§ 23. Дефиниция на понятието дъга

Двойка функции

$$(1) \qquad x=f(t), \quad y=g(t),$$

които са дефинирани и непрекъснати в един и същ интервал $\alpha\leqq t\leqq\beta$, се нарича дъга. Множеството от точките с координати $[f(t), g(t)]$, където t описва интервала $\alpha\leqq t\leqq\beta$, се нарича графика на дъгата (1). Точката с координати $[f(\alpha), g(\alpha)]$ се нарича начало на дъгата (1), а точката $[f(\beta), g(\beta)]$ се нарича нейн край. Дъгата (1) се нарича гладка, ако функциите $f(t)$ и $g(t)$ са диференцуеми и производните им са непрекъснати в интервала $\alpha\leqq t\leqq\beta$.

Пример 1. Графиката на дъгата

$$x=x_1+t(x_2-x_1),$$
$$y=y_1+t(y_2-y_1),$$
$$0\leq t\leq 1$$

праволи нейна отсечка, която съединява точките (x_2, y_2) и (x_1, y_1).

Пример 2. Графиката на дъгата

$$x=a+r\cos t$$
$$y=b+r\sin t,$$
$$0\leq t\leq \pi$$

полуокръжност с център в точката (a, b) и радиус r.

Пример 3. Графиката на дъгата

$$x=t,$$
$$y=f(t),$$
$$a\leq t\leq b$$

съвпада с графиката на функцията $f(x)$, където x се мени в интервала $[a, b]$

Пример 4. Възможно е две различни дъги да имат една и съща графика. Така дъгата

$$x=\cos t,$$
$$y=\sin t,$$
$$0\leq t\leq 2\pi$$

и дъгата

$$x=\cos t,$$
$$y=\sin t,$$
$$0\leq t\leq 4\pi$$

имат една и съща графика. Също тъй графиката на дъгата

$$x=\cos t,$$
$$y=\sin t,$$
$$0\leq t\leq \frac{\pi}{2}$$

съвпада с графиката на дъгата

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$y=\frac{2t}{1+t^2},$$
$$0\leq t\leq 1.$$

§ 24. Дължина на дъга

Нека

$$(1) \qquad x=f(t), \quad y=g(t),$$

където $\alpha\leqq t\leqq\beta$ е една дъга Γ. Делим интервала $[\alpha, \beta]$ с помощта на точките

$$\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta.$$

На всяка една от делящите точки t_i отговаря една точка P с координати

$$x_i=f(t_i),$$
$$y_i=g(t_i).$$

Съединявайки всеки две съседни точки от редицата

$$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$$

с праволинейни отсечки, получаваме една начупена линия, за която ще казваме, че е вписана в дъгата Γ. Дължината на разглежданата начупена линия е равна на

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}.$$

Ако се случи множеството от дължините на всичките вписани (в изяснения по-горе смисъл) начупени линии да е ограничено отгоре, ние казваме, че дъгата Γ може да бъде ректифицирана (изправена). Под дължина на дъга, която може да бъде ректифицирана, ще разбираме точната горна граница на дължините на вписаните в нея начупени линии. По този начин ние дефинирахме понятието дължина **само за ректифицируемите криви.**

Нека (1) е една ректифицируема дъга и нека l е нейната дължина. Да изберем един подинтервал $[\lambda, \mu]$ на интервала $[\alpha, \beta]$. Дъгата, която се получава от параметричните уравнения (1), когато t се мени в подинтервала $[\lambda, \mu]$, е също тъй ректифицируема. И наистина нека разделим подинтервала $[\lambda, \mu]$ на подинтервали с помощта на точките

$$\lambda=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_n=\mu$$

и да означим с P_i точката $[f(\tau_i), g(\tau_i)]$. Ако означим още с Q и R съответно точките $[f(\alpha)], g(\alpha)], [f(\beta), g(\beta)]$, то очевидно [1]

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}\leqq\overline{QP_0}+\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}+\overline{P_nR}\leqq l,$$

което показва, че множеството от сумите $\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}$ е ограничено, т. е. че разглежданата дъга е наистина ректифицируема.

Да означим с l_λ^μ дължината на дъгата

$$x=f(t),$$

(2)

$$y=g(t),$$

където $\lambda\leqq t\leqq\mu$. Не е трудно да се покаже, че при $\lambda<\nu<\mu$ имаме

$$l_\lambda^\nu+l_\nu^\mu=l_\lambda^\mu.$$

И наистина да разделим по произволен начин подинтервала $[\lambda, \mu]$ на подинтервали с помощта на точките

$$\lambda=t_0<t_1<\cdots<t_n=\mu.$$

Винаги може да се избере измежду тези точки на деление такава точка t_k, че да имаме

$$t_{k-1}\leqq\nu\leqq t_k.$$

Да означим с P_i точката $[f(t_i), g(t_i)]$, а с Q точката $[f(\nu), g(\nu)]$. Очевидно имаме [2]

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}=\sum_{i=1}^{k-1}\overline{P_{i-1}P_i}+\overline{P_{k-1}P_k}+\sum_{i=k+1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}.$$

[1] С $\overline{AB}$ означаваме дължината на отсечката между точките A и B.

[2] При $k=1$ трябва да се чете $\sum\limits_{i=1}^{k-1}\overline{P_{i-1}P_i}=0$, а при $k=n$ трябва да се чете $\sum\limits_{i=k+1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}=0$.

Като вземем пред вид, че

$$\overline{P_{k-1}P_k}\leqq\overline{P_{k-1}Q}+\overline{QP_k},$$

получаваме

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}\leqq\left(\sum_{i=1}^{k-1}\overline{P_{i-1}P_i}+\overline{P_{k-1}Q}\right)+\left(\overline{QP_k}+\sum_{i=k+1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}\right)\leqq$$

$$\leqq l_\lambda^\nu+l_\nu^\mu.$$

С това ние показваме, че числото $l_\lambda^\nu+l_\nu^\mu$ е една горна граница на дължините на начупените линии, вписани в дъгата (2). Като вземем пред вид, че l_λ^μ е точната, т. е. най-малката горна граница на тези дължини, получаваме

(3) $$l_\lambda^\mu\leqq l_\lambda^\nu+l_\nu^\mu.$$

По подобен начин може да се установи неравенството

$$l_\lambda^\mu\geqq l_\lambda^\nu+l_\nu^\mu.$$

За тази цел ще разделим подинтервалите $[\lambda, \nu]$ и $[\nu, \mu]$ по произволен начин на подинтервали с помощта на точките

(4) $$\lambda=u_0<u_1<u_2<\cdots<u_p=\nu,$$

(5) $$\nu=v_0<v_1<v_2<\cdots<v_q=\mu$$

и ще означим с P_i и Q_i съответно точките $[f(u_i), g(u_i)]$ и $[f(v_i), g(v_i)]$. В такъв случай имаме

$$\sum_{i=1}^{p}\overline{P_{i-1}P_i}+\sum_{i=1}^{q}\overline{Q_{i-1}Q_i}\leqq l_\lambda^\mu$$

и следователно

$$\sum_{i=1}^{p}\overline{P_{i-1}P_i}\leqq l_\lambda^\mu-\sum_{i=1}^{q}\overline{Q_{i-1}Q_i}.$$

Като фиксираме точките (5) и оставим точките (4) да се менят заключаваме, че числото

$$l_\lambda^\mu-\sum_{i=1}^{q}\overline{Q_{i-1}Q_i}$$

е една горна граница на сумите $\sum_{i=1}^{p} \overline{P_{i-1} P_i}$. Като вземем пред вид, че l_λ^r е точната, т. е. най-малката от горните граници на тези суми, намираме

$$l_\lambda^r \leq l_\lambda^u - \sum_{i=1}^{q} \overline{Q_{i-1} Q_i}$$

или още

(6) $$\sum_{i=1}^{q} \overline{Q_{i-1} Q_i} \leq l_\lambda^u - l_\lambda^r.$$

Ние фиксирахме точките (5) произволно. Това обстоятелство и неравенството (6) ни позволяват да твърдим, че числото $l_\lambda^u - l_\lambda^r$ е една горна граница на сумите

$$\sum_{i=1}^{q} \overline{Q_{i-1} Q_i}.$$

Като вземем пред вид още, че l_ν^u е точната, т. е. най-малката горна граница на тези суми, получаваме

$$l_\nu^u \leq l_\lambda^u - l_\lambda^r$$

или

(7) $$l_\nu^u + l_\lambda^r \leq l_\lambda^u.$$

Неравенствата (3) и (7) ни учат, че

$$l_\lambda^r + l_\nu^u = l_\lambda^u.$$

§ 25. Пресмятане дължините на дъгите с помощта на интеграли

Нека

(1) $$x = f(t),$$
$$y = g(t),$$

където $\alpha \leq t \leq \beta$ е една дъга. Ако функциите $f(t)$ и $g(t)$ имат ограничени първи производни в интервала $\alpha \leq t \leq \beta$, то дъгата (1) е ректифицируема. И наистина функцията

$$F(u, v) = \sqrt{f'^2(u) + g'^2(v)}$$

е ограничена в затворения квадрат

$$\alpha \leq u \leq \beta,$$
$$\alpha \leq v \leq \beta.$$

Да означим с M една нейна горна граница и да разделим по произволен начин интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали с помощта на точките

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta.$$

Теоремата за крайните нараствания ни дава

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1}) f'(\tau_i),$$
$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1}) g'(\tau_i^*),$$

където

$$t_{i-1} < \tau_i < t_i, \qquad t_{i-1} < \tau_i^* < t_i$$

и следователно

(2) $$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'^2(\tau_i) + g'^2(\tau_i^*)}\,(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M(t_i - t_{i-1}) = M(\beta - \alpha).$$

С това ние показахме, че множеството от дължините на вписаните начупени линии в дъгата (1) е ограничено, т. е. тази дъга е ректифицируема.

Неравенството (2) ни учи, че константата

$$M(\beta - \alpha)$$

е една горна граница на дължините на начупените линии, които са вписани в дъгата (1). С това е доказано, че дъгата (1) е ректифицируема. Като вземем пред вид, че дължината l на разглежданата дъга е точната, т. е. най-малката горна граница на тези дължини, получаваме

(3) $$l \leq M(\beta - \alpha).$$

Ако означим с m една долна граница на $F(u, v)$, получаваме аналогично

(4) $$m(\beta - \alpha) \leq l.$$

Неравенствата (3) и (4) могат да се използват, за да се докаже следната теорема.

Ако функциите $f(t)$ и $g(t)$ имат непрекъснати първи производни в интервала $\alpha\leq t\leq\beta$, то дължината l на дъгата

$$x=f(t),$$
$$y=g(t),$$

където $\alpha\leq t\leq\beta$, се дава с формулата

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{f'^2(u)+g'^2(u)}\ du. \tag{5}$$

Доказателство. Да означим с $l(t)$ дължината на дъгата

$$x=f(u),$$
$$y=g(u),$$

където $\alpha\leq u\leq t$, и да изберем t_0 произволно в интервала $(\alpha, \beta]$. Нека ε е едно произволно положително число. Ние ще изберем числата t' и t'', които удовлетворяват неравенствата $t'\leq t_0\leq t''$, $t''\neq t'$, толкова близо до t_0, че да имаме[1]

$$F(t_0, t_0)-\varepsilon\leq F(u, v)\leq F(t_0, t_0)+\varepsilon$$

при

$$t'\leq u\leq t'', \quad t'\leq v\leq t''.$$

Това може да се направи поради непрекъснатостта на функцията $F(u, v)$.

От доказаното по-горе имаме

$$[F(t_0, t_0)-\varepsilon](t''-t')\leq l(t'')-l(t')\leq[F(t_0, t_0)+\varepsilon](t''-t')$$

или

$$-\varepsilon\leq\frac{l(t'')-l(t')}{(t''-t')}-F(t_0, t_0)\leq\varepsilon.$$

Този резултат ни учи, че функцията $l(t)$ е диференцуема в точката t_0 и

$$l'(t_0)=F(t_0, t_0)=\sqrt{f'^2(t_0)+g'^2(t_0)}, \tag{6}$$

т. е. функцията $l(t)$ е една примитивна функция на непрекъснатата функции

$$\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}.$$

[1] Нека припомним, че с $F(u, v)$ ние сме означили функцията $\sqrt{f'^2(u)+g'^2(v)}$.

Това ни дава възможност да пишем

$$l(t)=C+\int_{\alpha}^{t}\sqrt{f'^2(u)+g'^2(u)}\ du,$$

където C е константа. За да пресметнем константата C, извършваме граничния преход $t\to\alpha$. Като вземем пред вид неравенствата $0\leq l(t)\leq M(t-\alpha)$, където M е една горна граница на функцията $F(u, v)$, заключаваме, че $\lim\limits_{t\to\alpha} l(t)=0$ и следователно $C=0$.

По този начин ние намираме

$$l(t)=\int_{\alpha}^{t}\sqrt{f'^2(u)+g'^2(u)}\,du$$

и следователно

$$l=l(\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{f'^2(u)+g'^2(u)}\,du.$$

Забележка. Внимателният читател вероятно е забелязал, чет о разсъжденията, които ние направихме, може да се извлече повече, защото от тях се вижда, че функцията $l(t)$ е диференцуема и равенството (6) е валидно във всяка точка, в която и двете производни $f'(t)$ и $g'(t)$ са непрекъснати. Да допуснем, че тези производни са интегруеми в Риманов смисъл в интервала $[\alpha, \beta]$. В такъв случай те ще бъдат непрекъснати почти навсякъде и следователно равенството (6) ще бъде валидно почти навсякъде. От друга страна, функциите

$$l(t) \text{ и } \int_{\alpha}^{t}\sqrt{f'^2(u)+g'^2(u)}\,du$$

удоглетворяват условието на Липшиц. Това ни дава възможност да приложим теоремата от § 10 и да заключим, че

$$l(t)=C+\int_{\alpha}^{t}\sqrt{f'^2(u)+g'^2(u)}\ du,$$

където C не зависи от t.

По такъв начин виждаме, че в разглежданата от нас теорема условието за непрекъснатост на $f'(t)$ и $g'(t)$ може да бъде заменено с по-общото условие за интегруемост в Риманов смисъл.

Ние често ще пишем формулата (5) във вида

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Изразът $\sqrt{dx^2+dy^2}$ обикновено се означава със знака ds и се нарича елемент на дъга.

В специалния случай, когато имаме дъгата

$$y=f(x), \quad \alpha\leq x\leq\beta,$$

или по-точно дъгата

$$x=t,$$
$$y=f(t),$$

където $\alpha\leq t\leq\beta$, формулата (5) добива вида

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+f'^2(u)}\,du.$$

Накрая нека отбележим, че под дъга, зададена в полярни координати с уравнение

$$\rho=f(\theta),$$

където $\alpha\leq\theta\leq\beta$, се разбира дъгата, дефинирана в декартови координати със следните уравнения[1]:

$$x=f(\theta)\cos\theta,$$

(7)
$$y=f(\theta)\sin\theta,$$

където $\alpha\leq\theta\leq\beta$.

От (6) получаваме

$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta,$$
$$\frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta.$$

Това ни дава:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}=\sqrt{f'^2(\theta)+f^2(\theta)}=\sqrt{\rho'^2+\rho^2}$$

и следователно изразът за дължината l на дъгата (7) добива следния вид:

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta.$$

[1] Ние получаваме тези уравнения от трансформачните формули

$$x=\rho\cos\theta$$
$$y=\rho\sin\theta,$$

като заместим ρ с $f(\theta)$.

Пример 1. Да се намери дължината l на дъгата от циклоидата[1]

$$x=r(t-\sin t),$$
$$y=r(1-\cos t), \quad r>0,$$

където $0\leq t\leq 2\pi$ (вж. черт. 15).

Решение. Очевидно имаме

$$x'=r(1-\cos t),$$
$$y'=r\sin t$$

и следователно

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\sqrt{r^2(1-\cos t)^2+r^2\sin^2 t}\,dt=r\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=$$
$$=2r\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

Оттук получаваме

$$l=2r\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=\left|-4r\cos\frac{t}{2}\right|_0^{2\pi}=8r.$$

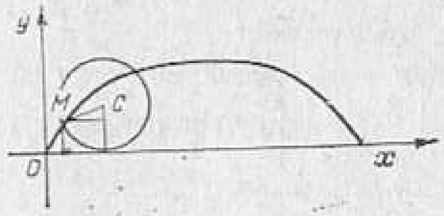
Пример 2. Да се намери дължината на дъгата от параболата

$$x=\frac{t^2}{2p}, \quad y=t, \quad p>0,$$

където $0\leq t\leq a$.

Решение. Очевидно имаме

$$x'=\frac{t}{p},$$
$$y'=1$$



Черт. 15

следователно

$$ds=\frac{1}{p}\sqrt{t^2+p^2}\,dt,$$

т. е.

$$l=\frac{1}{p}\int_0^a\sqrt{t^2+p^2}\,dt.$$

Като интегрираме по части, ще получим

$$l=\left|\frac{t}{p}\sqrt{t^2+p^2}\right|_0^a-\frac{1}{p}\int_0^a\frac{t^2}{\sqrt{t^2+p^2}}\,dt=$$

[1] Циклоида се нарича крива, описана от една точка, свързана с окръжност, която се търкаля без хлъзгане по една права.

$$=\frac{a}{p}\sqrt{a^2+p^2}-\frac{1}{p}\int_0^a \frac{t^2+p^2-p^2}{\sqrt{t^2+p^2}}\,dt=$$

$$=\frac{a}{p}\sqrt{a^2+p^2}-l+p\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{t^2+p^2}}=$$

$$=\frac{a}{p}\sqrt{a^2+p^2}-l+\left|p\ln\left(t+\sqrt{t^2+p^2}\right)\right|_0^a=$$

$$=\frac{a}{p}\sqrt{a^2+p^2}-l+p\ln\left(a+\sqrt{a^2+p^2}\right)-p\ln p.$$

Оттук

$$2l=\sqrt{a^2+p^2}+p\ln\frac{a+\sqrt{a^2+p^2}}{p}$$

и следователно

$$l=\frac{a}{2p}\sqrt{a^2+p^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+p^2}}{p}.$$

Пример 3. Да се намери дължината l на кардиоидата

$$\rho=a(1+\cos\theta),\quad a>0,$$

където $0\le\theta\le 2\pi$ (черт. 13).

Решение. Очевидно имаме

$$\rho'=-a\sin\theta$$

и следователно

$$ds=\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\theta=\sqrt{a^2\sin^2\theta+a^2(1+\cos\theta)^2}\,d\theta=$$

$$=a\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta=a\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta.$$

Оттук получаваме

$$l=2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=2a\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta+2a\int_{\pi}^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=$$

$$=2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta-2a\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=\left|4a\sin\frac{\theta}{2}\right|_0^{\pi}-4a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|_{\pi}^{2\pi}=8a.$$

Задачи

1. Да се намери дължината на астроидата

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\quad a>0.$$

Отговор. $6a$.

2. Да се намери дължината на дъгата от семикубичната парабола $ay^2=x^3$, $a>0$, за която $0\le x\le p$.

Отговор.

$$\frac{(4a+9p)^{\frac{3}{2}}-(4a)^{\frac{3}{2}}}{27\sqrt{a}}.$$

3. Да се намери дължината на епициклоидата

$$x=(a+b)\cos t+b\cos\frac{a+b}{b}t,$$

$$y=(a+b)\sin t+b\sin\frac{a+b}{b}t,$$

където $a>0$, $b>0$, $2a<b$, $0\le t\le 2\pi$.

Отговор. $\frac{8b(a+b)}{a}$.

4. Да се намери дължината на кривата

$$x^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{2}{5}}=a^{\frac{2}{5}},\quad a>0.$$

Отговор. $5a\left[1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right]$.

5. Да се намери дължината на дъгата от Архимедовата спирала

$$\rho=a\theta,\quad a>0,$$

където $0\le\theta\le\alpha$.

Отговор. $\frac{a}{2}\left[\ln\left(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2}\right)+\alpha\sqrt{1+\alpha^2}\right]$.

6. Да се намери дължината на дъгата от логаритмичната спирала

$$\rho=e^{a\theta},\quad a>0,$$

където $\theta_1\le\theta\le\theta_2$.

Отговор. $\frac{e^{a\theta_2}-e^{a\theta_1}}{a}\sqrt{1+a^2}$.

7. Да се намери дължината на дъгата

$$\rho=\frac{1}{\cos^3\frac{\theta}{3}},$$

където $-\pi\le\theta\le\pi$.

Отговор. $12\sqrt{3}$.

8. Да се намери дължината на дъгата от трактрисата

$$y=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x},$$

където $0<p\le x\le q\le a$.

Отговор. $a\ln\frac{a}{p}$.

§ 26. Криволинейни интеграли

Нека Γ е дъга, дефинирана с уравненията

$$x=f(t),$$
$$y=g(t),$$

където $\alpha\leq t\leq\beta$. Ние ще разделим интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали с помощта на точките

$$\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta,$$

ще означим с τ_i едно число от i-тия подинтервал $[t_{i-1}, t_i]$ и ще положим за краткост

$$x_i=f(t_i),\qquad y_i=g(t_i);$$
$$\xi_i=f(\tau_i),\qquad \eta_i=g(\tau_i).$$

Ако **функцията** $F(x, y)$ е дефинирана и непрекъсната върху графиката на Γ, а функцията $f(t)$ има непрекъсната производна в интервала $[\alpha, \beta]$, то сумите

$$S=\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i)\,(x_i-x_{i-1})$$

клонят към някаква граница I, когато дължините на подинтервалите $[t_{i-1}, t_i]$ клонят към нула. Това значи, че при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число δ по такъв начин, че ако дължините на всички подинтервали $[t_{i-1}, t_i]$ са по-малки от δ, да имаме

$$|I-S|<\varepsilon.$$

За да се убедим, че сумите S наистина имат граници, когато дължините на подинтервалите $[t_{i-1}, t_i]$ клонят към нула, преобразуваме разликата x_i-x_{i-1} с помощта на теоремата за крайните нараствания по следния начин:

$$x_i-x_{i-1}=f(t_i)-f(t_{i-1})=(t_i-t_{i-1})f'(\theta_i),$$

където θ_i е някое число, избрано по подходящ начин в интервала (t_{i-1}, t_i). По този начин ние добиваме възможност да представим сумата S във вида

$$S=\sum_{i=1}^{n} F[f(\tau_i),\ g(\tau_i)]f'(\theta_i)(t_i-t_{i-1}).$$

От друга страна, функцията $F[f(t), g(t)]$ е непрекъсната в интервала $[\alpha, \beta]$ и следователно сумите

$$S^*=\sum_{i=1}^{n} F[f(\tau_i),\ g(\tau_i)]f'(\tau_i)(t_i-t_{i-1})$$

клонят към интеграла

$$I=\int_{\alpha}^{\beta} F[f(t),\ g(t)]f'(t)\,dt,$$

когато дължините на подинтервалите $[t_{i-1}, t_i]$ клонят към нула. Това значи, че при всеки избор на положителното число ε имаме

$$|I-S^*|<\varepsilon,$$

когато подинтервалите $[t_{i-1}, t_i]$ са достатъчно малки.

Да разгледаме разликата

$$S-S^*=\sum_{i=1}^{n} F[f(\tau_i),\ g(\tau_i)](f'(\theta_i)-f'(\tau_i))(t_i-t_{i-1})$$

и да означим с M една горна граница на непрекъснатата функция $|F[f(t), g(t)]|$. Ако разглежданите подинтервали $[t_{i-1}, t_i]$ са достатъчно малки, то

$$|f'(\theta_i)-f'(\tau_i)|<\varepsilon,$$

защото $f'(t)$ е равномерно непрекъсната[1] функция, и следователно

$$|S-S^*|\leq\sum_{i=1}^{n} M\varepsilon(t_i-t_{i-1})=M(\beta-\alpha)\varepsilon.$$

Оттук, като вземем пред вид неравенството

$$|S-I|\leq|S-S^*|+|S^*-I|,$$

получаваме

$$|S-I|<\varepsilon[M(\beta-\alpha)+1].$$

С това ние показахме, че сумите S наистина имат граница, когато дължините на подинтервалите $[t_{i-1}, t_i]$ клонят към нула, и дори показахме, че тя има стойност

$$I=\int_{\alpha}^{\beta} F[f(t),\ g(t)]f'(t)\,dt.$$

[1] Функцията $f'(t)$ е равномерно непрекъсната, защото е непрекъсната в затворения интервал $[\alpha, \beta]$.

Тази граница се означава със символа

$$\int_{\Gamma} F(x, y)\,dx$$

и се нарича криволинеен интеграл на функцията $F(x, y)$, разпространен върху кривата Γ.

От изложеното по-горе е ясно, че

$$\int_{\Gamma} F(x, y)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} F[f(t), \quad g(t)]f'(t)\,dt.$$

Този резултат може да се използува за пресмятане на криволинейните интеграли.

Аналогично може да се дефинира криволинейният интеграл

$$\int_{\Gamma} F(x, y)\,dy$$

като граница на сумите

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i)\ (y_i-y_{i-1}),$$

когато дължините на подинтервалите $(t_{i-1}, t_i]$ клонят към нула. Най-сетне под

$$\int_{\Gamma} [P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy]$$

се разбира

$$\int_{\Gamma} P(x, y)\,dx+\int_{\Gamma} Q(x, y)\,dy.$$

Пример 1. Да се пресметне криволинейният интеграл

$$\int_{A} \frac{y\,dx}{x^2+y^2},$$

разпространен върху дъгата A, дефинирана с параметричните уравнения

(1) $$x=r\cos t,$$
$$y=r\sin t, \quad r>0,$$

където $0\leq t\leq\pi$.

Решение. Очевидно имаме

$$dx=-r\sin t\,dt.$$

Според установеното по-горе правило за пресмятане на криволинейни интеграли имаме

$$\int_{A} \frac{y\,dx}{x^2+y^2}=\int_{0}^{\pi} \frac{r\sin t\,(-r\sin t)\,dt}{(r\cos t)^2+(r\sin t)^2}=$$

$$=-\int_{0}^{\pi} \sin^2 t\,dt=-\int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=-\frac{\pi}{2}.$$

Пример 2. Да се пресметне криволинейният интеграл $\int_{B} \frac{y\,dx}{x^2+y^2}$, разпространен върху кривата B, дефинирана с параметричните уравнения

(2) $$x=-r\cos t,$$
$$y=r\sin t, \qquad r>0,$$

където $0\leq t\leq\pi$.

(Обърнете внимание върху това, че уравненията (1) и (2) представляват дъга от една и съща окръжност. По какво се различава разглежданият сега пример от предния?)

Решение.

$$\int_{B} \frac{y\,dx}{x^2+y^2}=\int_{0}^{\pi} \frac{r\sin t\,d(-r\cos t)}{r^2\cos^2 t+r^2\sin^2 t}=$$

$$=\int_{0}^{\pi} \sin^2 t\,dt=\int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=\frac{\pi}{2}.$$

§ 27. Криволинеен интеграл от тотален диференциал

Нека са дадени краен брой гладки дъги Γ_ν,

(1) $$x=f_\nu(t),$$
$$y=g_\nu(t),$$
$$\alpha_\nu\leq t\leq\beta_\nu,$$

всяка една от които има номер. Нека броят на дъгите е n. Ще казваме, че дъгите Γ_ν образуват път, ако началото на всяка дъга $\Gamma_{\nu+1}$, където $\nu\leq n-1$, съвпада с края на Γ_ν, т. е.

$$f_{\nu+1}(\alpha_{\nu+1})=f_\nu(\beta_\nu),$$
$$g_{\nu+1}(\alpha_{\nu+1})=g_\nu(\beta_\nu),$$
$$\nu=1, 2, \cdots, n-1.$$

Началото на Γ_1 ще наричаме начало на пътя, а края на Γ_n ще наричаме край на пътя. Ако началото и краят на пътя съвпадат, ще казваме, че той е затворен. Да означим с Γ пътя, определен от дъгите (1). Нека $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са две функции, които са дефинирани и непрекъснати върху графиката на всяка една от дъгите Γ_ν. По дефиниция ще положим

$$\int_\Gamma P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\Gamma_\nu} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy.$$

Нека в едно отворено множество G в равнината е дефинирана една функция $F(x, y)$, която в G притежава непрекъснати първи частни производни. Нека множеството G съдържа графиките на всичките дъги Γ_ν. Нека най-сетне (x_0, y_0) е началото, а (x_1, y_1) е краят на пътя Γ, който е определен от дъгите Γ_ν. В такъв случай

$$\int_{\Gamma_\nu} F'_x\,dx+F'_y\,dy=F(x_1, y_1)-F(x_0, y_0). \tag{2}$$

И наистина

$$\int_{\Gamma_\nu} F'_x\,dx+F'_y\,dy=\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\Gamma_\nu} F'_x\,dx+F'_y\,dy=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu}[F'_x(f_\nu(t),\ g_\nu(t))f'_\nu(t)+F'_y(f_\nu(t),g_\nu(t))g'_\nu(t)]\,dt=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}[F(f_\nu(\beta_\nu),\ g_\nu(\beta_\nu))-F(f_\nu(\alpha_\nu),\ g_\nu(\alpha_\nu))]=F(x_1, y_1)-F(x_0, y_0).$$

Специално, ако пътят Γ е затворен, равенството (2) приема вида

$$\int_\Gamma F'_x\,dx+F'_y\,dy=0.$$

Нека в едно отворено множество G са дадени две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Ако съществува функция $F(x, y)$ с непрекъснати частни производни до втори ред, за която

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x, y),\ \frac{\partial F}{\partial y}=Q(x, y)$$

в G, то функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имат непрекъснати първи частни производни и

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x},$$

а следователно

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{3}$$

Когато множеството G е звездообразно относно някоя негова точка (x_0, y_0), т. е. когато заедно с всяка своя точка (x, y) то съдържа и праволинейната отсечка, която съединява точките (x, y) и (x_0, y_0), обратното на горното твърдение е също тъй вярно. Това значи, че ако в едно отворено множество G, което е звездообразно относно някоя негова точка (x_0, y_0), са дефинирани две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, които имат непрекъснати частни производни от първи ред и удовлетворяват условието

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

съществува функция $F(x, y)$ в G, която притежава непрекъснати частни производни от втори ред и удовлетворява условията

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x, y),\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=Q(x, y).$$

И наистина да положим*

$$F(x, y)=(x-x_0)\int_0^1 P(x_0+t(x-x_0),\ y_0+t(y-y_0))\,dt+$$

$$+(y-y_0)\int_0^1 Q(x_0+t(x-x_0),\ y_0+t(y-y_0))\,dt.$$

Ние можем да направим това, защото точката $(x_0+t(x-x_0),\ y_0+t(y-y_0))$ описва отсечката, която съединява точките (x_0, y_0) и (x, y), когато t се мени в интервала $0\le t\le 1$, и следователно не напуска G поради условието за звездообразност.

* С други думи,

$$F(x, y)=\int_L P(\xi, \eta)\,d\xi+Q(\xi, \eta)\,d\eta,$$

където криволинейният интеграл е разпространен върху отсечката L с уравнения $\xi=x_0+t(x-x_0)$, $\eta=y_0+t(y-y_0)$, $0\le t\le 1$.

Очевидно

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\int_0^1 P\,dt+(x-x_0)\int_0^1 tP'_x\,dt+(y-y_0)\int_0^1 tQ'_x\,dt.$$

Като интегрираме по части, получаваме

$$\int_0^1 P\,dt=P(x,y)-\int_0^1 [tP'_x.(x-x_0)+tP'_y.(y-y_0)]\,dt$$

и следователно

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y)+(y-y_0)\int_0^1 t(Q'_x-P'_y)\,dt=P(x,y).$$

Аналогично намираме

$$\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y).$$

От изложеното се вижда, че ако в едно звездообразно множество G, съдържащо графиките на гладките дъги Γ_ν, които съставят един затворен път Γ, имаме две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ с непрекъснати първи частни производни, удовлетворяващи условието,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

то

$$\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy=0.$$

Това е едно важно равенство, което има многобройни приложения.

Предположението за звездообразност на G може да се замени с по-общо. Достатъчно е да се иска множеството G да бъде просто свързано, т. е. да съдържа всяко компактно множество, чийто контур принадлежи на G. На това обобщение няма да се спираме, защото няма да го използуваме.

§ 28. Приблизително пресмятане на интеграли

При някои задачи от приложната математика и физика се налага да познаваме поне приблизително (с една или с друга точност) стойността на даден интеграл. Обаче методите, които ние разгледахме, не ни дават на ръка средство за точното пресмятане на всякакви интеграли. Ето защо става нужда да прибягваме до приблизителни методи. Ние ще изложим в този параграф няколко такива метода.

Ние можем да пресметнем интеграла

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

с всяка точност, като изхождаме от дефиницията на понятието определен интеграл. Така, ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, то каквото и да е положително число ε, ние можем да изберем точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

по такъв начин, че осцилацията на функцията $f(x)$ да бъде по-малка[1] от ε във всеки един от подинтервалите $[x_{i-1}, x_i]$. Да означим с M_i и m_i точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$ и да разгледаме голямата и малката сума на Дарбу:

$$S=\sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1}),$$

$$s=\sum_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1}).$$

Ние знаем, че при $a<b$

$$s\leq I\leq S.$$

От друга страна, като вземем пред вид неравенството $M_i-m_i<\varepsilon$, получаваме

$$S-s=\sum_{i=1}^n (M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<\sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i-x_{i-1})=\varepsilon(b-a).$$

---

[1] Това ние можем да направим за всяка непрекъсната функция. Специално, ако функцията $f(x)$ удовлетворява условието на Липшиц

$$|f(x')-f(x'')|\leq k|x'-x''|,$$

достатъчно е да вземем $x_i-x_{i-1}<\frac{\varepsilon}{k}$, за да сме сигурни, че осцилацията на $f(x)$ е по-малка от ε във всеки един от подинтервалите $[x_{i-1}, x_i]$.

Този резултат ни учи, че като вземем било S, било s за приблизителна стойност на интеграла I, ние можем да постигнем всяка желана точност.

Но съществуват други методи, които се оказват по-удобни за практически цели. Така например, ако функцията $f(x)$ е два пъти диференцуема и има ограничена втора производна в интервала $[a, b]$, то целесъобразно е за приблизителна стойност на I да се вземе сумата

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}),$$

като при това интервалът $[a, b]$ се дели на равни части.[1]

Като имаме пред вид неравенствата

$$m_i \leq \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2} \leq M_i,$$

получаваме

$$s \leq \sigma \leq S,$$

откъдето е ясно, че сумите σ също както сумите s и S могат да се използуват за приблизително пресмятане на интеграла I.

По-прецизна оценка на грешката може да се направи така. Полагаме за удобство

$$\frac{x_{i-1}+x_i}{2} = c,$$

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{2} = h,$$

разглеждаме двете функции

$$\psi(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x)\,dx - t\,[f(c+t)+f(c-t)],$$

$$\varphi(t) = \psi(t) - \frac{t^3}{h^3}\psi(h)$$

[1] В този случай грешката намалява особено бързо с растенето на n. Както ще видим след малко, тази грешка при най-неблагоприятни обстоятелства е от порядъка на $\frac{1}{n^2}$.

при $0 \leq t \leq h$. Очевидно имаме

$$\varphi'(t) = \left[\int_{c-t}^{c+t} f(x)\,dx\right]' - [f(c+t)+f(c-t)] -$$

$$- t\,[f'(c+t) - f'(c-t)] - \frac{3t^2}{h^3}\psi(h).$$

Като вземем пред вид, че

$$\left[\int_{c-t}^{c+t} f(x)\,dx\right]' = \left[\int_{c-t}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{c+t} f(x)\,dx\right]' =$$

$$= f(c-t) + f(c+t),$$

получаваме

$$\varphi'(t) = -t[f'(c+t) - f'(c-t)] - \frac{3t^2}{h^3}\psi(h)$$

или прилагайки теоремата за крайните нараствания,

(1) $$\varphi'(t) = -2t^2 f''(\xi_i) - \frac{3t^2}{h^3}\psi(h),$$

където ξ_i е число между $c-t$ и $c+t$ и следователно между x_{i-1} и x_i.

От друга страна, имаме $\varphi(0) = \varphi(h) = 0$ и следователно има точка τ във вътрешността на интервала $(0, h)$, за която $\varphi'(\tau) = 0$. Специално, ако в равенството (1) поставим $t = \tau$, ще получим

$$\psi(h) = -\frac{2h^3}{3} f''(\xi_i),$$

откъдето

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_i).$$

Като дадем на i стойностите $1, 2, \ldots, n$ и съберем получените равенства, ще намерим

(2) $$\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_i).$$

Нека M е една горна граница на $|f''(x)|$ в интервала $[a, b]$. В такъв случай от равенството (2) получаваме

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i-x_{i-1})\right|\leq\frac{(b-a)^3Mn}{12n^3}=\frac{(b-a)^3M}{12n^2}.$$

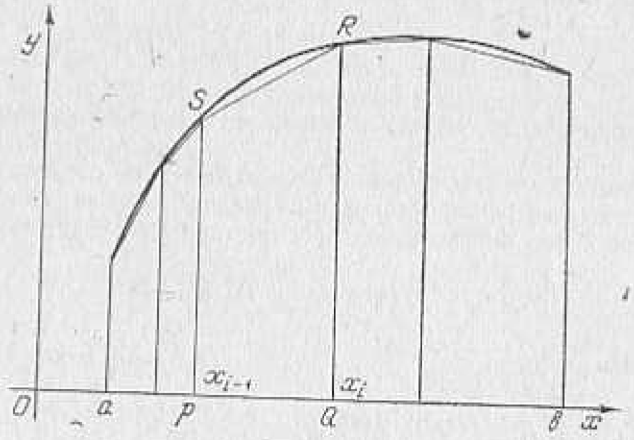
Оттук виждаме, че грешката, която правим при този метод, в най-благоприятния случай е от порядъка на $\frac{1}{n^2}$.

При $f(x)\geq 0$ може да се даде едно просто геометрично тълкуване на разгледания метод: изразът

$$\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i-x_{i-1})$$

представлява лицето на трапеца $PQRS$, който е изобразен на черт. 16; по този начин в приложения метод интегралът

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx,$$



Черт. 16

който представлява лицето на „криволинейния трапец"

$$x_{i-1}\leq x\leq x_i,$$
$$0\leq y\leq f(x),$$

се заменя с лицето на съответния праволинеен трапец $PQRS$. Поради това разгледания метод се нарича често правило на трапеците.

Има методи, при които грешката намалява още по-бързо.[1] Такова е например правилото на Симпсон (Simpson), което ще разгледаме сега. При това правило делим интервала $[a, b]$ на четен брой равни части с помощта на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{2n-1}<x_{2n}=b$$

и заменяме функцията $f(x)$ във всеки един от подинтервалите $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ с полином (най-много) от втора степен $P_i(x)$, стойностите на който съвпадат със стойностите на функцията $f(x)$ в точките x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i}. Както знаем, такъв полином има и той е само един (касае се за една съвсем специална интерполационна задача).

Ние ще представим за удобство полинома $P_i(x)$ във вида

$$P_i(x)=\alpha_{i0}+\alpha_{i1}(x-x_{2i-1})+\alpha_{i2}(x-x_{2i-1})^2$$

(което, както знаем, е възможно). Коефициентите α_{i0}, α_{i1}, α_{i2} се определят от условията

$$P_i(x_{2i-2})=f(x_{2i-2}),\quad P_i(x_{2i-1})=f(x_{2i-1}),\quad P_i(x_{2i})=f(x_{2i})$$

или

$$y_{2i-2}=\alpha_{i0}-\alpha_{i1}h+\alpha_{i2}h^2,$$
$$y_{2i-1}=\alpha_{i0},$$
$$y_{2i}=\alpha_{i0}+\alpha_{i1}h+\alpha_{i2}h^2,$$

където сме положили $f(x_\nu)=y_\nu$ и $\frac{b-a}{2n}=h$.

Очевидно имаме

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} P_i(x)\,dx=\alpha_{i0}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} dx+\alpha_{i1}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}}(x-x_{2i-1})\,dx+$$
$$+\alpha_{i2}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}}(x-x_{2i-1})^2\,dx=\frac{h}{3}(6\alpha_{i0}+2\alpha_{i2}h^2)=\frac{b-a}{6n}(y_{2i-2}+$$
$$+4y_{2i-1}+y_{2i});$$

така получаваме следната приблизителна стойност I^* за интересуващия ни интеграл:

[1] Поне когато подинтегралната функция $f(x)$ е диференцуема достатъчен брой пъти.

$$I^* = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} P_i(x)\,dx = \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^{n} (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) =$$

$$= \frac{b-a}{6n}[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots +$$

$$+ y_{2n-2})].$$

За да оценим грешката $|I - I^*|$, която правим, когато прилагаме формулата на Симпсон, полагаме $x_{2i-1} = c$ и разглеждаме двете помощни функции

$$\psi(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x)\,dx - \frac{t}{3}[f(c+t) + 4f(c) + f(c-t)],$$

$$\varphi(t) = \psi(t) - \frac{t^5}{h^5}\psi(h)$$

при $0 \leq t \leq h$. Като диференцираме три пъти $\varphi(t)$ и след третото диференциране приложим теоремата за крайните нараствания, ще получим

$$\varphi'(t) = \frac{2}{3}[f(c+t) - 2f(c) + f(c-t)] -$$

$$- \frac{1}{3}t[f'(c+t) - f'(c-t)] - \frac{5t^4}{h^5}\psi(h),$$

$$\varphi''(t) = \frac{1}{3}[f'(c+t) - f'(c-t)] -$$

$$- \frac{1}{3}t[f''(c+t) + f''(c-t)] - \frac{20t^3}{h^5}\psi(h),$$

$$\varphi'''(t) = -\frac{1}{3}t[f'''(c+t) - f'''(c-t)] - \frac{60t^2}{h^5}\psi(h) - \tag{3}$$

$$= -\frac{2}{3}t^2 f^{\mathrm{IV}}(\xi_t) - \frac{60t^2}{h^5}\psi(h).$$

Като вземем пред вид, че $\varphi(0) = \varphi(h) = 0$, заключаваме с помощта на теоремата на Рол, че има число τ_1 в отворения интервал $(0, h)$, за което $\varphi'(\tau_1) = 0$. Като вземем пред вид още, че $\varphi'(0) = 0$, заключаваме, че има число τ_2 в отворения интервал $(0, \tau_1)$, за което $\varphi''(\tau_2) = 0$. Най-сетне, като вземем пред вид, че $\varphi''(0) = 0$, заключаваме, че има число τ в отворения интервал $(0, \tau_2)$, за

което $\varphi'''(\tau) = 0$. Като поставим $t = \tau$ в равенството (3), ще получим

$$\psi(h) = -\frac{h^5}{90} f^{\mathrm{IV}}(\xi_i)$$

или

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx - \frac{b-a}{6n}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^5} f^{\mathrm{IV}}(\xi_i). \tag{4}$$

Давайки на i стойностите $1, 2, \ldots, n$ и събирайки получените неравенства, намираме

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^{n} (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) =$$

$$= -\frac{(b-a)^5}{2880n^5} \sum_{i=1}^{n} f^{\mathrm{IV}}(\xi_i).$$

Нека K е една горна граница на $|f^{\mathrm{IV}}(x)|$ в интервал $[a, b]$. В такъв случай равенството (4) ни дава

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^{n} (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) \right| \leq \frac{(b-a)^5 K}{2880n^4}.$$

Оттук ние виждаме, че грешката, която правим при метода на Симпсон, в най-неблагоприятния случай е от порядъка на $\frac{1}{n^4}$.

Накрая ще разгледаме метода на Котес (Cotes). При този метод избираме произволно n различни точки

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{5}$$

от дефиниционната област на функцията $f(x)$ и заменяме подинтегралната функция $f(x)$ с полином $\varphi(x)$ от възможно най-ниска степен, който съвпада с функцията $f(x)$ в избраните точки (5). Такъв полином ние можем да конструираме например с помощта на интерполационната формула на Лагранж

$$\varphi(x) = f(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} +$$

$$+ f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ f(x_n)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}.$$

В такъв случай, разглеждайки $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ като приближената стойност на интересуващия ни интеграл I, получаваме приблизителното равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + a_n f(x_n), \tag{6}$$

където сме положили за краткост

$$a_1 = \int_a^b \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}\,dx,$$

$$a_2 = \int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}\,dx, \tag{7}$$

. . . .

$$a_n = \int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}\,dx.$$

Пресмятането на коефициентите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не е свързано с никаква принципиална трудност, защото в десните страни на равенствата (7) имаме интеграли от полиноми. Тези коефициенти не зависят от функцията $f(x)$, обаче зависят от избора на точките (5). Приближеното равенство (6) е напълно точно, когато $f(x)$ е полином, чиято степен не надминава $n-1$. И наистина в такъв случай полиномът $f(x)-\varphi(x)$, чиято степен не надминава $n-1$, се анулира в n различни точки и следователно се анулира тъждествено. Оттук получаваме при всички стойности на x

$$f(x) = \varphi(x)$$

и следователно

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + a_n f(x_n).$$

§ 29. Несобствени интеграли

I. *Интеграли от неограничени функции*

Ние дефинирахме понятието определен интеграл за ограничени функции. В известни случаи обаче се оказва възможно да се разшири по един целесъобразен начин това понятие. Така например да разгледаме функцията

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

дефинирана с това условие при $0 \leq x < 1$. Тази функция не е интегруема в интервала $[0, 1]$, защото не е ограничена. Напротив, каквото и да е числото α, принадлежащо към отворения интервал $(0, 1)$, интегралът

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

е добре дефиниран, защото подинтегралната функция е непрекъсната в интервала $[0, \alpha]$. Очевидно имаме

$$F(\alpha) = \left| -2(1-x)^{\frac{1}{2}} \right|_0^\alpha = 2 - 2\sqrt{1-\alpha}.$$

В разглеждания специален случай функцията $F(\alpha)$ има граница, когато α клони към единица чрез стойности, по-малки от единица, и

$$\lim_{\alpha \to 1} F(\alpha) = 2.$$

Ние обикновено изразяваме този резултат, като казваме, че интегралът

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-x}}$$

съществува в несобствен смисъл, и пишем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2.$$

Изобщо, ако функцията $f(x)$ е интегруема[1] във всеки подинтервал $[a, \alpha]$, където $a < \alpha < b$, и интегралът

$$F(\alpha) = \int_a^\alpha f(x)\,dx, \quad a < \alpha < b,$$

има граница, когато α клони към b чрез стойности, по-малки от

[1] Тази функция може да бъде неограничена в интервала $a \leq x < b$.

b, то ние наричаме тази граница несобствен[1] интеграл от $f(x)$, разпространен върху интервала $[a, b]$, и я означаваме със символа

$$(1)\qquad \int_a^b f(x)\,dx,$$

така че

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to b}\int_a^\alpha f(x)\,dx.$$

Вместо да казваме, че съществува границата

$$\lim_{\alpha\to b} F(\alpha),$$

ние често казваме, че интегралът (1) съществува в несобствен смисъл или още, че този интеграл е сходящ. В противен случай казваме, че интегралът е разходящ.

Много от свойствата на несобствените интеграли приличат на съответните свойства на безкрайните редове. Така, ако интегралите

$$\int_a^b f_1(x)\,dx,\quad \int_a^b f_2(x)\,dx$$

са сходящи, то интегралите

$$I_1 = \int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\,dx,\ I_2 = \int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,dx$$

са също сходящи, като при това

$$I_1 = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx,\ I_2 = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

И наистина нека двете функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са интегруеми във всеки подинтервал $[a, \alpha]$, където $a<\alpha<b$. Полагайки

$$F_1(\alpha) = \int_a^\alpha f_1(x)\,dx,$$

[1] За разлика от определените интеграли, които ние разглеждахме досега и които се наричат понякога интеграли в собствен смисъл. Нека припомним, че понятието интеграл в собствен смисъл се дефинира за ограничени функции и за крайни интеграционни интервали.

$$F_2(\alpha) = \int_a^\alpha f_2(x)\,dx,$$

имаме

$$\int_a^\alpha [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = F_1(\alpha)+F_2(\alpha),$$

$$\int_a^\alpha [f_1(x)-f_2(x)]\,dx = F_1(\alpha)-F_2(\alpha).$$

От съществуването на границите

$$\lim_{\alpha\to b} F_1(\alpha),\quad \lim_{\alpha\to b} F_2(\alpha)$$

обаче следва съществуването и на границите

$$\lim_{\alpha\to b}[F_1(\alpha)+F_2(\alpha)] = \lim_{\alpha\to b} F_1(\alpha) + \lim_{\alpha\to b} F_2(\alpha),$$

$$\lim_{\alpha\to b}[F_1(\alpha)-F_2(\alpha)] = \lim_{\alpha\to b} F_1(\alpha) - \lim_{\alpha\to b} F_2(\alpha),$$

с което твърдението е доказано.

Ние ще дадем няколко достатъчни условия за сходимост на несобствени интеграли. За целта ще забележим предварително, че ако функцията $F(x)$ е дефинирана, монотонно растяща и ограничена при $a\leqq x<b$, то тя има граница, когато x клони към b (чрез стойности, по-малки от b). И наистина нека l е точната горна граница на $F(x)$. Избираме едно произволно положително число ε. Като вземем под внимание, че l е най-малката горна граница на $F(x)$, заключаваме, че $l-\varepsilon$ вече не е горна граница и следователно има поне една точка x_0, за която $F(x_0)>l-\varepsilon$. Като вземем под внимание, че $F(x)$ монотонно расте, получаваме при $x\geqq x_0$

$$F(x)\geqq F(x_0)$$

и следователно

$$F(x)>l-\varepsilon.$$

От друга страна, l е една горна граница на $F(x)$ и следователно

$$F(x)\leqq l,$$

т. е.

$$0\leqq l-F(x)<\varepsilon$$

при $x\geqq x_0$. С това ние показахме, че $F(x)$ клони към l, когато x клони към b.

На това място ние ще отбележим още следното: ако функцията $F(x)$ е дефинирана при $a \leq x < b$, монотонно расте и клони към l при $x \to b$, то $F(x) \leq l$. И наистина да допуснем, че в някоя точка x_0 имаме $F(x_0) > l$. От друга страна, имаме $\lim\limits_{x \to b} F(x) = l$ и следователно, като изберем едно положително число ε, ще имаме

$$|F(x) - l| < \varepsilon$$

при всички стойности на x, които са достатъчно близко до b (и, разбира се, по-малки от него). Специално, ако изберем

$$\varepsilon = F(x_0) - l,$$

ще получим

$$|F(x) - l| < F(x_0) - l$$

и толкова повече

$$F(x) - l < F(x_0) - l,$$

откъдето

$$F(x) < F(x_0),$$

което противоречи на условието за монотонното растене на $F(x)$.

Получените по този начин резултати ни позволяват да установим следния принцип за сравняване на несобствени интеграли (аналогичен на принципа за сравняване на редовете): ако двете функции $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми във всеки подинтервал $[a, \alpha]$, където $a < \alpha < b$, ако

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

и ако интегралът

$$\int_a^b g(x)\, dx$$

е сходящ, то интегралът

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

е също сходящ.

И наистина функциите

$$F(\alpha) = \int_a^\alpha f(x)\, dx,$$

$$G(\alpha) = \int_a^\alpha g(x)\, dx$$

са монотонно растящи при $a < \alpha < b$, защото имаме

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \geq 0,$$

$$G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha^\beta g(x)\, dx \geq 0,$$

когато $\alpha \leq \beta$. От друга страна, неравенството $f(x) \leq g(x)$ ни дава

$$F(\alpha) \leq G(\alpha)$$

и следователно

$$F(\alpha) \leq \int_a^b g(x)\, dx,$$

защото

$$G(\alpha) \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

С това ние показахме, че монотонно растящата функция $F(\alpha)$ е ограничена и следователно има граница, когато α клони към b (чрез стойности, по-малки от b).

Нека функцията $f(x)$ е интегруема във всеки подинтервал $[a, \alpha]$, където $a < \alpha < b$. Току-що установеният резултат ни позволява да покажем, че от сходимостта на интеграла

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

следва сходимостта на интеграла[1]

$$\int_a^b f(x)\, dx. \tag{2}$$

[1] В случая, когато интегралът $\int_a^b |f(x)|\, dx$ е сходящ, ние казваме, че интегралът $\int_a^b f(x)\, dx$ е абсолютно сходящ.

За да покажем това, разглеждаме двата интеграла

$$\int_a^b \frac{|f(x)|+f(x)}{2}\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b \frac{|f(x)|-f(x)}{2}\,dx.$$

Те са сходящи, защото

$$0 \leq \frac{|f(x)|+f(x)}{2} \leq |f(x)|,$$

$$0 \leq \frac{|f(x)|-f(x)}{2} \leq |f(x)|.$$

Като вземем пред вид, че

$$f(x) = \frac{|f(x)|+f(x)}{2} - \frac{|f(x)|-f(x)}{2},$$

заключаваме, че интересуващият ни интеграл (2) е също сходящ.

В много случаи е от полза следното достатъчно условие за сходимост или разходимост на несобствени интеграли. Нека функцията $f(x)$ е интегруема във всеки подинтервал $[a, \alpha]$, където $a<\alpha<b$. Ако тази функция удовлетворява неравенството

$$(3) \qquad |f(x)| \leq \frac{A}{(b-x)^\lambda},$$

където $\lambda<1$ (A и λ са константи), то интегралът

$$(4) \qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

е сходящ; ако ли пък

$$(5) \qquad f(x) \geq \frac{A}{b-x},$$

където $A>0$, то интегралът (4) е разходящ.

И наистина интегралът

$$\int_a^b \frac{A}{(b-x)^\lambda}\,dx$$

е сходящ при $\lambda<1$, защото при $a<\alpha<b$ имаме

$$\int_a^\alpha \frac{A}{(b-x)^\lambda}\,dx = \left| \frac{-A}{(1-\lambda)(b-x)^{-1+\lambda}} \right|_a^\alpha =$$

$$= \frac{A}{(1-\lambda)(b-a)^{-1+\lambda}} - \frac{A}{(1-\lambda)(b-\alpha)^{-1+\lambda}}$$

и следователно границата

$$\lim_{\alpha\to b} \int_a^\alpha \frac{A}{(b-x)^\lambda}\,dx$$

съществува. Като вземем пред вид неравенството (3), заключаваме с помощта на принципа за сравняване на интегралите, че интегралът (4) е абсолютно сходящ и следователно е сходящ.

От друга страна, интегралът

$$(6) \qquad \int_a^b \frac{A\,dx}{b-x}, \quad A>0,$$

е разходящ, защото при $a<\alpha<b$ имаме

$$\int_a^\alpha \frac{A\,dx}{b-x} = \Big| -A\ln(b-x) \Big|_a^\alpha = A\ln(b-a) - A\ln(b-\alpha)$$

и следователно интегралът

$$\int_a^\alpha \frac{A\,dx}{b-x}$$

расте неограничено при $\alpha \to b$. Оттук заключаваме, че интегралът (4) също не може да бъде сходящ, защото в противен случай от неравенството (5) и от принципа за сравняване на интегралите би следвала сходимостта на интеграла (6), което, както видяхме, не е вярно.

Дотук ние предполагахме, че ни е дадена функция, която е дефинирана (поне) в интервала $a \leq x < b$ и е интегруема във всеки подинтервал $[a, \alpha]$, където $a<\alpha<b$. В такъв случай ще казваме, че тази функция няма друга особеност освен евентуално около b. Ние ще предоставим на читателя сам да дефинира по този образец понятието функция, която няма други особености в даден интервал освен евентуално около краен брой негови точки, и да обобщи за този случай понятието несобствен интеграл.

II. Интеграли с безкрайни интеграционни граници

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана при $x \geq a$ и интегруема в собствен или несобствен смисъл във всеки интервал $[a, p]$, където $p>a$. Ние можем да образуваме интеграла

$$F(p) = \int_a^p f(x)\,dx$$

при $p > a$, колкото и голямо да е числото p. Ако съществува границата

(7) $$\lim_{p\to\infty} F(p),$$

то тази граница се нарича несобствен интеграл на $f(x)$, разпространен върху безкрайния интервал $a \leqq x$, и се означава със символи

(8) $$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Аналогично се дефинира интегралът

(9) $$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx,$$

като

(10) $$\lim_{q\to-\infty} \int_q^a f(x)\,dx.$$

Най-сетне под

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$$

се разбира сумата

$$\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

И тук, вместо да казваме, че съществува границата (7) или (10), ние често казваме съответно, че интегралът (8) или (9) е сходящ.

Пример. Очевидно имаме

$$\int_0^p e^{-x}\,dx = \left. -e^{-x} \right|_0^p = 1 - e^{-p}$$

и следователно

$$\lim_{p\to\infty} \int_0^p e^{-x}\,dx = 1.$$

Използувайки въведената по-горе терминология, можем да кажем, че интегралът

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx$$

е сходящ и има стойност 1.

Не е трудно да се установи, че и тук е валиден принципът за сравняване на несобствени интеграли, който може да се формулира по следния начин: ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани при $x \geqq a$ и са интегруеми във всеки интервал $a \leqq x \leqq p$, колкото и голямо да бъде числото p, ако $0 \leqq f(x) \leqq g(x)$ и ако интегралът

$$\int_0^\infty g(x)\,dx$$

е сходящ, то интегралът

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

е сходящ. Ние ще предоставим този път доказателството на читателя.

Ако интегралът

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

е сходящ, казваме, че интегралът

(11) $$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

е абсолютно сходящ. Нека читателят сам докаже, че всеки абсолютно сходящ несобствен интеграл от вида (11), където функцията $f(x)$ е интегруема във всеки интервал $a \leqq x \leqq p$, е сходящ.

В много случаи е от полза следното достатъчно условие за сходимост или разходимост на интеграли: ако функцията $f(x)$ е дефинирана при $x \geq a$, интегруема е във всеки интервал $a \leq x \leq p$ и удовлетворява неравенството

(12) $$|f(x)| \leq \frac{A}{x^\lambda}$$

при всички достатъчно големи стойности на x, където $\lambda > 1$, то интегралът

(13) $$\int_a^\infty f(x)\, dx$$

е сходящ; ако ли пък при достатъчно големи стойности на x е изпълнено неравенството

(14) $$f(x) \geq \frac{A}{x},$$

където $A > 0$, то интегралът (13) е разходящ.

И наистина при $c > 0$ и $\lambda > 1$ интегралът

$$\int_c^\infty \frac{A dx}{x^\lambda}$$

е сходящ, защото

$$\int_c^p \frac{A dx}{x^\lambda} = \left|\frac{A}{(1-\lambda)x^{\lambda-1}}\right|_c^p = \frac{A}{(1-\lambda)p^{\lambda-1}} - \frac{A}{(1-\lambda)c^{\lambda-1}}$$

и следователно границата

$$\lim_{p\to\infty} \int_c^p \frac{A dx}{x^\lambda}$$

съществува. Оттук и от неравенството (12) заключаваме с помощта на принципа за сравняване на интегралите, че интегралът

$$\int_a^\infty | \ (x)|\, dx,$$

а оттук и интегралът (13) е сходящ.

При $A > 0$ интегралът

(15) $$\int_c^\infty \frac{A dx}{x}$$

е разходящ, защото интегралът

$$\int_c^p \frac{A dx}{x} = A \ln p - A \ln c, \quad c > 0,$$

расте неограничено заедно с p. Ако допуснем за момент, че интегралът (13) е сходящ, бихме могли да заключим от неравенството (14), че интегралът (15) е също сходящ, което, както видяхме, не е вярно.

Пример 1. Да се покаже, че интегралът[1]

(16) $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

е сходящ.

Решение. Разглеждаме функцията

$$F(p) = \int_0^p \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Очевидно имаме

$$F(p) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_1^p \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Интегрирайки по части, получаваме

$$\int_1^p \frac{\sin x}{x}\, dx = -\int_1^p \frac{d \cos x}{x} = \cos 1 - \frac{\cos p}{p} - \int_1^p \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

Границата

$$\lim_{p\to\infty} \int_1^p \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

съществува, защото

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

и следователно интегралът

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

[1] При $x=0$ под $\frac{\sin x}{x}$ разбираме 1.

е сходящ. Като вземем пред вид, че границата

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\cos p}{p}$$

също съществува, заключаваме, че съществува и границата $\lim_{p\to\infty} F_1(p)$, т. е. интегралът (16) е сходящ.

Пример 2. Да се покаже, че интегралът

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx$$

е сходящ.

Упътване. Разгледайте функцията

$$F(p) = \int_0^p \sin x^2\, dx = \int_0^1 \sin x^2\, dx + \int_1^p \sin x^2\, dx.$$

Направете в интеграла

$$\int_1^p \sin x^2\, dx$$

субституцията $x=\sqrt{t}$ и интегрирайте по части.

III. Интегрален критерий на Коши за сходимост

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана, монотонно намаляваща и неотрицателна при $x \geqq 0$. В такъв случай редът

$$f(0)+f(1)+f(2)+\cdots$$

е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ интегралът

$$\int_0^\infty f(x)\, dx.$$

Доказателство. При $k-1 \leqq x \leqq k$ имаме очевидно

$$f(k) \leqq f(x) \leqq f(k-1)$$

и следователно

$$\int_{k-1}^k f(k)\, dx \leqq \int_{k-1}^k f(x)\, dx \leqq \int_{k-1}^k f(k-1)\, dx$$

или още

$$f(k) \leqq \int_{k-1}^k f(x) dx \leqq f(k-1).$$

Давайки на k стойностите $1, 2, \ldots, n$ и събирайки получените неравенства, намираме

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n) \leqq \int_0^n f(x)\, dx \leqq f(0)+f(1)+\cdots+f(n-1).$$

Ако допуснем, че интегралът

$$\int_0^\infty f(x)\, dx$$

е сходящ, то от неравенството

$$\int_0^n f(x)\, dx \leqq \int_0^\infty f(x)\, dx$$

получаваме

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n) \leqq \int_0^\infty f(x)\, dx$$

или още

$$f(0)+f(1)+\cdots+f(n) \leqq f(0)+\int_0^\infty f(x)\, dx,$$

откъдето заключаваме, че редът

$$f(0)+f(1)+f(2)+\cdots \tag{17}$$

е сходящ, защото членовете му са неотрицателни и редицата от частичните му суми е ограничена.

Обратно, нека редът (17) е сходящ и S е неговата сума. Каквото и да е положителното число p, ние можем да изберем цяло число n, по-голямо от p. В такъв случай имаме

$$\int_0^p f(x)\, dx \leqq \int_0^n f(x)\, dx$$

и следователно

$$\int_0^p f(x)\, dx \leqq f(0)+f(1)+\cdots+f(n-1) \leqq S,$$

нещо, което е достатъчно да твърдим, че интегралът

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

е сходящ.

Пример. Редът

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu \ln \nu}$$

е разходящ. И наистина функцията

$$\frac{1}{(x+2)\ln(x+2)}$$

е неотрицателна и монотонно намаляваща при $x \geqq 0$, а функцията

$$F(p)=\int_0^p \frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)}=\int_0^p \frac{d\ln(x+2)}{\ln(x+2)}=$$

$$=\ln\ln(p+2)-\ln\ln 2$$

расте неограничено заедно с p, т. е. интегралът

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)}$$

е разходящ.

§ 30. Граничен преход под знака на интеграла

Да разгледаме редицата

(1) $$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots$$

с общ член

$$f_n(x)=n(n+1)(1-x)x^{n-1}.$$

Очевидно имаме

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=n(n+1)\int_0^1 x^{n-1}\,dx-n(n+1)\int_0^1 x^n\,dx=1$$

и следователно

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=1.$$

От друга страна, не е трудно да се види, че редицата (1) клони към нула при $0 \leqq x \leqq 1$. И наистина при $x=0$ и $x=1$ това е очевидно. За да се убедим в това и при $0<x<1$, образуваме реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

и установяваме, като си послужим например с критерия на Даламбер, че този ред е сходящ. По такъв начин получаваме

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx=\int_0^1 0\,dx=0.$$

От този пример виждаме, че може да се случи да имаме

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Толкова по-интересно е, че е в сила следната теорема:

Ако функциите $f_n(x)$ са непрекъснати в крайния и затворен интервал $[a, b]$ и ако редицата

(2) $$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots$$

е равномерно сходяща, то границата

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

съществува и

(3) $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Доказателство. Ние ще пишем за краткост

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x).$$

Функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, защото функциите $f_n(x)$ са непрекъснати и редицата (2) е равномерно сходяща. Това обстоятелство ни позволява да образуваме интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Избираме едно произволно положително число ε. В такъв случай ние можем да намерим число ν по такъв начин, че при $n>\nu$ и при всички стойности на x от интервала $[a, b]$ да имаме

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Така получаваме при $n>\nu$ следните неравенства:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b f_n(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b [f(x)-f_n(x)]\,dx\right|\leq$$

$$\leq\int_a^b |f(x)-f_n(x)|\,dx\leq\varepsilon(b-a),$$

с което интересуващата ни теорема е доказана.

Нека обърнем внимание върху това, че при безкраен интеграционен интервал равномерната сходимост не е достатъчна за валидността на равенството (3). Така например редицата с общ член

$$f_n(x)=\frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}$$

равномерно клони към нула при $x\geq 0$, защото

$$|f_n(x)|\leq\frac{1}{n};$$

въпреки това

$$\int_0^\infty f_n(x)\,dx=\lim_{p\to\infty}\int_0^p\frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}\,dx=\lim_{p\to\infty}\left|-e^{-\frac{x}{n}}\right|_0^p=$$

$$=\lim_{p\to\infty}(1-e^{-\frac{p}{n}})=1$$

и следователно

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,dx\neq 0.$$

Теоремата, която доказахме в този параграф, може да се редактира още и така:

Нека редът

$$f(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots,$$

членовете на който са непрекъснати функции на x в интервала $[a, b]$, е равномерно сходящ в този интервал. В такъв случай редът

$$(4)\qquad \int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\cdots$$

е сходящ и

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\cdots$$

За да докажем това, полагаме

$$f_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x),$$

откъдето получаваме чрез почленно интегриране

$$\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\cdots+\int_a^b u_n(x)\,dx.$$

От друга страна, редицата с общ член $f_n(x)$ равномерно клони към $f(x)$ и следователно

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\int_a^b u_\nu(x)\,dx,$$

което означава, че редът (4) е сходящ и

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_a^b u_\nu(x)\,dx.$$

Във връзка с разглеждания в този параграф въпрос за граничен преход под знака на интеграла ние ще докажем следната теорема, върху която може да се изгради едно важно обобщение на понятието интеграл:

Нека

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\cdots$$

е една почти навсякъде сходяща в интервала $a \leq x \leq b$ редица от интегруеми в Риманов смисъл функции, за която съответната редица от интеграли

$$\int_a^b f_1(x)\,dx, \int_a^b f_2(x)\,dx, \ldots$$

е ограничена; ако почти при всички стойности на x от интервала $[a, b]$ тази редица от функции монотонно намалява и $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \leq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \leq 0.$$

Доказателство. Ние ще извършим доказателството от противното. Нека G е множеството от точките от интервала $[a, b]$, където е нарушено поне едно от условията:

1) Всичките функции $f_n(x)$ са непрекъснати.
2) $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ при всички цели положителни стойности на n.
3) $\lim f_n(x)$ съществува.
4) $\lim f_n(x) \leq 0$.

Очевидно множеството G има мярка нула в смисъл на Лебег—Борел.

Нека $[c, d]$, където $c < d$, е кой да е подинтервал на интервала $[a, b]$. Очевидно

$$\int_c^d f_n(x)\,dx = \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^c f_n(x)\,dx - \int_d^b f_n(x)\,dx \geq$$

$$\geq \lim \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^c f_1(x)\,dx - \int_d^b f_1(x)\,dx,$$

т. е. монотонно намаляващата редица

$$\int_c^d f_1(x)\,dx, \int_c^d f_2(x)\,dx, \int_c^d f_3(x)\,dx, \ldots$$

е сходяща. Да положим

$$\lim \int_c^d f_n(x)\,dx = I_c^d.$$

Според нашето допускане имаме

$$I_a^b > 0.$$

Да покрием множеството G с такава редица от отворени интервали (p_ν, q_ν), където $p_\nu < q_\nu$, че да имаме

$$M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_\nu(x)\,dx < I_a^b,$$

където M е една положителна горна граница на $f_1(x)$, а $\varphi_\nu(x)$ е характеристична[1] функция на интервала (p_ν, q_ν). Това е възможно да се направи, защото множеството G има мярка нула и

$$\int_a^b \varphi_\nu(x)\,dx = \int_a^{p_\nu} \varphi_\nu(x)\,dx + \int_{p_\nu}^{q_\nu} \varphi_\nu(x)\,dx + \int_{q_\nu}^b \varphi_\nu(x)\,dx = \int_{p_\nu}^{q_\nu} dx = q_\nu - p_\nu.$$

По такъв начин, ако положителното число ε е достатъчно малко ще имаме

$$I_a^b > \varepsilon(b-a) + M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_\nu(x)\,dx.$$

Делим интервала $[a, b]$ на две равни части и означаваме с $[a_1, b_1]$ онази половина, за която

$$I_{a_1}^{b_1} > \varepsilon(b_1 - a_1) + M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{a_1}^{b_1} \varphi_\nu(x)\,dx.$$

Такава половина сигурно съществува, защото в противен случай, полагайки $c = \frac{a+b}{2}$, ще имаме

$$I_a^c \leq \varepsilon(c-a) + M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^c \varphi_\nu(x)\,dx,$$

$$I_c^b \leq \varepsilon(b-c) + M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_c^b \varphi_\nu(x)\,dx,$$

откъдето чрез почленно събиране ще получим

$$I_a^b \leq \varepsilon(b-a) + M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_\nu(x)\,dx,$$

което не е вярно.

[1] Относно дефиницията вж. § 11 на тази глава.

По-нататък делим интервала $[a_1, b_1]$ на две равни части и означаваме с $[a_2, b_2]$ сигурно съществуващата половина, за която

$$I_{a_2}^{b_2} > \varepsilon (b_2 - a_2) + M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{a_2}^{b_2} \varphi_\nu (x)\, dx.$$

Продължавайки този процес неограничено, получаваме една Канторова система от интервали $[a_n, b_n]$, подчинени на условието

$$I_{a_n}^{b_n} > \varepsilon (b_n - a_n) + M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} \varphi_\nu (x)\, dx.$$

Нека x_0 е точката, която принадлежи на всички интервали от системата. Ще покажем, че x_0 не принадлежи на G. И наистина в противен случай точката x_0 ще бъде вътрешна за някой покриващ интервал (p_k, q_k) и следователно при достатъчно голяма стойност на n интервалът $[a_n, b_n]$ ще се съдържа изцяло в (p_k, q_k), поради което

$$\int_{a_n}^{b_n} \varphi_k (t)\, dt = \int_{a_n}^{b_n} dt = b_n - a_n,$$

откъдето

$$I_{a_n}^{b_n} > M (b_n - a_n)$$

и толкова повече

$$\int_{a_n}^{b_n} f_1 (x)\, dx > M (b_n - a_n);$$

а това не е възможно, защото

$$f_1 (x) \leqq M.$$

И така точката x_0 не принадлежи на G и следователно $\lim f_n(x_0) \leqq 0$. Оттук заключаваме, че при достатъчно голяма стойност на m ще имаме $f_m (x_0) < \varepsilon$. Нека n е толкова голямо, че при всяко x от интервала $[a_n, b_n]$ да имаме $f_m (x) < \varepsilon$. Това е възможно, защото функцията $f_m (x)$ е непрекъсната в точката x_0, а дължината на интервала $[a_n, b_n]$ клони към нула, когато n расте неограничено. По такъв начин получаваме

$$\int_{a_n}^{b_n} f_m (x)\, dx \leqq \varepsilon (b_n - a_n)$$

и следователно

$$I_{a_n}^{b_n} \leqq \varepsilon (b_n - a_n),$$

което противоречи на неравенството

$$I_{a_n}^{b_n} > \varepsilon (b_n - a_n) + M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} \varphi_\nu (t)\, dt.$$

С това доказателството е завършено.

Преминаваме към обобщението на понятието интеграл, за което споменахме по-горе. За тази цел ще дадем някои дефиниции.

Интеграла

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

ще наричаме първа[1] интегрална норма на функцията $f(x)$.

Ще казваме, че една редица

$$f_1 (x),\ f_2 (x), \ldots \tag{4}$$

от интегруеми в интервала (a, b) функции удовлетворява условието на Коши относно първата интегрална норма в този интервал, ако при всеки избор на положителното число ε е изпълнено неравенството

$$\int_a^b |f_n (x) - f_m (x)|\, dx < \varepsilon$$

при всички достатъчно големи цели стойности на n и m.

Ако редицата (3) от интегруеми в интервала (a, b) функции удовлетворява условието на Коши относно първата интегрална норма, то редицата

$$\int_a^b f_1 (x)\, dx,\ \int_a^b f_2 (x)\, dx, \ldots$$

[1] По-общо n-та интегрална норма на функцията $f(x)$ се нарича изразът

$$\sqrt[n]{\int_a^b |f(x)|^n\, dx}, \text{ където } n \geqq 1.$$

е сходяща, защото

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f_m(x)\,dx\right|\leqq\int_a^b |f_n(x)-f_m(x)|\,dx$$

и следователно каквото и да бъде положителното число ε, неравенството

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f_m(x)\,dx\right|\leqq\varepsilon$$

е изпълнено при всички достатъчно големи цели стойности на n и m.

Една функция $f(x)$, дефинирана почти навсякъде в един интервал (a, b), ще наричаме сумируема, ако съществува редица от непрекъснати функции

$$f_1(x), f_2(x), \cdots,$$

която удовлетворява условието на Коши относно първата интегрална норма и клони почти навсякъде към $f(x)$ в този интервал. В такъв случай границата на редицата

$$\int_a^b f_1(x)\,dx, \int_a^b f_2(x)\,dx, \cdots$$

(която, както видяхме, сигурно съществува) ще наричаме Лебегов интеграл на функцията $f(x)$ върху интервала (a, b).

За да се убедим в еднозначността на така дадената дефиниция, разглеждаме още една редица

(6) $$g_1(x), g_2(x), \cdots$$

от непрекъснати функции, която удовлетворява условието на Коши относно първата интегрална норма и клони почти навсякъде към $f(x)$.

Избираме редица от цели положителни числа

$$n_1<n_2<n_3<\cdots$$

по такъв начин, че да имаме

$$\int_a^b \left|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)\right|dx\leqq\frac{1}{2^i}\quad(i=1, 2, 3, \cdots),$$

$$\int_a^b \left|g_{n_{i+1}}(x)-g_{n_i}(x)\right|dx\leqq\frac{1}{2^i}\quad(i=1, 2, 3, \cdots).$$

Това е възможно да се направи, защото редиците (5) и (6) удовлетворяват условието на Коши относно първата интегрална норма. Очевидно имаме почти при всяко x

$$f_{n_p}(x)+\sum_{i=p}^{\infty}\left[f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)\right]=$$

$$=g_{n_p}(x)+\sum_{i=p}^{\infty}\left[g_{n_{i+1}}(x)-g_{n_i}(x)\right]$$

и следователно

$$f_{n_p}(x)-g_{n_p}(x)-\sum_{i=p}^{\infty}\left|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)\right|-\sum_{i=p}^{\infty}\left|g_{n_{i+1}}(x)-g_{n_i}(x)\right|\leqq 0.$$

По такъв начин, като вземем под внимание, че редицата от непрекъснати функции с общ член

$$\varphi_m(x)=f_{n_p}(x)-g_{n_p}(x)-\sum_{i=p}^{p+m}\left|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)\right|-$$

$$-\sum_{i=p}^{p+m}\left|g_{n_{i+1}}(x)-g_{n_i}(x)\right|$$

почти при всяко x, монотонно намалявайки, клони към граница която е по-малка или равна на нула, а редицата от интегралите

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,dx\geqq\int_a^b f_{n_p}(x)\,dx-\int_a^b g_{n_p}(x)\,dx-2\sum_{i=p}^{\infty}\frac{1}{2^i}$$

е ограничена, заключваме, че

$$\lim\int_a^b \varphi_m(x)\,dx\leqq 0,$$

т. е.

$$\int_a^b f_{n_p}(x)\,dx-\int_a^b g_{n_p}(x)\,dx-\sum_{i=p}^{\infty}\int_a^b |f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)|\,dx-$$

$$-\sum_{i=p}^{\infty}\int_a^b |g_{n_{i+1}}(x)-g_{n_i}(x)|\,dx\leqq 0$$

и следователно

$$\int_a^b f_{n_p}(x)\,dx-\int_a^b g_{n_p}(x)\,dx\leqq\sum_{i=p}^{\infty}\frac{1}{2^i}+\sum_{i=p}^{\infty}\frac{1}{2^i},$$

откъдето

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f_{n_p}(x)\,dx\leqq\lim_{p\to\infty}\int_a^b g_{n_p}(x)\,dx.$$

Аналогично получаваме

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g_{n_p}(x)\,dx\leqq\lim_{p\to\infty}\int_a^b f_{n_p}(x)\,dx,$$

което ни дава окончателно

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\,dx.$$

§ 31. Интеграли, зависещи от параметри. Диференциране под знака на интеграла

Нека функцията $f(x, \alpha)$ е дефинирана в правоъгълника[1]

(1) $$a\leqq x\leqq b,$$
$$c\leqq\alpha\leqq d.$$

Ако $f(x, \alpha)$ е интегруема функция на x в интервала $[a, b]$ при всяко фиксирано α от интервала $[c, d]$, можем да образуваме интеграла

[1] Тук се иска правоъгълникът да бъде затворен и краен.

$$\int_a^b f(x,\alpha)\,dx.$$

Стойността на този интеграл може евентуално да се мени, когато α се изменя. Тя обаче е еднозначно дефинирана, когато α е дадено, и следователно представлява една функция на α, добре дефинирана в интервала $[c, d]$. Ние ще означим тази функция с $F(\alpha)$, така че

(2) $$F(\alpha)=\int_a^b f(x, \alpha)\,dx.$$

Пример. Интегралът

$$\int_0^{\pi}\cos(\alpha+x)\,dx=\Big|\sin(\alpha+x)\Big|_0^{\pi}=\sin(\alpha+\pi)-\sin\alpha=-2\sin\alpha$$

представлява една функция на α (нека обърнем внимание обаче, че неопределеният интеграл

$$\int\cos(\alpha+x)\,dx=\sin(\alpha+x)$$

зависи не само от α, но и от x).

Ако $f(x, \alpha)$ е непрекъсната функция на двата си аргумента в правоъгълника (1), интегралът (2) е непрекъсната функция на α. И наистина нека α_0 е коя да е точка от интервала $[c, d]$ и ε е едно произволно положително число. Избираме положителното число δ по такъв начин, че при $|\alpha-\alpha_0|<\delta$ и $c\leqq\alpha\leqq d$ да имаме

$$|f(x,\alpha)-f(x, \alpha_0)|<\varepsilon$$

за всички стойности на x от интервала $[a, b]$. Това може да се направи, защото функцията $f(x, \alpha)$ е непрекъсната в крайния и затворен правоъгълник (1) и следователно е равномерно непрекъсната в същия правоъгълник.

При тези предположения очевидно

$$|F(\alpha)-F(\alpha_0)|=\left|\int_a^b[f(x, \alpha)-f(x, \alpha_0)]\,dx\right|\leqq$$

$$\leqq\int_a^b|f(x, \alpha)-f(x, \alpha_0)|\,dx\leqq\varepsilon(b-a).$$

с което е установена непрекъснатостта на функцията $F(\alpha)$ в точката α_0.

Не е трудно да се докаже и следната теорема, която има многобройни приложения:

Нека функцията $f(x, \alpha)$ е дефинирана в правоъгълника

$$(3) \qquad \begin{aligned} a \leq x \leq b, \\ c \leq \alpha \leq d, \end{aligned}$$

интегруема в интервала $[a, b]$ при всяко фиксирано α и диференцуема частно спрямо α при всяко фиксирано x; нека освен това частната производна $f_\alpha'(x, \alpha)$ е непрекъсната в правоъгълника (3). При тези предположения функцията

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

е диференцуема в интервала $[c, d]$ и при всяко α_0 от този интервал

$$F'(\alpha_0) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha_0)\, dx.$$

И наистина при $h \neq 0$ и $c \leq \alpha_0 + h \leq d$ имаме

$$\frac{F(\alpha_0+h)-F(\alpha_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_a^b [f(x, \alpha_0+h) - f(x, \alpha_0)]\, dx.$$

От друга страна, според теоремата за крайните нараствания

$$f(x, \alpha_0+h) - f(x, \alpha_0) = h f_\alpha'(x, \alpha_0+\theta h),$$

където числото θ се намира в отворения интервал $(0, 1)$ и може да се мени заедно с x и h. Оттук получаваме

$$\frac{F(\alpha_0+h)-F(\alpha_0)}{h} - \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha_0)\, dx = \int_a^b [f_\alpha'(x, \alpha_0+\theta h) - f'_\alpha(x, \alpha_0)]\, dx$$

и следователно

$$\left|\frac{F(\alpha_0+h)-F(\alpha_0)}{h} - \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha_0)\, dx\right| \leq \int_a^b |f'_\alpha(x, \alpha_0+\theta h) - f'_\alpha(x, \alpha_0)|\, dx.$$

От друга страна, функцията $f_\alpha'(x, \alpha)$ е непрекъсната в крайния и затворен правоъгълник (3) и следователно е равномерно непрекъсната. Това обстоятелство ни позволява да твърдим, че при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число δ по такъв начин, че при $|k| < \delta$, $c \leq \alpha_0 + k \leq d$ и при $a \leq x \leq b$ да имаме

$$|f'_\alpha(x, \alpha_0+k) - f'_\alpha(x, \alpha_0)| < \varepsilon$$

и следователно при $|h| < \delta$

$$\left|\frac{F(\alpha_0+h)-F(\alpha_0)}{h} - \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha_0)\, dx\right| < \varepsilon(b-a),$$

с което доказателството е завършено.

Доказаната теорема може да се обобщи. Така, ако функцията $f(x, \alpha)$ е непрекъсната в правоъгълника (3), притежава непрекъсната частна производна $f'_\alpha(x, \alpha)$ и функциите $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ са дефинирани, диференцуеми в интервала $[c, d]$ и удовлетворяват условията

$$a < \varphi(\alpha) < b, \quad a < \psi(\alpha) < b,$$

функцията

$$\Phi(\alpha) = \int_{\psi(\alpha)}^{\varphi(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx$$

е диференцуема в интервала (c, d) и

$$\Phi'(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx + f[\psi(\alpha), \alpha]\,\psi'(\alpha) - f[\varphi(\alpha), \alpha]\,\varphi'(\alpha).$$

И наистина функцията

$$F(\alpha, u, v) = \int_v^u f(x, \alpha)\, dx$$

на трите независими променливи α, u, v притежава непрекъснати частни производни

$$F'_u(\alpha, u, v) = f(u, \alpha),$$
$$F'_v(\alpha, u, v) = -f(v, \alpha),$$

$$F'_\alpha(\alpha, u, v)=\int_v^u f'_\alpha(x,\alpha)\,dx.$$

Непрекъснатостта на производните F'_u и F'_v е очевидна, а непрекъснатостта на производната F'_α може да се установи лесно. За тази цел избираме едно произволно положително число ε и означаваме с R една горна граница на $|f'_\alpha(x, \alpha)|$. Ние можем да изберем положителното число δ толкова малко, че при $|h|<\delta$, $c\leq\alpha+h\leq d$, $a\leq x\leq b$ да имаме

$$|f'_\alpha(x, \alpha+h)-f'_\alpha(x, \alpha)|<\varepsilon.$$

В такъв случай получаваме при $|h|<\delta$, $|k|<\varepsilon$, $|l|<\varepsilon$,

$$a\leq u\leq b,\ a\leq u+k\leq b,$$
$$a\leq v\leq b,\ a\leq v+l\leq b$$

следните неравенства:

$$|F'_\alpha(\alpha+h,\ u+k,\ v+l)-F'_\alpha(a, u, v)|=$$

$$=\left|\int_{v+l}^{u+k} f'_\alpha(x, \alpha+h)\,dx-\int_v^u f'_\alpha(x,\alpha)\,dx\right|=$$

$$=\left|\int_v^u [f'_\alpha(x, \alpha+h)-f'_\alpha(x,\alpha)]\,dx+\int_{v+l}^{u} f'_\alpha(x, \alpha+h)\,dx+\right.$$

$$\left.+\int_u^{u+k} f'_\alpha(x, a+h)\,dx\right|\leq\varepsilon|u-v|+|l|R+|k|R\leq\varepsilon[b-a+2R],$$

с което непрекъснатостта на производната е доказана.

Тази резултат ни позволява да приложим теоремата за диференциране на съставни функции. И така функцията $\Phi(\alpha)$ е наистина диференцуема и

$$\Phi'(\alpha)=F'_\alpha+F'_u\,\psi'(\alpha)+F'_v\,\varphi'(\alpha)$$

или още

$$\Phi'(\alpha)=\int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha)\,dx+f[\psi(\alpha), \alpha]\,\psi'(\alpha)-f[\varphi(\alpha), \alpha]\,\varphi'(\alpha).$$

Пример. Видяхме в § 21 на тази глава, че интегралът

$$I=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

е сходящ. Сега ще пресметнем неговата стойност. За тази цел разглеждаме помощната функция

$$F(\alpha, p)=\int_0^p e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Доказаната по-горе теорема за диференциране под знака на интеграла ни дава

$$F'_\alpha(\alpha, p)=-\int_0^p e^{-\alpha x}\sin x\,dx=\left|\frac{e^{-\alpha x}(\alpha\sin x+\cos x)}{\alpha^2+1}\right|_0^p=$$

$$=\frac{e^{-\alpha p}(\alpha\sin p+\cos p)}{\alpha^2+1}-\frac{1}{\alpha^2+1}$$

и следователно

$$F(\alpha, p)=C-\int_\alpha^\infty \frac{k^{-tp}(t\sin p+\cos p)}{t^2+1}\,dt-\operatorname{arc\,tg}\alpha, \tag{4}$$

където C не зависи от α. Като вземем пред вид неравенството

$$|F(\alpha, p)|\leq\int_0^p e^{-\alpha x}\frac{|\sin x|}{x}\,dx\leq\int_0^p e^{-\alpha x}\,dx=$$

$$=\frac{1-e^{-\alpha p}}{\alpha}<\frac{1}{\alpha},$$

заключаваме, че $F(\alpha, p)$ клони към нула, когато α расте неограничено. Извършвайки в равенството (4) граничния преход $\alpha\to\infty$, получаваме

$$0=C-\frac{\pi}{2}$$

и следователно $C=\frac{\pi}{2}$, откъдето

$$F(\alpha, p)=\frac{\pi}{2}-\int_\alpha^\infty \frac{e^{-tp}(t\sin p+\cos p)}{t^2+1}\,dt-\operatorname{arc\,tg}\alpha.$$

Специално при $\alpha=0$

$$F(0,p)=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\infty}\frac{e^{-tp}(t\sin p+\cos p)}{t^2+1}\,dt.$$

Според дефиницията на понятието несобствен интеграл

$$I=\lim_{p\to\infty}F(0,p).$$

По този начин въпросът за пресмятането на I се сведе към въпроса за намирането на границата

$$l=\lim_{p\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{-tp}(t\sin p+\cos p)}{t^2+1}\,dt,$$

което може да стане по следния начин:

$$\left|\int_0^{\infty}e^{-tp}\,\frac{t\sin p+\cos p}{t^2+1}\,dt\right|\leq\int_0^{\infty}e^{-tp}\,\frac{t\,|\sin p|+|\cos p|}{t^2+1}\,dt\leq$$

$$\leq\int_0^{\infty}e^{-pt}\,\frac{t+1}{t^2+1}\,dt\leq 2\int_0^{\infty}e^{-pt}\,dt=\frac{2}{p},$$

и следователно интересуващата ни граница l е равна на нула. По такъв начин получаваме окончателно

$$I=\frac{\pi}{2}.$$

Общи задачи

1. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

клони към $\ln 2$.

Упътване. Покажете, че редицата клони към определения интеграл

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}.$$

2. Намерете границата на редицата с общ член

$$a_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}.$$

3. Намерете границата с общ член

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}.$$

4. Покажете, че несобственият интеграл

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx$$

е сходящ и пресметнете неговата стойност.

Упътване. Покажете предварително, че

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\sin 2x}{2}\,dx.$$

Отговор. $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$

5. Пресметнете интеграла

$$F(\alpha)=\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx.$$

Упътване. Покажете, че функцията $F(\alpha)$ е четна, като преобразувате интеграла

$$F(-\alpha)=\int_0^{\pi}\ln(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$$

с помощта на субституцията

$$x=\pi-y.$$

Покажете след това, че

$$2F(\alpha)=F(\alpha)+F(-\alpha)=\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx+$$

$$+\int_0^{\pi}\ln(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha^2\cos 2x+\alpha^4)\,dx,$$

и направете субституцията $2x=y$. Това ще ви даде

$$2F(\alpha)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)\,dy+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\ln(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)\,dy.$$

Ако в последния интеграл направите субституцията $y=2\pi-z$, ще получите

$$\int_{\pi}^{2\pi}\ln(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)\,dy=\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha^2\cos z+\alpha^4)\,dz$$

и следователно

$$2F(\alpha)=\frac{1}{2}F(\alpha^2)+\frac{1}{2}F(\alpha^2)=F(\alpha^2).$$

Използувайте този резултат, за да покажете, че

$$F(\alpha)=\frac{F(\alpha^{2^n})}{2^n}.$$

От друга страна, очевидно

$$1-2|\lambda|+\lambda^2\leq 1-2\lambda\cos x+\lambda^2\leq 1+2|\lambda|+\lambda^2$$

и следователно при $\alpha\neq\pm 1$

$$\pi\ln(1-\alpha^{2^n})^2\leq F(\alpha^{2^n})\leq\pi\ln(1+\alpha^{2^n})^2.$$

Използувайте този резултат, за да покажете, че при $|\alpha|<1$ имаме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(\alpha^{2^n})}{2^n}=0$$

и следователно $F(\alpha)=0$. За да пресметнете стойността на $F(\alpha)$ при $|\alpha|>1$, положете $\alpha=\frac{1}{\beta}$ и използувайте равенството

$$F(\alpha)=\int_0^{\pi}\ln(1-2\beta\cos x+\beta^2)\,dx-\pi\ln\beta^2.$$

Това ще ви даде

$$F(\alpha)=\pi\ln\alpha^2.$$

За да пресметнете интеграла при $\alpha=\pm 1$, използувайте по-предната задача. Това ще ви даде $F(1)=F(-1)=0$.

6. Нека $\varphi(x)$ е функция, дефинирана при $0<x\leq 1$ по следния начин: $\varphi(x)=\frac{1}{q}$, когато $x=\frac{p}{q}$, където p и q са цели взаимно прости числа; $\varphi(x)=0$, когато x е ирационално число. Докажете, че функцията $\varphi(x)$ е интегруема в Римановия смисъл в интервала $[0, 1]$ (при все че тя е прекъсната за всички рационални стойности на x от дефиниционния си интервал). Покажете, че функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната за всички ирационални стойности на x от интервала $0<x\leq 1$.

7. Нека функцията $f(x)$ е неотрицателна и непрекъсната в интервала $[a, b]$. Покажете, че равенството

$$\int_a^b f(x)\,dx=0$$

е изпълнено само ако $f(x)=0$ за всички стойности на x от интервала $[a, b]$.

Упътване. Нека $a\leq\alpha<\beta\leq b$. Покажете, че

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=0, \tag{1}$$

като си послужите с равенството

$$\int_a^{\alpha} f(x)\,dx+\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx+\int_{\beta}^{b} f(x)\,dx=0$$

и неравенствата

$$\int_a^{\alpha} f(x)\,dx\geq 0,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx\geq 0,$$

$$\int_{\beta}^{b} f(x)\,dx\geq 0.$$

Приложете за равенството (1) теоремата за средните стойности и покажете по този начин, че функцията $f(x)$ се анулира поне веднъж във всеки подинтервал $[\alpha, \beta]$ на интервала $[a, b]$. Използувайте този резултат, за да покажете, че непрекъснатата функция $f(x)$ се анулира тъждествено.

8. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в интервала $[a, b]$. Покажете, че е в сила неравенството

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2\leq\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx.$$

При това равенството

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2=\left[\int_a^b f^2(x)\,dx\right]\left[\int_a^b g^2(x)\,dx\right]$$

е изпълнено тогава и само тогава, когато

$$\lambda f(x)+\mu g(x)=0$$

при подходящ избор на константите λ и μ, от които поне едната е различна от нула (Буняковски—Шварц).

Упътване. Квадратичната форма

$$\int_a^b [\lambda f(x)+\mu g(x)]^2\,dx=\lambda^2\int_a^b f^2(x)\,dx+2\lambda\mu\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx+\mu^2\int_a^b g^2(x)\,dx$$

е способна да приема само неотрицателни стойности, когато $a\leq b$, и следователно дискриминантата ѝ не е положителна.

9. Нека функцията $F(x, y)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения триъгълник

$$a\leq x\leq b,$$

$$a\leq y\leq x.$$

Покажете, че

$$\int_a^b\left[\int_a^x F(x, y)\,dy\right]dx=\int_a^b\left[\int_y^b F(x, y)\,dx\right]dy$$

(Дирикле — Dirichlet).

Упътване. Сравнете производните на двете функции

$$f(t)=\int_a^t\left[\int_a^x F(x, y)\,dy\right]dx,$$

$$g(t)=\int_a^t\left[\int_y^t F(x, y)\,dx\right]dy,$$

където $a\leq t\leq b$.

10. Да се пресметне интегралът

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx,$$

където n е цяло положително число.

Упътване. Установете предварително следната редукционна формула:

$$I_n=\frac{n-1}{n}\,I_{n-2}.$$

Отговор. Ако n е четно, т. е. $n=2m$, където m е цяло,

$$I_{2m}=\frac{(2m-1)\,(2m-3)\ldots 3.1}{2m\,(2m-2)\ldots 4.2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Ако n е нечетно, т. е. $n=2m+1$, където m е цяло,

$$I_{2m+1}=\frac{2m\,(2m-2)\ldots 4.2}{(2m+1)\,(2m-1)\ldots 5.3}.$$

11. Докажете, че

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2.2.4.4.6.6\ldots 2n.2n}{1.3.3.5.5.7\ldots(2n-1)\,(2n+1)} \tag{2}$$

(Формула на Джон Валис — J. Wallis).

Забележка. Често формулата (2) се записва във вида

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2}{1.3}\cdot\frac{4.4}{3.5}\cdot\frac{6.6}{5.7}\cdots\frac{2n.2n}{(2n-1)\,(2n+1)}\cdots$$

Упътване. Послужете си с неравенствата

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\,dx$$

и използувайте предната задача.

12. Да се докаже, че

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$$

(Л. Ойлер — L. Euler).

Упътване. Използувайте развитието

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

което е равномерно сходящо при $-1\leq x\leq 1$.

Положете $\arcsin x=t$. По такъв начин ще получите развитието

$$t=\sin t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\frac{\sin^{2n+1}t}{2n+} \tag{3}$$

при $-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$, което е също тъй равномерно сходящо. Интегрирайте двете части на равенството (3) от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и използувайте задача 10.

13. Докажете, че

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

(Ойлер).

Упътване. Използувайте предната задача, като покажете, че

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=$$

$$=\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right]+$$

$$+\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right]+$$

$$+\frac{1}{4^2}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right]+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

14. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана при $x\geq 0$, има непрекъсната производна и нека интегралът

$$\int_1^{\infty}\frac{f(x)}{x}\,dx$$

е сходящ. Докажете, че

$$\int_0^{\infty}\frac{f(x)-f(\alpha x)}{x}\,dx=f(0)\ln\alpha,$$

където $\alpha>0$.

Упътване. Разгледайте функцията

$$F(\alpha,\ p)=\int_0^{p}\frac{f(x)-f(\alpha x)}{x}\,dx,$$

където $p>0$. Покажете, че

$$F'_{\alpha}(\alpha,\ p)=\frac{f(0)}{\alpha}-\frac{f(\alpha p)}{\alpha},$$

и използувайте този резултат, за да получите равенството

$$F(\alpha,\ p)=f(0)\ln\alpha-\int_1^{\alpha}\frac{f(tp)}{t}\,dt,$$

което след субституцията $tp=u$ ще ви даде

$$F(\alpha,\ p)=f(0)\ln\alpha-\int_p^{p\alpha}\frac{f(u)}{u}\,du.$$

Извършете в последното равенство граничния преход $p\to\infty$.

15. Да се покаже, че

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}}\,dx=e^{-2\alpha}\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx,\qquad \alpha\geq 0$$

(Лаплас — Laplace).

Упътване. Разгледайте функцията

$$F(\alpha,\ p)=\int_{\frac{\alpha}{p}}^{p}e^{-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}}\,dx,$$

където $p>0$, $\alpha>0$, и използувайте равенството

$$F'_{\alpha}(\alpha,\ p)=-2\alpha\int_{\frac{\alpha}{p}}^{p}e^{-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}}\,\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{p}e^{-\frac{\alpha^2}{p^2}-p^2},$$

което след субституцията $x=\frac{\alpha}{t}$ ще ви даде при $\alpha>0$

$$F'_{\alpha}(\alpha,\ p)+2F(\alpha,\ p)=-\frac{1}{p}e^{-\frac{\alpha^2}{p^2}-p^2}.$$

Покажете, че при $\alpha\geq 0$

$$e^{2\alpha}F(\alpha,\ p)=C-\frac{e^{-p^2}}{p}\int_0^{\alpha}e^{-\frac{t^2}{p^2}+2t}\,dt, \tag{4}$$

където C не зависи от α. За да пресметнете стойността на C, положете $\alpha=0$. Извършете граничен преход $p\to\infty$ в равенството (4).

16. Да се покаже, че

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx=e^{-\alpha^2}\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx$$

Лаплас).

Упътване. Разгледайте функцията

$$F(\alpha,\ p)=\int_0^{p}e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx$$

и покажете, че

$$F\alpha'(\alpha,\ p)=-2\int_0^{p}e^{-x^2}x\sin 2\alpha x\,dx=$$

$$=e^{-p^2}\sin 2\alpha p-2\alpha\int_0^{p}e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx$$

или още

$$F\alpha'(\alpha,\ p)+2\alpha F(\alpha,\ p)=e^{-p^2}\sin 2\alpha p.$$

Използувайте този резултат, за да покажете, че

$$e^{\alpha^2} F(\alpha, p)=C+e^{-p^2}\int_0^{\alpha} e^{t^2} \sin 2pt\, dt, \tag{5}$$

където C не зависи от α. Пресметнете стойността на C, като поставите $\alpha=0$. Извършете в равенството (5) граничния преход $p\to\infty$.

Дефиниция. Казваме, че две функции $f(x)$ и $g(x)$ са ортогонални помежду си в интервала $[a, b]$, когато

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx=0.$$

Разбира се, понятието ортогоналност има смисъл само когато произведението $f(x)\, g(x)$ представлява интегруема (в собствен или несобствен смисъл) функция.

Казваме, че редицата от функциите

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x), \ldots \tag{6}$$

образува една ортогонална система в интервала $[a, b]$, когато всеки две (различни по номер) функции от тази редица са ортогонални помежду си. Казваме, че ортогоналната система (6) е нормирана, когато квадратът на всяка една от функциите е интегруем в интервала $[a, b]$ и

$$\int_a^b f_k^2(x)\, dx=1, \qquad k=1, 2, 3, \ldots$$

17. Покажете, че функциите

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

образуват ортогонална и нормирана система в интервала $[0, 2\pi]$.

18. Покажете, че функциите

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x,\quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x, \ldots, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx, \ldots$$

образуват ортогонална и нормирана система в интервала $[0, \pi]$.

19. Покажете, че функциите

$$\frac{T_n(x)}{\sqrt[4]{1-x^2}},$$

където

$$T_n(x) = \cos\,[n \arccos x]$$

е n-ти полином на Чебишев, образуват ортогонална система в интервала $[-1, 1]$.

20. Покажете, че n-тият полином на Лежандър

$$P_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

е ортогонален в интервала $[-1, 1]$ на всички полиноми, чиято степен е по-ниска от n.

Упътване. Покажете предварително чрез интегриране по части, че при $k<n$

$$\int_{-1}^{1} x^k\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx=(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{d^n x^k}{dx^n}\,dx=0.$$

21. Покажете, че полиномите

$$\frac{1}{n!\,2^n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(x), \quad n=1, 2, 3, \ldots,$$

където

$$P_n(x)=\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

(вж. предната задача), образуват ортогонална и нормирана система.

22. Нека непрекъснатите функции

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots \tag{7}$$

образуват ортогонална и нормирана система в крайния интервал $[a, b]$ и нека редът

$$\varphi(x)=a_1 f_1(x)+a_2 f_2(x)+a_3 f_3(x)+\ldots \tag{8}$$

е равномерно сходящ. Покажете, че

$$a_k=\int_a^b \varphi(x)\, f_k(x)\, dx, \qquad k=1, 2, \ldots$$

Упътване. Умножете двете части на равенството (8) с $f_k(x)$ и интегрирайте от a до b.

23. Нека функциите

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots \tag{9}$$

образуват ортогонална и нормирана система в интервала $[a, b]$ и нека $f(x)$ е една функция, за която интегралите

$$\int_a^b f^2(x)\, dx, \qquad \int_a^b f(x)\, f_k(x)\, dx, \qquad k=1, 2, \ldots,$$

имат смисъл. Да се докаже, че при всички цели положителни стойности на n е в сила неравенството

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\le\int_a^b f^2(x)\, dx,$$

където

$$a_k=\int_a^b f(x)f_k(x)\,dx$$

(Бесел — Bessel).

Упътване. Покажете, че

$$\int_a^b \Big[f(x)-\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f_\nu(x)\Big]^2 dx=\int_a^b f^2(x)\,dx-\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2.$$

24. Нека функцията $f(x)$ и функциите (9) удовлетворяват условията на предната задача. Покажете, че интегралът[1]

$$\int_a^b \Big[f(x)-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f_\nu(x)\Big]^2 dx$$

има най-малка стойност, когато

$$c_\nu=\int_a^b f(x)f_\nu(x)\,dx.$$

Упътване. Положете[2]

$$a_\nu=\int_a^b f(x)f_\nu(x)\,dx$$

и използувайте тъждеството

$$\int_a^b \Big[f(x)-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f_\nu(x)\Big]^2 dx=\int_a^b \Big[f(x)-\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f_\nu(x)\Big]^2 dx+\sum_{\nu=1}^{n}(c_\nu-a_\nu)^2$$

[1] Стойността на този интеграл зависи от избора на константите

$$c_1, c_2, \ldots, c_n.$$

[2] Числата

$$a_\nu=\int_a^b f(x)f_\nu(x)\,dx$$

се наричат Фуриерови коефициенти на функцията $f(x)$ по отношение на ортогоналната и нормирана система (9).

Редът

$$a_1 f_1(x)+a_2 f_2(x)+\ldots+a_n f_n(x)+\ldots$$

независимо от това, дали е сходящ, или не и независимо от стойността на неговата сума, се нарича Фуриеров ред на функцията $f(x)$ по отношение на ортогоналната и нормирана система (9).

25. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са нулите на n-тия полином на Лежандър

$$P_n(x)=\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Покажете, че:

а) формулата на Котс

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=a_1 f(x_1)+a_2 f(x_2)+\ldots+a_n f(x_n), \tag{10}$$

където коефициентите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ се определят от равенствата (6) от § 27 на тази глава, е вярна, когато $f(x)$ е полином, чиято степен не надминава $2n-1$;

b) коефициентите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са положителни;

c) не е възможно да се изберат точките $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и коефициентите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ така, че равенството (10) да бъде вярно при всички полиноми, чиято степен не надминава $2n$.

(Гаус — C. F. Gauss).

Упътване. а) Както е известно от алгебрата, полиномът $f(x)$, чиято степен не надминава $2n-1$, може да се представи във вида

$$f(x)=\varphi(x)P_n(x)+R(x),$$

където $\varphi(x)$ и $R(x)$ са полиноми, чиято степен не надминава $n-1$.

Използувайте задача (20) и докажете, че

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\varphi(x)P_n(x)\,dx+\int_{-1}^{1}R(x)\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}R(x)\,dx=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu R(x_\nu)=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu f(x_\nu).$$

б) Разгледайте полиномите

$$\varphi_i(x)=\frac{P_n^2(x)}{(x-x_i)^2},$$

чиято степен е равна на $2n-2$, и използувайте тъждеството

$$\int_{-1}^{1}\varphi_i(x)\,dx=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\varphi_i(x_\nu)=a_i\varphi_i(x_i)=a_iP_n'^2(x_i).$$

в) Разгледайте полинома

$$F(x)=(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_n)^2.$$

В такъв случай формулата (10) приема вида

$$\int_{-1}^{1}F(x)dx=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu F_\nu(x_\nu)=0,$$

което не е възможно, защото полиномът $F(x)$ приема само неотрицателни стойности, но не се анулира тъждествено.

76. Да разгледаме редицата от полиномите

$$B_1(x),\ B_2(x),\ B_3(x),\ .\ .\ .\ ,$$

дефинирани с условията

$$B_1(x)=x-1,$$

$$B_{n+1}(x)=n\int_0^x B_n(t)\,dt-nx\int_0^1 B_n(t)\,dt,\quad n=1,\ 2,\ .\ .\ .$$

(полиноми на Бернули), и да положим

$$B_n=B'_{n+1}(1),\quad n=0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .$$

(числа на Бернули).

Докажете, че

1) $$B_n(0)=0,\quad n=2,\ 3,\ 4,\ .\ .\ .\ ,$$
$$B_n(1)=0,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .\ .$$

2) $$B'_{n+1}(x)=n\,B_n(x)-n\int_0^1 B_n(t)\,dt,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .\ .$$

3) $$[B_n(x+1)-B_n(x)]'=(n-1)[B_{n-1}(x+1)-B_{n-1}(x)],\quad n=2,3,\ .\ .\ .\ .$$

4) $$B_n(x+1)-B_n(x)=x^{n-1},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .$$

Извършете доказателството индуктивно и използувайте равенствата $B_n(0)=B_n(1)=0$ (при $n=2,\ 3,\ .\ .\ .$).

5) $$B_n(2)=1,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .\ .$$

6) $$[B_{2n+2}(x)-B_{2n+2}(2-x)]''=(2n+1)2n[B_{2n}(x)-B_{2n}(2-x)],$$
$n=1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .\ .$

7) $$B_{2n}(x)-B_{2n}(2-x)=(x-1)^{2n-1},\quad n=1,\ 2,\ .\ .\ .$$

(Пресметнете стойността на разликата $B_{2n}(x)-B_{2n}(2-x)$ при $x=0$ и $x=1$ и извършете доказателството индуктивно.)

8) $$B'_{2n}(x)+B'_{2n}(2-x)=(2n-1)(x-1)^{2n-2},$$
$n=1,\ 2,\ .\ .\ .\ .$

9) $$B_{2n-1}=0,\quad n=2,\ 3,\ 4,\ .\ .\ .\ .$$

10) $$B'_1(1)=-B'_2(0)=\frac{1}{2},$$
$$B'_{n+1}(0)=B'_{n+1}(1),\quad n=0,\ 2,\ 3,\ 4,\ .\ .\ .$$

11) $$B_n=-n\int_0^1 B_n(t)\,dt,\quad n=1,\ 2,\ .\ .\ .\ .$$

12) $$B''_n(x)=(n-1)\,B'_{n-1}(x),\quad n=2,\ 3,\ 4,\ .\ .\ .\ .$$

13) $$B^{(k)}_n(x)=(n-1)B^{(k-1)}_{n-1}(x),\quad n=2,\ 3,\ 4,\ .\ .\ .\ ;\ k=2,\ 3,\ 4,\ .\ .\ .\ .$$

14) $$B^{(k)}_n(x)=(n-1)(n-2)\ .\ .\ .\ (n-k+1)\,B'_{n-k+1}(x),\ 2\le k\le n.$$

15) $$B^{(k)}_n(1)=(n-1)(n-2)\ .\ .\ .\ (n-k+1)B_{n-k},$$
$$2\le k\le n.$$

16) $$B^{(k)}_n(1)=\frac{k!}{n}\binom{n}{k}B_{n-k},\ 1\le k\le n.$$

17)

(11) $$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{B^{(k)}_n(1)}{k!}(x-1)^k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}\cdot(x-1)^k.$$

18) $$n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .$$

положете $x=2$ в равенството (11)).

19) $$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}B_{n-k}=0,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .$$

(положете в тъждеството (11) $x=0$).

20) $$1^k+2^k+3^k+\ .\ .\ .\ +n^k=B_{k+1}(n+1).$$

21) $$|B_n(x)|\le(n-1)!\,2^{n-1},\quad 0\le x\le 1.$$

22) $$|B_n|\le n!\,2^{n-1},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .$$

23) $$\frac{xe^x}{e^x-1}=B_0+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\frac{B_3}{3!}x^3+\ldots+\frac{B_n}{n!}x^n+\ .\ .\ .$$

при достатъчно малки значения на $|x|$.

Упътване. Покажете, че редът $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}x^\nu$ е сходящ при достатъчно малки значения на $|x|$ и

$$(e^x-1)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu\,x^\nu}{\nu!}=xe^x.$$

27. Нека $B_n(x)$ е n-тият полином на Бернули[1], а B_n е n-тото Бернулиево[1] число. Нека $P_n(x)$ са периодични функции с период 1, дефинирани при $0\le x<1$ с условието

$$P_n(x)=\frac{nB_n(x)+B_n}{n!}.$$

Покажете, че[2]

(1) $$P_1(x)=x-[x]-\frac{1}{2}.$$

2) Функциите $P_n(x)$, $n=2, 3, \ldots$, са непрекъснати дори тогава, когато x е цяло число.

Упътване. Покажете, че

$$\lim_{x\to 1} P_n(x)=P_n(0).$$

3) Покажете, че функциите $P_n(x)$, $n=3, 4, 5, \ldots$, са диференцуеми дори тогава, когато x е цяло число.

4) $$P'_{n+1}(x)=P_n(x), \quad n=2, 3, \ldots$$

5) $$P_n(1)=P_n(0)=\frac{B_n}{n!}, \quad n=2, 3, \ldots$$

28. Нека функцията $f(x)$ е диференцуема и има непрекъсната първа производна при $x\le 0$. Покажете, че[3]

12) $$f(0)+f(1)+\ldots+f(n)=\int_0^n f(x)\,dx+\frac{f(0)+f(n)}{2}+$$
$$+\int_0^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\,dx$$

сумационна формула на Ойлер—Маклорен).

Упътване. Използувайте равенството

$$\int_0^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\left(x-k-\frac{1}{2}\right)f'(x)\,dx$$

и интегрирайте по части.

29. Нека функцията $f(x)$ е диференцуема $2k+1$ път при $x\ge 0$ и производната ѝ от ред $2k+1$ е непрекъсната. Да се докаже, че при означенията в задачи 26 и 27 имаме

$$f(0)+f(1)+\ldots+f(n)=\int_0^n f(x)\,dx+\frac{f(0)+f(n)}{2}+$$

[1] Вижте предната задача.
[2] Символът $[x]$ означава най-голямото цяло число, което не надминава x.
[3] Символът $[x]$ означава най-голямото число, което не надминава x.

$$+\frac{B_2}{2!}[f'(n)-f'(0)]+\frac{B_4}{4!}[f'''(n)-f'''(0)]+\ldots+$$
$$+\frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(n)-f^{(2k-1)}(0)]+R_k,$$

където

$$R_k=\int_0^n P_{2k+1}(x)f^{(2k+1)}(x)\,dx$$

(сумационна формула на Ойлер—Маклорен; обобщение на сумационната формула от предната задача).

Упътване. Извършете във формулата (12) неколкократно интегриране по части и използувайте задача 27.

30. Нека функцията $f(x)$ е положителна и монотонно намаляваща при $x\ge 0$. Ако при всички достатъчно големи стойности на x имаме

(13) $$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}\le q<1,$$

то редът

14) $$f(0)+f(1)+f(2)+\ldots$$

е сходящ. Ако при всички достатъчно големи стойности на x имаме

15) $$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}\ge 1,$$

то редът (14) е разходящ (критерий на Ермаков).

Упътване. Ако е изпълнено условието (13), то при $x\ge x_0$, където x_0 е достатъчно голямо, имаме

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,dt=\int_{x_0}^{x} e^t f(e^t)\,(dt)\le q\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

и следователно

$$(1-q)\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,dt\le q\left[\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt-\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,dt\right]\le$$
$$\le q\left[\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt-\int_{x}^{e^x} f(t)\,dt\right]\le q\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt.$$

Заключете оттук, че интегралът $\int_0^\infty f(t)\,dt$ е сходящ и приложете интегралния критерий на Коши.

Ако е изпълнено условието (15), то при $x \geqq x_1$, където x_1 е достатъчно голямо, имаме

$$\int_{e^{x_1}}^{e^x} t f(t)\,dt = \int_{x_1}^{x} e^t f(e^t)\,dt \geq \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt$$

и следователно

$$\int_{x}^{e^x} f(t)\,dt \geq \int_{x_1}^{e^{x_1}} f(t)\,dt.$$

Заключете оттук, че интегралът $\int_0^\infty f(t)\,dt$ е разходящ и приложете интегралния критерий на Коши.

31. Нека дефинираме функцията $\Gamma(x)$ (четете — гама икс) при $x>0$ по следния начин:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt. \tag{16}$$

Наричаме интеграла (16) сходящ, когато двата интеграла

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\,dt, \quad \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

а сходящи, и полагаме по дефиниция

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\,dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt.$$

Забележка. Означенията, които ще въвеждаме в някои от точките, ще използуваме и в следните точки.

Да се докаже следното:

1) Интегралът

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

е сходящ при $x>0$.

2) Ако x е цяло положително число, то

$$\Gamma(x) = (x-1)!$$

3) Функцията $\Gamma(x)$ е диференцуема безбройно много пъти.

4) Ако една функция $\psi(x)$ е диференцуема два пъти в някой интервал Δ и втората ѝ производна е неотрицателна, то при фиксирано x отношението

$$\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}$$

е монотонно растяща функция на h, когато x и $x+h$ принадлежат към Δ.

5) Функцията $\Gamma(x)$ притежава следните свойства при всички положителни стойности на x:

а) $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$;

б) $\Gamma(x)>0$;

в) $\frac{d^2}{dx^2}[\ln \Gamma(x)]>0$;

г) $\Gamma(1)=1$.

Тези условия ще наричаме кратко условия на Бор—Молеруп.

6) Ако една функция $f(x)$ е дефинирана при $x>0$, два пъти е диференцуема и удовлетворява при всички положителни стойности на x условията

а) $f(x+1) = x f(x)$;

б) $f(x)>0$;

в) $\frac{d^2}{dx^2}[\ln f(x)]>0$;

г) $f(1)=1$,

то $f(x)=\Gamma(x)$.

(H. Bohr и J. Mollerup; E. Artin).

Упътване. Като използуваме неравенствата

$$\frac{\ln f(-1+n)-\ln f(n)}{(-1+n)-n} \leq \frac{\ln f(x+n)-\ln f(n)}{(x+n)-n} \leq \frac{\ln f(1+n)-\ln f(n)}{(1+n)-n}$$

при цели, по-големи от 1 стойности на n и при $0<x\leq 1$, покажете, че

$$\frac{(n-1)^x (n-1)!}{x(x+1)\,.\,.\,.\,(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\,.\,.\,.\,(x+n)}\,\frac{x+n}{n}$$

и заключете оттук, че

$$\frac{n}{x+n} f(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\,.\,.\,.\,(x+n)} \leq f(x).$$

Използувайте тези неравенства, за да установите, че

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\,.\,.\,.\,(x+n)}$$

и следователно $f(x)=\Gamma(x)$ при $0<x\leq 1$. Разпространете този резултат за всички положителни стойности на x, като използувате равенствата $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$ и $f(x+1)=xf(x)$.

Забележка. Представянето

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\,.\,.\,.\,(x+n)}$$

произхожда от Гаус.

7) Нека при $x>0$ положим

$$g(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1.$$

Покажете, че

$$0<g(x)<\frac{1}{12x}-\frac{1}{12(x+1)}.$$

Упътване. Очевидно

$$g(x)=\frac{1}{3(2x+1)^2}+\frac{1}{5(2x+1)^4}+\frac{1}{7\cdot(2x+1)^6}+\ldots<$$

$$<\frac{1}{3(2x+1)^2}+\frac{1}{3(2x+1)^4}+\frac{1}{3(2x+1)^6}+\ldots=\frac{1}{12x(x+1)}=\frac{1}{12x}-\frac{1}{12(x+1)}.$$

8) Да се докаже, че редът

$$\mu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}g(x+n)$$

е сходящ при $x>0$ и $0<\mu(x)<\frac{1}{12x}$.

9) Да се покаже, че

$$\Gamma(x)=x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\frac{\theta}{12x}}\sqrt{2\pi},$$

където $0<\theta<1$ (θ изобщо зависи от x) (Стирлинг — Stirling).

Упътване. Покажете, че функцията

$$f(x)=Ax^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\mu(x)}$$

удовлетворява условията на Бор — Моллеруп при подходящ избор на константата A. Пресметнете A от формулата на Валис, която може да се напише във вида

$$\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n n!)^4}{(2n!)^2 n}$$

(вж. задача 11).

10) Да се покаже, че

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x)$$

(Лежандр).

11) Покажете, че дефиницията на $\Gamma(x)$ може еднозначно да се продължи и за отрицателни стойности на x, които не са цели, по такъв начин, че да имаме

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).$$

12) Покажете, че при всички стойности на x, които не са цели, имаме

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

Упътване. Разгледайте функцията $\varphi(x)$, дефинирана с условието

$$\varphi(x)=\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x,$$

при нецели стойности на x и с условието $\varphi(x)=\pi$, когато x е цяло. Покажете че

$$\varphi(x+1)=\varphi(x) \text{ и } \varphi(x)>0.$$

Покажете, че функцията $\varphi(x)$ е безбройно много пъти диференцуема, включително и в целочислените точки, като вземете под внимание, че при $-1<x<1$ е валидно представянето

$$\varphi(x)=\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)\left(\pi-\frac{\pi^3x^2}{3!}+\frac{\pi^5x^4}{5!}-\ldots\right)$$

и като използувате периодичността на $\varphi(x)$. Покажете с помощта на формулата на Лежандр от т. 10, че

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)=C\varphi(x),$$

където C е константа. Положете

$$g(x)=\frac{d^2}{dx^2}\ln\varphi(x)$$

и покажете, че

$$\frac{1}{4}\left[g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]=g(x). \tag{17}$$

Установете, че функцията $g(x)$ е периодична и непрекъсната и следователно е ограничена. Нека L е точната горна граница на $g(x)$. Покажете с помощта на (17), че

$$|g(x)|\leq\frac{1}{2}L$$

и следователно $L\leq\frac{1}{2}L$, т. е. $L=0$. Установете с помощта на този резултат, че функцията $\ln\varphi(x)$ е линейна. Покажете, че тя е константа, като използувате нейната периодичност. Покажете, че при всяко x имаме $\varphi(x)=\pi$.

13) Покажете, че при всяко x имаме

$$\sin\pi x=\lim_{n\to\infty}\left[\pi x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right]$$

(Ойлер).

Забележка. Често тази формула се записва във вида

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\nu^2}\right).$$

Упътване. Използувайте, че при всяко x, което не е цяло,

$$\sin \pi x = \frac{\pi}{-x\Gamma(x)\Gamma(-x)},$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

По този начин ще получите исканото представяне на $\sin \pi x$ при нецели стойности на x. Когато x е цяло, направете директна проверка.

14) Да се покаже, че при $x>0$ и $y>0$

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Упътване. Покажете, че функцията

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

при фиксирано y удовлетворява условията на Бор—Молеруп.

32. Да се покаже, че Неперовото число е трансцендентно, т. е. че то не удовлетворява никое алгебрично уравнение с цели коефициенти (Ермит — Hermite).

Упътване. Допуснете, че числото e удовлетворява уравнението

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \ldots + a_n e^n = 0,$$

чиито коефициенти са цели; положете

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \ldots + f^{(m)}(x),$$

където $f(x)$ е полином от m-та степен, и като използувате, че

$$F(x) = e^x F(0) - e^x \int_0^x f(t)e^{-t}\,dt,$$

установете тъждеството

$$a_0 F(0) + a_1 F(1) + \ldots + a_n F(n) + \sum_{k=0}^{n} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}\,dt = 0.$$

Изберете полинома $f(x)$ по следния начин:

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p \ldots (n-x)^p.$$

Като вземете под внимание, че произведение на p последователни цели числа винаги се дели на $p!$, покажете, че коефициентите на полиномите

$$f^{(p)}(x),\ f^{(p+1)}(x), \ldots, f^{(pn+p-1)}(x)$$

а цели числа, които се делят на p. Като използувате това обстоятелство и обстоятелството, че

$$f^{(s)}(1) = f^{(s)}(2) = \ldots = f^{(s)}(n) = 0$$

при $s=0, 1, \ldots, p-1$, покажете, че числата

$$F(1),\ F(2), \ldots, F(n)$$

са цели и се делят на p. От друга страна, като вземете под внимание, че

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(p-2)}(0) = 0$$

и

$$f^{(p-1)}(0) = (n!)^p,$$

покажете, че числото

$$F(0) = f(0) + f'(0) + \ldots + f^{(p-2)}(0) + f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \ldots + f^{(pn+n-1)}(0)$$

е цяло, но не се дели на p, ако p е просто число, по-голямо от n. Използувайте този резултат и обстоятелството, че $a_0 \neq 0$, за да покажете, че числото

$$a_0 F(0) + a_1 F(1) + \ldots + a_n F(n)$$

е цяло и различно от нула, когато p е достатъчно голямо.

След всичко това използувайте оценката

$$\left| \int_0^k f(t)e^{-t}\,dt \right| \le \frac{1}{(p-1)!} n^{np+p-1} \int_0^k e^{-t}\,dt < \frac{1}{(p-1)!} n^{np+p-1},$$

валидна при $0 \le k \le n$, за да покажете, че числото p може да се избере толкова голямо, че да имаме

$$|a_0 F(0) + a_1 F(1) + \ldots + a_n F(n)| < 1,$$

което не е възможно.

ЧАСТ II

ДВОЙНИ И ТРОЙНИ ИНТЕГРАЛИ

Глава I

ДВОЙНИ ИНТЕГРАЛИ

§ 1. Дефиниция на понятието двоен интеграл

Нека ни е дадена една функция $f(x, y)$, дефинирана и ограничена в едно измеримо точково множество R. Делим множеството R на краен брой измерими подмножества

$$R_1, R_2, R_3, \dots, R_n \tag{1}$$

по такъв начин, че мярката на сечението на всеки две от тях да бъде нула и сумата

$$R_1+R_2+\dots+R_n$$

да представлява точно множеството R. Нека σ_i е лицето на множеството R_i и нека M_i и m_i са съответно точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в множеството R_i. Сумата

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i\,\sigma_i$$

се нарича голяма, а сумата

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i\,\sigma_i$$

се нарича малка сума на Дарбу, която отговаря на избрания начин на деление на множеството R на измерими подмножества (1). Не е трудно да се установят неравенствата

$$m\,.\,\sigma\leqq s\leqq S\leqq M\sigma, \tag{2}$$

където M и m означават съответно една горна и една долна граница на $f(x, y)$ в множеството R, а σ е лицето на R.

И наистина неравенствата

$$m\leqq m_i\leqq M_i\leqq M$$

ни дават

$$m\sigma_i\leqq m_i\sigma_i\leqq M_i\sigma_i\leqq M\sigma_i$$

и следователно

$$m\sum_{i=1}^{n}\sigma_i \leqq \sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i \leqq \sum_{i=1}^{n} M_i\sigma_i \leqq M\sum_{i=1}^{n}\sigma_i,$$

откъдето получаваме веднага неравенствата (2), като вземем пред вид, че

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i=\sigma.$$

Неравенствата (2) ни учат, че както множеството на малките, така и множеството на големите суми на Дарбу е ограничено (и отгоре, и отдолу). Точната горна граница на множеството на малките суми се означава със символа

$$\underline{\iint_R} f(x, y)\,dx\,dy$$

и се нарича долен интеграл на функцията $f(x, y)$, разпространен върху множеството R, а точната долна граница на големите суми се означава със символа

$$\overline{\iint_R} f(x, y)\,dx\,dy$$

и се нарича горен интеграл на функцията $f(x, y)$, разпространен върху множеството R.

Не е трудно да се установи неравенството

$$\underline{\iint_R} f(x, y)\,dx\,dy \leqq \overline{\iint_R} f(x, y)\,dx\,dy.$$

За тази цел делим множеството R по два произволни начина на измерими подмножества

$$A_1, A_2, \ldots, A_p$$

и

$$B_1, B_2, \ldots, B_q$$

така, че да имаме

$$R=A_1+A_2+\cdots+A_p,$$
$$R=B_1+B_2+\cdots+B_q$$

и

$$\mu(A_i A_k)=0, \quad \mu(B_i B_k)=0$$

при $i\neq k$.

Да означим с M_i точната горна граница на $f(x, y)$ в A_i, а с m_k — точната долна граница на $f(x, y)$ в B_k. Ще покажем, че между голямата сума

$$S=\sum_{i=1}^{p} M_i\,\mu(A_i)$$

и малката сума

$$s=\sum_{k=1}^{q} m_k\,\mu(B_k)$$

на Дарбу е в сила неравенството

$$s\leqq S. \tag{3}$$

За да покажем това, означаваме с M_{ik} и m_{ik} съответно точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в множеството[1] $A_i B_k$ и разглеждаме двете суми на Дарбу

$$S^*=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} M_{ik}\,\mu(A_i B_k),$$

$$s^*=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} m_{ik}\,\mu(A_i B_k).$$

Не е трудно да се види, че

$$\begin{aligned} m_k\,\mu(A_i B_k) &\leqq m_{ik}\,\mu(A_i B_k)\leqq \\ &\leqq M_{ik}\,\mu(A_i B_k)\leqq M_i\,\mu(A_i B_k). \end{aligned} \tag{4}$$

И наистина, ако сечението $A_i B_k$ не е празно, очевидно

$$m_k\leqq m_{ik}\leqq M_{ik}\leqq M_i$$

и следователно в този случай неравенството (4) е вярно. Ако ли пък сечението $A_i B_k$ е празно, $\mu(A_i B_k)=0$ и следователно неравенствата (4) са верни и в този случай, както и да избираме числата M_{ik} и m_{ik}.

Като съберем почленно неравенствата (4), получаваме

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} m_k\,\mu(A_i B_k)\leqq s^*\leqq S^*\leqq \tag{5}$$

[1] Ако сечението $A_i B_k$ е празно, то с M_{ik} и m_{ik} означаваме кои да са две числа.

$$\leqq \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} M_i \mu(A_i B_k).$$

От друга страна, като вземем пред вид, че

? $$A_i B_k . A_s B_k \subset A_i A_s$$

и следователно при $i \neq s$

$$\mu(A_i B_k . A_s B_k) = 0,$$

намираме

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} m_k \mu(A_i B_k) = \sum_{k=1}^{q} m_k \sum_{i=1}^{p} \mu(A_i B_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} m_k \mu(B_k) = s.$$

Аналогично получаваме

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} M_i \mu(A_i B_k) = \sum_{i=1}^{p} M_i \sum_{k=1}^{q} \mu(A_i B_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} M_i \mu(A_i) = S.$$

По такъв начин неравенствата (5) приемат вида

$$s \leqq s^* \leqq S^* \leqq S.$$

С това е установена валидността на неравенството (3).

След всичко изложено не е трудно да се покаже, че

$$\underline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy \leqq \overline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy.$$

И наистина, като фиксираме в неравенството (3) една голяма сума S и оставим малката сума s да се мени, заключаваме, че S е една горна граница на множеството на малките суми. Като вземем пред вид, че

$$\underline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy$$

е точната, т. е. най-малката им горна граница, получаваме

$$\underline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy \leqq S. \tag{6}$$

Така полученото неравенство (6) ни учи, че

$$\underline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy$$

е една долна граница на множеството от големите суми на Дарбу. Като вземем пред вид, че

$$\overline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy$$

е точната, т. е. най-голямата от долните граници на тези суми, получаваме

$$\underline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy \leqq \overline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Сега вече сме в състояние да дадем следната обща дефиниция на понятието двоен Риманов интеграл:

Една ограничена функция $f(x, y)$, дефиниционната област R на която е едно измеримо точково множество, ще наричаме интегруема в Риманов смисъл в R, когато

$$\underline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy = \overline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Общата стойност на горния и долния интеграл ще наричаме двоен Риманов интеграл и ще я означаваме със символа[1]

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy.$$

Тук ще изброим по-важните основни свойства на двойните интеграли, които са съвсем аналогични на съответните свойства на простите интеграли. Доказателства този път обаче няма да даваме, защото те могат да се дадат по същия начин, както при простите интеграли.

[1] Понякога двойният интеграл се означава по-кратко така:

$$\int_R f(x, y)\, d\sigma.$$

1. Ако функциите $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ са интегруеми в едно измеримо точково множество R, сумата

$$f_1(x, y)+f_2(x, y)$$

е също тъй интегруема в R и

$$\iint_R [f_1(x, y)+f_2(x, y)]\,dx\,dy=\iint_R f_1(x, y)\,dx\,dy+$$

$$+\iint_R f_2(x, y)\,dx\,dy.$$

2. Ако функцията $f(x, y)$ е интегруема в измеримото точково множество R и a е константа, функцията $af(x, y)$ е също тъй интегруема в R и

$$\iint_R af(x, y)\,dx\,dy=a\iint_R f(x, y)\,dx\,dy.$$

3. Ако A и B са две измерими точкови множества, ако мярката на сечението AB е равна на нула и ако функцията $f(x, y)$ е интегруема както в A, така и в B, тази функция е интегруема и в множеството $A+B$, като при това

$$\iint_{A+B} f(x, y)\,dx\,dy=\iint_A f(x, y)\,dx\,dy+\iint_B f(x, y)\,dx\,dy.$$

4. Ако функцията $f(x, y)$ е интегруема в измеримото точково множество R и удовлетворява неравенствата

$$m\leqq f(x, y)\leqq M,$$

то

$$m\,\mu(R)\leqq\iint_R f(x, y)\,dx\,dy\leqq M\,\mu(R).$$

Следствие 1. Ако $f(x, y)\geqq 0$, то

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy\geqq 0.$$

Следствие 2. Ако $\mu(R)=0$, то

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy=0.$$

Следствие 3. Ако

$$R_1, R_2, R_3, \cdots$$

е една редица от измерими подмножества на R, за които

$$\lim_{n\to\infty}\mu(R_n)=0,$$

то

$$\lim_{n\to+\infty}\iint_{R_n} f(x, y)\,dx\,dy=0.$$

Следствие 4.

$$\iint_R 1\,dx\,dy=\mu(R).$$

5. Всяка функция $f(x, y)$, която е дефинирана и непрекъсната в едно измеримо и затворено точково множество R, е интегруема.

Доказателствата на горните твърдения протичат така, както при простите интеграли. Ще докажем за пример само петото твърдение.

Функцията $f(x, y)$ е ограничена, защото тя е непрекъсната в едно ограничено и затворено точково множество. Поради това можем да говорим за горен и долен интеграл на тази функция. Нашата задача е да покажем, че тези два интеграла са равни помежду си. За тази цел избираме едно произволно положително число ε и делим множеството R на подмножества

$$R_1, R_2, \cdots, R_n, \tag{7}$$

подчинени на условието $\mu(R_i R_k)=0$ при $i\neq k$ по такъв начин, че осцилацията на $f(x, y)$ във всяко от тези подмножества да бъде по-малка от ε. Това, както знаем, може да се постигне, стига диаметрите на подмножествата (7) да бъдат достатъчно малки.[1]

Означаваме с M_i и m_i точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в множествата R_i и разглеждаме съответната голяма и малка сума на Дарбу:

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i\,\mu(R_i),$$

[1] Ние можем винаги да разделим множеството R на измерими подмножества с произволно малки диаметри, например с помощта на хоризонтални и вертикални прави, както това е показано на черт. 17. Подмножествата, на които се разпада по този начин R, са измерими, защото те представляват сечения на измеримото множество R с правоъгълници (т. е. пак с измерими множества).

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \mu(R_i).$$

Както знаем, неравенствата

$$s \leq \underline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy \leq \overline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy \leq S$$

са в сила и следователно

$$0 \leq \overline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy - \underline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy \leq S - s =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \mu(R_i) \leq$$

(8) $$\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \mu(R_i) = \varepsilon \mu(R).$$

От друга страна, положителното число ε е произволно, а $\mu(R)$ и разликата

$$\overline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy - \underline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy$$

ни най-малко не зависят от ε. Това ни позволява да заключим,[1] че

$$\overline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy - \underline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

По този начин ние доказахме, че непрекъснатата функция $f(x, y)$ е интегруема. Доказателството запазва валидността си и в случая, когато измеримото множество R не е непременно затворено, стига да знаем, че функцията $f(x, y)$ е равномерно непрекъсната в него.

Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана в едно измеримо точково множество R. Да разделим множеството R на краен брой измерими подмножества

$$R_1, R_2, \ldots, R_n,$$

[1] В противен случай неравенството (8) сигурно би било нарушено, ако ε е достатъчно малко.

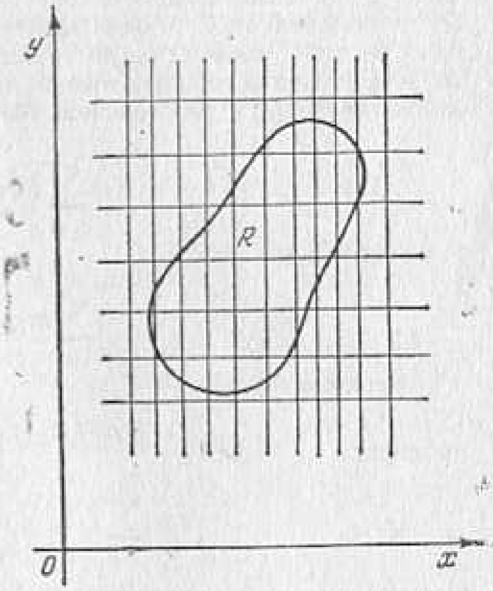
подчинени на условието $\mu(R_i R_k) = 0$ при $i \neq k$, и да изберем във всяко едно от тези подмножества R_i по една точка (ξ_i, η_i). Сумите от вида

(9) $$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \mu(R_i)$$

се наричат Риманови интегрални суми на функцията $f(x, y)$. Разбира се, когато множеството R съдържа безбройно много точки, ние можем за дадена функция $f(x, y)$ да образуваме безбройно много[1] Риманови интегрални суми в зависимост от начина на деление на множеството R на подмножества и в зависимост от избора на точките (ξ_i, η_i). Нека отбележим още, че за да образуваме сумите от вида (9), няма нужда да предполагаме нищо за ограничеността на функцията $f(x, y)$.

Специално, ако функцията $f(x, y)$ е интегруема, сумите (9) клонят към интеграла[2]

$$I = \iint_R f(x, y)\, dx\, dy,$$



Черт. 17

когато диаметрите на подмножествата R_i клонят към нула. Това трябва да се разбира така: каквото и да е положително число ε, можем да изберем такова положително число δ, че ако диаметрите на множествата R_i са по-малки от δ, да имаме

[1] Ние не твърдим обаче, че стойностите на тези суми са непременно различни.

[2] Често Римановият интеграл се дефинира с помощта на суми от вида (9) по следния начин: казваме, че една функция $f(x, y)$, дефинирана и **ограничена** в едно измеримо множество R, е интегруема в Риманов смисъл, ако сумите (9) имат граница I, когато диаметрите на R_i клонят към нула; числото I се нарича интеграл на $f(x, y)$. Тази дефиниция е еквивалентна на дефиницията, която ние дадохме в текста, обаче ние няма да се спираме по-подробно върху този въпрос. Трудолюбивият читател нека сам го обмисли. Ние ще обърнем внимание само върху обстоятелството, че за разлика от едноизмеримия случай тук от съществуване на границата на Римановите суми на една функция не следва ограничеността на тази функция.

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\mu(R_i) \right| < \varepsilon.$$

Ние няма да даваме общото доказателство на това твърдение, а ще се задоволим (с оглед на конкретните задачи, които ни предстоят) само със случая, когато множеството R е затворено, а функцията $f(x, y)$ е непрекъсната. В такъв случай тази функция е и равномерно непрекъсната[1] и можем да изберем положителното число δ по такъв начин, че ако диаметрите на подмножествата R_i са по-малки от δ, осцилацията на функцията $f(x, y)$ във всяко едно от тези множества да бъде по-малка от ε. Означаваме с M_i и m_i точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в подмножеството R_i и разглеждаме голямата сума

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\mu(R_i)$$

и малката сума

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\mu(R_i).$$

Неравенствата

$$m_i \leq f(\xi_i, \eta_i) \leq M_i$$

ни дават

$$s \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\mu(R_i) \leq S.$$

Като вземем пред вид още и неравенствата

$$s \leq I \leq S,$$

получаваме

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\mu(R_i) \right| \leq S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\mu(R_i) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\,\mu(R_i) = \varepsilon\,\mu(R),$$

с което доказателството е завършено.

[1] Нека припомним, се множеството R е измеримо и следователно е ограничено.

Разбира се, доказателството запазва валидността си в случая, когато измеримото множество R не е непременно затворено, стига функцията $f(x, y)$ да е равномерно непрекъсната в него.

Целесъобразно е дефиницията на понятието двоен интеграл малко да се разшири, като се съгласим под символа

$$\iint_A f(x, y)\,dx\,dy,$$

когато A е празното множество, да разбираме нула, каквато и да бъде функцията $f(x, y)$. Свойствата 1, 2, 3, 4 и 5, които ние формулирахме в този параграф, запазват валидността си при така разширената дефиниция. Читателят, разбира се, сам може да провери това. Така например свойството 2 може да се установи така: ако множеството A е празно, то, каквото и да бъде измеримото множество B, ще имаме

$$\iint_{A+B} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_B f(x, y)\,dx\,dy = \iint_A f(x, y)\,dx\,dy +$$

$$+ \iint_B f(x, y)\,dx\,dy.$$

Ние често ще използуваме интеграли, разпространени върху празното множество. Това ще облекчи нашата работа.

§ 2. Пресмятане на двойни интеграли

Нека R е едно множество от точки в равнината, дефинирано с неравенствата

$$a \leq x \leq b,$$

(1) $$\varphi_0(x) \leq y \leq \varphi_1(x),$$

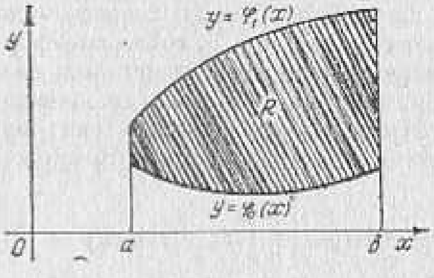
където $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ са две непрекъснати функции на x в компактния интервал $a \leq x \leq b$, удовлетворяващи условието

$$\varphi_0(x) \leq \varphi_1(x).$$

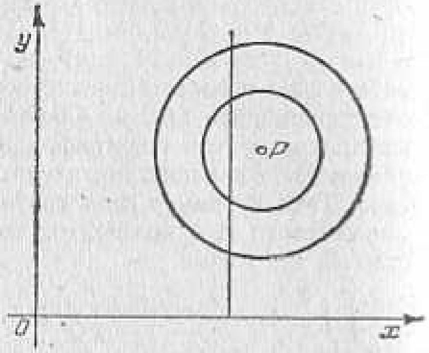
Това значи, че една точка (x, y) се причислява към R тогава и само тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват неравенствата (1). Тук се касае за едно точково множество от твърде специален вид[1] (вж. черт. 18). Такова множество, както вече имахме случай

[1] Ако областта R е дефинирана с неравенства от вида (1), то всяка права, успоредна на оста y, или не съдържа повече от две контурни точки на R, или съдържа безбройно много такива точки. Ако следователно едно точково множество не удовлетворява това условие, то сигурно не представлява криволинеен трапец с вертикални основи. Така например кръговият венец, който е изобразен на черт. 19, не представлява такъв трапец, защото има прави, успоредни на оста y, които секат контура му в 4 точки.

да споменем по-рано, се нарича криволинеен трапец, чиито основи са перпендикулярни на оста x. Ние знаем, че такова множество е измеримо (вж. част I, глава II, § 19). Лесно се вижда, че то е и затворено, защото границата на редица от точки, които удовлетворяват неравенствата (1), също удовлетворява тези неравенства.



Черт. 18



Черт. 19

Нека $f(x, y)$ е функция, която е дефинирана и непрекъсната в R. В такъв случай, както знаем, тя е интегруема, защото множеството R е затворено и измеримо. Това ни дава възможност да образуваме интеграла

$$\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy.$$

Да фиксираме x в интервала $a \leq x \leq b$. В такъв случай $f(x, y)$ ще бъде функция на единствената променлива y, дефинирана и непрекъсната, а следователно и интегруема в интервала $[\varphi_0(x), \varphi_1(x)]$. Това ни дава възможност да образуваме

$$F(x) = \int\limits_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y)\,dy.$$

Теорема. Функцията $F(x)$ е интегруема[1] в интервала $[a, b]$ и

$$(1') \qquad \iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b F(x)\,dx.$$

[1] Тя дори е непрекъсната. Нека читателят сам обмисли доказателството

Доказателство. Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

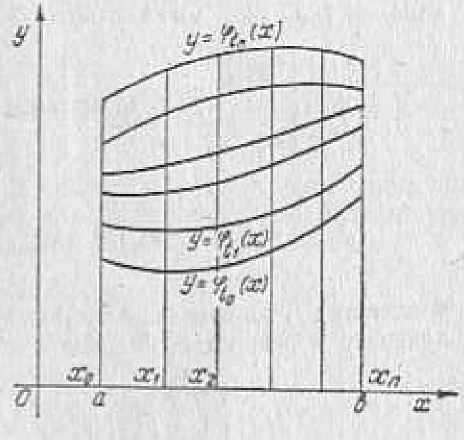
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < \\ < x_n = b$$

и разглеждаме кривите

$$\varphi_t(x) = \varphi_0(x) + \\ + t[\varphi_1(x) - \varphi_0(x)],$$

където на t даваме стойностите

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < \\ < t_n = 1.$$



Черт. 20

Правите $x = x_i$, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ и кривите $y = \varphi_{t_k}(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, разделят криволинейния трапец R, определен с неравенствата

$$a \leq x \leq b,$$
$$\varphi_0(x) \leq y \leq \varphi_1(x),$$

на по-малки трапеци G_{i_k}, дефинирани с неравенствата

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i,$$
$$\varphi_{t_{k-1}}(x) \leq y \leq \varphi_{t_k}(x)$$

(вж. черт. 20) в смисъл, че $R = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} G_{ik}$, както това лесно се доказва.

Не е трудно да се види, че функциите

$$F_k(x) = \int\limits_{\varphi_{t_{k-1}}(x)}^{\varphi_{t_k}(x)} f(x, y)\,dy$$

са ограничени в интервала $a \leq x \leq b$. И [наистина, ако означим с M една горна граница на $|f(x, y)|$, ще получим

$$|F_k(x)| \leq M[\varphi_{t_k}(x) - \varphi_{t_{k-1}}(x)] = M(t_k - t_{k-1})(\varphi_1(x) - \varphi_0(x)).$$

Функциите $\varphi_i(x)$ и $\varphi_0(x)$ обаче са непрекъснати в компактния интервал $a \leqq x \leqq b$ и следователно са ограничени. С това е установена и ограничеността на $F_k(x)$. По такъв начин добиваме възможност да образуваме горния и долния интеграл от $F_k(x)$ във всеки подинтервал на интервала $a \leqq x \leqq b$.

Означавайки с M_{ik} и m_{ik} точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в множеството G_{ik}, получаваме[1]

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\int_{\varphi_{t_{k-1}}(x)}^{\varphi_{t_k}(x)} f(x, y)\, dy\right] dx \leqq M_{ik}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\int_{\varphi_{t_{k-1}}(x)}^{\varphi_{t_k}(x)} dy\right] dx =$$

$$= M_{ik}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[\varphi_{t_k}(x)-\varphi_{t_{k-1}}(x)]\, dx = M_{ik}\,\mu(G_{ik}).$$

Фиксираме i, даваме на k стойности $1, 2, \ldots, n$ и събираме получените неравенства. По такъв начин намираме

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y)\, dy\right] dx \leqq \sum_{k=1}^{n} M_{ik}\,\mu(G_{ik})$$

или още

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x)\, dx \leqq \sum_{k=1}^{n} M_{ik}\,\mu(G_{ik}).$$

Като дадем на i в последното неравенство стойностите $1, 2, \ldots, n$ и съберем получените неравенства, ще намерим

$$\int_a^b F(x)\, dx \leqq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{ik}\,\mu(G_{ik}).$$

Аналогично получаваме

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{ik}\,\mu(G_{ik}) \leqq \int_a^b F(x)\, dx.$$

[1] Лицето на множеството G_{ik} е равно на разликата на двата интеграла

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_{t_k}(x)\, dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_{t_{k-1}}(x)\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i}[\varphi_{t_k}(x)-\varphi_{t_{k-1}}(x)]\, dx.$$

От друга страна, сечението на всеки два различни трапеца G_{ik} има мярка нула, както това лесно се доказва. Въз основа на това заключаваме, че

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{ik}\,\mu(G_{ik}) \leqq \iint_R f(x, y)\, dx\, dy \leqq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{ik}\,\mu(G_{ik}),$$

и следователно

$$\left|\iint_R f(x, y)\, dx\, dy - \int_a^b F(x)\, dx\right| \leqq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(M_{ik}-m_{ik})\,\mu(G_{ik}).$$

Функцията $f(x, y)$ е обаче непрекъсната и следователно при всеки избор на положителното число ε можем да направим диаметрите на подмножествата G_{ik} толкова малки,[1] че да имаме

$$M_{ik} - m_{ik} < \varepsilon.$$

Оттук получаваме следното неравенство:

$$\left|\iint_R f(x, y)\, dx\, dy - \int_a^b F(x)\, dx\right| \leqq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon\mu(G_{ik}) = \varepsilon\mu(R).$$

Положителното число ε обаче е произволно, а константите $\mu(G)$ и

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy - \int_a^b F(x)\, dx$$

не зависят от него. Това ни позволява да заключим, че

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy - \int_a^b F(x)\, dx = 0.$$

По аналогичен път получаваме

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b F(x)\, dx.$$

[1] За тази цел избираме както точките

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n,$$

така и точките

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

достатъчно близо една до друга.

От това следва, че

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b F(x)\,dx,$$

т. е. функцията $F(x)$ е интегруема в интервала $a \le x \le b$ и

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b F(x)\,dx.$$

С това доказателството е завършено.

Ние можем да получим същия резултат и с помощта на основната теорема на интегралното смятане в равнината по следния начин.

Нека Δ е полузатворен правоъгълник и $\psi(x, y)$ е неговата характеристична функция. Избираме произволно положително число ε и покриваме контура на R със система от краен брой отворени кръгове $C_1, C_2, \ldots, C_n$ по такъв начин, че сумата от квадратите на техните радиуси да бъде по-малка от ε.

Образуваме двете спомагателни полуадитивни функции:

(2) $$\theta_1(\Delta) = \overline{\int_a^b}\left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y)\psi(x, y)\,dy\right]dx - \iint_{\Delta R} f(x, y)\,dx\,dy - 2M\sum_{k=1}^{n}\mu(\Delta C_k) - 2\varepsilon\mu(\Delta R).$$

(3) $$\theta_2(\Delta) = \iint_{\Delta R} f(x, y)\,dx\,dy - \int_a^b\left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y)\psi(x, y)\,dy\right]dx - 2M\sum_{k=1}^{n}\mu(\Delta C_k) - 2\varepsilon\mu(\Delta R),$$

където M е една горна граница на $|f(x, y)|$. Полуадитивността на тези функции е очевидна (вж. част I, глава II, § 16). Също тъй не е трудно да се види, че те са неположителни около всяка точка P на равнината (относно смисъла на тези думи вж. част I, глава II, § 15). Ние ще покажем това за функцията $\theta_1(\Delta)$. Читателят ще може сам да извърши проверката за функцията $\theta_2(\Delta)$.

Нека точката P е външна за R. В такъв случай, ако Δ се намира в достатъчно малка околност на P, сечението на Δ с $\bar{R}$ ще бъде празно и следователно в R ще имаме $\psi(x, y)=0$. По такъв начин получаваме в този случай

$$\psi_1(\Delta) = -2M\sum_{k=1}^{n}\mu(\Delta C_k) - 2\varepsilon\mu(\Delta R) \le 0.$$

Нека точката P е вътрешна за R. Да означим с (x_0, y_0) нейните координати. В такъв случай около P може да се избере достатъчно малка околност U, която се съдържа в R и в която са изпълнени неравенствата

$$f(x_0, y_0) - \varepsilon \le f(x, y) \le f(x_0, y_0) + \varepsilon,$$

защото функцията $f(x, y)$ е непрекъсната. По такъв начин всеки път, когато Δ се съдържа в U, ще имаме

$$\theta_1(\Delta) \le \overline{\int_a^b}\left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} (f(x_0, y_0)+\varepsilon)\psi(x, y)\,dy\right]dx - \iint_{\Delta} (f(x_0, y_0)-\varepsilon)\,dx\,dy - 2M\sum_{k=1}^{n}\mu(\Delta C_k) - 2\varepsilon\mu(\Delta) \le$$

$$\le (f(x_0, y_0)+\varepsilon)\mu(\Delta) - (f(x_0, y_0)-\varepsilon)\mu(\Delta) - 2\varepsilon\mu(\Delta) = 0,$$

защото, както знаем (вж. част I глава II, § 16),

$$\int_a^b\left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} (f(x_0, y_0)+\varepsilon)\psi(x, y)\,dy\right]dx = (f(x_0, y_0)+\varepsilon)\mu(\Delta).$$

Остана да разгледаме случая, когато точката P е контурна за R. В такъв случай P е вътрешна за някой от покриващите кръгове $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Нека U е околност на P, която се съдържа в $C_1 + C_2 + \cdots + C_n$. В такъв случай всеки път, когато Δ се съдържа в U, ще имаме

$$\theta_1(\Delta) \le M\int_a^b\left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\,dy\right]dx + M\iint_{\Delta R} dx\,dy - 2M\mu(\Delta) - 2\varepsilon\mu(\Delta R) \le$$

$$\le M\mu(\Delta) + M\mu(\Delta) - 2M\mu(\Delta) - 2\varepsilon\mu(\Delta R) \le 0,$$

защото, както знаем,

$$\int_a^b\left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\,dy\right]dx \le \mu(\Delta)$$

(вж. част I, глава II, § 16).

Този резултат ни дава възможност да приложим основната теорема на интегралното смятане в равнината (вж. част I, глава II, § 15). По такъв начин имаме

$$\theta_1(\Delta) \le 0$$

при всеки избор на полузатворения правоъгълник Δ. Специално, ако изберем Δ така, че да съдържа R, ще получим

$$\int_a^b F(x)\,dx-\iint_R f(x,y)\,dx\,dy-2M\sum_{k=1}^{n}\mu(C_k)-2\varepsilon\mu(R)\leq 0.$$

От друга страна, $\sum_{k=1}\mu(C_k)<\varepsilon$ и следователно

$$\int_a^b F(x)\,dx\leq\iint_R f(x,y)\,dx\,dy+2M\varepsilon+2\varepsilon\mu(R)$$

или след граничния преход $\varepsilon\to 0$,

$$\int_a^b F(x)\,dx\leq\iint_R f(x,y)\,dx\,dy. \tag{4}$$

Като изучим по аналогичен начин функцията $\theta_2(\Delta)$, ще получим

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy\leq\int_a^b F(x)\,dx. \tag{5}$$

От друга страна, очевидно

$$\int_a^b F(x)\,dx\leq\int_a^b F(x)\,dx,$$

което заедно с (4) и (5) ни дава

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b F(x)\,dx=\int_a^b F(x)\,dx.$$

По такъв начин ние виждаме, че функцията $F(x)$ е интегруема и

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b F(x)\,dx.$$

С това доказателството е завършено.

Аналогично, ако интеграционната област R представлява криволинеен трапец с хоризонтални основи, т. е. ако тази област се определя с неравенства от вида

$$c\leq y\leq d,$$
$$g_0(y)\leq x\leq g_1(y),$$

където функциите $g_0(y)$ и $g_1(y)$ са дефинирани и непрекъснати в интервала $[c, d]$ и удовлетворяват неравенството

$$g_0(y)\leq g_1(y),$$

имаме формулата

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\left[\int_{g_0(y)}^{g_1(y)} f(x,y)\,dx\right]dy. \tag{6}$$

Ще изясним с няколко примера как се използват формулите (1') респ. (6).

Пример 1. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint_R x^2\,dx\,dy,$$

разпространен върху трапеца R, заграден от правите $x=1$, $x=2$, $y=\frac{x+2}{2}$, $y=\frac{3-x}{2}$ (вж. черт. 21).

Решение. Една точка (x, y) принадлежи на R тогава и само тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват неравенствата

$$1\leq x\leq 2,$$
$$\frac{3-x}{2}\leq y\leq\frac{x+2}{2}.$$

Оттук получаваме с помощта на формулата (1')

$$I=\int_1^2\left[\int_{\frac{3-x}{2}}^{\frac{x+2}{2}} x^2\,dy\right]dx=\int_1^2 x^2\left[\int_{\frac{3-x}{2}}^{\frac{x+2}{2}} dy\right]dx=$$

$$=\int_1^2 x^2\left|y\right|_{\frac{3-x}{2}}^{\frac{x+2}{2}}dx=\int_1^2 x^2\frac{2x-1}{2}\,dx=\left|\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{6}\right|=\frac{31}{12}.$$

Пример 2. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint_R\sqrt{x+y}\,dx\,dy,$$

разпространен върху триъгълника R, заграден от правите

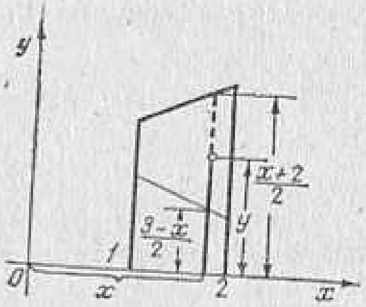
$$x=0,\quad y=0,\quad x+y=1$$

(вж. черт. 22).

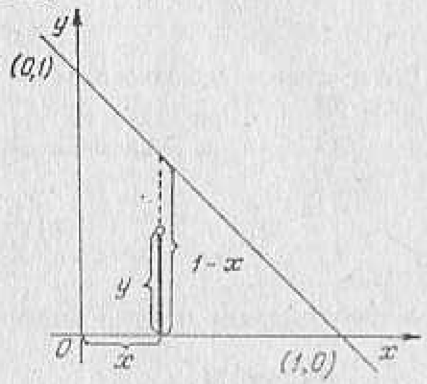
Решение. Една точка (x, y) принадлежи на интеграционната област R тогава и само тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват неравенствата

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$0 \leq y \leq 1-x.$$



Черт. 21



Черт. 22

Оттук получаваме въз основа на формулата (2)

$$I=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,dy\right]dx=\frac{2}{3}\int_0^1\left|(x+y)^{\frac{3}{2}}\right|_0^{1-x}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1\left(1-x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{2}{3}\left|x-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right|_0^1=\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5}.$$

Пример 3. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint_R y\,dx\,dy,$$

разпространен върху полукръга R, който се намира над оста x и се загражда от окръжността $x^2+y^2=r^2$ и оста x.

Решение. В този случай интеграционната област R представлява криволинеен трапец, определен от неравенствата

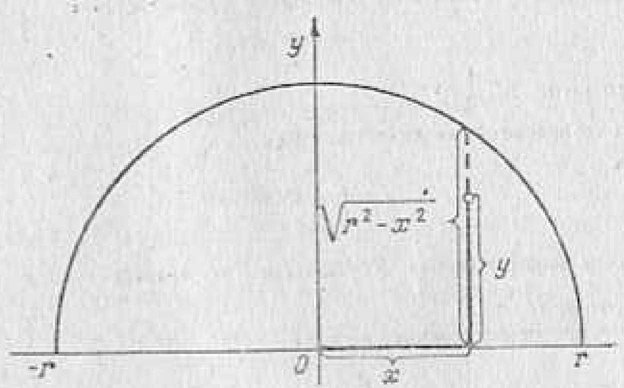
$$-r \leq x \leq r,$$

$$0 \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2}$$

(вж. черт. 23). Това ни позволява да пишем

$$I=\int_{-r}^{r}\left[\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}y\,dy\right]dx=\int_{-r}^{r}\left|\frac{y^2}{2}\right|_0^{\sqrt{r^2-x^2}}dx=\int_{-r}^{r}\frac{r^2-x^2}{2}\,dx=$$

$$=\left|\frac{r^2x}{2}-\frac{x^3}{6}\right|_{-r}^{r}=\frac{2}{3}r^3.$$



Черт. 23

Задачи

1. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint_R (x+y)\,dx\,dy,$$

разпространен върху областта R, заградена от правите $x=0$, $y=0$, $x+y=2$.

Отговор. $I=\frac{8}{3}$.

2. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

разпространен върху областта R, заградена от правите $y=0$, $x=y$, $x=1$.

Отговор. $I=\frac{1}{3}$.

3. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint_R (x+y)\,dx\,dy,$$

разпространен върху областта R, заградена от правата $x=y$ и от параболата $y^2=x$.

Отговор. $I=\frac{3}{20}$.

4. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint_R x^2\,dx\,dy,$$

разпространен върху областта R, дефинирана с неравенството

$$|x|+|y|\leq 1.$$

Отговор. $I=\frac{1}{3}$.

5. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint_R xy\,dx\,dy,$$

разпространен върху областта R, заградена от правата $x=2$ и от параболата $y^2=2x$.

Отговор. $I=0$.

6. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint_R y\sqrt{a^2-x^2}\,dx\,dy,$$

разпространен върху областта R, определена от неравенствата

$$x\geq 0,\quad y\geq 0,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1.$$

Отговор. $\frac{3\pi a^3 b^2}{32}$.

§ 3. Смяна на променливите при двойните интеграли

Нека двойно регулярната[1] трансформация

$$x=f(u, v), \tag{1}$$
$$y=g(u, v)$$

изобразява едно отворено точково множество R от равнината u, v върху едно точково множество R' в равнината x, y. Знаем, че всяко измеримо множество A, което лежи заедно с контура си в R, се изобразява върху измеримо точково множество A'. Ще докажем, че

[1] Срв. с част I, глава II, § 14 и 20.

$$\mu(A')=\iint_A \Delta\,du\,dv,$$

където Δ означава абсолютната стойност на функционалната детерминанта

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Доказателство. Делим множеството A на краен брой измерими подмножества

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

по такъв начин, че мярката на сечението на две от тях да бъде нула. Нека A_i' е образът на A_i при трансформацията (1) и нека M_i и m_i са съответно точната горна и точната долна граница на Δ в множеството A_i. В такъв случай, както знаем (вж. § 20, глава II, част I), са в сила неравенствата

$$m_i\,\mu(A_i)\leq\mu(A_i')\leq M_i\,\mu(A_i)$$

и следователно

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\mu(A_i)\leq\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i')\leq\sum_{i=1}^{n} M_i\,\mu(A_i)$$

или още

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\mu(A_i)\leq\mu(A')\leq\sum_{i=1}^{n} M_i\,\mu(A_i).$$

От друга страна, имаме

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\mu(A_i)\leq\iint_A \Delta\,du\,dv\leq\sum M_i\,\mu(A_i)$$

и следователно

$$\left|\iint_A \Delta\,du\,dv-\mu(A')\right|\leq\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,\mu(A_i).$$

Избираме едно произволно положително число ε. Можем да направим диаметрите на подмножествата A_i толкова малки,[1] че да имаме

$$M_i - m_i \leq \varepsilon$$

и следователно

$$\left| \iint_A \Delta\, du\, dv - \mu(A') \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\mu(A_i) = \varepsilon\mu(A). \tag{3}$$

От това неравенство заключаваме, че

$$\iint_A \Delta\, du\, dv - \mu(A') = 0,$$

защото в противен случай неравенството (3) сигурно би било нарушено при достатъчно малки стойности на ε. С това равенство (2) е доказано.

Ние ще използуваме този резултат, за да установим следната важна формула:

$$\iint_{A'} F(x, y)\, dx\, dy = \iint_A F[f(u, v), g(u, v)]\, \Delta\, du dv, \tag{4}$$

която е сигурно валидна поне когато функцията $F(x, y)$ е непрекъсната в A' и измеримото множество A е затворено (това са, разбира се, само достатъчни условия за валидността на формулата (4)).

Доказателство. Делим множеството A' на краен брой измерими подмножества

$$A'_1, A'_2, \cdots, A'_n$$

така, че сечението на всеки две от тях да има мярка нула. Означаваме с A_i образа на A'_i при обратната трансформация на трансформацията (1) и с M_i и m_i съответно точната горна и точната долна граница на функцията

$$F[f(u, v), g(u, v)]$$

в множеството A_i. В такъв случай

$$m_i \iint_{A_i} \Delta\, du\, dv \leq \iint_{A_i} F[f(u, v), g(u, v)]\, \Delta\, du\, dv \leq M_i \iint_{A_i} \Delta\, du\, dv$$

[1] Това може да се направи, защото A лежи в R заедно с контура си и следователно непрекъснатата функция Δ е равномерно непрекъсната в A.

или още

$$m_i \mu(A'_i) \leq \iint_{A_i} F[f(u, v), g(u, v)]\, \Delta\, du\, dv \leq M_i \mu(A'_i).$$

Като дадем на i стойностите $1, 2, \cdots, n$ и съберем получените неравенства, намираме

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mu(A'_i) \leq \iint_A F[f(u, v), g(u, v)]\, \Delta\, du\, dv \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(A'_i).$$

От друга страна, не е трудно да се види, че M_i и m_i са точната горна и точната долна граница на $F(x, y)$ в множеството A'_i и следователно

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mu(A'_i) \leq \iint_{A'} F(x, y)\, dx\, dy \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(A'_i),$$

откъдето

$$\left| \iint_{A'} F(x, y)\, dx\, dy - \iint_A F[f(u, v), g(u, v)]\, \Delta\, du\, dv \right| \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \mu(A'_i).$$

Избираме произволно положително число ε. Ние можем да направим диаметрите на множеството A'_i толкова малки, че да имаме

$$M_i - m_i \leq \varepsilon$$

и следователно

$$\left| \iint_{A'} F(x, y)\, dx\, dy - \iint_A F[f(u, v), g(u, v)]\, \Delta\, du\, dv \right| \leq \tag{5}$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\mu(A'_i) = \varepsilon\mu(A'),$$

откъдето заключаваме, че

$$\iint_{A'} F(x, y)\, dx\, dy - \iint_A F[f(u, v), g(u, v)]\, \Delta\, du\, dv = 0$$

защото в противен случай неравенството (5) сигурно би било нарушено при достатъчно малки стойности на ε. С това формулата (4) е доказана.

* * *

Сега ще изведем формулата (4) по друг път, като предполагаме, че трансформацията (1) е еднократно регулярна (относно терминологията вж. част I, глава II, § 14 и § 20).

Да разгледаме първо специалния случай, когато трансформачните формули (1) имат вида

$$x=u,$$

$$y=g(u,\ v), \tag{6}$$

т. е. разглежданата трансформация е диагонална. Освен това нека A е правоъгълник, определен от неравенствата

$$p\leq u\leq q,$$

$$r\leq v\leq s, \tag{7}$$

който лежи в R и нека

$$g'_v(u,\ v)>0 \tag{8}$$

в A. В такъв случай A' е криволинеен трапец, определен от неравенствата

$$p\leq x\leq q,$$

$$g(x,\ r)\leq y\leq g(x,\ s). \tag{9}$$

И наистина нека $(u_0,\ v_0)$ е точка от A и $(x_0,\ y_0)$ е нейният образ. Това значи, че

$$p\leq u_0\leq q,$$

$$r\leq v_0\leq s$$

и

$$x_0=u_0,$$

$$y_0=g(u_0,\ v_0).$$

В такъв случай

$$g(u_0,\ r)\leq y_0\leq g(u_0,\ s),$$

защото функцията $g(u_0,\ v)$ монотонно расте, както това следва от условието (8). Като вземем под внимание още равенството $x_0=u_0$, заключаваме, че точката $(x_0,\ y_0)$ удовлетворява неравенствата (9). И така образът на всяка точка от A удовлетворява неравенствата (9).

Обратно, нека една точка $(x_1,\ y_1)$ удовлетворява неравенствата (9). Ще покажем, че тя е образ на някоя точка от A. И наистина от неравенствата

$$g(x_1,\ r)\leq y_1\leq g(x_1,\ s)$$

заключаваме, че има число v_1 в интервала $[r,\ s]$, за което

$$g(x_1,\ v_1)=y_1,$$

защото функцията $g(x_1,\ v)$ е непрекъсната в разглеждания интервал $[r,\ s]$. Да положим $u_1=x_1$. В такъв случай

$$x_1=u_1$$

$$y_1=g(u_1,\ v_1)$$

и

$$p\leq u_1\leq q,$$

$$r\leq v_1\leq s,$$

т. е. точката $(x_1,\ y_1)$ е образ на точката $(u_1,\ v_1)$ от A. С това е показано, че образът на (A) при трансформацията (6) е криволинейният трапец (9).

Сега вече не е трудно да проверим верността на равенството (4) в разглеждания от нас специален случай. И наистина

$$\iint\limits_{A'} F(x,\ y)\,dx\,dy=\int_p^q\left[\int_{g(x,\ r)}^{g(x,\ s)} F(x,\ y)\,dy\right]dx.$$

Да разгледаме интеграла

$$\phi(x)=\int_{g(x,\ r)}^{g(x,\ s)} F(x,\ y)\,dy$$

и да направим смяна на интеграционната променлива y с помощта на субституцията

$$y=g(x,\ v),$$

където x е фиксирано. Това ще ни даде

$$\phi(x)=\int_r^s F[x,\ g(x,\ v)]\,g'_v(x,\ v)\,dv$$

и следователно

$$\iint\limits_{A'} F(x,\ y)\,dx\,dy=\int_p^q \phi(x)\,dx=$$

$$=\int_p^q\left[\int_r^s F[(x,\ g(x,\ v)]\,g'_v(x,\ v)\,dv\right]dx=$$

$$= \iint\limits_{A} F[x, g(x, v)]\, g'_v(x, v)\, dv\, dx.$$

По такъв начин ние установихме равенството (4), когато трансформацията (1) има вида (6), защото в този специален случай

$$\Delta = g'_v(u, v).$$

Със същата леснина се установява формулата (4) и в случая, когато трансформацията (6) удовлетворява условието

$$g'_v(u, v) < 0$$

в A. Тогава A' е криволинеен трапец, определен от неравенствата

$$p \leq x \leq q,$$

$$g(x, s) \leq y \leq g(x, r),$$

а

$$\Delta = -g'_v(u, v).$$

Нека читателят сам обмисли подробностите.

Също така не е съществено предположението, че нашата диагонална трансформация има точно вида (6). Направените разсъждения са приложими и в случая, когато трансформацията (1) има вида

$$x = f(u, v),$$

$$y = v,$$

стига $f'_u(u, v)$ да не си мени знака в A. Този случай не е съществено различен от разгледания и се свежда към него със смяна в означенията.

От доказаното следва също, че формулата (4) е валидна и тогава, когато трансформацията (1) е диагонална и A е полузатворен правоъгълник, стига Δ да не си мени знака в A. И наистина да положим

$$B = K(A) - A.$$

В такъв случай мярката на B е нула (защото $B \subset K(A)$), множеството $A+B$ е затворен правоъгълник и $AB = 0$. От доказаното имаме

$$\iint\limits_{(A+B)'} F(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{A+B} F[f(u, v), g(u, v)]\, \Delta\, du\, dv,$$

защото $A+B$ е затворен правоъгълник. От друга страна,

$$\iint\limits_{(A+B)'} F\, dx\, dy = \iint\limits_{A'+B'} F\, dx\, dy = \iint\limits_{A'} F\, dx\, dy + \iint\limits_{B'} F\, dx\, dy = \iint\limits_{A'} F\, dx\, dy,$$

тъй като B' е подмножество на множеството $[K(A)]'$, чиято мярка е нула и следователно $\mu(B') = 0$. Аналогично имаме

$$\iint\limits_{A+B} F(f, g)\, \Delta\, du\, dv = \iint\limits_{A} F(f, g)\, \Delta\, du\, dv + \iint\limits_{B} F(f, g)\, \Delta\, du\, dv = \iint\limits_{A} F(f, g)\, \Delta\, du\, dv,$$

защото $\mu(B) = 0$ и по такъв начин получаваме

$$\iint\limits_{A'} F(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{A} F(f, g)\, \Delta\, du\, dv.$$

Сега ще установим, че формулата (4) е валидна и тогава когато (1) е диагонална регулярна трансформация (от кой да е вид), и A е произволно затворено и измеримо подмножество на R. За тази цел избираме положително число δ_0 толкова малко, че всяка точка, която се намира на разстояние, по-малко от δ_0 до A, да лежи в R. Това може да се направи съгласно лема 1 от § 20, глава II, част I. Означаваме с δ положително число, по-малко от δ_0. В такъв случай множеството L на точките, чието разстояние до A не надминава δ, ще бъде ограничено и затворено (вж. лема 2, § 20, глава II, част I) и ще се съдържа изцяло в R, защото $\delta < \delta_0$. Избираме положително число ε, по-малко от $\frac{\delta^2}{4}$, и покриваме контура на A със система от отворени кръгове $C_1, C_2, \ldots, C_n$ по такъв начин, че сумата от квадратите на техните радиуси да бъде по-малка от ε. Това може да се направи, защото контурът на A има мярка нула. Освен това ние можем да смятаме, че всеки един от кръговете $C_1, C_2, \ldots, C_n$ съдържа поне една точка от контура на A, защото ако това не е изпълнено, ние можем да премахнем онези кръгове, които нямат обща точка с $K(A)$, и по такъв начин ще получим нова система от кръгове, които покриват $K(A)$, притежават исканото свойство, а сумата от квадратите на техните радиуси е още по-малка. Радиусите на кръговете C_ν са по-малки от

$$\sqrt{\varepsilon} < \frac{\delta}{2}$$

и следователно всяка тяхна точка се намира на разстояние, по-малко от δ до A. От това заключаваме, че кръговете C_r се съдържат в L, а следователно и в R.

Да образуваме спомагателната полуадитивна функция

$$\theta(D)=\left|\iint\limits_{(DA)'}F(x,y)\,dx\,dy-\iint\limits_{AD}F(f,g)\,\Delta\,du\,dv\right|-$$

(10)

$$-M\sum_{k=1}^{n}\mu((ADC_k)')-N\sum_{k=1}^{n}\mu(ADC_k)$$

на полузатворения правоъгълник D, където M е една горна граница на $|F(x,y)|$ в A', а N е една горна граница на

$$|F[f(u,v),g(u,v)]|\,\Delta$$

в A.

Не е трудно да се види, че функцията $\theta(D)$ е неположителна около всяка точка P на равнината (относно смисъла на тези думи вж. част I, глава II, § 15).

Да разгледаме първо случая, когато точката P е външна за A. В такъв случай, ако D се намира в достатъчно малка околност на P, сечението AD ще бъде празно и следователно $\theta(D)=0$.

Нека точката P е контурна за A. В такъв случай тя е вътрешна за някой от кръговете $C_1, C_2, \dots, C_m$, защото тези кръгове са отворени. Нека C_r е кръг, който съдържа P и нека U е околност на P, която се съдържа в C_r. В такъв случай всеки път, когато $D\subset U$, ще имаме $DC_r=D$, т. е.

$$M\sum_{k=1}^{n}\mu((ADC_k)')+N\sum_{k=1}^{n}\mu(ADC_k)\geq$$
$$\geq M\mu((ADC_r)')+N\mu(ADC_r)=$$
$$=M\mu((AD)')+N\mu(AD)$$

и следователно

$$\theta(D)\leq\left|\iint\limits_{DA'}F(x,y)\,dx\,dy\right|+\left|\iint\limits_{DA}F(f,g)\,\Delta\,du\,dv\right|-$$

$$-M\mu((AD)')-N\mu(AD)\leq 0.$$

Остава да разгледаме случая, когато точката P е вътрешна за A. Тогава ние можем да изберем околност U на точката P, която лежи изцяло в A. Нека $D\subset U$. В такъв случай $DA=D$ и следователно

$$\theta(D)=\left|\iint\limits_{D'}F(x,y)\,dx\,dy-\iint\limits_{D}F(f,g)\,\Delta\,du\,dv\right|-$$

$$-M\sum_{k=1}^{n}\mu((ADC_k)')-N\sum_{k=1}^{n}\mu(ADC_k).$$

Множеството D обаче е правоъгълник, а трансформацията (1) е диагонална по предположение. Този случай ние вече разгледахме и знаем, че

$$\iint\limits_{D'}F(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D}F(f,g)\,\Delta\,du\,dv.$$

По такъв начин получаваме

$$\theta(D)=-M\sum_{k=1}^{n}\mu((DC_k)')-N\sum_{k=1}^{n}\mu(DC_k)\leq 0.$$

С това е установено, че функцията $\theta(D)$ е неположителна около всяка точка на равнината. Тази функция удовлетворява всичките условия, при които ние доказахме основната теорема на интегралното смятане в равнината (вж. част I, глава II, § 15). Това ни дава възможност да твърдим, че при всеки избор на полузатворения правоъгълник D имаме $\theta(D)\leq 0$. Специално, ако изберем D така, че да съдържа A, ще получим

$$\left|\iint\limits_{A'}F(x,y)\,dx\,dy-\iint\limits_{A}F(f,g)\,\Delta\,du\,dv\right|-$$

$$-M\sum_{k=1}^{n}\mu((AC_k)')-N\sum_{k=1}^{n}\mu(AC_k)\leq 0$$

и толкова повече

$$\left|\iint\limits_{A'}F(x,y)\,dx\,dy-\iint\limits_{A}F(f,g)\,\Delta\,du\,dv\right|\leq$$

$$\leq M\sum_{k=1}^{n}\mu(C_k')+N\sum_{k=1}^{n}\mu(C_k).$$

Да означим с r_k радиуса на кръга и с h една обща горна граница на $|f_u'|$, $|f_v'|$, $|g_u'|$, $|g_v'|$ в L. В такъв случай съгласно лема 3 от § 20 на глава II, част I, диаметърът на C_k' няма да надминава $4\,Hr'_k\sqrt{2}$. Да построим кръг G_k, чийто център се намира в коя да е точка C'_k, а радиусът е $4\,Hr_k\sqrt{2}$. Този кръг съдържа всичките точки на C'_k, поради което

$$\mu(C'_k) \le \mu(G_k) = 32\pi H^2 r_k^2$$

и следователно

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(C'_k) \le 32\pi H^2 \sum_{k=1}^{n} r_k^2 < 32\pi H^2 \varepsilon.$$

Като вземем под внимание още, че

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(C_k) = \pi \sum_{k=1}^{n} r_k^2 < \pi\varepsilon,$$

получаваме

$$\left| \iint_{A'} F(x, y)\, dx\, dy - \iint_{A'} F(f, g)\,\Delta\, du\, dv \right| \le$$
$$\le (32\pi H^2 M + \pi N)\,\varepsilon,$$

което след граничния преход $\varepsilon \to 0$ ни дава

(11) $$\left| \iint_{A'} F(x, y)\, dx\, dy - \iint_{A} F(f, g)\,\Delta\, du\, dv \right| \le 0$$

и следователно

(12) $$\iint_{A'} F(x, y)\, dx\, dy = \iint_{A} F(f, g)\,\Delta\, du\, dv.$$

Тук ще направим следната забележка. Предположението, че множеството A е затворено, може да се изостави, ако функцията $F(x, y)$ е дефинирана и непрекъсната в $A+K(A)$, стига множеството A да бъде измеримо и да лежи в R заедно с контура си. И наистина множеството $A+K(A)$ е затворено и измеримо. Следователно съгласно с това, което доказахме, ще имаме

$$\iint_{[A+K(A)]'} F(x, y)\, dx\, dy = \iint_{A+K(A)} F(f, g)\,\Delta\, du\, dv.$$

Да положим

$$B = K(A) - A.$$

В такъв случай $\mu(B)=0$, защото $B \subset K(A)$, и $\mu(B')=0$, защото $B' \subset [K(A)]'$. От друга страна, $A+K(A)=A+B$, $AB=0$ и следователно

$$\iint_{A'} F(x, y)\, dx\, dy = \iint_{A'} F(x, y)\, dx\, dy + \iint_{B'} F(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{A'+B'} F(x, y)\, dx\, dy = \iint_{(A+B)'} F(x, y)\, dx\, dy = \iint_{A+B} F(f, g)\,\Delta\, du\, dv =$$

$$= \iint_{A} F(f, g)\,\Delta\, du\, dv + \iint_{B} F(f, g)\,\Delta\, du\, dv = \iint_{A} F(f, g)\,\Delta\, du\, dv.$$

Преминаваме към разглеждане на общия случай.

Нека (1) е регулярна трансформация на отвореното множество R и A е затворено и измеримо негово подмножество. Ще покажем, че равенството (4) е вярно и в този случай. За тази цел пак ще разгледаме спомагателната полуадитивна функция (10). Тази функция и сега е неположителна около всяка точка P на равнината. Случаят, когато точката P е външна или контурна за A, се разглежда по същия начин, както в случая, когато трансформацията (1) е диагонална. По-интересен е случаят, когато точката P е вътрешна за A. В такъв случай ние знаем, че в достатъчно малка околност W на точката P трансформацията (1) може да се представи като произведение на две диагонални регулярни трансформации (вж. § 14, глава II, част I). Нека тези трансформации са

(13) $$\xi = u, \qquad \eta = \varphi(u, v)$$

и

(14) $$x = \psi(\xi, \eta), \qquad y = \eta.$$

По такъв начин имаме

$$\psi(u, \varphi(u, v)) = f(u, v), \qquad \varphi(u, v) = g(u, v)$$

и следователно

(15) $$\psi(u, g(u, v)) = f(u, v).$$

Нека околността W е толкова малка, че да се съдържа в A. Това може да се постигне, тъй като точката P е вътрешна за A. В такъв случай, ако $D \subset W$, ще имаме $AD = D$ и следователно

$$\theta(D) = \iint_{D'} F(x, y)\, dx\, dy - \iint_{D} F(f, g)\,\Delta\, du\, dv -$$
$$- M \sum_{k=1} \mu((DC_k)') - N \sum_{k=1}^{n} \mu(DC_k).$$

Да разгледаме диагоналната трансформация (13) в W. Тя преобразува W в някое отворено множество W^*, а D в някое измеримо множество D^*, което се съдържа в W^*. Трансформацията (14) преобразува W^* в отворено множество W', а D^* в D'. Съгласно с това, което доказахме за диагоналните трансформации, ще имаме

$$\iint_{D'} F(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} F[\psi(\xi, \eta), \eta]\,|\psi'_\xi(\xi, \eta)|\,d\xi\,d\eta$$

и

$$\iint_{D^*} F[\psi(\xi, \eta), \eta]\,|\psi'_\xi|\,d\xi\,d\eta = \iint_D F[f(u, v), g(u, v)]\,|\psi'_\xi \varphi'_v|\,du\,dv.$$

От друга страна, ако диференцираме равенството (15) частно по u и по v, ще получим

$$\psi'_\xi + \psi'_\eta g'_u = f'_u,$$
$$\psi'_\eta g'_v = f'_v$$

и следователно

$$\psi'_\xi = f'_u - \frac{g'_u f'_v}{g'_v} = \frac{f'_u g'_v - g'_u f'_v}{g'_v}.$$

Като вземем под внимание още, че $\varphi(u, v) = g(u, v)$, намираме

$$\psi'_\xi \varphi'_v = f'_u g'_v - g'_u f'_v,$$

т. е.

$$\iint_{D'} F(x, y)\,dx\,dy = \iint_D F(f, g)\,\Delta\,du\,dv.$$

По такъв начин получаваме

$$\theta(D) = -M\sum_{k=1}^{n} \mu[(DC_k)'] - N\sum_{k=1}^{n} \mu(DC_k).$$

И така функцията $\theta(D)$ е неположителна около всяка точка на равнината. Това ни дава възможност да приложим основната теорема на интегралното смятане в равнината. По-нататък разсъжденията се извършват по същия начин, както в случая на диагонална трансформация.

* * *

Формулата (4) намира многобройни и важни приложения. Особено често се използува трансформацията

$$x = \rho\cos\theta,$$
(6) $$y = \rho\sin\theta,$$

която е двойно регулярна в безкрайния правоъгълник, лежащ в равнината на правоъгълната декартова координатна система θ, ρ, определен от неравенствата

$$-\pi < \theta < \pi, \quad \rho > 0.$$

В такъв случай

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

и формулата (4) добива вида

$$\iint_{A'} F(x, y)\,dx\,dy = \iint_A F[\rho\cos\theta, \rho\sin\theta]\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Трансформачните формули (6) могат да се използуват с успех например в случай, когато интеграционната област A' е дефинирана в полярни координати с помощта на неравенствата

$$\alpha \le \theta \le \beta,$$
(7) $$f(\theta) \le \rho \le g(\theta),$$

където $-\pi < \alpha < \beta < \pi$, а функциите $f(\theta)$ и $g(\theta)$ са непрекъснати в атворения интервал $[\alpha, \beta]$ и удовлетворяват неравенствата

$$0 < f(\theta) \le g(\theta).$$

В този случай ще казваме, че интеграционната област A' е сектор, който няма общи точки с неположителната част на оста OX. Трансформачните формули (6) преобразуват този сектор в криволинеен трапец с основи, перпендикулярни на оста θ, лежащ в равнината на правоъгълната декартова координатна система θ, ρ, и следователно

(8) $$\iint_{A'} F(x, y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \left[\int_{f(\theta)}^{g(\theta)} F[\rho\cos\theta, \rho\sin\theta]\,\rho\,d\rho\right] d\theta.$$

П р и м е р. Да се пресметне интегралът

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Решение. Полагаме

$$I(p)=\int_0^p e^{-x^2}\,dx$$

и разглеждаме двойния интеграл

$$\iint_R e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

разпространен върху квадрата R, определен от неравенствата

$$0\le x\le p,$$
$$0\le y\le p.$$

Очевидно имаме

$$\iint_R e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_0^p\left[\int_0^p e^{-x^2-y^2}\,dy\right]dx=\int_0^p e^{-x^2}\left[\int_0^p e^{-y^2}\,dy\right]dx=$$

$$=\int_0^p e^{-x^2}I(p)\,dx=I(p)\int_0^p e^{-x^2}\,dx=I^2(p).$$

Въвеждаме полярни координати

$$x=\rho\cos\theta,$$
$$y=\rho\sin\theta.$$

Функционалната детерминанта ρ се анулира при $x=y=0$. Поради това ние изолираме началото с кръгова област $\rho<r$, където $r<p$, и разглеждаме интеграла

$$\iint_{A(r)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

където $A(r)$ е частта от квадрата R, която се намира вън от кръга $\rho<r$. В такъв случай, полагайки

$$\rho(\theta)=\frac{p}{\cos\theta}\quad\text{при}\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\quad\text{и}\quad\rho(\theta)=\frac{p}{\sin\theta}\quad\text{при}\quad\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2},$$

получаваме[1]

$$\iint_{A(r)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_r^{\rho(\theta)} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right]d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{-e^{-\rho^2}}{2}\right|_r^{\rho(\theta)}d\theta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-r^2}-e^{-\rho^2(\theta)}}{2}\,d\theta=e^{-r^2}\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\rho^2(\theta)}\,d\theta,$$

тъй като $A(r)$ няма общи точки с неположителната част на оста OX. От друга страна, като означим с $B(r)$ сектора $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, $\rho<r$, получаваме

$$I^2(p)-\iint_{A(r)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\iint_{B(r)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

и следователно

$$\left|I^2(p)-\iint_{A(r)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\right|\le\mu(B(r))=\frac{\pi r^2}{4}$$

или още

$$\left|I^2(p)-e^{-r^2}\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\rho^2(\theta)}\,d\theta\right|\le\frac{\pi r^2}{4},$$

откъдето

$$\left|I^2(p)-e^{-r^2}\frac{\pi}{4}\right|\le\frac{\pi r^2}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\rho^2(\theta)}\,d\theta$$

и следователно[1]

$$\left|I^2(p)-e^{-r^2}\frac{\pi}{4}\right|\le\frac{\pi r^2}{4}+\frac{1}{2}e^{-p^2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Като извършим граничния преход $r\to 0$, намираме

$$\left|I^2(p)-\frac{\pi}{4}\right|\le\frac{\pi}{4}e^{-p^2},$$

откъдето

$$\lim_{p\to\infty}\left[I^2(p)-\frac{\pi}{4}\right]=0$$

---

[1] Областта $A(r)$ може да се дефинира в полярни координати с помощта на неравенствата

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2},$$
$$r\le\rho\le\rho(\theta).$$

[1] Тъй като $\rho(\theta)\ge p$.

и следователно

$$I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Не е трудно да се убедим, че формулата (8) запазва своята валидност и тогава, когато интеграционната област A' се определя в полярни координати с неравенствата (7), където α и β удовлетворяват неравенствата

$$-\pi\leq\alpha<\beta\leq\pi,$$

функциите $f(\theta)$ и $g(\theta)$ са непрекъснати в затворения интервал $[\alpha, \beta]$ и удовлетворяват неравенствата

$$0\leq f(\theta)\leq g(\theta)$$

и функцията $F(x, y)$ е непрекъсната в A'.

Тези условия са по-общи от разгледаните по-горе, защото сега не се иска да имаме $\alpha\neq-\pi$; $\beta\neq\pi$ и $f(\theta)\neq0$. Читателят ще може сам да установи валидността на това обобщение, като проучи упътването на задача 1 към този параграф.

В разглежданията, които направихме, интервалът $[-\pi, \pi]$ може очевидно да се замени с произволен интервал, чиято дължина е 2π.

Задачи

1. Нека A е едно измеримо и затворено множество от точки в безкрайния правоъгълник

$$0\leq u\leq 2\pi,$$

(9) $$v\geq0,$$

който лежи в равнината с декартови координати u и v. Нека A' е образ на A при трансформацията

(10) $$x=v\cos u,\quad y=v\sin u.$$

В такъв случай, ако $F(x, y)$ е функция, която е непрекъсната в A', е валидно равенството

(11) $$\iint\limits_{A'} F(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{A} F(v\cos u,\ v\sin u)\,v\,du\,dv.$$

Забележка. По такъв начин равенството (11) е валидно и в този случай въпреки че трансформацията (10) не е регулярна в (9).

Упътване. Изберете едно положително число r толкова голямо, че правоъгълникът

$$0\leq u\leq 2\pi,$$

$$0\leq v\leq r$$

да покрива A. Нека B е сумата от правоъгълниците

(12) $$0\leq u\leq\varepsilon,\ \ 0\leq v\leq r;\ \ 2\pi-\varepsilon\leq u\leq 2\pi,\ \ 0\leq v\leq r;\ \ 0\leq u\leq 2\pi,\ \ 0\leq v\leq\varepsilon$$

и нека C е сумата от секторите в равнината XOY, които в полярни координати се определят от същите неравенства (12) (тук u е полярният ъгъл, а v е полярното разстояние).

Използувайте, че

$$\iint\limits_{A'} F(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{A'-C} F(x, y)\,dx\,dy+\iint\limits_{A'C} F(x, y)\,dx\,dy,$$

$$\iint\limits_{A} F(v\cos u,\ v\sin u)\,v\,du\,dv=\iint\limits_{A-B} F(v\cos u,\ v\sin u)\,v\,du\,dv+$$

$$+\iint\limits_{AB} F(v\cos u,\ v\sin u)\,v\,du\,dv,$$

$$\iint\limits_{A'-C} F(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{A-B} F(v\cos u,\ v\sin u)\,v\,du\,dv.$$

Нека M е една горна граница на $|F(x, y)|$ в A'. В такъв случай

$$\left|\iint\limits_{A'C} F(x, y)\,dx\,dy\right|\leq M\mu(A'C)\leq M(\varepsilon r^2+\pi\varepsilon^2),$$

$$\left|\iint\limits_{AB} F(v\cos u,\ v\sin u)\,v\,du\,dv\right|\leq Mr\,\mu(AB)\leq Mr(2\varepsilon r+2\pi\varepsilon)$$

следователно

$$\left|\iint\limits_{A'} F(x, y)\,dx\,dy-\iint\limits_{A} F(v\cos u,\ v\sin u)\,v\,du\,dv\right|\leq$$

$$\leq\left|\iint\limits_{A'C} F(x, y)\,dx\,dy\right|+\left|\iint\limits_{AB} F(v\cos u,\ v\sin u)\,v\,du\,dv\right|\leq$$

$$\leq M(\varepsilon r^2+\pi\varepsilon^2)+Mr(2\varepsilon r+2\pi\varepsilon).$$

Извършете в така полученото неравенство граничния преход $\varepsilon\to0$.

2. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint\limits_{R}(x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

разпространен върху областта R, определена от неравенствата

$$x\geq0,\quad y\geq0,\quad x^2+y^2\leq a^2.$$

Упътване. Въведете полярни координати.

Отговор. $I=\frac{\pi a^4}{8}$.

3. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint\limits_R \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy,$$

разпространен във вътрешността R на елипсата

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Упътване. Направете смяната на променливите

$$x=au,$$

$$y=bv$$

и след това въведете полярни координати.

Отговор. $I=\frac{2\pi ab}{3}$.

4. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint\limits_R (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

взет във вътрешността R на кръга

$$x^2+y^2-2y=0.$$

Упътване. Въведете полярни координати.

Отговор. $I=\frac{3\pi}{2}$.

5. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint\limits_R \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

разпространен върху частта R от първия квадрант, заградена от оста x и от кривата

$$\rho^2=4\cos^2\theta-1.$$

Отговор. $I=\sqrt{3}-\frac{\pi}{9}$.

§ 4. Несобствени двойни интеграли от неотрицателни функции

Нека G е едно измеримо множество от точки в равнината и S е негово подмножество с мярка нула. Нека $f(x, y)$ е функция, дефинирана в $G-S$, която приема само неотрицателни стойности. Нека най-сетне функцията $f(x, y)$ е интегруема върху всяко измеримо подмножество A на G, чието разстояние до S е различно от нула. Ще казваме, че функцията $f(x, y)$ е интегруема в несобствен смисъл върху G, ако интегралът

$$\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy \tag{1}$$

остава ограничен отгоре, когато A се мени. Точната горна граница на (1) ще означаваме със символа

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy. \tag{2}$$

Нека

$$A_1, A_2, \ldots$$

е редица от измерими подмножества на G, за които

$$d(A_n, S)\neq 0,\quad \lim_{n\to\infty}\mu(G-A_n)=0.$$

Не е трудно да се покаже, че ако редицата

$$\iint\limits_{A_1} f(x, y)\,dx\,dy,\quad \iint\limits_{A_2} f(x, y)\,dx\,dy,\ldots$$

е сходяща, то функцията $f(x, y)$ е интегруема в несобствен смисъл върху G и

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{A_n} f(x, y)\,dx\,dy.$$

И наистина нека A е произволно измеримо подмножество на G, чието разстояние до S е различно от нула. Очевидно имаме

$$A\subset A_n+(A-A_n).$$

Оттук, като вземем под внимание, че функцията $f(x, y)$ е неотрицателна, получаваме

$$\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy\leq\iint\limits_{A_n} f(x, y)\,dx\,dy+\iint\limits_{A-A_n} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Да означим с M една горна граница на $f(x, y)$ върху A. В такъв случай

$$\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy\leq\iint\limits_{A_n} f(x, y)\,dx\,dy+M\mu(A-A_n)$$

и толкова повече

$$\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy\leq\iint\limits_{A_n} f(x, y)\,dx\,dy+M\mu(G-A_n).$$

Като извършим граничен преход в последното неравенство, получаваме

$$\iint\limits_{A} f(x, y)\, dx\, dy \leq \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{A_n} f(x, y)\, dx\, dy,$$

което ни учи, че функцията $f(x, y)$ е интегруема върху G и

$$\iint\limits_{G} f(x, y)\, dx\, dy \leq \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{A_n} f(x, y)\, dx\, dy.$$

От друга страна, съгласно дефиницията на (2) имаме

$$\iint\limits_{A_n} f(x, y)\, dx\, dy \leq \iint\limits_{G} f(x, y)\, dx\, dy,$$

което след граничен преход ни дава

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{A_n} f(x, y)\, dx\, dy \leq \iint\limits_{G} f(x, y)\, dx\, dy$$

следователно

$$\int\limits_{G} f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{A_n} f(x, y)\, dx\, dy.$$

С това доказателството е завършено.

Глава II

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ДВОЙНИТЕ ИНТЕГРАЛИ

§ 1. Дефиниция на понятието обем

Въвеждането на понятието обем може да стане строго, като се следва пътят, по който въведохме понятието лице. Тук няма да се спираме на подробностите, а ще покажем само в общи черти как това може да се направи.

1. Нека Δ е правоъгълен паралелепипед с измерения a, b и c. Ние ще означаваме произведението abc кратко със символа $m(\Delta)$.

2. Ако A е едно ограничено множество точки в пространството, можем (по безбройно много начини) да изберем система от краен брой отворени кубове $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ по такъв начин, че да имаме

$$A \subset \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n.$$

Точната долна граница на числата

$$m(\Delta_1) + m(\Delta_2) + \cdots + m(\Delta_n)$$

ще наричаме горна Пеано-Жорданова мярка на множеството A и ще я означаваме със символа $\mu(A)$.

3. Специално, ако A е едно ограничено точково множество и контурът му има мярка нула, ще казваме, че множеството A е измеримо в смисъл на Пеано—Жордан.

Доказва се (по същия начин, както и в двуизмеримия случай), че:

1. Каквото и да е ограниченото точково множество A в пространството, имаме $\mu(A) \geq 0$.

2. Ако двете точкови множества A и B в пространството са измерими и мярката на сечението им е нула, то

$$\mu(A+B) = \mu(A) + \mu(B).$$

3. Ако A и B са две сходни помежду си ограничени множества от точки в пространството, то

$$\mu(A) = \mu(B).$$

4. Ако Δ е куб, чийто ръб има дължина 1, то

$$\mu(\Delta) = 1$$

без оглед на това, дали към този куб са причислени или не едни или други точки от контура му.

Специално, ако едно множество A от точки в пространството е измеримо, то неговата горна Пеано-Жорданова мярка се нарича негов обем. Често измеримите точкови множества, за които ние говорим в този параграф (т. е. за които е дефинирано понятието обем), се наричат още кубируеми за разликата от измеримите точкови множества, за които е дефинирано понятието лице и които се наричат квадрируеми.

2. Нека читателят сам докаже следното:

1. Ако A и B са ограничени точкови множества в пространството и $A \supset B$, то $\mu(A) \geq \mu(B)$.

Нека $OXYZ$ е една произволна ортогонална координатна система и нека R е едно квадрируемо множество от точки в равнината OXY. Нека G е едно изправено цилиндрично тяло с височина $h>0$, за основа на което служи множеството R. Това значи, че една точка (x, y, z) е причислена към G тогава и само тогава, когато (x, y) е точка, принадлежаща на R, и $0 \leq z \leq h$. В такъв случай множеството G е кубируемо и обемът му V се определя от формулата

$$V = Sh,$$

където S е лицето на R и h, както казахме по-горе, е височината на G.

§ 2. Пресмятане на обеми с помощта на двойни интеграли

Нека функцията $z=f(x, y)$ е дефинирана, непрекъсната и неотрицателна в едно затворено и квадрируемо точково множество R в равнината XOY. Да разгледаме изправеното цилиндрично тяло G, което е заградено отгоре с повърхнината $z=f(x, y)$, а долната основа на което представлява множеството R. Това цилиндрично тяло G може по-точно да се дефинира така: една точка с координати (x, y, z) се причислява към G тогава и само тогава, когато точката с координати (x, y) принадлежи на R и

$$0 \leq z \leq f(x, z)$$

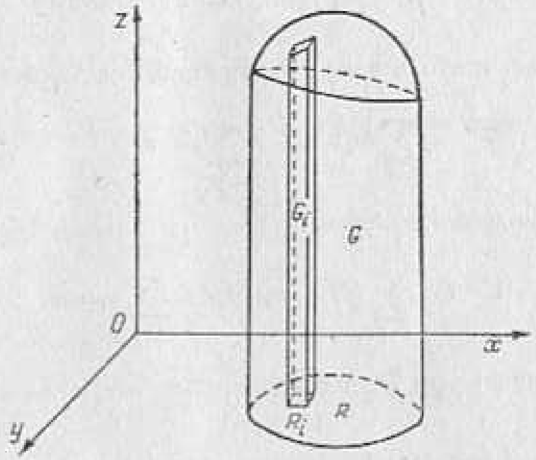
(вж. черт. 24).

Не е трудно да се види, че множеството G е кубируемо.[1] Тук ще си поставим за задача да пресметнем обема V на тялото G. За тази цел избираме едно произволно положително число ε и делим множеството R на измерими подмножества

$$R_1, R_2, \cdots, R_n$$

[1] Т. е. то е ограничено и контурът му има мярка нула. Ние ще предоставим доказателството на читателя.

без общи точки по такъв начин, че осцилацията на $f(x, y)$ във всяко едно от тези подмножества да бъде по-малка от ε. Това може да се направи (стига да изберем диаметрите на R_i, $i=1, 2, \cdots, n$, достатъчно малки), защото функцията $f(x, y)$ е непре-



Черт. 24

късната, а множеството R е ограничено и затворено. По такъв начин тялото G се разпада на по-малки цилиндрични тела $G_1, G_2, \cdots, G_n$ с основи $R_1, R_2, \cdots, R_n$. Да означим с M_i и m_i точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в множеството R_i, със σ_i лицето на R_i и с v_i обема на G_i. В такъв случай очевидно са в сила неравенствата

$$m_i \sigma_i \leq v_i \leq M_i \sigma_i,$$

защото $m_i \sigma_i$ представлява обемът на цилиндър, вписан в G_i, а $M_i \sigma_i$ представлява обемът на цилиндър, описан около G_i. Оттук получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i \leq \sum_{i=1}^{n} v_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i$$

или още

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i \leq V \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i.$$

От друга страна, функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в квадрируемото и затворено точково множество R и следователно е интегруема в това множество. Това ни дава право да образуваме двойния интеграл

$$I=\iint_R f(x, y)\, dx\, dy.$$

Този интеграл, както знаем, удовлетворява неравенствата

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i \leq I \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i.$$

По такъв начин получаваме

$$|V-I| \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \sigma_i < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \sigma_i = \varepsilon\sigma, \tag{1}$$

където σ е лицето на R, и следователно

$$V-I=0,$$

защото в противен случай неравенството (1) сигурно би било нарушено при достатъчно малки стойности на ε. По такъв начин получихме

$$V=\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

или по-кратко

$$V=\iint_R z\, dx\, dy.$$

Пример. Да се пресметне обемът на триосния елипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a>0,\ b>0,\ c>0. \tag{2}$$

Решение. Да означим с V обема на елипсоида. Този обем е два пъти по-голям от обема на частта от този елипсоид, която е разположена над равнината $z=0$. По такъв начин получаваме

$$V=2\iint_R z\, dx\, dy,$$

където R означава вътрешността на елипсата

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3}$$

Уравнението на частта от елипсоида (2), която е разположена над равнината $z=0$, е

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

По такъв начин намираме

$$V=2c\iint_R \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy.$$

За да пресметнем този двоен интеграл, правим смяна на променливите

$$x=au, \quad y=bv. \tag{4}$$

Като вземем пред вид, че

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=ab,$$

намираме

$$V=2abc\iint_A \sqrt{1-u^2-v^2}\, du\, dv, \tag{5}$$

където контурът на интеграционната област A представлява окръжността

$$u^2+v^2=1 \tag{6}$$

интеграционната област A е образът на интеграционната област R при трансформацията (4): уравнението (6) се получава от уравнението (3) с помощта на субстацията (4)).

Пресмятането на интеграла (5) може да се извърши с помощта на полярни координати по следния начин:

$$\iint_A \sqrt{1-u^2-v^2}\, du\, dv=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\, \rho d\rho\right] d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi} \left|-\frac{1}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1 d\theta=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta=\frac{2\pi}{3}.$$

По такъв начин получаваме

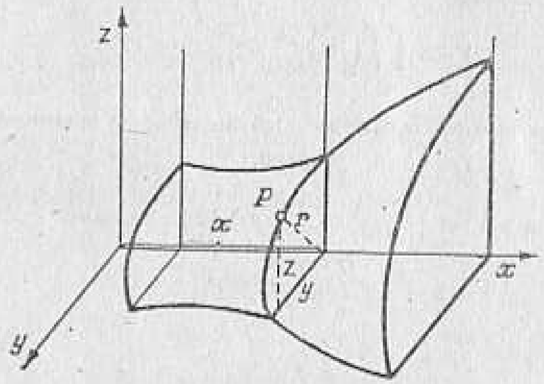
$$V=\frac{4}{3}\pi abc.$$

В специалния случай, когато $a=b=c$, получаваме познатата от елементарната геометрия формула за обема на сферата

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

§ 3. Обеми на ротационни тела

В предния параграф показахме как поне в някои случаи можем да намираме обемите на телата с помощта на двойни интеграли. Има обаче някои специални случаи, когато обемът може



Черт. 25

да се изрази с прост интеграл. Такъв случай имаме например при ротационните тела.

Нека функцията $y=f(x)$ е дефинирана, непрекъсната и неотрицателна в интервала $a\le x\le b$. Ако завъртим тази крива около оста x, ще получим една ротационна повърхнина S (вж. черт. 25). Очевидно една точка P с абсциса x лежи върху повърхнината S тогава и само тогава, когато разстоянието ѝ r до оста x е равно на $f(x)$. Когато вземем пред вид, че

$$r=\sqrt{y^2+z^2},$$

получаваме, че точката P лежи върху повърхнината S тогава и само тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват уравнението

$$f(x)=\sqrt{y^2+z^2}.$$

Като решим така полученото уравнение относно z, заключаваме че уравнението на частта от повърхнината S, която е разположена над равнината $z=0$, е

$$z=\sqrt{f^2(x)-y^2}.$$

След всичко казано не е трудно да се намери обемът V на ротационното тяло, което е заградено от повърхнината S и от равнините $x=a$ и $x=b$. Очевидно този обем е четири пъти по-голям

от обема на частта от разглежданото ротационно тяло, която е разположена в първия октант. По такъв начин получаваме

$$V=4\iint\limits_R z\,dx\,dy=4\iint\limits_R \sqrt{f^2(x)-y^2}\,dx\,dy,$$

където интеграционната област R се определя от неравенствата

$$a\le x\le b,$$

$$0\le y\le f(x),$$

откъдето

$$V=4\int_a^b\left[\int_0^{f(x)}\sqrt{f^2(x)-y^2}\,dy\right]dx.$$

Като положим

$$y=f(x)\cos t,$$

намираме

$$\int_0^{f(x)}\sqrt{f^2(x)-y^2}\,dy=f^2(x)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=$$

$$=f^2(x)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=f^2(x)\,\frac{\pi}{4},$$

откъдето

$$V=4\,\frac{\pi}{4}\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

т. е.

(1) $$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Пример. В предния параграф пресметнахме обема на сферата, като използувахме двойни интеграли. Ние обаче можем да пресметнем обема на сферата с помощта на прости интеграли, като използуваме формулата (1). И наистина сферата

(2) $$x^2+y^2+z^2=R^2$$

може да се получи от завъртване на окръжността

$$x^2+y^2=R^2$$

около оста x. Това обстоятелство ни позволява да пресметнем обема V на сферата (2) по следния начин:

$$V=\pi\int_{-R}^{R}(\sqrt{R^2-x^2})^2dx=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx=$$

$$=\pi\left|R^2x-\frac{x^3}{3}\right|_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Задачи

1. Да се намери обемът на тялото, получено от въртенето на овала на строфоидата

$$(x^2+y^2)\,x-a\,(x^2-y^2)=0\,;\ a>0$$

около оста x.

Отговор. $2a^3\pi\left(\ln 2-\dfrac{2}{3}\right)$.

2. Да се намери обемът на тялото, получено от въртенето на дъгата от циклоидата

$$x=a\,(t-\sin t),$$
$$y=a\,(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi\,;\ a>0,$$

около оста x.

Отговор. $5a^3\pi^2$.

3. Да се намери обемът на тялото, получено от въртенето на кардиоидат

$$\rho=a\,(1+\cos\theta),\ a>0,$$

около оста x.

Отговор. $\dfrac{8\pi a^3}{3}$.

4. Да се намери обемът на триосния елипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,;\ a>0,\ b>0,\ c>0,$$

с помощта само на прости интеграли.

Отговор. $\dfrac{4}{3}\pi abc$.

5. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнините

$$x^2+y^2=cz,\ c>0,\ x^4+y^4=a^2(x^2+y^2),\ z=0.$$

Отговор. $\dfrac{3\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{a^4}{c}$.

6. Да се намери обемът на тялото, определено от неравенствата

$$x^2+y^2+z^2\le a^2,\ (x^2+y^2)^2\le a^2(x^2-y^2)\,;\ a>0.$$

Отговор. $\dfrac{2}{3}\pi a^3-\dfrac{8}{9}(4\sqrt{2}-5)\,a^3$.

7. Да се намери обемът на тялото, определено от неравенствата

$$x^2+y^2+z^2\le a^2,$$
$$x^2+y^2\le ax\,;\ a>0$$

(задача на Вивиани).

Отговор. $\dfrac{2}{3}\pi a^3-\dfrac{8}{9}a^3$.

8. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнината

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1\,;\ a>0,\ b>0,\ c>0.$$

Отговор. $\dfrac{\pi^2}{2}abc$.

9. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнините

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c},\ \frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\ z=0\,;$$

$$a>0,\ b>0,\ c>0.$$

Отговор. $\dfrac{3\pi}{2\sqrt{2}}abc$.

10. Да се намери обемът на тялото, определено от неравенствата

$$x^2+y^2+z^2\le a^2,$$
$$y^2+z^2\le ax\,;\ a>0.$$

Отговор. $\dfrac{5\pi a^3}{4}\left(1-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

11. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнините

$$y^2+z^2=2p\,(x+aq),$$
$$y^2+z^2=-2q\,(x-ap)\,;$$
$$a>0,\ p>0,\ q>0.$$

Отговор. $\pi a^2(p+q)\,pq$.

12. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнините

$$\frac{x^2}{3}+y^2-2z=0,$$

$$\frac{2x^2}{3}+3y^2+2z-4=0.$$

Отговор. 2π.

13. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнините

$$2z=\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b},$$

$$2z=ab\frac{bx^2+ay^2}{b^2x^2+a^2y^2};\ a>0,\ b>0.$$

Отговор. $\frac{ab(a+b)}{8}\cdot\pi$.

14. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнините

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}};\ a>0.$$

Отговор. $\frac{4\pi a^3}{35}$.

§4. Допирателна равнина

Нека функцията

$$z=f(x,\ y) \tag{1}$$

е дефинирана в някоя околност на точката $(x_0,\ y_0)$ и притежава непрекъснати първи частни производни в тази околност. Равнината с уравнение

$$z-z_0=f'_x(x_0,\ y_0)\ (x-x_0)+f'_y(x_0,\ y_0)\ (y-y_0), \tag{2}$$

където

$$z_0=f(x_0,\ y_0)$$

се нарича допирателна (тангенциална) равнина към повърхнината (1) в точката $(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

На читателя е известно от аналитичната геометрия, че числата

$$f'_x(x_0,\ y_0),\ f'_y(x_0,\ y_0),-1$$

представляват директорните параметри[1] на нормалата на равнината (2). Оттук заключаваме, че директорните косинуси на тази нормала са или

$$\frac{f'_x(x_0,\ y_0)}{\sqrt{f'^2_x(x_0,\ y_0)+f'^2_y(x_0,\ y_0)+1}},\ \frac{f'_y(x_0,\ y_0)}{\sqrt{f'^2_x(x_0,\ y_0)+f'^2_y(x_0,\ y_0)+1}},$$

[1] Т. е. това са числа, пропорционални на косинусите (тези косинуси се наричат директорни косинуси) на ъглите, които сключва коя да е от посоките на разглежданата права с посоките на координатните оси.

$$\frac{-1}{\sqrt{f'^2_x(x_0,\ y_0)+f'^2_y(x_0,y_0)+1}},$$

или

$$\frac{-f'_x(x_0,\ y_0)}{\sqrt{f'^2_x(x_0,\ y_0)+f'^2_y(x_0,\ y_0)+1}},\ \frac{-f'_y(x_0,\ y_0)}{\sqrt{f'^2_x(x_0,\ y_0)+f'^2_y(x_0,\ y_0)+1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{f'^2_x(x_0,\ y_0)+f'^2_y(x_0,\ y_0)+1}},$$

в зависимост от посоката, която сме избрали за положителна върху разглежданата нормала.

§5. Лица на повърхнини

Нека функцията

$$z=f(x,\ y) \tag{1}$$

е дефинирана и има равномерно непрекъснати първи частни производни в едно квадрируемо и отворено точково множество G чиято мярка е различна от нула. Делим множеството G на квадрируеми подмножества

$$G_1,\ G_2,\ \dots,\ G_n \tag{2}$$

с различни от нула мерки по такъв начин, че мярката на сечението на всеки две от тях да бъде нула, и избираме във всяко от тези подмножества G_i по една вътрешна точка $(\xi_i,\ \eta_i)$. Разглеждаме допирателната равнина

$$z-f(\xi_i,\ \eta_i)=f'_x(\xi_i,\ \eta_i)\ (x-\xi_i)+f'_y(\xi_i,\ \eta_i)\ (y-\eta_i) \tag{3}$$

и точката

$$[\xi_i,\ \eta_i,\ f(\xi_i,\ \eta_i)]$$

към повърхнината (1) (вж. предния параграф). Не е трудно да се покаже, че частта H_i от допирателната равнина (3), която се проектира върху G_i, е квадрируема (ние ще предоставим доказателството на читателя). Нека σ_i е нейното лице. Ще покажем, че сумите

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i \tag{4}$$

притежават граница, когато диаметрите на подмножествата (2) клонят към нула. За да установим това, означаваме с S_i лицето на множеството G_i. Като вземем пред вид, че G_i е ортогонална проекция на H_i върху равнината (3), получаваме

$$S_i=\sigma_i\,|\cos\gamma_i|,$$

където γ_i е кой да е от ъглите, които нормалата на равнината (3) сключва с оста OZ. От предния параграф имаме

$$\cos\gamma_i=\frac{\pm 1}{\sqrt{1+f_x'^2(\xi_i,\eta_i)+f_y'^2(\xi_i,\eta_i)}}$$

и следователно

$$\sigma_i=\sqrt{1+f_x'^2(\xi_i,\eta_i)+f_y'^2(\xi_i,\eta_i)}\;S_i,$$

откъдето

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f_x'^2(\xi_i,\eta_i)+f_y'^2(\xi_i,\eta_i)}\;S_i.$$

По този начин ние представихме σ като Риманова интегрална сума на функцията

$$\varphi(x,y)=\sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}.$$

От друга страна, лесно се доказва, че тази функция е равномерно непрекъсната в G и следователно сумите σ клонят към интеграла

$$\iint_G\varphi(x,y)\,dx\,dy=\iint_G\sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}\,dx\,dy,$$

когато диаметрите на подмножествата G_i клонят към нула. С това ние не само установихме съществуването на интересуващата ни граница, но дори можахме да изразим тази граница с помощта на един двоен интеграл.

След тези предварителни бележки ще дефинираме понятието лице на повърхнината (1) така: границата на сумите (4), когато диаметрите на подмножествата (2) на G клонят към нула, се нарича лице на повърхнината (1).

Да означим с S лицето на повърхнината (1). От изложеното по-горе се вижда, че

(5) $$S=\iint_G\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dx\,dy.$$

Целесъобразно е да се обобщи понятието лице по следния начин: нека функцията $z=f(x,y)$ е дефинирана и притежава частни производни f_x' и f_y' навсякъде в едно измеримо точково множество G с евентуално изключение на едно подмножество с мярка нула

в смисъл на Пеано — Жордан; в такъв случай ние под лице на повърхнината $z=f(x,y)$ ще разбираме стойността на интеграла (5) всеки път, когато този интеграл съществува (в собствен или несобствен смисъл).

§ 6. Лица на ротационни повърхнини

Нека функцията $y=f(x)$ е дефинирана, положителна и има непрекъсната производна в интервала $a\leq x\leq b$. Ако завъртим тази крива около оста x, ще получим една ротационна повърхнина S (вж. черт. 25). Видяхме в § 3 на тази глава, че уравнението на частта S' от повърхнината S, която е разположена над равнината $z=0$, е

$$z=\sqrt{f^2(x)-y^2}.$$

Тук оставяме точката (x, y) да се мени в отвореното множество G, определено от неравенствата

$$a<x<b,$$
$$-f(x)<y<f(x).$$

Ще пресметнем лицето σ' на частта S'. Очевидно имаме

$$z_x'=\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-y^2}},$$

$$z_y'=\frac{-y}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}.$$

По такъв начин формула (5) от предния параграф ни дава

$$\sigma'=\iint_G\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy=$$
$$=\iint_G\sqrt{1+\frac{f^2(x)f'^2(x)}{f^2(x)-y^2}+\frac{y^2}{f^2(x)-y^2}}\,dx\,dy=$$
$$=\iint_G\frac{f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\,dx\,dy,$$

където интегралът трябва да се разбира в несобствен смисъл.

Означаваме с G^ε произволно измеримо и затворено подмножество на G, което няма общи точки с контура на G. В такъв случай при всички достатъчно малки положителни стойности на ε имаме

$$\iint\limits_{G^*} \frac{f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\,dx\,dy \leq \int\limits_a^b \left[f(x)\sqrt{1+f'^2(x)} \int\limits_{-f(x)+\varepsilon}^{f(x)-\varepsilon} \frac{dy}{\sqrt{f^2(x)-y^2}} \right] dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left[f(x)\sqrt{1+f'^2(x)} \int\limits_{-f(x)+\varepsilon}^{f(x)-\varepsilon} \frac{d\,\frac{y}{f(x)}}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{f(x)}\right)^2}} \right] dx =$$

$$= 2\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\arcsin\frac{f(x)-\varepsilon}{f(x)}\,dx <$$

$$< \pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

защото $\arcsin\frac{f(x)-\varepsilon}{f(x)} < \frac{\pi}{2}$.

Така получената оценка ни позволява да твърдим, че интегралът

$$\iint\limits_G \frac{f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\,dx\,dy$$

съществува в несобствен смисъл и

$$\iint\limits_G \frac{f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\,dx\,dy \leq \pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

От друга страна, горната граница

$$\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

на интегралите

$$\iint\limits_{G^*} \frac{f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\,dx\,dy$$

е точна, защото

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \left[f(x)\sqrt{1+f'^2(x)} \int\limits_{-f(x)+\varepsilon}^{f(x)-\varepsilon} \frac{dy}{\sqrt{f^2(x)-y^2}} \right] dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 2\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\arcsin\frac{f(x)-\varepsilon}{f(x)}\,dx =$$

$$= \pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

От това следва, че

$$\iint\limits_G \frac{f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\,dx\,dy = \pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \tag{1}$$

Понятието лице може малко да се обобщи, като под лице σ на цялата повърхнина S се условим да разбираме $2\sigma'$. Обръщаме още веднъж вниманието на читателя върху това, че тук се касае за едно малко обобщение на формула (5) от предния параграф, а не за едно нейно следствие. По такъв начин получаваме

$$\sigma = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \tag{2}$$

или по-кратко

$$\sigma = 2\pi \int\limits_a^b y\,ds, \tag{3}$$

където

$$y = f(x) \quad \text{и} \quad ds = \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Целесъобразно е да се обобщи още повече понятието лице на ротационна повърхнина по следния начин: нека двете функции

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{aligned} \tag{4}$$

където $a \leq t \leq b$, са диференцуеми в интервала $[a, b]$ с евентуално изключение на краен брой точки и нека $y(t) \geq 0$; уравненията (4) представят параметрично някоя крива (Γ), върху която няма точки, лежащи под оста x; ще наричаме лице на ротационната повърхнина S, която се получава от въртенето на кривата (Γ) около оста x, стойността на интеграла

$$\sigma = 2\pi \int\limits_a^b y\,ds,$$

където

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

всеки път, когато този интеграл има (собствен или несобствен) смисъл.

Пример. Да се намери лицето σ на сферата

$$x^2+y^2+z^2=r^2,\ r>0.$$

Решение. Тази сфера може да се получи чрез завъртване на полуокръжността

$$y=\sqrt{r^2-x^2},\quad -r\le x\le r,$$

около оста x. Очевидно имаме

$$y'=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}},\qquad ds=\frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

и следователно

$$\sigma=2\pi\int_{-r}^{r} y\,ds=2\pi\int_{-r}^{r} r\,dy=4\pi r^2.$$

Задачи

1. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на дъгата

$$y=\sin x,\quad 0\le x\le\pi,$$

около оста x.

Отговор. $2\pi\,[\ln(1+\sqrt{2})\ +\sqrt{2}\,]$.

2. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на дъгата от циклоидата

$$x=a(t-\sin t),$$
$$y=a(1-\cos t),\quad 0\le t\le 2\pi,\ a>0,$$

около оста x.

Отговор. $\dfrac{64\pi a^2}{3}$.

3. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на трактрисата

$$a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}=|x|+\sqrt{a^2-y^2},$$
$$a>0,\quad 0<y\le a,$$

около оста x.

Забележка. Тази ротационна повърхнина се нарича псевдосфера.

Отговор. $4\pi a^2$.

4. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на астроидата

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\quad a>0,$$

около абсцисната ос.

Отговор. $\dfrac{12}{5}\pi a^2$.

5. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на кардиоидата

$$\rho=2a(1+\cos\theta),\quad 0\le\theta\le\pi,$$

около оста x.

Отговор. $\dfrac{128}{5}\pi a^2$.

6. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на кривата

$$\rho^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta,\quad 0\le\theta\le\pi,\quad a^2>b^2>0,$$

около оста x.

Отговор. $2\pi\left[a^2+\dfrac{b^4}{a^2+b^2}\ln\dfrac{a^2+\sqrt{a^4-b^4}}{b^2}\right]$.

7. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на кривата

$$\rho^2=a^2\cos 2\theta$$

около оста x.

Отговор. $4\pi a^2\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

8. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на окръжността

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2,$$

където $q>r>0$, около оста x.

Забележка. Тази ротационна повърхнина се нарича тор.

Отговор. $4\pi^2 qr$.

9. Да се намери лицето на частта от параболоида

$$z=\frac{xy}{a},\ a>0,$$

която се проектира върху равнината XOY в областта, ограничена от оста x и от частта от кривата

$$\rho^2=a^2\,(4\cos^2\theta-1),$$

която се намира в първия квадрант.

Отговор. $a^2\sqrt{3}-\dfrac{\pi a^2}{9}$.

10. Да се намери лицето на частта от параболоида

$$2z=\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b},\ a>0,\ b>0,$$

която се намира във вътрешността на цилиндъра

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c^2.$$

Отговор. $\frac{2}{3}\pi ab\left[(1+c^2)^{\frac{3}{2}}-1\right]$.

11. Да се намери лицето на частта от параболоида

$$x^2+y^2=2az, \quad a>0,$$

която се намира във вътрешността на цилиндъра

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

Отговор. $\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$.

12. Да се намери лицето на частта от параболоида

$$az=xy, \quad a>0,$$

която се намира във вътрешността на цилиндъра

$$(x^2+y^2)^2=2a^2\,xy.$$

Отговор. $\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$.

13. Да се намери лицето на повърхнината

$$z=\frac{x+y}{x^2+y^2},$$

където

$$1<x^2+y^2<4, \quad x>0, \quad y>0.$$

Отговор. $\frac{\pi}{4}\left[\sqrt{18}-\sqrt{3}+\sqrt{2}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}\right]$.

14. Да се намери лицето на частта от параболоида

$$2z=\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}, \quad a>0, \quad b>0,$$

която се намира във вътрешността на цилиндъра

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}.$$

Отговор. $\frac{20-3\pi}{9}ab$.

Глава III

ТРОЙНИ ИНТЕГРАЛИ

§ 1. Тройни интеграли

Нека ни е дадена една функция $f(x, y, z)$, която е дефинирана и ограничена в едно кубируемо точково множество R. Делим множеството R на краен брой кубируеми подмножества

$$R_1, R_2, \dots, R_n \tag{1}$$

по такъв начин, че мярката на сечението на всеки две от тях да бъде нула. Нека v_i е обемът на множеството R_i и нека M_i и m_i са съответно точната горна и точната долна граница на $f(x, y, z)$ в множеството R_i. Сумата

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i\, v_i$$

се нарича голяма, а сумата

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i$$

се нарича малка сума на Дарбу, която отговаря на избрания начин на деление на множеството R на измерими подмножества (1). Не е трудно да се установят неравенствата

$$mv\leqq s\leqq S\leqq Mv, \tag{2}$$

където M и m означават една горна и една долна граница на $f(x, y, z)$ в множеството R, а v е обемът на R.

И наистина неравенствата

$$m\leqq m_i\leqq M_i\leqq M$$

ни дават

$$mv_i\leqq m_iv_i\leqq M_iv_i\leqq Mv_i$$

и следователно

$$m\sum_{i=1}^{n} v_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\, v_i \leq M\sum_{i=1}^{n} v_i,$$

откъдето получаваме веднага неравенствата (2), като вземем пред вид, че

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = v.$$

Неравенствата (2) ни учат, че както множеството на малките, така и множеството на големите суми на Дарбу е ограничено (и отгоре, и отдолу). Точната горна граница на множеството от малките суми се означава със символа

$$\underline{\iiint_R} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

и се нарича долен интеграл на функцията $f(x, y, z)$, разпространен върху множеството R, а точната долна граница на големите суми се означава със символа

$$\overline{\iiint_R} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

и се нарича горен интеграл на функцията $f(x, y, z)$, разпространен върху множеството R.

Не е трудно да се установи неравенството

$$\underline{\iiint_R} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dy \leq \overline{\iiint_R} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Това може да стане по същия начин, както при двойните интеграли. Този път ние ще предоставим доказателството на читателя.

Една ограничена функция $f(x, y, z)$, чиято дефиниционна област R е едно кубируемо точково множество, се нарича интегруема в Риманов смисъл в R, когато

$$\underline{\iiint_R} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \overline{\iiint_R} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

В такъв случай общата стойност на горния и долния интеграл се нарича троен Риманов интеграл на функцията $f(x, y, z)$, разпространен върху множеството R, и се означава със символа[1]

[1] Понякога тройният интеграл се означава по-кратко така:

$$\int_R f(x, y, z)\, dv.$$

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Тук ние ще изброим по-важните основни свойства на тройните интеграли, които са съвсем аналогични на съответните свойства на простите и на двойните интеграли. Доказателствата ние няма да даваме, защото те могат да се дадат по същия начин, както при простите интеграли.

1. Ако функциите $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ са интегруеми в едно кубируемо точково множество R, то сумата

$$f_1(x, y, z)+f_2(x, y, z)$$

е също тъй интегруема в R и

$$\iiint_R [f_1(x, y, z)+f_2(x, y, z)]\, dx\, dy\, dz = \iiint_R f_1(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + $$
$$+\iiint_R f_2(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

2. Ако функцията $f(x, y, z)$ е интегруема в кубируемото точково множество R и a е една константа, то функцията $af(x, y, z)$ е също тъй интегруема в R и

$$\iiint_R af(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = a\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

3. Ако A и B са две кубируеми точкови множества, ако мярката на сечението AB е нула и ако функцията $f(x, y, z)$ е интегруема и в множеството $A+B$, като при това

$$\iiint_{A+B} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz +$$
$$+\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

4. Ако функцията $f(x, y, z)$ е интегруема в кубируемото точково множество R и удовлетворява неравенствата

$$m \leq f(x, y, z) \leq M$$

то

$$mv \leq \iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \leq Mv,$$

където v е обемът на R.

Всяка функция $f(x, y, z)$, която е дефинирана и непрекъсната в едно кубируемо и затворено точково множество R, е интегруема.

Ние бихме могли да продължим и по-нататък списъка на свойствата на тройните интеграли, които са аналогични на съответните свойства на простите и двойните интеграли, но ще се ограничим с изброените дотук.

Накрая ще отбележим още, че понятието интеграл може да се дефинира без труд в пространство с произволен брой измерения. Ние обаче няма да навлизаме в подробностите, още повече, че е ясно как това може да стане.

§ 2. Пресмятане на тройни интеграли

Нека G е едно затворено квадрируемо точково множество в равнината XOY и нека $\varphi_0(x, y)$ и $\varphi_1(x, y)$ са две функции, които са дефинирани, непрекъснати и удовлетворяват неравенството

$$\varphi_0(x, y) \leq \varphi_1(x, y)$$

във всички точки на G. Да разгледаме точковото множество R което е съставено от онези и само онези точки (x, y, z), за които точката (x, y) принадлежи на G и

$$\varphi_0(x, y) \leq z \leq \varphi_1(x, y).$$

Не е трудно да се покаже, че множеството R е измеримо. Ние обаче ще изоставим доказателството.

Нека $f(x, y, z)$ е една функция, която е дефинирана и непрекъсната в R. Функцията $f(x, y, z)$ е интегруема в R, защото е непрекъсната и защото множеството R е не само кубируемо, но и затворено. В разглеждания случай обаче интеграционната област R има твърде специален вид. Благодарение на това обстоятелство тройният интеграл

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

може да се изрази с помощта на един двоен и един прост интеграл по следния начин:

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_G \left[\int_{\varphi_0(x, y)}^{\varphi_1(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dx\, dy. \tag{1}$$

Доказателството може да се извърши по същия начин, както доказахме съответната формула за пресмятане на двойните интеграли с помощта на прости. Ние няма да се спираме на доказателството, а ще се задоволим само с един пример, който ще ни илюстрира как се използува формулата (1).

Пример. Да се пресметне тройният интеграл

$$I = \iiint_R z^2\, dx\, dy\, dz,$$

разпространен в частта R от пространството, която е заградена от сферата

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Решение. Да означим с G кръга, който се ограничава от окръжността

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Една точка с координати (x, y, z) принадлежи на R тогава и само тогава когато точката с координати (x, y) принадлежи на G и освен това

$$-\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}.$$

Този резултат ни позволява да пишем

$$\iiint_R z^2\, dx\, dy\, dz = \iint_G \left\{ \int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} z^2\, dz \right\} dx\, dy$$

и следователно

$$\iiint_R z^2\, dx\, dy\, dz = \frac{2}{3} \iint_G (r^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}\, dz\, dy.$$

По този начин изразихме интересуващия ни интеграл I с помощта на един двоен интеграл. Пресмятането на този двоен интеграл може да се извърши по познати пътища. Въвеждаме полярни координати

$$x = \rho \cos \theta,$$
$$y = \rho \sin \theta.$$

Това ни дава

$$I = \frac{2}{3} \int_0^{\pi} \left[\int_0^{r} (r^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \rho\, d\rho \right] d\theta = \frac{4}{15} r^5 \pi.$$

§ 3. Смяна на променливите при тройни интеграли

Нека

$$x=f(u, v, w),$$
$$y=g(u, v, w), \tag{1}$$
$$z=h(u, v, w)$$

е една двойно регулярна трансформация на едно отворено точково множество R. Това значи, че функциите (1) удовлетворяват следните условия:

1. Функциите (1) са дефинирани в R и притежават непрекъснати частни производни поне до втори ред включително.
2. Различните точки от R се изобразяват върху различни точки при трансформацията (1).
3. Функционалната детерминанта

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}=\begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u & h'_v & h'_w \end{vmatrix}$$

не се анулира никъде в R.

При тези предположения може да се покаже по същия начин, както в двуизмерния случай, че всяко кубируемо точково множество A, което лежи в R заедно с контура си, се изобразява върху някое кубируемо точково множество A'.

Нека A е едно кубируемо и затворено точково множество, което лежи в R, и нека $F(x, y, z)$ е една непрекъсната функция в A', където A' е образът на A. В такъв случай е валидна следната важна формула:

$$\iiint_{A'} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz=$$
$$=\iiint_{A} F[f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)]\, \Delta\, du\, dv\, dw, \tag{2}$$

където Δ е абсолютната стойност на функционалната детерминанта

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}.$$

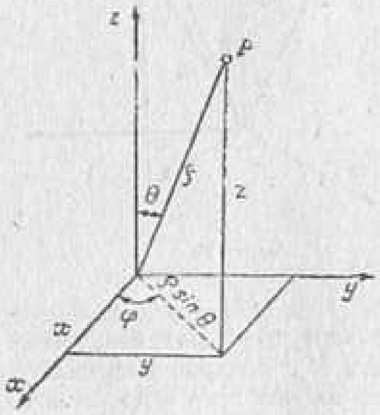
Ние няма да се спираме върху доказателството, защото то може да се извърши така, както в двуизмерния случай.

Специално, ако (ρ, θ, φ) са сферични координати (или, както се казва понякога, пространствени полярни координати) на точката P, чиито декартови координати са (x, y, z), то

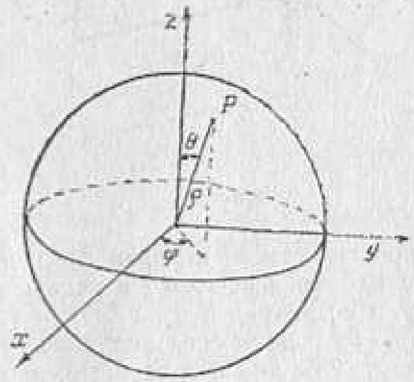
$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y=\rho\sin\theta\sin\varphi, \tag{3}$$
$$z=\rho\cos\theta$$
$$\rho\geq 0,\ 0\leq\varphi<2\pi,\ 0\leq\theta\leq\pi$$

(вж. черт. 26). В такъв случай функционалната детерминанта $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)}$ има стойност

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)}=\rho^2\sin\theta.$$



Черт. 26



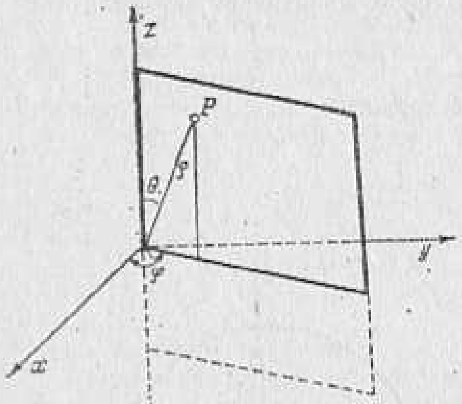
Черт. 27

В специалния случай, когато извършваме смяна на променливите с помощта на трансформачните формули (3), равенството (2) добива следния вид:

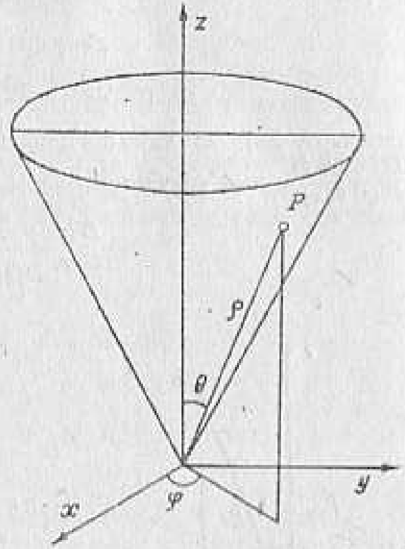
$$\iiint_{A'} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz=$$
$$=\iiint_{A} F[\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta]\,\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi.$$

Изразът $\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$ се нарича елемент на обем в полярни координати. Ние ще дадем едно просто геометрично тълкуване на този израз.

За тази цел да отбележим предварително следното: когато фиксираме ρ и оставим φ и θ да се менят, то точката P, чиито



Черт. 28



Черт. 29

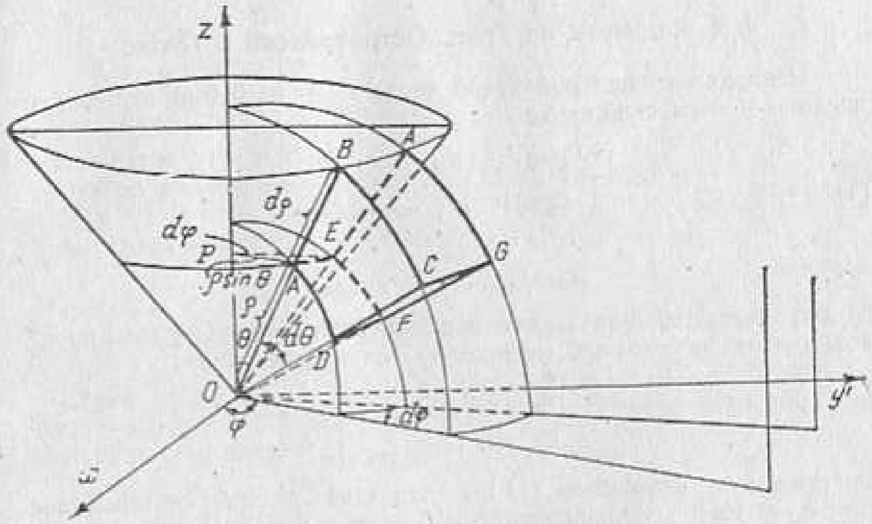
пространствени полярни координати са (ρ, φ, θ), ще описва сфера с център в началото и радиус ρ (вж. черт. 27); ако фиксираме φ, а оставим ρ и θ да се менят, точката P с полярни координати (ρ, φ, θ) ще описва полуравнина, която минава през оста z (вж. черт. 28); ако фиксираме θ, а оставим ρ и φ да се менят, точката P, чиито полярни координати са (ρ, φ, θ), ще описва ротационен конус с връх в началото, чиято ротационна ос е оста z (вж. черт. 29).

Трите системи повърхнини

$$\rho = \text{const},$$
$$\varphi = \text{const},$$
$$\theta = \text{const}$$

се наричат координатни повърхнини при сферичната координатна система. Не е трудно да се види, че всеки две координатни повърхнини от различни системи се пресичат под прав ъгъл. Това значи, че когато и да изберем една точка P върху пресечната

крива Γ на две координатни повърхнини S_1 и S_2, които принадлежат на различни системи, допирателните равнини в точката P съответно към S_1 и към S_2 са перпендикулярни помежду си. Няма да доказваме това твърдение, защото читателят е запознат с него от геометрията.



Черт. 30

В бъдеще за краткост ще си служим със следната терминология: сфера с център в началото и радиус ρ ще наричаме сфера ρ; полуравнина, която минава през оста z и сключва ъгъл φ с полуравнината $+XOZ$, ще наричаме полуравнина φ; ротационен конус с връх в началото, чиито образуващи сключват ъгъл θ с положителната посока на оста z, ще наричаме конус θ.

Да разгледаме частта от пространството, заградена от сферите ρ и $\rho + d\rho$, полуравнините φ и $\varphi + d\varphi$ и конусите θ и $\theta + d\theta$ (вж. черт. 30).

Тук $AB = d\rho$; страната AD като дъга от окръжност с радиус ρ, чийто централен ъгъл е $d\theta$, е равна на $\rho d\theta$; най-сетне AE е дъга от окръжност с радиус

$$PA = \rho \sin\theta$$

и тъй като

$$\sphericalangle APE = d\varphi,$$

то

$$AE = \rho \sin\theta\, d\varphi.$$

Ръбовете AB, AD и AE са взаимно перпендикулярни. Разглеждайки тялото $ABCDEFGH$ (приближено) като правоъгълен паралелепипед, получаваме за обема му dv следния приблизителен израз:

$$dv = d\rho\,.\,\rho d\theta\,.\,\rho\sin\theta\, d\varphi = \varphi^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi.$$

§ 4. Формули на Грин, Остроградски и Стокс

Нека цялото неотрицателно число k е по-малко от цялото число n и нека функциите

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 &= f_1(t_0, t_1, \dots, t_k),\\ x_2 &= f_2(t_0, t_1, \dots, t_k),\\ &\dots\dots\dots\\ x_n &= f_n(t_0, t_1, \dots, t_k)\end{aligned}$$

са дефинирани и притежават непрекъснати първи частни производни в множеството G, определено от неравенствата

$$t_0 \geqq 0,\ t_1 \geqq 0, \dots, t_k \geqq 0,$$

$$t_0 + t_1 + \dots + t_k \leqq 1.$$

Системата от функциите (1) ще наричаме гладка k-повърхнина. При $k=0$ така дефинираната k-повърхнина ще наричаме дъга, а при $k=1$ накратко ще я наричаме повърхнина.

Да означим с Γ определената от (1) k-повърхнина. Множеството, което се описва от точката с координати

$$[f_1(t_0, t_1, \dots, t_k),\ f_2(t_0, t_1, \dots, t_k), \dots, f_n(t_0, t_1, \dots, t_k)],$$

когато точката $(t_0, t_1, \dots, t_k)$ описва G, ще наричаме графика на k-повърхнината Γ. Ако всяка от независимите променливи $t_0, t_1, \dots, t_k$ е снабдена с номер, както това е направено при нас, ще казваме, че повърхнината Γ е ориентирана. Ако функциите (1) притежават непрекъснати частни производни и от втори ред, ще казваме, че Γ е (двукратно) гладка k-повърхнина. Гладките $(k-1)$-повърхнини $\Gamma_{\nu+1}$ при $\nu \geqq 0$, определени от

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(t_0, t_1, \dots, t_{\nu-1}, 0, t_{\nu+1}, \dots, t_k),\\ x_2 &= f_2(t_0, t_1, \dots, t_{\nu-1}, 0, t_{\nu+1}, \dots, t_k),\\ &\dots\dots\dots\\ x_n &= f_n(t_0, t_1, \dots, t_{\nu-1}, 0, t_{\nu+1}, \dots, t_k),\end{aligned}$$

$$t_0 \geqq 0,\ t_1 \geqq 0, \dots, t_{\nu-1} \geqq 0,\ t_{\nu+1} \geqq 0, \dots, t_k \geqq 0,$$

$$t_0 + t_1 + \dots + t_{\nu-1} + t_{\nu+1} + \dots + t_k \leqq 1,$$

както и $(k-1)$-повърхнината Γ_0, определена от

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(1 - t_1 - t_2 - \dots - t_k, t_1, t_2, \dots, t_k),\\ x_2 &= f_2(1 - t_1 - t_2 - \dots - t_k, t_1, t_2, \dots, t_k),\\ &\dots\dots\dots\\ x_n &= f_n(1 - t_1 - t_2 - \dots - t_k, t_1, t_2, \dots, t_k),\end{aligned}$$

$$t_1 \geqq 0,\ t_2 \geqq 0, \dots, t_k \geqq 0,$$

$$t_1 + t_2 + \dots + t_k \leqq 1,$$

ще наричаме стени на Γ.

За да получим по-прости резултати, ще превърнем $\Gamma_{\nu+1}$ при $\nu = 0, 1, \dots, k$ в ориентирана $(k-1)$-повърхнина, като номерираме независимите променливи в следния ред:

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_{\nu-1}, t_{\nu+1}, \dots, t_k,$$

За $(k-1)$-повърхнината Γ_0 ще извършим номерирането в реда $t_1, t_2, \dots, t_k$.

Нека $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е една функция, която е дефинирана и непрекъсната върху графиката на k-повърхнината Γ. По дефиниция ще пишем*

$$(2)\qquad \int\limits_{\Gamma} F(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_{\alpha_0}\, dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_k} =$$

$$= \int\limits_{G} F(f_1, f_2, \dots, f_n) \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial t_0} & \frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial t_k}\\ \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_k}\end{vmatrix} dt_0\, dt_1 \dots dt_k.$$

По такъв начин стойността на интеграла (2) зависи от реда, в който пишем диференциалите $dx_{\alpha_0}, dx_{\alpha_1}, \dots, dx_{\alpha_k}$. Ако разменим местата на два диференциала, интегралът си сменя знака.

При тази дефиниция се позволява някои от индексите $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ да съвпадат. В такъв случай стойността на интеграла (2) ще бъде нула, защото някои редове в детерминантата от дефиниционния му израз ще съвпадат.

* Тук знакът $\int\limits_G$ в дефиниционния израз на (2) представлява съкратено означение на интеграл в пространство с $k+1$ измерения.

Интегралът (2) зависи от ориентировката на Γ, т. е. от начина, по който са номерирани променливите на функциите (1), защото от това зависи в какъв ред ще бъдат написани стълбовете на детерминантата, която ни интересува.

С оглед на нашите цели ще намерим някои изрази за интеграли върху стените $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k, \Gamma_{k+1}$ на една функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, която е дефинирана и непрекъсната върху графиките им. Поради това ще означим с G_s множеството на точките

$$(t_0, t_1, \dots, t_{s-1}, t_{s+1}, \dots, t_k),$$

които удовлетворяват неравенствата

$$t_0 \geqq 0,\ t_1 \geqq 0, \dots, t_{s-1} \geqq 0,\ t_{s+1} \geqq 0, \dots, t_k \geqq 0,$$
$$t_0 + t_1 + \dots + t_{s-1} + t_{s+1} + \dots + t_k \leqq 1.$$

Очевидно имаме

$$\int_{\Gamma_0} F(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_k} = \int_{G_0} (F\Delta)_{t_0=v_0}\, dt_1\, dt_2 \dots dt_k,$$

където

(3) $$v_0 = 1 - t_1 - t_2 - \dots - t_k$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_1} - \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \dots & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_k} - \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_1} - \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \dots & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_k} - \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} \end{vmatrix}.$$

Да положим

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \dots & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_{s-1}} & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_{s+1}} & \dots & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_k} \\ \frac{\partial f_{\alpha_2}}{\partial t_0} & \dots & \frac{\partial f_{\alpha_2}}{\partial t_{s-1}} & \frac{\partial f_{\alpha_2}}{\partial t_{s+1}} & \dots & \frac{\partial f_{\alpha_2}}{\partial t_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \dots & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_{s-1}} & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_{s+1}} & \dots & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_k} \end{vmatrix}.$$

В такъв случай

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_1} - \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \dots & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_k} - \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_1} - \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \dots & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_k} - \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_k} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \Delta_s.$$

Така получаваме

$$\int_{\Gamma_s} F(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_k} = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \int_{G_0} (F\Delta_s)_{t_0=v_0}\, dt_1\, dt_2 \dots dt_k,$$

където

$$v_0 = 1 - t_1 - t_2 - \dots - t_k.$$

Да направим в интеграла

$$\int_{G_0} (F\Delta_s)_{t_0=v_0}\, dt_1\, dt_2 \dots dt_k, \quad s = 1, \dots, k,$$

смяната на променливите

$$t_1 = u_1$$
$$\dots$$
$$t_{s-1} = u_{s-1}$$
$$t_s = 1 - u_0 - u_1 - \dots - u_{s-1} - u_{s+1} - \dots - u_k$$
$$t_{s+1} = u_{s+1}$$
$$t_k = u_k.$$

По такъв начин, след като се върнем към старото означение на променливите, получаваме

$$\int_{G_0} (F\Delta_s)_{t_0=v_0}\, dt_1\, dt_2 \dots dt_k = \int_{G_s} (F\Delta_s)_{t_s=v_s}\, dt_0 \dots dt_{s-1}\, dt_{s+1} \dots dt_k,$$

където сме положили

(5) $$1 - t_0 - \dots - t_{s-1} - t_{s+1} - \dots - t_k = v_s.$$

Това ни дава

$$(6)\qquad \int\limits_{\Gamma_\nu} F(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \cdots dx_{\alpha_k} = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \int\limits_{G_s} (F\Delta_s)_{t_s=v_s}\, dt_0 \cdots dt_{s-1} dt_{s+1} \cdots dt_k.$$

При $0 \leq s \leq k$ получаваме непосредствено от дефиницията

$$(7)\qquad \int\limits_{\Gamma_{s+1}} F(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \cdots dx_{\alpha_k} = \int\limits_{G_s} (F\Delta_s)_{t_s=0}\, dt_0 \cdots dt_{s-1} dt_{s+1} \cdots dt_k.$$

Теорема. Нека в някое отворено множество R в пространство с n измерения е дефинирана една функция $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, която притежава непрекъснати първи частни производни. Нека Γ е една двукратно гладка k-повърхнина, определена от (1), чиято графика лежи в R. В такъв случай при $1 \leq k < n$ е валидна формулата

$$(8)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial P}{\partial x_\nu} dx_\nu dx_{\alpha_1} \cdots dx_{\alpha_k} = \sum_{\nu=0}^{k+1} (-1)^{\nu-1} \int\limits_{\Gamma_\nu} P\, dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \cdots dx_{\alpha_k}.$$

Доказателство. Очевидно

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial P}{\partial x_\nu} dx_\nu dx_{\alpha_1} \cdots dx_{\alpha_k} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \int \frac{\partial P}{\partial x_\nu} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_\nu}{\partial t_0} & \frac{\partial f_\nu}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial f_\nu}{\partial t_k} \\ \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_k} \end{vmatrix} dt_0\, dt_1 \cdots dt_k.$$

Като развием детерминантите по първия ред и използуваме означението (4), ще получим

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial P}{\partial x_\nu} dx_\nu dx_{\alpha_1} \cdots dx_{\alpha_k} =$$

$$= \int\limits_{G} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial x_\nu} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \frac{\partial f_\nu}{\partial t_s} \Delta_s\, dt_0\, dt_1 \cdots dt_k =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \int\limits_{G} \Delta_s \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial x_\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial t_s} \right) dt_0\, dt_1 \cdots dt_k =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \int\limits_{G} \Delta_s \frac{\partial P}{\partial t_s} dt_0\, dt_1 \cdots dt_k.$$

От друга страна,

$$\int\limits_{G} \Delta_s \frac{\partial P}{\partial t_s} dt_0\, dt_1 \cdots dt_k =$$

$$= \int\limits_{G_s} \left[\int\limits_{0}^{v_s} \Delta_s \frac{\partial P}{\partial t_s} dt_s \right] dt_0 \cdots dt_{s-1}\, dt_{s+1} \cdots dt_k,$$

където v_s се определят от (3) и (5). Следователно, като интегрираме по части, ще получим

$$\int\limits_{G} \Delta_s \frac{\partial P}{\partial t_s} dt_0\, dt_1 \cdots dt_k =$$

$$= \int\limits_{G_s} \Big| \Delta_s P \Big|_{t_s=0}^{t_s=v_s} dt_0 \cdots dt_{s-1} dt_{s+1} \cdots dt_k -$$

$$- \int\limits_{G_s} \left[\int\limits_{0}^{v_s} P \frac{\partial \Delta_s}{\partial t_s} dt_s \right] dt_0 \cdots dt_{s-1} dt_{s+1} \cdots dt_k =$$

$$= \int\limits_{G_s} [(\Delta_s P)_{t_s=v_s} - (\Delta_s P)_{t_s=0}]\, dt_0 \cdots dt_{s-1} dt_{s+1} \cdots dt_k -$$

$$- \int\limits_{G} P \frac{\partial \Delta_s}{\partial t_s} dt_0\, dt_1 \cdots dt_k.$$

Така получаваме

$$\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\Gamma}\frac{\partial P}{\partial x_\nu}\,dx_\nu\,dx_{\alpha_1}\ldots dx_{\alpha_k}=$$

$$=\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\int_{G_s}[(P\Delta_s)_{t_s=v_s}-(P\Delta_s)_{t_s=0}]\,dt_0\ldots dt_{s-1}dt_{s+1}\ldots dt_k-$$

$$-\int_G P\left(\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\frac{\partial\Delta_s}{\partial t_s}\right)dt_0\,dt_1\ldots dt_k.$$

От друга страна,

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\frac{\partial\Delta_s}{\partial t_s}=0,$$

както това се вижда, след като извършим групиране по вторите производни. Това ни дава

$$\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\Gamma}\frac{\partial P}{\partial x_\nu}\,dx_\nu\,dx_{\alpha_1}\ldots dx_{\alpha_k}=$$

$$=\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\int_{G_s}(P\Delta_s)_{t_s=v_s}dt_0\ldots dt_{s-1}\,dt_{s+1}\ldots dt_k+$$

$$+\sum_{s=0}^{k}(-1)^{s-1}\int_{G_s}(P\Delta_s)_{t_s=0}\,dt_0\ldots dt_{s-1}\,dt_{s+1}\ldots dt_k$$

и като вземем под внимание формулите (6) и (7), получаваме

$$\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\Gamma}\frac{\partial P}{\partial x_\nu}\,dx_\nu\,dx_{\alpha_1}\ldots dx_{\alpha_k}=$$

$$=\sum_{s=0}^{k+1}(-1)^{s-1}\int_{\Gamma_s}P\,dx_{\alpha_1}\ldots dx_{\alpha_k}.$$

С това доказателството е завършено.

При $n=2$ и $k=1$ формулата (8) се нарича *формула на Грин*. При $n=3$ и $k=2$ тя се нарича *формула на Остроградски*. При $n=3$ и $k=1$ тази формула се нарича *формула на Стокс*. Тези три частни случая се използуват в хидродинамиката, електродинамиката и на много други места.

Общи задачи

1. Нека G е едно квадрируемо точково множество в равнината XOY. Да се докаже, че лицето на G има стойност

$$\iint_G dx\,dy.$$

2. Нека R е едно кубируемо точково множество в пространството. Да се покаже, че обемът на R има стойност

$$\iiint_R dx\,dy\,dz,$$

3. Да се пресметне обемът на елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

като се пресметне тройният интеграл

$$\iiint_R dx\,dy\,dz,$$

разпространен във вътрешността R на разглеждания елипсоид.

4. Да се намери обемът на частта от първия октант, която е заградена от повърхнината

$$(x^2+y^2+z^2)^3=a^3xyz,\quad a>0.$$

Отговор. $\frac{a^3}{24}$.

5. Нека функцията $p(x)$ е дефинирана и неотрицателна при всички стойности на x, нека интегралите

$$a=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\,dx,$$

$$b=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\,dx,$$

$$c=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)\,dx$$

имат смисъл и нека $a=1$. В такъв случай е валидно неравенството

$$c-b^2\geqq 0.$$

Забележка. Тази и следващите две задачи изясняват, че е възможно да се изгради теорията на вероятностите, без да се въвежда понятието вероятност. Читателят, който е изучавал теорията на вероятностите, ще разпознае в следващите две задачи две теореми на Чебишев.

Упътване. Използувайте равенството

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-b)^2 p(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 p(x)\,dx-2b\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\,dx+b^2\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\,dx=c-b^2$$

или пък си послужете с неравенството на Буняковски — Шварц.

6. Нека функцията $p(x)$ е дефинирана и неотрицателна при всички стойности на x, нека интегралите

$$a=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\,dx,$$

$$b=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\,dx,$$

$$c=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)\,dx$$

има смисъл и нека $a=1$. В такъв случай при всеки избор на положителното число ε е валидно неравенството

$$\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon}p(x)\,dx\geqq 1-\frac{c-b^2}{\varepsilon^2}$$

(Чебишев).

Упътване. Използувайте неравенството

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-b)^2p(x)\,dx\geqq\int_{-\infty}^{b-\varepsilon}(x-b)^2p(x)\,dx+\int_{b+\varepsilon}^{\infty}(x-b)^2p(x)\,dx\geqq$$

$$\geqq\varepsilon^2\int_{-\infty}^{b-\varepsilon}p(x)\,dx+\varepsilon^2\int_{b+\varepsilon}^{\infty}p(x)\,dx$$

или, което е същото,

$$c-b^2\geqq\varepsilon^2\left[\int_{-\infty}^{b-\varepsilon}p(x)\,dx+\int_{b+\varepsilon}^{\infty}p(x)\,dx\right].$$

7. Нека е дадена една редица от функции

$$p_1(x),\ p_2(x),\ \ldots,\ p_n(x),\ \ldots,$$

които са дефинирани, непрекъснати и неотрицателни при всички стойности на x, нека интегралите

$$a_n=\int_{-\infty}^{\infty}p_n(x)\,dx,$$

$$b_n=\int_{-\infty}^{\infty}xp_n(x)\,dx,$$

$$c_n=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p_n(x)\,dx$$

имат смисъл и нека най-сетне са изпълнени следните условия:

$$a_1=a_2=\cdots=1,$$

$$b_1=b_2=\cdots=b,$$

$$c_n-b_n^2\leqq k,$$

където k е константа, която не зависи от n. Разглеждаме функциите

$$P_n(t)=$$

$$=n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}p_1(x_1)p_2(x_2)\ldots p_{n-1}(x_{n-1})p_n(nt-x_1-x_2-\cdots-$$

$$-x_{n-1})\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1},$$

които по този начин са добре дефинирани, когато многократният несобствен интеграл е сходящ при всички стойности на t.

В такъв случай при всеки избор на положителното число ε имаме

$$\lim_{n\to\infty}\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon}P_n(t)\,dt=1.$$

Упътване. Направете смяната на променливите

$$x_1=\xi_1,$$

$$x_2=\xi_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_{n-1}=\xi_{n-1},$$

$$nt-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1}=\xi_n$$

и покажете следното:

1) $$P_n(t)\geqq 0;$$

2) интегралите

$$A_n=\int_{-\infty}^{\infty}P_n(t)\,dt$$

имат смисъл и тяхната стойност е равна на единица;

3) интегралите

$$B_n=\int_{-\infty}^{\infty} t\,P_n(t)\,dt$$

имат смисъл и тяхната стойност е равна на b;

4) интегралите

$$C_n=\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,P_n(t)\,dt$$

имат смисъл и

$$C_n-B_n^2=\frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}(c_\nu-b_\nu^2);$$

5)

$$C_n-B_n^2\leq\frac{k}{n}.$$

След тази предварителна работа използувайте неравенството на Чебишев

$$\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} P_n(t)\,dt\geq 1-\frac{C_n-B_n^2}{\varepsilon^2}$$

очевидното неравенство

$$\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} P_n(t)\,dt\leq 1.$$

8. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати и монотонно растящи при $a\leq x\leq b$. В такъв случай е валидно неравенството

$$(b-a)\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\geq\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]\left[\int_a^b g(x)\,dx\right]$$

Чебишев).

Упътване. Използувайте тъждеството

$$\iint_R [f(x)-f(y)]\,[g(x)-g(y)]\,dx\,dy=$$

$$=2(b-a)\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx-2\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]\left[\int_a^b g(x)\,dx\right],$$

където R е квадрат, определен от неравенствата

$$a\leq x\leq b,$$
$$a\leq y\leq b.$$

9. Нека функцията $f(t)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$. Да се покаже че при $a\leq x\leq b$

$$\int_a^x dt_1\int_a^{t_1} dt_2\cdots\int_a^{t_{n-1}} f(t)\,dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt$$

и

$$\int_a^x t_1\,dt_1\int_a^{t_1} t_2\,dt_2\cdots\int_a^{t_{n-1}} t_n\,dt_n\int_a^{t_n} f(t)\,dt=\frac{1}{n!\,2^n}\int_a^x f(t)\,(x^2-t^2)^n\,dt.$$

10. Да се покаже, че интегралите

$$\int_0^{\infty}\sin x^2\,dx,$$

$$\int_0^{\infty}\cos x^2\,dx$$

са сходящи, и да се пресметне тяхната стойност (интеграли на Френел—Fresnel)

Упътване. Разгледайте двете функции

$$u=e^{y^2-x^2}\cos 2xy,$$
$$v=-e^{y^2-x^2}\sin 2xy$$

и покажете, че

$$u'_x=v'_y,$$
$$u'_y=-v'_x.$$

Да означим с D триъгълника

$$0\leq x\leq R,$$
$$0\leq y\leq x.$$

Пресметнете интегралите

$$I_1=\iint_D u'_x\,dx\,dy,$$

$$I_2=\iint_D v'_x\,dx\,dy$$

при постоянно y и интегралите

$$I_3=\iint_D v'_y\, dx\, dy,$$

$$I_4=\iint_D u'_y\, dx\, dy$$

при постоянно x. Използувайте равенствата

$$I_1=I_3,$$
$$I_2=-I_4.$$

Това ще ви даде

$$\text{(A)}\qquad \int_0^R e^{y^2-R^2}\cos 2Ry\, dy-\int_0^R \cos 2y^2 dy=\int_0^R \sin 2x^2\, dx,$$

$$\text{(B)}\qquad -\int_0^R e^{y^2-R^2}\sin 2Ry\, dy+\int_0^R \sin 2y^2\, dy=-\int_0^R \cos 2x^2\, dx+\int_0^R e^{-x^2}\, dx.$$

Покажете, че

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{y^2-R^2}\cos 2Ry\, dy=0,$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{y^2-R^2}\sin 2Ry\, dy=0.$$

За целта си послужете с неравенствата

$$\left|\int_0^R e^{y^2-R^2}\cos 2Ry\, dy\right|\le\int_0^R e^{y^2-R^2}\, dy=\frac{\int_0^R e^{y^2}dy}{e^{R^2}},$$

$$\left|\int_0^R e^{y^2-R^2}\sin 2Ry\, dy\right|\le\int_0^R e^{y^2-R^2}\, dy=\frac{\int_0^R e^{y^2}\, dy}{e^{R^2}}$$

и използувайте например правилото на Лопитал. Докажете с помощта на равенствата (A) и (B), че интегралите

$$\int_0^\infty \cos t^2\, dt,$$

$$\int_0^\infty \sin t^2\, dt$$

са сходящи. Извършете граничния преход $R\to\infty$ в равенствата (A) и (B) и докажете, че

$$\int_0^\infty \sin t^2\, dt=\int_0^\infty \cos t^2\, dt,$$

$$\int_0^\infty \sin t^2\, dt+\int_0^\infty \cos t^2\, dt=\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Това ще ви даде

$$\int_0^\infty \sin t^2\, dt=\int_0^\infty \cos t^2\, dt=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

14. Нека R е едно затворено и измеримо точково множество в пространство с n измерения и нека $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е една непрекъсната в R функция. Да се покаже, че могат да се намерят две неотрицателни числа p и q, подчинени на условието $p+q=1$, и две точки $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ от R, всички зависещи от избора на $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, по такъв начин, че да е изпълнено равенството

$$\iint\cdots\int_R f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n=$$
$$=[pf(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)+qf(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)]\,\mu(R).$$

Забележка. В случай че множеството R е свързано, т. е. всеки две негови точки могат да се съединят с непрекъсната дъга, лежаща в R, то валидна е едночленната формула за средните стойности

$$\iint\cdots\int_R f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n=f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)\,\mu(R),$$

където $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ е точка от R. В общия случай такава едночленна формула за средните стойности не съществува, както читателят лесно може сам да се убеди с пример.

Упътване. Нека M е най-голямата, а m е най-малката стойност на

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ в } R.$$

Да положим

$$I=\iint\cdots\int_R f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$$

Покажете, че

$$m\mu(R) \leq I \leq M\mu(R).$$

След това разгледайте двете неотрицателни числа

$$\alpha_1 = M\mu(R) - I, \quad \alpha_2 = I - m\mu(R)$$

и покажете, че

$$I = \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}M + \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}m\right]\mu(R).$$

стига да имаме $\alpha_1+\alpha_2 \neq 0$. Ако $\alpha_1+\alpha_2=0$, то $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=0$, откъдето

$$I = M\mu(R) = m\mu(R)$$

и случаят е тривиален.

ЧАСТ III

ПРИЛОЖЕНИЯ

Глава I

ПРИЛОЖЕНИЯ КЪМ ГЕОМЕТРИЯТА

§ 1. Тангента и нормала

Нека е дадена кривата

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= f(t), \\ y &= g(t), \end{aligned}$$

където двете функции $f(t)$ и $g(t)$ са дефинирани в някой интервал Δ. Нека t_0 и t са две точки от Δ. Очевидно уравнението на правата, която съединява двете точки

$$[f(t_0), \quad g(t_0)] \text{ и } [f(t), g(t)],$$

стига те да са различни, може да се напише във вида

$$(2) \qquad \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}[x-f(t_0)] - \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}[y-g(t_0)] = 0.$$

Ако двете функции $f(t)$ и $g(t)$ са диференцуеми в точката t_0, можем да извършим граничен преход в равенството (2), като оставим t да клони към t_0. След този граничен преход намираме

$$(3) \qquad g'(t_0)[x-f(t_0)] - f'(t_0)[y-g(t_0)] = 0.$$

Така полученото уравнение представлява една права, ако от двете производни $f'(t_0)$ и $g'(t_0)$ поне едната е различна от нула. Тази права се нарича допирателна или тангента към кривата (1) в точката $[f(t_0), g(t_0)]$. Очевидно тази права може да се представи параметрично по следния начин:

$$(4) \qquad \begin{cases} \xi = f(t_0) + uf'(t_0), \\ \eta = g(t_0) + ug'(t_0). \end{cases}$$

Дефиницията на понятието допирателна, която даваме сега, може да се разглежда като обобщение на познатата ни от порано дефиниция. И наистина ние знаем, че на функцията

$$(5) \qquad y = F(x)$$

могат да се съпоставят параметричните уравнения

$$x=t,\quad y=F(t).$$

В този специален случай уравненията (4) добиват вида

$$\xi=x_0+u,$$

$$\eta=F(x_0)+uF'(x_0)$$

при $t_0=x_0$ и следователно декартовото уравнение на тангентата и разглежданата точка е

$$\eta-F(x_0)=F'(x_0)\,(\xi-x_0).$$

Двете дефиниции на понятието допирателна обаче не са напълно еквивалентни. Сега ние даваме една по-обща дефиниция. При тая дефиниция не се изключва случаят, когато тангентата е успоредна на оста y.

Нека функциите (1) удовлетворяват уравнението

(6) $$\varphi(x, y)=0,$$

когато t се мени в интервала Δ. Тук предполагаме, че функцията $\varphi(x, y)$ е дефинирана и притежава непрекъснати частни производни в някоя околност на точката (x_0, y_0), където $x_0=f(t_0)$, $y_0=g(t_0)$. В такъв случай, като диференцираме равенството

$$\varphi[f(t),\ g(t)]=0,$$

при $t=t_0$ получаваме съгласно правилото за диференциране на съставни функции

$$\varphi'_x(x_0, y_0)\,f'(t_0)+\varphi'_y(x_0, y_0)\,g'(t_0)=0$$

и следователно всички точки от тангентата (4) удовлетворяват уравнението

(7) $$(\xi-x_0)\,\varphi'_x+(\eta-y_0)\,\varphi'_y=0,$$

което лесно се вижда, като заместим ξ и η с равните им от (4

Ако поне едната от частните производни $\varphi'_x(x_0, y_0)$ и $\varphi'_y(x_0, y_0)$ е различна от нула, уравнението (7) представлява една права. Тази права не е нищо друго освен тангентата (4), защото видяхме, че всички точки от правата (4) лежат на правата (7).

Понякога уравнение от вида (6) се нарича крива. Това понятие е различно от понятието дъга, което въведохме в § 16, глава II, част IV. Казваме, че една точка (x_1, y_1) лежи на кривата $\varphi(x, y)=0$, когато $\varphi(x_1, y_1)=0$. След всичко изложено досега е естествено да дефинираме понятието тангента (допирателна) към кривата $\varphi(x, y)=0$ в точката (x_0, y_0) като права с уравнение

$$(\xi-x_0)\,\varphi'_x(x_0, y_0)+(\eta-y_0)\,\varphi'_y(x_0, y_0)=0,$$

стига точката (x_0, y_0) да лежи върху кривата $\varphi(x, y)=0$, обаче поне една от частните производни $\varphi'_x(x_0, y_0)$ и $\varphi'_y(x_0, y_0)$ да е различна от нула.

В специалния случай, когато

(8) $$\varphi'_x(x_0, y_0)=0,\qquad \varphi'_y(x_0, y_0)=0,$$

точката (x_0, y_0) се нарича особена. Нека припомним, че точката (x_0, y_0) лежи върху кривата (6), т. е. че

$$\varphi(x_0, y_0)=0.$$

По този начин понятието особена точка се дефинира с помощта на три уравнения

$$\varphi'_x(x_0, y_0)=0,\qquad \varphi'_y(x_0, y_0)=0,\quad \varphi(x_0, y_0)=0,$$

а не само с помощта на двете уравнения (8). По-късно ще изучим особените точки по-подробно.

Права, която минава през точката M от една крива Γ и е перпендикулярна към тангентата на кривата Γ в тази точка, се нарича нормала към кривата Γ в точката M. Специално, ако кривата има уравнение

$$y=F(x),$$

където функцията $F(x)$ е дефинирана в някоя околност на точката x_0 и притежава различна от нула първа производна в тази точка, ъгловият коефициент на нормалата е $-\frac{1}{F'(x_0)}$ и следователно уравнението на нормалата е

$$\eta-y_0=\frac{-1}{F'(x_0)}\,(\xi-x_0),$$

където $y_0=F(x_0)$.

Нека

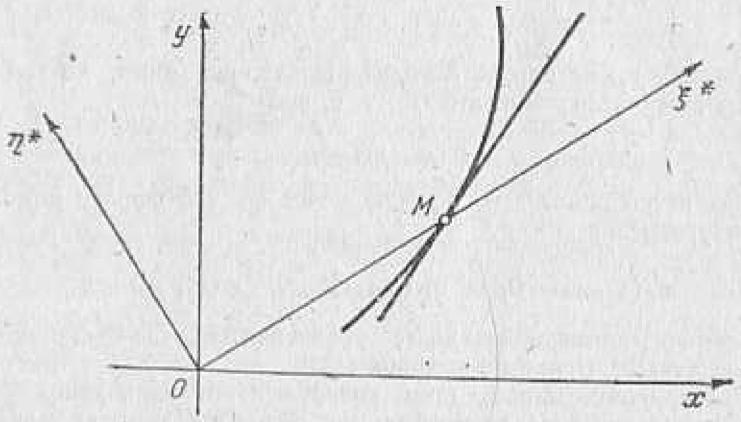
$$\rho=f(\theta),\quad f(\theta)>0,\quad \alpha\leq\theta\leq\beta$$

е уравнение на една крива в полярни координати. По-точно тук се касае за дъга, дефинирана с параметричните уравнения

$$x=f(\theta)\cos\theta,$$
$$y=f(\theta)\sin\theta.$$

Да разгледаме точката M върху тази крива, чиито полярни координати са $(\theta_0, f(\theta_0))$. Ако функцията $f(\theta)$ е диференцуема при $\theta=\theta_0$, кривата има дефинирана тангента. Тази тангента може да се представи в параметричен вид по следния начин:

$$(9)\qquad \begin{aligned} x&=f(\theta_0)\cos\theta_0+u[f'(\theta_0)\cos\theta_0-f(\theta_0)\sin\theta_0],\\ y&=f(\theta_0)\sin\theta_0+u[f'(\theta_0)\sin\theta_0+f(\theta_0)\cos\theta_0].\end{aligned}$$



Черт. 31

Тук не можем да имаме едновременно

$$f'(\theta_0)\cos\theta_0-f(\theta_0)\sin\theta_0=0,$$
$$f'(\theta_0)\sin\theta_0+f(\theta_0)\cos\theta_0=0,$$

защото от тези равенства би следвало $f(\theta_0)=0$, което не е вярно.

Уравненията (9) добиват особено прост вид, ако ги отнесем към ортогоналната координатна система $\xi^*O\eta^*$, която е еднакво ориентирана с координатната система xOy и за която лъчът $O\xi^*$ съвпада с лъча OM (вж. черт. 31).

За да се убедим в това, ще използуваме трансформачните формули

$$\xi^*=x\cos\theta_0+y\sin\theta_0,$$
$$\eta^*=-x\sin\theta_0+y\cos\theta_0,$$

които читателят познава от аналитичната геометрия. По такъв начин ние получаваме

$$\xi^*=f(\theta_0)+uf'(\theta_0),$$
$$\eta^*=uf(\theta_0).$$

Елиминирайки параметъра u, намираме уравнението на тангентата в следния вид:

$$f(\theta_0)\,\eta^*=f(\theta_0)\,\xi^*-f^2(\theta_0).$$

Ако $f'(\theta_0)\neq 0$, ние можем да представим това уравнение в декартов вид

$$\eta^*=\frac{f(\theta_0)}{f'(\theta_0)}\,\xi^*-\frac{f^2(\theta_0)}{f'(\theta_0)}$$

и следователно ъгловият коефициент m на тангентата в избраната координатна система има стойността

$$m=\frac{f(\theta_0)}{f'(\theta_0)}.$$

§ 2. Дължина на тангента, нормала, субтангента и субнормала

Нека TQ е тангента и NS е нормалата в точката M към кривата $y=f(x)$, която е изобразена на черт. 32. Дължината τ на отсечката[1] MT се нарича дължина на тангентата, а дължината ν на отсечката[2] MN се нарича дължина на нормалата. Сегментът[3] $S_\tau=PT$ се нарича субтангента, а сегментът $S_\nu=PN$ се нарича субнормала.

Нека (x, y) са координати на точката M. Уравненията на тангентата и нормалата могат да се напишат съответно във вида

$$\eta-y=y'(\xi-x),$$
$$\eta-y=-\frac{1}{y'}(\xi-x)$$

(разбира се, ако $y'\neq 0$) и следователно координатите на точка T са $\left(x-\frac{y}{y'},\ 0\right)$, а на точка N са $(x+yy',\ 0)$. Оттук намираме

$$\tau=\sqrt{y^2+\frac{y^2}{y'^2}},$$
$$\nu=\sqrt{y^2+y^2y'^2},$$
$$S_\tau=PT=\left(x-\frac{y}{y'}\right)-x=-\frac{y}{y'},$$
$$S_\nu=PN=(x+yy')-x=yy'.$$

[1] Т. е. на отсечката между допирната точка M и пресечната точка T на тангентата с оста x.

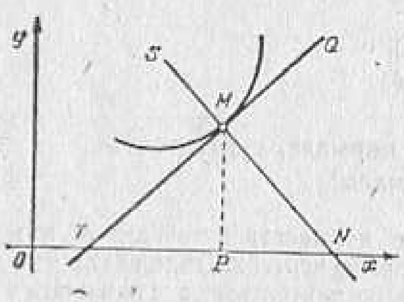
[2] Т. е. между допирната точка M на тангентата и пресечната точка на нормалата с оста x.

[3] Нека припомним тук, че сегментът е дефиниран не само по абсолютна стойност, но и по знак.

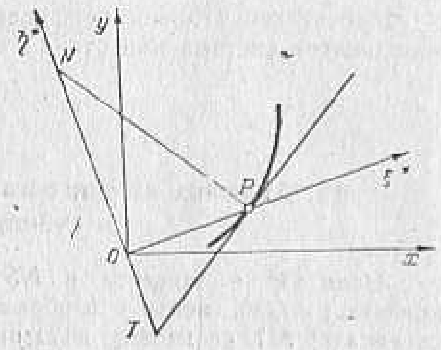
Нека е дадена кривата

(1) $$\rho=f(\theta),\ f(\theta)>0$$

в полярни координати (вж. черт. 33). Дължините[1] на отсечките $\tau=TP$ и $\nu=NP$ се наричат съответно дължина на тангентата и нормалата в полярни координати, а сегментите $S_\tau=TO$ и $S_\nu=ON$ се наричат съответно



Черт. 32



Черт. 33

субтангента и субнормала в полярни координати. Видяхме, че уравнението на тангентата в координатната система $\xi^* O\eta^*$ може да се напише във вида

$$\eta^*=\frac{\rho}{\rho'}\xi^*-\frac{\rho^2}{\rho'}$$

(разбира се, когато $\rho'\neq 0$). Като вземем пред вид, че координатите на P са $(\rho, 0)$, заключаваме, че уравнението на нормалата е

$$\eta^*=-\frac{\rho'}{\rho}(\xi^*-\rho).$$

Координатите на точката T са $\left(0,-\frac{\rho^2}{\rho'}\right)$, а на точката N са $(0,\rho')$. Като вземем пред вид още, че координатите на точката P са $(\rho, 0)$, получаваме

$$\tau=\sqrt{\rho^2+\frac{\rho^4}{\rho'^2}}=\rho\sqrt{1+\frac{\rho^2}{\rho'^2}},$$

[1] Правата PT е тангента в точката P към кривата (1); правата PN е нормала към тази крива. Координатната система $\xi^* O\eta^*$ е ортогонална и еднакво ориентирана с координатната система XOY.

$$\nu=\sqrt{\rho^2+\rho'^2},$$

$$S_\tau=TO=\frac{\rho^2}{\rho'},$$

$$S_\nu=ON=\rho'.$$

§ 3. Директорни косинуси на тангентата и нормалата

Нека функцията $y=f(x)$ е дефинирана и диференцуема в някой интервал Δ. Ще положим

(1) $$\alpha=\operatorname{arc\,tg} f'(x).$$

По този начин ъгълът α е еднозначно определен (когато x е дадено) и удовлетворява неравенствата

(2) $$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Като вземем пред вид неравенствата (2), не е трудно да се убедим, че

(3) $$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},$$

(4) $$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Ще изведем например формулата (3):

$$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}}=\frac{\sqrt{\cos^2\alpha}}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}=|\cos\alpha|=\cos\alpha.$$

Като вземем пред вид, че

$$\operatorname{tg}\alpha=f'(x),$$

получаваме

(5) $$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}},$$

(6) $$\sin\alpha=\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}}.$$

Числата $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, където α е определено от (1), се наричат директорни косинуси на тангентата. Като вземем пред вид, че $f'(x)$ е ъгловият коефициент на тангентата, заключаваме, че тези директорни косинуси представляват точно косинусите на ъглите, които сключва една подходящо избрана посока върху тангентата с положителните посоки на координатните оси. Тази посока върху тангентата се нарича положителна.

За положителна посока на нормалата се избира онази посока, която сключва с положителните посоки съответно на абсцисната и ординатната ос ъгли, чиито косинуси са

$$-\sin\alpha,\quad \cos\alpha.$$

Тези косинуси се наричат директорни косинуси на нормалата.

Накрая ще отбележим, че ако дефинираме s като функция на x посредством

$$ds=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

получаваме

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,$$

$$\frac{dy}{ds}=\sin\alpha.$$

§ 4. Асимптоти

Нека функцията

(1) $$y=f(x)$$

е дефинирана при $x>a$. Ще казваме, че правата

(2) $$y=mx+l$$

е асимптота на кривата (1), ако разстоянието на точката $(x, f(x))$ до правата (2) клони към нула, когато x расте неограничено. Да означим с $\delta(x)$ това разстояние. За да пресметнем $\delta(x)$, представяме уравнението на правата (2) в нормален вид:

$$\frac{y-mx-l}{\sqrt{1+m^2}}=0.$$

В такъв случай, както това е известно от аналитичната геометрия,

$$\delta(x)=\frac{|f(x)-mx-l|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Нека допуснем, че правата (2) е асимптота на кривата (1). В такъв случай

(3) $$\lim_{x\to\infty}\delta(x)=0$$

и следователно

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx-l)=0$$

и най-сетне

(4) $$l=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx).$$

И така, за да притежава кривата (1) асимптота, необходимо е да съществува границата (4) при някой избор на константата m. Не е трудно да се види, че константата m е еднозначно определена от обстоятелството, че границата

(5) $$\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$$

съществува. И наистина от съществуването на границата следва, че

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-mx}{x}=0$$

или

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-m\right)=0$$

и най-сетне

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Съществуването на границата (4) е не само необходимо, но и достатъчно за съществуването на асимптота. И наистина от условието (4) получаваме

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx-l)=0$$

и следователно

$$\lim_{x\to\infty}\delta(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-mx-l}{\sqrt{1+m^2}}=0.$$

По такъв начин не само получихме на ръка средство да познаем дали дадена крива (1) има асимптота, или не, но добихме възможност да намерим уравнението на асимптотата (разбира се, в случай че тя съществува). Така ъгловият коефициент m в уравнението (2) се определя от формулата

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

След като сме намерили m, определяме l от зависимостта

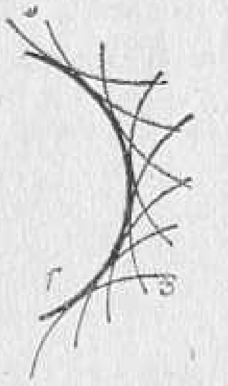
$$l=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx).$$

§ 5. Обвивки

Нека функцията $F(x, y, \alpha)$ е дефинирана и притежава непрекъснати частни производни до втори ред в някоя околност на точката (x_0, y_0, α_0). При всяко фиксирано α уравнението

$$F(x, y, \alpha)=0 \tag{1}$$

представлява една крива. Когато оставим α да се мени, получаваме една фамилия L от криви.



Черт. 34

Една дъга Γ с уравнения

$$x=f(t),$$
$$y=g(t),$$

където t се мени в достатъчно малка околност Δ на α_0, се нарича **обвивка** на фамилията L (когато α се мени в Δ), ако във всяка точка P от Γ се допира[1] към Γ по някоя крива от L (вж. черт. 34) и всяка крива от L се допира в някоя точка до Γ.

Ще докажем следната теорема: ако

$$F(x_0, y_0, \alpha_0)=0, \tag{2}$$

$$F'_\alpha(x_0, y_0, \alpha_0)=0, \tag{3}$$

$$\begin{vmatrix} F'_x(x_0, y_0, \alpha_0) & F'_y(x_0, y_0, \alpha_0) \\ F''_{\alpha x}(x_0, y_0, \alpha_0) & F''_{\alpha y}(x_0, y_0, \alpha_0) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{4}$$

$$F''_{\alpha\alpha}(x_0, y_0, \alpha_0)\neq 0, \tag{5}$$

фамилията криви, която се получава от (1), когато α се мени в някоя достатъчно малка околност на α_0, има обвивка, която може да се представи в параметричен вид

$$x=f(\alpha), \quad y=g(\alpha), \tag{6}$$

където функциите $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ се определят от системата

$$F(x, y, \alpha)=0, \quad F'_\alpha(x, y, \alpha)=0. \tag{7}$$

Функциите $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ са диференцуеми и производните им не се анулират едновременно.

[1] Това значи, че Γ и кривата от L имат обща тангента в точката P.

Доказателство. Като вземем пред вид условията (2), (3) и (4), заключаваме с помощта на теоремата за съществуване на неявни функции, че във всяка достатъчно малка околност на точката α_0 има един и само един чифт непрекъснати функции

$$x=f(\alpha),$$
$$y=g(\alpha),$$

които удовлетворяват системата (7) и за които

$$x_0=f(\alpha_0),$$
$$y_0=g(\alpha_0).$$

Като вземем пред вид още веднъж условието (4) и обстоятелството, че функциите $F(x, y, \alpha)$ и $F'_\alpha(x, y, \alpha)$ притежават непрекъснати частни производни, заключаваме, че функциите $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ са диференцуеми.

Прилагаме правилото за диференциране на съставни функции към равенството

$$F'_\alpha[f(\alpha), g(\alpha), \alpha]=0. \tag{8}$$

Това ни дава

$$f'(\alpha)F''_{\alpha x}+g'(\alpha)F''_{\alpha y}+F''_{\alpha\alpha}=0. \tag{9}$$

Сега не е трудно да се покаже, че $f'(\alpha)$ и $g'(\alpha)$ не се анулират едновременно, когато α се мени в някоя достатъчно малка околност на точката α_0. И наистина в противен случай, като изхождаме от уравнението (9), бихме получили

$$F''_{\alpha\alpha}(f(\alpha), g(\alpha), \alpha)=0.$$

Това обаче не е вярно, когато α е достатъчно близо до α_0, защото функциите $F''_{\alpha\alpha}(x, y, \alpha)$, $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ са непрекъснати и

$$F''_{\alpha\alpha}(x_0, y_0, \alpha_0)\neq 0.$$

Ние ще покажем, че дъгата

$$x=f(\alpha), \quad y=g(\alpha) \tag{10}$$

и кривата

$$F(x, y, \alpha_1)=0,$$

където α_1 е коя да е константа, достатъчно близка до α_0, се допират[1] в точката

$$[f(\alpha_1), g(\alpha_1)].$$

[1] Това значи, че те имат обща тангента в тази точка.

И наистина, като вземем пред вид, че $f'(\alpha_1)$ и $g'(\alpha_1)$ не са едновременно нули, заключаваме, че допирателната към дъгата (10) може да се представи във вида

$$\xi = f(\alpha_1) + uf'(\alpha_1), \quad \eta = g(\alpha_1) + ug'(\alpha_1), \tag{11}$$

където u е параметър. От друга страна, уравнението на допирателната към кривата $F(x, y, \alpha_1)=0$ може да се представи във вида

$$[\xi - f(\alpha_1)]\,F'_x + [\eta - g(\alpha_1)]\,F'_y = 0. \tag{12}$$

(Тук двете частни производни F'_x и F'_y не могат да се анулират едновременно, когато α_1 е достатъчно близо до α_0, защото в противен случай би било нарушено условието (4).)

За да се убедим, че тангентите (11) и (12) се сливат, достатъчно е да покажем, че всичките точки на правата (11) лежат върху правата (12). За целта заместваме в уравнението (12) текущите координати с

$$[f(\alpha_1) + uf'(\alpha_1), \quad g(\alpha_1) + ug'(\alpha_1)].$$

Това ни дава

$$u\,[f'(\alpha_1)\,F'_x + g'(\alpha_1)\,F'_y] = 0.$$

За да се убедим, че полученото равенство е удовлетворено, прилагаме правилото за диференциране на съставни функции към тъждеството

$$F[f(\alpha), g(\alpha), \alpha] = 0.$$

Това ни дава

$$f'(\alpha)F'_x + g'(\alpha)\,F'_y + F'_\alpha = 0$$

Като вземем пред вид още зависимостта

$$F'_\alpha\,[f(\alpha),\ g(\alpha),\ \alpha] = 0,$$

получаваме

$$f'(\alpha)\,F'_x + g'(\alpha)\,F'_y = 0.$$

§ 6. Център на кривината, радиус на кривината, кривина, еволюта, еволвента

Нека ни е дадена кривата

$$y = f(x). \tag{1}$$

Ще предполагаме, че функцията $f'(x)$ притежава производни до втори ред в някой интервал Δ, като при това $f'(x) \neq 0$ и $f''(x) \neq 0$

Да разгледаме нормалите

$$\eta - f(x) = -\frac{1}{f'(x)}(\xi - x) \tag{2}$$

и

$$\eta - f(x+h) = -\frac{1}{f'(x+h)}(\xi - x - h) \tag{3}$$

в две различни точки $(x, f(x))$ и $(x+h, f(x+h))$. Пресечната точка на тези нормали има координати

$$\xi = x - f'(x)\frac{1 + f'(x+h)\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}}{\dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}},$$

$$\eta = f(x) + \frac{1 + f'(x+h)\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}}{\dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}}.$$

Като извършим граничния преход $h \to 0$, получаваме

$$\xi = x - f'(x)\frac{1 + f'^2(x)}{f''(x)}, \qquad \eta = f(x) + \frac{1 + f'^2(x)}{f''(x)}. \tag{4}$$

Точката с така получените координати се нарича пресечна точка на нормалата (2) с безкрайно близката ѝ съседна нормала или по-кратко — център на кривината на кривата (1), който отговаря на точката $[x, f(x)]$.

Разстоянието между точката $[x, f(x)]$ и съответния ѝ център на кривината се нарича радиус на кривината на кривата (1) в разглежданата точка. Очевидно за радиуса на кривината получаваме следния израз:

$$\sqrt{(\xi - x)^2 + [\eta - f(x)]^2} = \frac{[1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}.$$

По този начин ние дефинирахме понятието радиус на кривината само по абсолютна стойност. Целесъобразно е обаче да се разглежда радиусът на кривината като насочена отсечка, чиято алгебрична мярка представлява релативно число. Това може да стане, като по дефиниция под радиус на кривината R разбираме

$$R = \frac{[1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}. \tag{5}$$

Реципрочната стойност на радиуса на кривината в дадена точка на кривата се нарича кривина в същата точка. Означавайки кривината с k, получаваме

(6) $$k=\frac{f''(x)}{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Формулите

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}},$$

(7) $$\sin\alpha=\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}}$$

от § 3 от тази глава (значението на буквите е дадено там) и формулата (5) ни позволяват да представим уравненията (4) в следния по-прост вид:

(8) $$\xi=x-R\sin\alpha,$$
$$\eta=y+R\cos\alpha.$$

На това място ние ще дадем една проста зависимост, която свързва кривината k с ъгъла α. За да получим тази зависимост, диференцираме равенството

$$\sin\alpha=\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}}$$

спрямо x. Това ни дава

$$\cos\alpha\,\frac{d\alpha}{dx}=\frac{f''(x)}{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}$$

или

(9) $$k=\cos\alpha\,\frac{d\alpha}{dx}.$$

Като вземем пред вид, че

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \text{където}\quad ds=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

(вж. § 3 от тази глава), можем да запишем този резултат по-кратко така:

$$k=\frac{d\alpha}{ds}.$$

Диференцирайки спрямо s равенствата

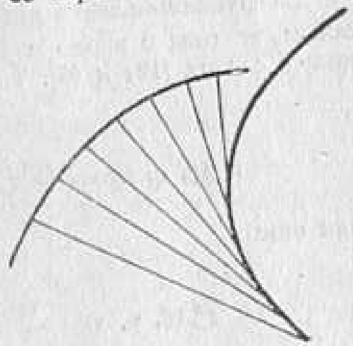
$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,$$
$$\frac{dy}{ds}=\sin\alpha,$$

получаваме така наречените формули на Френе за равнинните криви

$$\frac{d^2x}{ds^2}=-k\frac{dy}{ds},$$
$$\frac{d^2y}{ds^2}=k\frac{dx}{ds}.$$

Геометричното място на центровете на кривините, т. е. кривата с параметричните уравнения (4), се нарича еволюта на кривата (1), а кривата (1) се нарича еволвента на кривата (4).

Нека функцията $f(x)$ е три пъти диференцуема и третата ѝ производна е непрекъсната в някоя околност на точката x_0; нека освен това $f'(x_0)\neq 0$, $f''(x_0)\neq 0$ и най-сетне нека производната на кривината k е различна от нула при $x=x_0$. В такъв случай еволютата е обвивка за фамилията нормали, когато x се мени в достатъчно малка околност на x_0 (вж. черт. 35).



Черт. 35

За да се убедим в това, разглеждаме функцията

$$F(\xi,\eta,x)=\eta-f(x)+\frac{\xi-x}{f'(x)}.$$

Очевидно

(10) $$F'_x(\xi,\eta,x)=-f'(x)-\frac{f'(x)+(\xi-x)f''(x)}{f'^2(x)}.$$

Решавайки относно ξ и η системата

$$\eta-f(x)+\frac{\xi-x}{f'(x)}=0,$$
$$-f'(x)-\frac{f'(x)+(\xi-x)f''(x)}{f'^2(x)}=0,$$

получаваме

(11) $$\xi=x-f'(x)\,\frac{1+f'^2(x)}{f''(x)},$$
$$\eta=f(x)+\frac{1+f'^2(x)}{f''(x)}.$$

Така получените уравнения съвпадат точно с уравненията на еволютата (4). За да се убедим, че тези параметрични уравнения дават една обвивка на нормалите (2), достатъчно[1] е да вземем пред вид, че функционалната детерминанта

$$\begin{vmatrix} F'_{\xi} & F'_{\eta} \\ F''_{x\xi} & E''_{x\eta} \end{vmatrix} = \frac{f''(x)}{f'^2(x)}$$

и производната

$$F''_{xx}(\xi, \eta, x)$$

приемат стойности, различни от нула, когато на ξ и η даваме стойности, определени от уравненията (11).

За функционалната детерминанта това е очевидно. За да покажем, че това е вярно и за производната $F''_{xx}(\xi, \eta, x)$, елиминираме $f''(x)$ от (10) и (6). Това ни дава

$$F'_x(\xi, \eta, x) = -\frac{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f'^2(x)}\left[\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}} + (\xi - x)k\right]$$

или още

$$F'_x(\xi, \eta, x) = -\frac{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f'^2(x)}[\sin\alpha + (\xi - x)k].$$

Оттук получаваме

$$F''_{xx}(\xi, \eta, x) = -[\sin\alpha + (\xi - x)k]\frac{d}{dx}\frac{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f'^2(x)} -$$

$$-\left[\cos\alpha\frac{d\alpha}{dx} - k + (\xi - x)\frac{dk}{dx}\right]\frac{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f'^2(x)}$$

[1] Ако положим

$$\xi_0 = x_0 - f'(x_0)\frac{1+f'^2(x_0)}{f''(x_0)},$$

$$\eta_0 = f(x_0) + \frac{1+f'^2(x_0)}{f''(x_0)},$$

очевидно ще имаме

$$F(\xi_0, \eta_0, x_0) = 0, \quad F_x'(\xi_0, \eta_0, x_0) = 0.$$

или като вземем пред вид формулата (9),

$$F''_{xx}(\xi, \eta, x) = -[\sin\alpha + (\xi - x)k]\frac{d}{dx}\frac{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f'^2(x)} -$$

$$-(\xi - x)\frac{dk}{dx}\cdot\frac{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f'^2(x)}.$$

При

$$\xi = x - f'(x)\frac{1+f'^2(x)}{f''(x)} = x - R\sin\alpha$$

получаваме

$$F''_{xx}(\xi, \eta, x) = \frac{(1+f'^2(x))^{\frac{5}{2}}}{f'(x)\cdot f''(x)}\frac{dk}{dx} \neq 0.$$

С това доказателството е завършено.

§ 7. Особени точки на алгебричните криви

Нека $F(x, y)$ е един полином от n-та степен на двете променливи x и y. Казваме, че (x_0, y_0) е една особена точка върху кривата

(1) $$F(x, y) = 0,$$

когато са изпълнени следните условия:

(2) $$F(x_0, y_0) = 0,$$

$$F'_x(x_0, y_0) = F'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Теорема 1. Ако са изпълнени условията (2) и ако

$$F''^2_{xy}(x_0, y_0) - F''_{xx}(x_0, y_0)F''_{yy}(x_0, y_0) > 0, \quad F''_{yy}(x_0, y_0) \neq 0,$$

то във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има две и само две[1] диференцуеми функции на x, които, поставени на мястото на y, удовлетворяват уравнението (1) и приемат стойност y_0 при $x = x_0$.

Доказателство. Да положим за краткост

$$\frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k}F(x_0, y_0) = a_{ik}.$$

Като вземем пред вид условията (2), добиваме възможност да напишем Тейлоровото развитие

[1] Точката (x_0, y_0) се нарича в този случай двойна точка.

$$F(x, y)=F(x_0, y_0)+\frac{1}{1!}[(x-x_0)F'_x(x_0, y_0)+(y-y_0)F'_y(x_0, y_0)]+$$

$$+\frac{1}{2!}[(x-x_0)^2F''_{xx}(x_0, y_0)+2(x-x_0)(y-y_0)F''_{xy}(x_0, y_0)+$$

$$+(y-y_0)^2F''_{yy}(x_0, y_0)]+$$

$$+\cdots\cdots\cdots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n F(x_0, y_0)$$

във вида

$$F(x, y)=\frac{1}{2!}[a_{20}(x-x_0)^2+2a_{11}(x-x_0)(y-y_0)+a_{02}(y-y_0)^2]+$$

$$+\frac{1}{3!}[a_{30}(x-x_0)^3+3a_{21}(x-x_0)^2(y-y_0)+$$

$$+3a_{12}(x-x_0)(y-y_0)^2+a_{03}(y-y_0)^3]+$$

$$+\cdots\cdots\cdots+$$

$$+\frac{1}{n!}[a_{n0}(x-x_0)^n+na_{n-1\,1}(x-x_0)^{n-1}(y-y_0)+\cdots+$$

$$+a_{0n}(y-y_0)^n].$$

Полагаме

$$y=y_0+u(x-x_0).$$

В такъв случай уравнението $F(x, y)=0$ добива вида

$$a_{20}+2a_{11}u+a_{02}u^2+(x-x_0)p(x, u)=0,$$

където $p(x, u)$ е полином на x и u. Да означим с α кой да е от двата корена на уравнението

(3) $$a_{20}+2a_{11}u+a_{02}u^2=0$$

и да разгледаме функцията

$$G(x, u)=a_{20}+2a_{11}u+a_{02}u^2+(x-x_0)p(x, u).$$

Очевидно имаме

$$G(x_0, \alpha)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}G(x_0, \alpha)=2a_{11}+2a_{02}\alpha=\pm 2\sqrt{a_{11}^2-a_{02}a_{20}}\neq 0.$$

Този резултат ни позволява да приложим към уравнението

(4) $$G(x, u)=0$$

теоремата за съществуване на неявни функции. И тъй във всяка околност на точката x_0 има една (и само една) непрекъсната функция

$$u=\varphi(x),$$

която удовлетворява уравнението

$$G(x, u)=0$$

и приема стойност α в точката x_0. Теоремата за диференциране на неявни функции ни учи, че функцията $\varphi(x)$ е диференцуема. След като функцията $\varphi(x)$ е дефинирана, разглеждаме функцията

$$f(x)=y_0+(x-x_0)\varphi(x).$$

С непосредствена проверка се вижда, че функцията

$$y=f(x)$$

удовлетворява уравнението (1), тъй като функцията $\varphi(x)$ удовлетворява уравнението (4). Не е трудно да се убедим също така, че функцията $f(x)$ е диференцуема, като вземем пред вид, че функцията $\varphi(x)$ е диференцуема. Най-сетне нека отбележим, че $f'(x_0)=\alpha$. За да установим това, разглеждаме отношението

$$\frac{f(x)-y_0}{x-x_0}=\varphi(x),$$

което клони към $\varphi(x_0)=\alpha$ (поради непрекъснатостта на $\varphi(x)$), когато $x\to x_0$.

Използувайки втория корен β на уравнението (3), можем да дефинираме още една диференцуема функция $g(x)$, която удовлетворява уравнението (1) и приема стойност y_0 в точката x_0. Тази функция $g(x)$ е различна от функцията $f(x)$, защото $f'(x_0)=\alpha$, докато $g'(x_0)=\beta$.

Не е трудно да се убедим, че в достатъчно малка околност на точката x_0 не може да има трета диференцуема функция $h(x)$, която да удовлетворява уравнението $F(x, y)=0$ и за която $h(x_0)=y_0$. И наистина да допуснем противното. В такъв случай функцията $\psi(x)$, дефинирана с условието

$$\psi(x)=\frac{h(x)-y_0}{x-x_0}$$

при $x\neq x_0$ и

$$\psi(x_0)=h'(x_0)$$

е непрекъсната дори при $x=x_0$. Не е трудно да се види, че функцията $u=\psi(x)$ удовлетворява уравнението

(5) $$G(x, u)=0.$$

И наистина при $x \neq x_0$ това се вижда непосредствено, а при $x = x_0$ това се получава с граничния преход $x \to x_0$ от равенството

$$G(x, \psi(x)) = 0$$

поради непрекъснатостта на $\psi(x)$. Извършвайки този граничен преход, получаваме

$$a_{20} + 2a_{11}\psi(x_0) + a_{02}\psi^2(x_0) = 0.$$

Оттук заключаваме, че или

$$\psi(x_0) = \alpha, \tag{6}$$

или

$$\psi(x_0) = \beta. \tag{7}$$

Непрекъснатата функция $\psi(x)$ обаче е еднозначно определена с помощта на условието (5) и едното от условията (6) или (7). От това следва, че функцията $h(x)$ съвпада или с $f(x)$, или с $g(x)$.

Пример. Да разгледаме функцията

$$F(x, y) = 6x^2 - 5xy + y^2 + x^3 - x^2y + y^3.$$

Тук имаме

$$F(0, 0) = F'_x(0, 0) = F'_y(0, 0) = 0,$$

$$F''^2_{xy}(0, 0) - F''_{xx}(0, 0)F''_{yy}(0, 0) = 1 > 0, \quad F''_{yy}(0, 0) = 2 \neq 0$$

следователно през точката (0, 0) минават два клона от кривата

$$6x^2 - 5xy + y^2 + x^3 - x^2y + y^3 = 0.$$

Теорема 2. Ако са изпълнени условията (2) и ако

$$F''^2_{xy}(x_0, y_0) - F''_{xx}(x_0, y_0)F''_{yy}(x_0, y_0) < 0,$$

то (x_0, y_0) е една изолирана точка на кривата $F(x, y) = 0$. Това значи, че около точката (x_0, y_0) може да се построи околност, която да не съдържа друга точка от кривата освен точката (x_0, y_0).

Доказателство. Като вземем пред вид условията (2), добиваме възможност да напишем формулата на Тейлор

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}[(x - x_0)F'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)F'_y(x_0, y_0)] +$$

$$+ \frac{1}{2!}[(x - x_0)^2 F''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) +$$

$$+ 2(x - x_0)(y - y_0)F''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) +$$

$$+ (y - y_0)^2 F''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)],$$

където

$$h = x - x_0, \quad k = y - y_0, \quad 0 < \theta < 1,$$

във вида

$$F(x, y) = \frac{1}{2!}[(x - x_0)^2 F''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) +$$

$$+ 2(x - x_0)(y - y_0)F''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) +$$

$$+ (y - y_0)^2 F''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)].$$

Ако точката (x, y) се намира достатъчно близо до точката (x_0, y_0), очевидно

$$F''^2_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - F''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)F''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) < 0$$

и следователно квадратичната форма

$$\lambda^2 F''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + 2\lambda\mu F''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) +$$

$$+ \mu^2 F''_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

е дефинитна. Оттук заключаваме, че равенството

$$(x - x_0)^2 F''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + 2(x - x_0)(y - y_0)F''_{xy}(x_0 + \theta h$$

$$y_0 + \theta k) + (y - y_0)^2 F''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = 0$$

е изпълнено само когато $x = x_0$ и $y = y_0$.

Пример. Да разгледаме функцията

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2, \quad a \neq 0, \; b \neq 0.$$

Тук очевидно имаме

$$F(0, 0) = F'_x(0, 0) = F'_x(0, 0) = 0,$$

$$F''^2_{xy}(0, 0) - F''_{xx}(0, 0)F''_{yy}(0, 0) = -4a^2b^2 < 0.$$

Оттук заключаваме, че (0, 0) е една изолирана точка на кривата

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0.$$

Ако

$$F''^2_{xy}(x_0, y_0) - F''_{xx}(x_0, y_0)F''_{yy}(x_0, y_0) = 0,$$

могат да се представят различни случаи.

Така например при

$$F(x, y) = y^2 - x^3$$

имаме

$$F(0, 0) = F'_x(0, 0) = F'_y(0, 0) = 0$$

и

$$F''^2_{xy}(0, 0) - F''_{xx}(0, 0)F''_{yy}(0, 0) = 0.$$

Видът на кривата $y^2 - x^3 = 0$ е изобразен на черт. 36. В този случай казваме, че в началото имаме рог от първи вид (двата клона, които образуват рога, са разположени от различни страни на общата си тангента).

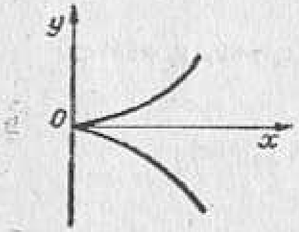
Като втори пример ще разгледаме функцията

$$F(x, y)=(y-x^2)^2-x^5.$$

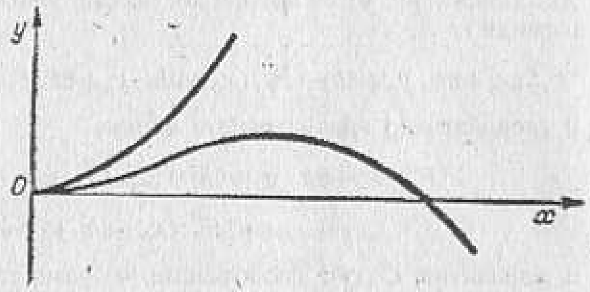
И тук имаме

$$F(0, 0)=F'_x(0, 0)=F'_y(0, 0)=0,$$

$$F''^2_{xy}(0, 0)-F''_{xx}(0, 0)F''_{yy}(0, 0)=0.$$



Черт. 36



Черт. 37

Изследването на кривата $F(x, y)=0$ е удобно да се извърши, като се реши уравнението относно y. Това ще ни даде

$$y=x^2\pm x^{\frac{5}{2}}.$$

Тази крива е изобразена на черт. 37.

В началото имаме така наречен рог от втори вид (двата клона, които образуват рога, са от една и съща страна на общата си тангента в съседство на допирната точка).

Като трети пример ще разгледаме функцията

$$F(x, y)=x^4+x^2y^2-6x^2y+y^2.$$

И тук имаме

$$F(0, 0)=F'_x(0, 0)=F'_y(0, 0)=0,$$

$$F''^2_{xy}(0, 0)-F''_{xx}(0, 0)F''_{yy}(0, 0)=0.$$

Кривата $F(x, y)=0$ се разпада на двата клона

$$y=\frac{3x^2+x^2\sqrt{8-x^2}}{1+x^2}$$

и

$$y=\frac{3x^2-x^2\sqrt{8-x^2}}{1+x^2},$$

които се допират в началото.

Като четвърти пример ще разгледаме функцията

$$F(x, y)=y^2-2xy+x^2+x^4-x^6.$$

И тук имаме

$$F(0, 0)=F'_x(0, 0)=F'_y(0, 0)=0,$$

$$F''^2_{xy}(0, 0)-F''_{xx}(0, 0)F''_{yy}(0, 0)=0.$$

В този специален случай началото е една изолирана точка за кривата $F(x, y)=0$. За да се убедим в това, представяме уравнението във вида

$$(y-x)^2+x^4(1-x^2)=0.$$

Това уравнение е удовлетворено при $|x|<1$ само когато $y-x=0$, $x=0$ и следователно $x=0$, $y=0$.

Повече няма да се задълбочаваме в изследването на различните случаи, които могат да се представят.

Накрая ще отбележим, че само за простота се ограничихме със случая на алгебрични криви. Методът, с който си послужихме, може да се използува при много по-общи предположения.

Задачи

Да се построят следните криви:

1) $y=\frac{x^2+1}{x^2-3x+2}$.

2) $y=\frac{x^3}{x^2+1}$.

3) $y=x\ln x$.

4) $y=e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

5) $y^2=\frac{x+1}{x-1}$.

6) $y^2=\frac{x-1}{1+x}$.

7) $y^2=\frac{x^2}{x+1}$.

8) $y^2=x^3(1-x)$.

9) $y^2=x(x-1)^2$.

10) $y^2=x^2\frac{1+x}{1-x}$.

11) $y^2=x^2\frac{1-x}{x+1}$.

12) $y^2=(x-a)(x-b)(x-c)$, $c\leq b\leq a$.

13) $\rho=\operatorname{tg}\theta$.

14) $\rho=a\theta$.

15) $\rho=e^{a\theta}$.

16) $\rho^2=\cos 2\theta$.

17) $\rho=\operatorname{tg}\theta$.

18) $\rho=\frac{1}{\theta}$, $\theta>0$.

19) $\rho=\frac{1}{4\theta-\pi}$, $\theta>\frac{\pi}{4}$.

20) $\rho=\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$.

21) $x^4+y^4=8xy^2$.

22) $(x^2+y^2)^2=2xy$.

23) $y^2-2x^2y+x^5$.

24) $x^3+y^3-3axy=0$.

25) $x=\frac{t-t^2}{1+t^2}$, $y=\frac{t^2-t^3}{1+t^2}$.

26) $x=\frac{t}{1-t^2}$, $y=\frac{t-2t^3}{1-t^2}$.

27) $x=\frac{t^2}{t-1}$, $y=\frac{t}{t^2-1}$.

28) $x=\frac{t^3-1}{t^2+1}$, $y=\frac{t^2-1}{t^3+t}$.

Глава II

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Дефиниции

Уравнение от вида

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0,$$

където y е неизвестна функция на x, се нарича обикновено[1] диференциално уравнение от n-ти ред.

Решенията на едно диференциално уравнение се наричат негови интеграли.

Не всяко диференциално уравнение има решение. И наистина нека $f(x)$ е функция, която приема както положителни, така и отрицателни стойности в един интервал Δ, но не се анулира.[2] В такъв случай уравнението

$$y'=f(x)$$

не притежава решение, защото в противен случай съгласно теоремата на Дарбу (вж. задача 59 в края на част II) би съществувала в Δ поне една точка x_0, в която y', а следователно и $f(x)$ се анулира, което не е вярно.

Има диференциални уравнения, които имат само едно решение. И наистина нека Δ е произволен интервал. Дефинираме една функция $\varphi(x)$ в Δ по следния начин: ако x е рационално, то $\varphi(x)=1$; ако x е ирационално, $\varphi(x)=-1$. Разглеждаме уравнението

$$y'=\varphi(x)\,y.$$

Очевидно константата нула е едно негово решение. Ще покажем, че това уравнение няма друго решение. За тази цел ще установим, че във всеки подинтервал на интервала Δ функцията y се анулира поне един път. И наистина, ако допуснем, че в Δ има подинтервал (p, q), където y не се анулира, ще имаме в

[1] За разлика от диференциални уравнения, които съдържат частни производни. Така например диференциалното уравнение $y'-y=0$ е едно обикновено диференциално уравнение, а уравнението $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ е едно диференциално уравнение с частни производни.

[2] Тази функция, разбира се, притежава поне една точка на прекъсване.

този подинтервал

$$\frac{y'}{y}=\varphi(x)$$

или още

$$\frac{d\ln|y|}{dx}=\varphi(x).$$

От друга страна, функцията $\varphi(x)$ приема в интервала (p, q) както положителни, така и отрицателни стойности и следователно съгласно теоремата на Дарбу (вж. задача 59 в края на част II) трябва да се анулира поне един път, което не е вярно. С това ние доказахме, че функцията y се анулира във всеки подинтервал на Δ и следователно се анулира тъждествено, защото е непрекъсната.

Не е трудно да се покажат примери за диференциални уравнения, които имат безбройно много решения. Така, ако функцията $g(x)$ е непрекъсната в някой интервал Δ, уравнението

$$y'=g(x)$$

има безбройно много решения в Δ и, както знаем, те се изчерпват от формулата

$$y=G(x)+C,$$

където $G(x)$ е една примитивна функция на $g(x)$ в разглеждания интервал.

Последният пример, както ще се види от това, което следва, може да се разглежда в известен смисъл като типичен. Към това ще прибавим още, че могат да се дадат твърде общи достатъчни условия, при които може да се твърди съществуването на безбройно много решения на диференциалните уравнения.

§ 2. Уравнение, в което променливите се отделят

Уравнение от вида

$$f(x)+g(y)\,y'=0 \tag{1}$$

се нарича диференциално уравнение, в което променливите се отделят.

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в някоя околност на точката x_0, а $g(t)$ е дефинирана и непрекъсната в някоя околност на точката y_0. Ако $g(y_0)\neq 0$, то във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 съществува една и само една диференцуема функция $y(x)$, която удовлетворява диференциалното уравнение (1) и за която $y(x_0)=y_0$.

За да докажем това, разглеждаме двете функции

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(u)\,du,$$

$$G(t)=\int_{y_0}^{t} g(u)\,du$$

и образуваме уравнението

(2) $$F(x)+G(v)=0.$$

Като вземем пред вид, че функциите $F(x)$ и $G(t)$ притежават непрекъснати производни и че

$$F(x_0)+G(y_0)=0,$$
$$G'(y_0)=g(y_0)\neq 0,$$

заключаваме с помощта на теоремата за съществуване на неявни функции, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 съществува функция $y=\varphi(x)$, която удовлетворява уравнението (2) и условието $\varphi(x_0)=y_0$, и че тази функция е диференцуема. Чрез диференциране намираме, че функцията $\varphi(x)$ удовлетворява уравнението

$$F'(x)+G'(\varphi(x))\,\varphi'(x)=0$$

или, което е същото,

$$f(x)+g(\varphi(x))\,\varphi'(x)=0.$$

По такъв начин ние намерихме функция $y=\varphi(x)$ в достатъчно малка околност на точката x_0, която удовлетворява уравнението (2) и условието $\varphi(x_0)=y_0$. За да установим, че такава функция има само една, означаваме с $\psi(x)$ диференцуема функция, която е дефинирана в достатъчно малка околност на точката x_0 и удовлетворява условията

$$f(x)+g(\psi(x))\,\psi'(x)=0,$$
$$\psi(x_0)=y_0.$$

Разглеждаме функцията

$$p(x)-F(x)+G(\psi(x)).$$

В такъв случай

$$p'(x)=f(x)+g(\psi(x))\,\psi'(x)=0,$$

т. е. функцията $p(x)$ е константа. Тази константа е равна на нула, защото

$$F(x_0)+G(\psi(x_0))=F(x_0)+G(y_0)=0.$$

И така непрекъснатата функция $y=\psi(x)$ удовлетворява уравнението (3) и условието $\psi(x_0)=y_0$. От това и от теоремата за единственост на неявни функции следва, че функцията $\psi(x)$ съвпада с разглежданата по-горе функция $\varphi(x)$, когато x е достатъчно близо до x_0.

Забележка. От изложеното се вижда, че диференциалното уравнение (1) при допълнителното условие $y(x_0)=y_0$ съществено се свежда към уравнението (2), което не съдържа производната на неизвестната функция.

§ 3. Хомогенни диференциални уравнения

Уравнение от вида

(1) $$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

се нарича хомогенно.

Нека функцията $f(t)$ е дефинирана и непрекъсната в някоя околност на точката t_0, нека $f(t_0)-t_0\neq 0$ и нека x_0 е произволно различно от нула число. Ние ще докажем, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има една и само една диференцуема функция $y=\varphi(x)$, която удовлетворява уравнението (1) и приема стойността t_0x_0 в точката x_0.

Доказателство. Полагаме

(2) $$u(x)=\frac{\varphi(x)}{x}.$$

В такъв случай

$$\varphi'(x)=u'x+u.$$

Очевидно функцията $y=\varphi(x)$ удовлетворява уравнението (1) и условието $\varphi(x_0)=t_0x_0$ тогава и само тогава, когато функцията $u(x)$ удовлетворява уравнението

(3) $$u'x+u-f(u)=0$$

и условието $u(x_0)=t_0$. От друга страна, уравнението (3) е еквивалентно на уравнението

(4) $$\frac{1}{x}+\frac{u'}{u-f(u)}=0,$$

което удовлетворява условията, при които разгледахме уравнението (1) от предния параграф. И така във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 съществува една и само една функция $u(x)$, която удовлетворява уравнението (3) и условието $u(x_0)=t_0$, и следователно съществува една и само една функция $y=\varphi(x)$, която удовлетворява уравнението (1) и условието $\varphi(x_0)=t_0x_0$.

Забележка. Изложеното може да се резюмира кратко така: субституцията (2) ни позволява да преобразуваме уравнението (1) в уравнение, чиито променливи се отделят.

§ 4. Линейни диференциални уравнения

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и непрекъснати в някой интервал Δ. Уравнение от вида

(1) $$y'=f(x)y+g(x)$$

се нарича линейно диференциално уравнение.

Да допуснем, че y е едно решение на уравнението (1). Разглеждаме помощната функция

$$u=ye^{-\int f(x)\,dx}$$

В такъв случай

$$y=u\,e^{\int f(x)\,dx},$$

$$y'=u'\,e^{\int f(x)\,dx}+ue^{\int f(x)\,dx}f(x).$$

Оттук заключаваме, че функцията u удовлетворява уравнението

$$u'\,e^{\int f(x)\,dx}+ue^{\int f(x)\,dx}f(x)=f(x)\,ue^{\int f(x)\,dx}+g(x)$$

и следователно

$$u'=g(x)\,e^{-\int f(x)\,dx}.$$

Това ни позволява да пишем

$$u=C+\int g(x)\;e^{-\int f(x)\,dx}\,dx$$

и следователно всяко решение y на уравнението (1) може да се представи във вида

(2) $$y=e^{\int f(x)\,dx}\left[C+\int g(x)\,e^{-\int f(x)\,dx}\,dx\right]$$

при подходящ избор на константата C.

Обратно, каквато и да е константата C, функцията y, определена от (2), удовлетворява уравнението (1). Доказателството се извършва с непосредствена проверка, която предоставяме на читателя.

От равенството (2) се вижда, че каквато и да е точката x_0 от Δ и каквато и да е константата a, уравнението (1) има едно и само едно решение $y=y(x)$, което удовлетворява условието $y(x_0)=a$.

§ 5. Уравнение на Бернули

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и непрекъснати в някой интервал Δ. Уравнение от вида

(1) $$y'=f(x)\,y+g(x)\,y^m,\text{ където } m\neq 1,$$

се нарича диференциално уравнение на Бернули (Bernoulli).

Това уравнение може да се преобразува в линейно с помощта на подходяща субституция поне тогава, когато търсим[1] негови решения, които не се анулират.

И наистина нека y е едно решение на уравнението (1) и нека $y\neq 0$ при всички стойности на x от Δ. В такъв случай

$$y^{-m}\,y'=f(x)y^{1-m}+g(x)$$

и следователно функцията

$$u=y^{1-m}$$

удовлетворява диференциалното уравнение

$$\frac{1}{1-m}\cdot\frac{du}{dx}=f(x)\,u+g(x),$$

което е линейно.

§ 6. Уравнение на Рикати

Нека функциите $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ са дефинирани и непрекъснати в някой интервал Δ. Уравнение от вида

(1) $$y'=f_1(x)+f_2(x)\,y+f_3(x)\,y^2$$

се нарича диференциално уравнение на Рикати (Riccati).

[1] Разбира се, стойностите на търсената функция y трябва да принадлежат дефиниционната област на функцията t^m.

Ако u е един интеграл на уравнението (1), т. е. ако

$$u'=f_1(x)+f_2(x)\,u+f_3(x)\,u^2, \tag{2}$$

уравнението на Рикати (1) може да се преобразува в уравнение на Бернули с помощта на субституцията

$$y=z+u,$$

където z е нова неизвестна функция. И наистина

$$y'=z'+u'$$

и следователно

$$z'+u'=f_1(x)+f_2(x)(z+u)+f_3(x)(z+u)^2,$$

откъдето, като вземем пред вид (2), намираме

$$z'=[f_2(x)+2f_3(x)\,u]\,z+f_3(x)\,z^2,$$

което е едно уравнение на Бернули.

§ 7. Уравнение на Лагранж

Уравнение от вида

$$y=f(y')\,x+g(y') \tag{1}$$

се нарича уравнение на Лагранж (Lagrange).

Нека функциите $f(t)$ и $g(t)$ са дефинирани и имат непрекъснати първи производни в някоя околност на точката t_0. Ако $f(t_0)-t_0\neq 0$ и $f'(t_0)\,x_0+g'(t_0)\neq 0$, то във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има една и само една функция $y=y(x)$, която притежава непрекъсната втора производна, удовлетворява уравнението (1) и е подчинена на условието $y'(x_0)=t_0$.

Първо ще разгледаме въпроса за единственост. Нека функцията $y=y(x)$ е дефинирана в достатъчно малка околност Δ на точката x_0, притежава непрекъсната втора производна и удовлетворява условията (1) и $y'(x_0)=t_0$. Полагаме $y'(x)=p(x)$. В такъв случай

$$y(x)=f(p)\,x+g(p). \tag{2}$$

Диференцираме спрямо x. Това ни дава

$$p=f(p)+[f'(p)\,x+g'(p)]\,p'(x).$$

Специално при $x=x_0$ получаваме

$$t_0-f(t_0)=[f'(t_0)\,x_0+g'(t_0)]\,p'(x_0)$$

и следователно $p'(x_0)\neq 0$. Оттук, като вземем пред вид, че $t_0-p(x_0)=0$, заключаваме с помощта на теоремата за съществуване на неявни функции и теоремата за съществуване на производни на неявни функции, че във всяка достатъчно малка околност на точката t_0 има функция $\xi(t)$ с непрекъсната производна, която удовлетворява уравнението $t-p[\xi(t)]=0$ и условието $\xi(t_0)=x_0$.

Ако t е достатъчно близо до t_0, то $\xi(t)$ ще принадлежи на Δ и следователно ще имаме

$$p[\xi(t)]=f\{p[\xi(t)]\}+[f'\{p[\xi(t)]\}\,\xi(t)+g'\{p[\xi(t)]\}]\,p'[\xi(t)],$$

откъдето, като вземем пред вид, че

$$p[\xi(t)]=t \quad \text{и} \quad p'[\xi(t)]\,\xi'(t)=1,$$

намираме

$$t=f(t)+[f'(t)\,\xi(t)+g'(t)]\,\frac{1}{\xi'(t)}$$

или още

$$\xi'(t)=\frac{f'(t)}{t-f(t)}\,\xi(t)+\frac{g'(t)}{t-f(t)}. \tag{3}$$

Така полученото уравнение (3) е линейно. То има само едно решение $\xi(t)$, което удовлетворява условието $\xi(t_0)=x_0$. Ние ще използуваме това обстоятелство, за да покажем, че функцията $p(x)$ е също тъй еднозначно определена в достатъчно малка околност на точката x_0. За тази цел вземаме пред вид, че $x_0-\xi(t_0)=0$. От друга страна, $\xi'(t_0)\neq 0$, защото $p'[\xi(t)]\,\xi'(t)=1$. Това ни позволява да заключим, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 съществува (непрекъсната) функция $q(x)$, която удовлетворява уравнението $x-\xi[q(x)]=0$ (и условието $q(x_0)=t_0$). По този начин дефиницията на функцията $q(x)$ зависи от еднозначно определената функция $\xi(t)$, но не зависи ни най-малко от функцията $p(x)$. Полученият резултат ни дава възможност да пишем $x=\xi[q(x)]$ при всички стойности на x, които са достатъчно близо до x_0. Оттук получаваме

$$p(x)=p[\xi(q(x))]=q(x),$$

с което е показано, че функцията $p(x)$ е наистина еднозначно определена в достатъчно малка околност на точката x_0. Най-сетне, като вземем пред вид равенството

$$y(x)=f[p(x)]\,x+g[p(x)],$$

заключаваме, че функцията $y(x)$ е също така еднозначно определена.

За да установим, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 разглежданото уравнение (1) наистина има решение

$y=y(x)$ с непрекъсната втора производна, което удовлетворява условието $y'(x_0)=t_0$, образуваме уравнението (3). Това уравнение е линейно и следователно притежава решение $\xi(t)$, което удовлетворява условието $\xi(t_0)=x_0$, стига t да се мени в достатъчно малка околност G на точката t_0. Равенството (3) ни позволява да заключим, че $\xi'(t)$ е непрекъсната функция на t. От друга страна, $x_0-\xi(t_0)=0$ и

$$\xi'(t_0)=\frac{f'(t_0)\,\xi(t_0)+g'(t_0)}{t_0-f(t_0)}=\frac{f'(t_0)\,x_0+g'(t_0)}{t_0-f(t_0)}\neq 0.$$

Оттук, като използуваме теорията на неявните функции, заключаваме, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 съществува функция $\varphi(x)$ с непрекъсната производна, която удовлетворява условията

$$x-\xi(\varphi(x))=0,$$

$$\varphi(x_0)=t_0.$$

Ако x е достатъчно близо до x_0, $\varphi(x)$ принадлежи на G и следователно

$$\xi'[\varphi(x)]=\frac{f'[\varphi(x)]}{\varphi(x)-f[\varphi(x)]}\,\xi[\varphi(x)]+\frac{g'[\varphi(x)]}{\varphi(x)-f[\varphi(x)]}.$$

От друга страна,

$$\xi[\varphi(x)]=x \quad\text{и}\quad \xi'[\varphi(x)]\,\varphi'(x)=1$$

и следователно

$$\frac{1}{\varphi'(x)}=\frac{f'[\varphi(x)]}{\varphi(x)-f[\varphi(x)]}\,x+\frac{g'[\varphi(x)]}{\varphi(x)-f[\varphi(x)]},$$

откъдето

$$\varphi(x)=f[\varphi(x)]+\{f'[\varphi(x)]+g'[\varphi(x)]\}\,\varphi'(x)$$

или още

(4) $$\varphi(x)=\frac{d}{dx}\{f[\varphi(x)]\,x+g[\varphi(x)]\}.$$

Да разгледаме функцията

(5) $$v(x)=f[\varphi(x)]\,x+g[\varphi(x)].$$

Равенството (4) ни учи, че $y'(x)=\varphi(x)$. Оттук заключаваме следното:

1. Функцията $y(x)$ притежава непрекъсната втора производна, защото функцията $\varphi(x)$ притежава непрекъсната първа производна.

2. $y'(x_0)=t_0$, защото $\varphi(x_0)=t_0$.

3. Равенството (5) ни дава

$$y(x)=f[y'(x)]\,x+g[y'(x)],$$

т. е. функцията $y(x)$ удовлетворява уравнението (1).

По такъв начин показахме, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 уравнението (1) наистина има решение $y(x)$ с непрекъсната втора производна, което удовлетворява условието $y'(x_0)=t_0$.

§ 8. Уравнение на Клеро

Уравнение от вида

(1) $$y=xy'+g(y')$$

се нарича уравнение на Клеро (Clairaut).

Нека функцията $g(t)$ притежава непрекъсната втора производна в някоя околност на точката t_0 и нека $g''(t_0)\neq 0$. Ще покажем, че във всяка достатъчно малка околност на точката $x_0=-g'(t_0)$ съществуват две и само две функции $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$, които имат непрекъснати втори производни, удовлетворяват уравнението (1) и за които $\varphi'(x_0)=t_0$, $\psi'(x_0)=t_0$. И наистина нека y е едно такова решение. Полагаме $y'=p(x)$. Уравнението (1) добива вида

(2) $$y=xp+g(p).$$

Като диференцираме спрямо x, намираме

(3) $$\{x+g'[p(x)]\}\,p'(x)=0.$$

Ако $p'(x_0)\neq 0$, то във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 имаме $p'(x)\neq 0$ и следователно

(4) $$x+g'[p(x)]=0.$$

От друга страна, като вземем пред вид, че

(5) $$x_0+g'(t_0)=0,$$

(6) $$g''(t_0)\neq 0,$$

заключаваме от теорията на неявните функции, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има **само една** непрекъсната функция $p(x)$, която удовлетворява уравнението (4) и условието $p(x_0)=t_0$. След като установихме, че функцията $p(x)$ е еднозначно определена, заключаваме с помощта на равенството (2), че функцията y е също така еднозначно определена.

Преминаваме към случая, когато $p'(x_0)=0$. Да разгледаме функцията

$$\varphi(x)=x+g'[p(x)].$$

В такъв случай

$$\varphi'(x_0)=1+g''[p(x_0)]\,p'(x_0)=1$$

и следователно в достатъчно малка околност на точката x_0 имаме $\varphi'(x)\neq 0$. Оттук заключаваме, че функцията $\varphi(x)$ приема всяка своя стойност само един път. По-специално тя не може да се анулира повече от един път. Това ни позволява да заключим от равенството (3), че в достатъчно малка околност на точката x_0 имаме $p'(x)=0$, т. е.

$$p(x)=\text{const}=p(x_0)=t_0.$$

По такъв начин ние и в този случай виждаме от равенството (2) че функцията y е еднозначно определена. Тя има вида

$$y=t_0x+g(t_0).$$

От направените разсъждения се вижда, че в достатъчно малка околност на точката x_0 не може да има повече от две решения с непрекъснати втори производни, чиито първи производни приемат стойността t_0 в точката x_0.

За да покажем, че наистина съществуват две решения с интересуващите ни свойства, разглеждаме уравнението (4). Като имаме пред вид условията (5) и (6), заключаваме с помощта на теорията на неявните функции, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има функция $p(x)$ с непрекъсната производна, която удовлетворява уравнението (4) и условието $p(x_0)=t_0$.

Разглеждаме функцията

$$y=xp(x)+g[p(x)], \tag{7}$$

която очевидно е добре дефинирана в достатъчно малка околност на точката x_0 и притежава производна. В такъв случай

$$y'=p(x)+\{x+g'[p(x)]\}p'(x)=p(x). \tag{8}$$

Оттук заключаваме, че функцията y притежава непрекъсната втора производна, защото функцията $p(x)$ има непрекъсната първа производна. Най-сетне равенствата (7) и (8) ни дават $y=xy'+g(y')$, т. е. функцията (7) е едно решение на уравнението (1). От друга страна, $y'(x_0)=p(x_0)=t_0$. С това е намерено едно решение на (1), което притежава всички свойства, които ни интересуват. Друго такова решение ни представя линейната функция

$$y=t_0x+g(t_0).$$

Двете намерени решения са сигурно различни, защото функцията (7) не е линейна, както това се вижда от равенството (4), което ни дава

$$1+g''[p(x)]\,p'(x)=0,$$

откъдето $p'(x)\neq 0$ и следователно $y''\neq 0$.

Забележка 1. С директна проверка се вижда, че линейните функции

$$y=Cx+g(C) \tag{9}$$

представляват решения на (1) при всяко x и при всеки избор на константата C от дефиниционната област на $g(t)$.

Фамилията решения (9) се нарича **общ интеграл** на уравнението на Клеро.

Забележка 2. Кривата (7) представлява обвивка на фамилията (9), когато C се мени в достатъчно малка околност на точката t_0. За да се убедим в това, полагаме

$$y_0=t_0x_0+g(t_0)$$

и разглеждаме функцията $F(x, y, C)=Cx+g(C)-y$, която притежава непрекъснати частни производни до втори ред в съседство с точката (x_0, y_0, t_0). Очевидно

$$F(x_0, y_0, t_0)=0,$$

$$F'_C(x_0, y_0, t_0)=x_0+g'(t_0)=0.$$

$$\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{Cx} & F''_{Cy} \end{vmatrix}=1\neq 0,$$

$$F''_{CC}(x_0, y_0, t_0)=g''(t_0)\neq 0.$$

Оттук заключаваме, че уравненията

$$F(x, y, C)=0,$$

$$F'_C(x, y, C)=0$$

дават търсената обвивка. Последните две уравнения обаче са

$$Cx+g(C)-y=0,$$

$$x+g'(C)=0$$

и съвпадат с уравненията (4) и (7).

Функцията (7) се нарича особен интеграл на уравнението на Клеро.

Забележка 3. Ако $x_0\neq -g'(t_0)$, уравнението (3) ни дава $p'(x_0)=0$. В този случай, както видяхме по-горе, уравнението на Клеро няма друго решение в достатъчно малка околност на точката x_0, което да притежава непрекъсната втора производна и да удовлетворява условието $y'(x_0)=t_0$, освен решението

$$y=t_0x+g(t_0).$$

Забележка 4. Освен намерените два пъти диференцуеми решения изобщо съществуват и други, които не притежават втора производна. Така например, означавайки с $\varphi(x)$ функцията (7), можем да конструираме ново решение, като положим

$$y(x)=\varphi(x),$$

когато x е достатъчно близо до x_0, но е по-малко от x_0 и

$$y(x)=t_0x+g(t_0),$$

когато $x \geq x_0$.

§ 9. Интегриращ множител

Нека $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са две функции, които са дефинирани и притежават непрекъснати първи частни производни в някоя околност D на точката (x_0, y_0), и нека $Q(x_0, y_0) \neq 0$. Ще търсим диференцуема функция $y=y(x)$ в достатъчно малка околност на точката x_0, която при $x=x_0$ да приема стойността y_0 и която да удовлетворява уравнението

(1) $$P(x, y)+Q(x, y)y'=0.$$

Ако съществува в D функция $F(x, y)$, която притежава непрекъснати производни поне до втори ред и удовлетворява уравненията

(2) $$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y}=Q(x, y),$$

търсената функция може да се определи като неявна функция на x от уравнението

$$F(x, y)=F(x_0, y_0),$$

тъй като уравнението (1) е удовлетворено тогава и само тогава когато функцията $F(x, y(x))$ е константа.

За да съществува функция $F(x, y)$ с исканите свойства, необходимо е да имаме

(3) $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

тъй като, от една страна,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x},$$

а, от друга,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}.$$

Ще покажем, че условието (3) е и достатъчно за съществуване на функцията $F(x, y)$, която удовлетворява уравненията (2). За тази цел ще отбележим, че уравнението

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x, y)$$

е равносилно с уравнението

$$F(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(t, y)\,dt+\varphi(y),$$

където $\varphi(y)$ е произволна два пъти диференцуема функция на y, която не зависи от x. Така определената функция $F(x, y)$ удовлетворява условието

$$\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x, y)$$

тогава и само тогава, когато

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(t, y)}{\partial y}\,dt+\varphi'(y)=Q(x, y)$$

или

$$\varphi'(y)=Q(x, y)-\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(t, y)}{\partial y}\,dt,$$

т. е. за да съществува функция $F(x, y)$ с исканите свойства, необходимо и достатъчно е функцията

$$\psi(x, y)=Q(x, y)-\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(t, y)}{\partial y}\,dt$$

да не зависи от x, което е сигурно изпълнено, ако

(3) $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

защото в такъв случай

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0.$$

Условието (3) се нарича условие за интегруемост на уравнението (1).

Една функция $\mu(x, y)$, която притежава непрекъснати частни производни поне до втори ред и не се анулира в D, се нарича **интегриращ множител** на уравнението (1), когато уравнението

$$\mu P + \mu Q y' = 0$$

удовлетворява условието за интегруемост, т. е. когато

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

или още

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

За да притежава уравнението (1) интегриращ множител, зависещ само от x, необходимо и достатъчно е да съществува функция $\mu = \mu(x)$, която не зависи от y и за която е изпълнено уравнението

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{d\mu}{dx} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

или

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q},$$

за тази цел пък необходимо и достатъчно е отношението

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

да не зависи от y.

§ 10. Съществуване и единственост на решенията на линейните диференциални уравнения от n-ти ред при дадени начални условия

Уравнение от вида

(1) $$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \cdots + p_n(x) y = f(x),$$

където $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ и $f(x)$ са дадени непрекъснати функции на x в някой интервал Δ, а y е неизвестна функция, се нарича линейно диференциално уравнение от n-ти ред. Нека x_0 е произволна точка от Δ и $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ са произволни константи. Ще покажем, че диференциалното уравнение (1) притежава едно и само едно решение $y = y(x)$ в интервала Δ, което удовлетворява условията

(2) $$y(x_0) = a_0,\ y'(x_0) = a_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}.$$

Най-напред ще разгледаме въпроса за единственост. За целта ще допуснем, че поставената задача има решение, и ще положим

(3) $$y^{(n)}(x) = \varphi(x).$$

В такъв случай

(4) $$y(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{a_\nu}{\nu!}(x-x_0)^\nu + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} \varphi(t)(x-t)^{n-1}\,dt,$$

което се вижда без всякакъв труд например индуктивно с интегриране по части. Оттук получаваме при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

(5) $$y^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n-k-1} \frac{a_{k+\nu}}{\nu!}(x-x_0)^\nu + \frac{1}{(n-k-1)!}\int_{x_0}^{x} \varphi(t)(x-t)^{n-k-1}\,dt.$$

Заместваме $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y$ в (1) с равните им от (3) и (5). Това ни дава

(6) $$\varphi(x) = g(x) + \int_{x_0}^{x} K(x, t)\varphi(t)\,dt,$$

където

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} p_k(x) \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{a_{n+\nu-k}}{\nu!}(x-x_0)^\nu$$

и

$$K(x, t) = -\sum_{\nu=1}^{n} \frac{p_\nu(x)(x-t)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}.$$

Очевидно $g(x)$ и $K(x, t)$ са непрекъснати функции.

Ще покажем, че уравнението (6) не може да има повече от едно решение. И наистина нека $\psi(x)$ е още едно решение на уравнението (6), т. е.

$$\psi(x) = g(x) + \int_{x_0}^{x} K(x, t)\psi(t)\,dt.$$

В такъв случай

(7) $$\varphi(x) - \psi(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, t)[\varphi(t) - \psi(t)]\,dt.$$

От друга страна, функцията $K(x, t)$ е непрекъсната и следователно функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ са също тъй непрекъснати. Да означим с M една горна граница на $|K(x,t)|$, а с A една горна граница на $|\varphi(x)-\psi(x)|$, когато x се мени в произволен краен[1] и затворен подинтервал D на Δ и t принадлежи на интервала $[x_0, x]$, респ. $[x, x_0]$. В такъв случай уравнението (7) ни дава

(8) $$|\varphi(x)-\psi(x)| \leq MA|x-x_0|.$$

Като използуваме още веднъж уравнението (7) и като вземем пред вид оценката (8), ще получим

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} M.MA(t-x_0)\,dt \right| = \frac{M^2A(x-x_0)^2}{2!}.$$

Като продължаваме тези разсъждения, получаваме изобщо

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \leq \frac{M^nA|x-x_0|^n}{n!}$$

и следователно $\varphi(x)-\psi(x)=0$, защото

$$\frac{M^nA|x-x_0|^n}{n!}$$

е общ член на един сходящ ред и следователно клони към нула когато n расте неограничено. И така уравнението (6) не може да има повече от едно решение. Този резултат и равенството (4) ни учат, че и уравнението (1) не може да има повече от едно решение, което удовлетворява условията (2).

Преминаваме към въпроса за съществуване на решение на уравнението (1) при допълнителните условия (2). За целта ще приложим към уравнението (6) метода на последователните приближения.

Разглеждаме редицата

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots,$$

за която $\varphi_0(x)$ е произволна непрекъсната функция в интервала Δ, а $\varphi_{n+1}(x)$ се дефинира чрез $\varphi_n(x)$ посредством равенството

(9) $$\varphi_{n+1}(x)=g(x)+\int_{x_0}^{x} K(x, t)\varphi_n(t)\,dt.$$

[1] Самият интервал Δ не е задължен да бъде нито краен, нито затворен.

В такъв случай

$$\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)=\int_{x_0}^{x} K(x, t)[\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)]\,dt.$$

Да означим с M една горна граница на $|K(x, t)|$ и с A една горна граница на $|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|$, когато x се мени в кой да е краен и затворен подинтервал D на интервала Δ. В такъв случай получаваме последователно

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)| \leq MA|x-x_0|,$$

$$|\varphi_3(x)-\varphi_2(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} M.MA(t-x_0)\,dt \right| \leq \frac{M^2A(x-x_0)^2}{2!},$$

$$|\varphi_4(x)-\varphi_3(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} M\frac{M^2A(t-x_0)^2}{2!}\,dt \right| = \frac{M^3A|x-x_0|^3}{3!},$$

. . . .

$$|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| \leq \frac{AM^n|x-x_0|^n}{n!}.$$

Тези неравенства ни осигуряват равномерната сходимост в D на реда

$$\varphi_0(x)+[\varphi_1(x)-\varphi_0(x)]+[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]+\cdots+$$
$$+[\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)]+\cdots,$$

а следователно и равномерната сходимост на редицата от частичните му суми

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots$$

Да положим

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x).$$

В такъв случай, ако извършим граничен преход в уравнението (9), ще получим

(6) $$\varphi(x)=g(x)+\int_{x_0}^{x} K(x, t)\varphi(t)\,dt.$$

След като е дефинирана по такъв начин функцията $\varphi(t)$, разглеждаме функцията

$$(10) \qquad y(x)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{a_\nu}{\nu!}(x-x_0)^\nu+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}\varphi(t)(x-t)^{n-1}\,dt.$$

Тази функция удовлетворява условията

$$y(x_0)=a_0,\ y'(x_0)=a_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0)+a_{n-1},$$

което се вижда с непосредствена проверка. Тя обаче удовлетворява и уравнението (1), защото, замествайки y с равното му от (10) в (1), ще получим (6), което е изпълнено съгласно дефиницията на $\varphi(x)$. По такъв начин установихме съществуването на решението на уравнението (1) при допълнителните условия (2).

Ако оставим произволните константи $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ да се менят, получаваме всичките решения на уравнението (1). Оттук става ясно, че общото решение на уравнението (1) зависи от n произволни константи.

§ 11. Фундаментална система на едно линейно диференциално уравнение от n-ти ред

Нека

$$(1) \qquad y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+p_n(x)y=f(x)$$

е едно линейно диференциално уравнение, където $p_1(x), \ldots p_n(x)$ и $f(x)$ са дадени непрекъснати функции в някой интервал Δ. Нека y_0 е едно решение на уравнението (1), т. е.

$$y_0^{(n)}+p_1(x)y_0^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y_0=f(x).$$

Ако извършим субституцията

$$(2) \qquad y=z+y_0$$

в уравнението (1), ще получим

$$(3) \qquad z^{(n)}+p_1(x)z^{(n-1)}+p_2(x)z^{(n-2)}+\cdots+p_n(x)z=0.$$

Това е пак едно линейно уравнение. То обаче е по-просто от уравнението (1) в това отношение, че дясната му страна е равна на нула. Такова линейно уравнение се нарича хомогенно.

Ако $z_1, z_2, \ldots, z_k$ са решения на уравнението (3) и $C_1, C_2, \ldots, C_k$ са константи, функцията

$$z=C_1z_1+C_2z_2+\cdots+C_kz_k$$

е пак решение на уравнението (3), защото

$$z^{(n)}+p_1(x)z^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)z=$$
$$=C_1(z_1^{(n)}+p_1(x)z_1^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)z_1)+$$

$$+C_2(z_2^{(n)}+p_1(x)z_2^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)z_2)+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+C_k(z_k^{(n)}+p_1(x)z_k^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)z_k)=\mathbf{0}.$$

Ще установим сега следното важно свойство на хомогенните линейни уравнения: ако $z_1, z_2, \ldots, z_n, z$ са $n+1$ решения на едно хомогенно линейно уравнение от n-ти ред, то могат да се намерят $n+1$ константи $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda$, от които поне една е различна от нула, по такъв начин, че да имаме тъждествено

$$(4) \qquad \lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\cdots+\lambda_nz_n+\lambda z=0.$$

За да докажем това, разглеждаме $n+1$ решения $z_1, z_2, \ldots z_n, z$ на уравнението (3). Избираме произволно една точка x_0 в интервала Δ и означаваме с $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda$ едно нетривиално решение на системата

$$\lambda_1z_1(x_0)+\lambda_2z_2(x_0)+\cdots+\lambda_nz_n(x_0)+\lambda z(x_0)=0,$$
$$\lambda_1z_1'(x_0)+\lambda_2z_2'(x_0)+\cdots+\lambda_nz_n'(x_0)+\lambda z'(x_0)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_1z_1^{(n-1)}(x_0)+\lambda_2z_2^{(n-1)}(x_0)+\cdots+\lambda_nz_n^{(n-1)}(x_0)+\lambda z^{(n-1)}(x_0)=\mathbf{0}.$$

Както е известно от алгебрата, такова решение сигурно съществува. Образуваме помощната функция

$$\varphi(x)=\lambda_1z_1(x)+\lambda_2z_2(x)+\cdots+\lambda_nz_n(x)+\lambda z(x).$$

Тази функция удовлетворява уравнението

$$\varphi^{(n)}(x)+p_1(x)\varphi^{(n-1)}(x)+\cdots+p_n(x)\varphi(x)=\mathbf{0}$$

и условията

$$(5) \qquad \varphi(x_0)=\varphi'(x_0)=\cdots=\varphi^{(n-1)}(x_0)=\mathbf{0}.$$

Константата нула обаче също тъй удовлетворява уравнението (3) и условията (5) и следователно съгласно теоремата за единствеността, която доказахме в предния параграф, функцията $\varphi(x)$ се анулира тъждествено. Така ние успяхме да намерим $n+1$ константи $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda$, от които поне една е различна от нула, по такъв начин, че да е изпълнено условието (4) при всяко x от Δ.

Ако функциите $z_1, z_2, \ldots, z_n$ са линейно независими в Δ, т. е. ако не могат да се намерят n константи $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, от които поне едната е различна от нула, по такъв начин, че да имаме

$$\mu_1z_1+\mu_2z_2+\cdots+\mu_nz_n=0$$

при всяко x от Δ, коефициентът λ в зависимостта (4) е различен от нула. Това обстоятелство ни позволява да пишем

$$z=C_1z_1+C_2z_2+\cdots+C_nz_n,$$

където

$$C_1=-\frac{\lambda_1}{\lambda},\quad C_2=-\frac{\lambda_2}{\lambda},\ldots,\quad C_n=-\frac{\lambda_n}{\lambda}.$$

Оттук и от (2) добиваме възможност да представим общото решение на уравнението (1) във вида

$$y=y_0+C_1z_1+C_2z_2+\cdots+C_nz_n.$$

По такъв начин въпросът за намиране на общото решение на уравнението (1) се свежда към намирането на едно негово частно решение и на n линейно независими решения на хомогенното уравнение (3).

Една система от n линейно независими решения на едно хомогенно линейно уравнение от n-ти ред се нарича негова фундаментална система. За да установим съществуването на една фундаментална система от уравнението (3), избираме n^2 на брой числа a_{ik}, където i и k приемат цели положителни стойности между 1 и n, по такъв начин, че

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\cdots a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0.$$

След това, като се основаваме на доказаната по-горе теорема за съществуване, построяваме n решения, $z_1, z_2,\ldots, z_n$, които удовлетворяват условията

$$z_\nu(x_0)=a_{1\nu},\ z_\nu'(x_0)=a_{2\nu},\ldots,\ z_\nu^{(n-1)}(x_0)=a_{n\nu}$$

при $\nu=1, 2,\ldots, n$, където x_0 е точка от Δ. Така построените функции $z_1, z_2,\ldots, z_n$ са сигурно линейни независими в Δ. И наистина да допуснем, че съществуват такива n числа $\mu_1, \mu_2,\ldots,\mu_n$, от които поне едно е различно от нула, че да имаме

$$(7)\qquad \mu_1z_1+\mu_2z_2+\cdots+\mu_nz_n=0$$

при всяко x от Δ. Като диференцираме това равенство последователно $n-1$ пъти, ще получим

$$\mu_1z_1'+\mu_2z_2'+\cdots+\mu_nz_n'=0,$$

$$\mu_1z_1''+\mu_2z_2''+\cdots+\mu_nz_n''=0,$$

$$\mu_1z_1^{(n-1)}+\mu_2z_2^{(n-1)}+\cdots+\mu_nz_n^{(n-1)}=0.$$

Тези уравнения заедно с уравнението (7) дават при $x=x_0$

$$a_{11}\mu_1+a_{12}\mu_2+\cdots+a_{1n}\mu_n=0,$$
$$a_{21}\mu_1+a_{22}\mu_2+\cdots+a_{2n}\mu_n=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}\mu_1+a_{n2}\mu_2+\cdots+a_{nn}\mu_n=0,$$

което не е възможно, защото детерминантата (6) е различна от нула.

§ 12. Линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти

Нека в линейното и хомогенно уравнение

$$(1)\qquad y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_ny=0$$

коефициентите $p_1, p_2,\ldots, p_n$ са константи. Ще търсим една негова фундаментална система. За тази цел ще се опитаме да го удовлетворим с функции от вида

$$y=e^{\alpha x},$$

където α е константа. Като заместим y с равното му, ще получим

$$e^{\alpha x}(\alpha^n+p_1\alpha^{n-1}+p_2\alpha^{n-2}+\cdots+p_n)=0.$$

Това уравнение е удовлетворено тогава и само тогава, когато е удовлетворено уравнението

$$(2)\qquad \alpha^n+p_1\alpha^{n-1}+p_2\alpha^{n-2}+\cdots+p_n=0.$$

Така полученото уравнение (2) се нарича характеристично уравнение на уравнението (1).

Да разгледаме случая, когато корените $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n$ на уравнението (2) са реални и прости. Ще докажем, че решенията

$$e^{\alpha_1x},\ e^{\alpha_2x},\ldots,\ e^{\alpha_nx}$$

на уравнението (1) образуват една негова фундаментална система. И наистина да допуснем, че съществуват такива константи $\mu_1, \mu_2,\ldots,\mu_n$, от които поне едната, например μ_n, е различна от нула, така че да имаме тъждествено

$$\mu_1e^{\alpha_1x}+\mu_2e^{\alpha_2x}+\cdots+\mu_ne^{\alpha_nx}=0.$$

Ако разделим с e^{α_1x} и диференцираме спрямо x, ще получим

$$\mu_2(\alpha_2-\alpha_1)e^{(\alpha_2-\alpha_1)x}+\mu_3(\alpha_3-\alpha_1)e^{(\alpha_3-\alpha_1)x}+\cdots+\mu_n(\alpha_n-\alpha_1)e^{(\alpha_n-\alpha_1)x}=0.$$

Делим полученото равенство с $e^{(\alpha_2-\alpha_1)x}$ и пак диференцираме спрямо x. В такъв случай получаваме

$$\mu_3(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)\,e^{(\alpha_3-\alpha_2)x}+\dots+\mu_n(\alpha_n-\alpha_1)\,(\alpha_n-\alpha_2)\,e^{(\alpha_n-\alpha_2)x}=0$$

и т. н. Продължаваме тези пресмятания и най-сетне получаваме

$$\mu_n(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\dots(\alpha_n-\alpha_{n-1})\,e^{(\alpha_n-\alpha_{n-1})x}=0,$$

което очевидно не е вярно.

И така функциите $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ наистина образуват една фундаментална система решения на уравнението (1) и следователно общото му решение ще има вида

$$y=C_1e^{\alpha_1 x}+C_2e^{\alpha_2 x}+\dots+C_ne^{\alpha_n x}.$$

Характеристичното уравнение може да се използува, за да се намери една фундаментална система на уравнението (1) и тогава, когато не всичките му корени са реални и прости. За да съкратим изложението, ще изясним това в случая, когато уравнението (1) е от втори ред, т. е. когато то има вида

$$y''+p_1y'+p_2y=0. \tag{3}$$

В този случай характеристичното му уравнение е

$$\alpha^2+p_1\alpha+p_2=0. \tag{4}$$

По-горе разгледахме случая, когато корените α_1 и α_2 на това уравнение са реални и прости, и видяхме, че общото решение на уравнението (3) е

$$y=C_1e^{\alpha_1 x}+C_2e^{\alpha_2 x}. \tag{5}$$

Сега ще разгледаме случая, когато корените на уравнението (4) не са реални и прости, т. е. когато

$$p_1^2-4p_2\leqq 0.$$

За да не напишем много, ще положим

$$p_2-\frac{p_1^2}{4}=a^2$$

и ще направим субституцията

$$y=ze^{-\frac{p_1}{2}x}.$$

В такъв случай уравнението (3) приема вида

$$z''+a^2z=0. \tag{6}$$

Ако $a=0$, то $z''=0$ и следователно z има вида

$$z=C_1x+C_2,$$

където C_1 и C_2 са константи. По такъв начин намираме

$$y=(C_1x+C_2)e^{-\frac{p_1}{2}x}.$$

Преминаваме към случая, когато $a^2>0$. С непосредствена проверка се вижда, че функциите

$$z_1=\cos ax,$$

$$z_2=\sin ax \tag{7}$$

а две решения на уравнението (6). Ние ще покажем, че те са линейно независими. И наистина, ако допуснем, че при някой избор на константите μ_1 и μ_2 имаме

$$\mu_1\cos ax+\mu_2\sin ax=0$$

при всяко x, то чрез диференциране намираме

$$-a\mu_1\sin ax+a\mu_2\cos ax=0.$$

От друга страна,

$$\begin{vmatrix}\cos ax & \sin ax\\ -a\sin ax & a\cos ax\end{vmatrix}=a\neq 0$$

и следователно $\mu_1=\mu_2=0$. С това е установено, че решенията (7) на уравнението (6) образуват една негова фундаментална система. По такъв начин общото решение на уравнението (6) е

$$z=A\cos ax+B\sin ax,$$

където A и B са две произволни константи. Оттук заключаваме, че общото решение на уравнението (3) е

$$y=e^{\frac{p_1x}{2}}(A\cos ax+B\sin ax).$$

Полученият резултат може да се представи в друга форма, като се дефинира показателната функция за комплексни стойности на показателя. Това може да стане, като положим по дефиниция

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

при всички реални стойности на x и y. В такъв случай ще имаме

$$e^{\alpha_1 x}=e^{-\frac{p_1}{2}x}(\cos ax+i\sin ax),$$

(8)
$$e^{\alpha_2 x}=e^{-\frac{p_1}{2}x}(\cos ax-i\sin ax),$$

където
$$\alpha_1=-\frac{p_1}{2}+ai,$$
$$\alpha_2=-\frac{p_1}{2}-ai$$

са двата корена на характеристичното уравнение (4). Равенствата (8) ни позволяват да представим общото решение на уравнението (3) във вида
$$y=C_1e^{\alpha_1 x}+C_2e^{\alpha_2 x},$$

където
$$C_1=\frac{A-iB}{2},\quad C_2=\frac{A+iB}{2},$$

т. е. формулата (5) може да се използува и тогава, когато корените на характеристичното уравнение (4) не са реални.

Ние вече отбелязахме по-горе, че и в случая, когато разглежданото линейно уравнение с постоянни коефициенти е от n-ти ред, може да са намери една негова фундаментална система, каквито и да се корените на характеристичното му уравнение. Ние няма обаче да се спираме върху този въпрос, при все че решението му не е свързано с някакви трудности.

ИЗПОЛЗУВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Брадистилов, Г. — Сборник от задачи и теореми по диференциално и интегрално смятане, част I и II, София, 1947.
2. Гребенча, М. К., С. И. Новоселов — Курс математического анализа, т. I, Москва, 1948, т. II, 1949.
3. Гюнтер, Н. М. и Р. О. Кузьмин — Сборник задач по высшей математике, т. I и II, Москва — Ленинград, 1949.
4. Ковалевский, Г. — Основы дифференциального и интегрального исчислений, Одесса, 1911.
5. Лузин, Н. И. — Дифференциальное исчисление, Москва, 1946.
6. Лузин, Н. И. — Интегральное исчисление, Москва, 1946.
7. Немыцкий, В., М. Слудская, А. Черкасов — Курс математического анализа, т. I и II, издание второе.
8. Попов, К. — Учебник по диференциално и интегрално смятане, София.
9. Фихтенгольц, Г. М. — Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II и III, Москва — Ленинград, 1948.
10. Чезаро, Э. — Элементарный учебник алгебрического анализа и исчисления бесконечно малых, часть I и II, Одесса, 1913.
11. Шифф, В. — Сборник упражнений и задач по дифференциальному и интегральному исчислениям, ч. I и II, Москва, 1910.
12. Baire, R. — Leçons sur les théories générales de l'analyse, t. I, II, Paris, 1908
13. Braby, M. — Exercices méthodiques de calcul différentiel, Paris, 1895.
14. Courant, R. — Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. I, II, Berlin, 1929.
15. Fabry, E. — Problèmes et exercices de mathématiques générales, Paris, 1918.
16. Goursat, E. — Cours d'analyse mathématique, t. I, Paris, 1910.
17. Hardy, G. H. — A course of pure mathematis.
18. Tisserand, F. — Recueil complementaire d'exercices sur le calcul infinitésimal, Paris, 1933.
19. Knopp, K. — Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin, 1931.
20. Landau, E. — Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung, 1934.
21. Mangoldt, H., K. Knopp — Einführung in die höhere Mathematik, Bd. I, II, III, Leipzig, 1942.
22. Pólya G., Szegö, G. — Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. I, II, Berlin, 1925.
23. Jordan, C. — Cours d'analyse de l'école polytechnique, t. I, Paris, 1909.
24. Artin, E. — Einführung in die Theorie der Gammafunktion, Leipzig, 1931.

СЪДЪРЖАНИЕ

Ярослав Александров Тагамлицки
ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ
Шесто издание

Художествен редактор Светлозар Писаров
Технически редактор Стела Петрова
Коректор Бияна Василева

Дадена за набор на 26. VIII. 1977 г. Подписана за печат на 10. II. 1978 г. Излязла от печат на 28. II. 1978 г. Формат 16/60/90 Печатни коли 28 Издателски коли 28 Издателски № 23723 Литературна група I-4 Тираж 8076

Цена 1,68 лв. КОД 02 $\frac{9534E\ 71511}{4790-96-78}$

ДИ „Наука и изкуство"
ДП „Тодор Димитров" кл. Лозенец