Проф. ЯРОСЛАВ ТАГАМЛИЦКИ

# Интегрално смятане

ШЕСТО ИЗДАНИЕ

ИЗДАТЕЛСТВО НАУКА И ИЗКУСТВО СОФИЯ 1978

ЧАСТ I

# ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ — ПРОСТИ ИНТЕГРАЛИ

## Глава I

## НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

### § 1. Увод

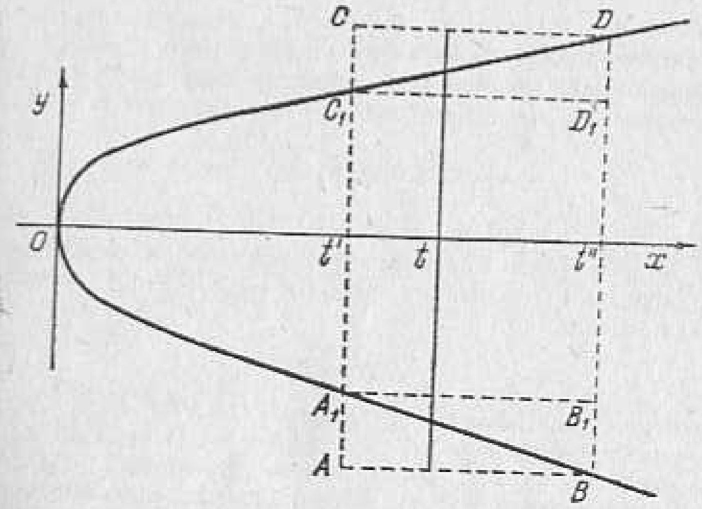
Читателят вече е имал случай да се запознае с някои от многобройните приложения на понятието производна. Сега ще направим още едно приложение, във връзка с което ще повдигнем един основен въпрос. Задачата, която ще решим, е следната: дадена е параболата

$$y^2=2px,\ p>0;$$

да се намери лицето на сегмента ѝ, който се отсича от правата с уравнение

$$x=t,$$

където $t$ е неотрицателна константа (вж. черт. 1).




Черт. 1

Да означим търсеното лице с $F(t)$. Ние избираме това означение, защото търсеното лице зависи от избора на $t$. Ще покажем, че функцията $F(t)$ има производна при всяко неотрицателно $t$ и ще пресметнем стойността на тази производна. За тази цел фиксираме едно число $t$ и избираме две неотрицателни числа $t'$ и $t''$ така, че да имаме

$$t' \leq t \leq t''$$

и

$$t' \neq t''.$$

Очевидно лицето $\sigma$ на ивицата, която е заградена от параболата и от правите $x=t'$ и $x=t''$, има стойност

$$\sigma = F(t'') - F(t').$$

От друга страна, имаме неравенствата лицето на правоъгълника $A_1B_1C_1D_1 \leq \sigma <$ лицето на правоъгълника $ABCD$, т. е.

$$2\sqrt{2pt'}\,(t''-t') \leq \sigma < 2\sqrt{2pt''}\,(t''-t'),$$

откъдето

$$2\sqrt{2pt'} \leq \frac{F(t'')-F(t')}{t''-t'} < 2\sqrt{2pt''}. \tag{1}$$

Да оставим $t'$ и $t''$ да клонят към $t$ чрез две произволни редици от стойности, като при това

$$t' \leq t \leq t'', \quad t'' \neq t'.$$

Като вземем пред вид, че както $2\sqrt{2pt'}$, така и $2\sqrt{2pt''}$ клонят към една и съща граница (тази обща граница има стойност $2\sqrt{2pt}$), заключаваме, че отношението

$$\frac{F(t'')-F(t')}{t''-t'}$$

също притежава граница, когато $t'\to t$ и $t''\to t$. С това ние показахме, че функцията $F(t)$ има производна в разглежданата точка $t$. Извършвайки граничния преход $t'\to t$ и $t''\to t$ в неравенството (1), заключаваме, че

$$F'(t) = 2\sqrt{2pt}. \tag{2}$$

Нашата цел е да намерим функцията (лицето) $F(t)$. Засега ние намерихме производната на тази функция. И така пред нас изниква следната задача. Да се намери функцията $F(t)$, когато е дадена производната ѝ $F'(t)$. Досега (в диференциалното смятане) се занимавахме главно с въпроса за намиране на производните на дадени функции. Сега ние за пръв път се натъкваме на обратната задача. Тази обратна задача представлява един от основните въпроси, с които се занимава така нареченото интегрално смятане.



Равенството (2) е установено при всички неотрицателни стойности на $t$. От друга страна, не е трудно да се види, че производната на функцията

$$\frac{4\sqrt{2p}}{3}t^{\frac{3}{2}}$$

е също $2\sqrt{2pt}$ при $t \geq 0$. Оттук заключаваме, че разликата

$$\varphi(t) = F(t) - \frac{4\sqrt{2p}}{3}t^{\frac{3}{2}}$$

е константа, защото

$$\varphi'(t) = F'(t) - 2\sqrt{2pt} = 0.$$

И така при всички неотрицателни стойности на $t$ имаме

$$\varphi(t) = \varphi(0).$$

Като вземем пред вид, че $F(0)=0$, намираме

$$F(t) - \frac{4\sqrt{2p}}{3}t^{\frac{3}{2}} = 0$$

или

$$F(t) = \frac{4\sqrt{2p}}{3}t^{\frac{3}{2}}.$$

С това ние решихме поставената задача. При това решението на тази задача се сведе съществено към въпроса за намиране на функцията $F(t)$ в даден интервал, когато е дадена производната $F'(t)$ в този интервал.

## § 2. Неопределен интеграл

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в един интервал $\Delta$. Казваме, че една диференцуема функция $F(t)$ е примитивна функция на $f(x)$ (или неопределен интеграл от $f(x)$) в този интервал, когато при всички стойности на $x$ от разглеждания интервал имаме

$$F'(x) = f(x).$$

За да изразим, че $F(x)$ е една примитивна функция на $f(x)$, пишем обикновено

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

(четете — интеграл от еф икс де икс).

Така например

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$$

върху цялата ос $x$, защото

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2.$$

С това обаче не се изчерпват примитивните функции на функцията $x^2$. Така при всеки избор на константата $C$ имаме

$$\int x^2\, dx = \frac{x^2}{3} + C,$$

защото

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2.$$

Изобщо, ако $F(x)$ е една примитивна функция на $f(x)$ в някой интервал $\Delta$, то $F(x)+C$ е пак примитивна функция на $f(x)$ в този интервал, и то при всеки избор на константата $C$, защото

$$[F(x)+C]' = F'(x) = f(x).$$

За нас обаче е особено важно, че функцията $f(x)$ няма други примитивни функции в разглеждания интервал. И наистина, ако $F_1(x)$ е също една примитивна функция на $f(x)$ в интервала $\Delta$, то разликата на двете функции $F(x)$ и $F_1(x)$ е константа, защото функциите $F(x)$ и $F_1(x)$ имат една и съща производна и следователно производната на разликата им е нула.

От дефиницията на понятието неопределен интеграл имаме

$$\left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x) \tag{1}$$

и следователно

$$d\int f(x)\, dx = f(x)\, dx, \tag{2}$$

защото

$$d\int f(x)\, dx = \left(\int f(x)\, dx\right)' dx = f(x)\, dx.$$

Нека $\varphi(x)$ е една диференцуема функция на $x$. В бъдеще вместо интеграла

$$\int f(x)\, \varphi'(x)\, dx$$

ние често ще пишем символа



$$\int f(x)\, d\varphi(x).$$

Освен това ние ще си служим и с други[1] опростявания в означенията. Така под

$$\int d\varphi(x)$$

ще разбираме

$$\int 1\, d\varphi(x)$$

и пр. При този начин на означаване имаме

$$\int dF(x) = F(x) + C, \tag{3}$$

защото това равенство изразява, че

$$\int F'(x)\, dx = F(x) + C, \tag{4}$$

нещо, което е вярно, защото двете функции

$$\int F'(x)\, dx \quad \text{и} \quad F(x)$$

имат една и съща производна и следователно се отличават с една адитивна (прибавъчна) константа.

Читателят трябва да помни равенствата (1), (2), (3) и (4), които изразяват в същност, че действията диференциране и интегриране са обратни едно на друго.

Разбира се, не всяка функция притежава неопределен интеграл. За да се убедим в това, разглеждаме функцията $f(x)$, дефинирана при всички стойности на $x$ по следния начин: $f(x)=1$ при $x \geq 0$ и $f(x)=-1$ при $x<0$. Ако допуснем, че функцията $f(x)$ притежава неопределен интеграл $F(x)$ (например върху цялата ос $x$), въз основа на теоремата за крайните нараствания получаваме

$$F(1) - F(0) = 1,$$

$$F(0) - F(-1) = -1,$$

откъдето

$$F(1) - F(-1) = 0.$$

[1] Ще споменем още, че вместо $\int \frac{1}{f(x)}\, dx$ ние често ще пишем $\int \frac{dx}{f(x)}$ и пр. Най-сетне налага се да споменем, че ако една примитивна функция $F(x)$ се търси при всяко $x$, ние няма изрично да посочваме интервала, в който тя се търси.

Последното равенство обаче противоречи на теоремата на Рол, защото функцията $F'(x)=f(x)$ не се анулира никъде.

С оглед на нашите непосредствени цели е полезно да отбележим още сега, че ако една функция $f(x)$ е развиваема в степенен ред

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

в отворения интервал $-a<x<a$, то тя сигурно притежава примитивна функция в този интервал. За да се убедим в това, достатъчно е да вземем пред вид, че редът

$$F(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1} x^{\nu+1}$$

е сходящ[1] при $-a<x<a$ и че теоремата за диференциране на степенните редове ни дава $F'(x)=f(x)$.

По-късно ще докажем една много по-обща теорема, според която, ако една функция $f(x)$ е непрекъсната в един интервал $\Delta$, тя притежава примитивна функция в този интервал.

## § 3. Таблица на основните интеграли

Читателят лесно ще провери сам валидността на следните формули във всеки интервал, в който е дефинирана подинтегралната[2] функция (за целта е достатъчно да се използува дефиницията на понятието неопределен интеграл, като се покаже, че производната на дясната страна във всяко едно от равенствата е равна на съответната подинтегрална функция):

1) $$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{при } n\neq -1$$

във всеки интервал, в който $x^n$ има смисъл;

2) $$\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$$

[1] Двата степенни реда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1} x^{\nu+1},$$

както знаем, имат един и същ радиус на сходимост, защото първият ред може формално да се получи от втория чрез почленно диференциране.

[2] Функцията $f(x)$ в символа $\int f(x)\,dx$ се нарича подинтегрална функция.



във всеки интервал, който не съдържа началото;

3) $$\int e^x\,dx=e^x+C$$

във всеки интервал;

4) $$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$$

във всеки интервал;

5) $$\int \cos x\,dx=\sin x+C$$

във всеки интервал;

6) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C$$

във всеки интервал, в който $\cos x\neq 0$;

7) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$$

във всеки интервал, в който $\sin x\neq 0$;

8) $$\int \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x+C$$

във всеки интервал;

9) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$$

във всеки подинтервал на интервала $-1<x<1$;

10) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$$

във всеки интервал, в който $|x|>1$;

11) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$$

във всеки интервал.

За пример ще установим само формулата

(1) $$\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C,$$

която е валидна във всеки интервал $\Delta$, който не съдържа началото.

Нека интервалът $\Delta$ е разположен вдясно от началото. Тогава $|x|=x$ и следователно

$$(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x},$$

с което равенството (1) е установено в този случай. Нека интервалът $\Delta$ е разположен отляво на началото. Тогава $|x|=-x$ и следователно

$$(\ln|x|)'=(\ln(-x))'=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x},$$

с което равенството (1) е установено и за случая, когато интервалът $\Delta$ се намира вляво от началото.

Формулите, които разгледахме в този параграф, са основни и читателят трябва добре да ги помни.

## § 4. Елементарни свойства на неопределените интеграли

В този параграф ние ще разгледаме някои прости свойства на неопределените интеграли.

I. Нека функциите $f_1(x)$ и $f_2(x)$ притежават неопределени интеграли в някой интервал $\Delta$. В такъв случай функцията $f_1(x)+f_2(x)$ също притежава неопределен интеграл в $\Delta$ и[1]

$$\int[f_1(x)+f_2(x)]\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx+C. \tag{1}$$

Доказателство. И наистина функцията

$$\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx$$

е един неопределен интеграл на функцията

$$f_1(x)+f_2(x),$$

защото

$$\left(\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx\right)'=\left(\int f_1(x)\,dx\right)'+\left(\int f_2(x)\,dx\right)'=f_1(x)+f_2(x).$$

II. Нека функцията $f(x)$ притежава неопределен интеграл в някой интервал $\Delta$. В такъв случай функцията $af(x)$, където $a$ е константа, също притежава неопределен интеграл в $\Delta$ и

[1] Ние често няма да пишем интеграционните константи (но, разбира се, ще ги помним). Така ние често ще пишем равенството (1) във вида

$$\int[f_1(x)+f_2(x)]\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx.$$



$$\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx+C.$$

Доказателство. И наистина функцията

$$a\int f(x)\,dx$$

е един неопределен интеграл на функцията

$$af(x),$$

защото

$$\left(a\int f(x)\,dx\right)'=a\left(\int f(x)\,dx\right)'=af(x).$$

Пример 1.[1]

$$\int(x^3+5x^2-4x+7)\,dx=\int x^3dx+5\int x^2dx-4\int x\,dx+7\int dx=$$
$$=\frac{x^4}{4}+\frac{5}{3}x^3-2x^2+7x+C.$$

Пример 2.

$$\int(x^2-1)^2dx=\int(x^4-2x^2+1)\,dx=\int x^4dx-2\int x^2dx+\int dx=$$
$$=\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+x+C.$$

Пример 3.

$$\int\frac{(x+2)(x^2-3)}{2x^2}\,dx=\int\frac{x^3+2x^2-3x-6}{2x^2}\,dx=$$
$$=\int\left(\frac{x}{2}+1-\frac{3}{2x}-\frac{3}{x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\int x\,dx+\int dx-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x}-3\int x^{-2}\,dx=$$
$$=\frac{1}{4}x^2+x-\frac{3}{2}\ln|x|+3x^{-1}+C.$$

III. Нека функцията $f(u)$ има примитивна функция в интервала $\Delta$, нека функцията $\varphi(x)$ е диференцуема в интервала $\Delta'$ и нека стойностите на $\varphi(x)$ не напускат интервала $\Delta$, когато $x$ се мени в $\Delta'$. При тези предположения ще покажем, че функцията

$$f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)$$

притежава неопределен интеграл в интервала $\Delta'$ и ако положим

$$F(u)=\int f(u)\,du,$$

[1] Читателят трябва да разгледа всички примери в този параграф и да запомни как става интегрирането на по-сложните от тях.

то

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = F[\varphi(x)] + C \tag{2}$$

при всички стойности на $x$ от $\Delta'$.

Доказателство. Правилото за диференциране на функция от функция ни дава при всеки избор на $x$ от $\Delta'$

$$\frac{d}{dx}F[\varphi(x)] = F'_u[\varphi(x)]\,\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\,\varphi'(x),$$

защото

$$F'_u(u) = f(u).$$

Този резултат ни учи, че функцията

$$F[\varphi(x)]$$

е един неопределен интеграл на функцията $f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)$ в интервала $\Delta'$.

Забележка. Ние често ще записваме равенството (2) по-кратко така:

$$\int f[\varphi(x)]\,d\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C. \tag{3}$$

Пример. 4.[1] Да се пресметне интегралът

$$I = \int 2xe^{x^2}\,dx.$$

Очевидно имаме

$$I = \int e^{x^2}\,dx^2.$$

От друга страна,

$$\int e^u\,du = e^u + C,$$

където $u$ е независима променлива. Като се възползуваме от формулата (3), намираме

$$\int e^{x^2}\,dx^2 = e^{x^2} + C.$$

Пример 5. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx.$$

Очевидно имаме

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln(e^x+1) + C,$$

[1] Читателят трябва да разгледа всички примери в този параграф и да запомни как става интегрирането на по-сложните от тях.



защото

$$\int \frac{du}{u} = \ln u \quad \text{при} \quad u > 0.$$

Пример 6. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \sqrt{2x+5}\,dx \quad \text{при} \quad x \geq -\frac{5}{2}.$$

Очевидно имаме

$$\int \sqrt{2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{2x+5}\,d(2x+5) = \frac{1}{2}\int (2x+5)^{\frac{1}{2}}\,d(2x+5) =$$

$$= \frac{1}{3}(2x+5)^{\frac{3}{2}} + C,$$

защото

$$\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C.$$

Пример 7. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \frac{x\,dx}{a^4+x^4}, \quad a \neq 0.$$

Очевидно имаме

$$\int \frac{x\,dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{a^4+x^4} = \frac{1}{2a^4}\int \frac{dx^2}{1+\frac{x^4}{a^4}} = \frac{1}{2a^4}\int \frac{dx^2}{1+\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\int \frac{d\frac{x^2}{a^2}}{1+\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2} = \frac{1}{2a^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{a^2} + C,$$

защото

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arc\,tg} u + C.$$

Пример 8. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}, \quad a \neq 0, \quad |x| < |a|.$$

Очевидно имаме

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1-\frac{x^4}{a^4}}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\frac{x^2}{a^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2} + C,$$

защото

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\operatorname{arc\,sin} u+C.$$

**Пример 9.** Да се пресметне интегралът

$$I=\int \sin^2 x\, dx.$$

Използуваме формулата

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

В такъв случай

$$I=\int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx=$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\int \cos 2x\, d\,2x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C,$$

защото

$$\int \cos u\, du=\sin u+C.$$

**Упражнение.** Да се пресметне интегралът

$$I=\int \cos^2 x\, dx$$

с помощта на тъждеството $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

**Пример 10.** Да се пресметне интегралът

$$I=\int \frac{dx}{\sin x}$$

в кой да е интервал, в който $\sin x\neq 0$.
Очевидно имаме

$$\int \frac{dx}{\sin x}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C,$$

защото

$$\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C.$$

**Пример 11.** Да се пресметне интегралът

$$I=\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx,\quad -1<x<1.$$



Очевидно имаме

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx=\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\operatorname{arc\,sin} x-\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arc\,sin} x-\sqrt{1-x^2}+C.$$

IV. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в някой интервал $\Delta$; нека функцията $\varphi(t)$ е дефинирана и диференцуема в някой интервал $\Delta'$ и нека стойностите на $\varphi(t)$ принадлежат на $\Delta$. Означаваме с $N$ множеството от функционалните стойности на $\varphi(t)$ (очевидно $N$ е интервал, който се съдържа в $\Delta$). Нека функцията $\varphi(t)$ притежава диференцуема обратна функция $\psi(x)$ и нека функцията

$$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$$

притежава неопределен интеграл в $\Delta'$. Да положим

$$g(t)=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \tag{4}$$

Ще покажем, че функцията $f(x)$ притежава примитивна функция поне в интервала $N$ и

$$\int f(x)\,dx=g[\psi(x)]+C. \tag{5}$$

Преди да пристъпим към доказателството, нека да припомним, че съгласно дефиницията на понятието обратна функция се иска:

1) дефиниционната област на $\psi(x)$ да съвпада с множеството $N$ от функционалните стойности на $\varphi(t)$;

2) стойностите на $\psi(x)$ да не напускат дефиниционната област $\Delta'$ на $\varphi(t)$;

3) при всички стойности на $x$ от $\Delta$ да е в сила равенството

$$\varphi[\psi(x)]=x.$$

В дефиницията на понятието за обратна функция не се поставят никакви изисквания за диференцуемост. В нашия специален случай обаче се иска функцията $\varphi(t)$ да притежава *диференцуема* обратна функция.

След тези предварителни бележки преминаваме към доказателството.

*Доказателство.* Разглеждаме функцията

$$g[\psi(x)]$$

в интервала $N$. Тя е добре дефинирана в този интервал, защото функцията $\psi(x)$ е дефинирана в него и стойностите ѝ не напускат интервала $\Delta'$.

Като вземем пред вид, че

$$\frac{d}{dt}g(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

намираме

$$\frac{d}{dx}g[\psi(x)]=f[\varphi(\psi(x))]\varphi'[\psi(x)]\psi'(x)=$$
$$=f(x)\varphi'[\psi(x)]\psi'(x),$$

защото

(6) $$\varphi[\psi(x)]=x.$$

От друга страна, като диференцираме равенството (6) спрямо $x$, намираме

$$\varphi'[\psi(x)]\psi'(x)=1,$$

т. е.

$$\frac{d}{dx}g[\psi(x)]=f(x),$$

с което нашето твърдение е доказано.

Забележка. Ако производната $\varphi'(t)$ не се анулира никъде в интервала $\Delta'$, а този интервал е краен и затворен, то функцията $\varphi(t)$ сигурно притежава диференцуема обратна функция. За да се убедим в това, ще вземем под внимание, че функцията $\varphi(t)$ е обратима (т. е. приема всяка своя стойност само един път). И наистина, ако допуснем противното, ще имаме поне две различни точки $t_1$ и $t_2$ от $\Delta'$, за които $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$, и следователно съгласно теоремата на Рол производната на $\varphi(t)$ ще се анулира поне един път, което по допускане не е вярно. От друга страна, интервалът $\Delta'$ е краен и затворен и следователно ние можем да приложим познатата ни теорема за диференциране на обратни функции (вж. Диференциално смятане, част II, гл. III, § 15).

Наблюдателният читател ще забележи, разбира се, че в случая предположението за компактност на $\Delta'$ не е съществено. Ние го направихме, за да можем да се позовем на споменатата теорема от диференциалното смятане, която е доказана от нас при това предположение. Тази теорема е вярна обаче и в случая, когато разглежданият интервал не е компактен. Нека читателят сам обмисли доказателството.

В бъдеще, вместо да казваме, че си служим с формулите (4) и (5), ще казваме накратко, че правим субституцията $x=\varphi(t)$ в интеграла

$$\int f(x)\,dx.$$



Пример 12.[1] Да се пресметне интегралът

$$I=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

в безкрайния интервал $x>0$.

Разглеждаме функцията

$$\varphi(t)=\sqrt{t-1},$$

където $t>1$. Множеството от функционалните стойности на тази функция съвпада точно с интересуващия ни интервал $x>0$. Функцията

$$\psi(x)=x^2+1,$$

където $x>0$, е една обратна функция на $\varphi(t)$, защото функцията $\psi(x)$ е дефинирана при $x>0$, стойностите ѝ принадлежат на дефиниционната област на $\varphi(t)$ и

$$\varphi[\psi(x)]=\sqrt{(x^2+1)-1}=|x|=x.$$

Образуваме си помощната функция

$$g(t)=\int\frac{\varphi(t)\,d\varphi(t)}{\sqrt{\varphi^2(t)+1}}=\int\frac{\sqrt{t-1}\,d\sqrt{t-1}}{\sqrt{(\sqrt{t-1})^2+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\sqrt{t}+C.$$

Като приложим формулата (5), намираме

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=g[\psi(x)]=\sqrt{\psi(x)}+C=\sqrt{x^2+1}+C.$$

На практика записваме пресмятанията обикновено по следния начин: полагаме

(7) $$x=\sqrt{t-1}$$

и пишем

$$I=\int\frac{\sqrt{t-1}\,d\sqrt{t-1}}{\sqrt{(\sqrt{t-1})^2+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\sqrt{t}+C;$$

като решим уравнението (7) относно $t$, получаваме

$$t=x^2+1;$$

заместваме $t$ с равното му; то ни дава

$$I=\sqrt{x^2+1}+C.$$

Същата задача можем да решим и с помощта на формулата (2) по следния начин: очевидно

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}};$$

като вземем пред вид, че

$$\int\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C,$$

[1] Читателят трябва да разгледа всички примери в този параграф и да запомни как става интегрирането на по-сложните от тях.

получаваме

$$I=\sqrt{x^2+1}+C.$$

Това решение има предимството, че се отнася за всички стойности на $x$, а не само за положителни стойности, както имахме в предишното решение.

Пример 13. Да се пресметне интегралът

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\quad a>0.$$

в интервала $-a<x<a$.

Разглеждаме функцията

$$\varphi(t)=a\cos t$$

при $0<t<\pi$. Множеството от функционалните стойности на $\varphi(t)$ представлява точно интересуващият ни интервал $(-a, a)$. Функцията

$$\psi(x)=\arccos\frac{x}{a},\quad -a<x<a,$$

е една обратна функция на $\varphi(t)$.

Образуваме си помощната функция

$$g(t)=\int\sqrt{a^2-\varphi^2(t)}\,d\varphi(t)=\int\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}\,d a\cos t=$$

$$=-a^2\int\sqrt{\sin^2 t}\,\sin t\,dt=-a^2\int|\sin t|\sin t\,dt$$

Тук имаме $\sin t>0$, защото $0<t<\pi$, и следователно

$$g(t)=-a^2\int\sin^2 t\,dt.$$

По-нататък получаваме

$$g(t)=-a^2\int\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=\frac{-a^2 t}{2}+\frac{a^2}{4}\int\cos 2t\,d\,2t=$$

$$=\frac{-a^2 t}{2}+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{-a^2 t}{2}+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C.$$

Като се възползуваме от формулите (4) и (5), намираме

$$I=g(\psi(x))=-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Пример 14. Да се пресметне интегралът

$$I=\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

при произволни реални стойности на $x$.

Разглеждаме функцията

$$\varphi(t)=\operatorname{tg} t$$



при $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. Множеството от стойностите на тази функция съвпада с множеството на реалните числа.[1] Функцията

$$\psi(x)=\operatorname{arc\,tg} x$$

е обратна на функцията $\varphi(t)$.

Образуваме си помощната функция

$$g(t)=\int\frac{d\varphi(t)}{[1+\varphi^2(t)]^2}=\int\frac{d\operatorname{tg} t}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^2}=\int\frac{dt}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^2\cos^2 t}=$$

$$=\int\frac{dt}{\left(1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^2\cos^2 t}=\int\cos^2 t\,dt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\int\cos 2t\,d\,2t+C=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+C.$$

Като се възползуваме от формулите (4) и (5), намираме

$$I=g[\psi(x)]=\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2}+\frac{1}{4}\sin(2\operatorname{arc\,tg} x)+C=$$

$$=\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arc\,tg} x)}+C=\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}+C.$$

Тук ние се възползувахме от формулата

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

**Задачи**

Да се пресметнат следните интеграли:

1. $I=\int 5x^3\,dx.$ Отг. $I=\frac{5}{4}x^4+C.$
2. $I=\int(2x^3-3x+5)\,dx.$ Отг. $I=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2+5x+C.$
3. $I=\int\frac{5}{x^3}\,dx,\ x>0.$ Отг. $I=-\frac{5}{2x^2}+C.$
4. $I=\int\frac{2x^3-5x+3}{x}\,dx,\ x<0.$ Отг. $I=\frac{2}{3}x^3-5x+3\ln|x|+C.$
5. $I=\int\sqrt[3]{x^2}\,dx.$ Отг. $I=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C.$

[1] Т. е. това е точно интервалът, в който искаме да пресметнем интеграла.

6. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}},\ x>0.$ Отг. $I=2\sqrt{x}+C.$

7. $I=\int(2x+1)^2\,dx.$ Отг. $I=\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C.$

8. $I=\int\sqrt{2x+3}\,dx,\ 2x+3\geqq 0.$ Отг. $I=\frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}+C.$

9. $I=\int\sqrt{2-x}\,dx,\ 2-x\geqq 0.$ Отг. $I=-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}+C.$

10. $I=\int(ax+b)^n\,dx,\ ax+b\geqq 0.$ Отг. $I=\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C.$

$a\neq 0,\ n\neq -1.$

11. $I=\int\frac{dx}{ax+b},\ a\neq 0,\ ax+b<0.$ Отг. $I=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C.$

12. $I=\int\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx.$ Отг. $I=\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2+C.$

13. $I=\int e^{\sin x}\cos x\,dx.$ Отг. $I=e^{\sin x}+C.$

14. $I=\int\sin(\ln x)\frac{dx}{x},\ x>0.$ Отг. $I=-\cos(\ln x)+C.$

15. $I=\int\frac{dx}{x^2+6x+10}.$

**Решение.**

$$I=\int\frac{dx}{(x+3)^2+1}=\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+1}=\operatorname{arc\,tg}(x+3)+C.$$

16. $I=\int\frac{dx}{2x^2+4x+5}.$

Решение.

$$I=2\int\frac{dx}{4x^2+8x+10}=2\int\frac{dx}{4x^2+8x+4+6}=2\int\frac{dx}{(2x+2)^2+6}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(\frac{2x+2}{\sqrt6}\right)^2+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt6}{2}\int\frac{d\frac{2x+2}{\sqrt6}}{\left(\frac{2x+2}{\sqrt6}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt6}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+2}{\sqrt6}+C.$$



17. $I=\int\frac{dx}{x^2-5x+6},\ 2<x<3.$

Решение.

$$I=\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)}=\int\frac{1}{x-3}dx-\int\frac{dx}{x-2}=\ln|x-3|-\ln|x-2|+C.$$

18. $I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},\ a\neq 0,\ ax^2+by+c\neq 0.$

Упътване.

$$I=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}.$$

Отговор.

1. Ако $b^2-4ac<0,\ I=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C.$

2. Ако $b^2-4ac>0,\ I=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C.$

3. Ако $b^2-4ac=0,\ I=-\frac{2}{2ax+b}+C.$

19. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{2+2x-x^2}},\ 2+2x-x^2>0$

Решение.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{3-(x-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt3}\right)^2}}=\int\frac{d\frac{x-1}{\sqrt3}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt3}\right)^2}}=$$

$$=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt3}+C.$$

20. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$

Решение.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt3}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt3}\right)^2+1}}=\int\frac{d\frac{2x+1}{\sqrt3}}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt3}\right)^2+1}}=$$

$$=\ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)+C=$$

$$=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C_1.$$

21. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ a\neq 0,\ ax^2+bx+c>0.$

Упътване. Разгледайте поотделно всичките случаи в зависимост от знаците на $a$ и $b^2-4ac$. Сравнете със задача 18.

22. $I=\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx,\ x>a>0.$

Решение.

$$I=\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx=\int\frac{x^2-a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}-a^2\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt{x^2-a^2}}-a^2\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-a^2)}{\sqrt{x^2-a^2}}+a\int\frac{d\frac{a}{x}}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}}=\sqrt{x^2-a^2}+a\arcsin\frac{a}{x}+C.$$

23. $I=\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx,\ x>0.$

Решение.

$$I=\int\frac{x^2+a^2}{x\sqrt{x^2+a^2}}\,dx=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}+a^2\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)}}+a^2\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}}=\sqrt{x^2+a^2}-a\int\frac{d\frac{a}{x}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}}=$$

$$=\sqrt{x^2+a^2}-a\ln\left(\frac{a}{x}+\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}\right)+C.$$

24. $I=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}},\ b>a>0,\ a<x<b.$



Решение.

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}\,\frac{d(x^2-a^2)}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}\,d\sqrt{x^2-a^2}=$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2+(a^2-x^2)}}\,d\sqrt{x^2-a^2}=\int\frac{d\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}\right)^2}}=$$

$$=\arcsin\left(\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}\right)+C.$$

25. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}},\ x>-a,\ x>-b,\ a\neq b.$

Решение.

$$I=\int\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b})\,dx}{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b})}=$$

$$=\frac{1}{a-b}\left[\int\sqrt{x+a}\,dx-\int\sqrt{x+b}\,dx\right]=\frac{2(x+a)^{\frac{3}{2}}}{3(a-b)}-\frac{2(x+b)^{\frac{3}{2}}}{3(a-b)}+C.$$

26. $\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},\ x>0.$

Решение.

$$I=\int\frac{dx}{x^3(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^{-2}+1)}{(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}}=(x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}+C.$$

27. $I=\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},\ x<0.$

Решение.

$$I=-\int\frac{dx}{x^3(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^{-2}+1)}{(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}}=-(x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}+C.$$

Забележка. Резултатите от задачите 26 и 27 могат да се представят още така:

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.$$

Този резултат е валиден за всички стойности на $x$, включително и за точката $x=0$.

28. $I=\int \dfrac{dx}{x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, $0<x<1$.

Отг. $I=-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$.

29. $I=\int \dfrac{dx}{(a+bx^n)^{\frac{n+1}{n}}}$, $a\neq 0$, $a+bx^n>0$.

Отг. $I=\dfrac{x}{a\,(a+bx^n)^{\frac{1}{n}}}+C$.

30. $I=\int \cos^2 x\,dx$

Отг. $I=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}+C$.

31. $I=\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a>0$, $-a<x<a$.

Отг. $I=-\dfrac{a^2}{2}\arccos\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$.

32. $I=\int \dfrac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Отг. $I=\dfrac{x}{2(1+x^2)}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C$.

33. $I=\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, $a>0$, $2ax-x^2>0$.

Отг. $I=a\arccos\dfrac{a-x}{a}-\sqrt{2ax-x^2}+C$

34. $I=\int \sin^3 x\,dx$.

Решение.

$$I=-\int \sin^2 x\,d\cos x=-\int (1-\cos^2 x)\,d\cos x=$$

$$=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

35. $I=\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$.

Отг. $I=-\dfrac{1}{5}\sin^5 x+\dfrac{1}{3}\sin^3 x+C$.

36. $I=\int \dfrac{\cos x}{2-\cos^2 x}\,dx$.

Отг. $I=\operatorname{arc\,tg}(\sin x)+C$.



37. $I=\int \dfrac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$, $\sin x\cos x\neq 0$.

Решение.

$$I=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx=\int \frac{dx}{\cos^2 x}+\int \frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C.$$

38. $I=\int \dfrac{dx}{\sin x}$, $0<x<\pi$.

Отг. $I=\ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+C$.

39. $I=\int \dfrac{dx}{\cos x}$, $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$.

Отг. $I=\ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)+C$.

40. $I=\int \operatorname{tg} x\,dx$, $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$.

Отг. $I=-\ln\cos x+C$.

41. $I=\int \dfrac{dx}{a\sin x+b\cos x}$, $a\sin x+b\cos x\neq 0$.

Упътване. Положете

$$a=\rho\cos\theta,$$
$$b=\rho\sin\theta;$$

тогава

$$I=\frac{1}{\rho}\int \frac{dx}{\sin(x+\theta)}.$$

Отг. $I=\dfrac{1}{\rho}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x+\theta}{2}\right|$.

42. $I=\int \dfrac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

Отг. $I=\operatorname{arc\,tg} e^x+C$.

43. $I=\int \dfrac{dx}{e^x+1}$

Отг. $I=\ln\dfrac{e^x}{1+e^x}+C$.

## § 5. Интегриране по части

Нека функциите $u(x)$ и $v(x)$ са диференцуеми в някой интервал $\Delta$ и нека функцията $v(x)\,u'(x)$ има примитивна в този интервал. В такъв случай функцията $u(x)\,v'(x)$ също има примитивна и

(1) $$\int u(x)\,v'(x)\,dx=u(x)\,v(x)-\int v(x)\,u'(x)\,dx+C.$$

За да установим това, достатъчно е да покажем, че функцията

$$u(x)\,v(x)-\int v(x)\,u'(x)\,dx$$

е един неопределен интеграл за функцията $u(x)\,v'(x)$. Това се вижда непосредствено от следното равенство:

$$\left[u(x)\,v(x)-\int v(x)\,u'(x)\,dx\right]'=$$

$$=[u(x)v(x)]'-\left[\int v(x)\,u'(x)\,dx\right]'=u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)-$$

$$-v(x)\,u'(x)=u(x)\,v'(x).$$

Ние обикновено ще пишем равенството (1) във вида

$$\int u(x)\,dv(x)=u(x)\,v(x)-\int v(x)\,du(x)+C. \tag{2}$$

Равенството (2) се нарича формула за интегриране по части.

Пример 1.[1] Да се пресметне интегралът

$$I=\int \ln x\,dx,\ x>0.$$

Решение. Прилагаме формулата (2), като избираме

$$u(x)=\ln x,\ v(x)=x.$$

Тази формула ни дава

$$\int \ln x\,dx=(\ln x)x-\int x\,d\ln x=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx=$$

$$=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C.$$

Пример 2. Да се пресметне интегралът

$$I=\int x\ln x\,dx,\ x>0.$$

Решение. Очевидно

$$I=\frac{1}{2}\int \ln x\,dx^2.$$

[1] Читателят трябва да разгледа всички примери в този параграф и да запомни как става интегрирането на по-сложните от тях.



Прилагаме формулата (2), като избираме

$$u(x)=\ln x,$$

$$v(x)=x^2.$$

Това ни дава

$$I=\frac{1}{2}(\ln x)\,x^2-\frac{1}{2}\int x^2\,d\ln x=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int x^2\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{4}x^2+C.$$

Пример 3. Да се пресметне интегралът

$$I=\int x\operatorname{arc\,tg}x\,dx.$$

Решение. Очевидно

$$I=\frac{1}{2}\int \operatorname{arc\,tg}x\,dx^2=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\int x^2\,d\operatorname{arc\,tg}x=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\int x^2\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x^2\operatorname{arc\,tg}x}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx=$$

$$=\frac{x^2\operatorname{arc\,tg}x}{2}-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{x^2\operatorname{arc\,tg}x}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

Пример 4. Да се пресметне интегралът

$$I=\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx,\ x>a>0.$$

Решение. Като се възползуваме от формулата за интегриране по части, намираме

$$I=x\sqrt{x^2-a^2}-\int x\,d\sqrt{x^2-a^2}=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx=$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx=$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-I-a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$$

Оттук получаваме

$$2I=x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$$

и следователно

$$I=\frac{x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C}{2}.$$

Забележка. Като приложихме формулата за интегриране по части, ние използувахме в същност, че функцията

$$\varphi(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

има примитивна в интервала $x>a$. Това обаче не се вижда непосредствено от изложеното досега, поради което решението не може да се счита за завършено. След като обаче веднъж е получена функцията

$$F(x)=\frac{x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})}{2},$$

ние можем да установим лесно, че тя наистина е една примитивна на функцията $\sqrt{x^2-a^2}$ при $x>a$. За целта е достатъчно да покажем с директно пресмятане, че

$$F'(x)=\sqrt{x^2-a^2}.$$

По-късно ще покажем, че ако една функция е непрекъсната в един интервал, тя сигурно има примитивна в този интервал, нещо, което ще ни освободи от необходимостта да прецизираме изложеното тук решение. Нека отбележим обаче, че средствата, с които разполагаме досега, също ни дават възможност да установим (макар и по-сложно), че функцията $\varphi(x)$ има примитивна при $x>a$. Това може да стане например така: полагаме

$$x=a\frac{3-t}{1+t},$$

където $-1<t<1$; в такъв случай интегралът

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

се преобразува формално в интеграла

$$g(t)=-\frac{4a^2}{\sqrt{8}}\int\frac{(3-t)^2}{(1-t)^4\sqrt{1-t}}\,dt;$$

функцията

$$h(t)=-\frac{4a^2}{\sqrt{8}}\frac{(3-t)^2}{(1+t)^4\sqrt{1-t}}$$

обаче има примитивна в интервала $-1<t<1$, защото е развиваема в степенен ред, както ни учи Нютоновият бином и правилото за умножаване на редове; след като е установено съществуването на една примитивна функция на $h(t)$ при $-1<t<1$, ние можем да твърдим въз основа на теоремата за смяна на променливите, че функцията $\varphi(x)$ също има примитивна при $x>a$.



Пример 5. Да се пресметне интегралът

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a>0,\ -a<x<a.$$

Решение. Като използуваме формулата за интегриране по части, намираме

$$I=x\sqrt{a^2-x^2}-\int x\,d\sqrt{a^2-x^2}=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{-a^2+a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\int\frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}-I=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}-I+C.$$

Оттук получаваме

$$2I=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}+C$$

и следователно

$$I=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}+C}{2}.$$

Забележка 1. Сравнете с предната задача. Съществуването на неопределения интеграл

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

при $-a<x<a$, което използувахме при интегрирането по части, следва например от това, че подинтегралната функция е развиваема в степенен ред при $-a<x<a$. Както вече имахме случай да отбележим, това ще следва и от общата теорема (която ще до-

кажем по-късно) за съществуване на неопределен интеграл във всеки интервал, в който подинтегралната функция е непрекъсната.[1]

Забележка 2. В пример 13, § 4 на тази глава е посочено как разглежданият тук интеграл може да се пресметне със субституция.

Пример 6. Да се пресметне интегралът

$$I_n=\int x^n e^x\,dx,$$

където $n$ е цяло положително число.

Решение. Очевидно

$$I_n=\int x^n\,de^x=x^n e^x-\int e^x\,dx^n=$$

$$=x^n e^x-n\int x^{n-1}e^x\,dx$$

или

(3) $$I_n=x^n e^x-nI_{n-1}.$$

Така намерената рекурентна зависимост ни позволява да изразим $I_n$ чрез $I_{n-1}$. Прилагайки няколко пъти формулата (3), добиваме възможност да изразим $I_n$ чрез познатия интеграл

$$I_0=\int e^x\,dx=e^x+C.$$

Така например, за да пресметнем интеграла

$$I_3=\int x^3 e^x\,dx,$$

използуваме равенствата

$$I_3=x^3e^x-3I_2,$$
$$I_2=x^2e^x-2I_1,$$
$$I_1=xe^x-I_0,$$
$$I_0=e^x+C.$$

Като елиминираме $I_2$, $I_1$, $I_0$, получаваме

$$I_3=x^3e^x-3x^2e^x+6xe^x-6e^x+C_1,$$

където сме положили $-6C=C_1$.

[1] В бъдеще често ще има място за подобни забележки, обаче ние повече няма да ги правим.



Пример 7. Да се пресметне интегралът

$$I_n=\int\frac{dx}{(1+x^2)^n},$$

където $n$ е цяло положително число.

Решение. При $n=1$ имаме познат интеграл. Нека $n>1$. В такъв случай извършваме следните преобразувания:

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx=\int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx=\int\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}-\int\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^n}=$$

$$=I_{n-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x\,d(x^2+1)}{(1+x^2)^n}=I_{n-1}+\frac{1}{2(n-1)}\int x\,d\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}=$$

$$=I_{n-1}+\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx=$$

$$=I_{n-1}+\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)}\cdot I_{n-1}.$$

Оттук получаваме

$$I_n=\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}.$$

Като приложим няколко пъти тази формула или като повторим няколко пъти разсъжденията, с помощта на които я получихме, стигаме до познатия интеграл

$$I_1=\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

Като пример да пресметнем интеграла

$$I_2=\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Очевидно имаме

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx=\int\frac{dx}{1+x^2}-\int\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x\,d(x^2+1)}{(1+x^2)^2}=\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\int x(1+x^2)^{-2}\,d(1+x^2)=$$

$$=\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\int x\,d\frac{(1+x^2)^{-2+1}}{-2+1}=$$

$$=\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{2}\int x\,d\frac{1}{1+x^2}=$$

$$=\operatorname{arc\,tg} x+\frac{x}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=$$

$$=\operatorname{arc\,tg} x+\frac{x}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C$$

и следователно

$$I_2=\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C.$$

Сравнете с пример 14 към § 4 на тази глава.

Пример 8. Да се пресметне интегралът

$$I_{m,n}=\int\sin^m x\cos^n x\,dx,$$

където числата $m$ и $n$ са цели (положителни, отрицателни или нули).

Решение. При $m\neq-1$ имаме

$$I_{m,n}=\int\sin^m x\cos^{n-1}x.\cos x\,dx=\int\sin^m x\cos^{n-1}x\,d\sin x=$$

$$=\frac{1}{m+1}\int\cos^{n-1}x\,d\sin^{m+1}x=$$

$$=\frac{\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x}{m+1}-\frac{1}{m+1}\int\sin^{m+1}x\,d\cos^{n-1}x=$$

$$=\frac{\cos^{n-1}x\sin^{m+}}{m+1}-\frac{1}{m+1}\int(\sin^{m+1}x)(n-1)(\cos^{n-2}x)(-\sin x)\,dx=$$

$$=\frac{\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int(\sin^{m+2}x\cos^{n-2}x\,dx=$$

$$=\frac{\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int\sin^m x\sin^2 x\cos^{n-2}x\,dx=$$

$$=\frac{\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int\sin^m x(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\,dx=$$

$$=\frac{\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int\sin^m x\cos^{n-2}x\,dx-$$

$$-\frac{n-1}{m+1}\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\frac{\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}I_{m,n-2}-\frac{n-1}{m+1}\cdot I_{m,n}$$

Оттук намираме

(4) $$(n+m)\,I_{m,n}=\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x+(n-1)\,I_{m,n-2}.$$



Тази формула, която изведохме при предположение, че $m\neq-1$, е вярна и при $m=-1$, както това се вижда, като сравним производните на двете страни на равенството (4).

По същия начин получаваме при $n\neq-1$

$$I_{m,n}=\int\sin^{m-1}x\cos^n x\sin x\,dx=-\int\sin^{m-1}x\cos^n x\,d\cos x=$$

$$=-\frac{1}{n+1}\int\sin^{m-1}x\,d\cos^{n+1}x=$$

$$=-\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}\int\cos^{n+2}x\sin^{m-2}x\,dx=$$

$$=-\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}\int\cos^n x(1-\sin^2 x)\sin^{m-2}x\,dx=$$

$$=-\frac{\sin^{-1}x\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}I_{m-2,n}-\frac{m-1}{n+1}I_{m,n}.$$

Оттук намираме[1]

(5) $$(m+n)\,I_{m,n}=-\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x+(m-1)\,I_{m-2,n}.$$

С помощта на формулите (4) и (5) ние можем да изразим $I_{m,n}$ чрез $I_{m,n-2}$ и $I_{m-2,n}$, стига да имаме $m+n\neq0$. Ние имаме интерес да си служим с формулата (4), съответно (5), когато числото $n$, съответно $m$, е по-голямо от 1.

Ако числото $n$ е отрицателно и $n+1\neq0$, бихме могли да постъпим по следния начин:

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\int\sin^{m+2}x\cos^n x\frac{dx}{\sin^2 x}=$$

$$=-\int\sin^{m+2}x\cos^n x\,d\operatorname{ctg} x=\int\sin^{m+n+2}x\frac{\cos^n x}{\sin^n x}\,d\operatorname{ctg} x=$$

$$=-\int\sin^{m+n+2}x(\operatorname{ctg} x)^n\,d\operatorname{ctg} x=-\frac{1}{n+1}\int\sin^{m+n+2}x\,d(\operatorname{ctg} x)^{n+1}=$$

$$=-\frac{1}{n+1}\sin^{m+n+2}x\operatorname{ctg}^{n+1}x+\frac{1}{n+1}\int\operatorname{ctg}^{n+1}x\,d\sin^{m+n+2}x=$$

$$=\frac{-1}{n+1}\sin^{m+n+2}x\operatorname{ctg}^{n+1}x+\frac{m+n+2}{n+1}\int\operatorname{ctg}^{n+1}x\sin^{m+n+1}x\cos x\,dx=$$

$$=\frac{-\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m+n+2}{n+1}\int\sin^m x\cos^{n+2}x\,dx,$$

[1] Това равенство е валидно и при $n=-1$; в това се убеждаваме, като сравним производните на двете му страни.

откъдето[1]

$$I_{m,n}=-\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m+n+2}{n+1}I_{m,n+2}. \tag{6}$$

По този начин изразихме интеграла $I_{m,n}$ чрез $I_{m,n+2}$. Аналогично при $m+1\neq 0$ намираме

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx=\int \sin^m x\cos^{n+2}x\,\frac{dx}{\cos^2 x}=$$

$$=\int\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^m \cos^{n+m+2}x\,d\,\mathrm{tg}\,x=\int(\mathrm{tg}\,x)^m\cos^{n+m+2}x\,d\,\mathrm{tg}\,x=$$

$$=\frac{1}{m+1}\int\cos^{n+m+2}x\,d(\mathrm{tg}\,x)^{m+1}=$$

$$=\frac{1}{m+1}\cos^{n+m+2}x\,\mathrm{tg}^{m+1}x-\frac{1}{m+1}\int\mathrm{tg}^{m+1}x\,d\cos^{n+m+2}x=$$

$$=\frac{\cos^{n+1}x\sin^{m+1}x}{m+1}+\frac{n+m+2}{m+2}\int\mathrm{tg}^{m+1}x\cos^{n+m+1}x\sin x\,dx,$$

откъдето[2]

$$I_{m,n}=\frac{\cos^{n+1}x\sin^{m+1}x}{m+1}+\frac{n+m+2}{m+1}I_{m+2,n}. \tag{7}$$

Ние използуваме формулата (7), когато числото $m$ е отрицателно.

Като приложим няколко пъти формулите (4), (5), (6) и (7) или още по-добре, като повторим няколко пъти разсъжденията, с помощта на които ги получихме, можем винаги да изразим интеграла $I_{m,n}$ чрез някой от следните познати интеграли:

$$I_{0,0}=\int dx=x+C;\qquad I_{1,0}=\int\sin x\,dx=-\cos x+C;$$

$$I_{0,1}=\int\cos x\,dx=\sin x+C;\qquad I_{1,1}=\int\sin x\cos x\,dx=$$

$$=\int\sin x\,d\sin x=\frac{\sin^2 x}{2}+C;$$

$$I_{1,-1}=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C;$$

$$I_{-1,1}=\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx=\int\frac{d\sin x}{\sin x}=\ln|\sin x|+C;$$

[1] Формулите (4) и (6) не са съществено различни. За да се убедем в това, достатъчно е да решим равенството (4) относно $I_{m,n-2}$ и да заменим $n$ с $n+2$.

[2] Формулите (5) и (7) не са съществено различни.



$$I_{-1,0}=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}=$$

$$=\int\frac{d\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C;$$

$$I_{-1,-1}=\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\mathrm{tg}\,x}=\int\frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}\,x}=\ln|\mathrm{tg}\,x|+C;$$

$$I_{0,-1}=\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C.$$

Така например ние можем да пресметнем интеграла

$$I_{2,0}=\int\sin^2 x\,dx$$

по следния начин:

$$I_{2,0}=\int\sin x\sin x\,dx=-\int\sin x\,d\cos x=-\sin x\cos x+$$

$$+\int\cos x\,d\sin x=-\sin x\cos x+\int\cos^2 x\,dx=-\sin x\cos x+$$

$$+\int(1-\sin^2 x)\,dx=-\sin x\cos x+x-I_{2,0}+C,$$

откъдето

$$2I_{2,0}=-\sin x\cos x+x+C$$

и следователно

$$I_{2,0}=\frac{-\sin x\cos x+x+C}{2}.$$

Сравнете с пример 9 в § 4 на тази глава.

Като втори пример ще разгледаме интеграла

$$I_{0,-3}=\int\frac{dx}{\cos^3 x},\qquad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}.$$

Очевидно имаме

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,\frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \sin^{-1} x \operatorname{ctg}^{-3} x\, d \operatorname{ctg} x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin^{-1} x\, d \operatorname{ctg}^{-2} x = \frac{1}{2}\sin^{-1} x \operatorname{ctg}^{-2} x - \frac{1}{2}\int \operatorname{ctg}^{-2} x\, d \sin^{-1} x =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + C.$$

Разгледаните тук общи пътища за пресмятане на интеграли от вида

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x\, dx$$

не винаги са най-простите. Така например, за да пресметнем интеграла

$$I_{0,3} = \int \cos^3 x\, dx,$$

по-добре е да постъпим така:

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x\, d \sin x = \int (1-\sin^2 x)\, d \sin x =$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Същото се отнася за интеграла

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^4 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \operatorname{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x + \int \operatorname{tg}^2 x\, d \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$$

Пример 9. Да се пресметнат интегралите

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx\, dx,$$

$$I_2 = \int e^{ax} \sin bx\, dx$$

при $a^2+b^2 \neq 0$.

Решение. Формулата за интегриране по части ни дава при $a \neq 0$

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{a}\int \cos bx\, de^{ax} = \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax} \sin bx\, dx,$$

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{1}{a}\int \sin bx\, de^{ax} = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax} \cos bx\, dx$$



или по-кратко

$$I_1 = \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{b}{a} I_2,$$

$$I_2 = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a} I_1.$$

(Ние не пишем интеграционните константи само за краткост.)

Оттук намираме

$$I_1 = \frac{e^{ax}[a\cos bx + b\sin bx]}{a^2+b^2},$$

$$I_2 = \frac{e^{ax}[a\sin bx - b\cos bx]}{a^2+b^2}.$$

Ние получихме тези формули при предположението, че $a \neq 0$. Те са валидни обаче и при по-общото предположение, че имаме $a^2+b^2 \neq 0$, което се вижда с директна проверка.

### Задачи

Да се пресметнат следните интеграли:

1. $I = \int x^n \ln x\, dx, \quad x>0, \quad n \neq -1.$

Отговор. $I = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$

2. $I = \int x^n (\ln x)^2\, dx, \quad x>0, \quad x \neq -1.$

Отговор. $I = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^2 - \frac{2}{(n+1)^2}x^{n+1}\ln x + \frac{2}{(n+1)^3}x^{n+1} + C.$

3. $I = \int x^3 e^x\, dx.$

Отговор. $I = e^x(x^3-3x^2+6x-6) + C.$

4. $I = \int x^2 \cos x\, dx.$

Отговор. $I = (x^2-2)\sin x + 2x\cos x + C.$

5. $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \quad -1<x<1.$

Отговор. $I = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$

6. $I = \int \sqrt{a^2+x^2}\, dx.$

Отговор. $I = \frac{1}{2}[x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C].$

7. $I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx,\quad I_2=\int e^{ax}\sin bx\,dx,\quad a^2+b^2\neq 0.$

Отговор. $I_1=e^{ax}\dfrac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}+C_1,\ I_2=$

$$=e^{ax}\frac{-b\cos bx+a\sin bx}{a^2+b^2}+C_2.$$

8. $I=\int \operatorname{arc\,sin} x\,dx,\quad -1<x<1.$

Отговор. $I=x\operatorname{arc\,sin} x+\sqrt{1-x^2}+C.$

9. $I=\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx.$

Отговор. $I=x\operatorname{arc\,tg} x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

10. $I=\int x\operatorname{arc\,sin} x\,dx,\quad -1<x<1.$

Отговор. $I=\dfrac{2x^2-1}{4}\operatorname{arc\,sin} x+\dfrac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C.$

11. $I=\int x^2\operatorname{arc\,sin} x\,dx,\quad -1<x<1.$

Отговор. $I=\dfrac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^3}{3}\operatorname{arc\,sin} x+C.$

12. $I=\int x\operatorname{arc\,tg} x\,dx.$

Отговор. $I=\dfrac{1}{2}(x^2\operatorname{arc\,tg} x-x+\operatorname{arc\,tg} x)+C.$

13. $I=\int\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2}\,dx,\quad x>0.$

Отговор. $I=-\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}+\ln\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$

14. $I=\int\cos^2 x\,dx.$

Отговор. $I=\dfrac{x+\sin x\cos x}{2}+C.$

15. $I=\int\sin^2 x\,dx.$

Отговор. $I=\dfrac{x-\sin x\cos x}{2}+C.$



16. $I=\int\cos^4 x\,dx.$

Отговор. $I=\dfrac{1}{4}\cos^3 x\sin x+\dfrac{3}{8}\cos x\sin x+\dfrac{3}{8}x+C.$

17. $I=\int\dfrac{dx}{\sin^4 x},\quad 0<x<\pi.$

Отговор. $I=-\operatorname{cotg} x-\dfrac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x+C.$

18. $I=\int\dfrac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x},\quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}.$

Отговор. $I=\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-2\operatorname{cotg} 2x+C.$

19. $I=\int\sin^{n-1} x\cos(n+1)x\,dx.$

Отговор. $I=\int\sin^{n-1} x(\cos nx\cos x-\sin nx\sin x)\,dx=$

$$=\frac{1}{n}\int\cos nx\,d\sin^n x-\int\sin^n x\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{\sin^n x\cos nx}{n}-\frac{1}{n}\int\sin^n x\,d\cos nx-\int\sin^n x\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{\sin^n x\cos nx}{n}+C.$$

20. $I=\int\dfrac{dx}{(1+x^2)^2}.$

Отговор. $I=\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x}{1+x^2}+C.$

21. $I=\int\dfrac{dx}{(1+x^2)^3}.$

Отговор. $I=\dfrac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x+\dfrac{3x}{8(1+x^2)}+\dfrac{x}{4(1+x^2)^2}+C.$

22. $I=\int\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx,\quad x>0.$

Отговор. $I=(x+1)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C.$

23. $I=\int\dfrac{\operatorname{arc\,sin} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx,\quad -1<x<1.$

Отговор. $I=\int\operatorname{arc\,sin} x\,d\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arc\,sin} x-\int\dfrac{x\,dx}{1-x^2}=$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arc\,sin} x+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C.$$

24. $I_1=\int \frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad I_2=\int e^{\arcsin x}dx, \quad -1<x<1.$

Отговор. $I_1=\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{2}\,e^{\arcsin x}+C_1,$

$$I_2=\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{2}\,e^{\arcsin x}+C_2.$$

25. $I=\int \sin(\ln x)\,dx, \quad x>0.$

Отговор. $I=x\frac{\sin(\ln x)-\cos(\ln x)}{2}+C.$

26. $I=\int e^{ax}\cos^2 x\,dx, \quad a\neq 0.$

Отговор. $I=e^{ax}\left[\frac{\sin 2x}{a^2+4}+\frac{a}{2}\,\frac{\cos 2x}{a^2+4}+\frac{1}{2a}\right].$

27. $I=\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

Отговор. $I=\frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}}\,e^{\operatorname{arctg} x}+C.$

28. $I=\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}\,dx, \quad x>0.$

Отговор. $I=\frac{2}{3}(e^x+2)\sqrt{e^x-1}+C.$

29. $I=\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad -1<x<1.$

Отговор. $I=x-\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x+C.$

30. $I=\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$

Отговор. $I=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C.$

31. $I=\int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx, \quad -1<x<1.$

Отговор. $I=x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)+\frac{1}{2}(\arcsin x-x)+C.$

32. $I=\int xe^x\cos x\,dx.$

Отговор. $I=\frac{1}{2}xe^x(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}\,e^x\sin x+C.$



33. $I=\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx.$

Отговор. $I=\frac{1}{2}(x\operatorname{arctg} x)^2+\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2-x\operatorname{arctg} x+$

$$+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

## § 6. Разлагане на дробни рационални функции[1]

В този и следващите два параграфа ще изложим един общ метод за пресмятане на интеграли от рационални функции. Една функция $R(x)$ се нарича рационална, когато тя може да се представи[2] във вида[3]

$$R(x)=\frac{p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_n}{q_0x^m+q_1x^{m-1}+\cdots+q_m}, \quad q_0\neq 0,$$

където коефициентите $p_0, p_1, \ldots, p_n;\ q_0, q_1, \ldots, q_m$ и целите неотрицателни числа $n$ и $m$ не зависят от $x$. Ние ще разглеждаме само рационални функции с реални коефициенти.

Да разгледаме полинома

$$f(x)=q_0x^m+q_1x^{m-1}+\cdots+q_m.$$

Нека $a$ е корен на уравнението $f(x)=0$. Както е известно от висшата алгебра, полиномът $f(x)$ може да се представи във вида[4]

$$f(x)=(x-a)^\alpha\varphi(x).$$

---

[1] В този параграф ние ще използуваме особено много познанията на читателя от висшата алгебра. Така ние ще предполагаме, че читателят е запознат с комплексните числа и познава основните свойства на полиномите.

[2] В цялата дефиниционна област.

[3] Читателят знае, че ако $m=0$, то $R(x)$ се нарича полином. Тази терминология ни позволява да изкажем по следния начин дефиницията на понятието (дробна) рационална функция. Една функция се нарича рационална, когато тя може да се представи като частно на два полинома. (При това се иска, разбира се, полиномът в знаменателя да не се анулира тъждествено.)

[4] Доказателството може да се извърши например с помощта на формулата на Тейлор за полиноми, която, както е известно от висшата алгебра, е валидна и в областта на комплексните числа. И наистина нека $\alpha$ е най-малкото цяло положително число, за което $f^{(\alpha)}(a)\neq 0$. Такова число сигурно съществува, защото

$$f^{(m)}(a)=q_0m!\neq 0.$$

Да разгледаме формулата на Тейлор

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m.$$

Като вземем под внимание, че

$$f(a)=\cdots=f^{(\alpha-1)}(a)=0,$$

където $\varphi(x)$ е полином, $\alpha$ — цяло положително число[1] и $\varphi(a) \neq 0$. Ако коренът $a$ е реален, то коефициентите на $\varphi(x)$ са също така реални.

Да положим за краткост

$$g(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n.$$

Нека коренът $a$ е реален. Ние ще покажем, че може да се намери еднозначно реална константа $A$ и полином с реални коефициенти $h(x)$ по такъв начин, че да имаме

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{h(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)}. \tag{1}$$

Ще започнем с по-простия въпрос — с въпроса за единственост.

Да допуснем за момент, че наистина съществува константа $A$ и полином $h(x)$ с исканото свойство. В такъв случай имаме

$$g(x) = A\varphi(x) + h(x)(x-a). \tag{2}$$

Равенството (1) има смисъл, разбира се, само при такива стойности на $x$, за които $f(x) \neq 0$. По-специално трябва да имаме $x \neq a$. Поне при тези стойности на $x$ е валидно и равенството (2). По този начин е осигурена валидността на равенството (2) при безбройно много стойности на $x$. От това обаче следва, че това равенство е валидно при всички стойности на $x$ без изключение.[2] Специално при $x=a$ получаваме

$$g(a) = A\varphi(a)$$

и следователно

$$A = \frac{g(a)}{\varphi(a)} \tag{3}$$

и

$$h(x) = \frac{\varphi(a)g(x) - g(a)\varphi(x)}{(x-a)\varphi(a)}. \tag{4}$$

---

намираме

$$f(x) = \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \cdots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m.$$

Да положим

$$\varphi(x) = \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} + \cdots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^{m-\alpha}.$$

В такъв случай

$$f(x) = (x-a)^\alpha \varphi(x)$$

и

$$\varphi(a) = \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} \neq 0.$$

[1] Числото $\alpha$ се нарича кратност на корена $a$.

[2] Ние знаем, че ако два полинома приемат една и съща стойност при безбройно много стойности на независимата променлива, те са тъждествено равни помежду си.



С това е показано, че константата $A$ и полиномът $h(x)$ не могат да бъдат други освен тези, които се дават от равенствата (3) и (4) (ако въобще интересуващата ни задача за представяне на функцията $\frac{g(x)}{f(x)}$ във вида (1) има решение). По този начин ние получихме (положителен) отговор на въпроса за единственост.

Преминаваме към въпроса за съществуване. Тук ще се ръководим от резултатите, които добихме, изследвайки въпроса за единственост.

Разглеждаме помощния полином

$$\psi(x) = g(x) - A\varphi(x), \tag{5}$$

където[1]

$$A = \frac{g(a)}{\varphi(a)}.$$

В такъв случай очевидно имаме

$$\psi(a) = g(a) - \frac{g(a)}{\varphi(a)}\varphi(a) = 0.$$

Въз основа на този резултат ние можем да твърдим (както ни учи висшата алгебра[2]), че полиномът $\psi(x)$ се дели без остатък на $x-a$. Това означава, че полиномът $\psi(x)$ може да се представи във вида

$$\psi(x) = (x-a)h(x), \tag{6}$$

където $h(x)$ е полином. Равенствата (5) и (6) ни дават

$$g(x) = A\varphi(x) + (x-a)h(x),$$

откъдето

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A\varphi(x)}{f(x)} + \frac{(x-a)h(x)}{f(x)}$$

и следователно

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{h(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)}.$$

---

[1] При избора на константата $A$ ние се ръководим от равенството (3).

[2] Верността на това твърдение е очевидна, ако полиномът $\psi(x)$ се анулира тъждествено. Ако полиномът $\psi(x)$ не се анулира тъждествено, ние ще означим с $k$ неговата степен. В такъв случай, като вземем под внимание, че $\psi(a)=0$, получаваме от формулата на Тейлор равенството

$$\psi(x) = \frac{\psi'(a)}{1!}(x-a) + \frac{\psi''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{\psi^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

или

$$\psi(x) = (x-a)\left[\frac{\psi'(a)}{1!} + \frac{\psi''(a)}{2!}(x-a) + \cdots + \frac{\psi^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-1}\right].$$

С това твърдението е доказано.

С това ние доказахме, че е възможно да се намери по такъв начин една константа $A$ и един полином $h(x)$, че да имаме (1) при всички стойности на $x$, за които $f(x) \neq 0$.

Като приложим няколко пъти получения резултат, ние добиваме възможност да представим функцията $\frac{g(x)}{f(x)}$ във вида

$$(7) \qquad \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{p(x)}{\varphi(x)},$$

където $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$ са константи, а $p(x)$ е полином на $x$.

За да се убедим в това, представяме $\frac{g(x)}{f(x)}$ във вида

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{g_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)},$$

където $A_1$ е константа и $g_1(x)$ е полином. Както вече знаем от току-що доказаната теорема, това може да се направи. Като приложим още веднъж тази теорема, заключваме, че функцията

$$\frac{g_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)}$$

може да се представи във вида

$$\frac{g_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{g_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\varphi(x)}$$

(разбира се, когато $\alpha - 1 > 0$).

Продължавайки тези разсъждения, намираме

$$\frac{g_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\varphi(x)} = \frac{A_3}{(x-a)^{\alpha-2}} + \frac{g_3(x)}{(x-a)^{\alpha-3}\varphi(x)},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{g_{\alpha-1}(x)}{(x-a)\varphi(x)} = \frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{g_\alpha(x)}{\varphi(x)}.$$

От тази верига равенства получаваме равенството (7), където

$$p(x) = g_\alpha(x).$$

Представянето (7) е валидно и тогава, когато $a$ е комплексно число. В такъв случай обаче ние не можем да твърдим изобщо, че коефициентите $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$ са реални. Но и в този случай ние можем да дадем едно разлагане на рационалната функция $\frac{g(x)}{f(x)}$, при което няма да става нужда да напускаме областта на реалните числа.



От висшата алгебра е известно следното: ако коефициентите на уравнението

$$f(x) = 0,$$

където

$$f(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \cdots + q_m$$

са реални и $a$ е един корен на това уравнение от кратност $\alpha$, то числото $\bar{a}$ е също[1] негов корен от кратност $\alpha$. В случая, когато коренът $a$ не е реален, ние можем (както знаем от висшата алгебра) да представим полинома $f(x)$ във вида

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-\bar{a})^\alpha P(x),$$

където $P(x)$ е полином с реални коефициенти и $P(a) \neq 0$. Разкривайки скобите, ние получаваме

$$(x-a)(x-\bar{a}) = x^2 - (a+\bar{a})x + a\bar{a}.$$

Ако означим реалните числа $-(a+\bar{a})$ и $a\bar{a}$ съответно с $p$ и $q$, получаваме

$$f(x) = (x^2+px+q)^\alpha P(x).$$

И така нека коренът $a$ не е реален. Ще покажем, че е възможно да се изберат (и то еднозначно) две реални константи $M$ и $N$ и полином с реални коефициенти $Q(x)$ по такъв начин, че при $f(x) \neq 0$ да имаме

$$(8) \qquad \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\alpha} + \frac{Q(x)}{(x^2+px+q)^{\alpha-1} P(x)}.$$

Ние и тук, както по-горе, ще започнем с по-простия (и по-малко интересния) въпрос за единственост. Ако допуснем, че съществуват две реални константи $M$ и $N$ и полином $Q(x)$ с реални константи $M$ и $N$ и полином $Q(x)$ с реални коефициенти, за които е изпълнено равенството (8) при $f(x) \neq 0$, то в такъв случай при всички стойности на $x$ ще имаме

$$(9) \qquad g(x) = (Mx+N)P(x) + Q(x)(x^2+px+q).$$

Специално при $x = a$ получаваме

$$(10) \qquad g(a) = (Ma+N)P(a).$$

Да представим комплексните числа $a$ и $\frac{g(a)}{P(a)}$ във вида

$$a = u + iv, \quad \frac{g(a)}{P(a)} = r + is,$$

[1] Нека $a = u + iv$, където $u$ и $v$ са реални числа. Със знака $\bar{a}$ се означава числото $u - iv$. Числото $\bar{a}$ се нарича конюговано или спрегнато на $a$.

където $u$, $\bar{v}$, $r$, $s$ са реални числа. В такъв случай уравнението (10) приема вида

(11) $$r+is=M(u+iv)+N.$$

Като приравним реалните и имагинерните части от двете страни на равенството (11), намираме

(12) $$r=Mu+N,$$
$$s=Mv.$$

От тази система получаваме еднозначно $M$ и $N$, защото $v\neq 0$ (тук ние използуваме съществено условието за нереалност на корена $a$). След като са определени еднозначно константите $M$ и $N$, добиваме възможност да определим еднозначно и полинома $Q(x)$, като си послужим с равенството (9). С това е решен интересуващият ни въпрос за единственост. За нашите нужди е по-важен обаче съответният въпрос за съществуване. Преминаваме към разглеждането на този въпрос, като се ръководим от резултатите, които получихме, изследвайки единствеността.

Образуваме си системата (12) и определяме от нея $M$ и $N$ (реалните числа $u$, $v$, $r$ и $s$ са познати, защото числото $a$ и полиномите $g(x)$ и $P(x)$ са дадени). Ние можем да определим $M$ и $N$ от тази система, защото $v\neq 0$. Пресметнатите по този начин числа $M$ и $N$ са реални, защото числата $u$, $v$, $r$ и $s$ са реални.

Разглеждаме помощния полином

$$H(x)=g(x)-(Mx+N)P(x).$$

Този полином се анулира при $x=a$, защото при направения избор на константите $M$ и $N$ са изпълнени равенствата (12).

И наистина от равенствата (12) следва, че е изпълнено равенството (1), а от последното равенство следва равенството (10). От друга страна, коефициентите на $H(x)$ са реални. Това ни дава право[1] да заключим, че този полином се анулира и при $x=\bar{a}$.

[1] Това е известно от висшата алгебра. Доказателството може да се извърши например, като се възползуваме от лесно проверимите равенства $\overline{\xi+\eta}=\bar{\xi}+\bar{\eta}$, $\overline{\xi\eta}=\bar{\xi}\cdot\bar{\eta}$. И наистина нека числата $a_0, a_1, \ldots, a_n$ са реални; разглеждаме числото

$$c=a_0 a^n+a_1 a^{n-1}+\cdots+a_{n-1}a+a_n;$$

в такъв случай очевидно

$$\bar{c}=\bar{a}_0\bar{a}^n+\bar{a}_0\,\bar{a}^{n-1}+\cdots+\bar{a}_{n-1}\bar{a}+\bar{a}_n=$$
$$=a_0\bar{a}^n+a_1\bar{a}^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\bar{a}+a_n;$$

от друга страна, при $c=0$ имаме $\bar{c}=0$ и следователно, ако $a$ е корен на уравнението

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

коефициентите на което са реални, то числото $\bar{a}$ е корен на същото уравнение.



Числата $\bar{a}$ и $a$ са обаче различни, защото коренът $a$ не е реален. Оттук заключаваме, че полиномът $H(x)$ се дели без остатък на полинома

$$(x-a)(x-\bar{a})=x^2+px+q.$$

Това значи, че имаме

(13) $$g(x)-(Mx+N)P(x)=(x^2+px+q)\,Q(x),$$

където $Q(x)$ е полином. Като вземем под внимание, че константите $M$, $N$, $p$ и $q$, както и коефициентите на полиномите $g(x)$ и $P(x)$ се реални, заключаваме, че коефициентите на полинома $Q(x)$ са също реални.

От равенството (13) намираме

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}+\frac{Q(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}P(x)}.$$

С това е решен и интересуващият ни въпрос за съществуване.

Получените дотук резултати ни позволяват да представим всяка дробна рационална функция[1]

$$R(x)=\frac{g(x)}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x^2+px+q)^\lambda\cdots}$$

във вида

$$R(x)=\frac{A_1}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_\alpha}{x-a}+$$
$$+\frac{B_1}{(x-b)^\beta}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_\beta}{x-b}+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^\lambda}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{x^2+px+q}+\cdots+S(x),$$

където $A_1, A_2, \ldots, M_1, N_1$ са константи и $S(x)$ е полином.

Да разгледаме като пример функцията

(15) $$R(x)=\frac{x^4}{(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2}.$$

В такъв случай съгласно това, което казахме, ние можем да представим функцията $R(x)$ във вида

(16) $$R(x)=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2}+$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{x^2+x+1}+S(x),$$

[1] Без да ограничаваме общността, можем да считаме, че коефициентът $q_0$ пред $x^m$ в полинома

$$f(x)=q_0x^m+q_1x^{m-1}+\cdots+q_{m-1}x+q_m$$

е равен на единица.

където $A_1$, $A_2$, $B$, $M_1$, $M_2$, $N_2$ са константи и $S(x)$ е полином. И наистина[1], както знаем, ние можем да представим функцията

$$R(x)=\frac{x^4}{(x-1)^2[(x+1)(x^2+x+1)^2]}$$

във вида

$$R(x)=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{g_1(x)}{(x-1)[(x+1)(x^2+x+1)^2]},$$

където $A_1$ е константа и $g_1(x)$ е полином. Като извършим аналогично разлагане на функцията

$$\frac{g_1(x)}{(x-1)[(x+1)(x^2+x+1)^2]}$$

въз основа на същата помощна теорема, получаваме

$$R(x)=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{g_2(x)}{(x+1)(x^2+x+1)^2},$$

където $A_2$ е константа и $g_2(x)$ е полином.

Като разложим по аналогичен начин функцията

$$\frac{g_2(x)}{(x+1)(x^2+x+1)^2},$$

получаваме

$$R(x)=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{g_3(x)}{(x^2+x+1)^2},$$

където $B$ е константа и $g_3(x)$ е полином.

По-нататък разглагаме функцията

$$\frac{g_3(x)}{(x^2-x+1)^2}.$$

Това ни дава

$$R(x)=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{g_4(x)}{x^2+x+1},$$

където $M_1$ и $N_1$ са реални константи и $g_4(x)$ е полином. Като разложим найсетне функцията

$$\frac{g_4(x)}{x^2+x+1},$$

получаваме

$$R(x)=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+x+1}+S(x),$$

където $M_2$ и $N_2$ са реални константи и $S(x)$ е полином. С това ние получаваме желаното представяне (16).

В нашия специален случай полиномът $S(x)$ се анулира тъждествено. И наистина, като се освободим от знаменателя, получаваме

[1] Изводът на общата формула (14) става, разбира се, по същия начин. Нека читателят сам обмисли подробностите.



$$x^4=(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2\left[\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\right.$$
$$\left.+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+x+1}\right]+(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2S(x). \tag{17}$$

Изразът

$$(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2\left[\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\right.$$
$$\left.+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+x+1}\right]$$

представлява полином[1], чиято степен е сигурно по-малка[2] от 7. Нека допуснем за момент, че полиномът $S(x)$ не се анулира тъждествено. В такъв случай произведението

$$S(x)(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2$$

представлява полином, чиято степен сигурно не е по-малка[3] от 7. От това заключаваме, че в дясната страна на равенството (17) имаме полином, чиято степен не е по-малка от 7. Това обаче не е възможно, защото в лявата страна на това равенство имаме полином, чиято степен е по-малка от 7.

Тези разсъждения могат да се извършат и в общия случай. Те ни позволяват да твърдим, че ако числителят $g(x)$ на рационалната функция $R(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$ има степен, по-малка от степента на знаменателя

$$f(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x^2+bx+q)^\lambda\ldots,$$

то полиномът $S(x)$ във формулата (14) сигурно се анулира тъждествено.[4] Нека отбележим на това място, че извършвайки деление, ние можем да представим всяка дробна рационална функция като сума от един полином и един остатък, който представлява дробна рационална функция, при която степента на числителя е по-малка от степента на знаменателя. Поради това се препоръчва да се извърши делението, преди да се използува формулата (14).

[1] След разкриване на скобите знаменателите се съкращават.

[2] Нека обърнем внимание върху това, че степента на полинома

$$(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2,$$

който фигурира в знаменателя на дробната рационална функция (15), е равна на 7.

[3] Когато $S(x)$ е (различна от нула) константа, степента на произведението

$$S(x)(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2$$

е равна на 7. Когато $S(x)$ е полином от по-висока степен, степента на разглежданото произведение е по-голяма от 7.

[4] Нека читателят сам докаже това, като умножи двете части на равенството (14) с полинома

$$f(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x^2+px+q)^\lambda\ldots$$

и сравни степените на полиномите, които ще получи по този начин от двете страни на това равенство.

Като пример да разгледаме функцията

$$R(x)=\frac{x^5+x^4-x^2-x+1}{x^3-1}.$$

Тук степента на числителя е по-висока от степента на знаменателя. Поради това ние първо извършваме деление, което ни дава

$$R(x)=x^2+x+\frac{1}{x^3-1}.$$

Като приложим формулата (14) към дробната рационална функция $\frac{1}{x^3-1}$, при която степента на числителя е вече по-малка от степента на знаменателя, получаваме[1]

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

и следователно

$$R(x)=x^2+x+\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Рационалните функции от вида

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}},\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}\quad (p^2-4q<0),$$

където $A$, $M$, $N$, $a$, $p$, $q$, $\alpha$, $\lambda$ са константи, от които константите $\alpha$ и $\lambda$ са цели и положителни, се наричат елементарни дроби. Използувайки тази терминология, ние можем да формулираме по следния начин резултата, до който достигнахме: всяка дробна рационална функция, при която степента на числителя е по-малка от степента на знаменателя, може да се представи като сума от елементарни дроби.

## § 7. Пресмятане на коефициентите

**(Продължение на § 6)**

Пресмятането на коефициентите във формулата (14) от предния параграф може да се извърши по различни начини.

I. Ще разгледаме първо така наречения метод на сравняване на коефициентите (или както често се казва, метод на неопределените коефициенти). За целта се освобождаваме от знаменателите в равенството (14) от предния параграф и правим приведение на

[1] Ние можем да твърдим сега, че полиномът $S(x)$ от формулата (14) се анулира тъждествено, защото степента на числителя на рационалната функция $\frac{1}{x^3-1}$ е по-малка от степента на знаменателя ѝ.



подобните членове. Като приравним коефициентите пред еднаквите степени на $x$ в двете страни на така намереното равенство, получаваме уравнения, от които определяме неизвестните коефициенти.[1] Читателят най-добре ще разбере смисъла на това, което казахме, като проучи следващите примери.

Пример 1. Да се представи като сума от елементарни дроби следната рационална функция:

$$R(x)=\frac{x^3}{(x-1)(x^3-1)}.$$

Решение. Разлагаме знаменателя на множители. Това ни дава

$$R(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Степента на числителя на разглежданата рационална функция е по-малка от степента на знаменателя. Поради това ние можем да представим тази функция като сума от елементарни дроби така:

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

По този начин задачата се свежда към пресмятането на коефициентите $A$, $B$, $M$ и $N$, нещо, което може да стане, както казахме, по следния начин: освобождаваме се от знаменателите; това ни дава

$$x^3=A(x^2+x+1)+B(x-1)(x^2+x+1)+(Mx+N)(x-1)^2$$

или още

$$x^3=(B+M)x^3+(A-2M+N)x^2+$$
$$+(A+M-2N)x+A-B+N;$$

приравняваме коефициентите пред съответните степени на $x$ и получаваме

$$B+M=1,$$
$$A-2M+N=0,$$
$$A+M-2N=0,$$
$$A-B+N=0.$$

По този начин намерихме една линейна система относно неизвестните коефициенти $A$, $B$, $M$, $N$, от която получаваме

$$A=\frac{1}{3},\quad B=\frac{2}{3},\quad M=\frac{1}{3},\quad N=\frac{1}{3}.$$

[1] Разбира се, тук е уместно да се постави въпросът, дали така получената система има решение и дали това решение е единствено. Отговорът на този въпрос не е сложен. Твърдението за съществуване и за единственост на решението на така получената система е еквивалентно с твърдението за съществуване (което ние доказахме) и за единственост (което ние не доказахме, но което лесно се доказва) на представянето (14) от предния параграф и следователно е вярно. Ние тук изоставяме подробностите. Нека читателят сам ги обмисли.

и следователно

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{1}{3(x-1)^2}+\frac{2}{3(x-1)}+\frac{x+1}{3(x^2+x+1)}.$$

Пример 2. Да се представи като сума от елементарни дроби следната рационална функция:

$$R(x)=\frac{1}{x^2(x-1)}.$$

Решение. Съгласно формулата (14) от предния параграф имаме

$$\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}.$$

Оттук получаваме

$$1=A(x-1)+Bx(x-1)+Cx^2$$

или

$$1=(C+B)x^2+(A-B)x-A.$$

Като приравним съответните коефициенти, намираме

$$C+B=0,$$
$$A-B=0,$$
$$-A=1,$$

откъдето

$$A=-1,\qquad B=-1,\qquad C=1.$$

II. Определянето на коефициентите във формулата (14) от предния параграф може да стане и по други начини. Ние ще изясним с няколко примера същността на един такъв начин.

Пример 1. Да се представи като сума от елементарни дроби следната рационална функция:

$$R(x)=\frac{x+2}{x^2-2x-3}.$$

Очевидно имаме

$$R(x)=\frac{x+2}{(x+1)(x-3)}.$$

Степента на числителя в случая е по-малка от степента на знаменателя и следователно

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}.$$

Освобождаваме се от знаменателя. Това ни дава

(1) $$x+2=A(x-3)+B(x+1).$$

Функцията $R(x)$ е дефинирана, разбира се, само при онези стойности на $x$, за които $x^2-2x-3\neq 0$. Напротив, равенството (1) е валидно при всички стойности



на $x$ без изключение.[1] Специално при $x=-1$ намираме $1=-4A$, т. е. $A=-\frac{1}{4}$, а при $x=3$ намираме $5=4B$ или $B=\frac{5}{4}$.

И така

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-3)}=\frac{-1}{4(x+1)}+\frac{5}{4(x-3)}.$$

Пример 2. Да се представи като сума от елементарни дроби следната рационална функция:

(2) $$R(x)=\frac{x}{x^4-1}.$$

Очевидно имаме

$$\frac{x}{x^4-1}=\frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}.$$

Като вземем под внимание, че степента на числителя в случая е по-малка от степента на знаменателя, получаваме

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Освобождаваме се от знаменателя. Това ни дава

(3) $$x=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)(x+1).$$

Функцията (2) е дефинирана само при онези стойности на $x$, при които $x^4-1\neq 0$. При тези стойности на $x$ е валидно и равенството (3). В двете части на това равенство имаме обаче полиноми. Като вземем под внимание, че разглежданото равенство е валидно при безбройно много стойности на $x$, заключаваме, че то е валидно при всички стойности на $x$ без изключение.[2] Специално при $x=1$ намираме

$$1=4A,\qquad A=\frac{1}{4};$$

при $x=-1$ намираме

$$-1=-4B,\quad B=\frac{1}{4};$$

при $x=i$ получаваме

$$i=(Mi+N)(i-1)(i+1)$$

или

(4) $$i=-2Mi-2N.$$

Като сравним реалните и имагинерните части в двете страни на равенството (4) намираме

[1] И наистина равенството (1) е сигурно валидно при $x^2-2x-3\neq 0$, т. е. при безкрайно много стойности на $x$. Като вземем под внимание, че от двете страни на това равенство имаме полиноми, заключаваме, че съответните им коефициенти са равни помежду си и следователно равенството (1) е валидно при всички стойности на $x$ без изключение.

[2] Това се отнася както за реални, така и за комплексни стойности на $x$. И наистина в двете страни на равенството (4) имаме полиноми със съответно равни коефициенти.

$$N=0, \quad M=-\frac{1}{2}.$$

П р и м е р 3. Да се представи като сума от елементарни дроби следната рационална функция:

$$R(x)=\frac{3x^3-1}{(x+1)^2(x-1)^3}.$$

Р е ш е н и е. Тъй като степента на числителя на $R(x)$ е по-малка от степента на знаменателя, то имаме

$$\frac{3x^3-1}{(x+1)^2(x-1)^3}=\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{B_1}{(x-1)^3}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{x-1}.$$

Като се освободим от знаменателя, намираме

(5) $$3x^3-1=A_1(x-1)^3+A_2(x+1)(x-1)^3+$$
$$+B_1(x+1)^2+B_2(x+1)^2(x-1)+B_3(x+1)^2(x-1)^2.$$

При $x=-1$ получаваме

$$-4=-8A_1, \quad A_1=\frac{1}{2}.$$

При $x=1$ получаваме

$$2=4B_1, \quad B_1=\frac{1}{2}.$$

Ние давахме на $x$ тъкмо онези стойности, при които се анулира знаменателят на $R(x)$, защото в такъв случай много от членовете в дясната страна на равенството (5) се анулират. Това опростява значително пресмятанията.[1] Ние можем да даваме на $x$, разбира се, и произволни значения. В нашия специален случай ще получим обаче по този път уравнения с няколко неизвестни.[2] За да избегнем необходимостта да решаваме система, ние ще предпочетем в случая да постъпим другояче. За целта представяме равенството (5) във вида

$$3x^3-1-A_1(x-1)^3-B_1(x+1)^2=$$
$$=A_2(x+1)(x-1)^3+B_2(x+1)^2(x-1)+B_3(x+1)^2(x-1)^2.$$

Като вземем под внимание намерените стойности $A_1$ и $B_1$, получаваме

$$\frac{(5x+2)(x+1)(x-1)}{2}=(x+1)(x-1)[A_2(x-1)^2+B_2(x+1)+B_3(x+1)(x-1)].$$

Съкращаваме на $(x+1)(x-1)$ и намираме

$$\frac{5x+2}{2}=A_2(x-1)^2+B_2(x+1)+B_3(x+1)(x-1).$$

Оттук при $x=-1$ получаваме

$$-\frac{3}{2}=4A_2, \quad A_2=-\frac{3}{8};$$

[1] По такъв начин определяме коефициентите от уравнения, които съдържат само по едно неизвестно.
[2] Това, разбира се, не представлява никаква принципиална трудност.



при $x=1$ намираме

$$\frac{7}{2}=2B_2, \quad B_2=\frac{7}{4};$$

Остана да се определи само коефициентът $B_3$. Това може да стане например, като положим $x=0$. В такъв случай получаваме

$$1=A_2+B_2-B_3,$$

т. е.

$$B_3=A_2+B_2-1=-\frac{3}{8}+\frac{7}{4}-1=\frac{3}{8}.$$

III. Да разгледаме рационалната функция

$$R(x)=\frac{g(x)}{f(x)},$$

където $f(x)$ и $g(x)$ са полиноми. Нека $x=a$ е един п р о с т корен на уравнението $f(x)=0$. Това значи, че $f(x)$ може да се представи във вида

$$f(x)=(x-a)\varphi(x),$$

където $\varphi(x)$ е полиномът на $x$ и $\varphi(a)\neq 0$.

Както знаем, ние можем да представим $R(x)$ във вида

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{h(x)}{\varphi(x)},$$

където $A$ е константа и $h(x)$ е полином. Ние ще покажем, че[1]

$$A=\frac{g(a)}{f'(a)}.$$

За тази цел ние се освобождаваме от знаменателя $f(x)$. По такъв начин получаваме

$$g(x)=\frac{Af(x)}{x-a}+h(x)(x-a)$$

или още

$$g(x)=A\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+h(x)(x-a).$$

[1] Не е трудно да се види, че $f'(a)\neq 0$. И наистина, като диференцираме равенството

$$f(x)=(x-a)\varphi(x),$$

получаваме

$$f'(x)=\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x).$$

Специално при $x=a$ намираме

$$f'(a)=\varphi(a),$$

т. е.

$$f'(a)\neq 0.$$

Като оставим $x$ да клони към $a$ чрез стойности, различни от $a$, получаваме

$$g(a)=Af'(a),$$

откъдето

$$A=\frac{g(a)}{f'(a)}.$$

## § 8. Интегриране на рационални функции

**(Продължение от § 6 и 7)**

Ние видяхме, че всяка рационална функция може да се представи като сума от функции от вида

$$Ax^m,\ \frac{B}{(x-a)^\alpha},\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},\ (p^2-4p<0).$$

По този начин интегралите от рационални функции могат да се представят като суми от следните видове интеграли:

(1) $$\int Ax^m\,dx,$$

където $m$ е цяло неотрицателно число;

(2) $$\int\frac{Bdx}{(x-a)^\alpha},$$

където $\alpha$ е цяло положително число, и

(3) $$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx,\ (p^2-4q<0),$$

където $n$ е цяло положително число.

Очевидно имаме

$$\int Ax^m\,dx=\frac{Ax^{m+1}}{m+1}+C.$$

$$\int\frac{Bdx}{(x-a)^\alpha}=B\int(x-a)^{-\alpha}\,d(x-a)=\frac{B}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}}+C$$

при $\alpha>1$ и

$$\int\frac{Bdx}{x-a}=B\ln|x-a|+C.$$

Остава да разгледаме интеграла

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx$$



при предположение, че корените на квадратното уравнение

$$x^2+px+q=0$$

не са реални и числото $n$ е цяло положително.

Ние ще положим

$$x=u-\frac{p}{2}.$$

Това ни дава

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx=\int\frac{M\left(u-\frac{p}{2}\right)+N}{\left(u^2-\frac{p^2}{4}+q\right)^n}\,du.$$

Да положим за краткост

$$\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=a.$$

Числата $a$ е реално и различно от нула, защото корените на квадратното уравнение

$$x^2+px+q=0$$

не са реални и следователно $p^2-4q<0$. Интересуващият ни интеграл приема вида

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx=M\int\frac{udu}{(u^2+a^2)^n}+\left(N-\frac{pM}{2}\right)\int\frac{du}{(u^2+a^2)^n}.$$

От друга страна, очевидно имаме

$$\int\frac{udu}{(u^2+a^2)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{d(u^2+a^2)}{(u^2+a^2)^n}=\frac{1}{2}\int(u^2+a^2)^{-n}\,d(u^2+a^2)=$$

$$=\frac{1}{2(1-n)}\cdot\frac{1}{(u^2+a^2)^{n-1}}+C$$

при $n>1$ и

$$\int\frac{udu}{u^2+a^2}=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{d(u^2+a^2)}{u^2+a^2}=\frac{1}{2}\ln(u^2+a^2)+C.$$

Остава да се пресметне интегралът

$$I_n=\int\frac{du}{(u^2+a^2)^n}.$$

При $n>1$ правим следните преобразувания:

$$I_n=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2du}{(u^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+u^2-u^2}{(u^2+a^2)^n}\,du=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+u^2}{(u^2+a^2)^n}\,du-\frac{1}{a^2}\int\frac{u^2}{(u^2+a^2)^n}\,du=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2}\int\frac{u\,d(u^2+a^2)}{(u^2+a^2)^n}=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\int u\,d\frac{1}{(u^2+a^2)^{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{u}{2a^2(n-1)(u^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2(n-1)}\int\frac{1}{(u^2+a^2)^{n-1}}\,du=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{u}{2a^2(n-1)(u^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2(n-1)}I_{n-1}=$$

$$=\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}+\frac{u}{2a^2(n-1)(u^2+a^2)^{n-1}}.$$

По този начин изразихме $I_n$ чрез $I_{n-1}$. Като извършим няколко пъти тези пресмятания, добиваме възможност да изразим интеграла $I_n$ чрез познатия интеграл

$$I_1=\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\frac{u}{a}}{\left(\frac{u}{a}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a}+C.$$

### Задачи

Да се пресметнат следните интеграли (интегрирането се извършва в произволно избран интервал, в който е дефинирана подинтегралната функция):

1. $I=\int\frac{2x^3+7x^2+4x+2}{2x+3}\,dx.$

Отговор. $I=\frac{x^3}{3}+x^2-x+\frac{5}{2}\ln|2x+3|+C.$

2. $I=\int\frac{2x+6}{2x^2+3x+1}\,dx.$

Отговор. $I=5\ln|2x+1|-4\ln|x+1|+C.$

3. $I=\int\frac{dx}{x^4-1}.$

Отговор. $I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$



4. $I=\int\frac{x\,dx}{x^3-1}+C.$

Отговор.

$$I=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

5. $I=\int\frac{4x^2+2}{x^3-x^2+x-1}\,dx.$

Отговор. $I=3\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arc\,tg}x+C.$

6. $I=\int\frac{4x^2-15x+19}{x^3-7x+6}\,dx.$

Отговор. $I=5\ln|x+3|+\ln|x-2|-2\ln|x-1|+C.$

7. $I=\int\frac{6x^2+17x+13}{(x+1)^3}\,dx.$

Отговор. $I=\frac{-1}{(x+1)^2}-\frac{5}{x+1}+6\ln|x+1|+C.$

8. $I=\int\frac{x^2-x+14}{(x-4)^2(x-2)}\,dx.$

Отговор. $I=-\frac{13}{x-4}+4\ln|x-2|-3\ln|x-4|+C.$

9. $I=\int\frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}\,dx.$

Отговор. $I=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+C.$

10. $I=\int\frac{7x}{x^3-5x^2+12x-60}\,dx.$

Отговор. $I=\frac{35}{37}\ln\frac{|x-5|}{\sqrt{x^2+12}}+\frac{42}{37\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2\sqrt{3}}+C.$

11. $I=\int\frac{x^2-x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx.$

Отговор. $I=\frac{2}{3}\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1}+\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

12. $I=\int\frac{dx}{x^4+1}.$

Отговор. $I=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.$

13. $I=\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx.$

Отговор. $I=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

## § 9. Интегриране на ирационални функции

В предните три параграфа ние изложихме един общ метод за пресмятане на интеграли от рационални функции. Въпросът за пресмятане на интеграли от ирационални функции е много по-сложен. Ние не разполагаме с общ метод, който да ни позволява да изразяваме интегралите от всякакви ирационални функции чрез елементарни функции[1] (без да прибягваме до граничен преход). Дори ние знаем от работите на Лиувил, Чебишев и Абел, че такъв метод не съществува.

В този параграф ние ще разгледаме някои категории интеграли от ирационални функции, които могат да се преобразуват в интеграли от рационални функции с помощта на подходящи субституции.

### *I. Интегриране на рационални функции на радикали на x*

Нека ни е даден интеграл от вида

$$\int R\left(x^{\frac{p_1}{q_1}},\ x^{\frac{p_2}{q_2}},\ \ldots,\ x^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx, \tag{1}$$

където $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е рационална[2] функция на $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Числата $p_1, p_2, \ldots, p_n$ са цели, а числата $q_1, q_2, \ldots, q_n$ са цели и положителни.

Пресмятането на този интеграл може да се извърши така: означаваме с $k$ най-малкото кратно на знаменателите $q_1, q_2, \ldots, q_n$; в такъв случай числата

$$\frac{kp_1}{q_1},\ \frac{kp_2}{q_2},\ \ldots,\ \frac{kp_n}{q_n}$$

ще бъдат цели; полагаме

$$x=t^k;$$

като вземем под внимание, че $dx=kt^{k-1}dt$, получаваме интеграла

$$\int R\left(t^{\frac{kp_1}{q_1}},\ t^{\frac{kp_2}{q_2}},\ \ldots,\ t^{\frac{kp_n}{q_n}}\right)kt^{k-1}\,dt.$$

[1] Тези думи се нуждаят очевидно от прецизиране. Ние няма да се спираме тук на този въпрос, защото това ще ни отведе твърде далеч.

[2] Това значи, че функцията $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представлява частно на два полинома.



По този начин приведохме дадения интеграл към интеграл от рационална функция.

Пример. Да се пресметне интегралът

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx,\quad x>0.$$

Интеграционната променлива $x$ фигурира в степен с показатели $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$. За да се освободим от тези ирационалности, полагаме $x=t^6$ (тук най-малкото кратно на знаменателите е 6). С помощта на тази субституция интегралът се преобразува в

$$\int \frac{t^3-1}{t^2-1}\,6t^5\,dt.$$

### *II. Интегриране на рационални функции на x и на радикали от една (дробна) линейна функция на x*

Ние ще покажем как могат да се пресмятат интеграли от вида

$$\int R\left[x,\ \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\ \ldots,\ \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right]dx, \tag{2}$$

където функцията $R(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ е рационална; числата $p_1, \ldots, p_n$ са цели; числата $q_1, \ldots, q_n$ са цели и положителни; $a, b, a_1, b_1$ са константи, подчинени на условието $ab_1-a_1b\neq 0$.[1]

Функциите от вида

$$y=\frac{ax+b}{a_1x+b_1} \tag{3}$$

се наричат дробни линейни. Това не изключва, разбира се, възможността да имаме например $a_1=0$, $b_1=1$, т. е. функцията (3) да има вида

$$y=ax+b.$$

[1] Ако $ab_1-a_1b=0$, то отношението

$$y=\frac{ax+b}{a_1x+b_1}$$

не зависи от $x$, защото

$$y'=\frac{ab_1-a_1b}{(a_1x+b_1)^2}=0.$$

В такъв случай интегралът (2) е интеграл от рационална функция.

Независимо от това, ако $ab_1-a_1b=0$, то субституцията (4) въобще не може да се използува за пресмятане на интеграли. Така например в този случай от дясната страна на равенството (5) имаме константа, поради което това равенство очевидно не е вярно. Не противоречи ли това на формулата (5), която ние доказахме в § 4 на тази глава?

Специално при $a=1$, $b=0$, $a_1=0$, $b_1=1$ получаваме интеграла, който разгледахме преди малко.

Пресмятането на интеграла (2) може да се извърши с помощта на субституцията

$$\frac{ax+b}{a_1x+b_1}=t^k,$$

където $k$ означава най-малкото кратно на знаменателите $q_1, \ldots, q_n$. В такъв случай получаваме

(4) $$x=\frac{b_1t^k-b}{a-a_1t^k}, \quad dx=k\frac{ab_1-ba_1}{(a-a_1t^k)^2}t^{k-1}\,dt$$

и следователно (2) се преобразува в

(5) $$\int R\left[\frac{b_1t^k-b}{a-a_1t^k}, t^{\frac{kp_1}{q_1}}, \ldots, t^{\frac{kp_n}{q_n}}\right]\cdot k\frac{ab_1-ba_1}{(a-a_1t^k)^2}t^{k-1}\,dt.$$

По този начин ние преобразувахме интеграла (2) в интеграл от рационална функция $\left[\text{числата } \frac{kp_1}{q_1}, \ldots, \frac{kp_n}{q_n} \text{ са цели}\right]$.

Пример 1. Да се пресметне интегралът

$$\int\frac{x\,dx}{1+\sqrt{1+x}}, \quad x>-1.$$

За да се освободим от радикала под знака на интеграла, полагаме

$$1+x=t^2, \qquad t>0.$$

Това ни дава

$$x=t^2-1, \qquad dx=2t\,dt.$$

По такъв начин даденият интеграл се преобразува в

$$2\int\frac{(t^2-1)t}{1+t}\,dt=2\int(t-1)t\,dt=\frac{2}{3}t^3-t^2+C$$

и следователно

$$\int\frac{x\,dx}{1+\sqrt{1+x}}=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}-1-x+C.$$

Пример 2. Да се пресметне интегралът

$$\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{dx}{(2-x)^2}, \quad -2<x<2.$$

За да се освободим от корена под знака на интеграла, полагаме

$$\frac{2-x}{2+x}=t^3.$$



Това ни дава

$$x=2\frac{1-t^3}{1+t^3}, \quad dx=-12\frac{t^2\,dt}{(1+t^3)^2}.$$

След тази субституция получаваме

$$-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^3}=\frac{3}{8}t^{-2}+C$$

и следователно

$$\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{dx}{(2-x)^2}=\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C.$$

## III. *Субституции на Ойлер*

Нека $R(x, y)$ е рационална функция на $x$ и $y$. Ще покажем как се пресмятат интеграли от вида

(6) $$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \quad a\neq 0.$$

При това ще предполагаме, че радикалът $\sqrt{ax^2+bx+c}$ е реален в интервала, в който пресмятаме интеграла. В такъв случай, ако корените на квадратното уравнение на $ax^2+bx+c=0$ са комплексни или равни помежду си, то непременно ще имаме $a>0$. И наистина в противен случай квадратният тричлен $ax^2+bx+c=0$ би приемал само отрицателни стойности с евентуално изключение на една точка противно на направеното допускане, според което радикалът $\sqrt{ax^2+bx+c}$ приема реални стойности в интеграционния интервал.

### 1. Първа субституция на Ойлер (Euler)

Нека $a>0$. В такъв случай, ако положим

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=u+x\sqrt{a},$$

намираме

$$x=\frac{u^2-c}{b-2u\sqrt{a}}$$

и следователно

$$dx=-2\frac{u^2\sqrt{a}-bu+c\sqrt{a}}{(b-2u\sqrt{a})^2}\,du,$$

От друга страна,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=u+x\sqrt{a}=\frac{u^2\sqrt{a}-bu+c\sqrt{a}}{2u\sqrt{a}-b}.$$

По такъв начин интегралът (6) се преобразува в

$$-2\int R\left(\frac{u^2-c}{b-2u\sqrt{a}},\ \frac{u^2\sqrt{a}-bu+c\sqrt{a}}{2u\sqrt{a}-b}\right)\frac{u^2\sqrt{a}-bu+c\sqrt{a}}{(b-2u\sqrt{a})^2}\,du,$$

т. е. в интеграл от рационална функция.

**Пример.** Да се пресметне интегралът

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Полагаме

$$\sqrt{x^2+x+1}=x+u.$$

Това ни дава

$$x=\frac{u^2-1}{1-2u},$$

$$dx=\frac{2(u-u^2-1)}{(1-2u)^2}\,.\,du,$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=x+u=\frac{u-u^2-1}{1-2u}.$$

По такъв начин намираме

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=2\int\frac{du}{1-2u}=-\ln|1-2u|+C=$$

$$=\ln\frac{1}{|1+2x-2\sqrt{x^2+x+1}|}+C.$$

## 2. Втора субституция на Ойлер

Нека корените на квадратното уравнение $ax^2+bx+c=0$ са реални и различни. В такъв случай интересуващият ни интеграл може да се пресметне с помощта на субституцията

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)\,u,$$

където $\alpha$ е един от корените на уравнението $ax^2+bx+c=0$. Да означим с $\beta$ другия корен. В такъв случай получаваме

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)}=(x-\alpha)u$$

и следователно

$$a\,(x-\beta)=(x-\alpha)u^2,$$

$$x=\frac{\alpha u^2-\beta a}{u^2-a},\quad dx=\frac{2au\,(\beta-\alpha)}{(u^2-a)^2}\,du$$

и

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\left(\frac{\alpha u^2-\beta a}{u^2-a}-\alpha\right)u=\frac{ua\,(\alpha-\beta)}{u^2-a}.$$



По такъв начин интегралът (6) се преобразува в

$$\int R\left[\frac{\alpha u^2-\beta a}{u^2-a},\ \frac{ua\,(\alpha-\beta)}{u^2-a}\right]\frac{2au\,(\beta-\alpha)}{(u^2-a)^2}\,du,$$

т. е. в интеграл от рационална функция.

**Пример.** Да се пресметне интегралът

$$\int\frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}},\qquad x>1.$$

Полагаме

$$\sqrt{(x+4)(x-1)}=u\,(x-1).$$

Тази субституция ни дава

$$x=\frac{4+u^2}{u^2-1},$$

$$dx=-10\,\frac{u\,du}{(u^2-1)^2}.$$

По такъв начин получаваме интеграла

$$-\frac{2}{5}\int\frac{du}{u^2}=\frac{2}{5u}+C$$

и следователно

$$\int\frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C.$$

## 3. Трета субституция на Ойлер

Първите две субституции на Ойлер са напълно достатъчни, за да можем да пресмятаме всякакви интеграли от вида (6). Така, ако корените на квадратното уравнение $ax^2+bx+c=0$ не са реални (т. е. ако не може да се използува втората субституция на Ойлер), то, както вече отбелязахме, сигурно $a>0$ и следователно можем да приложим първата субституция. Все пак ние ще посочим още следната субституция, която в някои случаи води по-бързо до целта:

(7) $$\sqrt{ax^2+bx+c}=xu+\sqrt{c}.$$

Тази субституция може да се прилага при $c>0$. От равенството (7) получаваме

$$x=\frac{b-2u\sqrt{c}}{u^2-a},$$

$$dx=2\,\frac{u^2\sqrt{c}-bu+a\sqrt{c}}{(a-u^2)^2}\,du$$

и

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{b-2u\sqrt{c}}{u^2-a}u+\sqrt{c}=\frac{u^2\sqrt{c}-bu+a\sqrt{c}}{a-u^2},$$

откъдето намираме интеграла

$$2\int R\left[\frac{2u\sqrt{c}-b}{a-u^2},\ \frac{u^2\sqrt{c}-bu+a\sqrt{c}}{a-u^2}\right]\frac{u^2\sqrt{c}-bu+a\sqrt{c}}{(a-u^2)^2}\,du.$$

По такъв начин преобразувахме (6) в интеграл от рационална функция.

Нека обърнем внимание на това, че един интеграл може да спада, разбира се, едновременно към няколко от разгледаните типове. Така например към интеграла

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}}$$

могат да се приложат и трите субституции на Ойлер. Ще приложим третата от тях:

$$\sqrt{x^2-5x+4}=xu+2.$$

По такъв начин намираме

$$x=\frac{5+4u}{1-u^2},$$

$$dx=\frac{4+10u+4u^2}{(1-u^2)^2}\,du,$$

$$\sqrt{x^2-5x+4}=xu+2=\frac{2+5u+2u^2}{1-u^2},$$

след което получаваме интеграла

$$2\int\frac{du}{1-u^2}=\int\frac{du}{1-u}+\int\frac{du}{1+u}=-\ln|1-u|+\ln|1+u|+C$$

и следователно

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}}=\ln\left|\frac{x-2+\sqrt{x^2-5x+4}}{x+2-\sqrt{x^2-5x+4}}\right|+C.$$

Накрая нека отбележим, че интегралът (6) може да се рационализира и с помощта на други субституции. Така например при $a>0$ може да се използува субституцията

(8) $$\sqrt{ax^2+bx+c}=u-x\sqrt{a},$$

а при $c>0$ може да се използува субституцията

(9) $$\sqrt{ax^2+bx+c}=xu-\sqrt{c}$$

и пр. Покажете сами, че субституциите (8) и (9) наистина преобразуват интеграла (6) в интеграли от рационални функции.



### IV. Абелеви интеграли

Нека $R(x, y)$ е рационална функция на $x$ и $y$ и нека $y=\varphi(x)$ е една функция, определена в някой интервал $\Delta$, която удовлетворява уравнението

(10) $$F(x, y)=0.$$

Да разгледаме интеграла

(11) $$\int R(x, y)\,dx,$$

където $y=\varphi(x)$ (под интеграла имаме по този начин функция само на $x$). Интеграл от този вид се нарича Абелев интеграл относно кривата (10).

Така например интегралът

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

който ние разгледахме по-горе, може да се напише във вида

$$\int R(x, y)\,dx,$$

където

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c},$$

и следователно представлява един Абелев интеграл относно коничното сечение

$$y^2=ax^2+bx+c.$$

Има случаи, при които кривата (10) притежава рационално параметрично представяне, т. е. такова параметрично представяне[1]

$$x=f(t),$$
$$y=g(t),$$

---

[1] Казваме, че уравненията

(12) $$x=f(t),\quad y=g(t),$$

където параметърът $t$ се мени в някой интервал $\Delta$, ни дават едно параметрично представяне на кривата

(13) $$F(x, y)=0,$$

когато при всеки избор на $t$ от $\Delta$ точката с координати $[f(t), g(t)]$ лежи върху кривата (13) и, обратно, всяка точка от кривата (13) с евентуално изключение на краен брой такива точки, може да се получи от уравненията (12) при подходяща стойност на параметъра $t$ от $\Delta$.

при което $f(t)$ и $g(t)$ са рационални функции на $t$ в някой интервал. В такъв случай Абелевият интеграл (11) може да се преобразува в интеграл от рационална функция по следния начин:

$$\int R[f(t), g(t)]\,df(t)=\int R[f(t),\ g(t)]f'(t)\,dt.$$

Кривата, която притежава рационално параметрично представяне, се нарича уникурзална крива. Така например, както е известно от аналитичната геометрия, всяко неизродено конично сечение представлява уникурзална крива. Кривата с уравнение

$$x^3+y^3-3axy=0, \quad a\neq 0$$

(тази крива се нарича Декартов лист) е също тъй уникурзална. И наистина, ако положим $y=tx$, получаваме

$$x^3+t^3x^3-3ax\,.\,tx=0,$$

откъдето[1]

$$x=\frac{3at}{1+t^3},$$

$$y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

## V. Диференциален бином

Изразът $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, в който $m$, $n$, $p$ са рационални числа, а коефициентите $a$ и $b$ са произволни различни от нула константи, се нарича диференциален бином.

Ако поне едно от числата

$$p, \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m+1}{n}+p$$

[1] При $t\neq -1$ точката с координати

$$x=\frac{3at}{1+t^3},$$

$$y=\frac{3at^2}{1+t^3} \tag{14}$$

лежи върху Декартовия лист (това се вижда например с непосредствено заместване) и, обратно, всяка точка $(x_0, y_0)$ от Декартовия лист може да се получи от уравненията (14) при подходящ избор на $t$ (за да се убедим в това, достатъчно е при $x_0\neq 0$ да изберем $t=\frac{y_0}{x_0}$, а при $x_0=0$ да изберем $t=0$).



е цяло, то интегралът

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx \tag{15}$$

може да се преобразува в интеграл от рационална функция. Ще разгледаме поотделно всеки един от тези случаи.

1. Ако числото $p$ е цяло, то имаме познатия случай, който разгледахме в т. I (интеграл от рационална функция на радикали).

2. Ако числото $\frac{m+1}{n}$ е цяло, полагаме

$$a+bx^n=u.$$

В такъв случай получаваме

$$x=\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad dx=\frac{1}{n}\frac{(u-a)^{\frac{1}{n}-1}}{b^{\frac{1}{n}}}\,du$$

и следователно (15) се преобразува в

$$\frac{1}{n}\,b^{-\frac{m+1}{n}}\int u^p(u-a)^{\frac{m+1}{n}-1}\,du.$$

Като вземем под внимание, че числото $\frac{m+1}{n}$ е цяло, заключаваме, че така полученият интеграл спада към класата интеграли, които ние разгледахме в т. I (интеграл от рационална функция на радикали), и следователно може да се преобразува в интеграл от рационална функция.

Пример. Да се пресметне интегралът

$$I=\int\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx, \ x>0.$$

Тук имаме

$$m=-1, \ n=\frac{1}{2}, \quad p=\frac{1}{2}.$$

В този специален случай числото

$$\frac{m+1}{n}=0$$

цяло. Поради това извършваме субституцията

$$1+\sqrt{x}=u$$

или, което е същото,

$$x=(u-1)^2, \ u>1.$$

Тази субституция ни дава

$$dx=2(u-1)\,du$$

и по такъв начин получаваме интеграла

$$2\int\frac{\sqrt{u}\,(u-1)}{(u-1)^2}\,du=2\int\frac{\sqrt{u}}{u-1}\,du.$$

Така получения интеграл преобразуваме в интеграл от рационална функция с помощта на субституцията

$$u=z^2, \qquad z>1.$$

Довършете сами пресмятанията!

3. Нека числото $\frac{m+1}{n}+p$ е цяло. В такъв случай правим следните преобразувания:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\int x^{m+np}\left(\frac{a}{x^n}+b\right)^p dx=$$

$$=\int x^{m+np}(b+ax^{-n})^p\,dx.$$

По този начин получихме пак интеграл от диференциален бином, т. е. интеграл от вида

$$\int x^{m_1}(b+ax^{n_1})^{p_1}\,dx,$$

където

$$m_1=m+np, \quad n_1=-n, \quad p_1=p.$$

В този случай имаме

$$\frac{m_1+1}{n_1}=\frac{m+np+1}{-n}=-\left[\frac{m+1}{n}+p\right]$$

и следователно числото $\frac{m_1+1}{n_1}$ е цяло. По този начин ние преобразувахме интересуващия ни интеграл в интеграл от познат тип. Съгласно това, което казахме по-горе, ние можем да пресметнем интеграла

$$\int x^{m+np}\,(b+ax^{-n})^p\,dx,$$

а следователно и интеграла

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

с помощта на субституцията

$$b+ax^{-n}=u.$$



Пример. Да се пресметне интегралът

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}, \quad x>0.$$

Тук имаме интеграл от диференциален бином, където

$$m=-2, \quad n=2, \quad p=-\frac{1}{2}.$$

В случая числото

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{-2+1}{2}-\frac{1}{2}=-1$$

е цяло. Поради това правим преобразуването

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^{-2}+1}}$$

и полагаме

$$x^{-2}+1=u$$

или, което е същото,

$$x=(u-1)^{-\frac{1}{2}}, \quad u>1.$$

Тази субституция ни дава

$$dx=-\frac{1}{2}(u-1)^{-\frac{3}{2}}\,du$$

и ни води до интеграла

$$-\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=-\sqrt{u}+C,$$

откъдето

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

Разгледаните от нас три случая, при които интеграли от типа (15) могат да се изразят чрез познатите на нас елементарни функции, са били познати отдавна. През миналия век П. Л. Чебишев доказа, че ако $a\neq0$, $b\neq0$ и никое от трите числа

$$p, \ \frac{m+1}{n}, \ \frac{m+1}{n}+p$$

не е цяло, то интегралът

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

не може да се изрази с помощта на елементарните функции, без да се извършва граничен преход. Така например интегралът

(16) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad -1<x<1,$$

спада към интегралите от типа (15), като

$$m=0,\ n=4,\ p=-\frac{1}{2}.$$

В този случай обаче никое от числата

$$p=-\frac{1}{2}, \quad \frac{m+1}{n}=\frac{1}{4}, \quad \frac{m+1}{n}+p=-\frac{1}{4}$$

не е цяло и следователно този интеграл не може да се представи с помощта само на елементарните функции (без граничен преход). Въпреки това функцията

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}, \quad -1<x<1,$$

притежава неопределен интеграл в интервала, в който е дефинирана. Така например функцията

$$F(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots2n}\,\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$$

е един неопределен интеграл на $f(x)$ при $-1<x<1$, защото

$$F'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots2n}\,x^{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{4n}=$$

$$=(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}.$$

### VI. *Елиптични и хиперелиптични интеграли*

Интегралите от вида

$$\int R(x, \sqrt{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m})\,dx,$$

където $R(x, y)$ е рационална функция на $x$ и $y$ и цялото число $m$ е по-голямо от 2, обикновено не могат да се представят с помощта само на елементарни функции, без да се извършва граничен преход. Когато $m=3$ или $m=4$, тези интеграли се наричат елиптични. Когато $m>4$, те се наричат хиперелиптични. Така например интегралът (16) е елиптичен.



**Задачи**

Да се пресметнат следните интеграли:

1. $I=\int\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx, \quad 0<x<1.$

Отговор. $I=-[x+4\sqrt{x}+4\ln(1-\sqrt{x})]+C.$

2. $I=\int\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx, \quad x>0.$

Отговор. $I=-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+x-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+2x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{1}{6}}+6\operatorname{arc\,tg}\sqrt[6]{x}+C.$

3. $I=\int\frac{x\,dx}{1+\sqrt{1+x}}, \quad x>-1.$

Отговор. $I=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}-x+C.$

4. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}, \quad x>-1.$

Отговор. $I=2\sqrt{1+x}-3\sqrt[3]{1+x}+6\sqrt[6]{1+x}-6\ln(1+\sqrt[6]{1+x})+C.$

5. $I=\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}, \quad 0<x<1.$

Отговор. $I=\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$

6. $I=\int\sqrt{x^2+2x-1}\,\frac{dx}{x}, \quad x>-1+\sqrt{2}.$

Отговор. $I=\sqrt{x^2+2x-1}+\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x-1})-$
$-2\operatorname{arc\,tg}(x+\sqrt{x^2+2x-1})+C.$

7. $I=\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}, \quad -1<x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$

Отговор. $I=\ln\frac{3+x-2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}.$

8. $I=\int\frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}, \quad x>1.$

Отговор. $I=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}+C.$

9. $I=\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}$, $2<x<3$.

О т г о в о р. $I=\ln\frac{\sqrt{-x^2+4x-3}+x-3}{\sqrt{-x^2+4x-3}-x+3}+C$.

10. $I=\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$, $x>-1$.

О т г о в о р. $I=\ln\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}}+C$.

11. $I=\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$, $x>0$.

О т г о в о р. $I=\frac{3}{7}(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C$.

12. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

О т г о в о р. $I=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

13. $I=\int\frac{dx}{(1+x^\alpha)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}$, $x>0$, $\alpha\neq 0$.

О т г о в о р. $I=\frac{x}{(1+x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}+C$.

14. $I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$, $0<x<1$.

О т г о в о р. $I=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$.

## § 10. Интегриране на трансцендентни функции

Както видяхме, не всички интеграли от алгебрични функции могат да се изразят само с помощта на елементарните функции, без да се извършва граничен преход. Разбира се, същите трудности срещаме и при интегралите на трансцендентни функции. Така например интегралът



$$\int\frac{dx}{\ln x},\quad x>1, \tag{1}$$

който често се среща в анализа и приложенията му, не може, както това доказва строго Лиувил (J. Liouville), да се изрази с елементарните функции без помощта на граничен преход. Въпреки това не е трудно да се убедим в съществуването на неопределения интеграл (1). За тази цел да разгледаме безкрайния ред

$$F(x)=\ln(\ln x)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^\nu}{\nu!\,\nu}.$$

Този ред е сходящ при $x>1$ и може почленно да се диференцира, както ни учи теоремата за почленното диференциране на степенните редове и теоремата за диференциране на функция от функция. Като диференцираме, получаваме

$$F'(x)=\frac{1}{x\ln x}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^{\nu-1}}{\nu!\,x}=\frac{1}{x\ln x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\ln x)^\nu}{\nu!}=$$

$$=\frac{1}{x\ln x}e^{\ln x}=\frac{1}{x\ln x}\cdot x=\frac{1}{\ln x}.$$

Този резултат ни учи, че функцията $F(x)$ е един неопределен интеграл на $\frac{1}{\ln x}$ в интервал $x>1$.

Ние вече казахме по-горе, че функцията $F(x)$ не може да се изрази само с елементарни функции, без да се извършва граничен преход. По такъв начин $F(x)$ представлява нова трансцендентна функция. Тази функция се нарича и н т е г р а л е н  л о г а р и т ъ м.

Често срещаните в анализа и неговите приложения интеграли

$$\int\frac{\cos x}{x}dx,\ \int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\frac{e^x}{x}dx,\ \int e^{-x^2}dx$$

също тъй не могат да се изразят само с елементарни функции.

Случаите, когато ние знаем да пресмятаме неопределените интеграли само с помощта на елементарните функции, са, тъй да се каже, „редки“. Ние ще разгледаме два случая, при които подинтегралната функция е трансцендентна, но интегралът може да се изрази с елементарни функции.

I. Нека $R(u, v)$ е рационална функция на $u$ и $v$. В такъв случай интегралът[1]

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

може да се преобразува в интеграл на рационална функция, грубо казано, с помощта на субституцията

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$$

във всеки интервал[2] $[a, b]$, в който двете функции

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} \text{ и } R(\sin x, \cos x)$$

са дефинирани. Така например, ако $-\pi<a<b<\pi$, то функцията

$$x=2 \operatorname{arc\,tg} t,$$

е дефинирана и диференцуема при $\operatorname{tg}\frac{a}{2}\leq t\leq \operatorname{tg}\frac{b}{2}$, притежава диференцуема обратна функция и най-сетне множеството от стойностите ѝ съвпада точно с интервала $[a, b]$. Това ни позволява да приложим теоремата за смяна на променливите интеграли. По такъв начин, като вземем пред вид, че

$$dx=\frac{2\,dt}{1+t^2},$$

намираме[3]

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx=\int R\left[\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right]\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример. Да се пресметне интегралът

$$\int\frac{dx}{2+\cos x}$$

при $-\pi<x<\pi$. Полагаме

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$$

[1] Очевидно към този интеграл се свеждат всички интеграли от рационални функции на $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, защото

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

[2] В случая, разбира се, не е съществено дали интервалът $[a, b]$ е затворен или отворен.

[3] Смисълът на този по същество неточен начин на записване е ясен.



или по-добре[1]

$$x=2 \operatorname{arc\,tg} t,$$

откъдето

$$dx=\frac{2dt}{2+t^2}.$$

Като вземем пред вид още, че $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, получаваме

$$\int\frac{dx}{2+\cos x}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int\frac{dt}{3+t^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{d\frac{t}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

II. Нека $R(x)$ е рационална функция на $x$. Интегралите от вида

$$\int R'(x)\ln x\, dx,$$

$$\int R'(x)\operatorname{arc\,tg} x\, dx,$$

$$\int R'(x)\arcsin x dx$$

могат да се преобразуват в познати интеграли във всеки интервал, в който е дефинирана подинтегралната функция, с помощта на едно интегриране по части по следния начин:

$$\int R'(x)\ln x\, dx=\int \ln x\, d R(x)=R(x)\ln x-\int R(x)\frac{dx}{x},$$

$$\int R'(x)\operatorname{arc\,tg} x dx=\int \operatorname{arc\,tg} x d R(x)=R(x)\operatorname{arc\,tg} x-\int R(x)\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int R'(x)\arcsin x dx=\int \arcsin x\, dR(x)=R(x)\arcsin x-\int R(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

По този начин преобразувахме първите два интеграла в интеграли от рационални функции, а третия интеграл — в Абелев интеграл, който може да се рационализира с помощта на Ойлеровите субституции.

[1] С оглед на формула (5) от § IV на тази глава, която ние сега ще приложим.

**Пример.** Да се пресметне интегралът

$$I=\int\frac{2x}{(1+x^2)^2}\operatorname{arc\,tg} x\,dx.$$

Като вземем пред вид, че

$$R(x)=\int\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx=\int\frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)^2}=\frac{-1}{1+x^2}$$

е рационална функция, получаваме

$$I=\int\operatorname{arc\,tg} x\,d\frac{-1}{1+x^2}=\frac{-\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}+\int\frac{1}{1+x^2}\,d\operatorname{arc\,tg} x=$$

$$=-\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}+\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=-\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}+\int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx=$$

$$=-\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}+\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{2}\int x\,d\frac{1}{1+x^2}=\frac{-\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+\frac{x}{2(1+x^2)}+C.$$

### Задачи

Да се пресметнат следните интеграли в интервала $0<x<\frac{\pi}{2}$:

1. $I=\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

**Отговор.** $I=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+C'$.

2. $I=\int\frac{dx}{4-\sin^2 x}$.

**Упътване.** Положете $\operatorname{tg} x=t$.

**Отговор.** $I=\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{2}+C$.

3. $I=\int\frac{dx}{2+\sin x+2\cos x}$.

**Отговор.** $I=\ln\left(2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$.

4. $I=\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx$.

**Отговор.** $I=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$.



5. $I=\int\frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx$.

**Упътване.** Използувайте формулите

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

**Отговор.** $I=-\operatorname{arc\,tg}(\cos 2x)+C$.

6. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{\cos x(1-\cos x)}}$.

**Отговор.** $I=\sqrt{2}\,\ln\frac{1-\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C$.

7. $I=\int\frac{dx}{\sin x}$.

**Отговор.** $I=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$.

Да се пресметнат следните интеграли:

8. $\int\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2}\,dx,\ x>0$.

**Отговор.** $I=-\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}+\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

9. $\int\arcsin x\,dx,\ -1<x<1$.

**Отговор.** $I=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

10. $\int\frac{x}{(1+x^2)^2}\ln x\,dx,\ x>0$.

**Отговор.** $I=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2}-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln x+C$.

## Глава II

## ОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

### § 1. Дефиниция на понятието определен интеграл

Нека $f(x)$ е една функция, която е дефинирана и ограничена в един краен[1] и, да кажем, затворен интервал $[a, b]$, където $a<b$. Ние ще разделим интервала $[a, b]$ на краен брой подинтервали[2]

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

с помощта на точките

$$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n,$$

при което $x_0=a, x_n=b$. Нека $M_i$ е точната горна граница, а $m_i$ — точната долна граница[3] на $f(x)$ в $i$-тия подинтервал $[x_{i-1}, x_i]$. Образуваме двете суми

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}),$$

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}).$$

Така образуваните суми се наричат съответно голяма и малка сума на Дарбу (Darboux). Ние можем очевидно да образуваме по безбройно много начини сумите на Дарбу в зависимост от начина на деление на интервала $[a, b]$ на подинтервали. На всеки начин на делението отговаря обаче една единствена голяма и една единствена малка сума.

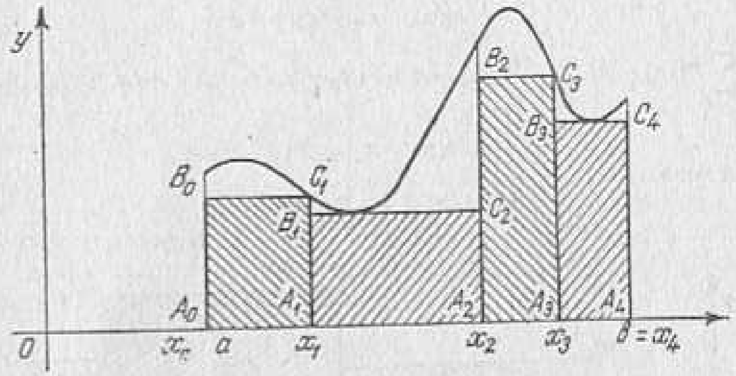
[1] В предположенията, които направихме, се иска интервалът $[a, b]$ да бъде краен, за да можем да го разложим на краен брой подинтервали, всеки един от които има крайна дължина. Ние впоследствие многократно ще се ползуваме и от обстоятелството, че дължината на целия интервал $[a, b]$ е крайна. Предположението, че интервалът е затворен, не е съществено.

[2] Тези подинтервали не са задължени да бъдат равни помежду си.

[3] В предположенията, които направихме за функцията $f(x)$, ние искахме тя да бъде ограничена, за да можем да говорим за горните граници $M_i$ и долните граници $m_i$.



В случая, когато разглежданата функция приема само неотрицателни стойности, не е трудно да се даде геометрично тълкуване на сумите на Дарбу. Така например на черт. 2 е изобразена графиката на една функция, стойностите на която са неот-




Черт. 2

рицателни. Интервалът $[a, b]$ в случая е разделен на 4 части. Не е трудно да се види, че малката сума на Дарбу, която отговаря на избрания начин на деление на интервала $[a, b]$ на подинтервали, представлява точно сумата от лицата на вписаните правоъгълници

$$A_0A_1C_1B_0,\ A_1A_2C_2B_1,\ A_2A_3C_3B_2,\ A_3A_4C_4B_3.$$

Аналогично на черт. 3 е изобразена също функция, която приема само неотрицателни стойности. Интервалът $[a, b]$ е разделен на 3 подинтервала. Голямата сума на Дарбу, която отговаря на избрания начин на деление на интервала $[a, b]$ на подинтервали, представлява сумата от лицата на правоъгълниците

$$A_0A_1C_1B_0,\ A_1A_2C_2B_1,\ A_2A_3C_3B_2.$$

Не е трудно да се види, че множеството на всички суми на Дарбу (както малките, така и големите) е ограничено (и отгоре, и отдолу). И наистина нека $M$ е една горна граница на функцията $f(x)$, а $m$ е една нейна долна граница в интервала $[a, b]$. В такъв случай, като вземем пред вид неравенствата

$$m\leq m_i\leq M_i\leq M,$$

получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} m(x_i-x_{i-1})\leq\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})\leq\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})\leq\sum_{i=1}^{n} M(x_i-x_{i-1}).$$

От друга страна,

$$\sum_{i=1}^{n} m(x_i-x_{i-1})=m[(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})]=$$

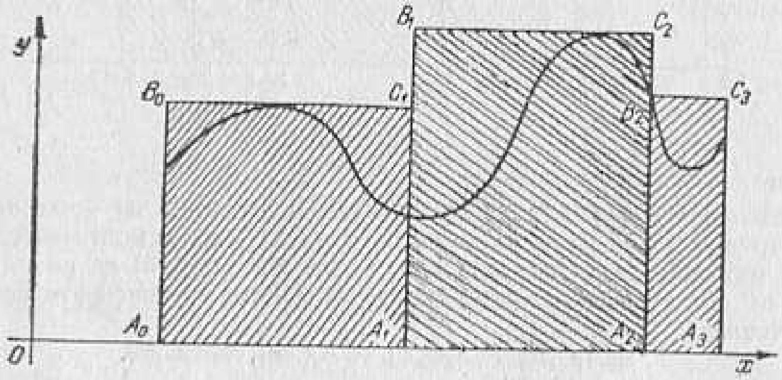
$$=m(x_n-x_0)=m(b-a),$$

$$\sum_{i=1}^{n} M(x_i-x_{i-1})=M[(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})]=$$

$$=M(x_n-x_0)=M(b-a)$$

и следователно

$$m(b-a)\leqq s\leqq S\leqq M(b-a).$$




Черт. 3

По този начин ние установихме не само ограничеността на множеството от сумите на Дарбу, но показахме, че ако $S$ и $s$ са съответно голямата и малката сума на Дарбу, които отговарят на един и същ начин на деление на интервала $[a, b]$ на подинтервали, то

(1) $$s\leqq S.$$

Ние ще установим сега валидността на неравенството (1) и в случая, когато голямата сума $S$ и малката сума $s$ са образувани с помощта на два какви да са (не непременно еднакви) начина на деление на интервала $[a, b]$ на подинтервали. За да се убедим в това, ние ще покажем предварително, че при въвеждане на нови точки на деление големите суми на Дарбу монотонно намаляват, а малките суми монотонно растат. По-точно ние ще установим следното: нека

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$



е едно произволно подразделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали, нека $M_i$ е точната горна, а $m_i$ — точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$ и нека

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}),$$

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$$

са съответните суми на Дарбу; въвеждаме нова точка на деление $\xi$ и означаваме с $S'$ и $s'$ сумите на Дарбу, които получаваме, когато към точките на деление $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ причислим още и точката $\xi$; в такъв случай

$$s\leqq s', \quad S'\leqq S.$$

И наистина, ако $\xi$ съвпада с някоя от точките $x_0, x_1, \ldots, x_n$, то новото деление не е различно от старото и следователно $s'=s$ и $S'=S$. За да установим верността на твърдението в общия случай, т. е. когато $\xi$ не съвпада с някоя от точките $x_0, x_1, \ldots, x_n$ означаваме с $k$ най-малкото цяло положително число, за което $\xi<x_k$. В такъв случай $x_{k-1}<\xi$. Нека $L_1$ е точната горна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{k-1}, \xi]$, а $L_2$ е точната горна граница на $f(x)$ в подинтервала $[\xi, x_k]$. В такъв случай[1]

$$S'=\sum_{i=1}^{k-1} M_i(x_i-x_{i-1})+L_1(\xi-x_{k-1})+L_2(x_k-\xi)+\sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}).$$

Оттук, като вземем пред вид, че

$$S=\sum_{i=1}^{k-1} M_i(x_i-x_{i-1})+M_k(x_k-x_{k-1})+\sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}),$$

[1] Разбира се, не е изключено някоя от сумите

$$\sum_{i=1}^{k-1} M_i(x_i-x_{i-1}),$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

да бъде празна.

намираме

$$S'-S=L_1(\xi-x_{k-1})+L_2(x_k-\xi)-M_k(x_k-x_{k-1}).$$

От друга страна,

$$L_1\leqq M_k,$$
$$L_2\leqq M_k,$$

защото $M_k$ е горна граница на $f(x)$ в ц е л и я подинтервал $[x_{k-1}, x_k]$ и следователно е горна граница и във всеки един от подинтервалите $[x_{k-1}, \xi]$ и $[\xi, x_k]$, докато $L_1$ и $L_2$ са най-малките горни граници на $f(x)$ в тези подинтервали. По такъв начин получаваме

$$S'-S\leqq M_k(\xi-x_{k-1})+M_k(x_k-\xi)-M_k(x_k-x_{k-1})=0,$$

с което е показано, че $S'\leqq S$. Неравенството $s'\geqq s$ се установява по аналогичен начин. Сега не е трудно да се установи общата валидност на неравенството (1) и в случая, когато голямата и малката сума са образувани с помощта на различни точки на деление. По-точно ние имаме пред вид следното: нека разделим интервала $[a, b]$ на подинтервали по два начина с помощта на двете системи от делящи точки

$$a=x'_0<x'_1<\cdot\cdot\cdot<x'_p=b;$$
$$a=x''_0<x''_1<\cdot\cdot\cdot<x''_q=b$$

и нека $s$ е малката сума на Дарбу, която отговаря на системата $x'_0, x'_1, \dots, x'_p$, а $S$ е голямата сума, която отговаря на системата $x''_0, x''_1, \dots, x''_q$; в такъв случай $s\leqq S$. За да докажем това, ние означаваме с $s_k$ малката сума на Дарбу, която получаваме, когато делим интервала $[a, b]$ с помощта на точките

$$x'_0, x'_1, \dots, x'_p;\ x''_1, x''_2, \dots, x''_k\quad (1\leqq k\leqq q),$$

а с $S_k$ означаваме голямата сума на Дарбу, която получаваме, когато делим интервала $[a, b]$ с помощта на точките

$$x''_0, x''_1, \dots, x''_q;\ x'_1, x'_2, \dots, x'_k\quad (1\leqq k\leqq p).$$

Съгласно доказаното по-горе имаме

$$s\leqq s_1\leqq s_2\leqq\cdot\cdot\cdot\leqq s_q,$$
$$S\geqq S_1\geqq S_2\geqq\cdot\cdot\cdot\geqq S_p.$$

От друга страна, сумите $s_q$ и $S_p$ са образувани с помощта на едни и същи точки на деление, т. е.

$$s_q\leqq S_p,$$

и следователно

$$s\leqq S.$$



С това неравенството (1) е установено в цялата му общност в смисъл, че сега вече не се иска голямата и малката сума да бъдат образувани с помощта на един и същ начин на деление на интервали $[a, b]$ на подинтервали.

Този резултат ни дава възможност да установим следното важно неравенство, което свързва точната горна граница $\underline{I}$ на малките суми с точната долна граница $\overline{I}$ на големите суми на Дарбу:

$$\underline{I}\leqq\overline{I}.$$

За да докажем това, фиксираме една голяма сума $S$ и разглеждаме множеството на всичките малки суми $s$. Неравенството

$$s\leqq S$$

ни учи, че голямата сума $S$ е е д н а г о р н а г р а н и ц а на множеството на малките суми. Като вземем пред вид обаче, че $\underline{I}$ е т о ч н а т а горна граница на това множество, т. е. н а й-м а л к а т а от всичките му горни граници, заключаваме, че

$$\underline{I}\leqq S. \tag{2}$$

И така неравенството (2) е установено при в с е к и избор на голямата сума $S$. Този резултат ни учи, че $\underline{I}$ е една долна граница на множеството на големите суми. Като вземем пред вид, че $\overline{I}$ е точната долна граница на това множество, т. е. н а й-г о л я м а т а от всичките долни граници, заключаваме, че

$$\underline{I}\leqq\overline{I}. \tag{3}$$

С това интересуващото ни неравенство е установено.

Т о ч н а т а г о р н а г р а н и ц а — н а м н о ж е с т в о т о н а м а л к и т е с у м и н а Д а р б у н а е д н а о г р а н и ч е н а ф у н к ц и я $f(x)$ в е д и н к р а е н и н т е р в а л $[a, b]$, к ъ д е т о $a<b$, с е н а р и ч а д о л е н и н т е г р а л н а т а з и ф у н к ц и я в р а з г л е ж д а н и я и н т е р в а л и с е о з н а ч а в а с ъ с з н а к а

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Аналогично точната долна граница $\overline{I}$ на множеството на големите суми на Дарбу се нарича горен интеграл и се означава със знака

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

При тези означения неравенството (3) може да се напише по следния начин:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

След тези предварителни бележки ние вече сме готови да дадем дефиниция на понятието Риманов интеграл[1] (или, както се казва често, определен интеграл).

Казваме, че една функция $f(x)$, която е дефинирана и ограничена в един краен интервал $[a, b]$, е интегруема в Риманов смисъл в този интервал, когато горният и долният ѝ интеграл са равни помежду си. Общата стойност на горния и долния интеграл на една интегруема функция се нарича нейн Риманов (или определен) интеграл.

Римановият интеграл на една интегруема функция $f(x)$ в интервала $[a, b]$, където $a<b$, се означава обикновено със знака

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Пример 1. Нека $f(x)=1$ при всички стойности на $x$ в интервала $[a, b]$. Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b.$$

Във всеки един от тези подинтервали точната горна и точната долна граница на разглежданата функция е равна на 1. Поради това съответната голяма и съответната малка сума на Дарбу имат стойност

$$\sum_{i=1}^{n} 1\,(x_i-x_{i-1})=(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})=x_n-x_0=b-a.$$

Оттук заключаваме, че както точната долна граница на големите суми, така и точната горна граница на малките суми има също тъй стойността $b-a$. Това ни учи, че разглежданата функция е интегруема и стойността на интеграла ѝ в разглеждания интервал е $b-a$.

С помощта на въведените по-горе означения този резултат се записва по следния начин:

$$\int_a^b 1\,dx=b-a.$$

[1] В последно време след работите на Борел и Лебег теорията на интеграла е осъществила важен напредък с въвеждането на понятието Лебегов интеграл, което е много по-общо от разглежданото тук класическо понятие Риманов интеграл.



Ние често ще си служим с по-краткото означение

$$\int_a^b dx=b-a.$$

Пример 2. Нека $f(x)=x$ при $a\leq x\leq b$. Не е трудно да се покаже, че тази функция е интегруема. За тази цел делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

и означаваме с $S$ и $s$ съответната голяма и малка сума, т. е.

$$S=\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu(x_\nu-x_{\nu-1}), \tag{4}$$

$$s=\sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu-1}(x_\nu-x_{\nu-1}). \tag{5}$$

Изваждайки двете равенства (4) и (5), получаваме

$$S-s=\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu-x_{\nu-1})^2.$$

Оттук, като вземем пред вид неравенствата

$$S\geq\overline{\int_a^b} x\,dx,\quad s\leq\underline{\int_a^b} x\,dx,\quad \underline{\int_a^b} x\,dx\leq\overline{\int_a^b} x\,dx,$$

получаваме

$$0\leq\overline{\int_a^b} x\,dx-\underline{\int_a^b} x\,dx\leq\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu-x_{\nu-1})^2.$$

Ние имаме свободата да делим интервала $[a, b]$ на подинтервали по произволен начин. Специално, ако разделим този интервал на $n$ равни части, ще получим

$$0\leq\overline{\int_a^b} x\,dx-\underline{\int_a^b} x\,dx\leq\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 n=\frac{(b-a)^2}{n}.$$

В последното неравенство ние можем да даваме на цялото положително число $n$ произволно големи стойности. Като вземем пред вид, че разликата

$$\overline{\int_a^b} x\,dx-\underline{\int_a^b} x\,dx$$

ни най-малко не зависи от $n$, заключаваме, че

$$\overline{\int_a^b} x\,dx - \underline{\int_a^b} x\,dx = 0.$$

С това е установена интегруемостта на разглежданата функция.

За да пресметнем стойността на интеграла

$$\int_a^b x\,dx,$$

събираме почленно двете равенства (4) и (5). По този начин намираме

$$S+s=\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu^2-x_{\nu-1}^2)=b^2-a^2,$$

откъдето

$$\overline{\int_a^b} x\,dx + s \le b^2-a^2,$$

$$S+\underline{\int_a^b} x\,dx \ge b^2-a^2$$

и следователно

(6) $$s \le b^2-a^2-\overline{\int_a^b} x\,dx,$$

(7) $$S \ge b^2-a^2-\underline{\int_a^b} x\,dx.$$

Неравенството (6) ни учи, че числото

$$b^2-a^2-\overline{\int_a^b} x\,dx$$

е една горна граница на множеството на малките суми. Като вземем пред вид, че долният интеграл представлява точната, т. е. н а й - м а л к а т а горна граница на това множество, получаваме

$$\underline{\int_a^b} x\,dx \le b^2-a^2-\overline{\int_a^b} x\,dx$$



следователно

$$\overline{\int_a^b} x\,dx + \underline{\int_a^b} x\,dx \le b^2-a^2$$

и още

(8 $$2\int_a^b x\,dx \le b^2-a^2.$$

Аналогично, изхождайки от неравенството (7), получаваме

(9) $$2\int_a^b x\,dx \ge b^2-a^2.$$

Неравенствата (8) и (9) ни дават

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

П р и м е р 3. Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в интервала $a \le x \le b$, където $a<b$, по следния начин:

$$f(x)=1 \text{ при рационални стойности на } x;$$
$$f(x)=0 \text{ при ирационални } \;\cdot\;\cdot\; x.$$

Така дефинираната функция не е интегруема в разглеждания интервал. И наистина горната граница 1 на разглежданата функция се достига във всеки подинтервал на интервала $[a, b]$ и следователно представлява т о ч н а т а горна граница на функцията във всеки подинтервал. Аналогично се убеждаваме, че точната долна граница на функцията във всеки един подинтервал на интервала $[a, b]$ е равна на нула. Оттук заключаваме, че при всеки избор на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

съответната голяма сума $S$ има стойност

$$S=\sum_{\nu=1}^{n} 1\,(x_\nu-x_{\nu-1})=x_n-x_0=b-a$$

и съответната малка сума $s$ има стойност

$$s=\sum_{\nu=1}^{n} 0\,(x_\nu-x_{\nu-1})=0.$$

Оттук заключаваме, че

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=b-a$$

и

$$\int_a^b f(x)\,dx=0,$$

което показва, че разглежданата функция не е интегруема.

## §2. Достатъчни условия за интегруемост

В този параграф ще дадем няколко достатъчни условия за интегруемост в Риманов смисъл.

I. Всяка функция $f(x)$, която е дефинирана и непрекъсната[1] в един краен и затворен интервал $[a, b]$, е интегруема в него.

Доказателство. Избираме едно произволно положително число $\varepsilon$ и делим интервала $[a, b]$ на подинтервали

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n],$$

където

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

по такъв начин, че осцилацията на $f(x)$ във всеки един от тези подинтервали да бъде по-малка от $\varepsilon$. Това, както знаем, е възможно.

Нека $M_i$ е точната горна и $m_i$ е точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Разглеждаме съответната голяма сума $S$ и съответната малка сума $s$:

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i-x_{i-1}),$$

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i-x_{i-1}).$$

В такъв случай

$$S-s=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,(x_i-x_{i-1}).$$

[1] Тук не е нужно да предполагаме, че функцията $f(x)$ е ограничена, защото, както знаем, това вече следва от непрекъснатостта ѝ в крайния и затворен интервал $[a, b]$.



Оттук, като вземем пред вид неравенствата

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\leqq S,\ \underline{\int_a^b} f(x)\,dx\geqq s,\ \underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

намираме

$$0\leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leqq \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,(x_i-x_{i-1}).$$

При избрания начин на делението на интервала $[a, b]$ на подинтервали осцилацията $M_i-m_i$ във всеки един от тях удовлетворява неравенството

$$M_i-m_i\leqq\varepsilon$$

и следователно

$$0\leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leqq \sum_{i=1}^{n}\varepsilon\,(x_i-x_{i-1})=\varepsilon\,(b-a).$$

Като вземем пред вид, че положителното число $\varepsilon$ е произволно, а числата

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

и $b-a$ ни най-малко не зависят от $\varepsilon$, заключаваме, че

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=0,$$

защото в противен случай неравенството

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leqq\varepsilon\,(b-a)$$

сигурно ще бъде нарушено,[1] ако направим положителното число $\varepsilon$ достатъчно малко.

II. И така непрекъснатите функции (при наличността на останалите условия, които ние формулирахме в току-що доказаната

[1] Нека припомним тук, че интервалът $[a, b]$ е краен.

теорема) са интегруеми. С непрекъснатите функции обаче съвсем не се изчерпва множеството на интегруемите функции. Така например, ако една функция $f(x)$ е дефинирана и ограничена[1] в интервала $[a, b]$ и има само краен брой точки на прекъсване, тя е също интегруема.

Ние ще докажем тази теорема за случая, когато функцията $f(x)$ има една единствена, и то вътрешна (по отношение на интервала $[a, b]$) точка на прекъсване $c$. Нека читателят сам обмисли общото доказателство.[2]

Избираме едно достатъчно малко (иначе произволно) положително число $\varepsilon$ по такъв начин, че да имаме

$$a<c-\varepsilon, \quad c+\varepsilon<b.$$

Делим интервалите $[a, c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_p=c-\varepsilon,$$
$$c+\varepsilon=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_q=b$$

така, че осцилацията на функцията $f(x)$ във всеки един от тях да бъде по-малка от $\varepsilon$. Това може да се направи, защото функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворените интервали $[a, c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon, b]$.

Означаваме с $M_i$ и $m_i$ съответно точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$; с $N_i$ и $n_i$ съответно точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в подинтервали $[y_{i-1}, y_i]$; с $L$ и $l$ съответно точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ и най-сетне с $M$ и $m$ една горна и една долна граница на $f(x)$ в целия интервал $[a, b]$.

В такъв случай голямата сума $S$ и малката сума $s$ имат съответно стойностите

$$S=\sum_{i=1}^{p} M_i(x_i-x_{i-1})+L\,.\,2\varepsilon+\sum_{i=1}^{q} N_i(y_i-y_{i-1}),$$

$$s=\sum_{i=1}^{p} m_i(x_i-x_{i-1})+l\,.\,2\varepsilon+\sum_{i=1}^{q} n_i(y_i-y_{i-1}).$$

[1] Тук се налага да предполагаме изрично ограничеността на функцията, защото тази функция притежава точки на прекъсване и следователно би могла да бъде неограничена.

[2] Което, разбира се, става по същия начин.



Оттук получаваме

$$S-s=\sum_{i=1}^{p}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})+(L-l)\,.\,2\varepsilon+\sum_{i=1}^{q}(N_i-n_i)(y_i-y_{i-1}).$$

Като вземем пред вид неравенствата

$$S\geqq\int_a^b f(x)\,dx,\quad s\leqq\int_a^b f(x)\,dx,\quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leqq\overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

намираме

$$0\leqq\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leqq\sum_{i=1}^{p}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})+(L-l)\,.\,2\varepsilon+$$
$$+\sum_{i=1}^{q}(N_i-n_i)(y_i-y_{i-1}),$$

откъдето

$$0\leqq\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leqq\sum_{i=1}^{p}\varepsilon(x_i-x_{i-1})+(M-m)\,.\,2\varepsilon+$$
$$+\sum_{i=1}^{q}\varepsilon(y_i-y_{i-1})=$$
$$=\varepsilon[(c-\varepsilon-a)+2(M-m)+(b-c-\varepsilon)]<\varepsilon[b-a+2M-2m].$$

Като вземем пред вид, че положителното число $\varepsilon$ е подчинено на единственото ограничение да бъде достатъчно малко, а числата

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad b-a+2M-2m$$

ни най-малко не зависят от $\varepsilon$, заключаваме, че

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=0,$$

защото в противен случай неравенството

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leqq \varepsilon\,(b-a+2M-2m)$$

сигурно ще бъде нарушено, ако дадем на положителното число $\varepsilon$ достатъчно малка стойност.

III. В известни случаи дори наличието на безбройно много точки на прекъсване не е пречка за интегруемостта. Така ние ще видим сега, че монотонните функции (при някои предположения относно дефиниционната им област) са също тъй интегруеми (дори ако притежават безбройно много точки на прекъсване). Поточно ние ще докажем следната теорема:

*Всяка функция $f(x)$, която е дефинирана и монотонна в един краен и затворен интервал $[a, b]$, е интегруема в него.*[1]

*Доказателство.* Ние ще разгледаме само случая, когато ни е дадена една монотонно растяща функция. Нека читателят сам разгледа случая, когато функцията монотонно намалява.

Избираме едно произволно число $\varepsilon$ и делим интервала $[a, b]$ на подинтервали

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

с помощта на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

по такъв начин, че дължината на всеки един от тези подинтервали да бъде по-малка от $\varepsilon$. Разглеждаме съответната голяма сума $S$ и съответната малка сума $s$. Очевидно имаме

$$S=\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\,(x_\nu-x_{\nu-1}),$$

$$s=\sum_{\nu=1}^{n} f(x_{\nu-1})\,(x_\nu-x_{\nu-1}).$$

[1] Тук не е необходимо да предполагаме, че функцията $f(x)$ е ограничена, защото това вече следва от нейната монотонност: при монотонно растящи функции имаме

$$f(a)\leqq f(x)\leqq f(b),$$

а при монотонно намаляващи функции имаме

$$f(a)\geqq f(x)\geqq f(b).$$



Оттук получаваме

$$S-s=\sum_{\nu=1}^{n}[f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})]\,(x_\nu-x_{\nu-1}).$$

Като вземем пред вид неравенствата

$$S\geqq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx,\quad s\leqq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx,\quad \underline{\int_a^b} f(x)\, dx\leqq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx,$$

намираме

$$0\leqq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx-\underline{\int_a^b} f(x)\, dx\leqq \sum_{\nu=1}^{n}[f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})]\,(x_\nu-x_{\nu-1}),$$

откъдето

$$0\leqq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx-\underline{\int_a^b} f(x)\, dx\leqq \sum_{\nu=1}^{n}[f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})]\,\varepsilon=\varepsilon[f(b)-f(a)].$$

Като вземем пред вид още, че положителното число $\varepsilon$ е произволно, а числата

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx-\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \text{ и } f(b)-f(a)$$

не зависят ни най-малко от $\varepsilon$, заключаваме, че

(1) $$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx-\underline{\int_a^b} f(x)\, dx=0,$$

защото в противен случай неравенството

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx-\underline{\int_a^b} f(x)\, dx\leqq\varepsilon[f(b)-f(a)]$$

сигурно ще бъде нарушено, ако изберем положителното число $\varepsilon$ достатъчно малко.

Равенството (1) ни учи, че функцията $f(x)$ е интегруема. С това интересуващата ни теорема е доказана.

## § 3. Основни свойства на определените интеграли

I. Нека функцията $f(x)$ е ограничена в интервала[1] $[a, b]$ и $c$ е коя да е вътрешна точка в този интервал. В такъв случай

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx, \tag{2}$$

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Доказателство. Ние ще докажем само равенството (2). Равенството (3) се доказва по същия начин.

Делим интервалите $[a, c]$ и $[c, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a=x_0'<x_1'<\cdots<x_p'=c, \tag{4}$$

$$c=x_0''<x_1''<\cdots<x_q''=b. \tag{5}$$

Означаваме с $m_i'$ точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x'_{i-1}, x'_i]$ и с $m_i''$ точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x''_{i-1}, x''_i]$. Разглеждаме съответните малки суми

$$s'=\sum_{i=1}^{p} m_i'\,(x_i'-x_{i-1}'),$$

$$s''=\sum_{i=1}^{q} m_i''\,(x_i''-x_{i-1}'').$$

Очевидно числото

$$s'+s''=\sum_{i=1}^{p} m_i'(x_i'-x_{i-1}')+\sum_{i=1}^{b} m_i''(x_i''-x_{i-1}'')$$

представлява една специална малка сума за функцията $f(x)$, отговаряща на интервала $[a, b]$. От това заключаваме[2], че

[1] Нека припомним на това място, че интервалите, които разглеждаме, са крайни, ако изрично не е казано противното.

[2] Припомняме, че долният интеграл е (точната) горна граница на множеството на малките суми.



$$s'+s''\leq\int_a^b f(x)\,dx,$$

откъдето

$$s'\leq\int_a^b f(x)\,dx-s''. \tag{6}$$

Ние сега ще фиксираме точките (5). С това не е направено никакво ограничение за точките (4). Неравенството (6) ни учи, че числото

$$\int_a^b f(x)\,dx-s''$$

е една горна граница на малките суми $s'$. Като вземем пред вид, че

$$\int_a^c f(x)\,dx$$

е точната, т. е. най-малката горна граница на тези суми, намираме

$$\int_a^c f(x)\,dx\leq\int_a^b f(x)\,dx-s''. \tag{7}$$

Неравенството (7) ни дава

$$s''\leq\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^c f(x)\,dx. \tag{8}$$

Ние имахме свободата да фиксираме точките (5) произволно. Сега ще се възползуваме от тази свобода. И така неравенството (8) е установено за всичките малки суми $s''$. От това заключаваме, че числото

$$\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^c f(x)\,dx$$

е една горна граница за тези суми. Като вземем пред вид, че

$$\int_c^b f(x)\,dx$$

е точната, т. е. най-малката им горна граница, намираме

$$\int_c^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$$

и следователно

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx. \tag{9}$$

По-нататък делим интервала $[a, b]$ по произволен начин на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и означаваме с $m_i$ точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Разглеждаме малката сума

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}).$$

Нека $x_p$ е най-голямото от числата[1]

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n,$$

което не надминава $c$. В такъв случай

$$x_p \leqq c < x_{p+1}.$$

Означаваме с $m'$ и $m''$ точната долна граница на $f(x)$ съответно в подинтервалите $[x_p, c]$ и $[c, x_{p+1}]$. Очевидно имаме[2]

$$m' \geqq m_{p+1}, \quad m'' \geqq m_{p+1},$$

т. е.

$$m'(c - x_p) + m''(x_{p+1} - c) \geqq m_{p+1}(x_{p+1} - x_p).$$

[1] Такова число сигурно има, защото $x_0 = a < c$. Това число е по-малко от $x_n$, защото $x_n = b > c$.

[2] Ние бихме могли да се убедим във валидността на тези неравенства така: $m_{p+1}$ е долна граница на $f(x)$ в целия интервал $[x_p, x_{p+1}]$, а следователно и в подинтервала $[x_p, c]$, докато $m'$ е точната долна граница, т. е. най-голямата долна граница на $f(x)$ в същия подинтервал, оттук заключаваме, че $m' \geqq m_{p+1}$. Аналогично се установява и неравенството $m'' \geqq m_{p+1}$.



От това заключаваме, че[1]

$$s = \sum_{i=1}^{p} m_i (x_i - x_{i-1}) + m_{p+1}(x_{p+1} - x_p) + \sum_{i=p+2}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \leqq$$

$$\leqq \left[ \sum_{i=1}^{p} m_i (x_i - x_{i+1}) + m'(c - x_p) \right] +$$

$$+ \left[ m''(x_{p+1} - c) + \sum_{i=p+2}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \right] \leqq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Това неравенство ни учи, че числото

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

представлява една горна граница на малките суми $s$. Като вземем под внимание, че

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

представлява точната, т. е. най-малката им горна граница, получаваме

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{10}$$

Неравенствата (9) и (10) ни учат, че

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

[1] При $p = 0$ трябва да се разбира

$$\sum_{i=1}^{p} m_i (x_i - x_{i-1}) = 0.$$

При $p = n - 1$ трябва да се разбира

$$\sum_{i=p+2}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = 0.$$

Следствие I. Ако

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

то

$$\sum_{i=1}^{n}\underline{\int}_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx=\underline{\int}_a^b f(x)\,dx,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{\int}_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx=\overline{\int}_a^b f(x)\,dx.$$

Следствие II. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$, то тя е интегруема във всеки подинтервал на $[a, b]$. И наистина нека $a<c<b$. В такъв случай

$$\overline{\int}_a^c f(x)\,dx+\overline{\int}_c^b f(x)\,dx=\overline{\int}_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\underline{\int}_a^c f(x)\,dx+\underline{\int}_c^b f(x)\,dx=\underline{\int}_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

и следователно

$$\left(\overline{\int}_a^c f(x)\,dx-\underline{\int}_a^c f(x)\,dx\right)+\left(\overline{\int}_c^b f(x)\,dx-\underline{\int}_c^b f(x)\,dx\right)=0.$$

Като вземем пред вид, че

$$\overline{\int}_a^c f(x)\,dx-\underline{\int}_a^c f(x)\,dx\geq 0 \text{ и } \overline{\int}_c^b f(x)\,dx-\underline{\int}_c^b f(x)\,dx\geq 0,$$

намираме

$$\overline{\int}_a^c f(x)\,dx-\underline{\int}_a^c f(x)\,dx=0 \text{ и } \overline{\int}_c^b f(x)\,dx-\underline{\int}_c^b f(x)\,dx=0,$$

т. е. функцията $f(x)$ е интегруема в двата подинтервала $[a, c]$ и $[c, b]$. Оттук може да се установи, че функцията $f(x)$ е интегруема и във всеки подинтервал $[c, d]$, където $a<c<d<b$. И наистина ние вече установихме, че тя е интегруема в подинтервала



$[c, b]$, а от това и от доказаното по-горе следва, че тя е интегруема и в подинтервала $[c, d]$.

Следствие III. Ако функцията $f(x)$ е интегруема както в интервала $a\leqq x\leqq c$, така и в интервала $c\leqq x\leqq b$, то тя е интегруема и в интервала $a\leqq x\leqq b$. И наистина от

$$\overline{\int}_a^b f(x)\,dx=\overline{\int}_a^c f(x)\,dx+\overline{\int}_c^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

и

$$\underline{\int}_a^b f(x)\,dx=\underline{\int}_a^c f(x)\,dx+\underline{\int}_c^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

имаме

$$\overline{\int}_a^b f(x)\,dx=\underline{\int}_a^b f(x)\,dx.$$

Следствие IV. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и $a<c<b$, то

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

По-общо, ако

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

то

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

II. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и ограничена в интервала $[a, b]$ и $\lambda$ е една константа. В такъв случай при $\lambda\geqq 0$ имаме

$$\overline{\int}_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\overline{\int}_a^b f(x)\,dx \tag{11}$$

и

$$\underline{\int}_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\underline{\int}_a^b f(x)\,dx,$$

а при $\lambda \leq 0$ имаме

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

и

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказателство. Ние ще разгледаме само равенството (11) при $\lambda > 0$, защото останалите равенства се установяват по същия начин, а случаят $\lambda = 0$ е тривиален.

Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и означаваме с $m_i$ точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Очевидно[1] точната долна граница на $\lambda f(x)$ в същия подинтервал е $\lambda m_i$.

Разглеждаме двете малки суми

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}),$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \lambda m_i (x_i - x_{i-1}).$$

Явно е, че $s = \frac{\sigma}{\lambda}$.

Като вземем пред вид неравенството

$$s \leq \int^b f(x)\,dx$$

[1] За да се убедим в това, означаваме с $m_i'$ точната долна граница на $\lambda f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Очевидно имаме $m_i \leq f(x)$, $m_i' \leq \lambda f(x)$ при $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ и следователно $\lambda m_i \leq \lambda f(x)$, $\frac{m_i'}{\lambda} \leq f(x)$. Тези неравенства ни учат, че числата $\frac{m_i'}{\lambda}$ и $\lambda m_i$ са долни граници съответно на функциите $f(x)$ и $\lambda f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Като вземем пред вид, че $m_i$ и $m_i'$ са точните, т. е. най-големите им долни граници, намираме $m_i \geq \frac{m_i'}{\lambda}$ и $m_i' \geq \lambda m_i$. Тези неравенства ни дават $m_i' = \lambda m_i$.



(което изразява, че долният интеграл е една горна граница на малките суми), получаваме

$$\frac{\sigma}{\lambda} \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

или

$$\sigma \leq \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

С това е установено, че числото

$$\lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

е една горна граница на множеството на малките суми $\sigma$. Като вземем пред вид, че $\int_a^b \lambda f(x)\,dx$ е точната горна, т. е. най-малката горна граница на тези суми, получаваме

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx \leq \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

Аналогично се установява неравенството

$$\lambda \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \lambda f(x)\,dx.$$

Оттук заключаваме, че

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

Следствие. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и $\lambda$ е константа, то функцията $\lambda f(x)$ е също тъй интегруема и

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

III. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$, то и функцията $|f(x)|$ е интегруема в този интервал.

Доказателство. Избираме $\varepsilon>0$ и образуваме една голяма сума на Дарбу $S^*$ и една малка сума $s^*$ за функцията $f(x)$ по такъв начин, че да имаме

$$S^*<\int_a^b f(x)\,dx+\varepsilon,$$

$$s^*>\int_a^b f(x)\,dx-\varepsilon.$$

Това е възможно да се направи, защото $\int_a^b$ е най-голямата долна граница на големите суми и $\int_a^b$ е най-малката горна граница на малките суми на Дарбу, т. е. $\int_a^b+\varepsilon$ не е долна граница на големите суми, а $\int_a^a-\varepsilon$ не е горна граница на малките суми.

По-нататък делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

по такъв начин, че измежду точките $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ да се намират всичките точки на деление както на сумата $S^*$, така и на сумата $s^*$. Означаваме с $M_i$ точната горна, с $m_i$ точната долна граница на $f(x)$, а с $M_i'$ и $m_i'$ съответно точната горна и точната долна граница на $|f(x)|$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$ и разглеждаме сумите на Дарбу

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}),$$

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}),$$



$$S'=\sum_{i=1}^{n} M_i'(x_i-x_{i-1}),$$

$$s'=\sum_{i=1}^{n} m_i'(x_i-x_{i-1}).$$

Очевидно

$$S^*\geqq S,\quad s^*\leqq s$$

и

$$0\leqq\int_a^b|f(x)|\,dx-\int_a^b|f(x)|\,dx\leqq S'-s'=\sum_{i=1}^{n}(M_i'-m_i')(x_i-x_{i-1}).$$

От друга страна, както и да избираме точките $\xi_1$ и $\xi_2$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$, имаме

$$f(\xi_1)-f(\xi_2)\leqq M_i-m_i,$$

т. е.

$$f(\xi_2)-f(\xi_1)\leqq M_i-m_i,$$

$$|f(\xi_1)-f(\xi_2)|\leqq M_i-m_i$$

и толкова повече

$$|f(\xi_1)|-|f(\xi_2)|\leqq M_i-m_i.$$

Оттук не е трудно да се установи, че

$$M_i'-m_i'\leqq M_i-m_i.$$

За тази цел избираме произволно положително число $\delta$ и определяме $\xi_1$ и $\xi_2$ така, че да имаме

$$|f(\xi_1)|>M_i'-\delta,\quad |f(\xi_2)|<m_i'+\delta.$$

По такъв начин получаваме

$$M_i'-m_i'-2\delta<M_i-m_i.$$

Като вземем пред вид, че положителното число $\delta$ е произволно, намираме

$$M_i'-m_i'\leqq M_i-m_i.$$

Този резултат ни позволява да пишем

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i'-m_i')(x_i-x_{i-1})\leqq\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})=S-s$$

и следователно

$$0\leq\int_a^b|f(x)|\,dx-\int_a^b|f(x)|\,dx\leq S-s\leq s\leq S^*-s^*<$$

$$<\int_a^b f(x)\,dx+\varepsilon-\left(\int_a^b f(x)\,dx-\varepsilon\right)=2\varepsilon.$$

Оттук, като вземем пред вид, че положителното число $\varepsilon$ е произволно, а неотрицателната разлика

$$\int_a^b|f(x)|\,dx-\int_a^b|f(x)|\,dx$$

не зависи от $\varepsilon$, заключаваме, че

$$\int_a^b|f(x)|\,dx-\int_a^b|f(x)|\,dx=0,$$

т. е. функцията $|f(x)|$ е наистина интегруема.

IV. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $[a, b]$ и във всички точки от този интервал удовлетворява неравенствата

$$m\leq f(x)\leq M,$$

където $m$ и $M$ са константи.

В такъв случай

(12) $$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a),$$

(13) $$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a).$$

Доказателство. Ние ще докажем неравенството (12); неравенството (13) се доказва по същия начин.

Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

и означаваме с $m_i$ точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала



$[x_{i-1}, x_i]$. Очевидно имаме[1]

$$m\leq m_i\leq M$$

и следователно

$$m(b-a)=\sum_{i=1}^n m(x_i-x_{i-1})\leq\sum_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1})\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^n M(x_i-x_{i-1})=M(b-a).$$

От неравенството

$$\sum_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1})\leq\int_a^b f(x)\,dx,$$

което изразява, че долният интеграл е една горна граница на малките суми, получаваме

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx.$$

От друга страна, неравенството

$$\sum_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1})\leq M(b-a)$$

ни учи, че константата $M(b-a)$ е една горна граница на множеството на малките суми. Като вземем пред вид, че $\int_a^b f(x)\,dx$ е точната, т. е. най-малката горна граница на тези суми, намираме

$$\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a).$$

Следствие. Нека функцията $f(x)$ е ограничена в интервала $[a, b]$ и $f(x)\geq 0$. В такъв случай

[1] И наистина от $m_i\leq f(x)\leq M$ при $x_{i-1}\leq x\leq x_i$ имаме $m_i\leq M$. От друга страна, $m$ е една долна граница на $f(x)$ в целия интервал $[a, b]$, а следователно и в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$, докато $m_i$ е точната, т. е. най-голямата долна граница на функцията $f(x)$ в същия подинтервал, т. е. $m\leq m_i$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0,$$

$$\int_a^b f(x)dx \geqq 0.$$

Специално, ако функцията $f(x)$ е интегруема, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0.$$

V. Нека $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са две ограничени функции в интервала $[a, b]$, които при всички стойности на $x$ удовлетворяват неравенството

$$f_1(x) \leqq f_2(x).$$

В такъв случай

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \leqq \int_a^b f_2(x)\,dx \tag{14}$$

и

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \leqq \int_a^b f_2(x)\,dx. \tag{15}$$

Доказателство. Ще докажем неравенството (14); неравенството (15) се доказва по същия начин. Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и означаваме с $m_i'$ и $m_i''$ точните долни граници съответно на $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Очевидно имаме[1]

$$m_i' \leqq m_i''.$$

От това неравенство получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} m_i'(x_i - x_{i-1}) \leqq \sum_{i=1}^{n} m_i''(x_i - x_{i-1}),$$

[1] Като вземем пред вид неравенствата $m_i' \leqq f_1(x) \leqq f_2(x)$ при $x_{i-1} \leqq x \leqq x_i$, получаваме $m_i' \leqq f_2(x)$. Това неравенство ни учи, че $m_i'$ е една долна граница на $f_2(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Като вземем пред вид още, че $m_i''$ е точната, т. е. най-голямата долна граница на $f_2(x)$ в същия подинтервал, получаваме $m_i' \leqq m_i''$.



т. е.[1]

$$\sum_{i=1}^{n} m_i'(x_i - x_{i-1}) \leqq \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Този резултат ни учи, че числото $\int_a^b f_2(x)\,dx$ е една горна граница на множеството на малките суми на $f_1(x)$. Като вземем в съображение, че

$$\int_a^b f_1(x)\,dx$$

е точната, т. е. най-малката от горните граници на тези суми, получаваме

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \leqq \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Следствие. Ако функцията $f(x)$ е ограничена в интервала $[a, b]$, $a<b$, то

$$\left| \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \right| \leqq \overline{\int_a^b} |f(x)|\,dx.$$

Следователно, ако функцията $f(x)$ е интегруема, то

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Доказателство. От неравенствата

$$f(x) \leqq |f(x)|,$$
$$-f(x) \leqq |f(x)|$$

[1] Тук ние се възползуваме от неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} m_i''(x_i - x_{i-1}) \leqq \int_a^b f_2(x)\,dx,$$

което изразява, че долният интеграл е една горна граница за малките суми.

получаваме

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \geqq \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \geqq \underline{\int_a^b} |f(x)|\,dx \geqq \underline{\int_a^b} [-f(x)]\,dx = -\overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Но

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

е едното (по-голямото) от двете числа

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ и } -\int_a^b f(x)\,dx,$$

тъй че

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \geqq \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|.$$

Забележка. Неравенството

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

не винаги е валидно. За да се убедим в това, разглеждаме функцията $f(x)$, дефинирана с условията $f(x)=-1$ при рационални стойности на $x$ и $f(x)=0$ при ирационални стойности на $x$.

## § 4. Интегриране на сума

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две ограничени функции в интервала $[a, b]$. В такъв случай

$$\underline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]\,dx \geqq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx$$

и

$$\overline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]\,dx \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$



От това следва, че ако двете функции $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми, то сумата $f(x)+g(x)$ е също така интегруема и

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Ние ще извършим доказателството, като разгледаме първо специалния случай, когато $g(x)$ е константа. Да означим с $m$ тази константа. В такъв случай

$$\underline{\int_a^b} [f(x)+m]\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + m(b-a), \tag{16}$$

$$\overline{\int_a^b} [f(x)+m]\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + m(b-a). \tag{17}$$

Доказателство. Ще докажем равенството (16); равенството (17) се доказва по същия начин.

Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и означаваме с $m_i$ и $m_i'$ съответно точната долна граница на $f(x)$ и $f(x)+m$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. В такъв случай имаме

$$m_i' = m_i + m. \tag{18}$$

И наистина от неравенството

$$m_i \leqq f(x),$$

валидно при $x_{i-1} \leqq x \leqq x_i$, получаваме

$$m_i + m \leqq f(x) + m,$$

т. е. $m_i + m$ е една долна граница на $f(x)+m$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Като вземем пред вид, че $m_i'$ е точната, т. е. най-голямата долна граница на тази функция в същия подинтервал, намираме

$$m_i + m \leqq m_i'. \tag{19}$$

Аналогично от неравенството

$$m_i' \leqq f(x) + m,$$

валидно при $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, получаваме

$$m_i' - m \leq f(x),$$

т. е. числото $m_i' - m$ е една долна граница на функцията $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Като вземем пред вид, че $m_i$ е точната, т. е. най-голямата долна граница на тази функция в същия подинтервал, намираме

$$m_i' - m \leq m_i$$

или

(20) $$m_i' \leq m_i + m.$$

Неравенствата (19) и (20) ни дават $m_i' = m_i + m$.

Равенството (18) ни дава възможност да пишем

$$\sum_{i=1}^{n} m_i' (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (m_i + m)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) + m(b-a)$$

и следователно

$$\sum_{i=1}^{n} m_i' (x_i - x_{i-1}) \leq \int_a^b f(x)\,dx + m(b-a).$$

С това ние доказахме, че числото

$$\int_a^b f(x)\,dx + m(b-a)$$

е една горна граница на множеството на малките суми на функцията $f(x)+m$. Като вземем пред вид, че числото

$$\int_a^b [f(x)+m]\,dx$$

е точната, т. е. най-малката им горна граница, намираме

(21) $$\int_a^b [f(x)+m]\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx + m(b-a).$$

Аналогично, използувайки неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \leq \int_a^b [f(x)+m]\,dx - m(b-a),$$



доказваме, че

(22) $$\int_a^b [f(x)+m]\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx + m(b-a).$$

Неравенствата (21) и (22) ни дават

$$\int_a^b [f(x)+m]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + m(b-a).$$

След всичко извършено ние сме готови вече да разгледаме общия случай.

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две ограничени функции в интервала $[a, b]$. В такъв случай

(23) $$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

(24) $$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказателство. Ще докажем неравенството (23); неравенството (24) се доказва по същия начин.

Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и означаваме с $m_i$ точната долна граница на $g(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Съгласно доказаните по-горе теореми

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x)+g(x)]\,dx \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x)+m_i]\,dx = \sum_{i=1}^{n} \left[ \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx + m_i (x_i - x_{i-1}) \right] =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i-x_{i-1}) \leqq \int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx - \int_a^b f(x)\,dx.$$

С това доказахме, че числото

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$

е една горна граница на множеството на малките суми на $g(x)$. Като вземем пред вид, че

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

е точната, т. е. най-малката им горна граница, получаваме

$$\int_a^b g(x)\,dx \leqq \int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx - \int_a^b f(x)\,dx,$$

с което неравенството (23) е установено.

Следствие. Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a, b]$, то функцията $f(x)+g(x)$ е също тъй интегруема в този интервал и

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказателство. От неравенствата

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx \leqq \underline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]\,dx \leqq$$

$$\leqq \overline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]\,dx \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$$

и от равенствата

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx, \quad \underline{\int_a^b} g(x)\,dx = \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$$



получаваме

$$\underline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]\,dx = \overline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Първото равенство ни учи, че функцията $f(x)+g(x)$ е интегруема, а последното ни дава

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

## § 5. Произведение на две интегруеми функции

Ще докажем, че произведението $f(x)\,g(x)$ на две интегруеми в един интервал $a \leqq x \leqq b$ функции $f(x)$ и $g(x)$ е интегруема функция в този интервал.

Доказателство. Първо ще разгледаме случая, когато функциите $f(x)$ и $g(x)$ са неотрицателни. Избираме едно положително число $\varepsilon$. Означаваме с $S'$ и $s'$ една голяма и една малка сума на Дарбу на функцията $f(x)$, които удовлетворяват условията

$$S' < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon, \quad s' > \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon.$$

Означаваме с $S''$ и $s''$ една голяма и една малка сума на Дарбу на функцията $g(x)$, които удовлетворяват условията

$$S'' < \int_a^b g(x)\,dx + \varepsilon, \quad s'' > \int_a^b g(x)\,dx - \varepsilon.$$

В такъв случай

$$S'-s' < 2\varepsilon, \quad S''-s'' < 2\varepsilon,$$

тъй като функциите $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми, т. е.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx, \quad \underline{\int_a^b} g(x)\,dx = \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

Да разделим интервала $a \leqq x \leqq b$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

които са избрани така, че между тях да фигурира всяка точка, която се използува при образуването на сумите $S'$, $s'$, $S''$, $s''$. Означаваме с $M_i'$, респективно $M_i''$, точната горна граница на $f(x)$, респективно $g(x)$, в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$, а с $m_i'$, респективно $m_i''$, означаваме точната долна граница на $f(x)$, респективно $g(x)$, в този подинтервал. В такъв случай при $x_{i-1} \leqq x \leqq x_i$ имаме

$$m_i' m_i'' \leqq f(x) g(x) \leqq M_i' M_i''$$

и следователно

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, g(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \overline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} f(x) g(x) dx \leqq \sum_{i=1}^{n} M_i' M_i'' (x_i - x_{i-1}),$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, g(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \underline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} f(x)\, g(x)\, dx \geqq \sum_{i=1}^{n} m_i' m_i'' (x_i - x_{i-1}),$$

откъдето получаваме

$$\overline{\int_a^b} f(x) g(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x) g(x)\, dx \leqq \sum_{i=1}^{n} (M_i' M_i'' - m_i' m_i'')(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_i'' (M_i' - m_i')(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} m_i' (M_i'' - m_i'')(x_i - x_{i-1}).$$

Да означим с $M$ една обща горна граница на $f(x)$ и $g(x)$ в целия интервал $a \leqq x \leqq b$. В такъв случай ще имаме

$$m_i' \leqq M \text{ и } M_i'' \leqq M$$

и следователно

$$\overline{\int_a^b} f(x) g(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x) g(x)\, dx \leqq M \sum_{i=1}^{n} (M_i' - m_i')(x_i - x_{i-1}) +$$

$$+ M \sum_{i=1}^{n} (M_i'' - m_i'')(x_i - x_{i-1}).$$

От друга страна,

$$\sum_{i=1}^{n} M_i'(x_i - x_{i-1}) \leqq S', \quad \sum_{i=1}^{n} m_i'(x_i - x_{i-1}) \geqq s',$$



$$\sum_{i=1}^{n} M_i''(x_i - x_{i-1}) \leqq S'', \quad \sum_{i=1}^{n} m_i''(x_i - x_{i-1}) \geqq s''.$$

По такъв начин получаваме

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, g(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x)\, g(x)\, dx \leqq M(S' - s') + M(S'' - s'') \leqq 4M\varepsilon,$$

което е достатъчно да можем да твърдим, че

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, g(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, g(x)\, dx.$$

По такъв начин ние установихме интегруемостта на произведението $f(x)\, g(x)$ в случая, когато функциите $f(x)$ и $g(x)$ са неотрицателни. За да се освободим от това предположение, означаваме с $m$ една обща долна граница на $f(x)$ и $g(x)$. В такъв случай функциите

$$f(x) - m \text{ и } g(x) - m$$

са неотрицателни и следователно въз основа на доказаното можем да твърдим, че произведението

$$[f(x) - m][g(x) - m]$$

е интегруемо. Това обаче ни позволява да твърдим, че функцията

$$f(x)\, g(x) = [f(x) - m][g(x) - m] + mf(x) + mg(x) - m^2$$

е също тъй интегруема, защото е сума на интегруеми функции. С това доказателството е завършено.

## § 6. Интегралът като функция на една от интеграционните си граници. Теорема на Лайбниц и Нютон. Зависимост между определени и неопределени интеграли

Нека функцията $f(t)$ е интегруема в интервала $a \leqq t \leqq b$. В такъв случай, както видяхме по-горе, тази функция е интегруема и в подинтервала $a \leqq t \leqq x$, където $a < x \leqq b$.

Стойността на интеграла

$$\int_a^x f(t)\, dt$$

може, разбира се, евентуално да се мени когато $x$ се мени. Тя обаче е еднозначно определена, когато $x$ е дадено, и следователно представлява функция на $x$, дефинирана в интервала $[a, b]$.

Ние ще пишем за краткост

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

и ще установим, че тази функция е непрекъсната. Ще докажем дори нещо повече: тази функция удовлетворява условието на Липшиц (вж. Диференциално смятане, част III, глава II, § 5).

За да се убедим в това, означаваме с $M$ и $m$ една горна и една долна граница на $f(t)$ в интервала $[a, b]$.

Нека $x_1<x_2$ са две точки от интервала $[a, b]$. В такъв случай

$$F(x_2)=\int_a^{x_2} f(t)\,dt=\int_a^{x_1} f(t)dt+\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$$

и следователно

$$F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt.$$

Като се възползуваме от неравенството (12) от предния параграф, получаваме[1]

$$m(x_2-x_1)\leqq\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\leqq M(x_2-x_1)$$

и следователно

(1) $$m(x_2-x_1)\leqq F(x_2)-F(x_1)\leqq M(x_2-x_1).$$

[1] В случая функцията $f(t)$ е интегруема и следователно, като приложим неравенството (12) от предния параграф, можем да пишем

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$$

(т. е. вместо долния интеграл вземаме редовния Риманов интеграл) или в нашия специален случай

$$m(x_2-x_1)\leq\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\leq M(x_2-x_1).$$



От това двойно неравенство се вижда непосредствено, че функцията $F(x)$ удовлетворява условието на Липшиц.[1]

За да се убедим, че функцията $F(x)$ е непрекъсната във всяка точка $x_0$ на интервала $(a, b]$, оставяме $x_1$ и $x_2$ да клонят към $x_0$ чрез две произволни редици от стойности (лежащи, разбира се, в интервала $[a, b]$) по такъв начин, че да имаме

$$x_1\leqq x_0\leqq x_2.$$

В такъв случай са валидни неравенствата[2] (1). Като вземем пред вид, че разликата $x_2-x_1$ клони към нула, заключаваме, че разликата

$$F(x_2)-F(x_1)$$

също клони към нула, което, както знаем, е достатъчно да твърдим, че функцията $F(x)$ е непрекъсната в точката $x_0$.

След тези предварителни бележки ще докажем следната важна теорема, която е известна под името теорема на Лайбниц и Нютон:

**Нека функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и непрекъсната в точката $x_0$, където $a<x_0\leq b$. В такъв случай функцията**

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

**е диференцуема в точката $x_0$ и**

$$F'(x_0)=f(x_0).$$

Доказателство. Разглеждаме отношението

$$\frac{F(x_n)-F(\xi_n)}{x_n-\xi_n},$$

където

(2) $$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

(3) $$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots,$$

[1] Ако функцията $f(t)$ не е задължена да бъде интегруема в интервала $(a, b)$, но все пак е ограничена, ние можем да приложим горните разсъждения за функциите

$$F_1(x)=\underline{\int_a^x} f(t)\,dt,\quad F_2(x)=\overline{\int_a^x} f(x)\,dt$$

и да заключим, че те удовлетворяват условието на Липшиц и следователно са непрекъснати.

[2] Дори при $x_1=x_2$. В този случай валидността на тези неравенства не следва от направените по-горе разсъждения, обаче тя се вижда непосредствено, тъй като в този случай $F(x_1)=F(x_2)$.

са две редици, удовлетворяващи условията

$$a<\xi_n\leqq x_0\leqq x_n\leqq b,\quad \xi_n\neq x_n,\quad \lim_{n\to\infty}\xi_n=\lim_{n\to\infty}x_n=x_0.$$

Очевидно имаме

$$\frac{F(x_n)-F(\xi_n)}{x_n-\xi_n}=\frac{\int\limits_a^{x_n}f(t)\,dt-\int\limits_a^{\xi_n}f(t)\,dt}{x_n-\xi_n}=$$

$$=\frac{\left[\int\limits_a^{\xi_n}f(t)\,dt+\int\limits_{\xi_n}^{x_n}f(t)\,dt\right]-\int\limits_a^{\xi_n}f(t)\,dt}{x_n-\xi_n}=\frac{1}{x_n-\xi_n}\int\limits_{\xi_n}^{x_n}f(t)\,dt.$$

Избираме едно произволно положително число $\varepsilon$ и определяме $\delta>0$ по такъв начин, че при

$$|x_0-t|<\delta\quad a\leqq t\leqq b,$$

да имаме

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$$

или, което е същото,

$$(4)\qquad f(x_0)-\varepsilon<f(t)<f(x_0)+\varepsilon.$$

След това избираме едно толкова голямо число $\nu$, че при $n>\nu$ да имаме $x_n-x_0<\delta$ и $x_0-\xi_n<\delta$. Това е възможно, защото редиците (2) и (3) клонят към $x_0$ и защото $\delta>0$. В такъв случай при $\xi_n\leqq t\leqq x_n$ имаме $|t-x_0|<\delta$ и следователно са в сила неравенствата (4).

Като използуваме неравенствата (12) от предния параграф, получаваме

$$[f(x_0)-\varepsilon](x_n-\xi_n)\leqq\int\limits_{\xi_n}^{x_n}f(t)\,dt\leqq[f(x_0)+\varepsilon](x_n-\xi_n)$$

и следователно

$$f(x_0)-\varepsilon\leqq\frac{F(x_n)-F(\xi_n)}{x_n-\xi_n}\leqq f(x_0)+\varepsilon$$

или

$$\left|\frac{F(x_n)-F(\xi_n)}{x_n-\xi_n}-f(x_0)\right|\leqq\varepsilon,$$



нещо, което е достатъчно, както знаем, за да твърдим, че функцията $F(x)$ е диференцуема[1] в точката $x_0$ и че

$$F'(x_0)=f(x_0).$$

Особено е важен случаят, когато подинтегралната функция $f(x)$ е непрекъсната във всичките точки на интервала $a\leqq x\leqq b$. В такъв случай във всичките точки на интервала $(a, b]$ имаме

$$F'(x)=f(x),$$

т. е. функцията $F(x)$ представлява една примитивна функция на $f(x)$ в интервала $(a, b]$. Върху тази зависимост между определените и неопределените интеграли почива един важен метод за пресмятане на определените интеграли. Ние ще изложим сега този метод.

Нека $\Phi(x)$ е една примитивна функция за функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$. Това значи, че функцията $\Phi(x)$ е диференцуема в интервала $a\leqq x\leqq b$ и

$$\Phi'(x)=f(x).$$

Полагаме

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt\ \text{ при } a<x\leqq b$$

и разглеждаме разликата

$$(5)\qquad \varphi(x)=F(x)-\Phi(x).$$

Очевидно имаме

$$\varphi'(x)=F'(x)-\Phi'(x)=f(x)-f(x)=0,$$

---

[1] Ако функцията $f(x)$ не е подчинена на условието да бъде интегруема, но все пак е ограничена, то ние можем да приложим горните разсъждения за функциите

$$F_1(x)=\underline{\int\limits_a^x} f(t)\,dt,$$

$$F_2(x)=\overline{\int\limits_a^x} f(t)\,dt$$

и да заключим, че във всяка точка $x_0$, в която функцията $f(x)$ е непрекъсната, двете функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ са диференцуеми и

$$F_1'(x_0)=F_2'(x_0)=f(x_0).$$

т. е. функцията $\varphi(x)$ е една константа. Да означим с $C$ нейната стойност. За да пресметнем стойността на тази константа, извършваме граничен преход $x \to a$.

Като вземем пред вид неравенствата

$$m(x-a) \leq F(x) \leq M(x-a),$$

в които $M$ е една горна, а $m$ е една долна граница на $f(x)$, получаваме

$$\lim_{x \to a} F(x) = 0. \tag{6}$$

От друга страна, функцията $\Phi(x)$ по предположение е диференцуема в затворения интервал $[a, b]$ и следователно е непрекъсната в него. Оттук получаваме по-специално:

$$\lim_{x \to a} \Phi(x) = \Phi(a). \tag{7}$$

Като извършим граничния преход $x \to a$ в равенството (5) и вземем пред вид равенствата (6) и (7), получаваме

$$C = -\Phi(a)$$

и следователно

$$F(x) - \Phi(x) = -\Phi(a),$$

или още

$$\int_a^x f(t)\, dt = \Phi(x) - \Phi(a). \tag{8}$$

Така например, за да пресметнем интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx,$$

вземаме пред вид познатия неопределен интеграл

$$\int \cos x\, dx = \sin x.$$

Като приложим формулата (8), получаваме

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$



Накрая ще отбележим, че понякога формулата (8) се записва във вида

$$\int_a^x f(t)\, dt = \Big|\, \Phi(t) \Big|_a^x,$$

като се използува означението

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \Big|\, \Phi(t) \Big|_a^x.$$

При този начин на писане имаме например

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = \Big|\, \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

## § 7. Допълнения към дефиницията на понятието интеграл

Ние дефинирахме символа

$$\int_a^b f(x)\, dx \tag{1}$$

само за случая, когато долната интеграционна граница $a$ е по-малка от горната $b$. Сега ще дефинираме символа (1) при $a \geq b$ по следния начин: при $a = b$ полагаме

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0, \tag{2}$$

а при $a > b$ полагаме

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

ние знаем какво значи $\int_b^a f(x)\, dx$, защото $b < a$).

При дефиницията (2) се ръководим от следните съображения: нека $f(x)$ е една интегруема функция в интервала $[a, b]$, $a < b$; ако означим с $M$ и $m$ съответно една нейна горна и една нейна долна граница в разглеждания интервал, то при $a < x \leq b$ имаме

$$m(x-a) \leqq \int_a^x f(t)\ dt \leqq M(x-a);$$

оттук заключаваме, че

$$\lim_{x\to a} \int_a^x f(t) dt = 0$$

(тук $x$ клони към $a$ чрез стойности, по-големи от $a$); като полагаме

$$\int_a^a f(t)\ dt = 0,$$

ние си осигуряваме непрекъснатостта на функцията

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

в точката $a$ (досега функцията $F(x)$ беше дефинирана и непрекъсната само в интервала $(a, b]$).

При дефиницията (3) ние се ръководим от следните съображения: ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, c]$, $a<c$, и $b$ е една вътрешна точка в този интервал, то

$$\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx; \tag{4}$$

ние се стремим да нагодим дефиницията (3) така (ако това е възможно), че да осигурим валидността на равенството (4), каквото[1] и да е взаимното разположение на точките $a$, $b$, $c$; специално при $c=a$ получаваме от равенството (4)

$$\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^a f(x)\ dx = \int_a^a f(x)\ dx = 0$$

или

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx.$$

[1] Т. е. не само когато $a<b<c$.



И така, ако желаем да осигурим общата валидност на равенството (4), ние нямаме друг избор освен да възприемем дефиницията (3).

От направените дотук разсъждения обаче съвсем не е ясно дали при така дадените дефиниции (2) и (3) равенството (3) е действително вярно при всички взаимни разположения на точките $a$, $b$, $c$. Този въпрос се решава в положителен смисъл с непосредствена проверка, която ще предоставим на читателя.[1] По такъв начин достигаме до следния резултат:

Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $\Delta$ и $a$, $b$, $c$ са три точки от този интервал, то

$$\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\, dx$$

(каквото и да е взаимното разположение на точките $a$, $b$, $c$).

В предния параграф ние доказахме следната теорема: ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, $a<b$, то функцията

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,\ a<x\leqq b,$$

е диференцуема и

$$F'(x) = f(x)$$

(теорема на Лайбниц и Нютон). При тази теорема долната интеграционна граница $a$ е по-малка от независимата променлива $x$. Не е трудно да се види, че функцията

$$\Phi(x) = \int_c^x f(t)\ dt, \text{ където } a\leqq c\leqq b,$$

е също тъй диференцуема при $a\leqq x\leqq b$ и

$$\Phi'(x) = f(x).$$

[1] Читателят лесно ще даде сам доказателството, като разгледа поотделно случаите, които могат да се представят:

$c<a<b$, $c=a<b$, $a<c<b$, $a<c=b$, $a<b<c$,

$c<b<a$, $c=b<a$, $b<c<a$, $b<c=a$, $b<a<c$,

$c<a=b$, $c=a=b$, $a=b<c$.

Тази теорема се отличава от по-горната по това, че в случая независимата променлива $x$ може да приема както стойности, по-големи от $c$, така и стойности, по-малки от $c$.

Доказателството се извършва без труд, като положим $f(x) = f(a)$ при $x<a$ и вземем пред вид, че

$$\Phi(x)=\int_c^p f(t)\,dt+\int_p^x f(t)\,dt,$$

където $p<a$. И наистина ние знаем, че функцията

$$\int_p^x f(t)\,dt$$

е диференцуема (защото тук имаме $p<x\leq b$ и функцията $f(t)$ е непрекъсната при $p\leq t\leq b$). Оттук заключаваме, че функцията $\Phi(x)$ е също диференцуема и

$$\Phi'(x)=\left[\int_c^p f(t)\,dt+\int_p^x f(t)\,dt\right]'=$$

$$=\left[\int_p^x f(t)\,dt\right]'=f(x).$$

Досега разглеждахме определения интеграл като функция на горната му граница. Ние бихме могли обаче да направим аналогични разглеждания, като фиксираме горната граница и оставим да се мени долната граница. Така например, ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, $a<b$ и $c$ е една точка от този интервал, то функцията

$$\varphi(x)=\int_x^c f(t)\,dt$$

е диференцуема при $a<x\leq b$ и

$$\varphi'(x)=-f(x),$$

защото[1]

[1] При $x>c$ това дава дефиницията (3); при $x<c$ пак нямаме нищо ново, тъй като дефиницията (3) ни дава

$$\int_c^x f(t)\,dt=-\int_x^c f(t)\,dt;$$

при $x=c$ валидността на това равенство следва от дефиницията (2).



$$\int_x^c f(t)\,dt=-\int_c^x f(t)\,dt,$$

и следователно

$$\varphi'(x)=-\left(\int_c^x f(t)\,dt\right)'=-f(x).$$

## § 8. Смяна на променливите

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в някой интервал $\Delta$; нека функцията $\varphi(t)$ е дефинирана и притежава непрекъсната първа производна в някой интервал[1] $[\alpha, \beta]$; нека всички стойности на $\varphi(t)$ лежат в интервала $\Delta$; нека най-сетне

(1) $$\varphi(\alpha)=a,\quad \varphi(\beta)=b.$$

При тези предположения ще докажем, че

(2) $$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Преди да пристъпим към доказателството, нека обърнем внимание върху това, че ние можем да образуваме функцията $f[\varphi(t)]$, защото стойностите на функцията $\varphi(t)$ не напускат дефиниционната област на $f(x)$. Ние можем да образуваме и интеграла

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt,$$

защото функцията $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$ е непрекъсната като произведение на две непрекъснати функции[2] $f[\varphi(t)]$ и $\varphi'(t)$ и следователно е интегруема. Най-сетне ние можем да образуваме и интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

защото функцията $f(x)$ е непрекъсната.

[1] Тук не трябва да се смята, че $\alpha$ е непременно левият край на този интервал, макар и да пишем $[\alpha, \beta]$.

[2] Функцията $f[\varphi(t)]$ е непрекъсната, защото функциите $f(x)$ и $\varphi(t)$ са непрекъснати.

И така в двете части на равенството (2) имаме две добре дефинирани числа. Остава да покажем, че те са равни помежду си. За тази цел полагаме

$$F(u)=\int_a^u f(x)\,dx$$

и образуваме двете помощни функции

$$\Phi(s)=F[\varphi(s)],$$

$$\psi(s)=\int_\alpha^s f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

в интервала $[\alpha, \beta]$.

Теоремата на Лайбниц и Нютон и правилото за диференциране на функция от функция ни дават

$$\Phi'(s)=F'[\varphi(s)]\,.\,\varphi'(s)=f[\varphi(s)]\,\varphi'(s),$$

$$\psi'(s)=f[\varphi(s)]\,\varphi'(s).$$

Оттук заключаваме, че разликата

$$\Phi(s)-\psi(s)$$

е една константа. Специално, като вземем пред вид, че $\varphi(\alpha)=a$ получаваме при $s=\alpha$

$$\Phi(\alpha)-\psi(\alpha)=F[\varphi(\alpha)]-\psi(\alpha)=F(a)-\psi(\alpha).$$

Като вземем пред вид, че

$$F(a)=\int_a^a f(x)\,dx=0,$$

$$\psi(\alpha)=\int_\alpha^\alpha f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=0,$$

намираме

$$\Phi(\alpha)-\psi(\alpha)=0$$

и следователно при всички стойности на $s$ от интервала $[\alpha, \beta]$ имаме

$$\Phi(s)-\psi(s)=0.$$

Специално при $s=\beta$ получаваме

$$\Phi(\beta)-\psi(\beta)=0$$



или

$$F[\varphi(\beta)]=\psi(\beta);$$

но $\varphi(\beta)$ е равно на $b$, тъй че

$$F(b)=\psi(\beta)$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Ние често ще записваме формулата (2) във вида

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,d\,\varphi(t)$$

и ще казваме, че интегралът

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

е получен от интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

с помощта на субституцията $x=\varphi(t)$.

Пример. Да се пресметне интегралът

$$I=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Решение. Полагаме $x=\cos t$ и решаваме уравненията[1] $-1=\cos\alpha$, $1=\cos\beta$. Очевидно $\alpha=\pi$ и $\beta=0$ са решения на тези уравнения (ние бихме могли да вземем обаче кои да са други техни решения).

Като вземем пред вид, че функцията $\sqrt{1-x^2}$ е непрекъсната в интервала $[-1, 1]$, че функцията $\cos t$ е диференцуема и има непрекъсната производна в интервала $[\pi, 0]$, че стойностите на функцията $\cos t$ не напускат интервала $[-1, 1]$ и най-сетне, че $-1=\cos\pi$ и $1=\cos 0$, заключаваме, че ние можем да използуваме формулата (2). Това ни дава

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_\pi^0\sqrt{1-\cos^2 t}\,d\cos t$$

[1] Тези уравнения съответствуват на уравненията (1).

или

$$I=-\int_{\pi}^{0}\sin^2 t\,dt=\int_{0}^{\pi}\sin^2 t\,dt.$$

По-нататък пресмятанията се развиват по познатия начин:

$$I=\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=\left|\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right|_{0}^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

## § 9. Интегриране по части при определените интеграли

Нека функциите $u(x)$ и $v(x)$ са диференцуеми и производните им са непрекъснати в интервала $[a, b]$. В такъв случай е валидна следната формула:

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx=u(b)\,v(b)-u(a)\,v(a)-\int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx.$$

И наистина, като вземем пред вид, че функцията $u(x)\,v(x)$ е един неопределен интеграл на непрекъснатата функция $u(x)\,v'(x)+u'(x)\,v(x)$, заключаваме, че

$$\int_a^b [u(x)\,v'(x)+u'(x)\,v(x)]\,dx=u(b)\,v(b)-u(a)\,v(a),$$

откъдето

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx+\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx=u(b)\,v(b)-u(a)\,v(a)$$

или още

(1) $$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx=u(b)\,v(b)-u(a)\,v(a)-\int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx.$$

Ние често ще записваме формулата (1) по-кратко по следния начин:

$$\int_a^b u(x)\,dv(x)=u(b)v(b)-u(a)\,v(a)-\int_a^b v(x)\,du(x)$$



или още

$$\int_a^b u(x)\,dv(x)=\left|u(x)\,v(x)\right|_a^b-\int_a^b v(x)\,du(x).$$

Пример 1. Да се пресметне интегралът

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx.$$

Решение. Интегрираме по части:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,d\sin x=\left|x\sin x\right|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}-1.$$

Пример 2. Да се пресметне интегралът

$$I=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Решение. Тук непосредственото интегриране по части е възпрепятствувано от обстоятелството, че функцията

$$\sqrt{1-x^2}$$

не е диференцуема при $x=1$ и $x=-1$. За да отстраним тази трудност, прилагаме формулата за интегриране по части към

$$F(\varepsilon)=\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\sqrt{1-x^2}\,dx,$$

където $0<\varepsilon<1$. Това ни дава

$$F(\varepsilon)=\left|x\sqrt{1-x^2}\right|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}-\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}x\,d\sqrt{1-x^2}=\left|x\sqrt{1-x^2}\right|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}+\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$$

$$=\left|x\sqrt{1-x^2}\right|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}+\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\left|x\sqrt{1-x^2}\right|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}-F(\varepsilon)+\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\left|x\sqrt{1-x^2}\right|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}-F(\varepsilon)+\left|\arcsin x\right|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}.$$

Извършваме граничния преход $\varepsilon \to 0$. Това ни дава

$$F(0) = \left. x\sqrt{1-x^2}\right|_{-1}^{1} - F(0) + \left. \arcsin x\right|_{-1}^{1} = -F(0) + \pi,$$

защото функцията $F(\varepsilon)$ е непрекъсната (дори удовлетворява условието на Липшиц), както това се вижда например от представянето

$$F(\varepsilon) = \int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{1-x^2}\, dx - \int_0^{-1+\varepsilon} \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

По такъв начин получаваме

$$F(0) = \frac{\pi}{2}$$

и следователно

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

### Задачи

Да се пресметнат следните интеграли:

1. $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$.

Решение.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \left. \ln x \right|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

2. $I = \int_{-1}^{1} x^2\, dx$.

Отговор. $I = \frac{2}{3}$.

3. $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Отговор. $I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.



4. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x}$.

Упътване. Извършете субституцията $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ или по-точно $x = 2 \operatorname{arc\,tg} t$.

Отговор. $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. $I = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

Отговор. $I = \frac{1}{2} a^2 \pi$.

6. $I = \int_0^{\pi} \frac{d}{(2+\cos x)^2}$.

Упътване. Тук е удобно да се извърши субституцията $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ или по-точно $x = 2 \operatorname{arc\,tg} t$. Непосредственото използуване на тази субституция обаче среща една мъчнотия. Функцията $2 \operatorname{arc\,tg} t$ не е способна да приема стойността $\pi$ — нещо, което сгъва използуването на теоремата за смяна на променливите при определените интеграли. Поради това нека читателят пресметне предварително помощния интеграл

$$\varphi(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{dx}{(2+\cos x)^2}$$

при $0 < \alpha < \pi$ и се възползува от зависимостта

$$I = \lim_{\alpha \to \pi} \varphi(\alpha),$$

която следва от непрекъснатостта на функцията $\varphi(\alpha)$.

Отговор. $I = \frac{2}{3\sqrt{3}} \pi$.

7. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$.

Отговор. $I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

8. $I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{1-\cos\alpha\sin x}$, $\alpha\neq k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Отговор. $I=\frac{2\pi}{|\sin\alpha|}$.

9. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x+\sin x}$.

Отговор. $I=\pi\sqrt{2}$.

10. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^3 x dx$.

Отговор. $I=\frac{4}{15}$.

11. Да се пресметне интегралът

$$I=\int\limits_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$$

Упътване. Като извършите субституцията $x=\operatorname{tg} t$, ще получите

$$I=\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt.$$

Покажете, че

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt,$$

като преобразувате първия интеграл с помощта на субституцията $t=\frac{\pi}{4}-z$.

12. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $-a\leq x\leq a$ и нечетна в този интервал, т. е. $f(-x)=-f(x)$. Покажете, че

$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)\,dx=0.$$



13. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $-a\leq\leq x\leq a$ и е четна в този интервал, т. е. $f(-x)=f(x)$. Покажете, че

$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int\limits_0^{a}f(x)\,dx.$$

14. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана, непрекъсната при всяко $x$ и периодична с период $\omega$, т. е. $f(x+\omega)=f(x)$. Покажете, че при всеки избор на числото $a$ имаме

$$\int\limits_a^{a+\omega}f(x)\,dx=\int\limits_0^{\omega}f(x)\,dx.$$

Упътване. Покажете, че

$$\int\limits_{\omega}^{a+\omega}f(x)\,dx=\int\limits_0^{a}f(x)\,dx$$

и използувайте равенството

$$\int\limits_a^{a+\omega}f(x)\,dx=\int\limits_a^{0}f(x)\,dx+\int\limits_0^{\omega}f(x)\,dx+\int\limits_{\omega}^{a+\omega}f(x)\,dx.$$

15. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната при всяко $x$ и при всички стойности на $t$ удовлетворява равенството

$$\int\limits_t^{t+\omega}f(x)\,dx=\int\limits_0^{\omega}f(x)\,dx.$$

Покажете, че функцията $f(x)$ е периодична с период $\omega$.

Упътване. Диференцирайте по $t$

$$\varphi(t)=\int\limits_t^{t+\omega}f(x)\,dx.$$

## § 10. Теорема за средните стойности

Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, а функцията $\varphi(x)$ е интегруема и не си мени знака в този интервал. В такъв случай

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=f(\xi)\int\limits_a^b\varphi(x)\,dx, \tag{1}$$

където $\xi$ е една точка, подходящо избрана в затворения интервал $[a, b]$.

Доказателство. Ние ще разгледаме на първо време случая, когато $\varphi(x) \geq 0$ и $a < b$.

Да означим с $M$ точната горна граница на $f(x)$, а с $m$ точната ѝ долна граница в интервала $[a, b]$. В такъв случай, като се възползуваме от обстоятелството, че $\varphi(x) \geq 0$, получаваме

$$m\,\varphi(x) \leq f(x)\varphi(x) \leq M\,\varphi(x).$$

Оттук получаваме

$$(2) \qquad m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \leq M\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

тъй като $a < b$. От друга страна,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \geq 0$$

и следователно, ако

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \neq 0,$$

ние можем да напишем

$$(3) \qquad m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} \leq M.$$

По предположение функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и следователно тя приема в някоя точка $x_1$ стойността $M$ и в някоя точка $x_2$ — стойността $m$ (теорема на Вайерщрас). От това заключаваме, че тази функция приема в интервала $[x_1, x_2]$ всички стойности, които се намират между $M$ и $m$. Като вземем пред вид, че числото

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx}$$



се намира между $M$ и $m$, заключаваме, че има точка $\xi$ в интервала $[x_1, x_2]$, а следователно и в интервала $[a, b]$, за която

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx},$$

или

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Ние не можем да направим тези разсъждения, ако $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$, защото в такъв случай не можем да се ползуваме от неравенствата (3). Обаче неравенствата (2) ни учат, че и

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0,$$

и следователно равенството (1) е вярно при всеки избор на $\xi$.

С това ние установихме валидността на теоремата при $\varphi(x) \geq 0$ и $a < b$. При $a = b$ валидността на тази теорема е очевидна, защото в двете страни на равенството (1) имаме нула. Останалите случаи се свеждат без труд към разгледания случай, при който $\varphi(x) \geq 0$ и $a < b$. Така например, ако $\varphi(x) \leq 0$ и $a < b$, ние можем да представим равенството (1) във вида

$$\int_a^b f(x)\,[-\varphi(x)]\,dx = f(\xi)\int_a^b [-\varphi(x)]\,dx$$

и по този начин да получим познатия случай, защото $-\varphi(x) \geq 0$. Аналогично се разглеждат и другите случаи, които могат да се представят. По-специално, ако $\varphi(x) = 1$, равенството (1) добива вида

$$(4) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a).$$

Тук ние можем да изберем точката $\xi$ в отворения интервал $(a, b)$, когато $a \neq b$. И наистина, ако положим

$$F(x)=\int_a^x f(t)\, dt,$$

равенството (4) ще добие вида

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)\,(b-a)$$

и следователно то може да се разглежда като специален случай от теоремата за крайните нараствания. (Теоремата за крайните нараствания трябва да се разглежда като по-обща, защото при нея не се иска непрекъснатостта на $F'(x)$.)

## § 11. Друга дефиниция на понятието определен интеграл

Дефиницията на понятието определен интеграл, която дадохме в § 1, произхожда от Дарбу. Сега ще разгледаме дефиницията, която дава Риман, и ще установим еквивалентността на двете дефиниции.

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в крайния затворен интервал $[a, b]$. Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

(1) $$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

и във всеки един от тези подинтервали избираме по една точка. Нека $\xi_i$ е точката, която избираме в $i$-тия подинтервал $[x_{i-1}, x_i]$, така че

$$x_{i-1}\leq \xi_i \leq x_i.$$

Сумата

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1})$$

се нарича Риманова интегрална сума, която отговаря на избрания начин на деление на интервала $[a, b]$ на подинтервали и на направения избор на междинните точки $\xi_i$. Тази сума ние можем да образуваме, без да има нужда да предполагаме нещо за ограничеността на функцията $f(x)$.

Ако съществува такова число $I$, че при всеки избор на положителното число $\varepsilon$ може да се намери положително число $\delta$ така, че ако точките на деление (1) удовлетворяват условието $x_i-x_{i-1}<\delta$ при всички цели стойности на $i$ от 1 до $n$, то

$$|\sigma-I|<\varepsilon,$$



казваме, че сумите на Риман $\sigma$ клонят към граница $I$, когато дължините на подинтервалите клонят към нула.

Риман дава следната дефиниция на понятието определен интеграл: казваме, че функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$, ако Римановите суми $\sigma$ клонят към някаква граница $I$, когато дължините на подинтервалите клонят към нула. Границата $I$ се нарича определен интеграл на $f(x)$, разпространен върху интервала $[a, b]$.

При дефиницията на Риман няма нужда да се предполага предварително, че функцията $f(x)$ е ограничена, обаче не е трудно да се види, че от съществуването на определения интеграл според дефиницията на Риман следва, че функцията $f(x)$ е ограничена. И наистина нека $\varepsilon$ е произволно положително число и нека $I$ е стойността на определения интеграл от $f(x)$ върху интервала $[a, b]$ според дефиницията на Риман. Делим интервала $[a, b]$ на достатъчно дребни подинтервали с помощта на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

за да имаме

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1})-I\right|<\varepsilon$$

при всеки избор на $\xi_i$ от подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. В такъв случай получаваме[1]

$$|f(\xi_k)\,(x_k-x_{k-1})|\leq$$

$$\leq\varepsilon+\left|\sum_{i=1}^{k-1} f(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1})-I\right|.$$

Фиксираме $\xi_i$ при $i\neq k$ и оставяме $\xi_k$ да се мени в подинтервала $[x_{k-1}, x_k]$. Полученото неравенство ни учи, че функцията $f(x)$ е ограничена в подинтервала $[x_{k-1}, x_k]$. Тъй като ние можем обаче да даваме на $k$ всички цели стойности от 1 до $n$, заключаваме, че $f(x)$ е ограничена в целия интервал $[a, b]$.

Не е трудно да се убедим, че ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ според дефиницията на Риман, тя е интегруема и според дефиницията на Дарбу и интегралите в двата смисъла са равни помежду си. И наистина нека $\varepsilon$ е произволно положително число и нека положителното число $\delta$ е толкова

[1] Разбира се, някоя от сумите $\sum_{i=1}^{k-1} f(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1})$ и $\sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ може евентуално да бъде празна.

малко, че ако точките на деление (1) удовлетворяват условието $x_i - x_{i-1} < \delta$ при всички цели стойности на $i$ от 1 до $n$, да имаме

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon$$

при всеки избор на $\xi_i$ от подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Означаваме с $M_i$ точната горна, а с $m_i$ точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$.

Ако оставим $f(\xi_i)$ да клони[1] към $M_i$, получаваме след съответния граничен преход

$$\left| \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) - I \right| \leqq \varepsilon,$$

откъдето

$$\sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1}) \leqq I + \varepsilon$$

и толкова повече

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq I + \varepsilon.$$

Ако оставим $f(\xi_i)$ клони към $m_i$, получаваме

$$\left| \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1}) - I \right| \leqq \varepsilon,$$

откъдето

$$I - \varepsilon \leqq \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1})$$

и следователно

$$I - \varepsilon \leqq \int_a^b f(x)\,dx.$$

[1] Каквото и да бъде положителното число $\eta$, числото $M_i - \eta$ не е горна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$, тъй като $M_i$ е най-малката горна граница в този подинтервал. От това заключаваме, че може да се избере точка $\xi_i$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$ така, че да имаме $f(\xi_i) > M_i - \eta$. Оттук, като вземем пред вид, че $f(\xi_i) \leqq M_i$, получаваме $M_i - \eta < f(\xi_i) \leqq M_i$, т. е. функцията $f(x)$ е способна да приема в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$ стойностга, произволно близки до $M_i$. Аналогично се вижда, че тя е способна да приема в този подинтервал и стойности, произволно близки до $m_i$.



По такъв начин намерихме

$$I - \varepsilon \leqq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq I + \varepsilon$$

при всеки избор на положителното число $\varepsilon$ и следователно

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = I.$$

С това ние доказахме, че ако една функция $f(x)$ е интегруема според дефиницията на Риман, тя е интегруема и според дефиницията на Дарбу и интегралите в двата смисъла са равни помежду си.

За да докажем, че и обратното е вярно, ние ще установим следната теорема на Дарбу: когато дължините на подинтервалите клонят към нула, големите суми на Дарбу на всяка ограничена функция клонят към горния, а малките суми на Дарбу клонят към долния интеграл на тази функция. Ние няма да прецизираме точния смисъл на тези думи, понеже едно аналогично прецизиране ние вече направихме по-горе за Римановите суми.

Ще докажем теоремата на Дарбу за големите суми; за малките суми тя се доказва аналогично. За тази цел избираме произволно положителното число $\delta$ и делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n = b$$

по такъв начин, че да имаме

$$\xi_i - \xi_{i-1} < \delta$$

при всички цели стойности на $i$ от 1 до $n$. Нека $M$ е една горна граница на $f(x)$ в целия интервал $[a, b]$, нека $M_i$ е точната горна граница на $f(x)$ в подинтервала $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ и нека

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i (\xi_i - \xi_{i-1})$$

е съответната голяма сума на Дарбу. Нека към точките на деление $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ причислим още една нова точка на деление $\xi$ и да означим с $S'$ съответната голяма сума на Дарбу. При тези условия ще покажем, че

$$S - S' \leqq 2M\delta. \tag{2}$$

И наистина, ако $\xi$ съвпада с някоя от точките $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n$, то $S-S'=0$, т. е. в този тривиален случай неравенството (2) е вярно. Ако $\xi$ не съвпада с някоя от точките $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n$, ние ще означим с $k$ най-малкото цяло положително число, за което $\xi<\xi_k$, т. е. $\xi_{k-1}<\xi<\xi_k$. Нека $L_1$ е точната горна граница на функцията $f(x)$ в подинтервала $[\xi_{k-1}, \xi]$ и $L_2$ е точната ѝ горна граница в подинтервала $[\xi, \xi_k]$. В такъв случай

$$S-S'=M_k(\xi_k-\xi_{k-1})-L_1(\xi-\xi_{k-1})-L_2(\xi_k-\xi)$$

и следователно

$$\begin{aligned}S-S'&\leqq|M_k|(\xi_k-\xi_{k-1})+|L_1|(\xi-\xi_{k-1})+|L_2|(\xi_k-\xi)\leqq\\&\leqq M(\xi_k-\xi_{k-1})+M(\xi-\xi_{k-1})+M(\xi_k-\xi)=2M(\xi_k-\xi_{k-1})\leqq\\&\leqq 2M\delta.\end{aligned}$$

Сега не е трудно да се докаже теоремата на Дарбу. Нека $\varepsilon$ е произволно положително число и нека $S^*$ е голяма сума на Дарбу, която удовлетворява неравенството

$$S^*<\int_a^b f(x)\,dx+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Такава сигурно има, защото $\int_a^b$ е най-голямата долна граница на множеството на големите суми на Дарбу и следователно $\int_a^b+\frac{\varepsilon}{2}$ не е долна граница на това множество.

Означаваме с

$$a=x_0^*<x_1^*<x_2^*<\cdots<x_p^*=b$$

точките на деление, които отговарят на сумата $S^*$.

Да разгледаме една произволна голяма сума на Дарбу $S$, чиито точки на деление

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

са подчинени на единственото условие да удовлетворяват неравенствата

$$x_i-x_{i-1}<\delta$$

при всички цели стойности на $i$ от 1 до $n$, където $\delta=\frac{\varepsilon}{4Mp}$.



Нека $S_k$ е голяма сума на Дарбу, която се получава, когато към точките на деление $x_0, x_1, \cdots, x_n$ причислим още и точките $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_k^*$. В такъв случай съгласно доказаното имаме

$$\begin{aligned}&S-S_1\leqq 2M\delta,\\&S_1-S_2\leqq 2M\delta,\\&\cdots\cdots\cdots\\&S_{p-1}-S_p\leqq 2M\delta\end{aligned}$$

и следователно

$$S-S_p\leqq 2M\delta p=\frac{\varepsilon}{2}.$$

От друга страна, всичките точки на деление на $S^*$ участвуват при образуване на сумата $S_p$, откъдето

$$S_p\leqq S^*$$

и следователно

$$S-S^*\leqq\frac{\varepsilon}{2},$$

което заедно с неравенствата

$$S^*-\int_a^b f(x)\,dx<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqq S$$

ни дава

$$0\leqq S-\int_a^b f(x)\,dx<\varepsilon.$$

По такъв начин теоремата на Дарбу е доказана.

Сега не е трудно да се покаже, че ако една функция $f(x)$ е интегруема според дефиницията на Дарбу, тя е интегруема и според дефиницията на Риман. И наистина нека $\varepsilon>0$ и нека $\sigma$ е една сума на Риман. Ако $S$ и $s$ са съответно голямата и малката сума на Дарбу, които са образувани с помощта на същите точки на деление, с които е образувана и сумата $\sigma$, то

$$s\leqq\sigma\leqq S.$$

От друга страна, теоремата на Дарбу ни учи, че ако дължините на подинтервалите са достатъчно малки, то

$$S<\int_a^b f(x)\,dx+\varepsilon,$$

$$s>\int_a^b f(x)\,dx-\varepsilon.$$

Нека функцията $f(x)$ е интегруема според дефиницията на Дарбу. В такъв случай

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

и следователно

$$\int_a^b f(x)\,dx-\varepsilon<s\leqq\sigma\leqq S<\int_a^b f(x)\,dx+\varepsilon,$$

т. е.

$$\left|\sigma-\int_a^b f(x)\,dx\right|<\varepsilon,$$

с което е показано, че сумите на Риман наистина клонят към общата стойност на горния и долния интеграл на разглежданата функция, когато дължините на подинтервалите клонят към нула. По такъв начин ние установихме пълната еквивалентност на дефинициите на Дарбу и Риман.

## § 12. Едно обобщение на основната теорема на интегралното смятане и общо условие за интегруемост в Риманов смисъл

Казваме, че едно множество $M$ от точки върху една права има мярка нула в смисъл на Лебег—Борел, ако при всеки избор на положителното число $\varepsilon$ множеството $M$ може да се покрие[1] с

[1] Това значи, че се иска всяка точка от $M$ да принадлежи поне на един от интервалите $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$



(евентуално безкрайна) редица от интервали[1]

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots,$$

сумата от дължините на които да е по-малка от $\varepsilon$.

Ще казваме, че една функция удовлетворява някое условие (например има производна или е непрекъсната и пр.) почти навсякъде в едно множество $N$, ако множеството от точките на $N$, където това условие не е изпълнено, има мярка нула или е празно.[2]

Ние ще установим следното обобщение на познатата на читателя още от диференциалното смятане теорема за монотонните функции.

Ако една функция $F(x)$, удовлетворяваща условието на Липшиц в един интервал $\Delta$, е диференцуема почти навсякъде в този интервал и производната ѝ е неотрицателна, то функцията е монотонно растяща.

Доказателство. Да допуснем противното. В такъв случай могат да се намерят две числа $\alpha$ и $\beta$ от интервала $\Delta$, свързани с неравенството $\alpha<\beta$, за които

$$F(\alpha)-F(\beta)>0.$$

Означаваме с $K$ една горна граница на израза

$$\left|\frac{F(x')-F(x'')}{x'-x''}\right|,$$

когато $x'$ и $x''$ се менят в интервала $\Delta$ така, че остават различни помежду си. Такава горна граница съществува, защото функцията $F(x)$ удовлетворява условието на Липшиц.

Нека $G$ е множеството на точките от интервала $\Delta$, където $F(x)$ няма неотрицателна производна. Покриваме $G$ с редица от отворени интервали

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$$

и означаваме с $\varphi_\nu(x)$ функция, равна на 1, когато $x$ принадлежи на $\Delta_\nu$, и на 0, когато $x$ не принадлежи на $\Delta_\nu$. Нека $p_\nu$ и $q_\nu$ са съответно левият и десният край на подинтервала $\Delta_\nu$. В такъв случай, като означим с $a$ по-малкото от числата $\alpha$ и $p_\nu$, а с $b$ по-голямото от числата $\beta$ и $q_\nu$, ще имаме

[1] Без да ограничаваме общността, ние можем да считаме, че интервалите $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ са отворени, като за целта, ако е необходимо, заменим всеки интервал с двойно по-голям, който го съдържа.

[2] Целесъобразно е празното множество да се разглежда като множество с мярка нула.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_\nu(t)\,dt \leqq \int_{a}^{b} \varphi_\nu(t)\,dt =$$

$$= \int_{a}^{p_\nu} \varphi_\nu(t)\,dt + \int_{p_\nu}^{q_\nu} \varphi_\nu(t)\,dt + \int_{q_\nu}^{b} \varphi_\nu(t)\,dt - q_\nu - p_\nu.$$

Да си изберем едно толкова малко положително число $\varepsilon$ и една такава система от покриващи интервали

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \ldots,$$

че да имаме

$$F(\alpha) - F(\beta) > \varepsilon(\beta-\alpha) + K\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_\nu(t)\,dt.$$

Това е възможно, защото, от една страна,

$$F(\alpha) - F(\beta) > 0,$$

а, от друга,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_\nu(t)\,dt \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty}(q_\nu - p_\nu),$$

като при това сумата

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(q_\nu - p_\nu)$$

може да се направи произволно малка, защото множеството $G$ има мярка нула.

Делим интервала $[\alpha, \beta]$ на две равни части и означаваме с $[\alpha_1, \beta_1]$ такава половина на $[\alpha, \beta]$, за която да имаме

$$F(\alpha_1) - F(\beta_1) > \varepsilon(\beta_1-\alpha_1) + K\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \varphi_\nu(t)\,dt.$$

Не е трудно да се убедим, че поне едната от двете половини на интервала $[\alpha, \beta]$ удовлетворява това условие. И наистина в противен случай, ако положим $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$, ще имаме

$$F(\gamma) - F(\beta) \leqq \varepsilon(\beta-\gamma) + K\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\gamma}^{\beta} \varphi_\nu(t)\,dt.$$



$$F(\alpha) - F(\gamma) \leqq \varepsilon(\gamma-\alpha) + K\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\gamma} \varphi_\nu(t)\,dt.$$

Като съберем почленно тези неравенства, ще получим

$$F(\alpha) - F(\beta) \leqq \varepsilon(\beta-\alpha) + K\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_\nu(t)\,dt,$$

което противоречи на неравенството

$$F(\alpha) - F(\beta) > \varepsilon(\beta-\alpha) + K\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_\nu(t)\,dt.$$

По-нататък делим интервала $[\alpha_1, \beta_1]$ на две равни части и означаваме с $[\alpha_2, \beta_2]$ сигурно съществуващата половина, за която

$$F(\alpha_2) - F(\beta_2) > \varepsilon(\beta_2-\alpha_2) + K\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\alpha_2}^{\beta_2} \varphi_\nu(t)\,dt,$$

и т. н. По този начин получаваме една Канторова система от интервали $[\alpha_n, \beta_n]$, подчинени на условието

$$(1)\qquad F(\alpha_n) - F(\beta_n) > \varepsilon(\beta_n-\alpha_n) + K\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\alpha_n}^{\beta_n} \varphi_\nu(t)\,dt.$$

Нека $x_0$ е точка, която принадлежи на всичките интервали $[\alpha_n, \beta_n]$. Ще покажем, че $x_0$ не принадлежи на $G$. И наистина в противен случай $x_0$ ще бъде вътрешна точка за някой от интервалите $\Delta_m$ и следователно при достатъчно голяма стойност на $n$ интервалът $[\alpha_n, \beta_n]$ ще се съдържа изцяло в $\Delta_m$, поради което ще имаме $\varphi_m(t) = 1$ при всички стойности на $t$ от $[\alpha_n, \beta_n]$, т. е.

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} (t)\,dt = \beta_n - \alpha_n.$$

От друга страна, неравенството (1) ни дава

$$F(\alpha_n) - F(\beta_n) > K\int_{\alpha_n}^{\beta_n} \varphi_m(t)\,dt,$$

откъдето

$$F(\alpha_n)-F(\beta_n)>K(\beta_n-\alpha_n),$$

нещо, което противоречи на неравенството

$$\left|\frac{F(\alpha_n)-F(\beta_n)}{\alpha_n-\beta_n}\right|\leq K.$$

И така $x_0$ не принадлежи на $G$ и следователно функцията $F(x)$ е диференцуема в точката $x_0$. Неравенството (1) ни дава обаче

$$\frac{F(\alpha_n)-F(\beta_n)}{\alpha_n-\beta_n}>\varepsilon.$$

Оттук, извършвайки граничен преход, намираме

$$-F'(x_0)\geq\varepsilon,$$

което не вярно, защото $F'(x_0)\geq 0$. С това доказателството е завършено.

Въз основа на доказаното ние можем да установим следното обобщение на основната теорема на интегралното смятане:

Ако една удовлетворяваща условието на Липшиц функция $F(x)$ е диференцуема почти навсякъде в един интервал $\Delta$ и производната ѝ е равна на нула, то функцията $F(x)$ е константа.

И наистина от доказаната по-горе теорема следва, че двете функции $F(x)$ и $-F(x)$ са монотонно растящи, т. е. функцията $F(x)$ е наистина константа.

Като приложение ще докажем следната теорема на Лебег:

За да бъде една функция $f(x)$ интегруема в Риманов смисъл в един интервал $[a, b]$, необходимо и достатъчно е тя да бъде ограничена и почти навсякъде непрекъсната в интервала $[a, b]$.

Доказателство. Ние първо ще покажем, че условието е достатъчно. Нека функцията $f(x)$ е ограничена и почти навсякъде непрекъсната в интервала $[a, b]$. Разглеждаме двете функции

$$F_1(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

и

$$F_2(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$



при $a<x\leq b$. Тези функции удовлетворяват условието на Липшиц и в точките на непрекъснатост на $f(x)$ (т. е. почти навсякъде в интервала $[a, b]$) имаме

$$\frac{d}{dx}[F_1(x)-F_2(x)]=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0,$$

т. е. разликата $F_1(x)-F_2(x)$ е една константа. От друга страна,

$$\lim_{x\to a}F_1(x)=\lim_{x\to a}F_2(x)=0.$$

Следователно

$$F_1(x)=F_2(x).$$

Оттук получаваме по-специално $F_1(b)=F_2(b)$, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx,$$

което ни учи, че функцията $f(x)$ е интегруема в Риманов смисъл в интервала $[a, b]$.

Сега ще установим, че условието на Лебег е необходимо. За тази цел на всяко положително число $\varepsilon$ съпоставяме по едно разлагане на интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките на деление

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

по такъв начин, че разликата между съответната голяма и съответната малка сума на Дарбу да бъде по-малка от $\varepsilon^2$. Нека

$$\Delta_{n_1}, \Delta_{n_2}, \ldots, \Delta_{n_k}$$

са онези[1] подинтервали (измежду подинтервалите, на които сме разделили интервала $[a, b]$), в които осцилацията на $f(x)$ е по-голяма от $\varepsilon$. В такъв случай сумата от дължините на подинтервалите

$$\Delta_{n_1}, \Delta_{n_2}, \ldots, \Delta_{n_k}$$

е по-малка от $\varepsilon$. Нека $A(\varepsilon)$ е множеството от точките, които принадлежат на поне един от интервалите $\Delta n_1, \Delta n_2, \ldots, \Delta n_k$. Всяка вътрешна за интервала $[a, b]$ точка $\xi$, която не принадле-

[1] Ако изобщо има такива.

жи на $A(\varepsilon)$, лежи в някой затворен подинтервал[1] (евентуално може да бъде и крайна точка на такъв подинтервал), в който осцилацията на $f(x)$ е по-малка или равна на $\varepsilon$. Не е трудно обаче да включим точката $\xi$ и в отворен подинтервал, където осцилацията на $f(x)$ в най-неблагоприятния[2] случай да не надминава $2\varepsilon$.

Разглеждаме множеството $B_n$ от точките, които принадлежат на поне едно от множествата

$$A\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right), \quad A\left(\frac{1}{2^{n+2}}\right), \quad A\left(\frac{1}{2^{n+3}}\right), \dots$$

Очевидно множеството $B_n$ може да бъде покрито с редица от интервали, сумата от дължините на които е по-малка от

$$\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{2^{n+3}}+\dots=\frac{1}{2^n}.$$

Нека $B$ е множеството на точките, които принадлежат на всичките множества

$$B_1, B_2, B_3, \dots$$

Очевидно множеството $B$ се съдържа в $B_n$ при всяка цяла положителна стойност на $n$ и следователно може да се покрие с редица от интервали, сумата от дължините на които е по-малка от $\frac{1}{2^n}$, т. е. тази сума може да се направи произволно малка, стига $n$ да изберем достатъчно голямо. С това ние показахме, че множеството $B$ има мярка нула. По такъв начин доказателството на интересуващата ни теорема ще бъде завършено, ако ние покажем, че във всички вътрешни точки на интервала $[a, b]$, които не принадлежат на $B$, функцията $f(x)$ е непрекъсната. За да установим това, разглеждаме произволна точка $x_0$, която не принадлежи на $B$. В такъв случай може да се намери цяло положително число $n$ по такъв начин, че точката $x_0$ да не принадлежи на никое от множествата

$$A\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right), \quad A\left(\frac{1}{2^{n+2}}\right), \quad A\left(\frac{1}{2^{n+3}}\right).$$

Избираме едно положително число $\varepsilon$. Нека цялото положително число $k$ е толкова голямо, че да имаме $\frac{1}{2^{n+k}}<\frac{\varepsilon}{2}$. Точката $x_0$

[1] Този подинтервал избираме измежду подинтервалите, на които сме разделили интервала $[a, b]$.

[2] Това е случаят, когато точката $\xi$ съвпада с някоя от точките $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Нека например $\xi=x_k$. В такъв случай включваме точката $\xi$ в подинтервала $[x_{k-1}, x_{k+1}]$.



не принадлежи на $A\left(\frac{1}{2^{n+k}}\right)$, откъдето заключаваме, че около нея може да се построи околност, в която осцилацията е по-малка от $\frac{2}{2^{n+k}}$, т. е. по-малка и от $\varepsilon$ — нещо, което е достатъчно да можем да твърдим, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката $x_0$. С това ние показахме, че ако една функция е интегруема в Риманов смисъл, тя е непрекъсната почти навсякъде, и следователно завършихме доказателството, защото по-горе ние бяхме изяснили, че за да бъде една функция интегруема в Риманов смисъл, необходимо е тя да бъде ограничена.

Пример 1. Произведение на две функции, интегруеми в Риманов смисъл, е също интегруема функция в Риманов смисъл, защото това произведение е ограничено и почти навсякъде непрекъснато.

Пример 2. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в Риманов смисъл в интервала $a\le x\le b$ и почти навсякъде $f(x)\ge 0$, то

$$\int_a^b f(t)\,dt\ge 0.$$

И наистина функцията

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

е диференцуема и $F'(x)=f(x)$ във всички точки, където $f(x)$ е непрекъсната. По такъв начин за удовлетворяващата условието на Липшиц функция $F(x)$ имаме почти навсякъде $F'(x)\ge 0$, т. е. тази функция монотонно расте и следователно $F(x)\ge \lim_{x\to a} F(x)=0$.

Забележка. От доказаното се вижда, че ако за две интегруеми в Риманов смисъл функции $f(x)$ и $g(x)$ имаме почти навсякъде $f(x)\ge g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_a^b g(x)\,dx;$$

ако ли пък почти навсякъде $f(x)=g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx.$$

## § 13. Точкови множества

Ще разгледаме в този параграф множеството от точки в една равнина. Всичко, което ще изложим обаче, се пренася без всякакъв труд за случай на произволен брой измерения. Така ние бихме могли да пренесем всичко казано за множеството от точки върху една права и пр.

Наред с истинските множества ние ще разгледаме и така нареченото празно множество. Това е един помощен символ 0, за който е казано, че никоя точка от равнината не му принадлежи.[1]

Нека ни е дадено едно точково множество $A$. Една функция се нарича характеристична функция на A, ако тя е дефинирана в цялата равнина (или съответно върху цялата ос $OX$, или върху цялото пространство и пр. в зависимост от броя на измеренията, които имаме пред вид) и приема стойност единица в точките, които принадлежат на $A$, и стойността нула в точките, които не принадлежат на $A$.

Нека ни са дадени две множества $A$ и $B$. Под сума или обединение $A+B$ на тези множества разбираме множеството от точките, които принадлежат поне на едно от тези множества.[2] На черт. 4 е илюстрирана дефиницията на понятието сума. Под произведение или сечение $AB$ на две множества $A$ и $B$ се разбира множеството от общите им точки.[3] Понятието сечение $AB$ е добре дефинирано дори тогава, когато $A$ и $B$ нямат общи точки. В такъв случай сечението е празното множество, за което говорихме по-горе. На черт. 5 е илюстрирана дефиницията на понятието сечение. Понятията сума и сечение на множества имат смисъл, колкото и да бъдат множествата. Те могат да бъдат дори безбройно много.

При така дефинираните операции събиране и умножение са в сила комутативният, асоциативният и дистрибутивният закон:

$$A+B=B+A, \quad AB=BA,$$
$$(A+B)+C=A+(B+C), \quad (AB)\,C=A\,(BC),$$
$$(A+B)\,C=AC+BC.$$

Доказателството не е сложно. Като пример ние ще докажем дистрибутивния закон

$$(A+B)\,C=AC+BC$$

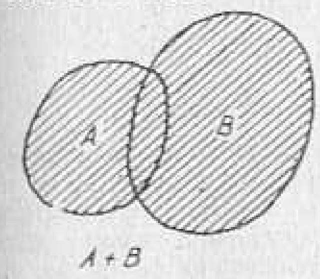
[1] Казваме, че ни е дадено едно множество $A$ в равнината, когато за всяка точка $P$ от равнината е казано дали принадлежи на $A$ или не. Две множества $A$ и $B$ от точки в равнината наричаме идентични, когато тези и само тези точки принадлежат на едното от тях, които принадлежат на другото. В този смисъл 0 е едно добре дефинирано множество, защото за всяка точка е казано дали принадлежи, или не принадлежи на 0 (именно казано е, че никоя точка не принадлежи на 0).

[2] По-точно $A+B$ е множеството, към което се причисляват онези и само онези точки, които принадлежат поне на едното от двете множества $A$ и $B$. При тази редакция дефиницията може да се прилага и тогава, когато имаме работа с празното множество.

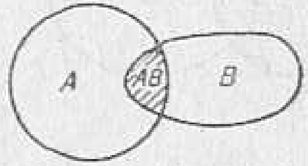
[3] По-точно $AB$ е множеството, към което се причисляват онези и само онези точки, които са причислени и към $A$, и към $B$. Тази редакция на дефиницията може да се използува и тогава, когато имаме работа с празното множество.



и ще предоставим останалите закони на читателя (проверката на които става по същия начин). Нека $P$ е една точка, която принадлежи на $(A+B)\,C$. В такъв случай тази точка принадлежи на $A+B$ и на $C$. Щом $P$ принадлежи на $A+B$, тя принадлежи поне на едното от двете множества $A$ и $B$. Например[1] нека тя принадлежи на $A$. Но като вземем пред вид, че $P$ принадлежи и на $C$, заключаваме, че тази точка принадлежи на $AC$, а следователно и на $AC+BC$. И така всяка точка (ако има такава), която принадлежи на $(A+B)C$, принадлежи и на $AC+BC$.




Черт. 4




Черт. 5

Нека $Q$ е една точка, която принадлежи на $AC+BC$; в такъв случай тази точка принадлежи или на $AC$, или на $BC$. Нека например[2] тя принадлежи на $AC$. В такъв случай точката $Q$ принадлежи както на $A$, така и на $C$, а от това следва, че тя принадлежи на $A+B$ и на $C$, т. е. тя принадлежи на $(A+B)\,C$. И така всяка точка, която принадлежи на $AC+BC$ (ако има такава), принадлежи на $(A+B)\,C$. С това ние доказахме, че наистина

$$(A+B)\,C=AC+BC.$$

Понятието сума и произведение на множества, както вече казахме, се обобщава по очевиден начин и за произволно (дори безкрайно) множество събираеми и множители. При това основните закони (комутативният, асоциативният и дистрибутивният) запазват своята валидност (доказателството остава същото).

Под разлика $A-B$ на две множества $A$ и $B$ разбираме множеството[3] от точките, които принадлежат на $A$, но не принадлежат на $B$. На черт. 6 е илюстрирана дефиницията на понятието разлика. Специално, ако $R$ означава множеството от всичките точки на равнината, то

[1] Аналогично се разглежда случаят, когато $P$ принадлежи на $B$.

[2] Аналогично се разглежда случаят, когато $Q$ принадлежи към $BC$.

[3] По-точно $A-B$ е множеството, към което са причислени онези и само онези точки, които са причислени към $A$, но не са причислени към $B$. Тази редакция на дефиницията може да се използува и тогава, когато имаме работа с празното множество.

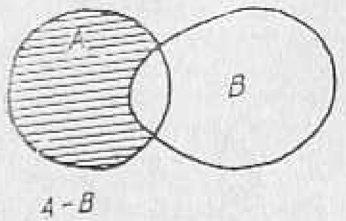
разликата $R-A$ се нарича допълнително множество на $A$ и се означава обикновено със символа $\overline{A}$.

Не е трудно да се покаже, че при всеки избор на множествата $A$ и $B$ имаме

$$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B},$$

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B},$$

$$\overline{A-B}=\overline{A}+B.$$




Черт. 6

Доказателството не представлява никаква трудност и може да се извърши, като покажем, че всяка точка, която фигурира в лявата страна на интересуващите ни равенства, фигурира и в дясната страна на съответното равенство и обратно. Нека читателят сам извърши за упражнение доказателството.

Нека ни са дадени две множества $A$ и $B$. Казваме, че $A$ е едно подмножество на $B$, когато всяка точка, която принадлежи на $A$, принадлежи и на $B$. За да изразим, че $A$ е едно подмножество на $B$, ние пишем кратко $A\subset B$.

В § 1, глава I, част III на диференциалното смятане ние дефинирахме понятието вътрешна, външна и контурна точка на едно множество $M$. Множеството на контурните точки на $M$ ще означаваме със символа $K(M)$ и ще наричаме контур на $M$.

Лесно е да се провери, че външните точки на $\overline{A}$ са вътрешни за $A$ и обратно. Оттук заключаваме, че множествата $A$ и $\overline{A}$ имат един и същ контур. Използувайки означенията, които ние току-що въведохме, можем да пишем

(1) $$K(A)=K(\overline{A}).$$

Не е трудно да се докаже, че

(2) $$K(A+B)\subset K(A)+K(B),$$

(3) $$K(AB)\subset K(A)+K(B),$$

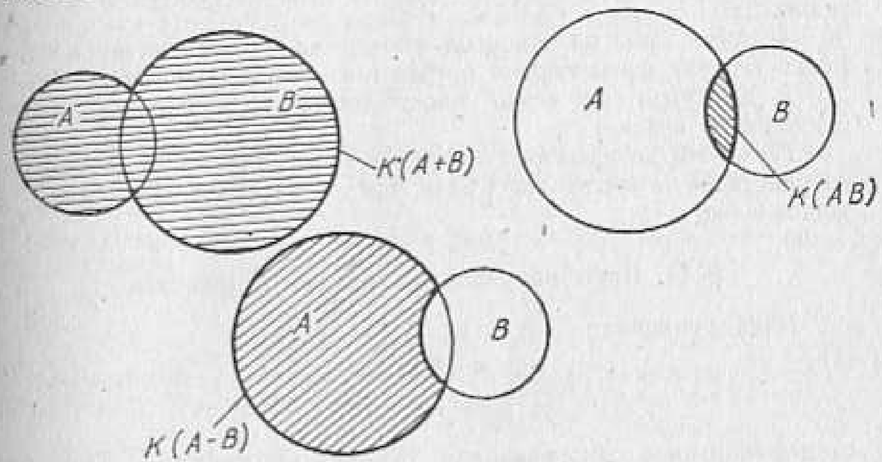
(4) $$K(A-B)\subset K(A)+K(B).$$

На черт. 7 са илюстрирани тези неравенства.

Доказателство на неравенството (2). Нека $P$ е една контурна точка на $A+B$. Тя не може да бъде външна едновременно за $A$ и $B$. И наистина, ако допуснем противното, ще можем около $P$ да изберем (кръгова) околност $G_1$, която няма общи точки с $A$, и (кръгова) околност $G_2$, която няма общи точки с $B$. В такъв случай сечението $G_1\,G_2$ представлява (кръгова)



околност на $P$, която няма общи точки нито с $A$, нито с $B$ и следователно няма общи точки и с $A+B$. Оттук заключаваме, че $P$ е една външна точка за множеството $A+B$ — нещо, което противоречи на допускането, че $P$ е контурна точка на това множество. И така точката $P$ не е външна поне за едното от двете




Черт. 7

множества $A$ и $B$. Нека например тя не е външна за множеството $A$. Точката $P$ обаче не е и вътрешна за $A$, защото в противен случай тя би била вътрешна и за $A+B$, което не е вярно, тъй като тя е контурна на $A+B$. И така точката $P$ не е нито външна, нито вътрешна за $A$, т. е. тя е контурна. С това ние доказахме, че точката $P$ принадлежи на $K(A)$ и толкова повече на $K(A)+$ $+K(B)$.

Доказателство на неравенството (3).

$$K(AB)=K(\overline{AB})=K(\overline{A}+\overline{B})\subset K(\overline{A})+K(\overline{B})=K(A)+K(B).$$

Доказателство на неравенството (4).

$$K(A-B)=K(\overline{A-B})=K(\overline{A}+B)\subset$$
$$\subset K(\overline{A})+K(B)=$$
$$=K(A)+K(B).$$

В заключение ще споменем следното:

1. Каквото и да бъде множеството $A$, множеството $A+K(A)$ затворено, а множеството $A-K(A)$ е отворено.

2. Ако множеството $A$ е затворено, то множеството $\overline{A}$ е отворено. Ако множеството $A$ е отворено, то множеството $\overline{A}$ е затворено.

3. Сума на краен брой затворени множества е затворено множество. Сечение на краен брой отворени множества е отворено множество.

4. Всяка сума на отворени множества е отворено множество. Всяко сечение на затворени множества е затворено множество.

5. Контурът на всяко множество е затворено множество (евентуално празно).

Ние няма да излагаме доказателствата, които са съвсем непосредствени и могат да бъдат предоставени на читателя като упражнение.

## § 14. Преобразуване на точкови множества

Нека функциите

$$x=f(u, v), \quad y=g(u, v), \tag{1}$$

са дефинирани в едно равнинно точково множество $R$. Тези две функции ще наричаме трансформация на $R$. С помощта на трансформацията (1) ние можем на всяка точка $P$ от $R$ с координати $(u_0, v_0)$ да съпоставим точка $P'$ с координати $(x_0, y_0)$, които се определят от равенствата

$$x_0=f(u_0, v_0),$$
$$y_0=g(u_0, v_0).$$

Така дефинираната точка $P'$ ще наричаме образ на $P$ при трансформацията (1).

Когато точката $P$ описва някакво подмножество $A$ на $R$, образът ѝ $P'$ описва някакво множество, което ще означаваме със символа $A'$ и ще наричаме образ на $A$. Така образа на $R$ ще означаваме с $R'$.

В общия случай при една трансформация различни точки не са задължени да се изобразят върху различни точки.

Да разгледаме като пример трансформацията

$$x=a_{11}u+a_{12}v+p, \quad y=a_{21}u+a_{22}v+q. \tag{2}$$

Две точки $(u_1, v_1)$ и $(u_2, v_2)$ от равнината $UOV$ се изобразяват върху една и съща точка тогава и само тогава, когато

$$a_{11}u_1+a_{12}v_1+p=a_{11}u_2+a_{12}v_2+p,$$
$$a_{21}u_1+a_{22}v_1+q=a_{21}u_2+a_{22}v_2+q,$$



т. е. когато

$$a_{11}(u_1-u_2)+a_{12}(v_1-v_2)=0,$$
$$a_{21}(u_1-u_2)+a_{22}(v_1-v_2)=0. \tag{3}$$

Оттук се вижда, че в разглеждания случай съществуват различни точки в равнината $UOV$, които при трансформацията (2) се изобразяват върху една и съща точка тогава и само тогава, когато системата (3) (където $u_1-u_2$ и $v_1-v_2$ се разглеждат като неизвестни) има нетривиално решение, т. е. когато

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0.$$

Ще казваме, че трансформацията (1) е обратима в $R$, когато тя изобразява различни точки върху различни точки.

Така трансформацията (2) е обратима в равнината $UOV$ тогава и само тогава, когато е изпълнено

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Читателят знае от геометрията, че трансформация от вида (2) се нарича подобие с модул $a$, където $a$ е положително число, ако са изпълнени условията

$$a_{11}^2+a_{12}^2=a^2,$$
$$a_{21}^2+a_{22}^2=a^2,$$
$$a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=0.$$

Специално, ако $a=1$, подобието се нарича еднаквост.

Подобието е една обратима трансформация, защото правилото за умножение на детерминанти ни дава

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{vmatrix}=a^4\neq 0.$$

Както и да избираме точка с координати $(x, y)$ от $R'$, винаги съществува точка $P$ от $R$, чиито координати $(u, v)$ удовлетворяват уравненията (1), защото всяка точка от $R'$ е образ на някоя точка от $R$. Ако трансформацията (1) е обратима, то точката $P$ е еднозначно определена, когато точката $(x, y)$ е дадена, а с това еднозначно е определена както абсцисата ѝ $u$, така и ординатата ѝ $v$. По такъв начин получаваме две функции

$$u=F(x, y), \quad v=G(x, x), \tag{4}$$

определени в $R'$, за които точката с координати

$$(F(x, y), G(x, y))$$

не напуска $R$, когато точката $(x, y)$ се мени в $R'$, и които удовлетворяват условията

$$x=f[F(x, y), G(x, y)], \quad y=g[F(x, y), G(x, y)]. \tag{5}$$

Така дефинираната трансформация (4) на $R'$ ще наричаме обратна трансформация на трансформацията (1).

Ще покажем, че ако трансформацията (1) е обратима, то нейната обратна трансформация (4) удовлетворява условията

$$u=F(f(u, v), g(u, v)), \quad v=G(f(u,v), g(u, v)), \tag{7}$$

където точката $(u, v)$ се избира произволна в $R$.

И наистина да положим

$$x_1=f(u, v), \; u_1=F(x_1, y_1), \quad y_1=g(u, v), \; v_1=G(x_1, y_1). \tag{8}$$

Ще отбележим на това място, че ние можем да образуваме $F(x_1, y_1)$ и $G(x_1, y_1)$, защото точката с координати $(f(u, v), g(u, v))$ принадлежи на $R'$, т. е. принадлежи на дефиниционната област на двете функции (4). Ние обаче знаем, че точката с координати $(F(x_1, y_1), G(x_1, y_1))$ принадлежи на $R$ и следователно можем да образуваме

$$f(u_1, v_1) \text{ и } g(u_1, v_1).$$

По такъв начин получаваме

$$f(u_1, v_1)=f[F(x_1, y_1), G(x_1, y_1)],$$
$$g(u_1, v_1)=g[F(x_1, y_1), G(x_1, y_1)].$$

От друга страна, въз основа на (5) имаме

$$f[F(x_1, y_1), G(x_1, y_1)]=x_1,$$
$$g[F(x_1, y_1), G(x_1, y_1)]=y_1$$

и следователно

$$f(u_1, v_1)=f(u, v),$$
$$g(u_1, v_1)=g(u, v).$$

Оттук като вземем под внимание, че трансформацията (1) е обратима, получаваме $u_1=u$, $v_1=v$, което заедно с (8) дава (7).

Като пример да разгледаме трансформацията (2) при предположение, че

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$



В такъв случай, ако означим с $A_{ik}$ адюнгираното количество на $a_{ik}$ и решим системата (2) относно $u$ и $v$, ще получим

$$u=\frac{A_{11}}{A}x+\frac{A_{21}}{A}y+p', \qquad v=\frac{A_{12}}{A}x+\frac{A_{22}}{A}y+q', \tag{9}$$

където

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$p'=-\frac{A_{11}}{A}p-\frac{A_{21}}{A}q,$$

$$q'=-\frac{A_{12}}{A}p-\frac{A_{22}}{A}q.$$

Като изхождаме от дефиницията на понятието обратна трансформация, убеждаваме се с директна проверка, че трансформацията (9) е обратна на трансформацията (2).

Специално, ако трансформацията (2) е подобие, то $A_{ik}$ се изразяват просто чрез $a_{ik}$ и $A$. И наистина, ако решим системата

$$a_{11}a_{11}+a_{12}a_{12}=a^2,$$
$$a_{21}a_{11}+a_{22}a_{12}=0$$

относно $a_{11}$ и $a_{12}$, ще получим

$$a_{11}=\frac{a^2}{A}A_{11} \quad \text{и} \quad a_{12}=\frac{a^2}{A}A_{12}.$$

Аналогично, ако решим системата

$$a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=0,$$
$$a_{21}a_{21}+a_{22}a_{22}=a^2$$

относно $a_{21}$ и $a_{22}$, ще получим

$$a_{21}=\frac{a^2}{A}A_{21}, \quad a_{22}=\frac{a^2}{A}A_{22},$$

т. е.

$$a_{ik}=\frac{a^2}{A}A_{ik}$$

при $i=1,2$ и $k=1,2$.

По такъв начин трансформацията (9) добива вида

$$u=\frac{a_{11}}{a^2}x+\frac{a_{21}}{a^2}y+p',$$

$$v=\frac{a_{12}}{a^2}x+\frac{a_{22}}{a^2}y+q'.$$

Тази трансформация е подобие, чийто модул е $\frac{1}{a}$, защото

$$\frac{a_{11}^2}{a^4}+\frac{a_{21}^2}{a^4}=\frac{a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}}{a^2\Delta}=\frac{1}{a^2},$$

$$\frac{a_{12}^2}{a^4}+\frac{a_{22}^2}{a^4}=\frac{a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}}{a^2\Delta}=\frac{1}{a^2},$$

$$\frac{a_{11}a_{12}}{a^4}+\frac{a_{21}a_{22}}{a^4}=\frac{a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}}{a^4}=0.$$

Нека $C$ е отворен кръг с център в точката $(\alpha, \beta)$ и радиус $r$. Това значи че точката с координати $(u, v)$ се причислява към $C$ тогава и само тогава, когато е изпълнено неравенството

$$(u-\alpha)^2+(v-\beta)^2<r^2.$$

Нека трансформацията (2) е подобие с модул $a$. В такъв случай образът $C'$ на $C$ при тази трансформация е отворен кръг с радиус $ar$. И наистина нека $(u, v)$ е една точка от $C$. Да означим с $(x, y)$ координатите на образа ѝ. Това значи, че

$$x=a_{11}u+a_{12}v+p,$$

$$y=a_{21}u+a_{22}v+q.$$

Да положим

$$\alpha'=a_{11}\alpha+a_{12}\beta+p,$$

$$\beta'=a_{21}\alpha+a_{22}\beta+q.$$

В такъв случай очевидно

$$x-\alpha'=a_{11}(u-\alpha)+a_{12}(v-\beta),$$

$$y-\beta'=a_{21}(u-\alpha)+a_{22}(v-\beta).$$

Като повдигнем в квадрат двете страни на така получените равенства и съберем ще получим

$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2=a^2[(u-\alpha)^2+(v-\beta)^2]$$

и следователно

$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2<a^2r^2.$$

Този резултат ни учи, че точката $(x, y)$ принадлежи на отворения кръг с център в точката $(\alpha', \beta')$ и радиус $ar$.

Съвсем по аналогичен начин се вижда, че всяка точка от отворения кръг с център в $(\alpha', \beta')$ и радиус $ar$ е образ на някоя точка от $C$. Нека читателят сам извърши пресмятанията. С това е установено, че $C'$ е отворен кръг с център в точката $(\alpha', \beta')$ и радиус $ar$.

От (5) се вижда, че обратната трансформация на една трансформация е обратима. И наистина нека

$$F(x_1, y_1)=F(x_2, y_2),$$

$$G(x_1, y_1)=G(x_2, y_2).$$



В такъв случай от (5) получаваме

$$x_1=f[F(x_1, y_1), G(x_1, y_1)]=f[F(x_2, y_2), G(x_2, y_2)]=x_2,$$

$$y_1=g[F(x_1, y_1), G(x_1, y_1)]=g[F(x_2, y_2), G(x_2, y_2)]=y_2.$$

Нека трансформацията (1) е дефинирана в $R$ и нека $A$ и $B$ са две подмножества на $R$. В такъв случай[1]

(10) $$(A+B)'=A'+B',$$

(11) $$(AB)'\subset A'B',$$

(12) $$(A-B)'\supset A'-B',$$

(13) ако $A\subset B$, то $A'\subset B'$.

Ще докажем само зависимостта (10). Зависимостите (11), (12) и (13) се установяват по същия начин.

Нека $Q_1$ е една точка от $(A+B)'$. Това значи, че тя е образ на някоя точка $P_1$ от $A+B$. Точката $P_1$ принадлежи поне на едното от двете събираеми $A$ и $B$. Нека например тя принадлежи на $A$ (случаят, когато $P_1$ принадлежи на $B$, се разглежда по същия начин). В такъв случай нейният образ $Q$ принадлежи на $A'$, а следователно и на $A'+B'$. С това ние показахме, че

$$(A+B)'\subset A'+B'.$$

Нека $Q_2$ е една точка от $A'+B'$. В такъв случай тя принадлежи поне на едното от двете множества $A'$ и $B'$. Нека например тя принадлежи на $A'$ (случаят, когато точката $Q_2$ принадлежи на $B'$, се разглежда по същия начин). В такъв случай $Q_2$ е образ на някоя точка $P_2$ от $A$. Точката $P_2$ обаче принадлежи на $A+B$ и следователно нейният образ $Q_2$ принадлежи на $(A+B)'$. С това е показано, че

$$A'+B'\subset(A+B)',$$

а следователно и равенството (10).

Специално, ако трансформацията (1) е обратима в $R$, то зависимостите (11) и (12) приемат по-прецизния вид

(14) $$(AB)'=A'B',$$

(15) $$(A-B)'=A'-B'.$$

Ще покажем само равенството (14). Равенството (15) се доказва по същия начин.

[1] Нека $M$ и $N$ са две множества. Ще пишем $M\subset N$ или $N\supset M$, ако всяка точка на $M$ принадлежи на $N$.

Нека $Q$ е една точка от $A'B'$. В такъв случай $Q$ принадлежи както на $A'$, така и на $B'$. Това обаче значи, че тя е образ както на една точка $P_1$ от $A$, така и на една точка $P_2$ от $B$. Като вземем под внимание, че трансформацията (1) е обратима, заключаваме, че точките $P_1$ и $P_2$ съвпадат, т. е. $Q$ е образ на точка $P$, която принадлежи както на $A$, така и на $B$, т. е. на точка от $AB$. С това е показано, че $Q$ принадлежи на $(AB)'$ и следователно

$$A'B' \subset (AB)',$$

което заедно с (11) ни дава (14).

Нека (1) е една трансформация (не непременно обратима) на $R$. Ако функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ са непрекъснати в $R$, то всяко затворено и ограничено подмножество $A$ на $R$ се изобразява върху затворено и ограничено подмножество на $R'$.

Първо ще покажем, че множеството $A'$ е затворено. За тази цел разглеждаме редица от точки на $A'$

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3, \ldots \tag{16}$$

с точка на сгъстяване $Q_0$. Нашата цел ще бъде да установим, че точката $Q_0$ принадлежи на $A'$. Означаваме с $(x_0, y_0)$ координатите на $Q_0$ и избираме от (16) подредица

$$S_1,\ S_2,\ S_3, \ldots,$$

която клони към $Q_0$. Да означим с $(x_n, y_n)$ координатите на $S_n$. В такъв случай

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Точката $S_n$ е образ на някоя точка $P_n$ от $A$. Да означим с $(u_n, v_n)$ координатите на $P_n$. По такъв начин получаваме

$$x_n = f(u_n, v_n),$$
$$x_n = g(u_n, v_n).$$

Редицата

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

е ограничена, защото множеството $A$ е ограничено. Да изберем от нея една сходяща подредица

$$P_{m_1}, P_{m_2}, \ldots, P_{m_n}, \ldots$$

и да означим с $P_0$ нейната граница. Като вземем под внимание, че множеството $A$ е затворено, заключаваме, че точката $P_0$ принадлежи на $A$. Да означим с $(u_0, v_0)$ координатите на $P$. В такъв случай



$$u_0 = \lim_{n\to\infty} u_{m_n},$$

$$v_0 = \lim_{n\to\infty} v_{m_n}.$$

Да разгледаме равенствата

$$x_{m_n} = f(u_{m_n}, v_{m_n}),$$

$$y_{m_n} = g(u_{m_n}, v_{m_n})$$

и да оставим $n$ да расте неограничено. В такъв случай ще получим след граничния преход

$$x_0 = f(u_0, v_0),$$

$$y_0 = g(u_0, v_0),$$

с което е показано, че $Q_0$ е образ на точка от $A$, т. е. $Q_0$ принадлежи на $A'$ и следователно множеството $A'$ е затворено. Остава да покажем, че множеството $A'$ е ограничено. Това обаче е очевидно, защото функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ са непрекъснати в ограниченото и затвореното множество $A$ и следователно са ограничени.

Ще казваме, че трансформацията (1) е регулярна, ако:

1. Множеството $R$, където се разглеждат функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$, е отворено.
2. Функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ притежават непрекъснати частни производни от първи ред във всички точки на $R$.
3. Трансформацията (1) е обратима.
4. Във всички точки на $R$ имаме

$$\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Нека трансформацията (1) е регулярна в точковото множество $R$, нека $A$ е едно подмножество на $R$ и нека $(u_0, v_0)$ е една вътрешна точка на $A$. В такъв случай образът $(x_0, y_0)$ на точката $(u_0, v_0)$ е една вътрешна точка за $A'$.

И наистина очевидно имаме

$$x_0 = f(u_0, v_0),$$

$$y_0 = g(u_0, v_0).$$

От друга страна, като вземем под внимание, че трансформацията (1) е регулярна, заключаваме, че са налице условията, при които доказахме теоремата за съществуване на неявни функции. Това обстоятелство ни позволява да твърдим, че в достатъчно малка околност $\Delta$ на точката $(x_0, y_0)$ съществуват две непрекъснати функции

$$\varphi(x, y) \text{ и } \psi(x, y),$$

за които точката с координати $[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ се намира в отнапред дадена околност $D$ на точката $(u_0, v_0)$ (а следователно се намира в $A$, щом околността $D$ е достатъчно малка, тъй като точката $(u_0, v_0)$ е вътрешна за $A$), и които удовлетворяват условията

$$x=f[\varphi(x, y), \psi(x, y)],\quad y=g[\varphi(x, y), \psi(x, y)],\quad u_0=\varphi(x_0, y_0),\quad v_0=\psi(x_0, y_0). \tag{17}$$

Равенствата (17) ни учат обаче, че всяка точка от $\Delta$ е образ на някоя точка от $A$, т. е. точката $(x_0, y_0)$ е вътрешна за $A'$. С това интересуващото ни свойство е установено. От доказаното следва, че отворено множество се преобразува при регулярна трансформация в отворено множество. По-специално множеството $R'$ е отворено.

Въз основа на изложеното не е трудно да се убедим, че ако една точка $P$ от $R$ е външна за едно подмножество $A$ на $R$, то точката $P'$ е външна за $A'$. И наистина, щом точката $P$ принадлежи на отвореното множество $R$ и е външна за $A$, тя ще бъде вътрешна за множеството $R-A$ и следователно $P'$ ще бъде вътрешна точка за $(R-A)'=R'-A'$, следователно ще бъде външна за $A'$.

Ще покажем, че обратната трансформация на регулярна трансформация е също тъй регулярна трансформация.

И наистина нека (1) е регулярна трансформация на $R$ и (4) е нейната обратна трансформация. От изложеното дотук се вижда, че множеството $R'$ е отворено. Нека $(x_0, y_0)$ е коя да е точка от $R'$ и нека

$$u_0=F(x_0, y_0),$$

$$v_0=G(x_0, y_0).$$

В такъв случай

$$x_0=f(u_0, v_0),$$

$$y_0'=g(u_0, v_0).$$

При условията, в които се намираме, теорията на неявните функции ни осигурява съществуването на две функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ във всяка достатъчно малка околност $\Delta$ на точката $(x_0, y_0)$, които имат непрекъснати частни производни от първи ред в $\Delta$, за които точката с координати $[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ принадлежи към $R$ и които удовлетворяват условията



$$x=f[\varphi(x, y), \psi(x, y)],$$

$$y=g[\varphi(x, y), \psi(x, y)],$$

$$u_0=\varphi(x_0, y_0),$$

$$v_0=\psi(x_0, y_0).$$

От друга страна, имаме

$$x=f[F(x, y), G(x, y)],$$

$$y=g[F(x, y), G(x, y)],$$

както и да избираме точката $(x, y)$ в $R'$. Като вземем под внимание, че трансформацията (1) е обратима, получаваме

$$F(x,y)=\varphi(x, y),$$

$$G(x, y)=\psi(x, y)$$

всеки път, когато точката $(x, y)$ принадлежи на $\Delta R'$. Така получените равенства ни учат, че функциите $F(x, y)$ и $G(x, y)$ имат непрекъснати частни производни в достатъчно малка околност на всяка точка $(x_0, y_0)$ от $R'$ и следователно имат непрекъснати първи частни производни навсякъде в $R'$.

Ние вече видяхме, че обратната трансформация на една обратима трансформация е винаги обратима. Оттук заключаваме, че трансформацията (4) е обратима.

За да можем да твърдим, че трансформацията (4) е регулярна, остава да покажем, че

$$\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Това може да се покаже така:

$$\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F'_x f'_u + F'_y g'_u & F'_x f'_v + F'_y g'_v \\ G'_x f'_u + G'_y g'_u & G'_x f'_v + G'_y g'_v \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

С това ние показахме, че обратната трансформация на регулярна трансформация е също тъй регулярна трансформация.

Нека (1) е една регулярна трансформация на $R$ и нека

(19) $$s=\varphi(x, y),\quad t=\psi(x, y)$$

е една регулярна трансформация $R'$. Да положим

(20) $$f_1(u, v)=\varphi[f(u, v), g(u, v)],\quad g_1(u, v)=\psi[f(u, v), g(u, v)].$$

Функциите (20) са добре дефинирани в $R$. Трансформацията на $R$

(21) $$s=f_1(u, v),\quad t=g_1(u, v)$$

се нарича произведение на двете трансформации (1) и (19). Не е трудно да се види, че тя е регулярна. И наистина множеството $R$ е отворено, функциите (20) имат непрекъснати частни производни поне от първи ред в $R$, както това се вижда от правилото за диференциране на съставни функции, трансформацията (21) е обратима, защото от

$$f_1(u_1, v_1)=f_1(u_2, v_2),\quad g_1(u_1, v_1)=g_1(u_2, v_2)$$

получаваме последователно

$$\varphi[f(u_1, v_1), g(u_1, v_1)]=\varphi[f(u_2, v_2), g(u_2, v_2)],$$
$$\psi[f(u_1, v_1), g(u_1, v_1)]=\psi[f(u_2, v_2), g(u_2, v_2)];$$
$$f(u_1, v_1)=f(u_2, v_2),$$
$$g(u_1, v_1)=g(u_2, v_2)$$

и следователно

$$u_1=u_2,\quad v_1=v_2.$$

Остава да покажем, че

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Това може да се види така. Правилото за диференциране на съставни функции ни дава

$$\frac{\partial f_1}{\partial u}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},$$



$$\frac{\partial f_1}{\partial v}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v},$$
$$\frac{\partial g_1}{\partial u}=\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},$$
$$\frac{\partial g_1}{\partial v}=\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}.$$

По такъв начин получаваме с помощта на правилото за умножение на детерминанти

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Трансформация от вида

$$x=u,\quad y=g(u, v)$$

се нарича диагонална трансформация. Диагонални също се наричат и трансформациите

$$\begin{cases} x=v \\ y=g(u, v), \end{cases}\qquad \begin{cases} x=f(u, v) \\ y=u, \end{cases}\qquad \begin{cases} x=f(u, v) \\ y=v. \end{cases}$$

Нека (1) е една регулярна трансформация на $R$ и нека $(u_0, v_0)$ е една точка от $R$. Ние ще покажем, че в достатъчно малка околност на $(u_0, v_0)$ трансформацията (1) може да се представи като произведение на две регулярни диагонални трансформации. И наистина от условието

$$\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

се вижда, че поне едно от числата $g'_u(u_0, v_0)$ и $g'_v(u_0, v_0)$ е различно от нула. Нека например $g'_v(u_0, v_0)\neq 0$ (случаят, когато $g'_u(u_0, v_0)\neq 0$ се разглежда по същия начин). Да изберем около $(u_0, v_0)$ околност $W$, която се съдържа в $R$ и в която $g'_v(u, v)\neq 0$. Това може да се направи, защото частната производна $g'_v(u, v)$ е непрекъсната и различна от нула в точката $(u_0, v_0)$.

Да разгледаме диагоналната трансформация

$$\xi = u, \qquad (22)$$
$$\eta = g(u, v).$$

Тази трансформация е регулярна в $W$. И наистина множеството $W$ е отворено, функциите $u$ и $g(u, v)$ имат непрекъснати производни и детерминантата

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ g'_u(u, v) & g'_v(u, v) \end{vmatrix}$$

е различна от нула. Остава да се убедим, че трансформацията (22) е обратима. Това може да се види така. Нека двете точки $(u_1, v_1)$ и $(u_2, v_2)$ от $W$ имат един и същ образ при трансформацията (22). В такъв случай

$$u_1 = u_2,$$
$$g(u_1, v_1) = g(u_2, v_2)$$

и следователно

$$0 = g(u_2, v_2) - g(u_1, v_1) = g(u_1, v_2) - g(u_1, v_1) =$$
$$= (v_2 - v_1)\, g'_v(u_1, v_3),$$

където $v_3$ е точка между $v_1$ и $v_2$. От друга страна, точката $(u_1, v_3)$ очевидно принадлежи на $W$, поради което $g'_v(u_1, v_3) \neq 0$ и следователно $v_2 = v_1$. С това обратимостта на (22) е установена.

Да означим с $W^*$ образа $W$ при трансформацията (22) и да положим

$$\xi_0 = u_0,$$
$$\eta_0 = g(u_0, v_0).$$

Точката $(\xi_0, \eta_0)$ очевидно принадлежи на $W^*$.

Нека

$$u = p(\xi, \eta), \qquad (23)$$
$$v = q(\xi, \eta)$$

е обратната трансформация на (22). В такъв случай съгласно дефиницията на понятието обратна трансформация имаме

$$\xi = p(\xi, \eta),$$
$$\eta = g[p(\xi, \eta), q(\xi, \eta)]$$

и следователно



$$\eta = g[\xi, q(\xi, \eta)]. \qquad (24)$$

Трансформацията (22) обаче е обратима, поради което

$$u = p[u, g(u, v)], \qquad (25)$$
$$v = q[u, g(u, v)].$$

Да разгледаме диагоналната трансформация

$$x = \varphi(\xi, \eta), \qquad (26)$$
$$y = \eta,$$

където

$$\varphi(\xi, \eta) = f[\xi, q(\xi, \eta)].$$

Тази трансформация очевидно е добре дефинирана в $W^*$. Тя обаче е регулярна във всяка околност $T$ на точката $(\xi_0, \eta_0)$, която се съдържа в $W^*$. В това ние можем да се убедим с помощта на същите разсъждения, които приложихме към трансформацията (22). За тази цел достатъчно е да покажем, че

$$\varphi'_\xi(\xi, \eta) \neq 0,$$

което може да стане по следния начин. Очевидно

$$\varphi'_\xi(\xi, \eta) = f'_u + f'_v q'_\xi(\xi, \eta).$$

От друга страна, диференцирайки (24) спрямо $\xi$, получаваме

$$0 = g'_u + g'_v q'_\xi(\xi, \eta),$$

т. е.

$$q'_\xi = -\frac{g'_u}{g'_v},$$

и следователно

$$\varphi'_\xi = f'_u - f'_v \frac{g'_u}{g'_v} =$$
$$= \frac{1}{g'_v} \begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Образът на $T$ при трансформацията (23) е някое отворено подмножество на $W$, което съдържа точката $(u_0, v_0)$. Нека $S$ е околност на $(u_0, v_0)$, която се съдържа в това подмножество. В такъв случай (22) е регулярна трансформация на $S$. Образът на $S$ при тази трансформация е едно отворено множество $S^*$, в което трансформацията (26) е регулярна. Да образуваме в $S$

произведението на двете трансформации (22) и (26). След очевидни пресмятания, като се използува (25), това произведение добива вида

$$x=f[u,\ q\ (u,\ g\ (u,\ v))]=f\,(u,\ v),$$
$$y=g\,(u,\ v).$$

По такъв начин ние получихме трансформацията (1). С това е установено, че в достатъчно малка околност на точката $(u_0, v_0)$ трансформацията (1) действително може да се представи като произведение на две диагонални регулярни трансформации.

Не е трудно да се установи, че ако трансформацията (1) е регулярна в $R$ и $A$ е ограничено множество, което лежи в $R$ заедно с контура си, то контурът на $A'$ лежи в $R'$ и

$$[K(A)]'=K(A').$$

Ще покажем първо, че контурът на $A'$ лежи в $R'$. И наистина множеството

$$A+K(A)$$

е ограничено и затворено и следователно образът му

$$[A+K(A)]'=A'+[K(A)]'$$

е ограничено и затворено подмножество на $R'$. Като вземем под внимание неравенството

$$A'\subset A'+[K(A)]',$$

заключаваме, че всичките контурни точки на $A'$ също лежат в

$$A'+[K(A)]',$$

защото множеството (18) е затворено, а всяка контурна точка на $A'$ е точка на сгъстяване на редица от точки на $A'$. От изложеното се вижда, че

$$K(A')\subset A'+[K(A)]'$$

и още повече

$$K(A')\subset R'.$$

Ще покажем, че

$$[K(A)]'=K(A').$$

И наистина нека $P'$ е една точка от $[K(A)]'$ и нека $P$ е образ на $P'$ при трансформацията (4), т. е. $P$ принадлежи на $K(A)$. В такъв случай $P'$ не може да бъде нито вътрешна, нито външна точка за $A'$, защото $P$ като образ на $P'$ при регулярната трансформация (4) би била вътрешна или съответно външна точка за $A$, което не е вярно. С това показахме, че

$$[K(A)]'\subset K(A').$$



Аналогично се вижда, че

$$K(A')\subset[K(A)]',$$

с което доказателството се завършва.

Ще казваме, че трансформацията (1) е **двойно регулярна** в $R$, ако тя е регулярна и функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ притежават непрекъснати частни производни в $R$ поне до втори ред.

Ние вече видяхме, че щом трансформацията (1) е регулярна, от функциите (4), които определят обратната трансформация, притежават непрекъснати първи частни производни. Теорията на неявните функции ни учи, че

$$F'_x=\frac{g'_v}{\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix}},\qquad F'_y=\frac{-f'_v}{\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix}},$$

$$G'_x=\frac{-g'_u}{\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix}},\qquad G'_y=\frac{f'_u}{\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix}}.$$

От тези равенства заключаваме, че щом трансформацията (1) е двойно регулярна, то функциите

$$F'_x,\ F'_y,$$
$$G'_x,\ G'_y$$

притежават непрекъснати частни производни от първи ред в $R'$ т. е. функциите (4) притежават непрекъснати частни производни поне до втори ред в $R'$. От това заключаваме, че обратната трансформация на една двойно регулярна трансформация е също тъй една двойно регулярна трансформация.

Понякога регулярните трансформации ще наричаме още еднократно регулярни за разлика от двойно регулярните трансформции.

## § 15. Основна теорема на интегралното смятане в равнината

Да означим с $\Delta$ правоъгълник, определен от неравенствата

$$a\leq x<b,\qquad (1)$$
$$c\leq y<d.$$

Това значи, че една точка с координати $(x, y)$ се причислява към $\Delta$ тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата (1).

Такъв правоъгълник ние ще наричаме полузатворен, без да посочваме изрично, че става дума за правоъгълник, чиито страни са успоредни на съответните координатни оси.

Нека числата $a$, $b$, $c$, $d$ и $p$ удовлетворяват неравенствата

$$a<p<b, \quad c<d.$$

Да разгледаме двата полузатворени правоъгълника, определени съответно от неравенствата

$$a\leqq x<p, \; p\leqq x<b,$$
$$c\leqq y<d, \; c\leqq y<d.$$

Такива правоъгълници ние ще наричаме съседни по $x$. Аналогично правоъгълниците, определени с неравенства от вида

$$a\leqq x<b, \quad a\leqq x<b,$$
$$c\leqq y<q, \quad q\leqq y<d,$$

където $c<q<d$ ще наричаме съседни по $y$. В бъдеще, когато говорим за съседни правоъгълници, ще имаме пред вид или полузатворени правоъгълници, съседни по $x$, или полузатворени правоъгълници, съседни по $y$. Очевидно, ако $\Delta_1$ и $\Delta_2$ са два съседни правоъгълника, те нямат обща точка и сумата $\Delta_1+\Delta_2$ е полузатворен правоъгълник.

С помощта на неравенствата (1) ние можем да образуваме безбройно много полузатворени правоъгълници в зависимост от избора на числата $a$, $b$, $c$ и $d$. Нека на всеки полузатворен правоъгълник $\Delta$ съпоставим по едно число $\varphi(\Delta)$. Ще казваме, че $\varphi(\Delta)$ е полуадитивна функция на $\Delta$, ако всеки път, когато $\Delta_1$ и $\Delta_2$ са два съседни полузатворени правоъгълника, имаме

$$\varphi(\Delta_1+\Delta_2)\leqq\varphi(\Delta_1)+\varphi(\Delta_2).$$

Ще казваме, че функцията $\varphi(\Delta)$ е неположителна около точката $P$, ако може да се намери околност $U(P)$ на точката $P$ по такъв начин, че за всеки полузатворен правоъгълник $\Delta$, който съдържа точка $P$ или по контура, или във вътрешността си и който се съдържа в $U(P)$, да имаме $\varphi(\Delta)\leqq 0$.

**Теорема.** *Нека полуадитивната функция $\varphi(\Delta)$ е неположителна около всяка точка $P$ на равнината. В такъв случай при всеки избор на полузатворения правоъгълник $\Delta$ е в сила неравенството $\varphi(\Delta)\leqq 0$.*

*Доказателство.* Да допуснем противното. Това значи, че има поне един полузатворен правоъгълник $D_1$, за който $\varphi(D_1)>0$. Ние ще го разложим на сума от два съседни по $x$ правоъгълника $D'$ и $D''$ с помощта на неговата средна линия. В такъв случай е изпълнено поне едно от двете неравенства

$$\varphi(D')>0, \quad \varphi(D'')>0.$$

И наистина в противен случай ще имаме $\varphi(D')\leqq 0$ и $\varphi(D'')\leqq 0$ и следователно

$$\varphi(D_1)=\varphi(D'+D'')\leqq\varphi(D')+\varphi(D'')\leqq 0,$$

което не е вярно. Нека означим с $D_2$ такъв измежду двата правоъгълника $D'$ и $D''$, за който

$$\varphi(D_2)>0.$$

Разделяме $D_2$ с помощта на неговата средна линия на два съседни по $y$ полузатворени правоъгълника и означаваме с $D_3$ такъв измежду тях, за който $\varphi(D_3)>0$. Както по-горе се убеждаваме, че такъв сигурно има. Продължаваме този процес неограничено.

Така получаваме редицата

$$D_1\supset D_2\supset D_3\supset\ldots$$

от полузатворени правоъгълници, за които

$$\varphi(D_n)>0. \tag{2}$$

Съгласно теоремата на Кантор[1] съществува точка $P_0$, която принадлежи или на вътрешността, или на контура на всеки един от тези правоъгълници. Функцията $\varphi(\Delta)$ обаче е неположителна около всяка точка на равнината и следователно тя е неположителна и около $P_0$. Това значи, че съществува такава околност $U(P_0)$ на точката $P_0$, че за всеки полузатворен правоъгълник $\Delta$, който съдържа точката $P_0$ или по контура, или във вътрешността си и се съдържа в $U(P_0)$, имаме $\varphi(\Delta)\leqq 0$. От друга страна, правоъгълниците $D_n$ съдържат точката $P_0$ или във вътрешността, или по контура си, а диагоналите им клонят към нула, когато $n$ расте неограничено. Това ни дава право да твърдим, че при достатъчно голямо $n$ полузатвореният правоъгълник $D_n$ се съдържа в $U(P_0)$ и следователно $\varphi(D_n)\leqq 0$, което противоречи на неравенството (2). С това доказателството е завършено.

## § 16. Характеристични функции

Нека $A$ е едно множество от точки в равнината. Характеристична функция на $A$ се нарича функцията $\varphi(x, y)$, която има стойност единица в точки, които принадлежат на $A$, и стойност нула в точки, които не принадлежат на $A$.

[1] Теоремата на Кантор се прилага към редицата от затворени правоъгълници, които се получават от $D_n$ чрез присъединяване на контурните им точки.

Нека $A$ е кръг, определен от неравенството

(1) $$(x-p)^2+(y-q)^2<r^2,$$

и нека $\varphi(x, y)$ е характеристичната му функция. Ние ще пресметнем израза

(2) $$I=\int_a^b\left[\int_a^b \varphi(x, y)\,dy\right]dx$$

при предположение, че квадратът, определен от неравенствата

(3) $$a\leq x\leq b,$$
$$a\leq y\leq b,$$

съдържа $A$, като същевременно се убедим, че (2) има смисъл.

Ако точката с координати $(x, y)$ удовлетворява неравенството (1), то

$$|x-p|<r$$

и следователно

$$p-r<x<p+r.$$

От друга страна, имаме очевидно

$$(y-q)^2<r^2-(x-p)^2,$$

т. е.

$$q-\sqrt{r^2-(x-p)^2}<y<q+\sqrt{r^2-(x-p)^2}.$$

По такъв начин ние виждаме, че ако точката $(x, y)$ принадлежи на кръга $A$, нейните координати удовлетворяват неравенствата

(4) $$p-r<x<p+r,$$
$$q-\sqrt{r^2-(x-p)^2}<y<q+\sqrt{r^2-(x-p)^2}.$$

Обратно, нека точката $(x, y)$ удовлетворява неравенствата (4); в такъв случай лесно се убеждаваме, че е изпълнено и неравенството (1). Оттук заключаваме, че

$$\varphi(x, y)=1$$

тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата (4).

Да разгледаме при фиксирано $x$ интеграла

$$F(x)=\int_a^b \varphi(x, y)\,dy.$$



Когато $x$ не принадлежи на интервала $|x-p|<r$, този интеграл съществува и има стойност нула, защото в такъв случай $\varphi(x, y)=0$. Когато $|x-p|<r$, интегралът пак очевидно има смисъл и

$$F(x)=\int_a^{q-\sqrt{r^2-(x-p)^2}}\varphi(x, y)\,dy+\int_{q-\sqrt{r^2-(x-p)^2}}^{q+\sqrt{r^2-(x-p)^2}}\varphi(x, y)\,dy+\int_{q+\sqrt{r^2-(x-p)^2}}^{b}\varphi(x, y)\,dy=$$

$$=\int_a^{q-\sqrt{r^2-(x-p)^2}}0\,dy+\int_{q-\sqrt{r^2-(x-p)^2}}^{q+\sqrt{r^2-(x-p)^2}}1\,dy+\int_{q+\sqrt{r^2-(x-p)^2}}^{b}0\,dy=$$

$$=2\sqrt{r^2-(x-p)^2}.$$

По такъв начин

$$F(x)=0$$

при $|x-p|\geq r$ и

$$F(x)=2\sqrt{r^2-(x-p)^2}$$

при $|x-p|<r$. Функцията $F(x)$ е непрекъсната и следователно интегруема в разглеждания от нас интервал $[a, b]$. Очевидно имаме

$$I=\int_a^b F(x)\,dx=\int_a^{p-r}F(x)\,dx+\int_{p-r}^{p+r}F(x)\,dx+\int_{p+r}^{b}F(x)\,dx=$$

$$=2\int_{p-r}^{p+r}\sqrt{r^2-(x-p)^2}\,dx.$$

Да направим субституцията

$$x=p+r\cos t.$$

Това ще ни даде

$$I=2r^2\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=\pi r^2.$$

Нека читателят обърне внимание върху този резултат. Ние ще имаме нужда от него.

Израз от вида (2) се нарича повторен интеграл. Ние ще имаме нужда от още един повторен интеграл.

Нека $\psi(x, y)$ е характеристичната функция на един полузатворен правоъгълник $A$, който се съдържа в множеството $G$, определено[1] от неравенствата

[1] Това значи, че една точка $(x, y)$ се причислява към $G$ тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата (5).

$$a \leq x \leq b,$$
(5) $$\varphi_0(x) \leq y \leq \varphi_1(x),$$
където $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ са непрекъснати функции в компактния интервал $a \leq x \leq b$, удовлетворяващи условието $\varphi_0(x) \leq \varphi_1(x)$.

Ние ще покажем, че повторният интеграл

$$E = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\, dy \right] dx$$

има смисъл, и ще пресметнем неговата стойност. Това ще извършим така.

Нека правоъгълникът $A$ се определя от неравенствата

$$p \leq x < q,$$
$$r \leq y < s.$$

В такъв случай $a \leq p < q \leq b$ и $\varphi_0(x) \leq r$, $s \leq \varphi_1(x)$. Да положим

(6) $$\Phi(x) = \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\, dy.$$

Ако $x$ не принадлежи на интервала $p \leq x < q$, то $\psi(x, y) = 0$ при всяко $y$. В този случай $\Phi(x)$ очевидно има смисъл и $\Phi(x) = 0$. Нека $p \leq x < q$. Тогава $\psi(x, y) = 1$ при $r \leq y < s$ и $\psi(x, y) = 0$ при всички останали стойности на $y$. По такъв начин при фиксирано $x$ ограничената функция $\psi(x, y)$ има само две точки на прекъсване и следователно е интегруема в Риманов смисъл, т. е. $\Phi(x)$ съществува и в този случай и

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\, dy = \int_{\varphi_0(x)}^{r} \psi(x, y)\, dy + \int_r^s \psi(x, y)\, dy +$$
$$+ \int_s^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\, dy = 0 + (s - r) + 0 = s - r.$$

И така $\Phi(x) = s - r$ при $p \leq x < q$ и $\Phi(x) = 0$ при всички останали стойности на $x$. От това виждаме, че функцията $\Phi(x)$ е интегруема в Риманов смисъл във всеки краен интервал и

$$\int_a^b \Phi(x)\, dx = \int_a^p \Phi(x)\, dx + \int_p^q \Phi(x)\, dx + \int_q^b \Phi(x)\, dx =$$
$$= (s - r)(q - p).$$



По такъв начин ние видяхме, че повторният интеграл $E$ има смисъл и

(7) $$E = (s - r)(q - p).$$

По-общо, ако $L$ е константа, то съгласно познатите ни правила имаме

(8) $$\int_a^b \left[ \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} L\psi(x, y)\, dy \right] dx = \int_a^b L \left[ \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\, dy \right] dx =$$
$$= L \int_a^b \left[ \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\, dy \right] dx = L(s - r)(q - p),$$

като при това можем да твърдим въз основа на същите правила, че (8) съществува.

Ние особено често ще прилагаме формулите (7) и (8) в случая, когато функциите $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ са константи, т.е. когато множеството $G$ е правоъгълник.

Ако множеството $G$ не съдържа $A$, то равенството (7) не е вярно, но ние можем да получим едно полезно неравенство по следния начин. Нека $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$ са константи, избрани така, че правоъгълникът

$$\alpha \leq x \leq \beta,$$
$$\gamma \leq y \leq \delta$$

да съдържа $A$ и освен това да са изпълнени неравенствата

$$\alpha \leq a, \quad b \leq \beta, \quad \gamma \leq \varphi_0(x), \quad \varphi_1(x) \leq \delta.$$

В такъв случай

$$E = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\, dy \right] dx \leq \int_\alpha^\beta \left[ \int_\gamma^\delta \psi(x, y)\, dy \right] dx = (s - r)(q - p)$$

С помощта на характеристични функции могат да се образуват удобно полуадитивни функции по следния начин. Нека $\psi(x, y)$ е ограничена функция, дефинирана в цялата равнина, и нека $\varphi(x, y)$ е характеристичната функция на полузатворения правоъгълник $\Delta$, определен от неравенствата

$$p \leq x < q,$$
$$r \leq y < s.$$

В такъв случай, ако $a$ и $b$ са произволни реални числа, свързани с неравенството $a < b$, функциите

$$I(\Delta)=\int_a^b\left[\int_a^b \varphi(x,y)\ \psi(x,y)\ dy\right]dx,$$

$$H(\Delta)=-\int_a^b\left[\int_a^b \varphi(x,y)\,\psi(x,y)\,dy\right]dx$$

са полуадитивни. И наистина нека $\Delta_1$ и $\Delta_2$ са два съседни полузатворени правоъгълника. Да означим с $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ съответно техните характеристични функции. В такъв случай

$$I(\Delta_1+\Delta_2)=\int_a^b\left[\int_a^b(\varphi_1+\varphi_2)\,\psi\,dy\right]dx\leqq$$

$$\leqq\int_a^b\left[\int_a^b\varphi_1\psi\,dy+\int_a^b\varphi_2\psi\,dy\right]dx\leqq$$

$$\leqq\int_a^b\left[\int_a^b\varphi_1\psi\,dy\right]dx+\int_a^b\left[\int_a^b\varphi_2\psi\,dy\right]dx=$$

$$=I(\Delta_1)+I(\Delta_2)$$

и аналогично

$$H(\Delta_1+\Delta_2)=-\int_a^b\left[\int_a^b(\varphi_1+\varphi_2)\,\psi\,dy\right]dy\leqq$$

$$\leqq-\int_a^b\left[\int_a^b\varphi_1\psi\,dy+\int_a^b\varphi_2\psi\,dy\right]dx\leqq$$

$$\leqq-\int_a^b\left[\int_a^b\varphi_1\psi\,dy\right]dx-\int_a^b\left[\int_a^b\varphi_2\psi\,dy\right]dx=$$

$$=H(\Delta_1)+H(\Delta_2).$$

Като вземем под внимание, че сума от полуадитивни функции е полуадитивна, добиваме възможност да образуваме разнообразни полуадитивни функции. Ние често ще се ползуваме от това обстоятелство.



## § 17. Горна мярка

Нека $A$ е ограничено точково множество в равнината. Покриваме множеството $A$ със система от краен брой отворени кръгове

(1) $$C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n.$$

Това значи, че кръговете $C_k$ са избрани така, че

$$A\subset C_1+C_2+\cdots+C_n.$$

Такива системи съществуват, защото множеството $A$ е ограничено. То може да бъде покрито дори с помощта на един-единствен кръг.

Означаваме с $r_k$ радиуса на кръга $C_k$ и разглеждаме сумата

$$S=r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2.$$

Такива суми могат да се образуват по безбройно много начини в зависимост от избора на покриващата система от кръгове (1). Множеството от тези суми обаче е ограничено отдолу, защото те са неотрицателни. Ние ще означим с $\nu(A)$ тяхната точна долна граница. Числото $\nu(A)$ се нарича горна мярка на множеството $A$. По такъв начин на всяко ограничено множество от точки в равнината ние съпоставихме по едно число $\nu(A)$, т. е. както често се казва, дефинирахме една функция в съвкупността от разглежданите от нас множества. Нашата цел ще бъде да изучим свойствата на тази функция. Това ние ще направим в следващите четири точки.

1. Стойностите на функцията $\nu(A)$ са неотрицателни.

Доказателството, което е тривиално, ние ще предоставим на читателя.

2. Ако $A$ и $B$ са две ограничени точкови множества в равнината и ако $A\subset B$, то $\nu(A)\leqq\nu(B)$.

Доказателство. Да покрием $B$ със система от краен брой отворени кръгове

(2) $$C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n$$

и да означим с $S$ сумата от квадратите на техните радиуси. Очевидно системата от кръговете (2) покрива и множеството $A$ и следователно

$$\nu(A)\leqq S,$$

както това се вижда от дефиницията на $\nu(A)$. По такъв начин $\nu(A)$ е една долна граница на множеството, което описват сумите $S$, когато меним по всевъзможни начини покриващата система от кръгове (2). Числото $\nu(B)$ е обаче точната долна граница на това множество, т. е. най-голямата от долните му граници и следователно

$$\nu(B) \geqq \nu(A).$$

С това доказателството е завършено.

3. Ако $A$ и $B$ са две ограничени множества от точки в равнината, то

$$\nu(A+B) \leqq \nu(A)+\nu(B).$$

Доказателство. Покриваме множеството $A$ със система от кръгове

(3) $$C_1, C_2, \cdots, C_n,$$

а множеството $B$ — със система от кръгове

(4) $$C'_1, C'_2, \cdots, C'_m.$$

Означаваме с $S$ сумата от квадратите на радиусите на кръговете (3) и с $S'$ — сумата от квадратите на радиусите на кръговете (4). Системата от кръговете

$$C_1, C_2, \cdots, C_n, C'_1, C'_2, \cdots, C'_m$$

покрива множеството $A+B$ и следователно

(5) $$\nu(A+B) \leqq S+S',$$

както това се вижда от дефиницията на $\nu(A+B)$.

Фиксираме системата (3). С това не е направено никакво ограничение върху начина, по който можем да избираме кръговете (4). От неравенството (5) получаваме

$$\nu(A+B)-S \leqq S',$$

което ни учи, че числото $\nu(A+B)-S$ е една долна граница на множеството от сумите $S'$. Числото $\nu(B)$ е обаче точната, т. е. най-голямата долна граница на тези суми, и следователно

$$\nu(A+B)-S \leqq \nu(B)$$

или още

(6) $$\nu(A+B)-\nu(B) \leqq S.$$

Системата от кръговете (3) при нас обаче е фиксирана произволно. Това обстоятелство ни позволява да заключим от неравенството (6), че числото $\nu(A+B)-\nu(B)$ е една долна граница на множеството от сумите $S$ от квадратите на радиусите на всевъзможните системи (3) от кръгове, които покриват $A$. От друга страна, числото $\nu(A)$ е най-голямата от долните граници на такива суми и следователно

$$\nu(A+B)-\nu(B) \leqq \nu(A),$$

с което исканото неравенство е установено.



Забележка. Ако $A_1, A_2, \cdots, A_n$ са краен брой ограничени точкови множества в равнината, то

$$\nu(A_1+A_2+\cdots+A_n) \leqq \nu(A_1)+\nu(A_2)+\cdots+\nu(A_n).$$

За да се убедим в това, достатъчно е да приложим краен брой пъти неравенството, което доказахме.

4. Нека $A$ е ограничено множество от точки в равнината и нека $\tau$ е подобие с модул $a$. Ако $A'$ е образ на $A$ при $\tau$, то

$$\nu(A') = a^2\nu(A).$$

От това следва, разбира се, че ако $\tau$ е еднаквост, т. е. ако $a=1$, то

$$\nu(A') = \nu(A).$$

Доказателство. Нека

(7) $$C_1, C_2, \cdots, C_n$$

е произволна система от отворени кръгове, която покрива $A$, и нека радиусът на $C_k$ е $r_k$. Нека образът на $C_k$ при $\tau$ е $C'_k$. Ние знаем (вж. § 14), че $C'_k$ е отворен кръг с радиус $ar_k$. Системата от кръговете $C'_1, C'_2, \cdots, C'_k$ покрива $A'$ и следователно

$$\nu(A') \leqq (ar_1)^2+(ar_2)^2+\cdots+(ar_n)^2,$$

или още

$$\frac{\nu(A')}{a^2} \leqq r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2.$$

Системата от покриващите кръгове (7) е избрана произволно, т. е. $\frac{\nu(A')}{a^2}$ е една долна граница на съвкупността на всевъзможните суми

$$r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2.$$

Числото $\nu(A)$ обаче е точната, т. е. най-голямата долна граница на тези суми и следователно

$$\frac{\nu(A')}{a^2} \leqq \nu(A)$$

или още

(8) $$\nu(A') \leqq a^2\nu(A).$$

Като разгледаме обратната трансформация на $\tau$, която, както знаем (вж. § 14), е подобие с модул $\frac{1}{a}$, ще получим

$$\nu(A) \leqq \frac{1}{a^2}\nu(A'),$$

което заедно с (8) ни дава

$$\nu(A')=a^2\nu(A).$$

С това доказателството е завършено.

## § 18. Мярка на правоъгълник

Нека $t$ и $s$ са две положителни числа и нека $\Delta$ е правоъгълник, определен от неравенствата

$$0\leq x<t,$$
(1) $$0\leq y<s.$$

Това значи, че точката $(x, y)$ се причислява към $\Delta$ тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата (1).

Ние ще фиксираме $s$. При всеки избор на $t>0$ стойността на $\nu(\Delta)$ е еднозначно определена и следователно $\nu(\Delta)$ е функция на $t$. Ние ще я означим с $\varphi(t)$. Тази функция при нас е дефинирана при $t>0$.

Да означим с $\Delta_{ik}$ правоъгълника, определен от неравенствата

$$(i-1)t\leq x<it,$$
$$(k-1)t\leq y<ks.$$

Еднаквостта (относно терминологията вж. § 14)

$$x'=x+(i-1)t,$$
$$y'=y+(k-1)s$$

преобразува $\Delta$ в $\Delta_{ik}$ и следователно, както знаем (вж. § 17),

$$\nu(\Delta_{ik})=\nu(\Delta).$$

Да положим

$$\Delta_k=\sum_{i=1}^{n}\Delta_{ik}.$$

В такъв случай

$$\nu(\Delta_k)\leq\sum_{i=1}^{n}\nu(\Delta_{ik})=n\,\nu(\Delta)$$

и по-специално при $k=1$ ще имаме

$$\nu(\Delta_1)\leq n\,\nu(\Delta).$$

Не е трудно да се види, че $\Delta_k$ е правоъгълник, определен от неравенствата

$$0\leq x<nt,$$
$$(k-1)s\leq y<ks.$$

Ние ще предоставим доказателството на читателя.



Както се вижда съвсем просто, еднаквостта

$$x'=x,$$
$$y'=y+(k-1)s$$

преобразува $\Delta_1$ в $\Delta_k$ и следователно

$$\nu(\Delta_k)=\nu(\Delta_1).$$

Най-сетне да разгледаме сумата

$$D=\sum_{k=1}^{n}\Delta_k.$$

Както знаем,

$$\nu(D)\leq\sum_{k=1}^{n}\nu(\Delta_k)$$

и следователно

$$\nu(D)\leq n\,\nu(\Delta_1).$$

От друга страна, съвсем просто се вижда, че $D$ е множеството на онези и само онези точки $(x, y)$ от равенствата, които удовлетворяват неравенствата

$$0\leq x<nt,$$
$$0\leq y<ns.$$

От друга страна, също тъй просто се вижда, че подобието

$$x'=nx,$$
(2) $$y'=ny$$

преобразува $\Delta$ в $D$. Ние ще предоставим проверката на тези прости неща на читателя. Като вземем под внимание, че модулът на подобието (2) е $n$, получаваме

(3) $$\nu(D)=n^2\nu(\Delta).$$

Да разгледаме неравенствата

$$\nu(D)\leq n\,\nu(\Delta_1),$$
$$\nu(\Delta_1)\leq n\,\nu(\Delta).$$

Ако допуснем за момент, че

$$\nu(\Delta_1)<n\,\nu(\Delta),$$

ще получим

$$\nu(D)<n^2\nu(\Delta),$$

което противоречи на равенството (3). По такъв начин получаваме

$$\nu(\Delta_1)=n\nu(\Delta)$$

или

$$\varphi(nt)=n\varphi(t).$$

Това равенство, което засега е установено от нас само при цели положителни стойности на $n$, може да се обобщи така. Нека $n$ и $m$ са две произволни цели положителни числа. В такъв случай

$$\varphi(mt)=m\varphi(t)$$

и

$$\varphi(mt)=\varphi\left(n\frac{mt}{n}\right)=n\varphi\left(\frac{m}{n}t\right)$$

и следователно

$$m\varphi(t)=n\varphi\left(\frac{m}{n}t\right),$$

или

$$\varphi(rt)=r\varphi(t),$$

където $r=\frac{m}{n}$. Специално при $t=1$ получаваме

$$\varphi(r)=r\varphi(1),$$

където $r$ е произволно рационално положително число.

От друга страна, функцията $\varphi(t)$ е монотонно растяща. И наистина да разгледаме двата правоъгълника $\Delta'$ и $\Delta''$, определени съответно от неравенствата

$$0\leqq x<t'$$
$$0\leqq y<s,$$

и

$$0\leqq x<t'',$$
$$0\leqq y<s,$$

където $0<t'\leqq t''$. В такъв случай, както това лесно се вижда $\Delta'\subset\Delta''$ и следователно $\nu(\Delta')\leqq\nu(\Delta'')$, т. е

$$\varphi(t')\leqq\varphi(t'').$$

Сега вече не е трудно да се определи $\varphi(t)$ при произволно реално и положително $t$. За тази цел фиксираме $t$ и избираме две положителни рационални числа $r_1$ и $r_2$ по такъв начин, че да имаме

$$r_1<t<r_2. \tag{4}$$



В такъв случай

$$\varphi(r_1)\leqq\varphi(t)\leqq\varphi(r_2) \tag{5}$$

и следователно

$$r_1\varphi(1)\leqq\varphi(t)\leqq r_2\varphi(1). \tag{6}$$

От друга страна, $\varphi(1)\geqq0$ и по такъв начин от (4) получаваме

$$r_1\varphi(1)\leqq t\varphi(1)\leqq r_2\varphi(1),$$

което заедно с (6) ни дава

$$|\varphi(t)-t\varphi(1)|\leqq(r_2-r_1)\varphi(1).$$

Числата $r_1$ и $r_2$ обаче могат да се изберат произволно близо до $t$, а $t$, $\varphi(t)$ и $\varphi(1)$ не зависят от избора на $r_1$ и $r_2$. Въз основа на това заключаваме, че

$$\varphi(t)=t\varphi(1).$$

Да положим $\varphi(1)=A$. По такъв начин получаваме

$$\nu(\Delta)=At,$$

където $A$ не зависи от $t$.

Съвсем по същия начин се вижда, че

$$\nu(\Delta)=Bs,$$

където $B$ не зависи от $s$. По такъв начин получаваме

$$At=Bs$$

и следователно

$$\frac{A}{s}=\frac{B}{t}. \tag{7}$$

Да означим със $\sigma$ общата стойност на двете отношения $\frac{A}{s}$ и $\frac{B}{t}$. Тъй като лявата страна на (7) не зависи от $t$, а дясната не зависи от $s$, то $\sigma$ не зависи нито от $t$, нито от $s$. По такъв начин получаваме $A=\sigma s$ и следователно

$$\nu(\Delta)=\sigma st,$$

където $\sigma$ не се мени, когато изменяме $s$ и $t$. Засега се вижда, че $\sigma$ е неотрицателно число. Точната му стойност ние ще пресметнем по-късно (вж. § 19).

Резултатът, който получихме, може да се обобщи. Нека $G$ е правоъгълник, определен от неравенствата

$$a\leqq x<b,$$
$$c\leqq y<d.$$

Не е трудно да се види, че еднаквостта

$$x' = x - a,$$
$$y' = y - c$$

го преобразува в правоъгълник $G'$, определен от неравенствата

$$0 \leq x' < b - a,$$
$$0 \leq y' < d - c,$$

и следователно

$$\nu(G) = \nu(G').$$

От друга страна, въз основа на това, което вече знаем, имаме

$$\nu(G') = \sigma(b-a)(d-c)$$

и по такъв начин намираме

$$\nu(G) = \sigma(b-a)(d-c).$$

От получения резултат се вижда, че ако $\Delta_1$ и $\Delta_2$ са два съседни полузатворени правоъгълника, то

$$(8) \qquad \nu(\Delta_1 + \Delta_2) = \nu(\Delta_1) + \nu(\Delta_2).$$

И наистина нека $\Delta_1$ и $\Delta_2$ са съседни по $x$. Това значи, че те могат да се представят съответно с помощта на неравенства от вида

$$a \leq x < p,$$
$$c \leq y < d$$

и

$$p \leq x < b,$$
$$c \leq y < d,$$

където $a < p < b$, $c < d$. В такъв случай $\Delta_1 + \Delta_2$ е полузатворен правоъгълник, определен от неравенствата

$$a \leq x < b,$$
$$c \leq y < d$$

(нека читателят сам докаже това), и следователно съгласно доказаното ще имаме

$$\nu(\Delta_1 + \Delta_2) = \sigma(b-a)(d-c).$$

Остава да вземем под внимание, че

$$\nu(\Delta_1) = \sigma(p-a)(d-c),$$
$$\nu(\Delta_2) = \sigma(b-p)(d-c),$$



за да получим (8). Случаят, когато $\Delta_1$ и $\Delta_2$ са съседни по $y$, се разглежда по същия начин.

От доказаното се вижда, че $\nu(\Delta)$ и $-\nu(\Delta)$ са полуадитивни функции на полузатворения правоъгълник $\Delta$. Полуадитивността на $\nu(\Delta)$ е тривиална. Тя следва от неравенството, което ние установихме в точка 3 на § 17. От това неравенство следва по-общо полуадитивността на функцията $\nu(\Delta G)$, където $G$ е фиксирано множество. Напротив, полуадитивността на $-\nu(\Delta)$ е нова за нас. Ние ще използуваме този резултат.

## § 19. Измерими множества

Едно множество $A$ се нарича измеримо в смисъл на Пеано — Жордан, ако то е ограничено и горната мярка на контура му е нула.

Ако $A$ и $B$ са измерими множества, то множествата $A+B$, $AB$ и $A-B$ са също измерими, защото са ограничени и както знаем (вж. § 13),

$$K(A+B) \subset K(A) + K(B),$$
$$K(AB) \subset K(A) + K(B),$$
$$K(A-B) \subset K(A) + K(B).$$

За да имаме примери на измерими множества, достатъчно е да забележим, че горната мярка на всяка праволинейна отсечка $L$ е нула. И наистина нека $a$ е нейната дължина. Да разделим отсечката на $n$ равни части и да построим около всяка точка на деление отворен кръг с радиус $\frac{a}{n}$. По този начин получаваме $n+1$ кръга, чиято сума покрива $L$. В такъв случай

$$\nu(L) \leq (n+1)\frac{a^2}{n^2},$$

откъдето получаваме, като оставим $n$ да расте неограничено, $\nu(L) = 0$.

От доказаното заключаваме, че всяко ограничено множество, чийто контур е съставен от краен брой праволинейни отсечки, е измеримо, защото, както това се вижда от неравенството, което ние установихме в точка 3 на § 17, сума от краен брой множества, чиято горна мярка е нула, е множество, чиято горна мярка е също нула.

За да имаме още по-общ пример на измерими множества, ще забележим, че графиката на всяка функция $f(x)$, която е дефинирана и непрекъсната в един краен и затворен интервал $[a, b]$, представлява също тъй едно множество, чиято горна мярка е нула. И наистина да изберем едно положително число $\varepsilon$ и да разделим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

по такъв начин, че осцилацията на $f(x)$ във всеки един от тези подинтервали да бъде по-малка от $\varepsilon$. Да означим с $M_i$ и $m_i$ съответно точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Нека $f(x)$ е графиката на $\Gamma$ и нека $\Delta_i$ е правоъгълникът, определен от неравенствата

$$x_{i-1}\leq x<x_i,$$
$$m_i\leq y<M_i+\varepsilon.$$

Да означим най-сетне с $P$ множеството, съставено от единствената точка $(b, f(b))$. В такъв случай

$$\Gamma-P\subset\sum_{i=1}^{n}\Delta_i$$

и следователно[1]

$$\nu(\Gamma-P)\leq\sum_{i=1}^{n}\nu(\Delta_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sigma(M_i+\varepsilon-m_i)\,(x_i-x_{i-1})\leq\sum_{i=1}^{n}2\,\sigma\varepsilon\,(x_i-x_{i-1})=$$

$$=2\,\sigma\varepsilon\,(b-a),$$

откъдето получаваме $\nu(\Gamma-P)=0$. Като вземем под внимание още, че $\nu(P)=0$, получаваме $\nu(\Gamma)=0$, както това се вижда от неравенството

$$\nu(\Gamma)\leq\nu(\Gamma-P)+\nu(P).$$

С оглед на това, което ще следва по-късно, ще отбележим че е измеримо всяко множество $G$ което се дефинира с неравенства от вида[2]

$$a\leq x\leq b,$$
$$f(x)\leq y\leq g(x) \tag{1}$$

където $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати функции в компактния интервал $a\leq x\leq b$ и удовлетворяват неравенството $f(x)\leq g(x)$.

[1] Относно дефиницията на $\sigma$ вж. § 18.

[2] Това значи, че една точка с координати $(x, y)$ се причислява към $G$ тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата (1).



И наистина, ако за някоя точка $(x_0, y_0)$ имаме строги неравенства

$$a<x_0<b,$$
$$f(x_0)<y_0<g(x_0),$$

то около точката $(x_0, y_0)$ може да се избере достатъчно малка околност $U$ по такъв начин, че за всяка точка $(x, y)$ от $U$ да са изпълнени неравенствата (1) (нека читателят сам докаже това), и следователно такава точка $(x_0, y_0)$ е вътрешна за $G$. По такъв начин, ако една точка $(x, y)$ от $G$ е контурна, в условията (1) трябва да имаме равенство поне на едно място, т. е. такава точка трябва да принадлежи поне на едно от четирите множества, определени в условията

$$x=a,\ f(a)\leq y\leq g(a),$$
$$x=b,\ f(b)\leq y\leq g(b),$$
$$a\leq x\leq b,\qquad y=f(x),$$
$$a\leq x\leq b,\qquad y=g(x).$$

От изложеното се вижда, че контурът на $G$ се съдържа в сумата от тези четири множества. Горната мярка обаче на всяко едно от тези множества е нула, защото първите две от тях са праволинейни отсечки, а третото и четвъртото са графики на непрекъснати функции, чийто аргумент се мени в компактен интервал. От това се вижда, че горната мярка на контура на $G$ е нула. Остава да вземем под внимание, че множеството $G$ е ограничено (нещо, което читателят сам може лесно да докаже, като вземе под внимание, че функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в компактен интервал и следователно ограничени), за да можем да твърдим, че то е измеримо.

В бъдеще често ще срещаме множества, дефинирани с неравенства от вида (1). Ние ще ги наричаме криволинейни трапеци, чиито основи са перпендикулярни на оста $x$.

След тези предварителни бележки преминаваме към главните въпроси, които имаме да разгледаме в този параграф.

**Лема 1.** Нека $A, B$ и $C$ са измерими множества, сечението на всеки две от които е празно, и нека сумата $A+B+C$ е един полузатворен квадрат $D$. В такъв случай

$$\nu(A)+\nu(B)+\nu(C)=\nu(D). \tag{2}$$

Доказателство. Засега е ясно съгласно § 17, че

$$\nu(D)\leq\nu(A)+\nu(B)+\nu(C).$$

За да установим равенството (2), избираме положително число $\varepsilon$ и покриваме сумата от контурите на $A$, $B$ и $C$ със система от краен брой отворени кръгове

$$C_1, C_2, \cdots, C_n$$

по такъв начин, че сумата от квадратите на техните радиуси $r_1, r_2, \cdots, r_n$ да бъде по-малка от $\varepsilon$.

Ще означим с $\varphi(x, y)$ характеристичната функция на полузатворения правоъгълник $\Delta$, определен от неравенствата

$$p \leq x < q,$$
$$r \leq y < s,$$

и с $\Psi_k(x, y)$ — характеристичната функция на $C_k$.

Да образуваме спомагателната функция

(3) $$\theta(\Delta) = \nu(\Delta A) + \nu(\Delta B) + \nu(\Delta C) - \nu(\Delta) - \lambda(\Delta),$$

където[1]

$$\lambda(\Delta) = 3\sigma \sum_{k=1}^{n} \int_a^b \left[ \int_c^d \varphi(x, y) \psi_k(x, y)\, dy \right] dx.$$

Ние ще изберем правоъгълника, определен от неравенствата

(4) $$a \leq x \leq b, \qquad c \leq y \leq d,$$

по такъв начин, че да съдържа във вътрешността си всеки един от кръговете $C_1, C_2, \cdots, C_n$.

Функцията $\theta(\Delta)$ е очевидно полуадитивна (вж. § 16 и § 18). Ние ще покажем, че тя е неположителна около всяка точка на равнината (относно терминологията вж. § 15). И наистина нека точката $P$ е външна за всяко едно от множествата $A$, $B$ и $C$. В такъв случай около $P$ може да се избере околност $U$, която няма общи точки с никое от множествата $A$, $B$ и $C$. В такъв случай, ако $\Delta \subset U$, то сеченията $\Delta A$, $\Delta B$ и $\Delta C$ са празни, поради което

$$\nu(\Delta A) = \nu(\Delta A) = \nu(\Delta C) = 0$$

и следователно $\theta(\Delta) \leq 0$, както това се вижда от (3).

Остава да разгледаме случая, когато $P$ не е външна поне за едно от множествата $A$, $B$ и $C$. Нека например $P$ не е външна за $A$ (случаите, когато $P$ не е външна за $B$ или за $C$, се разглеждат по същия начин). В такъв случай $P$ е или вътрешна, или контурна за $A$.

Да разгледаме случая, когато $P$ е вътрешна за $A$. В такъв случай около $P$ може да се избере околност $U$, която се съдържа в $A$ и следователно няма общи точки нито с $B$, нито с $C$, защото $A$ няма общи точки нито с $B$, нито с $C$ (тук ние използуваме обстоятелството, че сечението на всеки две от множествата $A$, $B$ и $C$ е празно). В такъв случай, ако $\Delta \subset U$, ще имаме $\Delta A = \Delta$, $\Delta B = 0$, $\Delta C = 0$ и следователно $\theta(\Delta) \leq 0$, както това се вижда от (3).

Остава да разгледаме случая, когато $P$ е контурна за $A$. Но в такъв случай тя ще лежи поне в един от кръговете $C_1, C_2, \cdots, C_n$. Нека $C_k$ е такъв кръг, който съдържа $P$. Тъй като кръгът $C_k$ е отворен, ние можем да изберем околност $U$ около $P$, която да лежи в $C_k$. В такъв случай, ако $\Delta \subset U$, ще имаме

$$\varphi(x, y) \psi_k(x, y) = \varphi(x, y)$$

и следователно[1]

$$\lambda(\Delta) \geq 3\sigma \int_a^b \left[ \int_c^d \varphi(x, y) \psi_k(x, y)\, dx \right] dx =$$
$$= 3\sigma \int_a^b \left[ \int_c^d \varphi(x, y)\, dy \right] dx = 3\nu(\Delta).$$

По такъв начин ние и в този случай получаваме $\theta(\Delta) \leq 0$, както това се вижда от (3).

И така полуадитивната функция $\theta(\Delta)$ е неположителна около всяка точка на равнината. Това ни дава възможност да приложим основната теорема на интегралното смятане от § 15. По такъв начин ние можем да твърдим, че $\theta(\Delta) \leq 0$ при всеки избор на полузатворения правоъгълник $\Delta$. Специално при $\Delta = D$ получаваме

(5) $$\nu(A) + \nu(B) + \nu(C) - \nu(D) - \lambda(D) \leq 0.$$

От друга страна,

$$\varphi(x, y) \psi_k(x, y) \leq \psi_k(x, y)$$

и следователно съгласно § 16 имаме

$$\lambda(D) \leq 3\sigma \sum_{k=1}^{n} \int_a^b \left[ \int_c^d \psi_k(x, y)\, dy \right] dx = 3\sigma \sum_{k=1}^{n} \pi r_k^2 < 3\sigma\pi\varepsilon,$$

[1] Относно дефиницията на $\sigma$ вж. § 18.

[1] Вж. § 16 и § 18. Тук ние използуваме обстоятелството, че правоъгълникът (4) съдържа $C_k$, а следователно и $\Delta$.

защото правоъгълникът (4) съдържа кръговете $C_1, C_2, \cdots, C_n$. По такъв начин получаваме от (5)

$$\nu(A)+\nu(B)+\nu(C)\leqq\nu(D)+3\sigma\pi\varepsilon$$

или след граничния преход $\varepsilon \longrightarrow 0$

$$\nu(A)+\nu(B)+\nu(C)\leqq\nu(D),$$

което заедно с

$$\nu(A)+\nu(B)+\nu(C)\geqq\nu(D)$$

ни дава (2).

**Теорема (1).** Ако $A$ и $B$ са измерими множества без обща точка, то

$$\nu(A+B)=\nu(A)+\nu(B). \tag{6}$$

Доказателство. Избираме полузатворен квадрат $D$, който да съдържа както $A$, така и $B$. Това може да се направи, защото множествата $A$ и $B$ са ограничени. Да положим

$$C=D-(A+B).$$

В такъв случай

$$A+B+C=D.$$

Множеството $C$ очевидно е измеримо и сечението на всеки две от множествата $A$, $B$ и $C$ е празно. По такъв начин съгласно лема 1 имаме

$$\nu(A)+\nu(B)+\nu(C)=\nu(D).$$

От друга страна, имаме очевидно

$$(A+B)+C+0=D,$$

където 0 е празното множество. В такъв случай пак съгласно лема 1 имаме

$$\nu(A+B)+\nu(C)+\nu(0)=\nu(D)$$

и следователно

$$\nu(A+B)=\nu(A)+\nu(B),$$

защото $\nu(0)=0$.

Забележка. Равенството (6) е получено при предположение, че $AB=0$. Не е трудно обаче да се покаже валидността на по-общото равенство

$$\nu(A+B)=\nu(A)+\nu(B)-\nu(AB)$$



при единственото предположение, че множествата $A$ и $B$ са измерими без оглед на това, дали те имат общи точки или не. И наистина, като вземем пред вид лесно доказуемите равенства

$$A+B=A+\bar{A}B,$$

$$\bar{A}B+AB=B$$

и се възползуваме от обстоятелството, че както множествата $A$ и $\bar{A}B$, така и множествата $\bar{A}B$ и $AB$ нямат общи точки помежду си, получаваме

$$\nu(A+B)=\nu(A)+\nu(\bar{A}B),$$

$$\nu(\bar{A}B)+\nu(AB)=\nu(B)$$

и следователно

$$\nu(A+B)=\nu(A)+\nu(B)-\nu(AB).$$

Така полученият резултат ни учи, че равенството

$$\nu(A+B)=\nu(A)+\nu(B)$$

е валидно[1] и тогава, когато $\nu(AB)=0$, макар сечението $AB$ да не е празно. Така например, ако множествата $A$ и $B$ нямат общи вътрешни точки, то сечението им има мярка нула, защото множествата $A$ и $B$ (по предположение) са измерим и следователно контурите им имат мярка нула.

**Теорема 2.** Ако $C$ е отворен кръг с радиус $r$, то

$$\nu(C)=r^2\pi.$$

Доказателство. Покриваме $C$ по произволен начин със система от отворени кръгове $C_1, C_2, \cdots, C_n$. Нека радиусите им са $r_1, r_2, \cdots, r_n$. Означаваме с $\varphi(x, y)$ характеристичната функция на $C$, а с $\varphi_k(x, y)$ характеристичната функция на $C_k$. В такъв случай

$$\varphi(x, y)\leqq\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x, y)$$

и следователно

$$\int_a^b\left[\int_c^d \varphi(x, y)\,dy\right]dx\leqq\sum_{k=1}^{n}\int_a^b\left[\int_c^d \varphi_k(x, y)\,dy\right]dx, \tag{7}$$

[1] Нека припомним, че множествата $A$ и $B$ са измерими.

където $a<b$, $c<d$. Да изберем правоъгълника, определен от неравенствата

$$a \leqq x \leqq b,$$
$$c \leqq y \leqq d$$

по такъв начин, че да съдържа всичките кръгове $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$. В такъв случай неравенството (7) съгласно § 16 ще приема вида

$$\pi r^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} \pi r_k^2$$

или

$$r^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} r_k^2.$$

И така ние виждаме, че числото $r^2$ е една долна граница на всевъзможните суми $r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2$. Като вземем под внимание, че $\nu(C)$ е точната, т. е. най-голямата от такива долни граници, получаваме $r^2 \leqq \nu(C)$. От друга страна, системата, съставена от единствения кръг $C$, покрива $C$ и следователно съгласно дефиницията на $\nu(C)$ имаме $\nu(C) \leqq r^2$, т. е. окончателно

$$\nu(C) = r^2.$$

**Лема 2.** Нека $A$ е измеримо множество и $\varphi(x, y)$ е неговата характеристична функция. Ако правоъгълникът, определен от неравенствата

$$a \leq x \leqq b,$$
$$c \leq y \leqq d,$$

съдържа $A$, то[1]

$$\nu(A) = \sigma \int_a^b \left[ \int_c^d \varphi(x, y)\, dy \right] dx = \sigma \int_a^b \left[ \int_c^d \varphi(x,y)\, dy \right] dx. \tag{8}$$

Доказателство. Избираме едно положително число $\varepsilon$ и покриваме контура на $A$ със система от краен брой отворени кръгове

$$C_1, C_2, \ldots, C_n$$

по такъв начин, че сумата от квадратите на техните радиуси да бъде по-малка от $\varepsilon$.

[1] Относно дефиницията на $\sigma$ вж. § 18.



Нека $\Delta$ е произволен полузатворен правоъгълник и $\psi(x, y)$ е неговата характеристична функция. Да разгледаме двете полуадитивни функции

$$\Theta_1(\Delta) = \nu(\Delta A) - \sigma \int_a^b \left[ \int_c^d \psi(x, y)\varphi(x, y)\, dy \right] dx - \sum_{k=1}^{n} \nu(\Delta C_k)$$

$$\Theta_2(\Delta) = \sigma \int_a^b \left[ \int_c^d \psi(x, y)\varphi(x, y)\, dy \right] dx - \nu(\Delta A) - \sum_{k=1}^{n} \nu(\Delta C_k).$$

Полуадитивността на тези функции следва от теорема 1 на този параграф и от § 16.

Тези две функции са неположителни около всяка точка $P$ на равнината (относно смисъла на тези думи вж. § 15). Читателят сам може да се убеди в това, като разгледа отделно случаите, когато точката $P$ е външна, вътрешна и контурна за $A$. Това ни дава право да заключим с помощта на основната теорема на интегралното смятане в равнината от § 15, че $\Theta_1(\Delta) \leq 0$, $\Theta_2(\Delta) \leq 0$ при всеки избор на полузатворения правоъгълник $\Delta$. По такъв начин, ако изберем $\Delta$ така, че да съдържа $A+C_1+C_2+\ldots+C_n$, ще получим

$$\nu(A) - \sigma \int_a^b \left[ \int_c^d \varphi(x, y)\, dy \right] dx - \sum_{k=1}^{n} \nu(C_k) \leq 0, \tag{9}$$

$$\sigma \int_a^b \left[ \int_c^d \varphi(x, y)\, dy \right] dx - \nu(A) - \sum_{k=1}^{n} \nu(C_k) \leq 0. \tag{10}$$

От друга страна, ако означим с $r_k$ радиуса на $C_k$, ще имаме $\nu(C_k) = r^2 k$ и следователно

$$\sum_{k=1}^{n} \nu(C_k) = \sum_{k=1}^{n} r_k^2 < \varepsilon.$$

По такъв начин получаваме от неравенствата (9) и (10)

$$\nu(A) \leq \sigma \int_a^b \left[ \int_c^d \varphi(x, y) dy \right] dx + \varepsilon,$$

$$\sigma \int_a^b \left[ \int_c^d \varphi(x, y)\, dy \right] dx - \varepsilon \leq \nu(A),$$

което след граничния преход $\varepsilon \longrightarrow 0$ ни дава

$$\sigma \int_a^b \left[ \int_c^d \varphi(x, y)\, dy \right] dx \leq \nu(A) \leq \sigma \int_a^b \left[ \int_c^d \varphi(x, y)\, dy \right] dx.$$

От друга страна, очевидно

$$\sigma \int_a^b \left[ \int_c^d \varphi(x, y)\, dy \right] dx \leq \sigma \overline{\int_a^b} \left[ \overline{\int_c^d} \varphi(x, y)\, dy \right] dx$$

и така получаваме окончателно (8).

**Теорема 3.** Числото $\sigma$, което е дефинирано в § 18, има стойност $\frac{1}{\pi}$.

Доказателство. Нека $C$ е кръг с радиус $r$ и нека $\varphi(x, y)$ е неговата характеристична функция. В такъв случай съгласно лема 2 и съгласно § 16 имаме

$$\nu(C) = \sigma \underline{\int_a^b} \left[ \underline{\int_c^d} \varphi(x, y)\, dy \right] dx = \sigma\pi r^2,$$

стига правоъгълникът $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ да съдържа $C$. От друга страна, теорема 2 ни учи, че $\nu(C) = r^2$, т. е. $\sigma\pi = 1$.

**Дефиниция.** Нека $A$ е ограничено точково множество в равнината. Числото $\pi\nu(A)$ ще наричаме горна Пеано-Жорданова мярка на $A$ и ще го означаваме със символа $\mu(A)$. Специално, ако множеството $A$ е измеримо, ние ще наричаме това число накратко мярка или лице.

От равенството

$$\mu(A) = \pi\nu(A)$$

се вижда, че е в сила следното.

1. Ако $A$ е ограничено множество, то

$$\mu(A) \geq 0.$$

2. Нека $A$ и $B$ са две ограничени множества и $A \subset B$. В такъв случай $\mu(A) \leq \mu(B)$.

3. Ако $A$ и $B$ са две ограничени множества, то

$$\mu(A+B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

4. Нека $A$ е ограничено множество и $\tau$ е подобие с модул $a$. Нека $A'$ е образ на $A$ при $\tau$. В такъв случай

$$\mu(A') = a^2 \mu(A).$$

Специално, ако $\tau$ е еднаквост, то $\mu(A') = \mu(A)$.



5. Ако $A$ и $B$ са две измерими множества, то

$$\mu(A+B) + \mu(AB) = \mu(A) + \mu(B).$$

Специално, ако $\mu(AB) = 0$, то

$$\mu(A+B) = \mu(A) + \mu(B).$$

6. Ако $\Delta$ е квадрат със страна 1, то

$$\mu(\Delta) = 1.$$

Читателят само лесно ще докаже тези свойства. По-специално пресмятането на лицето на квадрата се извършва с помощта на формула (8).

## § 20. Преобразуване на измерими множества

Нека $A$ и $B$ са две непразни множества в равнината. Да изберем точка $P$ от $A$ и точка $Q$ от $B$. Дължината на отсечката $PQ$ зависи от избора на точките $P$ и $Q$. Точната долна граница на тези дължини ще наричаме разстояние между множествата $A$ и $B$ и ще го означаваме със символа $d(A, B)$. По-специално, ако едното от множествата, например $B$, съдържа само една точка $S$, вместо $d(A, B)$ ще пишем често пъти $d(A, S)$ и ще го наричаме разстояние от точката $S$ до множеството $A$. С аналогични означения ще се ползуваме и тогава, когато двете множества $A$ и $B$ съдържат само по една точка.

**Лема 1.** Нека $R$ е отворено точково множество в равнината и нека $A$ е затворено и ограничено непразно подмножество на $R$. В такъв случай може да се избере такова положително число $\delta$, че всяка точка, чието разстояние до $A$ е по-малко от $\delta$, да се съдържа в $R$.

Доказателство. Да допуснем противното. Това значи, че не съществува положително число $\delta$ с исканото свойство. По-специално, ако изберем $\delta = \frac{1}{n}$, ще може да се намери точка $P_n$, която не принадлежи на $R$ и за която имаме

$$d(A; P_n) < \frac{1}{n}.$$

Това от своя страна означава, че съществува точка $Q_n$ от $A$, за която

$$d(Q_n, P_n) < \frac{1}{n}.$$

Да разгледаме редицата

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$$

Членовете ѝ принадлежат на ограниченото множество $A$ и следователно ние можем да изберем сходяща подредица

$$Q_{m_1}, Q_{m_2}, \ldots, Q_{m_n}, \ldots,$$

$$m_1 < m_2 < \ldots < m_n < \ldots$$

Множеството $A$ обаче е затворено, поради което границата $Q_0$ на избраната подредица принадлежи на $A$. От друга страна,

$$d(Q_0, P_{m_n}) \leq d(Q_0, Q_{m_n}) + d(Q_{m_n}, P_{m_n}) \leq$$

$$\leq d(Q_0, Q_{m_n}) + \frac{1}{m_n}$$

и следователно редицата

$$P_{m_1}, P_{m_2}, \ldots, P_{m_n}, \ldots$$

клони към $Q_0$.

Точката $Q_0$ обаче принадлежи на $A$ и следователно принадлежи на $R$. Да изберем околност на $Q_0$, която се съдържа в $R$. Това може да се направи, защото множеството $R$ е отворено и следователно $Q_0$ е негова вътрешна точка. Тази околност ще съдържа точките $P_{m_n}$, когато $n$ е достатъчно голямо, защото $P_{m_n} \to Q_0$. Това обаче не е възможно, защото никоя от точките $P_n$ не принадлежи на $R$. По такъв начин ние достигнахме до противоречие, с което доказателството е завършено.

**Лема 2.** Нека $A$ е едно ограничено точково множество в равнината и $\delta$ е едно неотрицателно число. Множеството $B$ от точките $P$ на равнината, за които е изпълнено условието

$$d(A, P) \leq \delta,$$

е ограничено и затворено.

Доказателство. Ще покажем първо, че множеството $B$ е ограничено. Нека $O$ е началото на координатната система. Избираме кръг с център в $O$ и радиус $r$, който съдържа всичките точки на $A$. Това може да се направи, защото множеството $A$ е ограничено. Нека $P$ е произволна точка от $B$. Това значи, че

$$d(A, P) \leq \delta$$

и следователно може да се избере точка $Q$ от $A$, за която

$$d(Q, P) < \delta + 1.$$



В такъв случай

$$d(O, P) \leq d(O, Q) + d(Q, P) \leq r + \delta + 1,$$

с което е установено, че множеството $B$ е ограничено.

Ще покажем сега, че множеството $B$ е затворено. Нека $P_0$ е контурна точка на $B$ и нека $U_n$ е кръгова околност на $P_0$ с радиус $\frac{1}{n}$. В такъв случай в $U_n$ ще има поне една точка $P_n$ от $B$, т. е.

$$d(A, P_n) \leq \delta.$$

Числото $d(A, P_n)$ е точната (т. е. най-голямата) долна граница на множеството $M$ от числата $d(Q, P_n)$, които получаваме, когато $Q$ описва $A$. Числото

$$d(A, P_n) + \frac{1}{n}$$

е по-голямо от $d(A, P_n)$ и следователно не е долна граница на $M$. Това ни дава възможност да твърдим, че има точка $Q_n$ от $A$, за която

$$d(Q_n, P_n) < d(A, P_n) + \frac{1}{n} \leq \delta + \frac{1}{n}.$$

От друга страна,

$$d(A, P_0) \leq d(Q_n, P_0) \leq d(Q_n, P_n) + d(P_n, P_0) \leq$$

$$\leq \delta + \frac{1}{n} + \frac{1}{n},$$

т. е.

$$d(A, P_0) \leq \delta + \frac{2}{n},$$

откъдето след граничния преход $n \longrightarrow \infty$ получаваме

$$d(A, P_0) \leq \delta,$$

което ни учи, че точката $P_0$ принадлежи на $B$. От тези разсъждения се вижда, че множеството $B$ съдържа всичките си контурни точки и следователно е затворено. С това доказателството е завършено.

**Лема 3.** Нека $C$ е отворен кръг с радиус $r$ и нека функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ са дефинирани в $C$ и притежават непрекъснати първи частни производни. Нека освен това в $C$ са изпълнени неравенствата

$$|f'_u(u, v)| \leq M, \quad |f'_v(u, v)| \leq M,$$

$$|g'_u(u, v)| \leq M, \quad |g'_v(u, v)| \leq M,$$

където $M$ е константа. В такъв случай диаметърът на образа $C'$ на $C$ при трансформацията

$$x=f(u,\ v),$$
$$y=g(u,\ v)$$

не надминава $4Mr\sqrt{2}$.

Доказателство. Нека $(x_1,\ y_1)$ и $(x_2,\ y_2)$ са две точки от $C'$. Това значи, че съществуват две точки $(u_1,\ v_1)$ и $(u_2,\ v_2)$ от $C$, за които имаме

$$x_1=f(u_1,\ v_1),\qquad x_2=f(u_2,\ v_2),$$
$$y_1=g(u_1,\ v_1),\qquad y_2=g(u_2,\ v_2).$$

Според теоремата за крайните нараствания имаме

$$x_2-x_1=f(u_2,\ v_2)-f(u_1,\ v_1)=$$
$$=(u_2-u_1)f'_u(u',\ v')+(v_2-v_1)f'_v(u',\ v'),$$
$$y_2-y_1=g(u_2,\ v_2)-g(u_1,\ v_1)=$$
$$=(u_2-u_1)g'_u(u'',\ v'')+(v_2-v_1)g'_v(u'',\ v''),$$

където точките $(u',\ v')$ и $(u'',\ v'')$ са избрани по подходящ начин върху отсечката $[(u_1,\ v_1),\ (u_2,\ v_2)]$. По такъв начин получаваме

$$|x_2-x_1|\leq M[\,|u_2-u_1|+|v_2-v_1|\,]\leq 4\,Mr,$$
$$|y_2-y_1|\leq M[\,|u_2-u_1|+|v_2-v_1|\,]\leq 4\,Mr$$

и следователно

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\leq 4\,Mr\,\sqrt{2}.$$

Точките $(x_1,\ y_1)$ и $(x_2,\ y_2)$ обаче са избрани произволно в $C'$ и следователно диаметърът на $C'$ не надминава $4\,Mr\sqrt{2}$. С това доказателството е завършено.

**Лема 4.** Нека функциите $f(u,\ v)$ и $g(u,\ v)$ са дефинирани и притежават непрекъснати първи частни производни в някое отворено множество $G$ в равнината. Ще покажем, че образът $A'$ на всяко затворено и ограничено подмножество $A$ на $G$ с мярка нула при трансформацията

$$x=f(u,\ v),$$
$$y=x(u,\ v)$$

е също множество с мярка нула.



Доказателство. Избираме положително число $\eta$ по такъв начин, че точките, чието разстояние до $A$ е по-малко от $\eta$, да се намират в $G$. Това може да се направи въз основа на лема 1, защото множеството $G$ е отворено, а множеството $A$ е ограничено и затворено. След това означаваме с $\delta$ произволно положително число, строго по-малко от $\eta$, и разглеждаме множеството $B$ от точките $P$ на равнината, за които

$$d(A,\ P)\leq\delta.$$

Съгласно лема 2 това множество е ограничено и затворено. Освен това то се съдържа изцяло в $G$, защото $\delta<\eta$.

След направения избор на $\delta$ избираме положително число $\varepsilon$, по-малко от $\frac{\delta^2}{4}$, и покриваме $A$ със система от краен брой отворени кръгове

$$C_1,\ C_2,\dots,\ C_n,$$

за които сумата от квадратите на радиусите е по-малка от $\varepsilon$. То ва може да се направи, защото $A$ е множество с мярка нула. Очевидно ние можем да предполагаме, че всеки един от кръговете $C_1,\ C_2,\dots,C_n$ има обща точка с $A$, защото, ако това не е изпълнено, достатъчно е да премахнем онези кръгове, които нямат обща точка с $A$, за да получим нова система от покриващи кръгове, за която сумата от квадратите на радиусите е още по-малка и която притежава исканото свойство. Тези кръгове се съдържат изцяло в $B$, защото радиусите им са по-малки от $\sqrt{\varepsilon}<\frac{\delta}{2}$ и следователно разстоянието на коя да е точка от тях до $A$ е по-малко от $\delta$.

Множеството $B$ обаче е ограничено и затворено, а производните $f'_u,\ f'_v,\ g'_u,\ g'_v$ са непрекъснати. Това ни дава възможност да твърдим, че тези производни са ограничени. Да означим с $M$ една обща горна граница на техните модули в $B$. В такъв случай диаметърът на образа $C'_\nu$ на $C_\nu$ при разглежданата трансформация съгласно лема 3 няма да надминава $4\,Mr_\nu\sqrt{2}$, където $r_\nu$ е радиусът на $C_\nu$. Да построим отворен кръг $D_\nu$, чийто център е коя да е точка на $C'_\nu$ и чийто радиус е $16\ Mr_\nu$. Този кръг съдържа всичките точки на $C'_\nu$. По такъв начин ние получаваме система от отворени кръгове $D_1,\ D_2,\dots,D_n$, която покрива $A'$ и за която сумата от квадратите на радиусите е равна на

$$\sum_{\nu=1}^{n} 256\ M^2 r_\nu^2$$

и следователно не надминава $256\,M^2\varepsilon$. Като вземем под внимание, че положителното число $\varepsilon$ е произволно, а $M$ не зависи от $\varepsilon$, заключаваме, че $A'$ има мярка нула. С това доказателството е завършено.

Преминаваме към изследване на някои свойства на регулярните трансформации.

Нека

$$x=f(u,v),\qquad (1)$$

$$y=g(u,v)$$

е регулярна трансформация на някое отворено точково множество $G$ в равнината.

**Лема 5.** Ако трансформацията (1) е регулярна и множеството $A$ е измеримо и лежи в $G$ заедно с контура си, то образът му е също тъй измеримо множество.

Доказателство. И наистина контурът на всяко множество е затворено множество. По такъв начин ние имаме в $G$ ограничено и затворено множество $K(A)$, чиято мярка е нула. Въз основа на това, което доказахме, можем да твърдим, че мярката на образа му $[K(A)]'$ е нула. От друга страна, $A$ лежи в $G$ заедно с контура си и следователно контурът на образа $A'$ съвпада с множеството $[K(A)]'$, т. е. има мярка нула. По такъв начин, за да се убедим, че множеството $A'$ е измеримо, достатъчно е да покажем, че то е ограничено, нещо, което може да се види, като вземем под внимание, че множеството $A+K(A)$ е ограничено и затворено подмножество на $G$ и следователно образът му

$$[A+K(A)]'=A'+[K(A)]'$$

е ограничено (и затворено) множество. Това е достатъчно, за да можем да твърдим, че множеството $A'$ е също така ограничено. С това доказателството е завършено.

Досега ние предполагахме, че трансформацията (1) е еднократно регулярна в $G$. От този момент ще предполагаме, че тя е двойно регулярна в $G$.

Ще докажем следната лема, която ще играе важна роля в по-нататъшните разсъждения.

Нека $(u_0, v_0)$ е една точка от $G$ и нека $\Delta$ е един (отворен) квадрат със страни, успоредни на съответните координатни оси, с център в точката $(u_0, v_0)$, разположен заедно с контура си изцяло в $G$. Да означим с $\Delta'$ образа на $\Delta$. Ние ще докажем следната лема: ако $D$ е едно число, по-голямо[1] от 1, то всеки път, когато квадратът $\Delta$ е достатъчно малък и вторите частни производни остават ограничени, е изпълнено неравенството[1]

$$\mu(\Delta')\leq D\left\|\begin{matrix} f'_u(u_0, v_0) & f'_v(u_0, v_0)\\ g'_u(u_0, v_0) & g'_v(u_0, v_0)\end{matrix}\right\|\mu(\Delta).$$

Колко малък трябва да бъде квадратът $\Delta$, зависи от трансформацията (1) и от избора на числото $D$, обаче не зависи от положението на точката $(u_0, v_0)$, стига квадратът $\Delta$ да остава в едно фиксирано ограничено и затворено подмножество на $G$.

Доказателство. Нека

$$u=F(x,y),\qquad (2)$$

$$v=G(x,y)$$

е трансформация, обратна на трансформацията (1). Полагаме за краткост

$$x_0=f(u_0,v_0),\qquad y_0=g(u_0,v_0),$$

$$a_{11}=f'_u(u_0,v_0),\qquad a_{12}=f'_v(u_0,v_0),$$

$$a_{21}=g'_u(u_0,v_0),\qquad a_{22}=g'_v(u_0,v_0),$$

$$A_{11}=F'_x(x_0,y_0),\qquad A_{21}=F'_y(x_0,y_0),$$

$$A_{12}=G'_x(x_0,y_0),\qquad A_{22}=G'_y(x_0,y_0).$$

В такъв случай, като вземем пред вид, че функциите (1) удовлетворяват уравненията (2), получаваме с помощта на теоремата за диференциране на съставни функции следните равенства:

---

[1] Тук се иска да имаме $D>1$, т. е. равенството $D=1$ се изключва.

[1] Символът

$$\left\|\begin{matrix} f'_u(u_0, v_0) & f'_v(u_0, v_0)\\ g'_u(u_0, v_0) & g'_v(u_0, v_0)\end{matrix}\right\|$$

означава абсолютната стойност на детерминантата

$$\left|\begin{matrix} f'_u(u_0, v_0) & f'_v(u_0, v_0)\\ g'_u(u_0, v_0) & g'_v(u_0, v_0)\end{matrix}\right|.$$

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}&=1,\\ a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}&=0,\\[4pt] a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}&=0,\\ a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}&=1. \end{aligned}$$

Така например първото от тези равенства се получава, като диференцираме спрямо $u$ равенството

$$(4)\qquad u=F(x, y),$$

където

$$x=f(u, v), \qquad y=g(u, v).$$

Второто от равенствата (3) се получава, като диференцираме равенството (4) спрямо $v$ и пр.

Разглеждаме помощната линейна трансформация[1]

$$(5)\qquad \begin{aligned} x-x_0&=[a_{11}(u-u_0)+a_{12}(v-v_0)]\sqrt{D},\\ y-y_0&=[a_{21}(u-u_0)+a_{22}(v-v_0)]\sqrt{D}. \end{aligned}$$

Тази трансформация преобразува квадрата $\Delta$ (както това читателят знае от аналитичната геометрия) в някой успоредник $\Delta''$.

Ако решим системите (5) относно $u-u_0$ и $v-v_0$, ще получим[2]

$$u-u_0=[A_{11}(x-x_0)+A_{21}(y-y_0)]\frac{1}{\sqrt{D}},$$

$$v-v_0=[A_{12}(x-x_0)+A_{22}(y-y_0)]\frac{1}{\sqrt{D}}.$$

[1] Касае се тук за една афинна трансформация. Читателят е изучавал свойствата на такива трансформации в аналитичната геометрия. В случая разглежданата от нас трансформация не е изродена, защото

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'_u(u_0, v_0) & f'_v(u_0, v_0)\\ g'_u(u_0, v_0) & g'_v(u_0, v_0)\end{vmatrix} \neq 0.$$

[2] Ако умножим двете страни на равенствата (5) съответно с $A_{11}$ и $A_{21}$, съберем ги и вземем пред вид зависимостите (3), ще получим

$$u-u_0=[A_{11}(x-x_0)+A_{21}(y-y_0)]\frac{1}{\sqrt{D}};$$

аналогично се получава и равенството

$$v-v_0=[A_{12}(x-x_0)+A_{22}(y-y_0)]\frac{1}{\sqrt{D}}.$$



Да означим с $2d$ страната на квадрата $\Delta$. Една точка с координати $(u, v)$ принадлежи на $\Delta$ тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата

$$|u-u_0|<d, \quad |v-v_0|<d.$$

Оттук заключаваме, че една точка с координати $(x, y)$ принадлежи[1] на $\Delta''$ тогава и само тогава, когато

$$|A_{11}(x-x_0)+A_{21}(y-y_0)|<d\sqrt{D}.$$

$$|A_{12}(x-x_0)+A_{22}(y-y_0)|<d\sqrt{D}.$$

Ние ще докажем, че множеството $\Delta'$ лежи изцяло в $\Delta''$, когато $d$ е достатъчно малко. За тази цел е достатъчно да покажем, че всичките точки с координати

$$[f(u, v), g(u, v)]$$

лежат в $\Delta''$, когато $|u-u_0|<d$ и $|v-v_0|<d$. Ние ще направим това, като покажем, че са изпълнени неравенствата

$$(6)\qquad |A_{11}[f(u, v)-x_0]+A_{21}[g(u, v)-y_0]|<d\sqrt{D},$$

$$(7)\qquad |A_{12}[f(u, v)-x_0]+A_{22}[g(u, v)-y_0]|<d\sqrt{D}.$$

Формулата на Тейлор ни дава

$$(8)\qquad f(u, v)=f(u_0, v_0)+f'_u(u_0, v_0)(u-u_0)+f'_v(u_0, v_0)(v-v_0)+$$
$$+\frac{1}{2}[f''_{uu}(u',v')(u-u_0)^2+2f''_{uv}(u',v')(u-u_0)(v-v_0)+f''_{vv}(u',v')(v-v_0)^2],$$

$$(9)\qquad g(u, v)=g(u_0, v_0)+g'_u(u_0, v_0)(u-u_0)+g'_v(u_0, v_0)(v-v_0)+$$
$$+\frac{1}{2}[g''_{uu}(u'',v'')(u-u_0)^2+2g''_{uv}(u'',v'')(u-u_0)(v-v_0)+$$
$$+g''_{vv}(u'',v'')(v-v_0)^2],$$

[1] Нека припомним, че една точка $(x, y)$ принадлежи на $\Delta''$ тогава и само тогава, когато точката $(u, v)$, където

$$u-u_0=[A_{11}(x-x_0)+A_{21}(y-y_0)]\frac{1}{\sqrt{D}},$$

$$v-v_0=[A_{12}(x-x_0)+A_{22}(y-y_0)]\frac{1}{\sqrt{D}}$$

принадлежи на $\Delta$.

където $(u', v')$ и $(u'', v'')$ са точки, подходящо избрани върху отсечката $[(u, v), (u_0, v_0)]$. Равенствата (8) и (9) могат да се напишат по-кратко така:

$$f(u, v) = x_0 + a_{11}(u-u_0) + a_{12}(v-v_0) + \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0) + \frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\Big]^2 f(u', v'),$$

$$g(u, v) = y_0 + a_{21}(u-u_0) + a_{22}(v-v_0) + \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0) + \frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\Big]^2 f(u'', v'').$$

Като заместим оттук $f(u, v)$ и $g(u, v)$ в (6) и (7) и вземем пред вид зависимостите (3), ще получим

$$\Big|u-u_0+\frac{A_{11}}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\Big]^2 f(u', v') + \frac{A_{21}}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\Big]^2 g(u'', v'')\Big| < a\sqrt{D}, \tag{10}$$

$$\Big|v-v_0+\frac{A_{12}}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\Big]^2 f(u', v') + \frac{A_{22}}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\Big]^2 g(u'', v'')\Big| < d\sqrt{D}. \tag{11}$$

Да означим с $K$ една горна граница на абсолютната стойност на производните $f''_{uu}, f''_{uv}, f''_{vv}$. В такъв случай получаваме

$$\Big|u-u_0+\frac{A_{11}}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\Big]^2 f(u', v') + \frac{A_{21}}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\Big]^2 g(u'', v'')\Big| \leq |u-u_0| +$$

$$+\Big|\frac{A_{11}}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\Big]^2 f(u', v')\Big| +$$

$$+\Big|\frac{A_{21}}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\Big]^2 g(u'', v'')\Big| < d +$$

$$+\frac{|A_{11}|+|A_{21}|}{2}\,4Kd^2 = d+2K[|A_{11}|+|A_{21}|]d^2$$



и аналогично

$$\Big|v-v_0+\frac{A_{12}}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\Big]^2 f(u', v') + \frac{A_{22}}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\Big]^2 g(u'', v'')\Big| < d+2K[|A_{12}|+|A_{22}|]d^2.$$

Оттук заключаваме, че неравенствата (10) и (11) сигурно ще бъдат изпълнени, ако

$$1+2K[|A_{11}|+|A_{21}|]d < \sqrt{D},$$

$$1+2K[|A_{12}|+|A_{22}|]d < \sqrt{D}.$$

Последните неравенства обаче наистина са изпълнени, ако $d$ е достатъчно малко, защото $D > 1$.

По този начин ние доказахме, че при всички достатъчно малки стойности на $d$ имаме

$$\Delta' \subset \Delta''$$

и следователно

$$\mu(\Delta') \leq \mu(\Delta''). \tag{12}$$

Читателят знае от аналитичната геометрия, че лицето на триъгълника с върхове $(\xi_1, \eta_1)$, $(\xi_2, \eta_2)$, $(\xi_3, \eta_3)$ е равно на абсолютната стойност на детерминантата

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix},$$

която може да се преобразува още по следния начин:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \xi_1-\xi_3 & \eta_1-\eta_3 & 0 \\ \xi_2-\xi_3 & \eta_2-\eta_3 & 0 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \xi_1-\xi_3 & \eta_1-\eta_3 \\ \xi_2-\xi_3 & \eta_2-\eta_3 \end{vmatrix}.$$

Ние можем да използуваме това, за да пресметнем лицето на успоредника $\Delta''$, върховете[1] на който имат следните координати:

[1] Тези върхове са образи съответно на точките

$$(u_0+d,\ v_0-d),\ (u_0-d,\ v_0+d),\ (u_0-d,\ v_0-d),\ (u_0+d,\ v_0+d)$$

при трансформацията

$$x-x_0=[a_{11}(u-u_0)+a_{12}(v-v_0)]\sqrt{D},$$

$$y-y_0=[a_{21}(u-u_0)+a_{22}(v-v_0)]\sqrt{D}.$$

(13) $(a_{11}\,d\sqrt{D}-a_{12}\,d\sqrt{D},\quad a_{21}\,d\sqrt{D}-a_{22}\,d\sqrt{D});$

(14) $(-a_{11}\,d\sqrt{D}+a_{12}\,d\sqrt{D},\quad -a_{21}\,d\sqrt{D}+a_{22}\,d\sqrt{D});$

(15) $(-a_{11}\,d\sqrt{D}-a_{12}\,d\sqrt{D},\quad -a_{21}\,d\sqrt{D}-a_{22}\,d\sqrt{D});$

(16) $(a_{11}\,d\sqrt{D}+a_{12}\,d\sqrt{D},\quad a_{21}\,d\sqrt{D}-a_{22}\,d\sqrt{D}).$

Оттук заключаваме, че лицето[1] на успоредника $\Delta''$ има стойност

$$\left\|\begin{matrix} 2a_{11}\,d\sqrt{D} & 2a_{21}\,d\sqrt{D} \\ 2a_{12}\,d\sqrt{D} & 2a_{22}\,d\sqrt{D}\end{matrix}\right\| = 4\,d^2 D\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{matrix}\right\| = D\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{matrix}\right\|\mu(\Delta).$$

Този резултат ни дава възможност да представим неравенството (12) във вида

$$\mu(\Delta')\leq D\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{matrix}\right\|\mu(\Delta),$$

с което интересуващата ни лема е установена.

Ние ще използуваме доказаната лема, за да изведем следната теорема, която ще ни бъде необходима по-късно:

Ако (1) е една двойно регулярна трансформация, чиято функционална детерминанта удовлетворява неравенствата

$$m\leq\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|\leq M$$

във всички точки на едно измеримо множество $A$, което лежи в $G$ заедно с контура си[2], то са изпълнени неравенствата[3]

(17) $$m\,\mu(A)\leq\mu(A')\leq M\,\mu(A).$$

Доказателство. Достатъчно е да покажем валидността само на неравенството

$$\mu(A')\leq M\,\mu(A),$$

защото оттук ще следва вече валидността и на неравенството

$$m\,\mu(A)\leq\mu(A').$$

[1] Това лице е два пъти по-голямо от лицето на триъгълника, който е образуван например от точките (13), (14) и (15).

[2] Както казахме в началото на този параграф, с $G$ е означено отворено множество, в което са дефинирани функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$.

[3] Както винаги досега, и този параграф ние означаваме с $A'$ образа на $A$. С $\mu(A)$ и $\mu(A')$ са означени съответните лица.



За да се убедим в това, разглеждаме обратната трансформация

$$u=F(x, y),$$
$$v=G(x, y)$$

на трансформацията (1). В такъв случай от лесно проверимото тъждество[1]

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\cdot\frac{D(u, v)}{D(x, y)}=1$$

получаваме

$$\left|\frac{D(u, v)}{D(x, y)}\right|\leq\frac{1}{m}$$

и следователно

$$\mu(A)\leq\frac{1}{m}\,\mu(A')$$

или

$$m\,\mu(A)\leq\mu(A').$$

И така въпросът се свежда към доказателство на неравенството

$$\mu(A')\leq M\,\mu(A).$$

Ние ще извършим това доказателство от противното. Да допуснем, че имаме

$$\mu(A')>M\,\mu(A).$$

Избираме едно число $D>1$ толкова близо до 1, че да имаме все още

$$\mu(A')>DM\,\mu(A).$$

Покриваме контура на $A'$ със сума $R'$ от краен брой отворени квадрати, които лежат заедно с контура си в $G'$ по такъв начин, че да имаме

(18) $$\mu(R')+MD\,\mu(A)<\mu(A').$$

[1] Това тъждество може да се докаже така:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\cdot\frac{D(u, v)}{D(x, y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

Това може да се направи, защото множеството $A'$ е измеримо и следователно контурът му има мярка нула.[1]

Покриваме съвкупността $A$ с квадрата $\Delta$, страните на който са успоредни на съответните координатни оси, като към този квадрат причисляваме само онези контурни точки, които лежат върху най-долната му страна без десния ѝ край и най-лявата му страна без горния ѝ край. Делим квадрата $\Delta$ на четири равни части $S_1$,

[1] Тук ние искаме всеки един от покриващите квадрати да лежи в $G'$ заедно с контура си. Това сигурно ще бъде изпълнено, ако покриващите квадрати са достатъчно малки и всеки един от тях съдържа поне една контурна точка на $A'$, защото множеството $G'$ е отворено и съдържа контура на $A'$. И наистина, ако допуснем противното, ще можем да изберем една редица от квадрати

$$C_1, C_2, C_3, \dots,$$

размерите на които клонят към нула, като при това всеки един от тези квадрати съдържа поне една точка от контура на $A'$ и поне една точка, която не принадлежи на $G'$. Тази редица от квадрати ни дава възможност да дефинираме точка, която е контурна за $A'$ и не е вътрешна за $G'$. По този начин ние достигаме до исканото противоречие.

Накрая нека отбележим, че действително можем да покрием контура на $A'$ със система от краен брой квадрати по такъв начин, че размерите на всеки един от покриващите квадрати да не надминава едно отнапред избрано положително число $\delta$. За целта е достатъчно да изберем една каква да е система от покриващи квадрати $B_1, B_2, \dots, B_p$, да разделим всеки един от тях на квадратчета със страни, по-малки от $\frac{\delta}{2}$ и да изхвърлим онези от тях, които нямат общи точки с контура на $A'$. Така получената система от квадратчета

$$D_1, D_2, D_3, \dots, D_n$$

покрива целия контур на $A'$, но може да се случи евентуално някоя от контурните точки на $A'$ да не бъде вътрешна за никой от покриващите квадрати. За да имаме система от отворени квадрати, страните на която са по-малки от $\delta$, която също тъй покрива контура на $A'$, заменяме всеки един от покриващите квадрати $D_\nu$ с отворен квадрат $R_\nu$, центърът на който съвпада с центъра на $D_\nu$, а страните на който са успоредни на съответните страни на $D_\nu$ и два пъти по-големи от тях. При това можем да си осигурим сумата от лицата на квадратите $R_\nu$ да бъде произволно малка. И наистина, ако $\varepsilon$ едно какво да е положително число, то избирайки квадратите $B_1, B_2, \dots, B_p$ така, че да имаме

$$\sum_{\nu=1}^{p} \mu(B_\nu) < \frac{\varepsilon}{4},$$

получаваме

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mu(D_\nu) < \frac{\varepsilon}{4}$$

и следователно

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mu(R_\nu) < \varepsilon.$$



$S_2, S_3, S_4$ посредством средните линии, към които също тъй причисляваме само онези контурни точки, които лежат само върху най-долните им страни без десните им краища и най-левите им страни без горните им краища. По този начин ние си осигуряваме, че никои две от четвъртинките $S_1, S_2, S_3, S_4$ нямат общи точки, но сумата им представлява квадрата $\Delta$. Измежду тези четвъртинки има поне една, да я означим с $\Delta_1$, за която е валидно неравенството

$$\mu[(R\Delta_1)'] + MD\mu(A\Delta_1) < \mu[(A\Delta_1)'],$$

където $R$ е множеството, което се изобразява върху $R'$ при трансформацията (1). И наистина, ако допуснем противното, получаваме

$$\mu[(RS_1)'] + MD\mu(AS_1) \geqq \mu[(AS_1)'],$$
$$\mu[(RS_2)'] + MD\mu(AS_2) \geqq \mu[(AS_2)'],$$
$$\mu[(RS_3)'] + MD\mu(AS_3) \geqq \mu[(AS_3)'],$$
$$\mu[(RS_4)'] + MD\mu(AS_4) \geqq \mu[(AS_4)']$$

и като съберем тези неравенства, намираме

$$\mu(R') + MD\mu(A) \geqq \mu(A'),$$

което противоречи на неравенството (18). Повтаряйки тези разсъждения, получаваме безкрайна редица от квадрати

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \dots,$$

страните на които клонят към нула и за които са изпълнени неравенствата

$$\mu[(R\Delta_n)'] + MD\mu(A\Delta_n) < \mu[(A\Delta_n)']. \tag{19}$$

Както знаем, има една точка $P$, която лежи във вътрешността или по контура на всеки един от тези квадрати. Точката $P$ не може да бъде външна за $A$, защото в противен случай сечението $A\Delta_n$ би било празно при всички достатъчно големи стойности на $n$ и неравенството (19) би приело вида

$$\mu[(R\Delta_n)'] < 0,$$

което е абсурд. От друга страна, точката $P$ не може да бъде контурна за $A$, защото в противен случай тя би била вътрешна[1] за $R$ и сечението $R\Delta_n$ би се редуцирало на $\Delta_n$ при всички достатъчно големи стойности на $n$ и в такъв случай неравенството (19) би приело вида

$$\mu(\Delta_n') + MD\mu(A\Delta_n) < \mu[(A\Delta_n)'],$$

[1] Това множество е съставено само от вътрешни точки (т. е. отворено), защото множеството $R'$ е съставено само от вътрешни точки.

което не е възможно, защото

$$(A\Delta_n)' \subset \Delta_n'$$

и следователно

$$\mu[(A\Delta_n)'] \leqq \mu(\Delta_n').$$

От направените дотук разсъждения заключаваме, че точката $P$ е непременно вътрешна за $A$. В такъв случай при достатъчно големи стойности на $n$ сечението $A\Delta_n$ се редуцира на $\Delta_n$ и неравенството (19) приема вида

$$\mu[(R\Delta_n)'] + MD\mu(\Delta_n) < \mu(\Delta_n'),$$

откъдето следва

$$MD\mu(\Delta_n) < \mu(\Delta_n')$$

и толкова повече

$$D\left|\begin{vmatrix} f_u'(u_0, v_0) & f_v'(u_0, v_0) \\ g_u'(u_0, v_0) & g_v'(u_0, v_0) \end{vmatrix}\right| \mu(\Delta_n) < \mu(\Delta_n'), \tag{20}$$

където $(u_0, v_0)$ са координати на центъра на $\Delta_n$. Ние обаче знаем от лемата, която доказахме по-горе, че неравенството (20) е сигурно нарушено, когато размерите на квадрата $\Delta_n$ са достатъчно малки, защото вторите частни производни на $f(u, v)$ и $g(u, v)$ са ограничени поне в $A+K(A)$. Така достигнахме до исканото противоречие и завършихме доказателството на интересуващата ни теорема.

## § 21. Полярни координати

Нека $(x, y)$ са декартовите координати на една точка $P$. Числата $\rho$ и $\theta$, които са свързани с $x$ и $y$ посредством зависимостите[1]

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= \rho\cos\theta, \\ y &= \rho\sin\theta, \\ \rho &\geqq 0, \end{aligned}$$

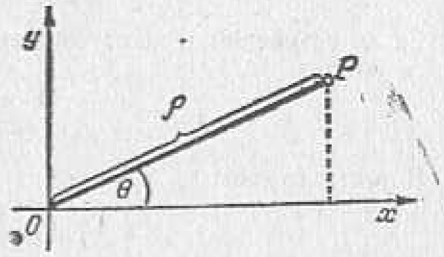
се наричат полярни координати на точката $P$. Геометричният смисъл на тези координати е прост: $\rho$ представлява разстоянието на точката $P$ до началото $O$ на координатната система, а $\theta$ е така нареченият полярен ъгъл, т. е. кой да е от ъглите, на който трябва да се завърти положителната част на оста $Ox$, за да се слее с лъча $OP$ (вж. черт. 8).

[1] По-общо, ако ни са дадени две функции

$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= f(u, v), \\ y &= g(u, v), \end{aligned}$$

то числата $(u, v)$, които са свързани с $(x, y)$ посредством равенството (2), се наричат криволинейни координати на точката, чиито декартови координати са $(x, y)$. Равенствата (2) се наричат трансформачни формули, които свързват криволинейните координати $(u, v)$ с декартовите координати $(x, y)$.






Черт. 8

Не е трудно да се убедим по чисто аналитичен път (т. е. без помощта на геометрични съображения), че системата (1) има наистина решение[1] при всеки избор на $(x, y)$, като при това $\rho$ е определено еднозначно, а полярният ъгъл $\theta$ е определен многозначно. Ние ще започнем с въпроса за единственост. Като повдигнем в квадрат и съберем почленно равенствата

$$x = \rho\cos\theta,$$

$$y = \rho\sin\theta,$$

получаваме

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

а като вземем пред вид още условието $\rho \geqq 0$, намираме

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

При $x^2 + y^2 = 0$ можем да дадем на $\theta$ очевидно съвсем произволна стойност. При $x^2 + y^2 \neq 0$ имаме

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Като се възползуваме от този резултат и от условието $y = \rho\sin\theta$, ние ще покажем, че $\theta$ може да се представи във вида[2]

$$\theta = 2k\pi + \varepsilon \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{3}$$

където $k$ е едно цяло число, а $\varepsilon = 1$ при $y \geqq 0$ и $\varepsilon = -1$ при $y < 0$. И наистина не е трудно да се покаже, че има цяло число $k$ (зависещо, разбира се, от $\theta$), за което са изпълнени неравенствата

$$-\pi < \theta - 2k\pi \leqq \pi$$

[1] Т. е. че всяка точка има полярни координати.

[2] При $y = 0$ това представяне не е еднозначно, защото в този случай ние бихме могли да вземем и $\varepsilon = -1$.

или, което е същото,

$$\frac{\theta-\pi}{2\pi} \leqq k < \frac{\pi+\theta}{2\pi}.$$

За да се убедим в това, означаваме с $k$ най-малкото цяло число, за което

$$\frac{\theta-\pi}{2\pi} \leqq k.$$

В такъв случай

$$k-1 < \frac{\theta-\pi}{2\pi}$$

или

$$k < \frac{\theta-\pi}{2\pi}+1 = \frac{\theta+\pi}{2\pi}.$$

Полагаме

$$\alpha = |\theta - 2k\pi|.$$

Очевидно имаме

$$0 \leqq \alpha \leqq \pi,$$

$$\cos\alpha = \cos|\theta-2k\pi| = \cos(\theta-2k\pi) = \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

и следователно

$$\alpha = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Оттук получаваме

$$|\theta-2k\pi| = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

или още

$$\theta-2k\pi = \varepsilon\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

където $\varepsilon=\pm 1$, и най-сетне

$$\theta = 2k\pi + \varepsilon\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Като вземем пред вид уравнението $y=\rho\sin\theta$, намираме

$$y = \varepsilon\rho\sin\left(\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \varepsilon\rho\sqrt{1-\left[\cos\left(\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right]^2} =$$

$$= \varepsilon\rho\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}} = \varepsilon|y|.$$



Оттук заключаваме, че $\varepsilon=1$, когато $y>0$, и $\varepsilon=-1$, когато $y<0$. При $y=0$ имаме или

$$\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

или

$$\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pi$$

в зависимост от знака на $x$. От това заключаваме, че при $y=0$ можем да изберем както $\varepsilon=1$, така и $\varepsilon=-1$.

Сега вече не е трудно да се покаже, че всяка точка има полярни координати. И наистина при $x^2+y^2 \neq 0$ числата

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \tag{4}$$

$$\theta = 2k\pi + \varepsilon\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

където $k$ е произволно цяло число, $\varepsilon=1$ при $y \geqq 0$ и $\varepsilon=-1$ при $y<0$ са добре дефинирани, защото числото

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

не надминава по абсолютна стойност единица и следователно принадлежи на дефиниционната област на функцията $\arccos u$. Със заместване се проверява непосредствено, че числата (4) удовлетворяват системата (1). За да получим едно решение при $x^2+y^2=0$, избираме, както казахме по-горе, $\rho=0$ и $\theta$ произволно.

Не е трудно да се покаже, че измежду полярните ъгли на една точка има (поне) един, който удовлетворява неравенствата

$$-\pi < \theta \leqq \pi.$$

За да се убедим в това, достатъчно е в равенството (3) да изберем $k=0$. Такъв полярен ъгъл има само един, когато $x^2+y^2 \neq 0$, защото равенството (3) ни учи, че в този случай разликата на два полярни ъгъла на една и съща точка представлява целочислено кратно на $2\pi$.

Аналогично може да се покаже, че при $x^2+y^2 \neq 0$ има един и само един полярен ъгъл, който удовлетворява неравенствата

$$0 \leqq \theta < 2\pi$$

и пр. Нека читателят сам си уясни геометричната страна на въпросите, които ние разгледахме сега.

**Задачи**

1. Да се покаже, че една различна от началото точка $(x, y)$ лежи върху кривата $(\Gamma)$ с уравнение

(5) $$(x^2+y^2)^2=a(x^2-y^2)$$

тогава и само тогава, когато полярните ѝ координати удовлетворяват уравнението

(6) $$\rho^2=a\cos 2\theta.$$

Забележка. Уравнението (6) се нарича уравнение на кривата $(\Gamma)$ в полярни координати. Това уравнение се получава от уравнението (5), като заместим $x$ и $y$ с равните им от трансформачните формули

$$x=\rho\cos\theta,$$
$$y=\rho\sin\theta.$$

2. Нека

$$x=x(t),$$
$$y=y(t)$$

са две диференцуеми функции на $t$ с непрекъснати производни в интервала $a\leq t\leq b$, удовлетворяващи условието $x^2(t)+y^2(t)\neq 0$, и нека $\theta_0$ е (кой да е) полярен ъгъл на точката $[x(a), y(a)]$. Покажете, че двете функции

(7) $$\theta(t)=\theta_0+\int_a^t \frac{x(u)\,y'(u)-y(u)\,x'(u)}{x^2(u)+y^2(u)}\,du,$$

$$\rho(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$$

удовлетворяват условията

(8) $$x(t)=\rho(t)\cos\theta(t),\quad y(t)=\rho(t)\sin\theta(t),\quad \theta(a)=\theta_0$$

и няма други диференцуеми функции, които да удовлетворяват тези условия в същия интервал.

Упътване. За да установите единствеността, покажете, че

$$x'=\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta\theta',$$
$$y'=\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta\theta'$$

и следователно

$$\theta'=\frac{xy'-yx'}{\rho^2},$$

където

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}.$$

За да покажете, че функциите (7) наистина удовлетворяват условията (8), образувайте помощните функции

(9) $$u=\cos\theta(t),\quad v=\sin\theta(t),$$



(10) $$\xi=\frac{x(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}},\quad \eta=\frac{y(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$$

и покажете, че

$$u'=-v\theta',$$
$$v'=u\theta',$$
$$\xi'=-\eta\theta',$$
$$\eta'=\xi\theta'.$$

Използувайте този резултат, за да покажете, че двете функции

$$f(t)=u\xi+v\eta,$$
$$g(t)=u\eta-v\xi$$

са константи, като покажете, че $f'(t)=g'(t)=0$. За да пресметнете стойностите на тези константи, положете $t=a$. Това ще ви даде

$$u\xi+v\eta=1,$$
$$u\eta-v\xi=0.$$

Като решите тази система относно $u$ и $v$ и вземете пред вид, че $\xi^2+\eta^2=1$ ще получите $u=\xi$, $v=\eta$, откъдето вече лесно се доказва с помощта на равенствата (7), (9), (10), че

$$x(t)=\rho(t)\cos\theta(t),$$
$$y(t)=\rho(t)\sin\theta(t),$$
$$\theta(a)=\theta_0.$$

## § 22. Пресмятане на лица с помощта на определени интеграли

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$ и приема само неотрицателни стойности в него. Ние ще си поставим за задача да пресметнем лицето $\sigma$ на частта $G$ от равнината,[1] която е заградена от графиката

[1] Нека читателят сам докаже, че множеството $G$ е измеримо. За целта е достатъчно да се покаже, че то е ограничено и контурът му има мярка нула. Това не е трудно да се направи. Така например, за да покажем, че графиката на функцията $y=f(x)$ има мярка нула, бихме могли да постъпим по следния начин: избираме едно положително число $\varepsilon$ и делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

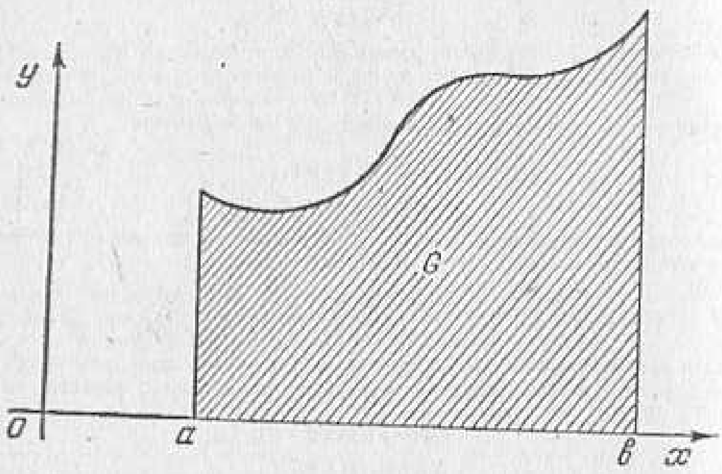
по такъв начин, че осцилацията на $f(x)$ във всеки един от тези подинтервали да бъде по-малка от $\varepsilon$; това, както знаем, може да се направи, защото функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$; означаваме с $M_\nu$ и $m_\nu$ съответно точната горна и точната долна граница на функцията $f(x)$ в подинтервала $[x_{\nu-1}, x_\nu]$; правоъгълниците

$$x_{\nu-1}\leq x\leq x_\nu,$$
$$m_\nu\leq y\leq M_\nu$$

на функцията $y=f(x)$ и от правите $x=a$, $x=b$, $y=0$ (вж. черт. 9). По-точно $G$ е множеството на точките $(x, y)$, които удовлетворяват неравенствата

$$a \leq x \leq b,$$

$$0 \leq y \leq f(x).$$




Черт. 9

За да пресметнем лицето $\sigma$, делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

и означаваме с $M_\nu$ и $m_\nu$ съответно точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{\nu-1}, x_\nu]$. Да разгледаме съответната голяма и съответната малка сума на Дарбу

очевидно покриват цялата графика $\Gamma$ на функцията $y=f(x)$ и следователно

$$\mu(\Gamma) \leq \sum_{\nu=1}^{n} (M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}), \tag{1}$$

където $\mu(\Gamma)$ означава горната мярка на Пеано — Жордан на графиката $\Gamma$ на функцията $y=f(x)$. От неравенството (1) получаваме

$$\mu(\Gamma) \leq \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon (x_\nu - x_{\nu-1}) = \varepsilon (b-a).$$

Както вземем пред вид, че положителното число $\varepsilon$ е произволно, а $\mu(\Gamma)$ е неотрицателно и не зависи от $\varepsilon$, получаваме $\mu(\Gamma)=0$.



$$S=\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}),$$

$$s=\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Очевидно имаме

$$s \leq \sigma \leq S.$$

Неравенството

$$\sigma \leq S$$

ни учи, че лицето $\sigma$ е една долна граница на множеството от големите суми $S$. Като вземем пред вид, че

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

е точната, т. е. най-голямата долна граница на тези суми, получаваме

$$\sigma \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

Аналогично намираме

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \sigma$$

или още

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \sigma \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

От друга страна, функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и следователно е интегруема в него, т. е.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

Това ни дава основание да заключим, че

$$\sigma = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

или още

$$\sigma=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Пример. Да сѐ намери лицето $\sigma$ на елипсата

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ако означим с $I$ лицето на половината от елипсата, която е разположена над оста $x$, имаме

$$\sigma=2I$$

и следователно

$$\sigma=2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx.$$

Полагаме $x=a\cos t$. Това ни дава

$$\sigma=2ab\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=$$

$$=2ab\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=2ab\left|\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right|_0^{\pi}=\pi ab.$$

В някои случаи е по-удобно да се търсят лицата, като си служим с полярните координати. Така с помощта на интеграли ние можем да намерим лицето на сектор, дефиниран с неравенствата

$$\alpha\leq\theta\leq\beta,$$

$$\rho\leq f(\theta),$$

където $\rho$ и $\theta$ са полярни координати, $f(\theta)$ е една непрекъсната и неотрицателна функция в затворения интервал $\alpha\leq\theta\leq\beta$, дължината на който не надминава $2\pi$ (вж. черт. 10).

Ще започнем с най-простия случай, когато имаме кръговия сектор

$$0\leq\theta\leq\alpha,$$

$$\rho\leq r,$$

където $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ (вж. черт. 11).

В декартови координати този сектор може да се дефинира с помощта на неравенствата

$$0\leq x\leq r,$$

$$0\leq y\leq\varphi(x),$$

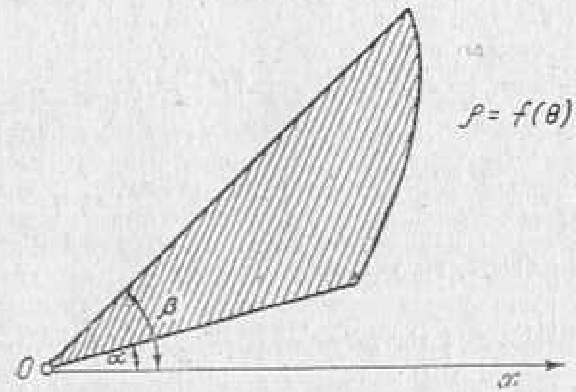


където[1]

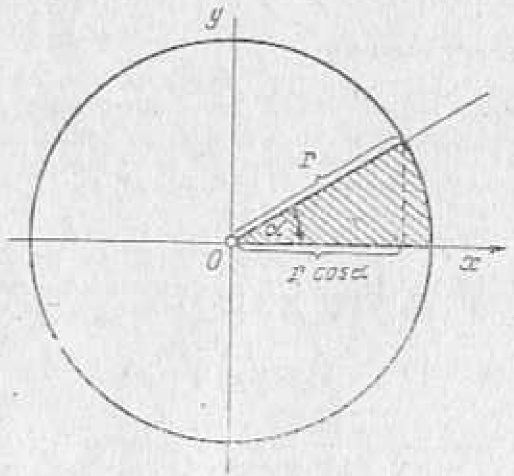
$$\varphi(x)=x\operatorname{tg}\alpha$$

при $0\leq x\leq r\cos\alpha$ и

$$\varphi(x)=\sqrt{r^2-x^2}$$




Черт. 10




Черт. 11

при $r\cos\alpha\leq x\leq r$. Това се вижда веднага геометрически[2] (вж.

[1] Или другояче $\varphi(x)$ е по-малкото от двете числа $x\operatorname{tg}\alpha$ и $\sqrt{r^2-x^2}$.

[2] Но може, разбира се, да се установи чисто аналитично например по следния начин: от неравенствата $0\leq\theta\leq\alpha<\frac{\pi}{2}$ получаваме

$$y=\rho\sin\theta=x\operatorname{tg}\theta\leq x\operatorname{tg}\alpha,$$

черт. 11). Този резултат ни позволява да пресметнем лицето $\sigma$ на разглеждания сектор по следния начин:

$$\sigma=\int_0^r \varphi(x)\,dx=\int_0^{r\cos\alpha}\varphi(x)\,dx+\int_{r\cos\alpha}^{r}\varphi(x)\,dx=$$

$$=\int_0^{r\cos\alpha} x\,\mathrm{tg}\,\alpha\,dx+\int_{r\cos\alpha}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=$$

$$=\frac{r^2\cos\alpha\sin\alpha}{2}+\int_{r\cos\alpha}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx.$$

Полагайки $x=r\cos t$, получаваме

$$\sigma=\frac{r^2\cos\alpha\sin\alpha}{2}+r^2\int_0^{\alpha}\sin^2 t\,dt=\frac{r^2\cos\alpha\sin\alpha}{2}+\frac{r^2}{2}\int_0^{\alpha}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{r^2\alpha}{2}.$$

---

а от неравенството $\rho\leq r$ получаваме

$$y=\sqrt{\rho^2-x^2}\leq\sqrt{r^2-x^2}$$

и следователно

$$y\leq\varphi(x).$$

От друга страна, очевидно имаме $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x\leq r$, т. е.

(2) $$0\leq x\leq r,$$
$$0\leq y\leq\varphi(x).$$

Обратно, ако ни са дадени неравенствата (2), то

$$y\leq x\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$
$$y\leq\sqrt{r^2-x^2},$$

откъдето намираме

$$\sin\theta\leq\cos\theta\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

(3) $$\rho\sin\theta\leq\sqrt{r^2-\rho^2\cos^2\theta},$$

където можем да предполагаме, че $0\leq\theta\leq 2\pi$. От друга страна, като вземем пред вид неравенствата $x\geq 0, y\geq 0$, получаваме $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$. Този резултат и неравенствата (3) ни дават

$$\mathrm{tg}\,\theta\leq\mathrm{tg}\,\alpha,$$
$$\rho^2\sin^2\theta\leq r^2-\rho^2\cos^2\theta$$

и следователно

$$\theta\leq\alpha,$$
$$\rho\leq r.$$



След всичко направено ние можем без труд да пресметнем и лицето $S$ на кръговия сектор

(4) $$\alpha\leq\theta\leq\beta,$$

стига да имаме $\beta<\frac{\pi}{2}$. И наистина

(5) $$S=\frac{r^2\beta}{2}-\frac{r^2\alpha}{2}=\frac{r^2}{2}(\beta-\alpha).$$

При направения извод ние предполагахме, че секторът (4) е разположен в първия квадрант. Ние можем обаче да се освободим от това предположение, като вземем пред вид, че от дефиницията, която дадохме на понятието лице, се вижда, че всеки две сходни точкови множества имат една и съща горна мярка на Пеано — Жордан (и са едновременно измерими или едновременно неизмерими). По този начин ние виждаме, че формулата (5) е валидна и тогава, когато секторът не е разположен в първия квадрант, обаче е налице условието $\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$. Най-сетне и това условие не е съществено, защото какъвто и да бъде секторът (4), подчинен на единственото условие да имаме $\beta-\alpha\leq 2\pi$, той може да бъде представен като сума от сектори, централните ъгли на които са по-малки от $\frac{\pi}{2}$. По този начин ние установихме общата валидност на формулата (5).

След тази подготовка ние можем да преминем към общата задача за пресмятане на лицето $\sigma$ на сектор, зададен в полярни координати с помощта на неравенствата

$$\alpha\leq\theta\leq\beta,$$
$$\rho\leq f(\theta),$$

където $f(\theta)$ е една непрекъсната и неотрицателна функция в затворения интервал $[\alpha,\beta]$, дължината на който не надминава $2\pi$ (вж. черт. 10).

За тази цел делим интервала $[\alpha,\beta]$ на подинтервали с помощта на точките

$$\alpha=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n=\beta$$

и означаваме с $R_\nu$ и $r_\nu$ точната горна и точната долна граница на $f(\theta)$ в подинтервала $[\theta_{\nu-1},\theta_\nu]$. Очевидно секторът

(6) $$\theta_{\nu-1}\leq\theta\leq\theta_\nu,$$
$$\rho\leq f(\theta)$$

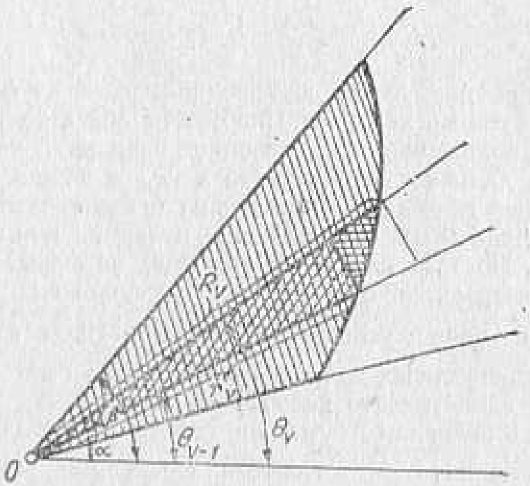
лежи изцяло в сектора

(7) $$\theta_{\nu-1}\leq\theta\leq\theta_\nu,$$
$$\rho\leq R_\nu$$

и съдържа изцяло сектора

(8) $$\theta_{\nu-1} \leq \theta \leq \theta_\nu, \quad \rho \leq r_\nu$$

(вж. черт. 12).




Черт. 12

Да означим със $\sigma_\nu$ лицето на сектора (6). В такъв случай, сравнявайки лицата на трите сектора (6), (7), (8), получаваме неравенствата

$$\frac{r_\nu^2}{2}(\theta_\nu - \theta_{\nu-1}) \leq \sigma_\nu \leq \frac{R_\nu^2}{2}(\theta_\nu - \theta_{\nu-1})$$

и следователно

(9) $$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{r_\nu^2}{2}(\theta_\nu - \theta_{\nu-1}) \leq \sigma \leq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{R_\nu^2}{2}(\theta_\nu - \theta_{\nu-1}).$$

От друга страна, не е трудно да се види, че $\frac{R_\nu^2}{2}$ е точната горна, а $\frac{r_\nu^2}{2}$ е точната долна граница на функцията $\frac{f^2(\theta)}{2}$ в подинтервала $[\theta_{\nu-1}, \theta_\nu]$. Неравенствата (9) ни учат, че лицето $\sigma$ е една долна граница на множеството на големите суми на Дарбу за функцията $\frac{f^2(\theta)}{2}$. Като вземем пред вид, че



$$\int_\alpha^\beta \frac{f^2(\theta)}{2}\, d\theta$$

е точната, т. е. най-голямата долна граница на тези суми, получаваме

(10) $$\sigma \leq \int_\alpha^\beta \frac{f^2(\theta)}{2}\, d\theta.$$

Аналогично намираме

(11) $$\int_\alpha^\beta \frac{f^2(\theta)}{2}\, d\theta \leq \sigma.$$

От друга страна, функцията $\frac{f^2(\theta)}{2}$ е непрекъсната и следователно е интегруема, т. е.

$$\underline{\int_\alpha^\beta} \frac{f^2(\theta)}{2}\, d\theta = \overline{\int_\alpha^\beta} \frac{f^2(\theta)}{2}\, d\theta.$$

Това равенство и неравенствата (10) и (11) ни дават

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\, d\theta.$$

Пример 1. Да се намери лицето $\sigma$ на кардиоидата

$$\rho = a(1+\cos\theta), \quad a > 0$$

(вж. черт. 13).

Решение.

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2\, d\theta =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left|\theta + 2\sin\theta\right|_0^{2\pi} + \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta =$$

$$= a^2\pi + \frac{a^2}{2}\left|\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right|_0^{2\pi} =$$

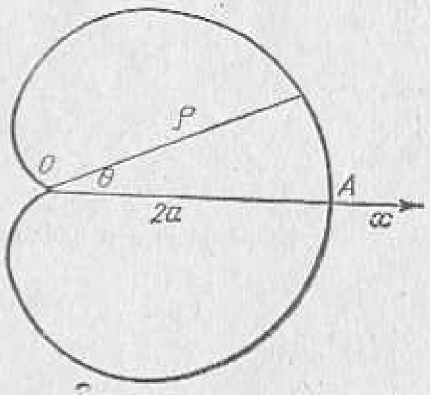
$$= a^2\pi + \frac{a^2\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}a^2.$$

**Пример 2.** Уравнението на Декартовия лист

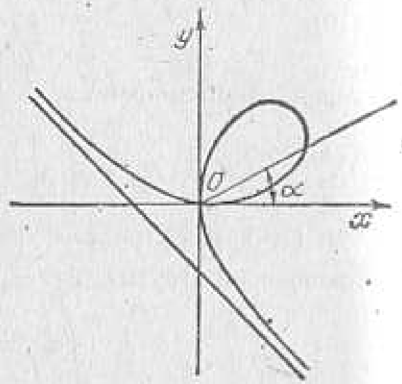
$$x^3+y^3-3axy=0, \quad a>0$$

в полярна координатна система е

$$\rho=\frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}$$




Черт. 13




Черт. 14

и следователно лицето $\sigma$ на сектора (вж. черт. 14)

$$0\leq\theta\leq\alpha,$$

$$\rho\leq\frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta},$$

където $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, ще бъде

$$\sigma=\frac{9a^2}{2}\int_0^\alpha\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}\,d\theta=\frac{9a^2}{2}\int_0^\alpha\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=$$

$$=\frac{9a^2}{2}\int_0^\alpha\frac{\operatorname{tg}^2\theta\,d\operatorname{tg}\theta}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}=\frac{3a^2}{2}\int_0^\alpha\frac{d\operatorname{tg}^3\theta}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}=$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^\alpha(1+\operatorname{tg}^3\theta)^{-2}\,d(1+\operatorname{tg}^3\theta)=-\frac{3a^2}{2}\left.\frac{1}{1+\operatorname{tg}^3\theta}\right|_0^\alpha=\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}^3\alpha}{1+\operatorname{tg}^3\alpha}.$$

Специално при $\alpha=\frac{\pi}{2}$ получаваме, след като извършим граничен преход,

$$\sigma=\frac{3a^2}{2}.$$



### Задачи

1. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от параболата $y^2=2px$, $p>0$, и от правата $y=ax$, $a>0$.

Отговор. $\frac{2}{3}\frac{p^2}{a^3}$.

2. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от параболата $y^2=2px$, $p>0$, и кривата $y^2=\frac{8(x-p)^3}{27p}$.

Отговор. $\frac{88}{15}p^2\sqrt{2}$.

3. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от астроидата

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \quad a>0.$$

Отговор. $\frac{3}{8}a^2\pi$.

4. Да се пресметне лицето на частта от равнината, заградена от верижката

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad a>0,$$

от абсцисната ос и от правите $x=0$, $x=p$, където $p>0$.

Отговор. $a^2\frac{e^{\frac{p}{a}}-e^{-\frac{p}{a}}}{2}$.

5. Да се пресметне лицето на частта от равнината, заградена от лемнискатата на Бернули (Bernoulli):

$$\rho^2=a^2\cos 2\theta.$$

Отговор. $a^2$.

6. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от кривата $\rho=a\sin 2\theta$, $a>0$.

Отговор. $\frac{a^2\pi}{4}$.

7. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от елипсата

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

и от кривата

$$(x^2+y^2)^2-a^2x^2-b^2y^2=0, \quad a>0,\ b>0.$$

Упътване. Въведете полярни координати.

Отговор. $\frac{\pi}{2}(a-b)^2$.

8. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от един свод на циклоидата

$$x=a(t-\sin t),$$
$$y=a(1-\cos t),$$

където $0\leq t\leq 2\pi$, и оста $x$.

Отговор. $3\pi a^2$.