r} u_{kl}$, $r = 1,\ 2,\ \ldots$, (точка $(k,\ l)$ лежит в треугольнике $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x+y \leqslant r$), сферические $S_r = \sum\limits_{k^2+l^2\leqslant r^2} u_{kl}$, $r = 1,\ 2,\ \ldots$, (точка $(k,\ l)$ лежит в круге $x^2 + y^2 \leqslant r^2$) и другие. Таким образом, для одной и той же последовательности $\{u_{mn}\}$ имеются разные последовательности частичных сумм, причем в случае сходимости одной из них другая не обязательно сходится. Поэтому естественно рассматривать каждую пару, состоящую из последовательности $\{u_{mn}\}$ членов ряда и каких-то его «частичных сумм», как самостоятельный ряд.

Отметим, что последовательности частичных сумм кратных рядов (например, частичных сумм T_r или S_r) в отличие от последовательностей частичных сумм однократных рядов не всегда однозначно определяют последовательность общих членов ряда.

В дальнейшем мы будем рассматривать только прямоугольные частичные суммы S_{mn}.

На кратные ряды переносится ряд свойств обычных (однократных) рядов, например:

1°. *Если ряд* $\sum\limits_{m,\ n=1}^{\infty} u_{mn}$ *сходится и* S — *его сумма, то* $\sum\limits_{m,\ n=1}^{\infty} \lambda u_{mn} = \lambda S$ *для любого числа* λ.

2°. *Если ряды* $\sum\limits_{m,\ n=1}^{\infty} u'_{mn}=S'$ *и* $\sum\limits_{m,\ n=1}^{\infty} u''_{mn}=S''$ *сходятся, то*

$$\sum_{m,\ n=1}^{\infty} (u'_{mn}+u''_{mn})=S'+S''.$$

Эти утверждения легко доказываются аналогично случаю однократных рядов (это предоставляется проделать читателю).

Докажем теперь несколько теорем о кратных рядах.

Теорема 1. *Если ряд* (38.3) *сходится, то*

$$\lim_{m,\ n\to\infty} u_{mn}=0.$$

Это сразу следует из равенства

$$u_{mn}=S_{mn}-S_{m-1\ n}-S_{m\ n-1}+S_{m-1\ n-1}$$

и условия (38.4). □

Теорема 2. *Если все члены ряда* (38.3) *неотрицательны,*

$$u_{mn}\geqslant 0,\ m,\ n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{38.6}$$

то всегда существует конечный или бесконечный предел его частичных сумм S_{mn}, *причем*

$$\lim_{m,\ n\to\infty} S_{mn}=\sup_{m,n=1,\ 2,\ \ldots} S_{mn}. \tag{38.7}$$

Доказательство. Если выполняется условие (38.6) и $m'\geqslant m$, $n'\geqslant n$, то $S_{m'n'}\geqslant S_{mn}$.

Далее, если $S=\sup\limits_{m,\ n=1,\ 2,\ \ldots} S_{mn}$ и $S'<S$, то в силу определения верхней грани существуют такие номера m_0 и n_0, что $S_{m_0n_0}>S'$.

Положим $N=\max\{m_0,\ n_0\}$, тогда при $m\geqslant N$ и $n\geqslant N$

$$S_{mn}\geqslant S_{NN}\geqslant S_{m_0n_0}>S',$$

и так как $S_{mn}\leqslant S$, то $\lim\limits_{m,\ n,\ \to\infty} S_{mn}=S$, т. е. выполняется условие (38.7). □

Следствие. *В предположениях теоремы ряд* (38.3) *сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены.*

Доказательство следствия очевидно.

Из двукратного ряда (38.3) можно формально образовать два так называемых повторных ряда. Для этого следует сначала произвести суммирование по одному индексу, зафиксировав другой, а затем произвести суммирование по оставшемуся индексу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn},\quad \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}. \tag{38.8}$$

Аналогично доказанной ранее теореме о повторных пределах (см. теорему 1 п. 19.2) доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Если сходится двойной ряд* (38.3) *и для всех* $n = 1, 2, \ldots$ *сходятся ряды* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{mn}$, *то повторный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{mn}$ *также сходится и его сумма равна сумме данного ряда* (38.3).

Определение 6. *Ряд* (38.3) *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т. е. ряд*

$$\sum_{m,\,n=1}^{\infty} |u_{mn}|. \qquad (38.9)$$

Теорема 4. *Если ряд* (38.3) *абсолютно сходится, то сходится и любой ряд (однократный, двукратный или повторный), полученный перестановкой членов данного ряда (в частности сходится и сам заданный ряд). При этом сумма любого такого ряда совпадает с суммой исходного ряда* (38.3).

Доказательство. Расположим члены ряда (38.3) в бесконечную прямоугольную матрицу, поместив в m-ю ее строку члены ряда с данным фиксированным первым номером m, расположенные по возрастанию второго индекса n:

$$\begin{array}{llll}
u_{11} & u_{12} & u_{13}\ldots u_{1n}\ldots \\
u_{21} & u_{22} & u_{23}\ldots u_{2n}\ldots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
u_{m1} & u_{m2} & u_{m3}\ldots u_{mn}\ldots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}$$

Занумеруем теперь элементы этой таблицы согласно следующей схеме:

$$\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 5 & \cdots \\
4 & 3 & 6 & \cdots \\
9 & 8 & 7 & \cdots \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}$$

Член ряда (38.3), получивший при такой нумерации номер k, обозначим v_k. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \qquad (38.10)$$

и покажем, что он абсолютно сходится, т. е. что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|. \qquad (38.11)$$

Обозначим частичные суммы ряда (38.9) через S_{mn}^*, его сумму — через S^*, а частичные суммы ряда (38.11) — через S_k^*. Прежде всего заметим, что для любой суммы S_k^* найдутся такие номера m и n, что все члены ряда (38.11), входящие в сумму S_k^* войдут и в сумму S_{mn}^*, тогда

$$S_k^* \leqslant S_{mn}^* \leqslant S^*.$$

Отсюда и следует (см. п. 35.4) сходимость ряда (38.11).

Из абсолютной сходимости ряда (38.10) следует, что и любой другой однократный ряд, составленный из членов ряда (38.2), также сходится и его сумма равна сумме ряда (38.10) (см. п. 35.10). Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = S.$$

Покажем теперь, что любой двойной ряд

$$\sum_{m,\, n=1}^{\infty} u'_{mn}, \tag{38.12}$$

полученный некоторой перенумерацией двойными индексами членов данного ряда (38.3), абсолютно сходится и что его сумма также равна S.

Абсолютная сходимость ряда (38.12) легко следует из абсолютной сходимости ряда (38.3), т. е. из сходимости ряда (38.9), и доказывается тем же приемом, которым была доказана абсолютная сходимость ряда (38.10). Докажем теперь, что сумма ряда (38.12) равна S. Обозначим его частичные суммы через S'_{mn}, а частичные суммы ряда (38.10) через S_k. Пусть фиксировано число $\varepsilon > 0$. В силу сходимости ряда (38.11) существует такой номер k_ε, что

$$\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{38.13}$$

тогда и подавно

$$|S - S_{k_\varepsilon}| = \left| \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} v_k \right| < \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{38.14}$$

Выберем номер N_ε так, чтобы частичная сумма $S'_{N_\varepsilon N_\varepsilon}$ ряда (38.12) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (38.10), входящие в сумму S_{k_ε}. Пусть $m \geqslant N_\varepsilon$ и $n \geqslant N_\varepsilon$. Положим

$$S''_{mn} = S'_{mn} - S_{k_\varepsilon};$$

тогда, использовав (38.13) и (38.14), получим

$$|S - S'_{mn}| = |S - S_{k_\varepsilon}| + |S''_{mn}| < \varepsilon.$$

Итак, S является суммой любого ряда (38.12), в частности суммой самого ряда (38.3).

Покажем, наконец, что S является и суммой повторных рядов (38.8). В самом деле, при любом фиксированном n

$$\sum_{m=1}^{m_0} |u_{mn}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |v_k| = S^*.$$

Следовательно, все ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

сходятся, и притом абсолютно.

Положим

$$u_n = \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}. \tag{38.15}$$

Зафиксируем снова произвольное число $\varepsilon > 0$. Выберем номер k_ε так, чтобы выполнялось условие (38.13), а следовательно, и условие (38.14). Далее, подобно тому, как это было сделано выше, выберем номер N_ε так, чтобы частичная сумма $S_{N_\varepsilon N_\varepsilon}$ ряда (38.3) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (38.10), входящие в сумму S_k. Тогда при всех $m \geqslant N_\varepsilon$ и $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} u_{ji} - S_{k_\varepsilon} \right| \leqslant \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получим (см. (38.15)):

$$\left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S_{k_\varepsilon} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда в силу (38.14) следует, что при $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S \right| \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S_{k_\varepsilon} \right| + |S_{k_\varepsilon} - S| < \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S. \ \square$$

Упражнение 1. Обобщить критерий Коши сходимости однократных рядов на случай кратных рядов.

38.2. КРАТНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Определение 7. *Ряд вида*

$$\sum_{n_1, \dots, n_k = 1} u_{n_1, \dots, n_k}(x), \tag{38.16}$$

где функции $u_{n_1, \dots n_k}(x)$ определены на некотором множестве E, называется k-кратным функциональным рядом, а суммы вида

$$S_{m_1 \dots m_k}(x) = \sum_{n_1, \dots, n_k = 1}^{m_1, \dots, m_k} u_{n_1 \dots n_k}(x)$$

— его частичными суммами.

Определение 8. *Ряд* (38.16) *называется сходящимся на множестве E, если при каждом фиксированном $x_0 \in E$ сходится кратный числовой ряд*

$$\sum_{n_1, \dots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1, \dots, n_k}(x_0).$$

Если ряд (38.16) *сходится на E, то функция*

$$S(x) = \sum_{n_1, \dots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1 \dots n_k}(x), \quad x \in E$$

называется его суммой.

На кратные функциональные ряды легко переносятся понятия равномерной сходимости ряда, критерий Коши для равномерной сходимости ряда, признак Вейерштрасса равномерной сходимости и т. п. Мы не будем на этом останавливаться.

Упражнение 2. Определив понятие равномерной сходимости двойного ряда, доказать, что, если ряд (38.16) сходится равномерно и если его члены являются непрерывными функциями на множестве $E \subset R^n$, то и сумма ряда (38.16) является непрерывной на множестве E функцией.

Определение 9. *Ряды вида*

$$\sum_{n_1, \dots, n_k = 0}^{\infty} c_{n_1 \dots n_k} (x_1 - x_1^{(0)})^{n_1} \dots (x_n - x_n^{(0)})^{n_k},$$

где $c_{n_1 \dots n_k}$ — комплексные числа, называются кратными степенными рядами.

Хотя, как это видно из предыдущего, многие утверждения, справедливые для однократных рядов, обобщаются и на кратные ряды, последние имеют и много своих специфических особенностей, существенно отличающих их от однократных рядов.

В качестве примера приведем двойной степенной ряд с действительными коэффициентами, который, рассматриваемый в вещественной области, сходится лишь в двух точках плоскости, а именно в точках (0; 0) и (1; 1). Таким образом, аналога теоремы Абеля для степенных рядов (см. п. 37.1), во всяком случае в прямом смысле, для двойных рядов нет. Этот пример показывает опасность использования аналогий, не подкрепленных математическими доказательствами.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m,\ n=0}^{\infty} c_{mn}x^m y^n, \tag{38.17}$$

где, $c_{00}=0$, $c_{0n}=c_{n0}=n!$, $n=1,\ 2,\ \ldots$; $c_{1m}=c_{m1}=-m!$, $m=1,\ 2,\ \ldots$; $c_{mn}=0$, $m\geqslant 2$, $n\geqslant 2$.

Его частичные суммы имеют вид

$$S_{mn}(x,\ y)=(1-y)\sum_{k=1}^{m} k!x^k+y+(1-x)\sum_{l=2}^{n} l!y^l. \tag{38.18}$$

Очевидно, что $S_{mn}(0,\ 0)=0$ и $S_{mn}(1,\ 1)=1$, $m,\ n=1,\ 2,\ \ldots$, и потому ряд (38.17) сходится в точках (0, 0) и (1, 1).

Заметим теперь, что радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!z^n$$

равен нулю (см. пример 1 в п. 37.1), при этом его частичные суммы

$$S_n(z)=\sum_{k=1}^{n} k!\,z^k,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

при вещественных $z>0$, очевидно, стремятся к $+\infty$.

Покажем, что при $z<0$ его четные частичные суммы $S_{2n}(z)$ также стремятся к $+\infty$. Действительно, объединив при $z<0$ попарно соседние члены, получим:

$$S_{2n}(z)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)!\,|z|^{2k-1}(2k|z|-1).$$

Далее заметим, что при любом фиксированном $z\neq 0$ для номеров $k>\frac{1}{|z|}$ выполняется неравенство

$$(2k-1)!\,|z|^{2k-1}(2k|z|-1)>(2k-1)!\,|z|^{2k-1}$$

и что при $z\neq 0$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)!\,z^{2k-1}$$

расходится (это, например, легко доказывается тем же способом, каким доказывалась при $z \neq 0$, расходимость ряда в примере 1 п. 37.1) и, следовательно, при $z > 0$ его сумма равна $+\infty$, поэтому и

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}(z) = +\infty, \quad z \neq 0.$$

Из сказанного и из равенства (38.18) следует, что, если $(x, y) \neq (0, 0)$ или $(x, y) \neq (1, 1)$, то, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, всегда можно подобрать такие номера m и n, что

$$|S_{mn}(x, y)| > \varepsilon.$$

А это и означает, что ряд (38.17) для указанных (x, y) расходится.

Упражнения. 3. Число S назовем суммой ряда $\sum\limits_{m, n=1}^{\infty} u_{m, n}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех номеров m и n, удовлетворяющих условию $m+n > N$, выполняется неравенство $|S_{mn} - S| < \varepsilon$. Выяснить, эквивалентно или нет это определение определению 5 п. 38.1.

4. Число S назовем суммой ряда $\sum\limits_{m, n=1}^{\infty} u_{mn}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное множество $\mathfrak{N}_\varepsilon = \{(m, n)\}$ пар индексов m, n членов данного ряда, что, каково бы ни было другое конечное множество $\mathfrak{N}$ пар индексов членов этого ряда, содержащее множество $\mathfrak{N}_\varepsilon : \mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}_\varepsilon$, выполняется неравенство

$$\left| \sum_{(m, n) \in \mathfrak{N}} u_{mn} - S \right| < \varepsilon.$$

Выяснить эквивалентно или нет это определение определению 5 п. 38.1 и определению, сформулированному в предыдущем упражнении.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава вторая

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Глава третья

Интегральное исчисление функций одной переменной

Глава четвертая

Ряды

Лев Дмитриевич Кудрявцев

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Том I

Зав. редакцией литературы по физике и математике *Е. С. Гридасова.* Научный редактор *Н. М. Флайшер.* Младшие редакторы *С. А. Доровских, Н. П. Майкова, Т. Т. Шатилова.* Художественный редактор *В. И. Пономаренко.* Технический редактор *Р. С. Родичева.* Корректор *Г. И. Кострикова.*

ИБ № 2854

Изд. № ФМ-653а. Сдано в набор 28.07.80. Подп. в печать 26.12.80. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 43 усл. печ. л. 43,25 усл. кр.-отт. 38,81 уч.-изд. л. Тираж 80 000 экз. Зак. № 1450. Цена 1 р. 60 к.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский просп., 15.