Очевидно имаме

(1) $$|R_n| \leqq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Изразът $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ представлява общ член на един сходящ ред (при $x=0$ това се вижда директно, а при $x \neq 0$ се установява с помощта на критерия на Даламбер) и следователно клони към нула, когато n расте неограничено и x е фиксирано. От неравенството (1) заключаваме, че и остатъчният член R_n клони към нула, когато n расте неограничено и x е фиксирано. Полученият резултат ни учи, че функцията $\sin x$ е развиваема в Маклоренов ред при всички стойности на x и

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Сега ще разгледаме въпроса за развиваемостта в степенен ред на функцията $g(x) = \cos x$. Очевидно

$$g(x)=\cos x,\ g'(x)=-\sin x,\ g''(x)=-\cos x,\ g'''(x)=\sin x,\ g^{IV}(x)=\cos x, \ldots,$$

откъдето

$$g(0)=1,\quad g'(0)=0,\quad g''(0)=-1,\quad g'''(0)=0,\quad g^{IV}(0)=1, \ldots$$

и следователно Маклореновото развитие, което ни интересува, е

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$

Ще покажем, че този ред е сходящ при всяко x и сумата му е $\cos x$. За тази цел разглеждаме остатъчния член

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right).$$

Очевидно

$$|R_n| \leqq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ние обаче вече видяхме, че изразът $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ клони към нула, когато x е фиксирано, и n расте неограничено (тъй като е общ член на един сходящ ред). Оттук следва, че остатъчният член R_n клони към нула, когато фиксираме x и оставим n да расте неограничено. С това доказахме, че функцията $\cos x$ е развиваема в степенен ред при всички стойности на x и

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

ГЛАВА III

ЕЛЕМЕНТАРНИ ТРАНСЦЕНДЕНТНИ ФУНКЦИИ

§ 1. Дефиниция на показателната функция

В този параграф ще търсим функции, които, тъй да се каже, се възпроизвеждат при действието диференциране. По-точно ние ще търсим функции $F(x)$, които са дефинирани и диференцуеми при всяко x и при всяко x удовлетворяват условието

(1) $$F'(x) = F(x).$$

Константата нула е една такава функция. Нас обаче това тривиално решение не ни интересува. Ние ще търсим функции, удовлетворяващи условието (1), които не се анулират тъждествено, т. е. такива, които поне при една стойност на аргумента приемат различна от нула стойност. За да намерим всички тия функции, ще си поставим първо по-специална задача — да намерим всички функции $f(x)$ (дефинирани и диференцуеми за всяко x), които удовлетворяват както условието

$$f'(x) = f(x),$$

така още и допълнителното условие $f(0)=1$. Разбира се, ние не знаем дали така поставената задача има решение (въпрос за съществуване на решението), нито дали решението е само едно (въпрос за единственост на решението). Не ще съмнение, че не всяка задача има решение. Така например, ако търсим просто число, което се дели без остатък на 4, очевидно няма да имаме решение. Ще отговорим (утвърдително) едва в края на този параграф на въпроса за съществуване на решението на интересуващата ни задача, а засега ще започнем да изучаваме задачата, като изхождаме от предположението (за което не знаем дали е вярно), че тя има решение.

И така нека $f(x)$ е функция, дефинирана и диференцуема за всяко x, за която $f'(x)=f(x)$ и $f(0)=1$. Ще покажем, че за функцията $f(x)$ е в сила равенството

$$f(x)\,f(y) = f(x+y)$$

при всеки избор на числата x и y. За да докажем това, фиксираме две числа x и y, полагаме $x+y=a$ и си образуваме помощната функция на t

$$\varphi(t) = f(t)\,f(a-t).$$

Очевидно имаме

$$\varphi'(t)=f'(t)f(a-t)+f(t)[f(a-t)]'=f'(t)f(a-t)-f(t)f'(a-t)=$$
$$=f(t)f(a-t)-f(t)f(a-t)=0,$$

което показва, че функцията $\varphi(t)$ е константа. И така при всички стойности на t имаме

$$\varphi(t)=\varphi(0)$$

или

$$f(t)f(a-t)=f(0)f(a)=f(a).$$

Като изберем специално $t=x$, получаваме

$$f(x)f(y)=f(x+y).$$

Сега ще докажем, че функцията $f(x)$ не се анулира при никоя стойност на x. И наистина, ако допуснем, че в някоя точка x_0 имаме $f(x_0)=0$, заключаваме, че

$$f(x_0)f(-x_0)=0.$$

Като вземем под внимание, от друга страна, че

$$f(x_0)f(-x_0)=f(x_0-x_0)=f(0),$$

намираме

$$f(0)=f(x_0)f(-x_0)=0,$$

което противоречи на условието $f(0)=1$. При това доказателство ние съществено се възползувахме от това, че функцията $f(x)$ е дефинирана за всички стойности на x, а следователно и в точката $-x_0$.

След като установихме, че функцията $f(x)$ не се анулира никъде, ние вече лесно можем да докажем, че всичките ѝ стойности са съществено положителни числа. И наистина при $x=0$ стойността на функцията е 1 и следователно е положителна. Ако допуснем, че има точка x_1, в която $f(x_1)<0$, то в краищата на интервала $[0, x_1]$ непрекъснатата функция $f(x)$ (тя е непрекъсната, защото е диференцуема) ще приема стойности с противни знаци и следователно съгласно една теорема за непрекъснатите функции трябва да се анулира поне в една точка от интервала $[0, x_1]$. Ние обаче знаем, че $f(x)$ никъде не се анулира.

От доказаното следва, че функцията $f(x)$ е растяща. И наистина $f'(x)=f(x)$ и следователно $f'(x)>0$.

Не е трудно да се установи, че при всички стойности на x е в сила равенството

$$f(-x)=\frac{1}{f(x)}.$$

Това се вижда непосредствено от следната верига равенства:

$$f(-x)f(x)=f(-x+x)=f(0)=1.$$

За да пресметнем $f(1)$, ще използуваме формулата на Маклорен

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\dots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+$$
$$+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x).$$

Като вземем под внимание, че при всички цели неотрицателни стойности на k имаме $f^{(k)}(x)=f(x)$, намираме $f^{(k)}(0)=1$ и $f^{(n+1)}(\theta)=f(\theta)$ и следователно при $x=1$

$$f(1)=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}+\frac{f(\theta)}{(n+1)!}.$$

От друга страна, функцията $f(x)$ е положителна, монотонно растяща и $0<\theta<1$. Въз основа на това заключаваме, че

$$0<\frac{f(\theta)}{(n+1)!}<\frac{f(1)}{(n+1)!}$$

и следователно

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\theta)}{(n+1)!}=0.$$

Това ни позволява да твърдим, че

$$f(1)=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots,$$

т. е.

$$f(1)=e.$$

Сега вече лесно могат да се пресметнат стойностите на функцията $f(n)$ за цели стойности на n. И наистина нека n е цяло положително число. В такъв случай

$$f(n)=f(1+1+\dots+1)=f(1)f(1)\dots f(1)=[f(1)]^n=e^n.$$

Ако n е цяло отрицателно число, то $-n$ е цяло положително число и следователно

$$f(n)=\frac{1}{f(-n)}=\frac{1}{e^{-n}}=e^n.$$

При $n=0$ имаме $f(0)=e^0$, защото $f(0)=1$ и $e^0=1$.

Ние установихме вече много свойства на функцията $f(x)$, но все още не сме дали отговор на двата основни въпроса, които ни интересуват — въпроса за съществуването и въпроса за единствеността на $f(x)$. Сега ще отговорим на по-простия и по-малко интересния въпрос — на въпроса за единственост. Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две функции, дефинирани и диференцуеми за всяко x и удовлетворяващи условията

$$f'(x)=f(x),\quad g'(x)=g(x),\quad f(0)=1,\quad g(0)=1.$$

Образуваме си помощната функция

$$\varphi(x)=\frac{g(x)}{f(x)}.$$

Функцията $\varphi(x)$ е дефинирана и диференцуема за всяко x, защото, както знаем, $f(x)$ никъде не се анулира. Очевидно имаме

$$\varphi'(x)=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f^2(x)}=\frac{g(x)f(x)-g(x)f(x)}{f^2(x)}=0.$$

От това заключаваме, че функцията $\varphi(x)$ е константа, т. е. за всяко x имаме

$$\varphi(x)=\varphi(0)$$

или

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(0)}{f(0)}=1,$$

откъдето $g(x)=f(x)$. С това е доказано, че има най-много една функция, удовлетворяваща нашите условия (но дали въобще има такава функция, ние все още не знаем).

Макар и да е напълно задоволителен отговорът на въпроса за единственост, ние ще дадем сега още едно решение на същия въпрос. Новото решение ще има това предимство, че то ще ни даде същевременно и степенното развитие на функцията $f(x)$.

Очевидно имаме

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots,$$

откъдето

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=1.$$

Въз основа на това заключаваме, че Маклореновото развитие на функцията $f(x)$ е

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

Това развитие е сходящо при всички стойности на x и сумата му е $f(x)$. За да докажем това, разглеждаме остатъчния член

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f(\theta x).$$

Функцията $f(x)$ обаче е растяща. Въз основа на това и въз основа на неравенството $\theta x\leqq|x|$ заключаваме, че $f(\theta x)\leqq f(|x|)$.

Това ни дава право да пишем

$$|R_n|=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}f(\theta x)\leqq\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}f(|x|).$$

Изразът $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}f(|x|)$ обаче представлява общият член на един сходящ ред (при $x\neq 0$ това се вижда с помощта на критерия на Даламбер, а при $x=0$ това е ясно непосредствено) и следователно при фиксирано x клони към нула, когато n расте неограничено. От това заключаваме, че R_n също клони към нула — нещо, което е достатъчно, за да твърдим, че $f(x)$ е развиваема в Маклоренов ред при всички стойности на x и

$$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

За да получим повторно отговор на въпроса за единственост, да означим с $g(x)$ една произволна функция, дефинирана и диференцуема за всички стойности на x, за която

$$g'(x)=g(x)\quad\text{и}\quad g(0)=1.$$

Като извършим и за нея същите разсъждения, с помощта на които получихме степенното развитие на $f(x)$, ще получим

$$g(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

откъдето заключаваме, че $f(x)=g(x)$.

Преминаваме към въпроса за съществуване. Независимо от това, което знаем за степенното развитие на функцията $f(x)$, образуваме степенния ред

(2) $$\varphi(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

Той е сходящ за всяко x, както това се вижда, като приложим при $x\neq 0$ (при $x=0$ сходимостта на реда (2) се вижда непосредствено) критерия на Даламбер към реда с положителни членове

$$1+\frac{|x|}{1!}+\frac{|x|^2}{2!}+\frac{|x|^3}{3!}+\cdots$$

И така функцията $\varphi(x)$ е дефинирана за всички стойности на x. Както знаем от теоремата за почленно диференциране на степенни редове, тази функция е диференцуема за всички стойности на x и

$$\varphi'(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

Полученият резултат ни учи, че $\varphi'(x)=\varphi(x)$. От друга страна, очевидно имаме $\varphi(0)=1$. С това ние доказахме, че действително има функция $\varphi(x)$, която е дефинирана и диференцуема за всяко x и удовлетворява условията

$$\varphi'(x)=\varphi(x),\quad \varphi(0)=1.$$

По-горе доказахме, че ако функцията $f(x)$ е дефинирана, диференцуема за всяко x и удовлетворява условията

$$f'(x)=f(x),\ f(0)=1,$$

то при цели стойности на n имаме $f(n)=e^n$. В този курс предполагаме, че степента e^n е дефинирана само за цели стойности на n. Напротив, функцията $f(x)$ е дефинирана за всички стойности на x. Ето защо за в бъдеще тази функция ще означаваме със символа e^x и тогава, когато x не е цяло число. Тази функция се нарича показателна функция (или както понякога се казва, експоненциална функция).

Да резюмираме по-главните свойства на показателната функция, като си служим с току-що въведеното означение:

1) $(e^x)'=e^x$.
2) $e^0=1$.
3) Събирателна теорема

$$e^x e^y=e^{x+y}.$$

4) Функцията e^x не се анулира за никоя стойност на x.
5) $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$.
6) Всичките стойности на функцията e^x са съществено положителни.
7) Функцията e^x е растяща.
8) Функцията e^x е развиваема при всяко x в степенен ред:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

Специално при $x=1$ това развитие преминава в познатото вече на читателя развитие

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

9) От степенното развитие на e^x се вижда, че при $x>0$ имаме

$$e^x>x.$$

Това неравенство показва, че e^x расте неограничено, когато x расте неограничено.

10) Функцията e^x клони към нула, когато x дивергира към $-\infty$. За да се убедим в това, достатъчно е да вземем под внимание, че при положителни стойности на x имаме

$$0<e^{-x}=\frac{1}{e^x}<\frac{1}{x}.$$

Не е трудно да се намерят всички функции $F(x)$, които са дефинирани и диференцуеми навсякъде и удовлетворяват условието $F'(x)=-F(x)$, без да се иска да удовлетворяват още и допълнителното условие $F(0)=1$. За да намерим всички тези функции, образуваме си помощната функция $\varphi(x)=F(x)\,e^{-x}$. От $\varphi'(x)=F'(x)\,e^{-x}-F(x)\,e^{-x}=0$ заключаваме, че $\varphi(x)$ е константа и следователно

$$\varphi(x)=\varphi(0) \text{ или } F(x)\,e^{-x}=F(0), \text{ т. е. } F(x)=F(0)\,e^x.$$

И така всяка функция, удовлетворяваща посочените по-горе условия, се получава от e^x, като я умножим с константа. Обратно, каквато и да е константата c, функцията ce^x удовлетворява равенството $(ce^x)'=ce^x$.

§ 2. Ирационалност на числото e

Вече споменахме (вж. част I, гл. II, § 8), че числото

$$e=2{,}718281828459045\ldots,$$

дефинирано като граница на сходящата редица с общ член

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \tag{1}$$

е ирационално. Разбира се, ние можем да пресметнем това число с всяка желана точност, например, като си служим с израза (1) и дадем на n достатъчно голяма стойност (което е свързано с много дълги пресмятания) или (което е много по-удобно), като си служим с частичните суми на познатия вече на читателя ред

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

Разбира се, тези пресмятания с нищо не изясняват въпроса за рационалност или ирационалност на числото e.

Ще си поставим за задача да установим строго ирационалността на числото e. Доказателството ще извършим от противното. Да допуснем, че числото e може да се представи във вида

$$e=\frac{p}{q},$$

където p и q са две цели положителни числа, и да означим с n едно кое да е цяло число, по-голямо от q и от e. Въз основа на формулата на Тейлор получаваме

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}, \tag{2}$$

където θ е едно число между 0 и 1. Остатъчния член сме представили във формата на Лагранж. От равенството (2) получаваме, след като го умножим с $n!$ и разместим по подходящ начин членовете му,

$$\frac{e^\theta}{n+1}=\frac{n!\,p}{q}-\left[n!+\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}+\cdots+\frac{n!}{n!}\right]. \tag{3}$$

Полученият резултат ни учи, че числото $\frac{e^9}{n+1}$ е цяло (в дясната страна на равенството (3) имаме цяло число). Това обаче не е възможно, защото числото $\frac{e^9}{n+1}$ е по-малко от 1 (тъй като $n>e$ и следователно $n+1>e>e^9$) и е съществено положително (тъй като e^x, както знаем, приема само съществено положителни стойности).

В разгледания случай ние можахме лесно да установим ирационалността на интересуващото ни число. Има обаче случаи, когато подобни въпроси се оказват извънредно сложни. Така например редът

$$S=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\dots+\frac{1}{n^3}+\dots$$

е сходящ (защо?). Няма принципиална трудност за пресмятането на неговата сума S с всяка желана точност. Ето няколко първи десетични знака на тази сума:

$$S=1{,}202056903159594285 40\dots$$

Обаче ние не знаем дали това число е рационално, или не.

Задачи

1. Пресметнете числото e с 5 десетични знака, като си послужите с реда от предния параграф. Намерете една горна граница за грешката, която правите при тези пресмятания!

2. Намерете производната на $y=e^{-x^2}$.

Решение. Имаме да намерим производната на една функция от вида $y=e^{u(x)}$. В дадения случай $u(x)=-x^2$; като се възползуваме от правилото за диференциране на функция от функция, заключаваме, че $y'=e^u u'$. В дадения случай имаме $y'=e^{-x^2}(-x^2)'=-2xe^{-x^2}$.

3. Намерете производната на $y=e^{\sin 2x}$.

Отговор. $y'=2e^{\sin 2x}\cos 2x$.

4. Намерете границата

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$

Решение. Както знаем, производната на една функция $f(x)$ в една точка x_0 се дефинира като граница на отношението

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

когато x клони към x_0 (разбира се, чрез стойности, различни от x_0). Специално, ако изберем $f(x)=e^x$ и $x_0=0$, то получаваме

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{e^x-1}{x}.$$

Като вземем пред вид, че функцията e^x е диференцуема и че производната ѝ е e^x, заключаваме, че търсената граница съществува и

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=e^0=1.$$

§. 3. Аналитична дефиниция на тригонометричните функции

Читателят знае как по геометричен път се дефинират функциите $\sin x$ и $\cos x$. Тези функции могат обаче да се дефинират и чисто аналитично, без помощта на геометрията.

Това може да стане по различни начини. Ние тук ще следваме един път, аналогичен на пътя, по който въведохме показателната функция e^x. Както знаем, функциите $\sin x$ и $\cos x$, дефинирани по геометричен път, имат свойствата

$$(\sin x)'=\cos x,\qquad \sin 0=0;$$
$$(\cos x)'=-\sin x,\qquad \cos 0=1.$$

Ние ще изберем тези свойства за основни и без да се ползуваме от геометрията, ще докажем, че има една и само една двойка функции $S(x)$ и $C(x)$, дефинирани и диференцуеми за всяко x, които удовлетворяват условията

(1) $$\begin{cases} S'(x)=C(x), & S(0)=0;\\ C'(x)=-S(x), & C(0)=1.\end{cases}$$

Предварително ще покажем как с помощта на условията (1) могат да се изучават свойствата на тези функции. И така нека имаме две функции $S(x)$ и $C(x)$, които са дефинирани и диференцуеми за всяко x и удовлетворяват условията (1). Ще покажем най-напред, че

(2) $$S^2(x)+C^2(x)=1.$$

И наистина производната на функцията

$$\varphi(x)=S^2(x)+C^2(x)$$

е нула, както това се вижда от равенствата

$$\varphi'(x)=2S(x)S'(x)+2C(x)C'(x)=2S(x)C(x)-2C(x)S(x)=0.$$

Оттук заключаваме, че $\varphi(x)$ е константа и следователно за всяко x имаме

$$\varphi(x)=\varphi(0),$$

т. е.

$$S^2(x)+C^2(x)=S^2(0)+C^2(0)=0+1=1.$$

От така полученото равенство (2) заключаваме, че $S^2(x)\leq 1$ и $C^2(x)\leq 1$ и следователно

$$|S(x)|\leq 1 \quad\text{и}\quad |C(x)|\leq 1.$$

Функциите $S(x)$ и $C(x)$ удовлетворяват при всяко x и y равенствата

(3) $$S(x+y)=S(x)C(y)+S(y)C(x),$$
$$C(x+y)=C(x)C(y)-S(x)S(y).$$

За да докажем това, полагаме $x+y=a$ и образуваме двете помощни функции на t:

$$\varphi(t)=S(t)\,C(a-t)+S(a-t)\,C(t),$$
$$\psi(t)=C(t)\,C(a-t)-S(t)\,S(a-t).$$

Като диференцираме, получаваме

$$\varphi'(t)=\ \ C(t)\,C(a-t)+S(t)\,S(a-t)-C(a-t)\,C(t)-S(a-t)\,S(t)=0,$$
$$\psi'(t)=-S(t)\,C(a-t)+C(t)\,S(a-t)-C(t)\,S(a-t)+S(t)\,C(a-t)=0,$$

т. е. двете функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ са константи. По-специално имаме

$$\varphi(0)=\varphi(x) \text{ и } \psi(0)=\psi(x)$$

или

$$S(a)=S(x)\,C(a-x)+S(a-x)\,C(x),$$
$$C(a)=C(x)\,C(a-x)-S(x)\,S(a-x).$$

Като вземем под внимание, че $a=x+y$, получаваме формулите (3). Формулите (3) се наричат събирателни формули на тригонометричните функции.

Сега ще докажем, че функцията $C(x)$ е четна, а функцията $S(x)$ е нечетна. Това значи, че при всички стойности на x са в сила равенствата

$$C(-x)=C(x) \text{ и } S(-x)=-S(x).$$

За да докажем това, ще разгледаме равенствата (3) при $y=-x$. Така получаваме

$$0=S(x)\,C(-x)+C(x)\,S(-x), \tag{4}$$
$$1=C(x)\,C(-x)-S(x)\,S(-x).$$

Като умножим първото от тия равенства с $S(x)$, второто с $C(x)$ и съберем, получаваме

$$C(x)=C(-x).$$

Ако умножим първото от равенствата (4) с $C(x)$, второто с $S(x)$ и извадим, получаваме

$$-S(x)=S(-x).$$

И така установихме много свойства на функциите $S(x)$ и $C(x)$ които удовлетворяват условията (1), обаче все още не знаем дали такива функции има. (Ние си поставихме за задача да дадем чисто аналитично изследване на интересуващия ни въпрос и следователно не бива да се ползуваме от това, което знаем от геометрията!) За да по-

кажем, че има функции, удовлетворяващи условията (1), разглеждаме двата степенни реда

$$u(x)=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,$$
$$v(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

Тия редове са абсолютно сходящи при всички стойности на x, както това се вижда с помощта на критерия на Даламбер (критерия на Даламбер прилагаме за редовете

$$\frac{|x|}{1!}+\frac{|x|^3}{3!}+\frac{|x|^5}{5!}+\cdots,$$
$$1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

при $x\neq0$; при $x=0$ сходимостта е очевидна). Съгласно теоремата за почленно диференциране на степенните редове заключаваме, че двете функции $u(x)$ и $v(x)$ (които са дефинирани за всички стойности на x) са диференцуеми навсякъде и

$$u'(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots,$$
$$v'(x)=-\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

Оттук следва, че

$$u'(x)=v(x),$$
$$v'(x)=-u(x).$$

От друга страна, непосредствено се вижда, че $u(0)=0$ и $v(0)=1$. И така ние успяхме да намерим две функции $u(x)$ и $v(x)$, които удовлетворяват условията (1). С това отговорихме на интересуващия ни въпрос за съществуване, без да прибягваме до помощта на геометрията.

Сега вече знаем, че има функции $S(x)$ и $C(x)$, които удовлетворяват условията (1), обаче не знаем колко такива двойки има (въпрос за единственост). Както ще видим, съществува само една такава двойка. И наистина нека $f(x)$ и $g(x)$ са две функции, дефинирани и диференцуеми за всяко x, които удовлетворяват условията

$$f'(x)=g(x),\ f(0)=0,$$
$$g'(x)=-f(x),\ g(0)=1.$$

Образуваме си помощните функции

$$F(x)=S(x)\,g(x)-C(x)\,f(x),$$
$$G(x)=C(x)\,g(x)+S(x)\,f(x).$$

Като диференцираме, получаваме

$$F'(x)=C(x)g(x)-S(x)f(x)+S(x)f(x)-C(x)g(x)=0,$$
$$G'(x)=-S(x)g(x)-C(x)f(x)+C(x)f(x)+S(x)g(x)=0,$$

което показва, че двете функции $F(x)$ и $G(x)$ са константи. И така при всички стойности на x имаме

$$F(x)=F(0) \text{ и } G(x)=G(0)$$

или

$$(5)\qquad \begin{aligned} S(x)g(x)-C(x)f(x)&=0,\\ C(x)g(x)+S(x)f(x)&=1. \end{aligned}$$

Като умножим първото от тия две равенства с $S(x)$, второто с $C(x)$ и съберем, получаваме

$$(6)\qquad g(x)=C(x).$$

Ако умножим първото от равенствата (5) с $C(x)$, второто с $S(x)$ и извадим, получаваме

$$(7)\qquad f(x)=S(x).$$

Равенствата (6) и (7) ни учат, че не може да има повече от една двойка функции, които са дефинирани и диференцуеми при всички стойности на x и удовлетворяват условията (1).

Ние знаем, че дефинираните по геометричен път функции $\sin x$ и $\cos x$ удовлетворяват условията

$$(8)\qquad \begin{aligned} (\sin x)'&=\cos x, \qquad \sin 0=0,\\ (\cos x)'&=-\sin x, \qquad \cos 0=1. \end{aligned}$$

Като вземем под внимание току-що доказаната теорема за единственост, заключаваме, че при всички стойности на x имаме

$$S(x)=\sin x,$$
$$C(x)=\cos x.$$

За в бъдеще със $\sin x$ и $\cos x$ ще означаваме съответно двете функции $S(x)$ и $C(x)$, които удовлетворяват условията (1).

След всичко изложено досега можем да дадем следната чисто аналитична дефиниция на тригонометричните функции: $\sin x$ и $\cos x$ ще наричаме две функции, които са дефинирани и диференцуеми при всички стойности на x и които удовлетворяват условията (8).

След като са дефинирани двете функции $\sin x$ и $\cos x$, функциите $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ дефинираме с помощта на равенствата

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

По този начин функцията $\operatorname{tg} x$ е дефинирана за всички стойности на x, за които $\cos x\neq 0$, а функцията $\operatorname{ctg} x$ е дефинирана за всички стойности на x, за които $\sin x\neq 0$.

§ 4. Дефиниция на числото π и периодичност на тригонометричните функции

Да разгледаме уравнението

$$\cos x=0.$$

Ще докажем, че то има едно и само едно решение ξ, което удовлетворява неравенствата $0<\xi<2$. Съществуването на решението се установява просто, защото функцията $\cos x$ е непрекъсната и в краищата на интервала $[0, 2]$ приема стойности с противни знаци. И наистина

$$\cos 0=1>0$$

и

$$\cos 2=1-\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{4!}-\frac{2^6}{6!}+\ldots=\left(1-\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{4!}\right)-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2^{4n-2}}{(4n-2)!}-\frac{2^{4n}}{4n!}\right)=$$
$$=-\frac{1}{3}-\left(\frac{2^6}{6!}-\frac{2^8}{8!}\right)-\left(\frac{2^{10}}{10!}-\frac{2^{12}}{12!}\right)-\ldots=-\frac{1}{3}-\frac{2^6}{6!}\left(1-\frac{2^2}{7.8}\right)-$$
$$-\frac{2^{10}}{10!}\left(1-\frac{2^2}{11.12}\right)-\ldots<0.$$

И така непрекъснатата функция $\cos x$ действително приема в краищата на интервала $[0, 2]$ стойности с противни знаци. Това ни позволява да твърдим въз основа на една теорема за непрекъснатите функции, която доказахме по-рано, че уравнението

$$(1)\qquad \cos x=0$$

има поне един корен в интервала $(0, 2)$. Това уравнение не може да има повече от един корен в същия интервал. И наистина, ако уравнението (1) би имало две различни решения ξ_1 и ξ_2, лежащи в интервала $(0, 2)$, то съгласно теоремата на Рол бихме могли да заключим, че производната $(\cos x)'=-\sin x$ се анулира поне за една стойност на x между ξ_1 и ξ_2, а следователно и между 0 и 2. Това обаче е невъзможно, защото

$$\sin x=\frac{x}{1!}\left(1-\frac{x^2}{2.3}\right)+\frac{x^5}{5!}\left(1-\frac{x^2}{6.7}\right)+\ldots$$

и при $0<x<2$ всичките изрази, които са затворени в скоби, са съществено положителни и следователно $\sin x\neq 0$.

И така уравнението (1) има едно и само едно решение, което лежи в интервала $(0, 2)$. Обикновено числото 2ξ се означава с буквата π (четете — пи). Както ще видим по-късно, така дефинираната константа π играе много важна роля. Ние впоследствие ще покажем как можем да я пресметнем с всяка желана точност.

От равенството

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1,$$

като вземем пред вид, че $\cos\frac{\pi}{2}=0$, намираме $\sin^2\frac{\pi}{2}=1$; от друга страна, $0<\frac{\pi}{2}<2$, а ние знаем, че при всички стойности на x от интервала $(0, 2)$ функцията $\sin x$ приема положителни стойности. Това ни дава право да заключим, че

$$\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

С помощта на събирателните теореми намираме

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{2}+\cos x\sin\frac{\pi}{2}=\cos x,$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{2}-\sin x\sin\frac{\pi}{2}=-\sin x,$$

откъдето

$$\sin(x+\pi)=\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x,$$

$$\cos(x+\pi)=\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$$

и най-сетне

$$\sin(x+2\pi)=\sin[(x+\pi)+\pi]=-\sin(x+\pi)=-(-\sin x)=\sin x,$$

$$\cos(x+2\pi)=\cos[(x+\pi)+\pi]=-\cos(x+\pi)=-(-\cos x)=\cos x.$$

Често свойството, което изразяват последните две равенства, се формулира кратко, като се казва, че функциите $\sin x$ и $\cos x$ са периодични с период 2π.

Не е трудно да се покаже, че функциите $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ са периодични с период π. И наистина

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{ctg}(x+\pi)=\frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)}=\frac{-\cos x}{-\sin x}=\operatorname{ctg} x.$$

Задачи

1. Като изхождате от аналитичната дефиниция на тригонометричните функции докажете, че

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Решение. Както знаем, производната на една функция $f(x)$ в една точка x_0 се дефинира като граница на отношението

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

когато x клони към x_0 (разбира се, чрез стойности, различни от x_0). Специално, ако изберем $f(x)=\sin x$ и $x_0=0$, получаваме

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sin x}{x}.$$

Като вземем под внимание, че функцията $\sin x$ е диференцуема и че производната ѝ е $\cos x$, заключаваме, че търсената граница съществува и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\cos 0=1.$$

2. Като изхождате от аналитичната дефиниция на тригонометричните функции, докажете формулите:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x,$$

$$1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2},$$

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2},$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

§ 5. Хиперболични функции

Ние дефинирахме функциите $\sin x$ и $\cos x$ с помощта на условията

$$(\sin x)'=\cos x,\qquad \sin 0=0,$$
$$(\cos x)'=-\sin x,\qquad \cos 0=1.$$

Тук ще си поставим сродната задача да изучим функциите, които са дефинирани и диференцуеми за всяко x и удовлетворяват условията

$$\begin{cases} f'(x)=g(x), & f(0)=0,\\ g'(x)=f(x), & f(0)=1.\end{cases}\tag{1}$$

Засега ние не знаем дали изобщо има такива функции. Преди да разгледаме важния въпрос за съществуването на такива функции, ние ще се занимаем с по-простия въпрос за единственост. И така да допуснем, че има две функции $f(x)$ и $g(x)$, които са диференцуеми за всяко x и удовлетворяват условията (1). Като съберем двете равенства

$$f'(x)=g(x),$$
$$g'(x)=f(x),$$

получаваме

$$[f(x)+g(x)]'=g(x)+f(x),$$

т. е. функцията $f(x)+gx$ се възпроизвежда, така да се каже, при действието диференциране. При това очевидно имаме

$$f(0)+g(0)=0+1=1.$$

И така функцията $f(x)+g(x)$ не само се възпроизвежда при действието диференциране, но при $x=0$ приема стойност единица. Ние обаче знаем, че има само една функция с тия свойства и тая функция е показателната функция e^x. И така доказахме, че ако има две функции $f(x)$ и $g(x)$, които удовлетворяват условието (1), то

(2) $$f(x)+g(x)=e^x.$$

Образуваме си помощната функция

$$\varphi(x)=g(x)-f(x).$$

От равенствата (1) следва, че функцията $\varphi(x)$ удовлетворява равенството

$$\varphi'(x)+\varphi(x)=0.$$

Оттук, като умножим с e^x, получаваме

$$e^x\varphi'(x)+e^x\varphi(x)=0,$$

което може да се напише още във вида

$$[e^x\varphi(x)]'=0.$$

И така производната на функцията $e^x\varphi(x)$ е нула за всяко x. От това следва, че тази функция е константа, т. е. за всяко x имаме

$$e^x\varphi(x)=e^0\varphi(0)=g(0)-f(0)=1,$$

откъдето получаваме $\varphi(x)=e^{-x}$ или

(3) $$g(x)-f(x)=e^{-x}.$$

Като съберем и извадим почленно равенствата (2) и (3), получаваме

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

$$g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

Така ние получихме отговор на въпроса за единственост, който ни интересуваше. Ние доказахме именно, че няма други функции освен (евентуално) функциите

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2} \text{ и } \frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

които са дефинирани и диференцуеми за всяко x и удовлетворяват условията (1). Разсъжденията ние извършихме досега въз основа на предположението (за което не знаем още дали е вярно, или не), че има функции с тези свойства. Досега ние не знаем дали такива функции има, или не, но изследването на въпроса за единственост, което ние извършихме, все пак дава указание как бихме могли да открием какъв е отговорът (положителен или отрицателен) на въпроса за съществуването на решение. Достатъчно е да проверим дали функциите

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

удовлетворяват условията (1). Ако се случи тези функции да не удовлетворяват поне едно от поставените условия, можем да твърдим със сигурност, че задачата няма решение; ако пък се окаже, че намерените функции удовлетворяват всичките условия, то с това не само ще бъде показано съществуването на решението, но ние ще знаем също кое е то.

С директна проверка се установява, че функциите

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

$$g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

които са дефинирани и диференцуеми за всяко x, удовлетворяват условията (1). Тези две функции се означават често със знаците $\operatorname{sh}x$ (четете — синус хиперболикус или хиперболичен синус) и $\operatorname{ch} x$ (четете — косинус хиперболикус или хиперболичен косинус). И така

(4) $$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

Хиперболичните функции по своите свойства твърде много приличат на тригонометричните функции (читателят е забелязъл, че и дефиницията им прилича твърде много на дефиницията на тригонометричните функции). Тук ще разгледаме по-важните свойства на хиперболичните функции. Така

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1.$$

И наистина

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

При хиперболичните функции са в сила и събирателни теореми, аналогични на събирателните теореми, които имаме при тригонометричните функции. Тези теореми се изразяват със следните равенства:

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y+\operatorname{sh} y \operatorname{ch} x,$$
$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

Ние ще докажем първата от тези две формули. Като се възползуваме от равенствата (4), получаваме

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y+\operatorname{sh} y \operatorname{ch} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}=$$
$$=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\operatorname{sh}(x+y).$$

Упражнение 1. Докажете (като се ползувате например от равенствата (4)), че функцията $\operatorname{sh} x$ е нечетна, а функцията $\operatorname{ch} x$ е четна, т. е.

$$\operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh} x,\quad \operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch} x.$$

2. Докажете, че

$$\operatorname{ch} x \geq 1.$$

3. Докажете (като се ползувате например от равенствата (4)), че
$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

4. Докажете формулите

$$\operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$$
$$\operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x,$$
$$1+\operatorname{ch} x=2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2},$$
$$-1+\operatorname{ch} x=2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}.$$

5. Докажете, че при всички стойности на x

$$\operatorname{sh} x=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots,$$
$$\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

§ 6. Логаритмична функция

Със символа $\ln x$ (четете „естествен логаритъм x", или по-кратко — „логаритъм x") се означава число y, което удовлетворява уравнението

$$x=e^y. \tag{1}$$

Това уравнение сигурно няма решение, когато $x \leq 0$, защото, както знаем, стойностите на показателната функция e^y са съществено положителни, както и да избираме y. И така символът $\ln x$ не е дефиниран

нито при отрицателни стойности на x, нито при $x=0$. Както ще видим, при $x>0$ уравнението (1) има едно и само едно решение. И наистина ние знаем, че показателната функция e^y расте неограничено, когато y расте неограничено. Ето защо, след като е избрано едно число $x_0>0$, ние можем да намерим достатъчно голямо число y_1, за което

$$x_0<e^{y_1}.$$

От друга страна, показателната функция e^y клони към нула, когато y дивергира към $-\infty$. Това ни дава право да твърдим, когато избраното число x_0 е съществено положително, че може да се намери число y_2, което удовлетворява неравенството

$$e^{y_2}<x_0.$$

Разглеждаме затворения интервал $[y_2, y_1]$. В него функцията e^y е непрекъсната (защото тя е непрекъсната навсякъде). В единия край на този интервал стойността на функцията e^y е по-малка от x_0, а в другия е по-голяма от x_0. Като вземем пред вид една теорема за непрекъснатите функции, заключаваме, че има поне една точка y_0 в интервала $[y_2, y_1]$, която удовлетворява уравнението

$$x_0=e^{y_0}. \tag{2}$$

Повече от едно решение това уравнение не може да има. И наистина, ако допуснем, че η_1 и η_2 са две решения на уравнението (2) можем да приложим теоремата на Рол за интервала $[\eta_1, \eta_2]$ (тъй като $e^{\eta_1}=e^{\eta_2}=x_0$) и въз основа на тази теорема да заключим, че производната $(e^y)'=e^y$ се анулира поне за една стойност на y. А ние знаем, че показателната функция никъде не се анулира. С това достигнахме до противоречие, което се дължи на допускането, че уравнението (2) има повече от едно решение.

И така ние доказахме, че символът $\ln x$ е еднозначно дефиниран при всички съществено положителни стойности на x (това значи, че при всеки избор на положителното число x уравнението

$$x=e^y$$

има едно и само едно решение). Този символ представлява следователно една функция, добре дефинирана при $x>0$.

Както ще видим, функцията $\ln x$ е диференцуема във всички точки от дефиниционната си област и

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

(от нейната диференцуемост следва, както знаем, нейната непрекъснатост).

Нека x_0 е едно произволно положително число.

Избираме две произволни редици от положителни числа

$$(3)\qquad x'_1,\ x'_2,\ x'_3, \dots,\ x'_n, \dots,$$

$$(4)\qquad x''_1,\ x''_2,\ x''_3, \dots,\ x''_n, \dots,$$

които клонят към x_0 и удовлетворяват неравенствата

$$x'_n \leqq x_0 \leqq x''_n,\quad x''_n \neq x'_n.$$

Полагаме

$$\ln x'_n = y'_n,\quad \ln x''_n = y''_n.$$

В такъв случай

$$x'_n = e^{y'_n},\quad x''_n = e^{y''_n}$$

и следователно

$$(5)\qquad \frac{\ln x''_n - \ln x'_n}{x''_n - x'_n} = \frac{y''_n - y'_n}{e^{y''_n} - e^{y'_n}}.$$

Като приложим теоремата за крайните нараствания, получаваме

$$(6)\qquad e^{y''_n} - e^{y'_n} = (y''_n - y'_n)\, e^{\eta_n},$$

където

$$(7)\qquad \eta_n = y'_n + \theta_n (y''_n - y'_n),\quad 0 < \theta_n < 1.$$

Да положим $e^{\eta_n} = \xi_n$. В такъв случай равенството (5) добива вида

$$(8)\qquad \frac{\ln x''_n - \ln x'_n}{x''_n - x'_n} = \frac{1}{\xi_n}.$$

Като вземем пред вид, че $e^{y''_n} - e^{y'_n} = x''_n - x'_n > 0$ и $e^{\eta_n} > 0$, заключаваме от (6), че $y'_n < y''_n$. Оттук с помощта на (7) получаваме $y'_n < \eta_n < y''_n$ и следователно

$$e^{y'_n} < e^{\eta_n} < e^{y''_n},$$

откъдето

$$(9)\qquad x'_n < \xi_n < x''_n.$$

Но редиците (3) и (4) са сходящи и клонят към x_0; с помощта на (9) оттук заключаваме, че редицата

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3, \dots,\ \xi_n, \dots$$

е също сходяща и клони към x_0. От друга страна, $x_0 \neq 0$. Това ни позволява да твърдим, че редицата с общ член (8) е също сходяща и клони към $\frac{1}{x_0}$. С това ние доказахме, че функцията $\ln x$ е диференцуема в точката x_0 и че нейната производна е равна на $\frac{1}{x_0}$.

Ние можем да обобщим формулата

$$(10)\qquad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

като се възползуваме от правилото за диференциране на функция от функция по следния начин. Ако функцията $u(x)$ приема само положителни стойности в някой интервал и в някоя точка от този интервал тя има производна, то функцията

$$(11)\qquad y = \ln u(x)$$

също има производна в тази точка и

$$(12)\qquad y' = \frac{u'}{u}.$$

Читателят познава много от свойствата на логаритмичната функция. Така $\ln 1 = 0$. И наистина символът $\ln 1$ е добре дефиниран, защото числото 1 е съществено положително. Да положим $\ln 1 = x$. От дефиницията на логаритмичната функция имаме $1 = e^x$. От друга страна, ние знаем, че $e^0 = 1$. Като вземем пред вид, че показателната функция приема всяка своя стойност само веднъж (защото нейната производна никъде не се анулира), заключаваме, че $x = 0$. Нека читателят сам докаже, че $\ln e = 1$.

Също така без труд се установява, че при всички положителни стойности на x и y е в сила равенството

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

И наистина, ако положим $\ln x = \alpha$ и $\ln y = \beta$, имаме

$$x = e^{\alpha},$$

$$y = e^{\beta},$$

откъдето

$$xy = e^{\alpha+\beta}$$

и най-сетне

$$\ln(xy) = \alpha + \beta = \ln x + \ln y.$$

Аналогично се доказва, че при $x > 0$ и $y > 0$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y.$$

Задачи

1. Докажете, че при всички положителни стойности на x и y е в сила равенството

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y.$$

2. Докажете, че за всички стойности на x е в сила равенството

$$x = \ln (e^x).$$

3. Докажете, че за всички положителни стойности на x е в сила равенството

$$x = e^{\ln x}.$$

4. Докажете, че $\ln x$ дивергира към $+\infty$, когато x дивергира към $+\infty$.

5. Докажете, че $\ln x$ дивергира към $-\infty$, когато x клони към нула (разбира се, чрез стойности, различни от нула).

6. Докажете, че функцията $\ln x$ е растяща и приема всяка своя стойност само веднъж (понякога, за да изразим това свойство за логаритмичната функция, казваме кратко, че тя е една стриктно растяща функция).

7. Намерете производната на функцията $y = \ln (x^2+1)$.

Решение. Имаме да намерим производната на една функция от вида $y = \ln u(x)$ (в нашия случай $u(x) = (x^2+1)$). Като използуваме правилото за диференциране на логаритмичната функция и на функция от функция, получаваме

$$y' = \frac{2x}{x^2+1}.$$

8. Намерете границата

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln (1+x)}{x}.$$

Решение. Както знаем, производната на една функция $f(x)$ в една точка x_0 се дефинира като граница на отношението

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

когато x клони към x_0. Специално ако изберем $f(x) = \ln (1+x)$ и $x_0 = 0$, получаваме

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x} = \frac{\ln (1+x)}{x}.$$

Като вземем пред вид, че функцията $f(x) = \ln (1+x)$ е диференцуема при $x > -1$ и $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, заключаваме, че търсената граница съществува и

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln (1+x)}{x} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

9. Намерете границата

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln (1+\sin x)}{x}.$$

Решение. Като имаме пред вид предната задача, заключаваме, че каквато и да е редицата от числа

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots,$$

които принадлежат на дефиниционната област на функцията $f(x) = \frac{\ln (1+x)}{x}$ и клонят към нула, съответната редица

$$f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots$$

е сходяща и клони към 1.

Да изберем една редица от числа

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

които принадлежат на дефиниционната област на функцията

$$\varphi(x) = \frac{\ln (1+\sin x)}{x}$$

и клонят към нула. Да положим

$$y_n = \sin x_n.$$

В такъв случай $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, но $x_n \neq 0$, то при всички достатъчно големи стойности на n имаме $\sin x_n \neq 0$. Това ни дава основание да пишем при достатъчно големи стойности на n

$$\varphi(x_n) = \frac{\ln(1+y_n)}{y_n} \cdot \frac{\sin x_n}{x_n}.$$

Ние знаем обаче, че

$$\frac{\ln (1+y_n)}{y_n} \to 1$$

и

$$\frac{\sin x_n}{x_n} \to 1.$$

Оттук заключаваме, че функцията $\varphi(x)$ има граница при $x \to 0$ и че

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln (1+\sin x)}{x} = 1.$$

10. Намерете границата

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}.$$

Упътване.

$$\frac{\ln \cos x}{x^2} = \frac{\ln \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{x^2}.$$

11. Намерете границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Решение. При $x \neq 0$

$$a_n = e^{n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}.$$

Ние знаем, че $n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = x \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}$ клони към x, когато n расте неограничено (вж. задача 8). Като се възползуваме от непрекъснатостта на показателната функция, намираме $\lim a_n = e^x$. При $x = 0$ имаме $a_n = 1$ и следователно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

§ 7. Развиване на логаритмичната функция в степенен ред

Тук ще си поставим за задача да развием функцията $f(x)=\ln(1+x)$ по степените на x.

Като вземем пред вид, че

$$f(x)=\ln(1+x),$$
$$f'(x)=\frac{1}{1+x},$$
$$f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},$$
$$f'''(x)=\frac{1.2}{(1+x)^3},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

намираме

$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=-1, f'''(0)=1.2,\ldots, f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$

и следователно Маклореновият ред на функцията $\ln(1+x)$ е

$$(1)\qquad \frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

Този степенен ред е сходящ при $x=1$ (защо?) и следователно неговият радиус на сходимост не е по-малък от 1. От друга страна, той е разходящ при $x=-1$ (защо?) и следователно неговият радиус на сходимост не е по-голям от 1. И така редът (1) е сходящ в затворения отдясно и отворения отляво интервал $-1<x\leqq 1$ и вън от него е разходящ. Поради това ние ще се ограничим при разглеждането на реда (1) само с интервала $-1<x\leqq 1$.

Ще докажем, че сумата на реда (1) е равна на $\ln(1+x)$ при всички стойности на x, за които този ред е сходящ. За тази цел разглеждаме формулата на Маклорен

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n,$$

в която представяме остатъчния член R_n във формата на Коши:

$$R_n=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)=x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\cdot\frac{(-1)^n}{1+\theta x},\quad 0<\theta<1.$$

Като вземем пред вид, че $0<\theta<1$ и $-1<x\leqq 1$, заключаваме, че

$$\frac{1-\theta}{1+\theta x}>0$$

и

$$1-\frac{1-\theta}{1+\theta x}=\frac{\theta(x+1)}{1+\theta x}>0,$$

т. е.

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1,$$

нещо, което ни дава право да пишем

$$|R_n|\leqq\frac{|x|^{n+1}}{1+\theta x}.$$

Ако числото x се намира във вътрешността на интервала $(-1, 1)$, то $1+\theta x\geqq 1-|x|>0$ и следователно

$$|R_n|\leqq\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

откъдето заключаваме, че

$$\lim_{n\to\infty}R_n=0$$

или, което е същото, както се вижда от дефиницията на понятието сума на един ред,

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

Остана още неразгледан случаят $x=1$. Направените досега разсъждения тук не водят до целта. В този случай остатъчният член R_n ще представим във формата на Лагранж. Така получаваме

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)=\frac{(-1)^n}{(n+1)\ (1+\theta)^{n+1}},$$

т. е.

$$|R_n|<\frac{1}{n+1},$$

откъдето $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$ или, което е същото,

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

Ако в равенството

$$(2)\qquad \ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,$$

валидно при $-1<x\leqq 1$, заместим x с $-x$, получаваме

$$(3)\qquad \ln(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots,$$

което е валидно при $-1\leqq x<1$.

Ако извадим почленно двете равенства (2) и (3), намираме при $|x|<1$

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right).$$

Нека n е произволно цяло положително число. В такъв случай, ако положим $x=\frac{1}{2n+1}$, намираме

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$$

и следователно

$$\ln(n+1)-\ln n=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right].$$

Тази формула ни позволява да пресметнем последователно логаритмите (при основа e) на целите положителни числа с всяка желана точност. Така например при $n=1$

$$\ln 2=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3.9}+\frac{1}{5.9^2}+\cdots\right)$$

и пр.

§ 8. Дефиниция на степен, показателят на която не е цяло число

Ние дефинирахме степента e^x при всички стойности на x. Нека обаче изрично припомним, че степента a^x е дефинирана за нас при $a\neq e$ само когато x е цяло число. Сега ще дефинираме общо степента a^x при произволни съществено положителни стойности на основата a и при произволни реални стойности на показателя x, като под a^x при $a>0$ се условим да разбираме $e^{x\ln a}$. Изразът $e^{x\ln a}$ има смисъл при всички стойности на x, щом $a>0$, защото логаритмичната функция е дефинирана при всички съществено положителни стойности на аргумента, а показателната функция e^u е дефинирана при всички стойности на показателя u. Специално при $a=e$ имаме $\ln a=1$ и следователно дефинираната сега функция a^x съвпада с дефинираната в § 1 функция e^x, когато $a=e$. При цели положителни стойности на n получаваме въз основа на новата дефиниция

$$a^n=e^{n\ln a}=e^{\ln a}e^{\ln a}\dots e^{\ln a}=\underbrace{aa\dots a}_{n\text{ пъти}};$$

когато n е цяло отрицателно число, то числото $m=-n$ е цяло положително и

$$a^n=e^{n\ln a}=e^{-m\ln a}=\frac{1}{e^{m\ln a}}=\frac{1}{a^m}$$

и най-сетне

$$a^0=e^{0\ln a}=e^0=1.$$

И тъй както в случая, когато $a=e$ и показателят x е произволен, така и в случая, когато показателят x е цяло число, но основата a е съществено положително число, понятието степен, което ние въведохме сега, се редуцира на понятието степен в познатия ни смисъл от по-рано. При новата дефиниция обаче степента a^x има смисъл при всички съществено положителни стойности на a и при всички реални стойности на x. От това гледище понятието, което ние въвеждаме сега, е обобщение на познатото от по-рано понятие степен с положителна основа.

Като изхождаме от дефиниционното равенство

$$a^x=e^{x\ln a}, \tag{1}$$

заключаваме веднага, че

$$a^x a^y=a^{x+y},$$

$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},$$

$$(a^x)^y=a^{xy},$$

$$a^{-x}=\frac{1}{a^x},$$

$$a^1=a,$$

$$a^0=1.$$

Дефиниционното равенство (1) ни учи също така, че функцията a^x е диференцуема при всички стойности на x и

$$(a^x)'=(e^{x\ln a})'=e^{x\ln a}(x\ln a)'=e^{x\ln a}\ln a=a^x\ln a.$$

Ние знаем, че $\sqrt[n]{a}$ се дефинира при цели положителни стойности на n и $a\geq 0$ като неотрицателен корен на уравнението

$$x^n=a. \tag{2}$$

Това уравнение не може да има повече от един неотрицателен корен, защото в противен случай бихме заключили с помощта на теоремата на Рол, че има съществено положителна стойност на аргумента, за която се анулира производната $(x^n)'=nx^{n-1}$, нещо, което не е вярно. В настоящите лекции ние имахме случай вече няколко пъти да разглеждаме както този въпрос за единственост, така и съответния въпрос за съществуване на неотрицателно решение на уравнението (2). Сега ние имаме възможност да установим с други средства съществуването на интересуващото ни решение. При $a=0$ уравнението очевидно има решение — то е $x=0$. При $a>0$ уравнението (2) също има решение — то е $x=a^{\frac{1}{n}}$, както това се вижда от веригата равенства

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a^{\frac{1}{n}\cdot n}=a^1=a.$$

По този начин обобщеното понятие степен ни даде възможност да установим съществуването на $\sqrt[n]{a}$ при всички неотрицателни стойности на a. Като вземем пред вид, че дефиницията на $\sqrt[n]{a}$ е еднозначна, заключаваме, че

$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}.$$

От дефиниционното равенство (1) се получава веднага степенното развитие на функцията a^x по следния начин:

$$a^x=e^{x\ln a}=1+\frac{x}{1!}\ln a+\frac{x^2}{2!}(\ln a)^2+\cdots+\frac{x^n}{n!}(\ln a)^n+\cdots$$

Задачи

1. Намерете границата на редицата с общ член

$$a_n=n\left(\sqrt[n]{a}-1\right).$$

Решение. Като изхождаме от дефиницията на понятието производна, заключаваме, че изразът

$$\frac{a^h-1}{h}$$

има граница $h\to 0$ и тя е равна на стойността на производната на функцията a^x при $x=0$, т. е. на $\ln a$ (тъй като $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$). Като дадем на h редицата от стойности $h_n=\frac{1}{n}$, които клонят към нула, получаваме

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\ln a.$$

2. Да се намери границата

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Решение.

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}.$$

Като вземем под внимание, че

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

(вж. зад. 8, § 6), заключаваме въз основа на непрекъснатостта на показателната функция, че търсената граница съществува и

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

3. Да се намери границата

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}.$$

4. Да се намери границата с общ член

$$a_n=\left(\frac{\sqrt[n]{a}+1}{2}\right)^n,$$

където $a>0$.

Упътване. Положете

$$\sqrt[n]{a}-1=\alpha_n$$

и използувайте представянето

$$\ln a_n=\frac{\ln a}{2}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{\alpha_n}{2}\right)}{\frac{\alpha_n}{2}}\cdot\frac{\alpha_n}{\ln(1+\alpha_n)}.$$

Отговор.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{a}.$$

§ 9. Десетични логаритми и тяхната връзка с неперовите логаритми

Логаритмите, които ние въведохме в § 6 от част II на този курс, се наричат неперови или естествени логаритми. Тяхната основа представлява числото e. В практиката се употребява обаче логаритмична система при основа 10. Изобщо под $\log_a b$ се разбира решение на уравнението

$$b=a^x. \tag{1}$$

Като представим уравнението (1) във вида

$$b=e^{x\ln a}$$

и логаритмуваме двете му страни при основа e, получаваме

$$\ln b=x\ln a$$

или

$$\log_a b=\frac{\ln b}{\ln a}. \tag{2}$$

Ние знаем как се пресмятат неперовите логаритми на числата. Равенството (2) ни позволява, след като сме изчислили неперовите логаритми, да пресметнем логаритмите на числата при произволна положителна основа $a\neq 1$. Специално при $a=10$ имаме

$$\log_{10}b=\frac{\ln b}{\ln 10}.$$

Числото

$$\mu=\frac{1}{\ln 10}=0{,}43429448\ldots$$

се нарича модул на десетичните логаритми.

§ 10. Функцията x^n, когато показателят n не е цяло число

Когато показателят n не е цяло число, ние дефинирахме функцията x^n само при $x>0$. Като изхождаме от дефиниционното равенство

$$x^n = e^{n \ln x},$$

заключаваме, че функцията x^n е диференцуема при $x>0$ и

$$(x^n)' = (e^{n \ln x})' = e^{n \ln x}\,(n \ln x)' = e^{n \ln x}\,\frac{n}{x} = \frac{nx^n}{x} = nx^{n-1}.$$

Тази формула ни е вече известна, когато n е цяло число. Тя е валидна, както виждаме, и тогава, когато числото n не е цяло. Като пример да намерим производната на функцията $y=\sqrt{x}$. Тъй като $y=x^{\frac{1}{2}}$, то

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ние, разбира се, можем да обобщим формулата

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

като се възползуваме от теоремата за диференциране на функция от функция. Така, ако функцията $u(x)$ е диференцуема и приема положителни стойности, то функцията $[u(x)]^n$ е също диференцуема и

(1) $$(u^n)' = nu^{n-1}u'.$$

Като пример да намерим производната на функцията $y=\sqrt{x^2+1}$. Според (1) получаваме

$$y' = \left[(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}.2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

В заключение нека отбележим, че функцията x^n е монотонно растяща при $n \geq 0$ и е монотонно намаляваща при $n \leq 0$. Това се вижда от равенството $x^n = e^{n \ln x}$, като се вземе пред вид монотонността на показателната и на логаритмичната функция.

§ 11. Нютонов бином

Читателят знае, че при цели неотрицателни стойности на m е в сила формулата*

* Нека припомним, че по дефиниция $\binom{m}{0}=1$ и

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{k!}.$$

$$(1+x)^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \cdots + \binom{m}{m}x^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k.$$

Това развитие може да се представи във вид на безкрайния ред

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k,$$

защото

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\ldots2.1.0.(-1)\ldots(m-k+1)}{k!} = 0$$

при $k>m$. Ние ще изучим сега степенния ред

(1) $$\binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots$$

при предположение, че m не е цяло неотрицателно число. В този случай редът (1) е действително безкраен. Както ще видим, неговият радиус на сходимост е равен на единица. И наистина, като приложим критерия на Даламбер за реда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\binom{m}{k}x^k\right|,$$

получаваме* при $x \neq 0$

$$\lim_{k\to 0}\left|\binom{m}{k}x^k\right| : \left|\binom{m}{k-1}x^{k-1}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{|m-k+1|}{k}|x| = |x|,$$

откъдето заключаваме, че редът (1) е сигурно сходящ (дори абсолютно) при $|x|<1$. Напротив, при $|x|>1$ този ред е разходящ.

И наистина редът

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left|\binom{m}{k}x^k\right|}$$

е сходящ при $|x|>1$, както това се вижда с помощта на критерия на Даламбер, и следователно общият му член клони към нула. От това заключаваме, че общият член на реда (1) расте по абсолютна стойност неограничено, нещо, което осигурява неговата разходимост. От направените разсъждения е ясно, че радиусът на сходимост на реда (1) е равен на единица.

* Нека припомним, че m в разглеждания случай не е цяло неотрицателно. От това следва, че членовете на реда (1) са различни от нула при $x \neq 0$ и следователно ние можем да делим с тях.

Да означим с $f(x)$ сумата на реда (1). Функцията $f(x)$ е дефинирана във всички точки, в които редът (1) е сходящ. Тази функция е сигурно диференцуема във всички вътрешни точки на интервала $(-1, 1)$ и при това

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k\binom{m}{k}x^{k-1}.$$

Оттук намираме

$$(1+x)f'(x)=(1+x)\sum_{k=1}^{\infty} k\binom{m}{k}x^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+1)\binom{m}{k+1}+k\binom{m}{k}\right]x^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+1)\frac{m(m-1)\dots(m-k)}{(k+1)!}+k\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}\right]x^k=$$

$$=m\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k=m\,f(x)$$

и следователно

$$(1+x)f'(x)=mf(x).$$

От така полученото уравнение вече не е трудно да се определи функцията $f(x)$. За тази цел разглеждаме помощната функция

$$g(x)=\frac{f(x)}{(1+x)^m}.$$

Тази функция е добре дефинирана в отворения интервал $(-1, 1)$, защото $1+x>0$.

Очевидно имаме

$$g'(x)=\frac{f'(x)\,(1+x)^m-m(1+x)^{m-1}f(x)}{(1+x)^{2m}}=$$

$$=\frac{mf(x)\,(1+x)^{m-1}-m(1+x)^{m-1}f(x)}{(1+x)^{2m}}=0,$$

което ни учи, че функцията $g(x)$ е една константа. И така $g(x)=g(0)$. Като вземем пред вид, че

$$g(0)=\frac{f(0)}{1}=\binom{m}{0}=1,$$

намираме

$$f(x)=(1+x)^m$$

или, което е същото,

(2) $$(1+x)^m=\binom{m}{0}+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\cdots$$

И така формулата (2), която ние познавахме при цели неотрицателни стойности на m, се оказа валидна при всички стойности на m, когато $|x|<1$.

До същия резултат достигаме, като развием функцията

$$(1+x)^m$$

в Маклоренов ред:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots$$

За тази цел намираме най-напред

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\dots(m-n+1)\,(1+x)^{m-n},$$

откъдето

$$f^{(n)}(0)=m(m-1)\dots(m-n+1)$$

и следователно интересуващото ни развитие добива вида

$$1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots$$

Ние ще установим, че това развитие е сходящо и представлява функцията $(1+x)^m$ при $|x|<1$, като представим остатъчния член във формата на Коши:

$$R_n=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)=$$

$$=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}m(m-1)\dots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}=$$

$$=x^{n+1}\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{m-1}.$$

Като вземем пред вид, че $|x|<1$ и $0<\theta<1$, намираме

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1$$

и следователно

$$|R_n|\leq|x|^{n+1}\left|\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!}\right|(1+\theta x)^{m-1}.$$

От друга страна,

$$1-|x|\leq 1+\theta x\leq 1+|x|$$

и следователно множителят $(1+\theta x)^{m-1}$ притежава горна граница, която не зависи от n. В това можем да се убедим така. Да фиксираме x и да разгледаме функцията t^{m-1} в крайния и затворен интервал $1-|x|\leq t\leq 1+|x|$. Тази функция е дефинирана и непрекъсната в избрания интервал (защото $1-|x|>0$) и следователно е ограничена. Да означим с M една нейна горна граница. В такъв случай

$$(1+\theta x)^{m-1}\leq M$$

и следователно

$$|R_n|\leq |x|^{n+1}\left|\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!}\right| M.$$

От друга страна, редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x|^{n+1}\left|\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!}\right|$$

е сходящ при $|x|<1$, както това се установява с критерия на Даламбер при $x\neq 0$ (при $x=0$ това е тривиално.) Оттук заключаваме, че

$$\lim_{n\to\infty}|x|^{n+1}\left|\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!}\right|=0$$

и следователно

$$\lim R_n=0,$$

защото M не зависи от n.

§ 12. Сравняване растежа на функциите

$$a^x,\ x^n \text{ и } \ln x$$

Нека $a>1$ и $n>0$. В такъв случай трите функции

$$f(x)=a^x,\ g(x)=x^n,\ h(x)=\ln x$$

растат неограничено, когато x расте неограничено. И наистина колкото и голямо да е положителното число A, имаме

$$a^x>A \text{ при } x>\frac{\ln A}{\ln a},$$

$$x^n>A \text{ при } x>A^{\frac{1}{n}},$$

$$\ln x>A \text{ при } x>e^A.$$

Ще покажем обаче, че от разглежданите три функции показателната функция расте най-бързо, а логаритмичната функция расте най-бавно. Това значи, че отношенията

$$\frac{a^x}{x^n} \text{ и } \frac{x^n}{\ln x}$$

растат неограничено заедно с x. Нека k е едно цяло число, по-голямо от n. В такъв случай при $x>0$ (и $a>1$, $n>0$)

$$\frac{a^x}{x^n}=\frac{e^{x\ln a}}{x^n}=\frac{1+\frac{x\ln a}{1!}+\frac{x^2(\ln a)^2}{2!}+\dots+\frac{x^k(\ln a)^k}{k!}+\dots}{x^n}\geq$$

$$\geq\frac{\frac{x^k(\ln a)^k}{k!}}{x^n}=x^{k-n}\frac{(\ln a)^k}{k!}$$

и следователно отношението $\frac{a^x}{x^n}$ действително расте неограничено, когато x расте неограничено.

От друга страна, при $x>1$

$$\frac{x^n}{\ln x}=\frac{e^{n\ln x}}{\ln x}=\frac{1+\frac{n\ln x}{1!}+\frac{(n\ln x)^2}{2!}+\dots}{\ln x}\geq\frac{\frac{n^2\ln^2 x}{2!}}{\ln x}=\frac{n^2}{2}\ln x.$$

Този резултат ни учи, че частното $\frac{x^n}{\ln x}$ също расте неограничено, когато x расте неограничено. С това всичко е доказано.

§ 13. Обратни функции

Нека $f(t)$ е една функция, дефинирана в някое точково множество M. Да означим с N множеството от функционалните стойности на $f(t)$. Ще казваме, че $\varphi(x)$ е обратна функция* на $f(t)$, ако

1) дефиниционната област на $\varphi(x)$ е N;
2) стойностите на $\varphi(x)$ принадлежат на M;
3) при всички стойности на x от N е изпълнено равенството

$$f[\varphi(x)]=x. \tag{1}$$

Не е трудно да се убедим, че всяка функция има поне една обратна. И наистина да разгледаме уравнението

$$f(t)=x. \tag{2}$$

При всяко x от N това уравнение се удовлетворява при поне едно значение на t от M, защото всяко число от N е функционална стойност на $f(t)$. Да изберем при всяко x от N кое да е от решенията на (2) и да го означим с $\varphi(x)$. По такъв начин ние получаваме функция $\varphi(x)$, която е дефинирана навсякъде в N, приема стойности от M и удовлетворява условието

$$f(\varphi(x))=x,$$

т. е. ние намерихме една обратна функция на $f(t)$.

* Ние предпочитаме в случая да означаваме аргументите на $f(t)$ и $\varphi(x)$ с различни букви.

Читателят вижда, че третото условие изразява главния момент на дефиницията. Второто условие се налага само, за да можем да образуваме $f(\varphi(x))$, а първото условие е поставено, за да бъде дефиниционната област на $\varphi(x)$ по възможност по-голяма.

Да изясним смисъла на дефиницията с няколко примера.

Да разгледаме функцията $f_1(t)=t^2$, дефиниционната област M_1 на която е съставена от всичките реални числа. Множеството N_1 от функционалните стойности в случая представлява множеството на неотрицателните числа. Да разгледаме функцията $\varphi_1(x)=\sqrt{x}$, дефиниционната област на която е N_1. Стойностите на тази функция, разбира се, принадлежат на M_1, защото M_1 съдържа всичките реални числа. Най-сетне имаме

$$f_1[\varphi_1(x)]=(\sqrt{x})^2=x,$$

т. е. $\sqrt{x}$ е една обратна функция на функцията $f_1(t)$. С това не се изчерпват обаче всичките обратни функции на $f_1(t)$. И наистина нека $\varepsilon(x)$ е произволна функция, дефинирана при $x\geq 0$, която приема само стойностите 1 или -1 (при едни стойности на x можем да имаме $\varepsilon(x)=1$, а при други $\varepsilon(x)=-1$). Читателят лесно ще се убеди, че функцията $\varepsilon(x)\sqrt{x}$, дефинирана по този начин при всички неотрицателни стойности на x, е също обратна функция на $f_1(t)$.

Да разгледаме друг пример. Нека дефинираме $f_2(t)$ с условието $f_2(t)=t^2$ при неотрицателни стойности на t (при $t<0$ ние не дефинираме $f_2(t)$). Тази функция се различава от току-що разгледаната функция $f_1(t)$ по дефиниционната си област. Не е трудно да се види, че функцията $\sqrt{x}$ е обратна на функцията $f_2(t)$. Функцията $f_2(t)$ обаче няма друга обратна функция (читателят си спомня, че функцията $f_1(t)$ имаше безбройно много обратни). И наистина нека $g(x)$ е една обратна функция на $f_2(t)$. Това значи, че функцията $g(x)$ е дефинирана при всички неотрицателни стойности на аргумента си, приема неотрицателни стойности (защото стойностите ѝ трябва да принадлежат на дефиниционната област на $f_2(t)$) и удовлетворява уравнението

$$[g(x)]^2=x.$$

Ние обаче знаем, че при всеки избор на неотрицателното число x единственото неотрицателно число y, което удовлетворява уравнението

$$y^2=x,$$

е числото $\sqrt{x}$, т. е. $g(x)=\sqrt{x}$.

Като трети пример да разгледаме функцията $f_3(t)=e^t$, дефинирана с това равенство при всички реални стойности на t. Множеството N_3 от функционалните стойности на $f_3(t)$ е съставено от всички съществено положителни числа. Функцията $\varphi_3(x)=\ln x$, дефинирана по този начин при всички съществено положителни стойности на x, е една обратна функция на $f_3(t)$, защото дефиниционната област на $\varphi_3(x)$ е N_3, никоя от стойностите на $\varphi_3(x)$ не напуска дефиниционната област на $f_3(t)$ и най-сетне

$$f_3[\varphi_3(x)]=e^{\ln x}=x.$$

Не е трудно да се види, че $f_3(t)$ няма друга обратна функция. Казваме, че една функция $f(t)$ е **обратима**, когато тя притежава **само една** обратна функция. Така функциите $f_2(t)$ и $f_3(t)$, които ние разгледахме току-що като примери, са обратими. Напротив, функцията $f_1(t)$ не е обратима.

Ако функцията $f(t)$ е обратима и $\varphi(x)$ е нейната обратна функция, то при всички стойности на t от дефиниционната област на $f(t)$ имаме

$$\varphi[f(t)]=t. \tag{3}$$

И наистина да допуснем, че в някоя точка t_0 от дефиниционната област на $f(t)$ имаме

$$\varphi[f(t_0)]\neq t_0.$$

Да положим за краткост

$$f(t_0)=x_0$$

и да означим с M и N дефиниционните области съответно на $f(t)$ и $\varphi(x)$. Очевидно x_0 е една точка от N, защото N е едновременно множеството от функционалните стойности на $f(t)$. Да разгледаме помощната функция $\psi(x)$, дефинирана в множеството N по следния начин:

$$\psi(x)=\varphi(x) \text{ при } x\neq x_0$$
$$\psi(x)=t_0 \text{ при } x=x_0.$$

Стойностите на функцията $\psi(x)$ не напускат M, защото, от една страна, t_0 принадлежи на M, а, от друга страна, стойностите на $\varphi(x)$ също принадлежат на M. Не е трудно да се види, че функцията $\psi(x)$ е една обратна функция на $f(t)$. И наистина след всичко казано досега е достатъчно да покажем, че

$$f(\psi(x))=x$$

при всички стойности на x от N. Това може да се види така: при $x\neq x_0$ имаме

$$f(\psi(x))=f(\varphi(x))=x,$$

а при $x=x_0$ имаме

$$f(\psi(x_0))=f(t_0)=x_0.$$

И така функцията $\psi(x)$ е действително една обратна функция на $f(t)$. Тя обаче сигурно е различна от $\varphi(x)$, защото

$$\psi(x_0)=t_0,$$
$$\varphi(x_0)=\varphi(f(t_0))\neq t_0,$$

нещо, което противоречи на допускането, че функцията $f(x)$ е обратима. С това е показано, че равенството (3) е наистина вярно при всяко t от M.

Една обратима функция $f(t)$ не може да приема никоя своя стойност повече от един път. И наистина равенството (3) ни учи, че от $f(t_1)=f(t_2)$ следва $t_1=t_2$.

Обратно, нека $f(t)$ приема всяка своя стойност само веднъж и нека $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ са две обратни функции на $f(t)$. В такъв случай

$$f[\varphi_1(x)]=x,$$
$$f[\varphi_2(x)]=x$$

и следователно

$$f[\varphi_1(x)]=f[\varphi_2(x)].$$

Дадено е обаче, че функцията $f(t)$ не може да приема равни стойности при различни стойности на аргумента си. Оттук заключаваме, че

$$\varphi_1(x)=\varphi_2(x),$$

т. е. че функцията $f(t)$ има само една обратна функция.

След всичко казано ние можем да дефинираме понятието обратима функция така: **една функция се нарича обратима, когато тя приема всяка своя стойност само веднъж.** Тази дефиниция е еквивалентна на дефиницията, от която тръгнахме, но се прилага по-често и следователно е по-важна.

Множеството M' от стойностите на обратната* функция $\varphi(x)$ на една обратима функция $f(t)$ съвпада с дефиниционната област M на $f(t)$. Това се вижда от равенството (3). И наистина, каквато и точка t_0 да вземем от M, тя представлява функционална стойност на $\varphi(x)$ при $x=f(t_0)$. Този резултат и равенството (3) ни учат, че ако функцията $f(t)$ е обратима и $\varphi(x)$ е обратната й функция, то $f(t)$ е обратна на $\varphi(x)$.

Ако на всяка точка t_0 от дефиниционната област M на една функция $f(t)$ съпоставим точката $f(t_0)$ от съвкупността N на функционалните стойности на $f(t)$, получаваме еднозначно съответствие, което се нарича изображение на M върху N. Специално, ако функцията $f(t)$ е обратима, при това съответствие различни точки се изобразяват върху различни точки. Такова съответствие се нарича обратимо. И така **едно съответствие се нарича обратимо, когато при него различни точки се изобразяват върху различни точки.**

Задачи

1. Нека $f(t)$ е произволна функция. Да се докаже, че всяка нейна обратна функция е обратима (независимо от това, дали $f(t)$ е обратима, или не).

2. Нека $f(t)$ е една обратима функция и $\varphi(x)$ е обратната функция на $f(t)$. Нека t_0 е произволна точка от дефиниционната област на $f(t)$ и нека $x_0=f(t_0)$. Да се докаже, че $t_0=\varphi(x_0)$.

3. Докажете, че функцията $\operatorname{sh} t$, разглеждана върху цялата ос t, е обратима и нейната обратна функция е

$$\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

* Засега е ясно, че M' е едно подмножество на M.

4. Докажете, че функцията $\operatorname{ch} t$, разглеждана при $t\geq 0$, е обратима и нейната обратна функция е

$$\ln(x+\sqrt{x^2-1}),$$

където $x\geq 1$.

§ 14. Обратни функции на непрекъснати функции

Нека функцията $f(t)$ е дефинирана и непрекъсната в едно компактно множество M. Ние знаем, че в такъв случай множеството N от нейните функционални стойности е също тъй компактно.

Теорема. **Ако функцията $f(t)$ е непрекъсната в едно компактно множество M и обратима в него, то обратната й функция $\varphi(x)$ е също тъй непрекъсната във всички точки от дефиниционната си област.**

И наистина нека x_0 е произволна точка от дефиниционната област на $\varphi(x)$ и нека

(1) $$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

е произволна редица от числа, които също принадлежат на дефиниционната област на $\varphi(x)$ и клонят към x_0. Трябва да покажем, че редицата

$$\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \ldots$$

е сходяща. Полагаме за краткост

$$\varphi(x_0)=t_0 \text{ и } \varphi(x_n)=t_n \quad (n=1, 2, \ldots),$$

откъдето

$$f(t_0)=f[\varphi(x_0)]=x_0 \text{ и } f(t_n)=f[\varphi(x_n)]=x_n.$$

Числата t_n лежат в множеството M и следователно образуват ограничена редица, тъй като множеството M е компактно. Нашата цел е да покажем, че тази редица е сходяща. За тази цел е достатъчно да покажем, че редицата

(2) $$t_1, t_2, t_3, \ldots$$

не може да има друга точка на сгъстяване освен t_0. И наистина нека τ е някоя нейна точка на сгъстяване. В такъв случай ние можем да изберем от редицата (2) подредица

$$t_{m_1}, t_{m_2}, t_{m_3}, \ldots$$
$$m_1<m_2<m_3<\ldots,$$

която да клони към τ. Точката τ обаче лежи в M, защото множеството M е компактно. От това следва, че функцията $f(t)$ е дефинирана и непрекъсната в тази точка. По такъв начин заключаваме, че

$$\lim_{k\to\infty} x_{m_k}=\lim_{k\to\infty} f(t_{m_k})=f(\tau).$$

Редицата

$$x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \ldots$$

е обаче подредица на редицата (1) и следователно клони към x_0. От това заключаваме, че

$$f(\tau)=x_0.$$

Като вземем пред вид, че функцията $f(t)$ е обратима, получаваме

$$\varphi(x_0)=\varphi(f(\tau))=\tau$$

или, което е същото,

$$\tau=t_0.$$

С това всичко е доказано.

§ 15. Диференциране на обратните функции

Нека функцията $f(t)$ е дефинирана, непрекъсната и обратима в едно компактно множество M. Да означим с $\varphi(x)$ обратната ѝ функция. Нека t_0 е точка от M, във всяка околност на която има точки от M, различни от t_0. Да положим $f(t_0)=x_0$. В такъв случай във всяка околност на точката x_0 има точки от дефиниционната област на $\varphi(x)$, които са различни от x_0. За да се убедим в това, достатъчно е да изберем редица от точки, които са различни от t_0, принадлежат на M и клонят към t_0. Функцията $f(t)$ изобразява тези точки в точки от дефиниционната област на $\varphi(x)$, които са различни от x_0 и клонят към x_0.

Нека (освен изброеното по-горе) функцията $f(t)$ има производна в точката t_0 и нека тази производна е различна от нула. При тези предположения функцията $\varphi(x)$ притежава производна в точката x_0 и

$$\varphi'(x_0)=\frac{1}{f'(t_0)}.$$

И наистина нека x_0+h е произволна точка от дефиниционната област на $\varphi(x)$, която е различна от x_0. Да положим

$$k=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0).$$

Очевидно $k\neq 0$, защото в противен случай бихме имали

$$x_0=f[\varphi(x_0)]=f(\varphi(x_0+h)]=x_0+h,$$

което не е вярно, защото $h\neq 0$. Поради непрекъснатостта на функцията $\varphi(x)$ (която ние установихме в предния параграф) заключаваме че k клони към нула, когато h клони към нула.

По-нататък имаме

$$\varphi(x_0)=\varphi(f(t_0))=t_0$$

и следователно

$$f(t_0+k)=f[\varphi(x_0)+k]=f[\varphi(x_0+h)]=x_0+h=f(t_0)+h.$$

Оттук получаваме

$$\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}=\frac{k}{f(t_0+k)-f(t_0)}=\frac{1}{\frac{f(t_0+k)-f(t_0)}{k}}.$$

Като вземем под внимание, че изразът

$$\frac{f(t_0+k)-f(t_0)}{k}$$

притежава граница, когато k клони към нула, и че тази граница е различна от нула, заключаваме, че изразът

$$\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}$$

също притежава граница, когато h клони към нула, т. е. функцията $\varphi(x)$ е диференцуема в точката x_0, и

$$\varphi'(x_0)=\frac{1}{f'(t_0)}.$$

§ 16. Обратни кръгови функции

Ние дефинирахме функцията $\sin t$ при всички реални стойности на t. Тази функция не е обратима, защото е периодична и следователно приема всяка своя стойност безбройно много пъти. Напротив, ако разгледаме функцията

$$\varphi(t)=\sin t$$

само в интервала $-\frac{\pi}{2}\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$, то получаваме вече една обратима функция. И наистина, ако допуснем, че функцията $\varphi(t)$ приема в две различни точки една и съща стойност, заключаваме с помощта на теоремата на Рол, че производната

$$\varphi'(t)=\cos t$$

се анулира поне за една вътрешна точка на интервала $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Това обаче не е вярно, защото от $\cos t=0$ получаваме $\cos|t|=0$ (поради четността на функцията $\cos t$) и следователно $|t|\geqq\frac{\pi}{2}$ (защото $\frac{\pi}{2}$ е най-малкият положителен корен на уравнението $\cos t=0$). И така функцията $\varphi(t)$ приема всяка своя стойност само веднъж и следователно е обратима. Единствената ѝ обратна функция се бележи със знака

$$\arcsin x$$

(четете „аркус синус икс").

Дефиниционната област на функцията $\arcsin x$ представлява затвореният интервал $[-1, 1]$, защото, както знаем, тази дефиниционна област не е нищо друго освен множеството от функционалните стойности на функцията $\varphi(t)=\sin t$.

Функцията

$$\arcsin x$$

удовлетворява неравенствата

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \arcsin x \leqq \frac{\pi}{2},$$

защото стойностите ѝ принадлежат на дефиниционната област на функцията $\varphi(t)$.

Най-сетне при всички стойности на x от затворения интервал $[-1, 1]$ имаме

(1) $$\sin(\arcsin x) = x,$$

както това се вижда от дефиницията на понятието обратна функция. Нека припомним тук, че ние доказахме в началото на този параграф че не може да има повече от едно число t, което да удовлетворява равенството

(2) $$\sin t = x$$

и неравенствата

(3) $$-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Въз основа на казаното ние можем да дефинираме понятието $\arcsin x$ като число t, което удовлетворява равенството (2) и неравенствата (3). Такова число, както видяхме, има и то е едно единствено, когато $-1 \leqq x \leqq 1$.

Като вземем пред вид, че функцията $\varphi(t)$ е обратима, заключаваме, че

$$\arcsin(\sin t) = t,$$

когато t принадлежи на дефиниционната област на $\varphi(t)$, т. е. когато

$$-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Теоремата за диференциране на обратните функции ни учи, че функцията $\arcsin x$ е сигурно диференцуема поне когато $x \neq \pm 1$, т. е. когато $\alpha = \arcsin x \neq \pm\frac{\pi}{2}$, защото в такъв случай $\varphi'(\alpha) = \cos\alpha \neq 0$. За да пресметнем производната ѝ, полагаме $y = \arcsin x$, т. е. $x = \sin y$. В такъв случай теоремата за диференциране на обратните функции ни дава

$$y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Като вземем пред вид, че $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, заключаваме, че $\cos y > 0$ и следователно $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ или

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

При $x = \pm 1$ функцията $y = \arcsin x$ не е диференцуема. И наистина да положим

$$\varphi(x) = \arcsin x.$$

В такъв случай

$$\sin\varphi(x) = x.$$

Ако допуснем, че функцията $\varphi(x)$ е диференцуема при $x = \pm 1$, то като диференцираме по правилото за диференциране на функция от функция, намираме

$$\cos\varphi(\pm 1) \cdot \varphi'(\pm 1) = 1,$$

което не е вярно, защото $\varphi(\pm 1) = \arcsin(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{2}$ и следователно

$$\cos\varphi(\pm 1) = \cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0, \text{ т. е.}$$

$$\cos\varphi(\pm 1) \cdot \varphi'(\pm 1) = 0.$$

По подобен начин се дефинира функцията

$$y = \arccos x$$

(четете „аркус косинус икс") като обратна функция на функцията $\cos t$ разглеждана в интервала $0 \leqq t \leqq \pi$, или, което е същото, като онова решение y на уравнението

$$\cos y = x,$$

което удовлетворява неравенствата $0 \leqq y \leqq \pi$.

Функцията $\arccos x$ е дефинирана в затворения интервал $[-1, 1]$ и стойностите ѝ се намират в интервала $[0, \pi]$. Освен това не е трудно да се види, че

$$\cos(\arccos x) = x \text{ при } -1 \leqq x \leqq 1$$

и

$$\arccos(\cos t) = t \text{ при } 0 \leqq t \leqq \pi.$$

Нека читателят сам обмисли всичките подробности. От правилото за диференциране на обратни функции имаме

$$y' = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Сега ще разгледаме обратната функция на функцията

$$f(t) = \operatorname{tg} t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Функцията $\operatorname{tg} t$ не е дефинирана при онези стойности на t, за които $\cos t=0$. Специално тя не е дефинирана при $t=\pm\frac{\pi}{2}$. В отворения интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ тя обаче е дефинирана. За нас е важно, че тя е и обратима в този интервал. Читателят лесно ще установи нейната обратимост, като вземе пред вид, че производната ѝ

$$f'(t)=\frac{1}{\cos^2 t}$$

никъде не се анулира. И наистина, ако допуснем, че функцията $\operatorname{tg} t$ приема някоя своя стойност повече от един път в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ще можем да заключим с помощта на теоремата на Рол, че производната $f'(t)=\frac{1}{\cos^2 t}$ се анулира поне в една точка, което, както вече отбелязахме, не е вярно. Обратната функция на функцията $\operatorname{tg} t$, разглеждана при

$$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2},$$

се означава със символа

$$\operatorname{arc\,tg} x$$

(четете „аркус тангенс икс“). Функцията $\operatorname{arc\,tg} x$ е дефинирана при всички реални стойности на x, защото нейната дефиниционна област съвпада, както знаем, с множеството от функционалните стойности на функцията $\operatorname{tg} t$ и следователно не е нищо друго освен множеството от всичките реални числа.

От дефиницията на понятието обратна функция имаме

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)=x$$

при всички стойности на x. Като вземем пред вид, че функцията $\operatorname{tg} t$ при $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ е обратима, заключаваме, че

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} t)=t$$

при всички стойности на t от интервала $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.

Ще покажем, че при всички стойности на x е в сила равенството

(4) $$\operatorname{arc\,tg} x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

И наистина да положим

$$\alpha=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

В такъв случай

$$\sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ще докажем, че

(5) $$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Ясно е преди всичко, че $-\frac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$. Остава да докажем, че $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{2}$. Това може да се установи така: ако допуснем, че $\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$, получаваме

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=\pm 1,$$

откъдето

$$\frac{x^2}{1+x^2}=1,$$

или $x^2=1+x^2$, което очевидно не е вярно.

Неравенствата (5) ни дават право да образуваме $\operatorname{tg}\alpha$. Като вземем пред вид, че $\cos\alpha>0$ и следователно $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, намираме

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}=x.$$

Този резултат и неравенствата (5) ни дават

$$\operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\alpha)=\alpha,$$

с което равенството (4) е установено. Това равенство ни учи, че функцията $\operatorname{arctg} x$ е диференцуема при всяко x и

$$(\operatorname{arc\,tg} x)'=\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Най-сетне нека читателят сам докаже, че функцията

$$g(y)=\operatorname{ctg} y,$$

разглеждана при $0<y<\pi$, е обратима. Обратната ѝ функция се означава със символа $\operatorname{arc\,ctg} x$ (четете „аркус котангенс икс“). Нека читателят също сам докаже, че

$$\operatorname{arc\,ctg} x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x,$$

и от това да извлече заключението, че функцията $\operatorname{arc\,ctg} x$ е диференцуема за всяко x и че

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2},$$

§ 17. Пресмятане на числото π

Ще покажем, че при $-1 \leq x \leq 1$ имаме

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \tag{1}$$

За тази цел разглеждаме функцията

$$\varphi(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{2}$$

Правилото за диференциране на степенните редове ни дава

$$\varphi'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \tag{3}$$

По такъв начин получаваме геометрична прогресия, чийто радиус на сходимост е 1. Това ни дава право да твърдим, че радиусът на сходимост на реда (2) е също тъй 1. Като пресметнем сумата на геометричната прогресия (3), получаваме

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

По такъв начин функциите $\operatorname{arc\,tg} x$ и $\varphi(x)$ имат една и съща производна при $-1 < x < 1$ и следователно можем да пишем при тези стойности на x

$$\operatorname{arc\,tg} x = \varphi(x) + C,$$

където C е константа. За да пресметнем стойността на тази константа, достатъчно е да вземем под внимание, че $\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$ и $\varphi(0) = 0$. По такъв начин получаваме $C = 0$ и следователно

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \tag{4}$$

при $-1 < x < 1$. Ще покажем, че така полученото равенство (4) е вярно и при $x = 1$, $x = -1$. Достатъчно е очевидно да се занимаем със случая $x = 1$, защото, когато сменим знака на x, сменя се знакът на $\operatorname{arc\,tg} x$ и същевременно се сменят знаците на всичките събираеми на реда, който стои от дясната страна на равенството (4). Доказателството ще извършим така. Нека $0 \leq x < 1$. В такъв случай знаците на членовете на реда

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

се сменят алтернативно, а редицата

$$\frac{x}{1}, \frac{x^3}{3}, \frac{x^5}{5}, \ldots,$$

монотонно намалявайки, клони към нула. Това ни дава право да пишем (вж. част I, глава II, § 9)

$$\left| \operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Да оставим в това неравенство x да клони към единица. В такъв случай ще получим след граничен преход

$$\left| \operatorname{arc\,tg} 1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n-1} \right| \leq \frac{1}{2n+1},$$

отдето се вижда, че равенството (4) е валидно и при $x = 1$.

При $x = 1$ развитието (4) добива вида

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots, \tag{5}$$

защото

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

и следователно

$$\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

(докажете сами, че $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, като изхождате от аналитичната дефиниция на тригонометричните функции). Равенството (5) се нарича формула на Лайбниц. Както забеляза още Нютон, тази формула е крайно неудобна за приближеното пресмятане на числото π поради извънредно бавната ѝ сходимост.

За да получим по-бързо сходящ ред за пресмятане на числото π, полагаме

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5},$$

откъдето

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5} \tag{6}$$

и

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

От друга страна, при $-\frac{\pi}{2}<\alpha\leqq 0$ бихме имали $\operatorname{tg}\alpha\leqq 0$ и следователно,

$$(7)\qquad 0<\alpha<\frac{\pi}{2},$$

защото $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}>0$.

От равенството (6) получаваме

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{5}{12}.$$

Неравенствата (7) ни дават $0<2\alpha<\pi$. Като вземем под внимание обаче, че $\operatorname{tg}2\alpha>0$, намираме

$$0<2\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Аналогично получаваме

$$(8)\qquad \operatorname{tg}4\alpha=\frac{120}{119}$$

и

$$(9)\qquad 0<4\alpha<\frac{\pi}{2},$$

тъй като

$$0<4\alpha<\pi \text{ и } \operatorname{tg}4\alpha>0.$$

От равенството (8) намираме

$$\operatorname{tg}\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}4\alpha-1}{\operatorname{tg}4\alpha+1}=\frac{1}{239},$$

а от неравенствата (9) получаваме

$$-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{4}<4\alpha-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2},$$

откъдето

$$4\alpha-\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239},$$

или

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}.$$

След като развием $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}$ и $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$ по формулата (1), намираме

$$(10)\qquad \frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\cdots\right)-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\frac{1}{5.239^5}-\cdots\right).$$

Формулата (10) е твърде удобна за приближеното пресмятане на числото π.

Ето първите няколко десетични знака на това число:

$$\pi=3{,}14159265358979323846264338327 9\ldots$$

Задачи

1. В § 16 доказахме, че

$$\arcsin(\sin x)=x$$

при $|x|\leq\frac{\pi}{2}$. Вярно ли е това равенство, ако $|x|>\frac{\pi}{2}$?

Отговор. Не.

2. Докажете, че $\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{ctg}x)=x$ тогава и само тогава, когато $0<x<\pi$.

3. Докажете, че

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$$

при $|x|\leq 1$.

Решение. Полагаме

$$\arcsin x=\alpha.$$

В такъв случай $x=\sin\alpha$ и $-\frac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$. Въз основа на това намираме

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{\cos^2\alpha}=|\cos\alpha|=\cos\alpha=\cos(\arcsin x).$$

4. Докажете, че

$$\sin(2\arcsin x)=2x\sqrt{1-x^2} \text{ при } -1\leqq x\leqq 1.$$

Решение.

$$\sin(2\arcsin x)=2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)=$$
$$=2\sin(\arcsin x)\sqrt{1-[\sin(\arcsin x)]^2}=2x\sqrt{1-x^2}.$$

5. Докажете, че при всяко x

$$\sin(2\operatorname{arc\,tg}x)=\frac{2x}{1+x^2}.$$

Решение.

$$\sin(2\operatorname{arc\,tg}x)=\frac{2\sin(\operatorname{arc\,tg}x)\cos(\operatorname{arc\,tg}x)}{\cos^2(\operatorname{arc\,tg}x)+\sin^2(\operatorname{arc\,tg}x)}=$$
$$=\frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}x)}{1+(\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}x))^2}=\frac{2x}{1+x^2}.$$

6. Докажете, че

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\arccos x$$

при $0 < x \leq 1$ и

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = -\pi + \arccos x$$

при $-1 \leq x < 0$.

Решение. Полагаме $\arccos x = \alpha$. Тогава $x = \cos\alpha$ и $0 \leq \alpha \leq \pi$. Въз основа на това намираме

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \operatorname{arc\,tg}\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\alpha).$$

При $0 < x \leq 1$ имаме $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ и следователно

(1)
$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha$$

или

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \arccos x.$$

Напротив, при $-1 \leq x < 0$ равенството (1) не е вярно, защото $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$. Обаче, като вземем пред вид, че

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha - \pi),$$

получаваме

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{arc\,tg}[\operatorname{tg}(\alpha - \pi)]$$

и тъй като при $-1 \leq x < 0$ имаме $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$, то

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha - \pi \leq 0$$

и следователно

$$\operatorname{arc\,tg}[\operatorname{tg}(\alpha - \pi)] = \alpha - \pi$$

или

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = -\pi + \arccos x.$$

7. Докажете, че

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x \text{ при } 0 \leq x \leq \pi.$$

8. Докажете, че

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \text{ при } |x| \leq 1.$$

9. Докажете, че

$$2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

10. Докажете, че

$$\arcsin\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-2x}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\arcsin x \text{ при } |x| \leq 1.$$

11. Докажете, че

$$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\arcsin x}{2} \text{ при } -1 \leq x < 1.$$

12. Докажете, че

$$\arcsin(2x^2-1) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - 2\arcsin x & \text{за } -1 \leq x \leq 0; \\ -\frac{\pi}{2} + 2\arcsin x & \text{за } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

13. Докажете, че

$$\arccos(4x^3 - 3x) = \begin{cases} 3\arccos x & \text{при } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 2\pi - 3\arccos x & \text{при } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -2\pi + 3\arccos x & \text{при } -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

14. Намерете първата производна на функцията

$$y = \arcsin(2x^2 - 1) \text{ при } -1 < x < 0 \text{ и при } 0 < x < 1.$$

Решение. Имаме да намерим производната на функция от вида $y = \arcsin u(x)$. В случая $u(x) = 2x^2 - 1$. Съгласно правилото за диференциране на функция от функция имаме $y' = (\arcsin u)' u'$, т. е. в нашия специален случай

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}}(2x^2-1)' = \frac{4x}{\sqrt{4x^2-4x^4}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{4x}{2|x|\sqrt{1-x^2}}.$$

При $0 < x < 1$ имаме $|x| = x$ и следователно $y' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$. При $-1 < x < 0$ имаме $|x| = -x$ и следователно $y' = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$.

15. Докажете, че функцията

$$f(x) = \arcsin(2x^2 - 1), \ |x| \leq 1,$$

не е диференцуема при $x = 0$.

Упътване. Използувайте дефиницията на понятието производна и приложете теоремата за крайните нараствания.

16. Докажете, че

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{x+1} = \operatorname{arc\,tg} x - \frac{\pi}{4} \text{ при } x > -1,$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{x+1} = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{3\pi}{4} \text{ при } x < -1,$$

като се сравнят производните на двете страни на това равенство.

Решение. Функцията

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{x+1}$$

не е дефинирана при $x = -1$, затова ние ще изучим отделно двата безкрайни интервала $x > -1$ и $x < -1$.

Във всеки един от тези два интервала имаме

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{1+x^2},$$

откъдето заключаваме, че производната на функцията

$$\varphi(x) = f(x) - \operatorname{arc\,tg} x$$

е нула както в безкрайния интервал $x > -1$, така и в безкрайния интервал $x < -1$. От това заключаваме, че функцията $\varphi(x)$ е константа както при $x > -1$, така и при $x < -1$ (тези две константи могат да бъдат различни).

Като вземем пред вид, че

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = -\frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \frac{3\pi}{4},$$

заключаваме, че $\varphi(x) = -\frac{\pi}{4}$ при $x > -1$ и $\varphi(x) = \frac{3\pi}{4}$ при $x < -1$.

17. Докажете, че

$$\arcsin \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right) = \frac{\arcsin x}{2} \quad \text{при } |x| \leq 1),$$

като сравните производните на двете части на това равенство при $|x| < 1$.

18. Докажете, че

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \begin{cases} 2 \operatorname{arc\,tg} x & \text{при } x \geq 0, \\ -2 \operatorname{arc\,tg} x & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$$

като сравните производните на двете части на равенството при $x \neq 0$.

19. Докажете, че

$$\arcsin(2x^2 - 1) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - 2 \arcsin x & \text{при } -1 \leq x \leq 0, \\ -\frac{\pi}{2} + 2 \arcsin x & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

като сравните производните на двете страни на равенството при $|x| < 1$ и $x \neq 0$.

20. Докажете, че

$$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi - 2 \operatorname{arc\,tg} x & \text{при } 1 \leq x, \\ 2 \operatorname{arc\,tg} x & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ -\pi - 2 \operatorname{arc\,tg} x & \text{при } x \leq -1, \end{cases}$$

като сравните производните на двете страни на равенството при $|x| \neq 1$.

21. Докажете, че функциите $\arcsin x$ и $\operatorname{arc\,tg} x$ са нечетни.

22. Докажете, че при $|x| \leq 1$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

23. При какви стойности на x е валидно равенството

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}\ ?$$

24. При какви стойности на x и y е валидно равенството

(2) $$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right).$$

Упътване. Докажете, че

$$\sin(\arcsin x + \arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

От това заключаваме, че равенството (2) е валидно тогава и само тогава, когато

(3) $$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x + \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Като вземем под внимание, че

$$-\pi \leq \arcsin x + \arcsin y \leq \pi,$$

заключаваме, че неравенствата (3) са изпълнени тогава и само тогава, когато

$$\cos(\arcsin x + \arcsin y) \geq 0$$

(защо?), т. е. когато

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \geq xy \text{ и } |x| \leq 1,\ |y| \leq 1.$$

Кои точки от равнината на една декартова координатна система удовлетворяват последните неравенства?

25. Докажете, че при $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{d^n}{dx^n} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(\frac{n\,.\,\pi}{2} + n \operatorname{arc\,tg} x\right).$$

26. Докажете, без да се ползувате от геометрични съображения, че системата

(4) $$x = \rho \cos \varphi,$$
$$y = \rho \sin \varphi,$$

където x и y са дадени, а ρ и φ са неизвестни, има решения при всеки избор на x и y.

Упътване. Проверете, че при $x^2 + y^2 \neq 0$ числата

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = 2k\pi + \varepsilon \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

удовлетворяват системата (4), когато k е цяло число, а $\varepsilon = 1$ при $y \geq 0$ и $\varepsilon = -1$ при $y < 0$; за да получим едно решение при $x^2 + y^2 = 0$, избираме $r = 0$ и φ произволно.

27. Намерете всичките решения на системата (4) (x и y са дадени; ρ и φ са неизвестни), без да си служите с геометричните съображения.

28. Докажете, че при цели неотрицателни стойности на n и при $|x| \leq 1$ функцията

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

е полином от n-та степен.

Упътване. Извършете доказателството индуктивно, като предварително покажете, че

$$T_n(x) = 2x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

Забележка. Полиномите $T_n(x)$ се наричат полиноми на Чебишев (Чебышёв) и играят важна роля в много въпроси на анализа.

29. Докажете, че коефициентът пред x^n в n-тия полином на Чебишев

$$\cos(n \arccos x)$$

е равен на 2^{n-1}.

Упътване. Извършете доказателството индуктивно, като използувате рекурентната зависимост от предната задача.

30. Докажете, че при $|x| \leq 1$ и $n=1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}}=(-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n}\sin(n\arccos x).$$

Упътване. Извършете доказателството индуктивно. За тази цел образувайте помощната функция

$$\varphi(x)=\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n}-(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{n+1}\sin((n+1)\arccos x).$$

Докажете, че при $|x|<1$

$$\varphi'(x)=-(2n+1)\frac{d^n}{dx^n}\left[x.(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right]+$$

$$+(-1)^n 1.3.5\ldots(2n+1)\frac{\cos((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}=0,$$

като развиете

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[x.(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right]$$

по формулата на Лайбниц. По този начин се показва, че функцията $\varphi(x)$ е една константа. За да пресметнете нейната стойност, покажете, че $\varphi(1)=0$, като развиете по формулата на Лайбниц израза

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\frac{1}{2}}(1+x)^{n+\frac{1}{2}}\right].$$

31. Докажете, че при $|x| \leq 1$ и $n=1, 2, 3, \ldots$

$$\cos(n\arccos x)=\frac{(-1)^n(n-1)!\,2^{n-1}}{(2n-1)!}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d^n(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n}.$$

Упътване. Използувайте предната задача.

32. Намерете всички корени на уравнението

$$\cos(n\arccos x)=0,$$

където n е цяло положително число.

33. Докажете, че функцията

$$y=\cos(n\arccos x)$$

удовлетворява диференциалното уравнение

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0.$$

§ 18. Таблица на формулите, върху които се основава техниката на диференцирането

Тук ще припомним накратко по-важните формули, с помощта на които става намирането на производните. Читателят трябва да помни тези формули наизуст.

Производни на елементарни функции:*

$$(a)'=0,$$

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

Така например $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{-1}{x^2}$ и пр.

$$(e^x)'=e^x$$

или по-общо

$$(a^x)'=a^x\ln a,\ a>0.$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

$$(\sin x)'=\cos x.$$

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\operatorname{ctg} x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}.$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)'=\frac{-1}{1+x^2}.$$

* Буквите a и n означават константи, x означава, както обикновено, независимата променлива, u и v означават функции на x.

Общи правила:

$$(au)'=au'.$$

$$(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

$$[f[u(x)]]'=f'[u(x)]\,u'(x).$$

Така например

$$(\ln u)'=\frac{u'}{u}\ \text{и пр.}$$

Ако функциите

$$y=f(x)\ \text{и}\ x=\varphi(y)$$

са обратни една на друга, то, грубо казано,

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}$$

или малко по-точно

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'[f(x)]}.$$

Задачи

Да се намерят производните на следните функции:

1. $y=5x^3-7x^2+6x-13.$
2. $y=\frac{x^3}{3}$
3. $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$
4. $y=x^4(x^2-1)^2.$
5. $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}.$
6. $y=\frac{x}{1-x^2}.$
7. $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$
8. $y=x\cos x.$
9. $y=(x^2-2x+2)\sin x.$
10. $y=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x.$
11. $y=\frac{1}{\cos x}.$
12. $y=x\,\mathrm{tg}\,x.$
13. $y=(ax+b)^3.$
14. $y=(x^2-1)^{15}.$
15. $y=x^2\,\mathrm{ctg}\,x.$
16. $y=\sin^3 x.$
17. $y=(1-x)^3.$
18. $y=\frac{1}{(x^2+1)^2}.$
19. $y=\cos^2 x.$
20. $y=\cos x^2.$
21. $y=\cos^4 2x.$
22. $y=\sin 2x.$
23. $y=(\cos ax^2)\,.\,\sin bx^2.$
24. $y=\mathrm{tg}\,x+2\,\mathrm{tg}^2\,2x.$

25. $y=\cos\frac{2x}{1+x^2}+\sin^2 x.$
26. $y=\sin x^2+\sin^2 x.$
27. $y=\mathrm{tg}\,\frac{1-x}{1+x}.$
28. $y=e^{-x^2}.$
29. $y=e^{\sin 2x}.$
30. $y=e^{ax}\cos bx.$
31. $y=e^{-x}(x^2-4).$
32. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$
33. $y=e^{\frac{1+x}{1-x}}.$
34. $y=x^2e^{\frac{1}{x}}.$
35. $y=\frac{x^4}{4}\left[(\ln x)^2-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{8}\right].$
36. $y=\ln\,\mathrm{tg}\left[\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right].$
37. $y=\ln\cos x.$
38. $y=\ln(1-x).$
39. $y=\frac{1}{\ln(1-x)}.$
40. $y=\sqrt{x}.$
41. $y=\sqrt[3]{x}.$
42. $y=\sqrt{x}+\ln x-\frac{1}{\sqrt{x}}.$
43. $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}.$
44. $y=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}.$
45. $y=\sqrt{3x-5}.$
46. $y=\sqrt{a^2-x^2}.$
47. $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$
48. $y=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$
49. $y=x\sqrt{x^2+1}.$
50. $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}.$
51. $y=\sqrt[3]{(2x+1)^2}.$
52. $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$
53. $y=\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}-\sqrt{x^2+1}.$
54. $y=\frac{1}{a}\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{a}.$
55. $y=\arcsin\frac{1}{x}.$
56. $y=\arccos\sqrt{1-x^2}.$
57. $y=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$
58. $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$
59. $y=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right),\ a>b\geq 0.$
60. $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\frac{a\cos x+b}{a+b\cos x},\ a>b\geq 0.$
61. $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ Отг. $y'=\frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}.$
62. $y=e^{\arcsin x}(x+\sqrt{1-x^2}),\ |x|<1.$ Отг. $y'=2e^{\arcsin x}.$
63. $y=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)],\quad x>0.$ Отг. $y'=\sin(\ln x).$

64. $y=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}(\arcsin x-x)$, $|x|<1$.

Отг. $y'=\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})$.

65. $y=\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2})$, $|x|<1$.

Отг. $y'=\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

66. $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$, $|x|\neq 1$.

Отг. $y'=\frac{1}{1+x^4}$.

67. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

Отг. $y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

68. $y=2\arcsin\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$, $|x|<1$.

Отг. $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

69. $y=2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $|x|<1$.

Отг. $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

70. $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\arccos\frac{au-a^2+b^2+c^2}{u\sqrt{b^2+c^2}}$,

където $u=a+b\cos x+c\sin x$, $u\neq 0$,

$$a^2>b^2+c^2\neq 0.$$

Отг. $y'=\pm\frac{1}{u}$.

71. $y=x^x$, $x>0$.

Решение. Чрез логаритмуване намираме $\ln y=x\ln x$. Оттук $\frac{y'}{y}=\ln x+1$ и следователно $y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$.

72. $y=(\ln x)^{\ln x}$, $x>0$.

Отг. $y'=(\ln x)^{\ln x}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}+\frac{1}{x}\right)$.

73. $y=x^{\sin x}$.

Отг. $y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$.

ГЛАВА IV

НАЙ-ПРОСТИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА ДИФЕРЕНЦИАЛНОТО СМЯТАНЕ

§ 1. Максимум и минимум

Казваме, че една функция $f(x)$ притежава локален максимум (минимум) в една точка x_0, когато около точката x_0 може да се избере такава околност $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, където $\delta>0$, че:

1) околността $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ изцяло да лежи в дефиниционната област на функцията;

2) функционалната стойност $f(x_0)$ да бъде най-голяма (най-малка) измежду функционалните стойности на $f(x)$ в околността $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

(Тук не се изключва възможността тази най-голяма или най-малка стойност да се достига и в точки, различни от x_0. Казваме, че локалният максимум или минимум в точката x_0 е строг, когато равенството $f(x)=f(x_0)$ е изпълнено в достатъчно малка околност на x_0 само при $x=x_0$.)

В дефиницията, която дадохме, се иска точката x_0 да притежава поне една околност, лежаща изцяло в дефиниционната област на функцията. Това е вече едно ограничително условие за точката x_0. Така например, ако дефиниционната област на $f(x)$ е един интервал, а точката x_0 се намира в един от краищата му, то тази точка сигурно не удовлетворява поставеното изискване. Да си мислим едно точково множество M. Казваме, че една точка x_0 е вътрешна за това множество, когато може да се намери поне една околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ на точката (разбира се, $\delta>0$), която е съставена само от точки, принадлежащи на множеството M. С тази терминология ние можем по-кратко да формулираме нашата мисъл така: в дефиницията, която дадохме, се иска точката x_0 да бъде вътрешна за дефиниционната област на $f(x)$.

Сега ще дадем няколко примера, които ще изяснят по-добре смисъла на понятията локален максимум и локален минимум.

Да разгледаме функцията

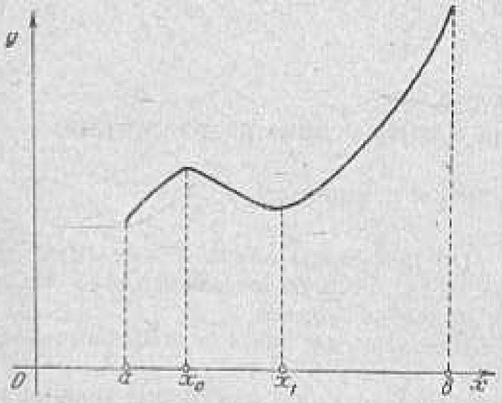
$$f(x)=x^4-x^2,$$

дефинирана с това уравнение при всички стойности на x. При $x=0$ тази функция притежава локален максимум, защото при $-1<x<1$ и $x\neq 0$

$$f(x)=x^2(x^2-1)<0=f(0),$$

т. е. $f(0)$ е най-голямата измежду стойностите на функцията в околността $(-1, 1)$ на точката 0 (в случая $x_0=0$ и $\delta=1$; ние бихме могли да дадем на δ коя да е стойност, по-малка от 1, но, разбира се, по-голяма от нула). Нека обърнем внимание върху това, че $f(0)$ не е най-голямата от всичките стойности на $f(x)$. Такова нещо съвсем не се иска в дефиницията, която дадохме. Очевидно

$$f(2) > f(0).$$



Черт. 11

Това обаче не е пречка да имаме локален максимум при $x=0$. Функционалната стойност $f(0)$ е най-голяма в околността $(-1, 1)$ на точката 0 и това е достатъчно, за да имаме локален максимум.

На черт. 11 е изобразена графиката на една функция, която при $x=x_0$ има локален максимум. Този локален максимум не е най-голямата стойност на функцията в дефиниционния ѝ интервал $[a, b]$. При $x=b$ функцията приема най-голямата си стойност, която обаче не представлява локален максимум, защото точката b не е вътрешна. При $x=x_1$ функцията има локален минимум.

§ 2. Необходимо условие за съществуване на локален екстремум при диференцуеми функции

Понякога ще си служим с термина екстремум като общо наименование за максимум и минимум.

Ние ще докажем сега следната теорема: ако една функция $f(x)$ е диференцуема в една точка x_0 и притежава локален екстремум в тази точка, то $f'(x_0)=0$.

(Геометрически това означава, че ако функцията е диференцуема за $x=x_0$ и притежава локален екстремум в тази точка, то тангентата към графиката ѝ в тази точка е успоредна на абсцисната ос.)

Доказателство. Да разгледаме например случая, когато в точка x_0 имаме локален максимум. В такъв случай в някоя достатъчно малка околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$, на точката x_0 имаме

$$f(x) \leqq f(x_0),$$

или, което е същото,

$$f(x)-f(x_0) \leqq 0.$$

Да разгледаме отношението

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Точката x_0 е вътрешна за дефиниционната област на $f(x)$. Това позволява да се приближаваме към точката x_0 както отдясно, така и отляво, без при това да напускаме дефиниционната област на функцията $f(x)$. Ще се възползуваме от тази свобода и ще оставим x да клони към x_0 чрез стойности, по-големи от x_0. В такъв случай знаменателят на дробта

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

е положителен. От друга страна, числителят, както видяхме, е или отрицателен, или нула. От това заключаваме, че

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqq 0.$$

Като извършим граничния преход $x \to x_0$ в последното неравенство, заключаваме, че

$$f'(x_0) \leqq 0.$$

Ако обаче даваме на x стойности, по-малки от x_0, получаваме

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqq 0,$$

защото в такъв случай знаменателят на дробта ще бъде отрицателен, а числителят и в този случай е или отрицателен, или нула (тъй като имаме максимум в точката x_0). Като извършим в последното неравенство граничния преход $x \to x_0$, получаваме

$$f'(x_0) \geqq 0.$$

Двете неравенства $f'(x_0) \leqq 0$ и $f'(x_0) \geqq 0$ ни учат, че

$$f'(x_0)=0.$$

Аналогично се извършва доказателството и в случая, когато имаме минимум в точката x_0.

С това ние намерихме едно необходимо условие за съществуване на локален екстремум на една диференцуема функция. Това условие съвсем не е достатъчно. И наистина функцията $f(x)=x^3$ е диференцуема и $f'(x)=3x^2$, т. е. $f'(0)=0$. Въпреки това тази функция не притежава при $x=0$ нито локален максимум, нито локален минимум, защото колкото и малка околност да вземем около началото, винаги $f(x)>f(0)$ при $x>0$, но $f(x)<f(0)$ при $x<0$. Графиката на тази функция е изобразена на черт. 3 (част II, глава I, § 2). Разбира се, една функция може да притежава локален екстремум в една точка и без да бъде диференцуема в тази точка. Така например функцията $|x|$

не е диференцуема при $x=0$, но притежава локален минимум в тази точка. (Това е дори изобщо най-малката стойност на функцията.) Графиката на тази функция е изобразена на черт. 4 (част II, глава I, § 2).

§ 3. Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум

Нека функцията $f(x)$ е два пъти диференцуема в някоя околност на точката x_0 и втората ѝ производна $f''(x)$ нека е непрекъсната в точката x_0. При тези предположения ще докажем следната теорема: ако $f'(x_0)=0$, но $f''(x_0)\neq 0$, функцията $f(x)$ сигурно притежава локален екстремум в точката x_0; при това, ако $f''(x_0)<0$, имаме локален максимум, а ако $f''(x_0)>0$, имаме локален минимум. И наистина теоремата на Тейлор ни дава

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0+\theta h)=f(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0+\theta h),\ 0<\theta<1$$

(където сме представили остатъчния член във формата на Лагранж) или

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^2}{2!}f''(x_0+\theta h),\ 0<\theta<1.$$

Дадено е, че $f''(x_0)\neq 0$. Нека например $f''(x_0)>0$. Като се възползуваме от непрекъснатостта на $f''(x)$ при $x=x_0$, заключаваме, че при всички достатъчно малки стойности на $|h|$ ще имаме $f''(x_0+\theta h)>0$ (вж. § 8 на глава I от част II).

И така за всички достатъчно малки стойности на $|h|$ имаме

$$f''(x_0+\theta h)>0$$

и следователно при $h\neq 0$

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^2}{2!}f''(x_0+\theta h)>0,$$

т. е.

$$f(x_0+h)>f(x_0),$$

което показва, че имаме локален минимум в точката x_0 и този минимум е строг. Аналогично се доказва, че при $f''(x_0)<0$ имаме локален максимум. Извършете сами доказателството!

При $f''(x_0)=0$ тези разсъждения не ни дават никакво указание за съществуване или несъществуване на локален екстремум. Ето няколко примера, при които разгледаният критерий се оказва безполезен. Функцията $\varphi(x)=x^4$ притежава минимум при $x=0$, защото при $x\neq 0$ имаме $x^4>0$ или (което е същото) $\varphi(x)>\varphi(0)$, при все че $\varphi''(x)=4.3x^2$ и следователно $\varphi''(0)=0$. Напротив, функцията $\psi(x)=x^3$, както вече видяхме, не притежава локален екстремум при $x=0$, при все че $\psi'(0)=0$; тук също $\psi''(0)=0$. По-общо, ако функцията $f(x)$ е диференцуема три пъти в някоя околност на точката x_0, ако $f'''(x)$ е непрекъсната при $x=x_0$ и най-сетне, ако $f'(x_0)=f''(x_0)=0$, но $f'''(x_0)\neq 0$, то $f(x)$ не притежава нито локален максимум, нито локален минимум при $x=x_0$. И наистина формулата на Тейлор ни дава

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_0+\theta h)=f(x_0)+$$
$$+\frac{h^3}{3!}f'''(x_0+\theta h),\ 0<\theta<1,$$

или

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^3}{3!}f'''(x_0+\theta h),\ 0<\theta<1.$$

Като вземем пред вид, че $f'''(x)$ е непрекъсната при $x=x_0$ и $f'''(x_0)\neq 0$, заключаваме, че $f'''(x_0+\theta h)$ не си мени знака и не се анулира, когато $|h|$ е достатъчно малко. Множителят h^3 обаче си мени знака, когато h си мени знака, поради което разликата

$$f(x_0+h)-f(x_0)$$

приема както положителни, така и отрицателни стойности във всяка околност на точката x_0. Този резултат ни показва, че в точката x_0 нямаме локален екстремум.

След тия предварителни бележки ще докажем следната обща теорема:

Нека функцията $f(x)$ е диференцуема n пъти в някоя околност на точката x_0 и нека $f^{(n)}(x)$ е непрекъсната при $x=x_0$, като освен това

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0,$$

но $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. В такъв случай, ако числото n е четно, то имаме локален екстремум, като при $f^{(n)}(x_0)<0$ имаме строг локален максимум, а при $f^{(n)}(x_0)>0$ имаме строг локален минимум. Напротив, ако числото n е нечетно, то нямаме нито локален максимум, нито локален минимум.

Доказателство. Теоремата на Тейлор ни дава

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\dots+\frac{h^{n-1}f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}+$$
$$+\frac{h^n f^{(n)}(x_0+\theta h)}{n!},\ 0<\theta<1,$$

или като вземем под внимание, че $f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0$,

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^n f^{(n)}(x_0+\theta h)}{n!},\quad 0<\theta<1.$$

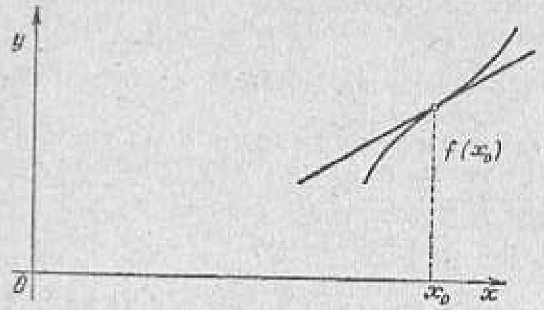
Тук ние сме представили остатъчния член във формата на Лагранж. Като вземем пред вид, че $f^{(n)}(x)$ е непрекъсната функция при $x=x_0$ и $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, заключаваме, че $f^{(n)}(x_0+\theta h)$ сигурно не си мени знака и дори не се анулира, когато $|h|$ е достатъчно малко. Когато n е четно число, то h^n също не си мени знака, когато h си мени знака. От това заключаваме, че при $f^{(n)}(x_0)<0$ имаме

$$f(x_0+h)-f(x_0)<0,$$

когато $|h|$ е достатъчно малко, т. е. функцията притежава локален максимум в точката x_0; при $f^{(n)}(x_0)>0$ имаме (разбира се, пак при достатъчно малки стойности на $|h|$)

$$f(x_0+h)-f(x_0)>0,$$

т. е. функцията притежава локален минимум в точката x_0. Напротив когато числото n е нечетно, то множителят h^n си мени знака, когато h си мени знака. Като вземем пред вид, че $f^{(n)}(x_0+\theta h)$ не си мени знака и не се анулира, когато $|h|$ е достатъчно малко, заключаваме, че разликата



Черт. 12

$$f(x_0+h)-f(x_0)$$

си мени знака заедно с h във всяка околност на точката x_0, т. е. функцията $f(x)$ в този случай не притежава нито локален максимум, нито локален минимум при $x=x_0$. В този случай точката x_0 е една инфлексна точка върху кривата. Това значи, че във всяка кръгова област с център в точката $[x_0, f(x_0)]$ (или, както се казва понякога, във всяка двуизмерима околност на тази точка) има точки от графиката на функцията $y=f(x)$, разположени от различни страни на тангентата към тази графика в точката $[x_0, f(x_0)]$. На черт. 3 е изобразена крива, която при $x=0$ има инфлексна точка с хоризонтална тангента (нас ни интересува сега този случай, защото при нас по предположение $f'(x_0)=0$). На черт. 12 е изобразена крива, която притежава инфлексна точка с наведена тангента при $x=x_0$.

Пример. Да се намерят локалните екстремуми на функцията

$$f(x)=(x-1)^3(x-2).$$

Очевидно имаме

$$f'(x)=3(x-1)^2(x-2)+(x-1)^3$$

или още

$$f'(x)=(x-1)^2(4x-7).$$

От това представяне е ясно, че производната $f'(x)$ се анулира само при $x=\frac{7}{4}$ и $x=1$. От друга страна,

$$f''(x)=2(x-1)(4x-7)+4(x-1)^2,$$

т. е. $f''\left(\frac{7}{4}\right)=4\left(\frac{7}{4}-1\right)^2>0$, и следователно при $x=\frac{7}{4}$ имаме локален минимум. Неговата стойност е $f\left(\frac{7}{4}\right)=-\frac{27}{256}$. Тъй като $f''(1)=0$, търсим третата производна

$$f'''(x)=2(4x-7)+8(x-1)+8(x-1).$$

Очевидно $f'''(1)\neq 0$. От това заключаваме, че при $x=1$ функцията $f(x)$ няма нито локален максимум, нито локален минимум.

Нека $f(x)$ е функция, която е дефинирана и диференцуема в някой интервал Δ. Казваме, че функцията $f(x)$ има инфлексия в една точка x_0 от Δ, ако производната ѝ притежава локален екстремум в x_0.

Задачи

1. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)=x^3-12x$.
2. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)=\sin 3x-3\sin x$.
3. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)=x^5-6x^4+12x^3-8x^2+1$.
4. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)=(x-1)^4x$.
5. Измежду правоъгълниците с даден периметър да се намери онзи, който има най-голямо лице.
6. Измежду правоъгълниците, вписани в дадена окръжност с радиус r, да се намери онзи, който има най-голямо лице.
7. Известно е от физиката, че силата на осветлението f се изразява с формулата $f=\frac{m\sin\varphi}{r^2}$, където φ е ъгълът между осветяваната площадка и лъчите, r е разстоянието до светлинния източник и m е константа, която зависи от силата на източника и от приетите единици. На каква височина h трябва да се окачи върху един даден стълб един светлинен източник, така че в дадена точка A от една хоризонтална площадка, която се намира на разстояние a от стълба, силата на осветлението да бъде най-голяма?
8. От един кръгов изрез (сектор) с даден радиус r е направена конична фуния. Колко голям трябва да бъде централният ъгъл на изреза, за да има фунията най-голям обем?
9. Една права a разделя една равнина на две полуравнини — I и II. Една точка M се движи в полуравнината I със скорост v_1, а в полуравнината II със скорост v_2. Нека A е една точка от полуравнината I, а B е една точка от полуравнината II. Точката M описва начупената ACB, където AC и CB са две праволинейни отсечки и точ-

ката C лежи на правата a. Докажете, че точката M изминава пътя ACB при фиксирани A и B за най-малко време, когато

$$\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}=\frac{v_1}{v_2},$$

където φ_1 и φ_2 са ъглите, които сключват посоките на векторите AC и CB с една (коя да е) от посоките на правата a. Сравнете този резултат със закона за пречупването на светлината.

§ 4. Изпъкнали функции

Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в някой интервал Δ. Функцията $f(x)$ се нарича изпъкнала, ако при всеки избор на точките $x_1, x_2, \ldots, x_n$ от Δ и при всеки избор на положителните числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$, за които

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=1,$$

е в сила неравенството

$$f(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n)\leqq p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_nf(x_n). \tag{1}$$

Не е трудно да се убедим, че точката $p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n$ също принадлежи на Δ. Така например, ако Δ е крайният и затворен интервал $[a, b]$, то

$$a\leqq x_\nu\leqq b \qquad (\nu=1, 2,\ldots, n)$$

и следователно

$$p_\nu a\leqq p_\nu x_\nu\leqq p_\nu b \qquad (\nu=1, 2,\ldots, n).$$

Като съберем почленно последните неравенства, ще получим

$$p_1a+p_2a+\cdots+p_na\leqq p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n\leqq p_1b+p_2b+\cdots+p_nb$$

и следователно

$$a\leqq p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n\leqq b,$$

защото

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=1.$$

Различните случаи, които могат да се представят, когато интервалът не е краен и затворен, се разглеждат също тъй просто.

Ако функцията $f(x)$ е диференцуема поне два пъти в Δ и при всяко x от Δ имаме $f''(x)\geqq 0$, то функцията $f(x)$ е изпъкнала в Δ. Ако $f''(x)$ приема само строго положителни стойности, то в (1) имаме равенство само при $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

За да докажем това, ще положим

$$x_0=p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n.$$

Формулата на Тейлор ни дава

$$f(x_\nu)=f(x_0)+\frac{x_\nu-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x_\nu-x_0)^2}{2!}f''(\xi_\nu), \tag{2}$$

където ξ_ν е точка, избрана по подходящ начин в Δ. Като умножим двете страни на равенството (2) с p_ν и сумираме по ν, ще получим

$$\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu f(x_\nu)=f(x_0)+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{p_\nu(x_\nu-x_0)^2}{2}f''(\xi_\nu)$$

и следователно

$$\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu f(x_\nu)\geqq f(x_0).$$

Очевидно, за да имаме

$$\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu f(x_\nu)=f(x_0),$$

е необходимо и достатъчно да имаме

$$\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu(x_\nu-x_0)^2f''(\xi_\nu)=0,$$

което в случай, когато $f''(x)$ приема само строго положителни стойности, е изпълнено тогава и само тогава, когато

$$x_1-x_0=x_2-x_0=\cdots=x_n-x_0=0,$$

защото числата $p_1, p_2, \ldots, p_n$ са строго положителни. С това доказателството е завършено.

Задачи

1. Нека $a>0$. Докажете, че функцията a^x е изпъкнала върху цялата ос x.
2. Нека числата a, b, p и q са положителни и $p+q=1$. Докажете, че

$$ab\leqq pa^{\frac{1}{p}}+qb^{\frac{1}{q}}.$$

Равенството се достига само когато $a^q=b^p$.

Решение. Разглеждаме функцията

$$f(x)=e^x.$$

Тази функция е изпъкнала, защото $f''(x)=e^x>0$, т. е. при всеки избор на x и y имаме

$$f(px+qy)\leqq pf(x)+qf(y).$$

Ако поставим $x=\frac{\ln a}{p}$ и $y=\frac{\ln b}{q}$, получаваме исканото неравенство. Като вземем пред вид, че $f''(x)=e^x\neq 0$, заключаваме, че неравенството преминава в равенство само когато $x=y$, т. е. когато $a^{\frac{1}{p}}=b^{\frac{1}{q}}$.

3. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са n положителни числа. Докажете, че

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\, a_2\ldots a_n}.$$

Знакът равенство е възможен само при $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

Забележка. Това неравенство се нарича неравенство на Коши между средното аритметично и средното геометрично на n числа.

Упътване. Докажете, че функцията $f(x)=-\ln x$ е изпъкнала при $x>0$.

4. Нека $p_1, p_2, \ldots, p_n$ са n положителни числа, свързани с равенството

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=1.$$

Докажете, че

$$p_1^{p_1}p_2^{p_2}\ldots p_n^{p_n}\geq\frac{1}{n}.$$

Равенството се достига само при $p_1=p_2=\ldots=p_n$.

Упътване. Докажете, че функцията $f(x)=x\ln x$ е изпъкнала при $x>0$.

§ 5. Изследване на квадратичната форма $ax^2+2bxy+cy^2$

Изразът

(1) $$ax^2+2bxy+cy^2$$

се нарича квадратична форма на двете независими променливи x и y. Досега ние сме разглеждали само функции на една независима променлива. Тук за пръв път срещаме функция на две независими променливи.

Квадратичната форма x^2-y^2 е способна да приема както положителни, така и отрицателни стойности. Така например при $x=1$, $y=0$ тя има положителна стойност, а при $x=0$, $y=1$ тя има отрицателна стойност. Напротив, квадратичната форма x^2+y^2 приема само неотрицателни стойности и се анулира само при $x=y=0$ (нека изрично припомним, че ние работим само с реални числа). Една квадратична форма се нарича положително дефинитна, когато тя приема само неотрицателни стойности и се анулира само при $x=y=0$. Една квадратична форма се нарича отрицателно дефинитна, когато тя приема само неположителни стойности и се анулира само при $x=y=0$. Така например квадратичната форма

$$-x^2+2xy-2y^2=-(x-y)^2-y^2$$

е очевидно отрицателно дефинитна. Ние често ще казваме накратко „дефинитна форма", когато ще имаме пред вид квадратична форма, която е или положително, или отрицателно дефинитна.

За да бъде една квадратична форма $ax^2+2bxy+cy^2$ дефинитна, необходимо е a да бъде различно от нула. Нещо повече, за да бъде тази форма положително дефинитна, необходимо е да имаме $a>0$, а за да бъде тя отрицателно дефинитна, необходимо е да имаме $a<0$. В това се убеждаваме, като дадем на x стойност 1, а на y стойност 0. Така например, ако формата е положително дефинитна, то стойността ѝ е съществено положителна, когато поне едно от числата x и y е различно от нула; в случая, който ни интересува, получаваме

$$a\,.\,1^2+2b\,.\,1\,.\,0+c\,.\,0^2>0,$$

или, което е същото, $a>0$. Намереното по този начин условие за дефинитност е необходимо, но съвсем не е достатъчно. Ние ще си поставим за задача да намерим едно необходимо и достатъчно условие, за да бъде квадратичната форма (1) дефинитна. За тази цел ще разгледаме формата $ax^2+2bxy+cy^2$ при постоянно y като функция само на x и ще пишем за краткост

$$\varphi(x)=ax^2+2bxy+cy^2.$$

Производната

$$\varphi'(x)=2ax+2by$$

се анулира при $x=-\frac{by}{a}$. Като развием функцията $\varphi(x)$ по формулата на Тейлор около точката $-\frac{by}{a}$ и като пишем за краткост $-\frac{by}{a}=x_0$, получаваме

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}\varphi'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\varphi''(x_0)$$

(нямаме остатъчен член, защото $\varphi(x)$ е полином) или

(2) $$\varphi(x)=\varphi(x_0)+a(x-x_0)^2.$$

Нека квадратичната форма (1) е положително дефинитна. В такъв случай при $y\neq 0$

$$\varphi(x_0)>0,$$

или, което е същото,

$$y^2\frac{ac-b^2}{a}>0.$$

Ние обаче знаем, че $a>0$. От това заключаваме, че за да бъде квадратичната форма (1) положително дефинитна, необходимо е

(3) $$a>0,$$

(4) $$b^2-ac<0.$$

Както ще видим, това условие е и достатъчно. И наистина, ако са изпълнени неравенствата (3) и (4), то

(5) $$\varphi(x_0) \geqq 0,$$

защото

$$\varphi(x_0) = y^2 \frac{ac-b^2}{a}.$$

От равенството (2) и от неравенствата (3) и (5) заключаваме, че $\varphi(x) \geqq 0$. Остава да покажем, че квадратичната форма (1) се анулира само при $x=y=0$, ако са изпълнени неравенствата (3) и (4). Това може да се направи така: ако $\varphi(x)=0$, то

(6) $$\varphi(x_0)=0,$$

(7) $$(x-x_0)^2=0,$$

което се вижда от равенството (2), защото

$$\varphi(x_0) \geqq 0$$

и

$$a>0.$$

Равенството (6) ни дава $y^2 \frac{ac-b^2}{a}=0$, т. е. $y=0$, а равенството (7) ни дава $x=x_0$, т. е. $x=0$, защото

$$x_0=\frac{-by}{a}=0.$$

Нека читателят сам докаже, че квадратичната форма (1) е отрицателно дефинитна тогава и само тогава, когато

(8) $$a<0,$$

(9) $$b^2-ac<0.$$

Поради симетрията ясно е, че ние можем да разменим ролите на a и c в неравенствата (3), (4), (8) и (9).

От неравенството $b^2-ac<0$ следва, че $a \neq 0$. Това ни дава право да твърдим, че квадратичната форма (1) е дефинитна тогава и само тогава, когато $b^2-ac<0$.

От неравенството $b^2-ac<0$ следва също, че a и c имат еднакви знаци; тези знаци съвпадат, разбира се, със знака на квадратичната форма (1).

Изразът b^2-ac се нарича дискриминанта на квадратичната форма.

Една квадратична форма се нарича полудефинитна, ако тя не си мени знака, както и да се менят x и y, обаче се анулира поне при една система значения на x и y, различна от системата $x=0$, $y=0$. Ще покажем, че за да бъде квадратичната форма $ax^2+2bxy+cy^2$ полудефинитна, необходимо и достатъчно е да имаме

$$b^2-ac=0.$$

И тук, както при дефинитните форми, избирайки $x=1$ и $y=0$, заключаваме, че при $a \neq 0$ знакът на квадратичната форма съвпада със знака на a. Ще разгледаме на първо време случая, когато $a \neq 0$. В такъв случай можем да използваме представянето (2), което може да се напише във вида

$$ax^2+2bxy+cy^2=y^2\frac{ac-b^2}{a}+a(x-x_0)^2.$$

Ако $ac-b^2=0$, то

$$ax^2+2bxy+cy^2=a(x-x_0)^2$$

и квадратичната форма е очевидно полудефинитна. Обратно, ако квадратичната форма е полудефинитна, то има поне една двойка числа (x_1, y_1), различна от двойката (0, 0), за която

$$ax_1^2+2bx_1y_1+cy_1^2=0,$$

и следователно, ако положим $x_0=\frac{-by_1}{a}$, то

$$ax_1^2+2bx_1y_1+cy_1^2=ax_0^2+2bx_0y_1+cy_1^2+a(x_1-x_0)^2=0.$$

От друга страна, двата израза

$$ax_0^2+2bx_0y_1+cy_1^2 \text{ и } a(x_1-x_0)^2$$

имат знака на a (ако не са нули) и следователно

$$ax_0^2+2bx_0y_1+cy_1^2=0,$$
$$a(x_1-x_0)^2=0$$

или

$$y_1^2\frac{b^2-ac}{a}=0,$$

$$x_1=\frac{-by_1}{a}.$$

От последното равенство заключаваме, че $y_1 \neq 0$ (защото в противен случай бихме имали $x_1=y_1=0$). Въз основа на това и на предпоследното равенство намираме

$$b^2-ac=0.$$

Ако $c \neq 0$, то като разменим ролите на x и y и на a и c и извършим пак горните разсъждения, ще установим, че и в този случай, за да бъде разглежданата квадратична форма полудефинитна, е необходимо и достатъчно да имаме $b^2-ac=0$. Остава да се направят изследванията при $a=c=0$. В този случай обаче квадратичната форма има вида $2bxy$ и е полудефинитна тогава и само тогава, когато $b=0$, т. е. когато $b^2-ac=0$.

Задачи

1. Да се изследва дали са дефинитни, или не следните квадратични форми:

a) x^2-xy+y^2;

b) $4x^2-4xy+y^2$;

c) $x^2-5xy+6y^2$.

2. Нека двете квадратични форми

$$a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2,$$
$$b_0x^2+2b_1xy+b_2y^2$$

са дефинитни и имат еднакви знаци. Докажете, че

$$a_0b_2+2a_1b_1+a_2b_0>0.$$

Решение. От

$$a_1^2<a_0a_2,$$
$$b_1^2<b_0b_2$$

получаваме

$$a_0b_2+2a_1b_1+a_2b_0>a_0b_0+2a_1b_1+\frac{a_1^2}{a_0}\frac{b_1^2}{b_0}=\frac{a_0^2b_0^2+2a_0b_0a_1b_1+a_1^2b_1^2}{a_0b_0}=$$
$$=\frac{(a_0b_0+a_1b_1)^2}{a_0b_0}\geq 0.$$

3. Докажете, че при всеки избор на числата

$$a_1, a_2, \dots, a_n,$$
$$b_1, b_2, \dots, b_n$$

е в сила неравенството

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right).$$

Знакът равенство се достига тогава и само тогава, когато

$$a_kx_0+b_ky_0=0,\ k=1, 2, \dots, n,$$

при някой избор на двете числа x_0 и y_0, от които поне едното е различно от нула.

Забележка. Това неравенство се нарича неравенство на Коши—Буняковски—Шварц.

Решение. Разглеждаме помощната квадратична форма

$$\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_ky)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)x^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)xy+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)y^2.$$

Тази квадратична форма не си мени знака и следователно нейната дискриминанта не е положителна, т. е.

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\leq 0.$$

Ако

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)=0,$$

то квадратичната форма не е дефинитна и следователно могат да се изберат две числа (от които поне едното е различно от нула) по такъв начин, че

$$\sum_{k=1}^{n}(a_kx_0+b_ky_0)^2=0$$

и следователно

$$a_kx_0+b_ky_0=0,\quad k=1, 2, \dots, n.$$

Обратно, ако са изпълнени последните равенства, то разглежданата форма не е дефинитна (понеже тя се анулира при $x=x_0$ и $y=y_0$, при все че поне едното от тези две числа е различно от нула) и следователно не може да имаме

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)<0.$$

От това заключаваме, че

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)=0,$$

което се вижда, разбира се, и директно.

4. Нека квадратичната форма

$$a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2$$

е дефинитна. Докажете, че функцията

$$\varphi(x)=|a\cos^2x+2b\cos x\sin x+c\sin^2x|$$

притежава съществено положителна долна граница.

Решение. Да разгледаме функцията $\varphi(x)$ в затворения интервал $[0, 2\pi]$ и да означим с m точната ѝ долна граница в този интервал. Очевидно $m\geq 0$. Остава да покажем, че $m\neq 0$. Това ще извършим по следния начин. Функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната, а интервалът $[0, 2\pi]$ е затворен и има крайна дължина. Следователно съгласно теоремата на Вайерщрас има поне една точка x_0, в която $\varphi(x_0)=m$. Ако допуснем, че $m=0$, ще получим

$$a\cos^2x_0+2b\cos x_0\sin x_0+c\sin^2x_0=0,$$

което не е вярно, защото квадратичната форма $a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2$ е дефинитна, а измежду числата $\cos x_0$ и $\sin x_0$ поне едно е различно от нула (тъй като $\cos^2x_0+\sin^2x_0=1$). И тъй числото m е съществено положително. Числото m е долна граница на $\varphi(x)$, когато x се мени в интервала $[0, 2\pi]$. Функцията $\varphi(x)$ е обаче периодична с период 2π. От това заключаваме, че m е долна граница на $\varphi(x)$ и тогава, когато x се мени върху цялата абсцисна ос.

5. Нека двата реда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^2 \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu^2$$

са сходящи. Покажете, че редът

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu$$

е абсолютно сходящ.

Упътване. Използувайте, че

$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{n+p} |a_\nu b_\nu|\right)^2 \leq \left(\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu^2\right)\left(\sum_{\nu=n+1}^{n+p} b_\nu^2\right).$$

§ 6. Теореми на Лопитал (L'Hospital)

В някои случаи ние можем с успех да използуваме теоремата на Коши (обобщената теорема за крайните нараствания) за намиране на граничните стойности на функциите. Настоящият параграф е посветен на този въпрос.

Нека ни са дадени две функции $f(x)$ и $g(x)$, които са дефинирани в някоя околност Δ на една точка a, и нека $g(a)=0$. В такъв случай отношението

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

не е дефинирано при $x=a$, защото $g(a)=0$. Така например нека $a=0$, Δ е цялата абсцисна ос, $f(x)=x$ и $g(x)=x$. Частното

$$F(x)=\frac{x}{x}$$

не е дефинирано при $x=0$ (при $x \neq 0$ то е дефинирано и има стойност 1).

Да се върнем към общия случай. Разбира се, няма смисъл да се питаме каква е стойността на функцията $F(x)$ при $x=a$. В тази точка тя не е дефинирана. Ако обаче в разглежданата околност $g(x) \neq 0$ при $x \neq a$, то бихме могли да поставим въпроса, дали функцията $F(x)$ притежава граница, или не, когато x клони към a чрез стойности, различни от a, както и въпроса за пресмятането на тази граница. В много случаи може да се получи отговор на тези въпроси с помощта на следната теорема на Лопитал (L'Hospital):

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в някой интервал, който съдържа точката a, диференцуеми поне при $x \neq a$ и непрекъснати при $x=a$. Нека* $g'(x) \neq 0$ при $x \neq a$ и $f(a)=g(a)=0$. Нека най-сетне частното $\frac{f'(x)}{g'(x)}$

* Условието $g'(x) \neq 0$ при $x \neq a$ ни осигурява също така, че $g(x) \neq 0$ при $x \neq a$, както това се вижда веднага с помощта на теоремата на Рол.

притежава граница, когато x клони* към a. В такъв случай частното $\frac{f(x)}{g(x)}$ също притежава граница, когато x клони* към a, и

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

И наистина, като приложим обобщената теорема за крайните нараствания (теоремата на Коши, вж. част II, гл. I, § 21), получаваме при $x \neq a$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{1}$$

където ξ е някое подходящо избрано число между a и x. Да положим

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l.$$

Когато оставим x да клони към a, то ξ също клони към a. Оттук заключаваме, че $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, а следователно и $\frac{f(x)}{g(x)}$ клони към l. С това всичко е доказано.

Пример 1. Да се намери границата на $\frac{\cos 3x}{\cos x}$, когато $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$. Тук са изпълнени всичките условия, при които е валидна теоремата на Лопитал. По-специално числителят и знаменателят се анулират при $x=\frac{\pi}{2}$. Като приложим правилото на Лопитал, получаваме

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos 3x)'}{(\cos x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 3x}{-\sin x}=-3.$$

Пример 2. Ще разгледаме един пример, при който намирането на границата става с неколкократно прилагане на теоремата на Лопитал. Да се намери границата на $\frac{2x-\sin 2x}{x-x\cos x}$, когато $x \longrightarrow 0$. С помощта на теоремата на Лопитал намираме

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{x-x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{1-\cos x+x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{2\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{8\cos 2x}{3\cos x-x\sin x}=\frac{8}{3}.$$

Нека обърнем внимание върху това, че границата

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

* Чрез стойности, различни от a.

може да съществува и без да съществува границата

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ще изясним това с един пример. Да разгледаме функцията

$$F(x)=\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}.$$

Функцията $F(x)$ притежава граница, когато $x\to 0$, защото

$$F(x)=\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}$$

и следователно

$$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

Въпреки това частното

$$\frac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

не притежава граница, когато x клони към нула (защо?).

При доказателството на теоремата на Лопитал ние си послужихме с равенството (1). Нека си дадем сметка какво бихме могли да извлечем от него, ако е дадено, че съществува границата

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ние разполагаме със свободата да избираме x в това равенство произволно, стига да принадлежи на Δ и да бъде различно от a (поради това ние можахме да оставим x да клони към a чрез произволна редица от стойности, разбира се, принадлежащи на Δ и различни от a). Напротив, ξ не е произволно, а се избира в зависимост от x. И така да предположим, че границата

$$l=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

съществува. От равенството (1) заключаваме, че може да се избере (и то по безбройно много начини) редица от числа

(2) $$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ldots,$$

различни от a, принадлежащи на Δ и клонящи към a по такъв начин, че редицата

$$\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)},\ \frac{f'(\xi_2)}{g'(\xi_2)},\ldots$$

да бъде сходяща и да клони към l. Нека подчертаем, че редицата (2) е подходящо (а не произволно) избрана. С това ние още далеч не сме доказали, че частното

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

притежава граница, когато x клони към a чрез произволна редица от стойности (разбира се, принадлежащи на Δ и различни от a). Такова нещо ние не можем да докажем, защото то не е вярно, както това се вижда от примера, който разгледахме по-горе.

Накрая ще докажем следната теорема:

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцуеми в отворения интервал (a, b), като $g'(x)\neq 0$. Нека освен това $g(x)$ расте неограничено, когато $x\to a$. В такъв случай, ако частното $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ има граница при $x\to a$, то частното $\frac{f(x)}{g(x)}$ също има граница, когато $x\to a$, и

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказателство. Да изберем едно положително число ε и да положим

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l.$$

В такъв случай може да се избере такова положително число δ, че при $|x-a|<\delta$ да имаме

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека x_0 и x са две произволни, различни помежду си числа от интервала (a, b), за които $|x-a|<\delta$ и $|x_0-a|<\delta$. Обобщената теорема за крайните нараствания ни дава

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

където ξ е число между x и x_0. Не е трудно да се докаже, че $|a-\xi|<\delta$. Това ни дава

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

или

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

От последното неравенство получаваме

$$|f(x)-f(x_0)-lg(x)+lg(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}|g(x)-g(x_0)|$$

или като делим* с $|g(x)|$,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x)}-l+l\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\left|1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|.$$

Оттук намираме

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|-\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right|-\left|l\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|$$

и най-сетне

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right|+\left|l\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|+\frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|.$$

В последното неравенство разполагаме със свободата да избираме числата x_0 и x произволно в интервала (a, b), стига да имаме $|x_0-a|<\delta$, $|x-a|<\delta$ и $x\neq x_0$. Ще се възползуваме от тази свобода по следния начин: ще фиксираме x_0 и ще даваме на x стойности, толкова близки до a, че да имаме

$$\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right|+\left|l\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|+\frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Това е възможно, защото $|g(x)|$ расте неограничено, когато x клони към a, докато x_0, а следователно както $f(x_0)$, така и $g(x_0)$ ни най-малко не зависят от x. И така, ако положителното число η е достатъчно малко, то при всички стойности на x от интервала (a, b), за които $|a-x|<\eta$, имаме

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

или

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

* Тук $g(x)\neq 0$, ако δ е достатъчно малко, защото $|g(x)|$ расте неограничено, когато x клони към a.

Задачи

Да се намерят следните граници:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^4-10x^2+9}{x^4-8x^2-9}$.

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{\cos 3x}$.

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

Упътване: Приведете под общ знаменател и приложете правилото на Лопитал.

5. $\lim\limits_{x\to 0}(x-\sin x)\ln x$.

Упътване. Приложете правилото на Лопитал за частното

$$\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x-\sin x}}.$$

6. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{\ln x}$.

Упътване.

$$(x-1)^{\ln x}=e^{(\ln x)\ln(x-1)}.$$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

Упътване.

$$\left[\frac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}}.$$

8. $\lim\limits_{x\to 0}x^x$.

9. Покажете, че двете теореми на Лопитал, които доказахме в § 6 на тази глава, запазват своята валидност и тогава, когато при извършвания граничен преход аргументът x расте неограничено (в § 6 разгледахме случая, когато x клони към някоя крайна точка a). Направете нужните за този случай изменения във формулировките на тези теореми.

Упътване. Положете $\frac{1}{x}=t$.

10. Намерете границата

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x+1}{x-1}.$$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-1})$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

13. Нека функцията $f(x)$ е два пъти диференцуема в някоя околност на точката x_0. Докажете, че

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0).$$

14. Намерете границата

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

като си послужите с методите, разгледани в § 6 на тази глава.

15. Намерете границата на редицата с общ член

$$a_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^n.$$

Упътване. Използувайте предната задача, като оставите x да клони към нула чрез редицата с общ член $x_n=\frac{2}{n}$.

16. Намерете границата на редицата с общ член

$$a_n=\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n.$$

Упътване: Използувайте задача 14.

17. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана, диференцуема при $x>a$ и $f'(x)$ клони към l, когато x расте неограничено. Да се покаже, че $\frac{f(x)}{x}$ също клони към l, когато x расте неограничено.

§ 7. Безкрайно малко

Ако $f(x)$ клони към нула, когато x клони към нула, казваме, че $f(x)$ е безкрайно малко заедно с x.

Пример 1. Нарастването

$$\Delta y=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)$$

е безкрайно малко заедно с h тогава и само тогава, когато функцията $y=\varphi(x)$ е непрекъсната в точката x_0.

Пример 2. Нека функцията $y=\varphi(x)$ е диференцуема в точката x_0. Диференциалът

$$dy=\varphi'(x_0)\,dx$$

е безкрайно малко заедно с dx.

Нека α е едно положително число. Казваме, че $f(x)$ е безкрайно малко от ред α спрямо x, ако отношението

$$\frac{f(x)}{x^\alpha}$$

клони към различна от нула граница, когато x клони към нула.

Пример 1. Ако функцията $y=\varphi(x)$ е диференцуема в някоя точка x_0 и $\varphi'(x_0)\neq 0$, то нарастването

$$\Delta y=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)$$

е безкрайно малко от първи ред спрямо h.

Пример 2. Ако функцията $\varphi(x)$ е диференцуема поне $n+1$ пъти в някоя околност на точката a и ако $f^{(n+1)}(x)$ е непрекъсната и различна от нула при $x=a$, то остатъчният член

$$R_n=f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1!}f'(a)-\frac{h^2}{2!}f''(a)-\cdots-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

във формулата на Тейлор е безкрайно малко от ред $n+1$ спрямо h.

Забележка. На нас не са ни известни случаи, когато се налага използуването на въведената в този параграф терминология. По-специално ние няма да си служим с нея в курса, който излагаме.

Общи задачи

1. Докажете, че при $x\neq 1$ имаме

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2},$$

като диференцирате двете части на равенството

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

2. Докажете, че при $\cos x\neq 1$ имаме

$$\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\cdots+n\sin nx=\frac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{2(1-\cos x)},$$

като диференцирате двете части на равенството

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Обикновено под нулева производна на една функция $f(x)$ се разбира функцията $f(x)$. Съобразно с това в задачите, които следват, трябва да се има пред вид, че $f^{(0)}(x)=f(x)$.

3. Намерете n-тите производни на функциите

a) $y=\frac{1-x}{1+x}$.

b) $y=\frac{x}{a+bx}$.

c) $=\frac{1}{x^2-1}$.

Упътване. Послужете си с тъждеството $\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{2(x+1)}$.

d) $y=\sin^2 x$.

Упътване. Послужете си с тъждеството $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

e) $y=\sin a x$.

f) $y=x^2 \cos a x$.

g) $y=x^2 e^{-x}$.

h) $y=\ln(1+x)$.

4 Намерете n-тата производна на функцията

$$y=\frac{\ln x}{x}.$$

Отговор.

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{n!}{x^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln x\right).$$

5. Докажете, че при $n=1, 2, 3, \dots$

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sin^4 x+\cos^4 x)=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

Вярна ли е формулата при $n=0$?

6. Докажете, че при $n=2, 3, \dots$

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{x^2}{1-x}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Вярна ли е формулата при $n=1$?

7. Намерете n-тата производна на функцията $y=e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$, където α е една константа.

8. Намерете n-тата производна на функцията

$$y=e^{ax}\cos b x.$$

Упътване. Вместо двете константи a и b въвеждаме две други константи r и φ, свързани с a и b посредством равенствата

(1) $$a=r\cos\varphi,\qquad b=r\sin\varphi.$$

Тази система има решение относно r и φ при всеки избор на a и b. Това ние можем да си уясним със следните геометрични съображения: разглеждаме в равнината на една декартова координатна система OXY точката M с координати (a, b); означаваме с φ кой да е от ъглите между положителната посока на оста OX и посоката на вектора OM, а с r означаваме големината на вектора OM; в такъв случай, както това непосредствено се вижда,

$$a=r\cos\varphi,\qquad b=r\sin\varphi.$$

По-късно ще покажем по чисто аналитичен път, че системата (1) има решение при всеки избор на a и b. Числата r и φ се наричат полярни координати на точката M. След въвеждане на константите r и φ функцията y добива вида

$$y=e^{xr\cos\varphi}\cos(xr\sin\varphi).$$

Намерете няколко последователни производни на тази функция, като извършвате съответните опростявания. След като откриете закономерността, по която се получават последователните производни, установете общата валидност на резултата с помощта на пълната индукция.

9. Докажете, че при $n\geq 2$

$$\frac{d^n}{dx^n}(x\ln x)=\frac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}.$$

10. Покажете, че функцията $f(x)=xe^{-x}$ удовлетворява равенствата $f^{(n)}(n)=0$ при всички цели неотрицателни стойности на n.

11. Докажете, че при всички цели неотрицателни стойности на n е в сила равенството

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{n-1}\sin\frac{1}{x}=\frac{(-1)^n\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\right)}{x^{n+1}}.$$

Решение. Доказателството извършваме индуктивно. При $n=0$ проверката е непосредствена. С помощта на формулата на Лайбниц получаваме

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}x^n\sin\frac{1}{x}=\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}x\cdot\left(x^{n-1}\sin\frac{1}{x}\right)=x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}x^{n-1}\sin\frac{1}{x}+$$
$$+(n+1)\frac{d^n}{dx^n}x^{n-1}\sin\frac{1}{x}.$$

Ако допуснем, че при някоя стойност на n имаме

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{n-1}\sin\frac{1}{x}=\frac{(-1)^n\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\right)}{x^{n+1}},$$

то

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}x\sin\frac{1}{x}=x\left[\frac{(-1)^n\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\right)}{x^{n+1}}\right]'+(n+1)\frac{(-1)^n\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\right)}{x^{n+1}}=$$
$$=\frac{(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{n+1}{2}\pi\right)}{x^{n+2}}.$$

12. Докажете, че при всички цели неотрицателни стойности на n е в сила равенството

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right) = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$$

(G. H. Halphen).

13. Докажете, че при всички цели положителни стойности на n е в сила равенството

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}\ln x) = \frac{(n-1)!}{x}.$$

14. Нека функцията $f(x)$ е диференцуема поне n пъти при $x>0$. Докажете, че при $x>0$

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}[x^{n-1} f(x)] = t^{n+1} \frac{d^n}{dt^n} f(x),$$

където $t=\frac{1}{x}$ и n е цяло неотрицателно число.

Забележка. Сравнете със задачи 11, 12 и 13.

Упътване. Извършете доказателството индуктивно. За тази цел проверете верността на равенството при $n=0$ и използувайте верigата равенства

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} x^{n-1} f(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} x \cdot x^{n-2} f(x) =$$

$$= (-1)^n x \frac{d^n}{dx^n} x^{n-2} f(x) + (-1)^n n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} x^{n-2} f(x) =$$

$$= (-1)^n x \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} x^{n-2} f(x)\right] + (-1)^n n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} x^{n-2} f(x) =$$

$$= -x \frac{d}{dx}\left[t^n \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(x)\right] - nt^n \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(x) =$$

$$= -x \frac{-1}{x^2} \frac{d}{dt}\left[t^n \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(x)\right] - nt^n \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(x) = t^{n+1} \frac{d^n}{dt^n} f(x).$$

15. Нека функцията $f(x)$ е диференцуема поне $k+n$ пъти при $x>0$. Докажете, че при $x>0$ е в сила равенството

$$(-1)^{n-1} \frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}} x^{n-1} f(x) = t^{k+n+1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} t^{-k-2} f^{(k+1)}(x),$$

където $t=\frac{1}{x}$, а числата k и n са цели неотрицателни.

Забележка. Тъждеството от предната задача се получава от това по-общо тъждество при $k=0$ (как?).

Упътване. Доказателството извършете индуктивно по отношение на n.

16. Ако елементите на детерминантата

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) & \dots & u_{1n}(x) \\ u_{21}(x) & u_{22}(x) & \dots & u_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1}(x) & u_{n2}(x) & \dots & u_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

са диференцуеми функции на x, то

$$\Delta'(x) = \begin{vmatrix} u_{11}' & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21}' & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1}' & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12}' & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22}' & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2}' & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n}' \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn}' \end{vmatrix}.$$

17. Нека $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ са три функции, непрекъснати в затворения интервал $[a, b]$ и диференцуеми поне във вътрешността му. Да се докаже, че има точка ξ в отворения интервал (a, b), за която

$$\begin{vmatrix} f_1'(\xi) & f_2'(\xi) & f_3'(\xi) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix} = 0.$$

Упътване. Приложете за функцията

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix}$$

теоремата на Рол (разбира се, трябва да проверите предварително, че $\varphi(x)$ удовлетворява всичките условия, при които е доказана теоремата на Рол).

18. Нека $f(x)$ е полином, чиято степен не надминава n. Докажете, че

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{a-x}{1!} f'(x) + \frac{(a-x)^2}{2!} f''(x) + \frac{(a-x)^3}{3!} f'''(x) + \dots + \frac{(a-x)^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

не зависи от x и се равнява на $f(a)$.

Упътване. Докажете, че $\varphi'(x)=0$, а следователно $\varphi(x)=\varphi(a)=f(a)$.

19. Нека $f(x)$ и $g(x)$ са два полинома, чиято степен не надминава n. Докажете, че функцията

$$\varphi(x) = f^{(n)}(x)\, g(x) - f^{(n-1)}(x)\, g'(x) + f^{(n-2)}(x)\, g''(x) - \dots + (-1)^n f(x)\, g^{(n)}(x)$$

е константа (срв. предната задача).

20. Функцията

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

се нарича n-ти полином на Лежандър (Legendre). Докажете, че $P_n(x)$ е полином от n-та степен.

21. Докажете, че n-тият Лежандров полином (срв. предната задача) се анулира при n различни стойности на x, разположени в интервала $(-1, 1)$.

Упътване. Нека $\varphi(x)=(x^2-1)^n$. Очевидно $\varphi(-1)=\varphi(1)=0$. Това ни дава право да приложим за функцията $\varphi(x)$ теоремата на Рол. И така има поне една точка ξ във вътрешността на интервала $(-1, 1)$, в която $\varphi'(\xi)=0$. При $n>0$ обаче имаме $\varphi'(-1)=\varphi'(1)=0$, защото $\varphi'(x)=n(x^2-1)^{n-1}.2x$. Това ни дава право да приложим теоремата на Рол по отношение на $\varphi'(x)$ за двата интервала $(-1, \xi)$ и $(\xi, 1)$ и пр.

22. Докажете, че n-тият Лежандров полином

$$y=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

удовлетворява диференциалното уравнение

$$(x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y=0.$$

Решение. Полагаме

$$u=(x^2-1)^n.$$

Очевидно

$$u'=n(x^2-1)^{n-1}.2x$$

и следователно

$$u'(x^2-1)=2nxu.$$

Диференцираме двете части на това равенство $n+1$ пъти с помощта на формулата на Лайбниц и получаваме

$$u^{(n+2)}(x^2-1)+(n+1).2xu^{(n+1)}+(n+1)nu^{(n)}=2nxu^{(n+1)}+2n(n+1)u^{(n)}$$

или

$$u^{(n+2)}(x^2-1)+2xu^{(n+1)}-n(n+1)u^{(n)}=0.$$

Като вземем пред вид, че $y=u^{(n)}$, намираме

$$(x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y=0.$$

23. Нека

$$P_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Как трябва да се избере константата C_n, за да имаме $C_n P_n(1)=1$?

Упътване. Приложете формулата на Лайбниц за произведението $(x-1)^n(x+1)^n$.

Отговор. $C_n=\dfrac{1}{2^n.n!}$.

24. Докажете, че функцията $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ монотонно намалява при $0<x\leq\pi$.

Решение. Изучаваме знака на производната

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

Тъй като знаменателят x^2 е положителен, достатъчно е да изследваме знака на числителя

$$g(x)=x\cos x-\sin x.$$

От друга страна,

$$g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x,$$

т. е. при $0<x\leq\pi$ имаме $g'(x)\leq 0$. Това показва, че функцията $g(x)$ монотонно намалява в интервала $0<x\leq\pi$. И така при $0<x\leq\pi$ имаме

$$g(x)<g(0)=0,$$

откъдето заключаваме, че производната $f'(x)$ е отрицателна и следователно функцията $f(x)$ е монотонно намаляваща.

25. Докажете, че функцията $\dfrac{x}{1+x^2}$ расте монотонно в интервала $[-1, 1]$ и намалява монотонно както в безкрайния интервал $x\geq 1$, така и в безкрайния интервал $x\leq -1$.

26. Изследвайте кога расте и кога намалява функцията

$$x^3-3x^2+24.$$

27. Нека n е едно цяло положително четно число. Докажете, че при всички стойности на x е в сила неравенството

$$(1+x)^n\geq 1+nx.$$

Решение. Образуваме си помощната функция

$$\varphi(x)=(1+x)^n-1-nx.$$

Очевидно имаме

$$\varphi'(x)=n(1+x)^{n-1}-n,$$

$$\varphi''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}.$$

Тъй като $n-2$ е четно число, то при всички стойности на x имаме $\varphi''(x)\geq 0$, което показва, че функцията $\varphi'(x)$ монотонно расте. И така при $x\geq 0$ имаме $\varphi'(x)\geq\varphi'(0)=0$, а при $x\leq 0$ имаме $\varphi'(x)\leq\varphi'(0)=0$. Това показва, че функцията $\varphi(x)$ расте при $x\geq 0$, и намалява при $x\leq 0$, т. е. неравенството $\varphi(x)\geq\varphi(0)$ е изпълнено както при $x\geq 0$ така и при $x\leq 0$.

От неравенството $\varphi(x)\geq\varphi(0)=0$ получаваме

$$(1+x)^n\geq 1+nx.$$

28. Нека $n\geq 1$. Докажете, че при $x\geq -1$ е валидно неравенството

$$(1+x)^n\geq 1+nx.$$

29. Докажете, че при $x\geq 0$ е в сила неравенството

$$\sin x\geq x-\frac{x^3}{6}.$$

Упътване. Разгледайте помощната функция

$$f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}.$$

30. Докажете, че при всички стойности на x е в сила неравенството

$$(-1)^{n-1}\left[\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]\geq 0$$

и при $x \geq 0$ е в сила неравенството

$$(-1)^{n-1}\left[\sin x-\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]\geq 0$$

каквото и да е цялото положително число n.

Упътване. Извършете доказателството индуктивно, като изучите производните на двете функции

$$f_n(x)=(-1)^{n-1}\left[\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right],$$

$$g_n(x)=(-1)^{n-1}\left[\sin x-\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right].$$

31. Докажете, че при $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ е в сила неравенството

$$\frac{\sin x}{x}\geq \pi$$

32. Докажете, че ако $x > 0$, то $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$.

Упътване. Изучете производната на функцията

$$\varphi(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}.$$

33. Докажете, че ако $x > -1$, то $\ln(1+x)\leq x$.

34. Докажете, че ако $x > -1$ и ако цялото положително число n е нечетно, то

$$\ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^n}{n}.$$

35. Докажете, че при всички стойности на x е в сила неравенството $xe^{1-x}\leq 1$.

Упътване. Докажете, че функцията $f(x)=xe^{1-x}$ расте в интервала $x\leq 1$ и намалява в интервала $x\geq 1$.

36. Докажете, че при всички стойности на x е в сила неравенството $e^x\geq 1+x$.

Решение. Прилагаме към функцията e^x формулата на Маклорен и представяме остатъчния член към формата на Лагранж

$$e_x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}e^{\theta x},\ 0<\theta<1.$$

Като вземем пред вид, че изразът $\frac{x^2e^{\theta x}}{2!}$ е неотрицателен и е нула само при $x=0$, заключаваме, че

$$e^x\geq 1+x,$$

където равенството се достига само при $x=0$.

37. Докажете, че при всички стойности на x и при нечетни стойности на n имаме

$$e^x\geq 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

38. Намерете Маклореновото развитие на функцията $e^x\cos x$.

Отговор.

$$e^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi n}{4}}{n!}x^n.$$

Изучавайки остатъчния член, заключаваме, че това развитие представлява функцията при всички стойности на x.

39. Да разгледаме функцията $f(x)$, дефинирана по следния начин:

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\ \text{при}\ x\neq 0.$$
$$f(0)=0.$$

Докажете, че функцията $f(x)$ е диференцуема безбройно много пъти при всички стойности на x (включително и $x=0$) и всичките нейни производни

$$f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ldots$$

при $x=0$ имат стойност нула.

Забележка. По този начин ние получаваме пример за една функция, чийто Тейлоров ред

$$f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots$$

е сходящ при всяко x, без да представлява функцията.

Упътване. Функцията е очевидно диференцуема безбройно много пъти при $x\neq 0$. Покажете, че при $x\neq 0$

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

където $P_n(u)$ е един полином на u. Докажете индуктивно, че функцията $f(x)$ е диференцуема безбройно много пъти в началото и $f^{(n)}(0)=0$, като се възползувате от дефиницията на понятието производна

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(h)-f^{(n)}(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}P_n\left(\frac{1}{h}\right)e^{-\frac{1}{h^2}}=0.$$

40. Нека функцията $f(x)$ е два пъти диференцуема в някой интервал и втората й производна е нула във всяка точка на този интервал. Докажете, че $f(x)$ е линейна функция на x.

Решение. Дадено е, че във всички точки на разглеждания интервал $f''(x)=0$. От това заключаваме, че $f'(x)$ е константа (понеже производната на $f'(x)$ е равна на нула в целия интервал). Да означим с a тази константа. И така за всяко x от разглеждания интервал имаме $f'(x)=a$, което може да се напише още във вида $[f(x)-ax]'=0$. И така производната на функцията $f(x)-ax$ е нула във всички точки от разглеждания интервал. Оттук заключаваме, че $f(x)-ax$ е константа. Като означим с b тази константа, получаваме $f(x)-ax=b$ или $f(x)=ax+b$.

41. Не е трудно да се види, че при всеки избор на константите a и b функцията $y=(ax+b)e^x$ удовлетворява уравнението

$$y''-2y'+y=0 \tag{2}$$

(проверете, че това е действително така!). Докажете, че няма други функции, които са дефинирани и два пъти диференцуеми за всяко x и които при всяко x удовлетворяват уравнението (2).

Упътване. Нека y е една функция, която удовлетворява уравнението. Разгледайте помощната функция $u=ye^{-x}$ и докажете, че втората ѝ производна е нула при всички стойности на x. Използувайте предната задача.

42. Докажете, че няма други функции освен

$$y=A\cos x+B\sin x,$$

където A и B са произволни константи, които са диференцуеми два пъти при всяко x и удовлетворяват диференциалното уравнение

$$y''+y=0.$$

Упътване. Образувайте двете помощни функции

$$f(x)=y\cos x-y'\sin x,$$

$$g(x)=y\sin x+y'\cos x \qquad (3)$$

и докажете, че $f'(x)=0$ и $g'(x)=0$. След това решете системата (3) относно y, като елиминирате y'.

43. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, диференцуема е поне във вътрешността му и в двата края на този интервал се анулира. Докажете, че при всеки избор на числото λ може да се намери число ξ във вътрешността на интервала (a, b), за което

$$\lambda f(\xi)+f'(\xi)=0.$$

Упътване. Приложете теоремата на Рол за функцията

$$\varphi(x)=e^{\lambda x}f(x).$$

44. Нека функцията $f(x)$ е диференцуема $n+1$ пъти в някой интервал Δ и $f^{(n+1)}(x)=0$ за всяко x от този интервал. Докажете, че $f(x)$ е полином в разглеждания интервал, чиято степен не надминава n.

Решение. Формулата на Тейлор ни дава

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n,$$

където

$$R_n=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)=0.$$

45. Докажете, че редът

$$\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots$$

е сходящ при $x>1$ и разходящ при $x\leq 1$.

Забележка. Ние сме изучавали досега този ред само при цели стойности на x.

Упътване. При $x>1$ приложете критерия на Раабе—Дюамел или разсъждавайте например така: да положим

$$S_n=\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}.$$

В такъв случай

$$S_{2n+1}=\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^x}=$$

$$=\left[\frac{1}{1^x}+\frac{1}{3^x}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^x}\right]+\left[\frac{1}{2^x}+\frac{1}{4^x}+\ldots+\frac{1}{(2n)^x}\right]<$$

$$<1+\frac{S_n}{2^x}+\frac{S_n}{2^x}$$

и следователно

$$S_n<1+\frac{S_n}{2^{x-1}},$$

т. е. при $x>1$

$$S_n<\frac{2^{x-1}}{2^{x-1}-1};$$

при $x\leq 1$ сравнете реда с хармоничния ред.

46. Докажете, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$$

е сходяща.

Упътване. Докажете, че редът

$$a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_n-a_{n-1})+\ldots \qquad (4)$$

е сходящ, като установите с помощта на формулата на Тейлор, че

$$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n^2}\frac{1}{\left(1+\frac{\theta}{n}\right)^2}$$

и следователно

$$0<a_n-a_{n-1}<\frac{1}{n^2}.$$

От сходимостта на реда (4) следва сходимостта на изучаваната редица, защото a_n е точно n-тата частична сума на (4).

Забележка. Границата на разглежданата редица се означава обикновено с буквата C и се нарича Euler'ова константа. Нейната числена стойност е

$$C=0{,}5772156\ldots$$

Досега не е известно дали това число е рационално, или ирационално. Константата C играе важна роля в много въпроси на анализа.

47. Докажете, че при $|x|\leq 1$

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Упътване. Разгледайте функцията

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{5}$$

Покажете, че във вътрешността на интервала $(-1, 1)$ имаме

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

като използувате Нютоновото развитие на $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. По-нататък вземете пред вид, че производната на функцията $\arcsin x$ при $|x|<1$ е също $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и още, че

$$\arcsin 0 = f(0) = 0.$$

Оттук заключете, че

$$\arcsin x = f(x)$$

при $|x|<1$. За да установите валидността на последното равенство при $x=\pm 1$, покажете, че редът (5) е равномерно сходящ в затворения интервал $[-1, 1]$ и следователно $f(x)$ е непрекъсната функция. За тази цел покажете, че редът

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1},$$

членовете на който не зависят от x, е сходящ.

48. Нека

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

са произволни положителни числа, а числата p и q удовлетворяват условията $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Докажете, че

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Кога е възможен знакът равенство?

Забележка. Това важно неравенство, известно под името неравенство на Хьолдер (Hölder), се обръща в неравенството на Коши—Буняковски—Шварц при $p=q=2$ (вж. задача 3 към § 5 на тази глава). Нека припомним обаче, че в неравенството на Коши—Буняковски—Шварц не се иска числата $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ да бъдат непременно положителни.

Упътване. Разгледайте функцията $f(x)=x^p$ и покажете, че тя е изпъкнала при $x>0$, когато $p>1$. Използувайте неравенството

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k),$$

като поставите

$$x_k = a_k b_k^{-\frac{q}{p}}, \quad p_k = \frac{b_k^q}{b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q}.$$

49. Нека числата

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

са положителни и $p>1$. Докажете, че

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Забележка. Това неравенство се нарича неравенство на Минковски.

Решение. Очевидно имаме

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p = \sum_{k=1}^{n} a_k(a_k+b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k(a_k+b_k)^{p-1}.$$

Като приложим за двете последни суми неравенството на Хьолдер и положим $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, получаваме

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} +$$
$$+ \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} =$$
$$= \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Оттук получаваме исканото неравенство, като съкратим на последния множител.

50. Докажете, че измежду всичките полиноми от n-та степен, на които коефициентът пред x^n е равен на 1, само полиномът на Чебишев

$$P(x) = \frac{\cos(n \arccos x)}{2^{n-1}}$$

удовлетворява неравенството

$$|P(x)| \le \frac{1}{2^{n-1}} \text{ при } |x| \le 1.$$

Забележка. Вижте задачи 28 и 29 към § 17, глава III, част II. Като разгледате тези задачи, ще се убедите, че наистина при $|x|\le 1$ функцията $P(x)$ е полином на x от n-та степен и коефициентът пред x^n е равен на 1.

Упътване. Не е трудно да се види, че при $|x| \leq 1$

$$|P(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Тук равенството се достига при $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$, където $k=0, 1, 2, \ldots, n$, като

$$P(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}.$$

По-интересно е да се види, че няма друг полином $Q(x)$ от n-та степен, за който коефициентът пред x^n е 1 и за който е изпълнено неравенството

$$|Q(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

при $|x| \leq 1$. Доказателството извършете от противното. Образувайте си помощния полином

$$\varphi(x) = P(x) - Q(x),$$

степента на който е очевидно по-малка от n. Покажете, че

(6) $$(-1)^k \varphi(x_k) \geq 0.$$

Като сравните коефициентите пред x^n в двете части на интерполационната формула на Лагранж

$$\varphi(x) = \varphi(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} +$$
$$+\varphi(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\varphi(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})},$$

докажете, че

$$\frac{\varphi(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} +$$
$$+\frac{\varphi(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \ldots + \frac{\varphi(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} = 0.$$

Покажете, че всичките събираеми на тази сума са неотрицателни, като се възползувате от неравенствата (6) и от неравенствата

$$x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n.$$

Използувайте този резултат, за да покажете, че $\varphi(x)$ се анулира тъждествено.

Забележка. Тази теорема на П. Л. Чебишев изразява в същност, че измежду всичките полиноми от дадена степен n, за които коефициентът пред x^n е равен на единица, модулът на полинома

$$P(x) = \frac{\cos(n \arc\cos x)}{2^{n-1}}$$

при $|x| \leq 1$ има най-малка точна горна граница. Това се изразява понякога накратко, като се казва, че от всичките разглеждани полиноми полиномите на Чебишев се отклоняват най-малко от нулата. Изследванията на П. Л. Чебишев в това направление послужиха за основа на изследванията на многобройни автори, като по този начин беше създадена обширна област от анализа, известна под името конструктивна теория на функциите.

51. Докажете, че при $0 < x < 2\pi$ имаме

$$\frac{\pi - x}{2} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots$$

Упътване. Разгледайте помощната функция

$$F(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \frac{x}{2} + \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2}},$$

която е добре дефинирана в отворения интервал $(0, 2\pi)$. Изберете числото x произволно в този интервал и приложете към функцията $F(x)$ по отношение на интервала (x, π) теоремата на крайните нараствания. Това ще ви даде

(7) $$F(x) - F(\pi) = (x - \pi)F'(\xi),$$

където ξ е едно число между x и π. Докажете, че

(8) $$F'(x) = -\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x \cdot \cos\frac{x}{2}}{(4n+2)\sin^2\frac{x}{2}},$$

като предварително установите (например индуктивно), че

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Като се възползувате от равенствата (7) и (8), покажете, че

$$\left|\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} - \frac{\pi - x}{2}\right| \leq \frac{|x-\pi|}{(4n+2)\sin^2\frac{\xi}{2}} \leq \frac{|x-\pi|}{(4n+2)\sin^2\frac{x}{2}},$$

и приложете дефиницията на понятието сума на един ред.

Забележка. Редът

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots$$

играе важна роля в теорията на тригонометричните редове.

52. Нека функцията $f(x)$ е безбройно много пъти диференцуема и удовлетворява неравенствата

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$$

при $a < x \leq b$ и при всички цели неотрицателни стойности на k. Докажете, че функцията $f(x)$ може да се развие в Тейлоров ред

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(b)(b-x)^{\nu}}{\nu!}$$

при $a < x \leq b$ (С. Н. Бернщайн).

Упътване. От формулата на Тейлор имаме при $a < c < x \leq b$

$$f(c)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(x)(x-c)^{\nu}}{\nu!}+\frac{(-1)^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}$$

и следователно

$$f^{(n)}(x)\leq\frac{f(c)\,n!}{(x-c)^{n}}.$$

Използувайте това неравенство, за да покажете, че остатъчният член във формулата

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(b)}{\nu!}(b-x)^{\nu}+R_n$$

клони към нула при $c < x \leq b$. За целта е удобно да използувате представянето

$$R_n=\left(\frac{x-b}{c-b}\right)^{n+1}\frac{(c-\xi)^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!\,(c-x)}.$$

Полученият резултат е валиден при $a < x \leq b$, тъй като c може да се избере произволно близо до a.

53. Нека функцията $f(x)$ е безбройно много пъти диференцуема при $x > 0$ и удовлетворява неравенствата

$$(-1)^{k}f^{(k)}(x)\geq 0$$

при всички положителни стойности на x и всички цели неотрицателни стойности на k. В такъв случай при всички неотрицателни стойности на x и всички реални стойности на λ имаме

$$\lambda^{2}f(x)+2\lambda f'(x)+f''(x)\geq 0$$

(С. Н. Бернщайн).

Упътване. Използувайте, че при $a < x < b$ и при произволни λ и β

$$\lambda^{2}f(x)+2\lambda\beta(b-x)f'(x)+\beta^{2}[(b-x)^{2}f''(x)-(b-x)f'(x)]=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(b)\frac{(b-x)^{\nu}}{\nu!}(\lambda-\nu\beta)^{2}\geq 0.$$

Фиксирайте λ и x, положете $\beta=\frac{1}{b-x}$ и оставете b да расте неограничено.

54. Нека функцията $f(x)$ е безбройно много пъти диференцуема при $x > 0$ и удовлетворява неравенствата

$$0\leq(-1)^{k}f^{(k)}(x)\leq e^{-x}$$

при всички положителни стойности на x и при всички неотрицателни стойности на k. Докажете, че

$$f(x)=ce^{-x},$$

където c е константа.

Упътване. Приложете предната задача за двете функции $f(x)$ и $\varphi(x)=e^{-x}-f(x)$, като използувате, че

$$f(x)+2f'(x)+f''(x)\geq 0$$

и

$$\varphi(x)+2\varphi'(x)+\varphi''(x)\geq 0$$

и следователно

$$f(x)+2f'(x)+f''(x)=0.$$

55. Функция от вида

$$P(\varphi)=a_0+\sum_{\nu=1}^{n}(a_{\nu}\cos\nu\varphi+b_{\nu}\sin\nu\varphi)$$

се нарича тригонометричен полином, чийто ред не надминава n. Докажете, че ако един тригонометричен полином, чийто ред не надминава n, се анулира за повече от $2n$ стойности на аргумента в полузатворения интервал $-\pi < \varphi \leq \pi$, то всичките му коефициенти са равни на нула.

Упътване. Положете $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=t$ и като използувате, че

$$\cos\nu\varphi=\frac{1-t^{2}}{1+t^{2}}\cos(\nu-1)\varphi-\frac{2t}{1+t^{2}}\sin(\nu-1)\varphi,$$

$$\sin\nu\varphi=\frac{1-t^{2}}{1+t^{2}}\sin(\nu-1)\varphi+\frac{2t}{1+t^{2}}\cos(\nu-1)\varphi,$$

представете $\cos\nu\varphi$ и $\sin\nu\varphi$ във вида

$$\cos\nu\varphi=\frac{f(t)}{(1+t^{2})^{\nu}},\quad \sin\nu\varphi=\frac{g(t)}{(1+t^{2})^{\nu}},$$

където $f(t)$ и $g(t)$ са полиноми съответно от степени 2ν и $2\nu-1$.

56. Нека

$$P(\varphi)=\sum_{\nu=0}^{n}(a_{\nu}\cos\nu\varphi+b_{\nu}\sin\nu\varphi)$$

е тригонометричен полином, чийто ред не надминава r. Да се покаже, че

$$P(\varphi)=a_n\cos n\varphi+\frac{\cos n\varphi}{2n}\sum_{r=1}^{2n}P(\varphi_r)(-1)^{r}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\varphi_r}{2},$$

където $\varphi_r=\frac{2r-1}{2n}\pi$ (М. Рис—Riesz).

Упътване. Като използувате, че

$$(-1)^r \cos n\varphi \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\varphi_r}{2} = \sin n(\varphi-\varphi_r) \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\varphi_r}{2} =$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\varphi-\varphi_r)}{\sin\frac{\varphi-\varphi_r}{2}} - \cos n(\varphi-\varphi_r) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \cos(\varphi-\varphi_r) + \cos 2(\varphi-\varphi_r) + \dots + \cos n(\varphi-\varphi_r)\right) - \cos n(\varphi-\varphi_r),$$

покажете, че функцията

$$F(\varphi) = \frac{\cos n\varphi}{2n} \sum_{r=1}^{2n} P(\varphi_r)(-1)^r \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\varphi_r}{2}$$

е тригонометричен полином, чийто ред не надминава n. Този тригонометричен полином не съдържа $\cos n\varphi$, защото $\cos n\varphi_r = 0$. Оттук следва, че тригонометричният полином

$$F(\varphi)+F(-\varphi)$$

е най-много от ред $n-1$. Покажете, че той съвпада с тригонометричния полином

$$P(\varphi)+P(-\varphi)-2a_n \cos n\varphi$$

в точките $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n}$ и следователно съвпада с него тъждествено.

Разгледайте тригонометричния полином

$$F(\varphi)-F(-\varphi),$$

чийто ред не надминава n, и покажете, че той съвпада с тригонометричния полином

$$P(\varphi)-P(-\varphi)$$

в точките $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n}$, 0 и следователно съвпада с него тъждествено. Заключете оттук, че

$$P(\varphi) = a_n \cos n\varphi + F(\varphi).$$

57. Нека

$$P(\theta) = \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu \cos\nu\theta + b_\nu \sin\nu\theta)$$

е тригонометричен полином, чийто ред не надминава n. Да се покаже, че

$$P'(\theta) = \frac{1}{2n} \sum_{r=1}^{2n} P(\theta+\varphi_r) \frac{(-1)^{r+1}}{2\sin^2\frac{\varphi_r}{2}},$$

където

$$\varphi_r = \frac{2r-1}{2n}\pi$$

(М. Рис — M. Riesz).

Упътване. Приложете интерполационната формула от предната задача към тригонометричния полином

$$f(\varphi) = P(\theta+\varphi),$$

диференцирайте по φ и положете $\varphi = 0$.

58. Нека тригонометричният полином

$$P(\theta) = \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu \cos\nu\theta + b_\nu \sin\nu\theta)$$

удовлетворява неравенството

$$|P(\theta)| \le 1.$$

Покажете, че

$$|P'(\theta)| \le n,$$

където равенството се достига само при тригонометричните полиноми от вида $P(\theta) = \sin n(\theta+c)$ (c е константа) (С. Бернщайн).

Упътване. Използувайте интерполационната формула от предната задача.

59. Нека функцията $f(x)$ е диференцуема при $a \le x \le b$ и нека $f'(a)f'(b) < 0$. Да се покаже, че производната $f'(x)$ се анулира поне веднъж в интервала (a, b) (Дарбу — G. Darboux).

Упътване. Нека например $f'(a) < 0$ и $f'(b) > 0$. Избираме $h > 0$ толкова малко, че да имаме

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < 0,$$

$$\frac{f(b-h)-f(b)}{-h} > 0.$$

Разглеждаме непрекъснатата функция

$$\varphi(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

в интервала $[a, b-h]$. Очевидно $\varphi(a) < 0$ и $\varphi(b-h) > 0$ и следователно има точка ξ в интервала $(a, b-h)$, за която $\varphi(\xi) = 0$, т. е.

$$\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = 0$$

или още $f'(\xi+\theta h) = 0$, където θ е подходящо число между 0 и 1.

60. Ако редът

$$s = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

е сходящ, то функцията

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

клони към s, когато x клони към 1 чрез стойности, по-малки от 1 (Абел — N. H. Abel).

Упътване. Полагаме

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu.$$

В такъв случай

$$f(x) = (1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu$$

и следователно

$$|s-f(x)| \leq (1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty}|s-s_\nu|\, x^\nu.$$

61. Да се докаже, че ако трите реда

$$S'=u_0+u_1+u_2+\ldots,$$

$$S''=v_0+v_1+v_2+\ldots,$$

$$S=u_0v_0+(u_1v_0+u_0v_1)+\ldots+(u_nv_0+u_{n-1}v_1+\ldots+u_0v_n)+\ldots$$

са сходящи, то $S=S'S''$.

Упътване. Приложете теоремата на Мертенс (или пък теоремата на Коши за умножаване на абсолютно сходящи редове) към двата абсолютно сходящи реда

$$u_0+u_1t+u_2t^2+\ldots,$$

$$v_0+v_1t+v_2t^2+\ldots$$

при $|t|<1$ и оставете t да клони към 1, като използувате предната задача.

62. Нека $0<b<1$. Очевидно редът

$$F(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b^\nu \cos(a^\nu \pi x)$$

е равномерно сходящ върху цялата ос x и следователно представлява непрекъснатата функция на x. Покажете, че тази непрекъснатата функция няма производна при никое x, ако a е достатъчно голямо цяло нечетно число (Вайерщрас).

Упътване. Нека m е цяло положително число. Винаги можем да пишем

$$a^m x=\alpha_m+\xi_m,$$

където α_m е цяло число и $|\xi_m|\leq\frac{1}{2}$. Положете

$$h=\frac{1-\xi_m}{a^m}$$

и разгледайте отношението

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=S_m+R_m,$$

където

$$S_m=\frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{m-1} b^\nu[\cos a^\nu\pi(x+h)-\cos a^\nu\pi x)],$$

$$R_m=\frac{1}{x}\sum_{\nu=m}^{\infty} b^\nu[\cos a^\nu\pi(x+h)-\cos(a^\nu\pi x)].$$

Теоремата за крайните нараствания ни дава

$$|S_m|\leq\sum_{\nu=0}^{m-1} b^\nu a^\nu\pi=\pi\frac{a^m b^m-1}{ab-1}.$$

От друга страна, при $\nu\geq m$

$$\cos a^\nu\pi(x+h)=(-1)^{\alpha_m+1},$$

$$\cos(a^\nu\pi x)=(-1)^{\alpha_m}\cos(a^{\nu-m}\xi_m\pi)$$

и следователно

$$R_m=\frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h}\sum_{\nu=m}^{\infty} b^\nu[1+\cos(a^{\nu-m}\xi_m\pi)],$$

откъдето

$$|R_m|\geq\frac{b^m}{|h|}=\frac{b^m a^m}{1-\xi_m}\geq\frac{2a^m b^m}{3},$$

т. е.

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right|\geq|R_m|-|S_m|\geq\frac{(ab)^m(2ab-2-3\pi)+3\pi}{3(ab-1)}.$$

Оттук е ясно, че е достатъчно да имаме

$$ab>1+\frac{3\pi}{2},$$

за да сме сигурни, че отношението

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

расте неограничено заедно с m.

63. Да се установи тъждеството

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(\nu-nx)^2x^\nu(1-x)^{n-\nu}=nx(1-x).$$

Упътване. Разгледайте функцията

$$\varphi(t)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}t^\nu(1-x)^{n-\nu}=(t+1-x)^n$$

и пресметнете

$$t\varphi'(t)$$

и

$$t\varphi'(t)+t^2\varphi''(t).$$

Оттук ще получите при $t=x$

$$\sum_{\nu=0}^{n}\nu\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}=nx,$$

$$\sum_{\nu=0}^{n}\nu^2\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}=n(n-1)x^2+nx$$

и следователно

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(\nu-nx)^2x^\nu(1-x)^{n-\nu}=nx(1-x).$$

64. Всяка непрекъснатата в краен и затворен интервал функция $f(x)$ може да се апроксимира равномерно в този интервал с полиноми (Вайерщрас).

Упътване. Без да ограничаваме общността, можем да считаме, че разглежданият интервал е интервалът $[0, 1]$. Покажете, че полиномите на Бернщайн

$$B_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}$$

клонят равномерно към непрекъсната функция $f(x)$ в интервала $[0, 1]$, когато $n\to\infty$. За целта изберете $\varepsilon>0$ и му съпоставете $\delta>0$ по такъв начин, че при $|x_1-x_2|<\delta$ да имате

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon.$$

След това фиксирайте x и разгледайте неравенството

$$|B_n(x)-f(x)|\leq\sum_{\nu=0}^{n}\left|f\left(\frac{\nu}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2,$$

където Σ_1 е сумата на онези събираеми от

$$\sum_{\nu=0}^{n}\left|f\left(\frac{\nu}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu},$$

при които $\left|\frac{\nu}{n}-x\right|<\delta$, а Σ_2 е сумата на останалите събираеми. Най-сетне използувайте, че

$$\sum\nolimits_1\leq\varepsilon\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}=\varepsilon$$

и

$$\sum\nolimits_2\leq\frac{2M}{\delta^2}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\left(\frac{\nu}{n}-x\right)^2x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}=\frac{2M}{\delta^2}\,\frac{x(1-x)}{n},$$

където M е една горна граница на $|f(x)|$, когато x се мени в интервала $[0, 1]$. Последното неравенство се установява с помощта на предната задача.

65. Да означим с K множеството от функциите $f(x)$, които са монотонно растящи в интервала $a\leq x\leq b$ и които са нормирани с условието $f(a)=0$. Ще казваме, че една функция от K, която не е тъждествено нула, е неразложима в K, ако от

$$f(x)=g(x)+h(x),$$

където $g(x)$ и $h(x)$ принадлежат на K, следва, че съществуват такива неотрицателни константи λ и μ, че

$$g(x)=\lambda f(x) \text{ и } h(x)=\mu f(x)$$

при всяко x от $[a, b]$. Намерете функциите, които са неразложими в K.

Упътване. Нека $f(x)$ е една функция от K, която не се анулира тъждествено. Покажете, че двете функции

$$g(x)=\frac{f^2(x)}{2f(b)},$$

$$h(x)=f(x)-\frac{f^2(x)}{2f(b)}$$

също принадлежат на K и използувайте, че

$$f(x)=(g)+h(x).$$

Това ще ви даде

$$\frac{f^2(x)}{2f(b)}=\lambda f(x),$$

където λ е константа. По такъв начин $f(x)$ удовлетворява квадратно уравнение и следователно не може да има повече от две различни функционални стойности. Тъй като обаче функцията $f(x)$ не се анулира тъждествено и същевременно $f(a)=0$, то тя трябва да приема точно две различни стойности. Покажете, че и обратното е вярно, т. е. ако една функция от K има точно две функционални стойности, то тя е неразложима в K. Как изглежда графиката на такива функции?

ЧАСТ III

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИИ НА НЯКОЛКО НЕЗАВИСИМИ ПРОМЕНЛИВИ

ГЛАВА I

ФУНКЦИИ НА НЯКОЛКО НЕЗАВИСИМИ ПРОМЕНЛИВИ

§ 1. Основни понятия

Много от понятията, които разглеждахме досега, могат да бъдат обобщени. Такова обобщаване може да се извърши по различни начини. Така ние въведохме понятието околност на една точка върху една права. Аналогично можем да въведем понятието околност на една точка P_0 в една равнина. Така под кръгова околност на точката P_0 с радиус δ (където $\delta > 0$) разбираме множеството от точките P, разстоянието на които до P_0 е по-малко* от δ. Ако въведем една декартова координатна система и означим с (x_0, y_0) координатите на P_0, то координатите (x, y) на точките P от разглежданата околност (и само те) удовлетворяват неравенството

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta.$$

Около една точка P_0 можем да построим безбройно много кръгови околности (с център в точката P_0) в зависимост от избора на радиуса.

Познатото ни понятие околност обаче може да се пренесе за двуизмерния случай и другояче. Така всеки квадрат, образуван от точките (x, y), които удовлетворяват неравенствата

$$|x-x_0| < \delta,$$
$$|y-y_0| < \delta,$$

се нарича квадратна околност на точката (x_0, y_0). Това е квадрат със страна 2δ, центърът на който се намира в точката (x_0, y_0) и две от страните му са успоредни на абсцисната ос (а следователно другите му две страни са успоредни на ординатната ос). Към този квадрат не са причислени точките, които лежат върху страните му. Терминът квадратна околност се употребява понякога и за всеки отворен квадрат (т. е. квадрат, към който не са причислени точките от страните му), центърът на който се намира в точката (x_0, y_0) без оглед на неговото разположение по отношение на координатните оси (т. е. и тогава, когато този квадрат не притежава успоредни страни на някоя от координатните оси). Ние няма да си служим с такива околности, освен ако не е казано противното.

В пространството под сферична околност на една точка (x_0, y_0, z_0) ще разбираме вътрешността на една сфера (без точките от контура ѝ), центърът на която се намира в точката (x_0, y_0, z_0). Аналогично всеки куб, определен чрез неравенствата

$$|x-x_0| < \delta,$$
$$|y-y_0| < \delta,$$
$$|z-z_0| < \delta$$
$$(\delta > 0),$$

ще наричаме кубична околност на точката (x_0, y_0, z_0).

За читателя, който има наклонност към обобщения, ще отбележим, че множеството от всичките системи от n числа

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

се нарича често пространство с n измерения (тъй като множеството от всичките двойки числа (x, y) се нарича равнина или двуизмеримо пространство, а множеството от всичките тройки числа $(x, y, \ )$ се нарича триизмеримо пространство). Всяка система от числа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ се нарича точка от разглежданото пространство, а числата $x_1, x_2, \ldots, x_n$ се наричат нейни координати. Под сферична околност на една точка $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ с радиус $\delta > 0$ се разбира множеството от всичките точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, които удовлетворяват неравенството

$$\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+\ldots+(\xi_n-x_n)^2} < \delta.$$

Изразът

$$\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+\ldots+(\xi_n-x_n)^2}$$

се нарича разстояние между двете точки

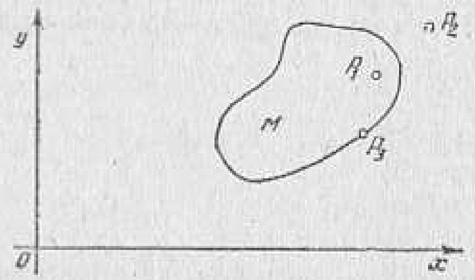
$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \text{ и } (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Тази терминология ни дава възможност да дефинираме понятието околност по-кратко така. Сферична околност с радиус $\delta > 0$ на една точка P_0 се нарича множеството от всички точки, разстоянието на които до P_0 е по-малко от δ.

* Нека изрично подчертаем, че се иска разстоянието PP_0 да бъде по-малко от δ, т. е. към околността не причисляваме контурните ѝ точки.

За в бъдеще често ще се ограничаваме само с двуизмеримия случай, но резултатите почти винаги ще бъдат в сила и при произволен брой измерения.

Нека ни е дадено едно точково множество M в равнината. Една точка P_0 се нарича вътрешна за M, когато около P_0 може да се построи околност, всичките точки на която принадлежат на M. Ако около P_0 може да се построи околност, която не съдържа нито една точка от M, казваме, че P_0 е външна точка за множеството M. Ако точката P_0 не е нито вътрешна, нито външна за M (т. е. ако във всяка околност на P_0 има както точки, принадлежащи на M, така и точки, непринадлежащи на M, казваме, че точката P_0 е контурна за това множество. Множеството от контурните точки на едно множество M се нарича негов контур. На черт. 13 е изобразено едно точково множество M. Точката P_1 е вътрешна точка за това множество, точката P_2 е външна, а точката P_3 е контурна.



Черт. 13

Едно точково множество се нарича затворено, когато към него са причислени всичките му контурни точки (сравнете тази дефиниция с дефиницията на понятието затворен интервал, която дадохме по-рано). Едно точково множество се нарича отворено, когато към него не е причислена нито една от контурните му точки. Разбира се, едно точково множество може да не бъде нито затворено, нито отворено (това се случва, когато някои от контурните му точки са причислени към него, а други не са).

Едно точково множество M се нарича ограничено, когато може да се намери квадрат (или, ако искате, кръг) с крайни размери, който да съдържа всичките точки на това множество.

Нека M е едно ограничено точково множество. Да изберем две точки P и Q от M и да означим с d разстоянието между тях. Това разстояние зависи от избора на точките P и Q. Множеството от тези разстояния обаче е ограничено отгоре, понеже множеството M е ограничено (никое от тези разстояния не може да надмине например диаметъра на един кръг, който съдържа всичките точки на M). Точната горна граница на множеството от разстоянията d (които се получават, когато оставим P и Q да се менят в M) се нарича д и а м е т ъ р на M. Така диаметърът на една елипса представлява дължината на голямата ѝ ос; диаметърът на един квадрат е равен на дължината на неговия диагонал и пр.

Ние знаем какво значи сходимост на една редица от числа или (което е същото) на една редица от точки върху една права. Сега ще дефинираме п о н я т и е т о с х о д и м о с т н а е д н а р е д и ц а о т т о ч к и

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots \tag{1}$$

в е д н а р а в н и н а.

За тази цел ще дефинираме предварително понятието точка на сгъстяване на една такава редица. Една точка P_0 се нарича т о ч к а н а с г ъ с т я в а н е на редицата (1), ако във всяка околност на P_0 има безбройно много членове на редицата (1).

Преди да минем по-нататък, ще отбележим, че понятието точка на сгъстяване ни дава възможност да формулираме следната важна особеност, която имат затворените множества. А к о ч л е н о в е т е н а е д н а р е д и ц а

$$P_1, P_2, P_3, \ldots$$

л е ж а т в е д н о з а т в о р е н о т о ч к о в о м н о ж е с т в о M, т о в с и ч к и т е т о ч к и н а с г ъ с т я в а н е н а т а з и р е д и ц а с ъ щ о л е ж а т в M.

И наистина да допуснем, че разглежданата редица притежава поне една точка на сгъстяване P_0, която не принадлежи на M. В такъв случай точката P_0 е сигурно външна на M. Действително тя не е вътрешна за M, защото всяка вътрешна точка на M принадлежи на това множество. Тя обаче не е контурна, защото множеството M е затворено и следователно съдържа всичките си контурни точки. Итака P_0 не е нито вътрешна, нито контурна за M, т. е. тя е външна. В такъв случай обаче около P_0 може да се избере околност, която не съдържа нито една точка от множеството M, а следователно и нито една точка от редицата

$$P_1, P_2, P_3, \ldots,$$

нещо, което противоречи на допускането, че P_0 е точка на сгъстяване на тази редица.

Това свойство притежават само затворените точкови множества. И наистина нека имаме едно множество N, което съдържа точките на сгъстяване на всяка редица от точки, които му принадлежат. Нека Q_0 е контурна точка на N. В такъв случай във всяка околност на Q_0 има точки от N. Да означим с Q_n точка от N, която се намира в кръгова околност на Q_0 с радиус $\frac{1}{n}$, където n е цяло положително число. По такъв начин получаваме редица от принадлежащи на N точки

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots,$$

за която Q_0 е точка на сгъстяване. От това следва, че точката Q_0 принадлежи на N. От направените разсъждения се вижда, че N съдържа всичките си контурни точки и следователно е затворено множество. Това характерно свойство на затворените множества се избира често за дефиниционно свойство.

Казваме, че една редица от точки

(2) $$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$$

е сходяща и клони към P_0, когато разстоянието $P_n P_0$ клони към нула. Точката P_0 се нарича граница на редицата (2).

Нека координатите на P_n са (x_n, y_n). Читателят лесно ще докаже сам, че редицата (2) е сходяща тогава и само тогава, когато са сходящи двете редици

(3) $$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

(4) $$y_1, y_2, y_3, \ldots,$$

като редицата (3) клони към абсцисата на границата P_0 на редицата (2), а редицата (4) клони към ординатата на P_0.

Лесно се вижда, че едно точково множество е затворено тогава и само тогава, когато съдържа границата на всяка сходяща редица от точки, които му принадлежат.

Едно точково множество се нарича компактно, когато е ограничено и затворено.

§ 2. Теорема на Болцано—Вайерщрас (Bolzano—Weierstrass)

Нека е дадена една редица от правоъгълници

(1) $$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n, \ldots,$$

n-тият от които Δ_n се дефинира като множество от точки (x, y), координатите на които удовлетворяват неравенствата

(2) $$a_n \leqq x \leqq b_n,$$

(3) $$c_n \leqq y \leqq d_n.$$

Две от страните на Δ_n са успоредни на абсцисната ос, а другите две са успоредни на ординатната ос. Освен това нека отбележим, че към всеки от правоъгълниците Δ_n са причислени и контурните му точки (това ние често ще изразяваме накратко, като казваме, че правоъгълниците Δ_n са затворени).

Ако всеки един от правоъгълниците Δ_n от разглежданата редица (1) съдържа следващия Δ_{n+1}, то има поне една точка P_0, която лежи във всеки един от правоъгълниците на редицата (1). (Ние поставихме нарочно изискването правоъгълниците Δ_n да бъдат затворени, защото не е изключено точката P_0 да се намира по контура на някой от тези правоъгълници.)

За да докажем това, вземаме пред вид, че интервалите (2) са затворени и всеки един от тях съдържа следващия.*

Оттук заключаваме, че има поне една точка x_0, която лежи във всеки един от тези интервали, т. е. при всяка цяла положителна стойност на n са изпълнени неравенствата

(4) $$a_n \leqq x_0 \leqq b_n.$$

Аналогично се доказва, че има поне една точка y_0, която удовлетворява неравенствата

(5) $$c_n \leqq y_0 \leqq d_n$$

при всички цели положителни стойности на n. Неравенствата (4) и (5) ни учат, че точката (x_0, y_0) лежи във всичките правоъгълници Δ_n. С това твърдението е доказано.

Ние вече сме запознати с важната теорема на Болцано—Вайерщрас (вж. § 3, глава II, част I). Там ставаше дума за редица от точки, лежащи на една права. Теоремата на Болцано—Вайерщрас обаче е валидна и тогава, когато имаме ограничена редица от точки в едно пространство с произволен брой измерения. Така например в двуизмерния случай тази теорема може да се формулира по следния начин: в с я к а о г р а н и ч е н а р е д и ц а о т т о ч к и в е д н а р а в н и н а п р и т е ж а в а п о н е е д н а т о ч к а н а с г ъ с т я в а н е.

Доказателството може да се извърши по следния начин. Нека ни е дадена една ограничена редица

(6) $$P_1, P_2, P_3, \ldots$$

от точки в една равнина. Да означим с Δ един затворен квадрат със страни, успоредни на съответните координатни оси, който съдържа всичките точки на редицата (6). Такъв квадрат съществува, защото редицата (6) е ограничена. Делим квадрата Δ на четири части със средните му линии и означаваме с Δ_1 една негова четвъртина**, която съдържа безбройно много членове на редицата (6). Такава четвъртина* сигурно съществува, защото в противен случай (т. е. в случай, че всяка една от тези четвъртини съдържа най-много краен брой членове) бихме имали и в квадрата Δ само краен брой членове на редицата (6) — нещо което не е вярно, защото Δ съдържа безбройно много (всичките) членове на редицата (6). След това делим квадрата Δ_1 също на четири части с помощта на средните му линии и означаваме с Δ_2 една негова четвъртина, която съдържа безбройно много членове на редицата (6). Този процес продължаваме неограничено. Така получаваме една редица от затворени квадрати

$$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots,$$

* Защото всеки един от правоъгълниците Δ_n съдържа следващия.

** Към всяка една от четвъртините причисляваме контурните ѝ точки.

всеки един от които съдържа следващия. Съгласно това, което ние току-що доказахме, съществува точка P_0, която лежи във всеки един от тези квадрати. Ще покажем, че P_0 е една точка на сгъстяване на редицата (6). За целта е достатъчно да покажем, че всяка околност на P_0 съдържа безбройно много членове на редицата (6). Нека G е една околност на P_0. Всеки един от квадратите Δ_n съдържа точката P_0. От друга страна, дължината на страната на Δ_n клони към нула, когато n расте неограничено. От това заключаваме, че квадратът Δ_n сигурно ще лежи изцяло в околността G, когато индексът n е достатъчно голям. Това обаче ни осигурява, че в околността G има безбройно много членове от редицата (6), защото в Δ_n има безбройно много членове от тази редица. С това е показано, че P_0 е наистина една точка на сгъстяване за редицата (6).

Като приложение ще покажем, че от всяка ограничена редица от точки

(7) $$P_1, P_2, P_3, \ldots,$$

може да се избере сходяща подредица.

И наистина съгласно теоремата на Болцано—Вайерщрас редицата (7) има поне една точка на сгъстяване. Нека Q е една нейна точка на сгъстяване. Построяваме кръгова околност на точката Q с радиус 1 и избираме член P_{n_1} от редицата (7), който принадлежи към тази околност. След това разглеждаме околност на точката Q с радиус $\frac{1}{2}$ и избираме член P_{n_2}, който принадлежи на тази околност и за който $n_2 > n_1$. Продължаваме този процес и получаваме по такъв начин редицата

$$P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3}, \ldots,$$

която е подредица на редицата (7), защото

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

Тази подредица клони към P. По такъв начин видяхме, че може да се избере даже такава подредица, която да клони към отнапред избрана точка на сгъстяване на редицата (7).

§ 3. Функции на няколко независими променливи

Нека ни е дадено едно множество M от точки в равнината XOY. Казваме, че в множеството M е дефинирана една функция $f(x, y)$ на двете независими променливи x и y, когато на всяка точка (x, y) от M е съпоставено по едно число $f(x, y)$. Нека например M е кръговата област

$$x^2+y^2 \leqq 1.$$

На всяка точка (x, y) от тази област да съпоставим числото

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

С това ние сме дефинирали една функция $f(x, y)$ в множеството M. Обикновено множеството M, в което е дефинирана една функция, се нарича дефиниционна област на тази функция.

По аналогичен начин се дефинира и понятието функция на три или повече променливи. Така казваме, че е дефинирана една функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в едно множество M от точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, когато на всяка система от числа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принадлежаща на M, е съпоставено по едно число $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

§ 4. Непрекъснатост

Нека $f(x, y)$ е една функция на двете независими променливи x и y и нека (x_0, y_0) е една точка от дефиниционната област на $f(x, y)$. Казваме, че функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в точката (x_0, y_0), когато при всеки избор на редицата

(1) $$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$$

от точки, които принадлежат на дефиниционната област на $f(x, y)$ и клонят към (x_0, y_0), съответната редица от функционални стойности

(2) $$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3), \ldots$$

е сходяща. Впрочем от това следва, че границата на редицата (2) не може да бъде друга освен $f(x_0, y_0)$. И наистина, ако редицата

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$$

клони към (x_0, y_0), то редицата

$$(x_1, y_1), (x_0, y_0), (x_2, y_2), (x_0, y_0), (x_3, y_3), (x_0, y_0), \ldots$$

е също сходяща и клони към (x_0, y_0). От това следва, че редицата

(3) $$f(x_1, y_1), f(x_0, y_0), f(x_2, y_2), f(x_0, y_0), \ldots$$

е сходяща. И така двете редици

(4) $$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \ldots$$

и

(5) $$f(x_0, y_0), f(x_0, y_0), \ldots$$

клонят към една и съща граница, защото са подредици на една и съща сходяща редица (3). Като вземем под внимание, че редицата (5) клони към $f(x_0, y_0)$, заключаваме, че редицата (4) клони също към $f(x_0, y_0)$.

Понятието непрекъснатост може да се дефинира още по следния начин: казваме, че една функция $f(x, y)$ е непрекъсната в една точка (x_0, y_0) от дефиниционната си област, когато при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число δ по такъв начин, че ако точката (x, y) принадлежи на дефиниционната област на $f(x, y)$ и удовлетворява неравенствата

$$|x-x_0|<\delta, \quad |y-y_0|<\delta,$$

то

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon.$$

Двете дефиниции на понятието непрекъснатост, които даваме, са напълно еквивалентни помежду си. Аналогичен въпрос ние разглеждахме в случая на една независима променлива. Направените там разсъждения могат без съществени изменения да се приложат и тук. Предоставяме на читателя сам да обмисли подробностите.

Ако в една функция $f(x, y)$ на две независими променливи x и y фиксираме едната променлива, получаваме функция на една независима променлива. Така

$$\varphi(x)=f(x, y_0)$$

е функция само на x, а

$$\psi(y)=f(x_0, y)$$

е функция само на y.

Не е трудно да се види, че от непрекъснатостта на $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0) следва непрекъснатостта на $f(x, y_0)$ в точката x_0 и непрекъснатостта на $f(x_0, y)$ в точката y_0 (за целта може да се използува коя да е от дефинициите на понятието непрекъснатост). Нека обаче изрично подчертаем, че обратното не е вярно, т. е. от непрекъснатостта на $\varphi(x)=f(x, y_0)$ в точката x_0 и от непрекъснатостта на $\psi(y)=f(x_0, y)$ в точката y_0 още не следва непрекъснатостта на $f(x,y)$ в точката (x_0, y_0). Един пример ще ни убеди в това. Нека

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

при

$$x^2+y^2\neq 0$$

и

$$f(0, 0)=0.$$

С това имаме една функция, дефинирана при всички стойности на x и y. Да разгледаме двете функции

$$\varphi(x)=f(x, 0)=0,$$
$$\psi(y)=f(0, y)=0.$$

Те са непрекъснати навсякъде (защото са константи). Въпреки това функцията $f(x, y)$ е прекъсната в точката $(0, 0)$. За да се убедим в това, избираме редицата от точки

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \ldots, \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \ldots,$$

която клони очевидно към точката $(0, 0)$. В такъв случай

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

и следователно

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\neq f(0, 0),$$

което показва, че функцията $f(x, y)$ не удовлетворява условието за непрекъснатост в точката $(0, 0)$.

§ 5. Свойства на непрекъснатите функции

Много от свойствата на непрекъснатите функции на една независима променлива запазват своята валидност и в случая, когато имаме функции на няколко независими променливи. Тук ще посочим без доказателства по-важните от тези свойства (доказателството се извършва по същия начин, както в случая на една независима променлива).

Ако една функция е дефинирана и непрекъсната в едно компактно, т. е. ограничено и затворено точково множество, тя е ограничена* (и отгоре, и отдолу).

Ако една функция е дефинирана и непрекъсната в едно компактно, т. е. ограничено и затворено точково множество, тя достига както точната си горна, така и точната си долна граница (теорема на Вайерщрас).

Най-сетне ще споменем без съответно прецизиране (което е съвсем непосредствено), че непрекъсната функция от непрекъсната функция е непрекъсната. По-специално сума, разлика, произведение и частно (стига знаменателят да не се анулира) от непрекъснати функции е непрекъсната функция.

* Една функция се нарича ограничена, когато е ограничено множеството от функционалните ѝ стойности.

§ 6. Равномерна непрекъснатост

Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана в някое точково множество M и нека (x_0, y_0) е една точка от M. Дефиницията на понятието непрекъснатост може да се формулира така: функцията $f(x, y)$ се нарича непрекъсната в точката (x_0, y_0), когато при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число δ (евентуално зависещо от ε) по такъв начин, че всеки път, когато $|h| < \delta$, $|k| < \delta$ и точката (x_0+h, y_0+k) принадлежи на дефиниционната област M на функцията $f(x, y)$, да е изпълнено неравенството

$$|f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната във всички точки на множеството M, ще казваме накратко, че тя е непрекъсната в M. И така, ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в M, то при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число $\delta(\varepsilon, x, y)$ по такъв начин, че ако $|h| < \delta$, $|k| < \delta$ и ако точката $(x+h, y+k)$ принадлежи на M, да е изпълнено неравенството

$$|f(x+h, y+k)-f(x, y)| < \varepsilon,$$

както и да избираме точката (x, y) в M.

Нека подчертаем изрично при това, че в дефиницията не се изключва числото δ да се мени, когато изменяме числото ε или точката (x, y). За да изтъкнем, че се позволява числото δ да зависи от ε, x и y, ние писахме $\delta(\varepsilon, x, y)$. Ако обаче при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число δ, евентуално зависещо от ε, но не и от точката (x, y) по такъв начин, че ако $|h| < \delta$, $|k| < \delta$ и ако точката $(x+h, y+k)$ принадлежи на M, да е изпълнено и неравенството

$$|f(x+h, y+k)-f(x, y)| < \varepsilon$$

при всеки избор на точката (x, y) в M, казваме, че функцията $f(x, y)$ е равномерно непрекъсната в множеството M.

Подобно на това, което имаме при функции на една независима променлива, и тук е в сила следната теорема:

Ако една функция $f(x, y)$ е дефинирана и непрекъсната в едно компактно, т. е. ограничено и затворено точково множество, тя е и равномерно непрекъсната в това множество.

Доказателството се извършва по същия начин, както в случая на една независима променлива.

Накрая ще отбележим, че ако дефиниционната област M на една функция е ограничена и затворена, а функцията е непрекъсната навсякъде в дефиниционната си област, то на всяко положително число ε може да се съпостави положително число δ (евентуално зависещо

от ε) по такъв начин, че ако разделим множеството M на подмножества

$$M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n,$$

диаметрите на които са по-малки от δ, осцилацията* на функцията във всяко едно от тези подмножества да е по-малка от ε.

И тук доказателството се извършва по същия начин, както в случая на една независима променлива.

§ 7. Частни производни на функции, зависещи от няколко независими променливи

Нека $f(x, y)$ е една функция на две независими променливи, дефинирана в някое множество M от точки в равнината, и нека точката (x_0, y_0) принадлежи на M. Ако фиксираме едната от независимите променливи на функцията $f(x, y)$, получаваме функция, зависеща само от една независима променлива. Така например функцията

$$\varphi(x)=f(x, y_0)$$

зависи само от x. Нека във всяка околност на x_0 има числа x, различни от x_0, за които точката с координати (x, y_0) принадлежи на M. Това условие е изпълнено например, ако точката (x_0, y_0) е вътрешна за M. Да допуснем, че функцията $\varphi(x)$ има производна в точката x_0 (ние знаем какво значи производна на една функция, която зависи само от една независима променлива). Производната $\varphi'(x_0)$ се нарича първа частна производна спрямо x на функцията $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0). Това изразяваме обикновено символично, като пишем

$$\varphi'(x_0)=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}. \tag{1}$$

Аналогично символът $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ означава частната производна спрямо y на функцията $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0). По-точно $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ означава производната $\psi'(y_0)$ на функцията

$$\psi(y)=(x_0, y).$$

Така например да разгледаме функцията

$$f(x, y)=xe^y+\sin(xy+y^2),$$

* Осцилация на една функция се нарича разликата между точната ѝ горна и точната ѝ долна граница.

дефинирана с това равенство при всички стойности на x и y. В такъв случай

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = e^{y_0} + y_0 \cos(x_0 y_0 + y_0^2),$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = x_0 e^{y_0} + (x_0 + 2y_0)\cos(x_0 y_0 + y_0^2).$$

Понякога (когато от това няма да произлизат опасности от недоразумения) ние ще пишем по-кратко

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = e^y + y\cos(xy + y^2),$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = xe^y + (x+2y)\cos(xy + y^2),$$

или още по-кратко

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + y\cos(xy + y^2),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xe^y + (x+2y)\cos(xy + y^2).$$

Този начин на означаване е действително по-кратък, но по-малко точен. Така например в символа $\frac{\partial f}{\partial x}$ (четете — де еф де икс) въобще не са посочени координатите на точката, в която се извършва диференцирането.

В бъдеще ние често ще си служим и с други начини за означаване на частните производни. Така вместо $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ ние често ще пишем $f'_x(x_0, y_0)$, а вместо $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ ще пишем $f'_y(x_0, y_0)$.

Нека изрично подчертаем, че символът $\frac{\partial f}{\partial x}$ не представлява дроб (при все че има дробна черта).

Аналогично се дефинира понятието частна производна и на функции с три и повече независими променливи. Така под частна производна на $f(x, y, z)$ спрямо x се разбира производната на функцията, която се получава, като фиксираме всички независими променливи освен x. Така под $\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$ се разбира производната $\varphi'(x_0)$ на функцията

$$\varphi(x) = f(x, y_0, z_0)$$

и пр.

Ние знаем, че от диференцуемостта на една функция на една независима променлива следва нейната непрекъснатост. Не стои така

въпросът, когато имаме функция на няколко независими променливи. Ние ще изясним това с един пример. Да разгледаме функцията $f(x, y)$, дефинирана по следния начин:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

при $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$. В такъв случай

$$f(x, 0) = 0$$

и

$$f(0, y) = 0.$$

От това заключаваме, че функцията $f(x, y)$ е диференцуема в началото както частно спрямо x, така и частно спрямо y, защото функциите $f(x, 0)$ и $f(0, y)$ са константи и следователно са диференцуеми. Въпреки това функцията $f(x, y)$ е прекъсната в началото, защото

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

и следователно

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq f(0, 0).$$

§ 8. Диференциране на съставни функции

Нека двете функции

$$u = f(t), \quad v = g(t)$$

са дефинирани в някоя околност Δ на точката t_0. Ние ще положим за краткост

$$f(t_0) = x_0, \quad g(t_0) = y_0.$$

Нека функцията

$$z = F(x, y)$$

е дефинирана в някоя околност D на точката (x_0, y_0). Ако точката с координати $[f(t), g(t)]$ не напуска околността D, когато t се мени в околността Δ, функцията

$$(1) \qquad \varphi(t) = F[f(t), g(t)]$$

е дефинирана за всички точки на Δ. Нашата цел е да докажем следната теорема, която многократно ще прилагаме в бъдеще:

Нека функциите $f(t)$ и $g(t)$ са диференцуеми в точката t_0; нека точката с координати $(f(t), g(t))$ принадлежи на D, когато t принадлежи на Δ; нека функцията $F(x, y)$ е диференцуема в околността D както спрямо

x, така и спрямо y; нека най-сетне двете първи частни производни на $F(x,y)$ са непрекъснати в точката (x_0, y_0); при тези предположения функцията $\varphi(t)$ е диференцуема в точката t_0 и

$$\varphi'(t_0)=F'_x(x_0, y_0)\, f'(t_0)+F'_y(x_0, y_0)\, g'(t_0).$$

Доказателството ще извършим, като изхождаме от дефиницията на понятието производна. За целта разглеждаме отношението

$$\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}=\frac{F[f(t_0+h),g(t_0+h)]-F[f(t_0),g(t_0)]}{h}.$$

Ако положим

$$k=f(t_0+h)-f(t_0), \qquad (2)$$
$$l=g(t_0+h)-g(t_0)$$

и вземем пред вид, че $f(t_0)=x_0$, $g(t_0)=y_0$, получаваме

$$f(t_0+h)=x_0+k,$$
$$g(t_0+h)=y_0+l,$$

което ни дава право да пишем

$$\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}=\frac{F(x_0+k,\ y_0+l)-F(x_0, y_0)}{h}.$$

Оттук, като прибавим и извадим $F(x_0, y_0+l)$, получаваме

$$\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}=\frac{F(x_0+k,\ y_0+l)-F(x_0, y_0+l)}{h}+\frac{F(x_0, y_0+l)-F(x_0,y_0)}{h}.$$

Нека обърнем внимание на това, че ние можем да говорим за $F(x_0, y_0+l)$ защото точката (x_0+k, y_0+l), а следователно и точката (x_0, y_0+l) принадлежи на околността D. Това е вярно както в случая, когато D е кръгова околност на точката (x_0, y_0), така и в случая, когато D е квадратна околност на тази точка (със страни, успоредни на съответните координатни оси).

Като приложим теоремата за крайните нараствания към функцията

$$p(x)=F(x,\ y_0+l),$$

получаваме

$$F(x_0+k,\ y_0+l)-F(x_0, y_0+l)=p(x_0+k)-p(x_0)=kp'\ (x_0+\theta k)=$$
$$=kF'_x(x_0+\theta k,\ y_0+l),$$

където θ е едно число, подходящо избрано между 0 и 1. Аналогично, като приложим теоремата за крайните нараствания към функцията

$$q(y)=F(x_0,\ y),$$

получаваме

$$F(x_0,y_0+l)-F(x_0,\ y_0)=lF'_y(x_0, y_0+\theta_1 l),\ 0<\theta_1<1.$$

Това ни дава право да пишем

$$\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}=\frac{k}{h}F'_x(x_0+\theta k, y_0+l)+\frac{l}{h}F'_y(x_0, y_0+\theta_1 l),$$

откъдето, като вземем пред вид равенствата (2), получаваме

$$\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}=\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}F'_x(x_0+\theta k, y_0+l)+ \qquad (3)$$
$$+\frac{g(t_0+h)-g(t_0)}{h}F'_y(x_0,y_0+\theta_1 l).$$

По предположение функциите $f(t)$ и $g(t)$ са диференцуеми в точката t_0. Оттук заключаваме, че отношенията

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h},\ \frac{g(t_0+h)-g(t_0)}{h}$$

клонят съответно към $f'(t_0)$ и $g'(t_0)$, когато $h\to 0$. От диференцуемостта на $f(t)$ и $g(t)$ в точката t_0 следва обаче и тяхната непрекъснатост в тази точка. Това ни дава право да твърдим, че

$$k=f(t_0+h)-f(t_0),$$
$$l=g(t_0+h)-g(t_0)$$

клонят към нула заедно с h. Като вземем най-сетне пред вид, че производните F'_x, F'_y са непрекъснати функции в точката (x_0, y_0), заключаваме, извършвайки граничния преход $h\to 0$, че дясната страна на равенството (3) клони към

$$f'(t_0)\,F'_x(x_0,y_0)+g'(t_0)F'_y(x_0, y_0).$$

Този резултат ни дава право да твърдим, че функцията $\varphi(t)$ е диференцуема в точката t_0 и

$$\varphi'(t_0)=F'_x(x_0, y_0)f'(t_0)+F'_y(x_0, y_0)g'(t_0). \qquad (4)$$

С това интересуващата ни теорема е доказана.

Така установената теорема представлява в известен смисъл обобщение на теоремата за диференциране на функция от функция, която ние разгледахме по-рано.

Функции от вида (1) ще наричаме съставни функции за разлика от сложните функции, които разглеждахме в диференциалното смятане на функции от една независима променлива.

Като използуваме означенията

$$u=f(t),\ v=g(t),\ z=F(x,\ y),$$

ние често ще записваме равенството (4) по следния по-кратък, но по-малко прецизен начин:

$$z'_t=F'_u u'_t+F'_v v'_t,$$

или още

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}.$$

Това правило за диференциране на съставни функции може да се обобщи. Така нека функцията

$$y=F(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n)$$

зависи от n независими променливи $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$. Нека са дадени освен това n функции на независимата променлива t:

$$u_1=f_1(t),\ u_2=f_2(t),\dots,\ u_n=f_n(t).$$

Образуваме функцията

$$\varphi(t)=F[u_1,\ u_2,\dots,\ u_n]=F[f_1(t),\ f_2(t),\dots,\ f_n(t)]$$

на независимата променлива t. В такъв случай поне когато са изпълнени някои условия, които ние изрично тук няма да формулираме и които читателят лесно може да формулира сам по образеца на случая $n=2$, е в сила следното правило за диференциране:

$$\varphi'(t)=\frac{\partial F}{\partial u_1}\cdot\frac{du_1}{dt}+\frac{\partial F}{\partial u_2}\cdot\frac{du_2}{dt}+\dots+\frac{\partial F}{\partial u_n}\cdot\frac{du_n}{dt}.$$

Задачи

Намерете първите частни производни на функциите

1. $z=xe^{xy}\sin 2y$.

Отг. $\frac{dz}{dx}=e^{xy}\sin 2y+xye^{xy}\sin 2y;\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^2e^{xy}\sin 2y+2xe^{xy}\cos 2y.$

2. $z=\sqrt{x^2-y^2}$.

3. $z=\ln\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}$.

4. $z=\sqrt{x^2+y^2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$.

5. $z=x^y$.

6. $z=\ln\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$.

7. $z=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$ при $x^2+y^2<1,\ xy>0$.

Отг. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

8. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

9. Нека функциите $u=f(x)$ и $v=g(x)$ са диференцуеми и $f(x)>0$. Намерете първата производна на функцията

$$y=\varphi(x)=u^v.$$

Решение. Използуваме правилото за диференциране на съставни функции:

$$\varphi'(x)=\frac{\partial y}{\partial u}u'+\frac{\partial y}{\partial v}v'.$$

Като вземем пред вид, че

$$\frac{\partial y}{\partial u}=vu^{v-1},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=u^v\ln u,$$

намираме

$$\varphi'(x)=vu^{v-1}u'+u^v(\ln u)v'.$$

10. Намерете производната на функцията $y=x^x$ при $x>0$, като се възползувате от предната задача. Намерете след това производната на y, като логаритмувате предварително двете части на равенството $y=x^x$. Сравнете резултатите.

11. Нека функцията $f(x,\ y)$ е дефинирана и диференцуема както частно спрямо x, така и частно спрямо y в някоя околност на точката $(x_0,\ y_0)$ и нека двете частни производни f'_x и f'_y са непрекъснати в точката $(x_0,\ y_0)$. Не е трудно да се види, че функцията

$$\varphi(t)=f(x_0+\alpha t,\ y_0+\beta t)$$

е дефинирана, когато t е достатъчно малко. Докажете, че функцията $\varphi(t)$ е диференцуема в точката $t=0$ и че

$$\varphi'(0)=\alpha f'_x(x_0,\ y_0)+\beta f'_y(x_0,\ y_0).$$

Упътване. Приложете теоремата за диференциране на съставни функции, след като проверите дали са изпълнени условията, при които тя е доказана.

12. Нека функцията $f(x,\ y)$ е дефинирана и диференцуема в някоя околност Δ на точката $(x_0,\ y_0)$ и нека двете частни производни f'_x и f'_y са непрекъснати в тази околност. Нека точката $(x_0+h,\ y_0+k)$ лежи в околността Δ. Докажете, че в такъв случай може да се намери число θ от отворения интервал $(0,\ 1)$, за което е изпълнено равенството

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)=hf'_x(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)+kf'_y(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k).$$

Упътване. Разгледайте помощната функция

$$\varphi(t)=f(x_0+ht,\ y_0+kt).$$

Покажете, че тази функция е дефинирана и диференцуема в затворения интервал $[0,\ 1]$. Това ще ви позволи да приложите към функцията $\varphi(t)$ теоремата за крайните нараствания по отношение на интервала $[0,\ 1]$:

$$\varphi(1)-\varphi(0)=(1-0)\,\varphi'(\theta)=\varphi'(\theta),$$

където $0<\theta<1$. Пресметнете $\varphi'(\theta)$, като си послужите с правилото за диференциране на съставни функции. Това ще ви даде

$$\varphi'(\theta)=hf'_x(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)+kf'_y(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k).$$

Използувайте най-сетне, че

$$\varphi(1)=f(x_0+h,\ y_0+k)$$
$$\varphi(0)=f(x_0,\ y_0).$$

Забележка. Доказаната теорема се нарича понякога теорема за крайните нараствания при функции на две независими променливи. Обобщете тази теорема за случая, когато функцията зависи от произволен брой аргументи.

13. Нека u, v и w са функции на x, y, z.

Детерминантата

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

се нарича функционална или Якобиева детерминанта на функциите u, v, w спрямо независимите променливи x, y, z и се означава със символа $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}$. Покажете, че при

$$u=x^2+y^2+z^2,$$
$$v=x+y+z,$$
$$w=xy+yz+zx$$

имаме

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=0.$$

14. Нека

$$u_1=f_1(x_1,x_2,x_3),$$
$$u_2=f_2(x_1,x_2,x_3),$$
$$u_3=f_3(x_1,x_2,x_3)$$

и

$$x_1=\varphi_1(t_1,t_2,t_3),$$
$$x_2=\varphi_2(t_1,t_2,t_3),$$
$$x_3=\varphi_3(t_1,t_2,t_3).$$

Докажете, че поне при известни условия (формулирайте тези условия) имаме

$$\frac{D(u_1,u_2,u_3)}{D(t_1,t_2,t_3)}=\frac{D(u_1,u_2,u_3)}{D(x_1,x_2,x_3)}\cdot\frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(t_1,t_2,t_3)}.$$

(Значението на тези символи е изяснено в предната задача.)

§ 9. Хомогенни функции

Нека $f(x, y)$ е една функция, дефинирана в някоя околност Δ на точката (x_0, y_0). Казваме, че функцията $f(x, y)$ е хомогенна от n-та степен в точката (x_0, y_0), когато е изпълнено равенството

$$f(tx_0,\ ty_0)=t^n f(x_0,\ y_0)$$

за всички стойности на t, които се намират в достатъчно малка околност на числото 1.

Казваме, че една функция $f(x, y)$ е хомогенна от n-та степен в едно отворено точково множество D, ако тя е дефинирана и е хомогенна от n-та степен във всяка точка на множеството D.

Така например функцията x^2+xy+y^2 е хомогенна от втора степен в цялата равнина; функцията $\sqrt{x^2+y^2}$ е хомогенна от първа степен в цялата равнина; функцията $\sqrt{x+y}$ е хомогенна от степен $\frac{1}{2}$ в полуравнината $x+y>0$; функцията $\frac{xy}{x^2+y^2}$ е хомогенна от нулева степен при $x^2+y^2\neq 0$; функцията $\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$ е хомогенна от степен -2 при $y\neq 0$ и пр.

Понятието хомогенност може да се обобщи по очевиден начин и за функции на произволен брой независими променливи. Така функцията $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, зависеща от трите аргумента x, y, z, е хомогенна от първа степен.

Нека функцията $f(x, y)$ е хомогенна от n-та степен в точката (x_0, y_0). Ако функцията $f(x, y)$ е диференцуема както частно спрямо x, така и спрямо y в някоя околност Δ на точката (x_0, y_0) и ако тези частни производни са непрекъснати в точката (x_0, y_0), то е в сила равенството

$$f'_x(x_0,\ y_0)\,x_0+f'_y(x_0,\ y_0)\,y_0=nf(x_0,\ y_0).$$

За да докажем това, разглеждаме помощната функция

$$\varphi(t)=f(x_0t,\ y_0t),$$

която е дефинирана за всички стойности на t, които са достатъчно близки до 1. Не е трудно да се провери, че тук са налице за точката $t=1$ всичките условия, при които ние изведохме правилото за диференциране на съставни функции (вижте предния параграф). Това ни дава право да твърдим, че функцията $\varphi(t)$ е диференцуема в точката $t=1$ и

(1) $$\varphi'(1)=f'_x(x_0,\ y_0)\,x_0+f'_y(x_0,\ y_0)\,y_0.$$

От друга страна, условието за хомогенност ни дава

$$f(x_0 t,\ y_0 t) = t^n f(x_0,\ y_0),$$

т. е.

$$\varphi(t) = t^n f(x_0,\ y_0).$$

Това ни позволява да твърдим, че

(2) $$\varphi'(1) = nf(x_0,\ y_0).$$

Като сравним двете равенства (1) и (2), получаваме

$$f'_x(x_0,\ y_0)\,x_0 + f'_y(x_0,\ y_0)\,y_0 = nf(x_0,\ y_0).$$

Това равенство се нарича тъждество на Ойлер (L. Euler)

Задачи

1. Нека функцията $f(x,\ y)$ е дефинирана в някоя околност на началото, нека в началото е хомогенна и нека степента ѝ е различна от нула. Докажете, че $f(0,\ 0)=0$.

Решение. За всички стойности на t, достатъчно близки до 1, имаме

$$f(t0,\ t0) = t^n f(0,\ 0),$$

откъдето $f(0,\ 0) = t^n f(0,\ 0)$ и най-сетне $(1-t^n)f(0,\ 0)=0$.

2. Докажете, че тъждеството на Ойлер е в сила (при съответните предположения) и за хомогенни функции, които зависят от повече от два аргумента.

3. Проверете чрез директно пресмятане на производните, че е в сила тъждеството на Ойлер за следните хомогенни функции:

$$u = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz,$$

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

$$z = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$z = \sin \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$u = \frac{x}{y}\, e^{\frac{x}{z}}.$$

§ 10. Тотален диференциал

Нека функцията $z=f(x,\ y)$ е диференцуема както частно спрямо x, така и частно спрямо y в някоя точка. Под **тотален диференциал** dz на функцията z в тази точка разбираме линейната комбинация

(1) $$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\lambda + \frac{\partial z}{\partial y}\mu,$$

където стойностите на частните производни са пресметнати в разглежданата точка (макар че това изрично не е посочено в равенството (1)), а стойностите на параметрите λ и μ се избират едни и същи, както и да избираме точката, по отношение на която пресмятаме тоталния диференциал, и както и да избираме функцията, чийто тотален диференциал търсим. Ние обаче си запазваме правото да им даваме такива стойности, каквито желаем.

Специално за функцията $f(x,\ y)=x$ получаваме

$$dx = 1\lambda + 0\mu = \lambda.$$

Аналогично при $f(x,\ y)=y$ намираме

$$dy = \mu.$$

Като се възползуваме от това, че стойностите на параметрите λ и μ се избират едни и същи за всички функции, получаваме

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Понятието тотален диференциал може, разбира се, да се въведе и за функции, които зависят от произволен брой аргументи. Така под тотален диференциал dz на функцията

$$z = f(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$$

се разбира линейната комбинация

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}\lambda_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\lambda_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\lambda_n,$$

където множителите $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ се избират независимо от разглежданата точка и независимо от разглежданата функция. Като изберем специалната функция $z=x_k$, получаваме $dx_k=\lambda_k$, което ни дава право да пишем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n,$$

като при това ние се ползуваме от обстоятелството, че се съгласихме да даваме на множителите λ_k едни и същи стойности за всички функции.

Правилата за смятане с тотални диференциали са съвсем аналогични на правилата за смятане с диференциали на функции, които зависят само от един аргумент. Така например, ако $z=u+v$, то

(2) $$dz = du + dv,$$

където двете функции u и v зависят от n аргумента $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$. Доказателството на формулата (2) може да се извърши така:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}\lambda_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\lambda_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\lambda_n = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\right)\lambda_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\right)\lambda_2 + \cdots +$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}+\frac{\partial v}{\partial x_n}\right)\lambda_n=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\lambda_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\lambda_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\lambda_n\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\lambda_1+\frac{\partial v}{\partial x_2}\lambda_2+\cdots+\frac{\partial v}{\partial x_n}\lambda_n\right)=du+dv.$$

Аналогично се доказва, че

$$d(u-v)=du-dv,$$
$$d(uv)=vdu+udv,$$
$$d\frac{u}{v}=\frac{vdu-udv}{v^2},$$
$$df(u)=f'(u)\,du \text{ и пр.}$$

Ще споменем по-специално следното обобщение на правилото за диференциране на функция от функция. Ако

$$z=f(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

където функциите u_i, $i=1, 2, \ldots, n$, зависят от k аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_k$, то при предположенията, при които е в сила теоремата за диференциране на съставни функции,

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial z}{\partial u_2}du_2+\cdots+\frac{\partial z}{\partial u_n}du_n.$$

Извършете сами доказателството, като си послужите с теоремата за диференциране на съставни функции.

Читателят знае как се намират частните производни на една функция, която зависи от няколко аргумента. Ако се търсят всичките първи частни производни, то ние можем да решим тази задача, като диференцираме функцията частно спрямо всеки един от аргументите. Понятието тотален диференциал ни дава възможност да решим тази задача с едно единствено диференциране. Ние ще изясним с един пример как може да се направи това. Да разгледаме например функцията

$$z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},\quad x\neq 0.$$

Правилата, които изведохме преди малко за смятане с тотални диференциали, ни дават

$$dz=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}d\frac{y}{x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2}=$$
$$=\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Като вземем пред вид, че

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

намираме

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Ще се възползуваме сега от свободата да избираме, както желаем, константите dx и dy. Ако изберем $dx=1$, $dy=0$, получаваме

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Ако изберем $dx=0$, $dy=1$, намирме

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

По този начин тоталният диференциал ни позволи да намерим едновременно двете частни производни $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Задачи

1. Намерете с помощта на тоталния диференциал частните производни спрямо x и y на следните функции:

а) $z=\sqrt{x^2-y^2}$.

Отг. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

б) $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}$.

Отг. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2}$.

с) $z=\ln\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}$.

2. Намерете с помощта на тоталния диференциал частните производни спрямо x и z на следните функции:

а) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

b) $u=\frac{xyz}{x+y+z}$;

c) $u=\sin\sqrt{\frac{x+z}{x-y}}$.

§ 11. Частни производни от по-висок ред

Частните производни f'_x и f'_y на една функция $z=f(x, y)$ на две независими променливи са също функции на две независими променливи (дефинирани, разбира се, само в онези точки, в които функцията $f(x, y)$ притежава тези частни производни), поради което ние бихме могли да поставим въпроса за съществуване или несъществуване на частните производни на f'_x и f'_y. Частната производна на f'_x спрямо x се означава със знака f''_{xx} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (четете — де две зет де икс квадрат), а частната производна на f'_x спрямо y се означава със знака f''_{xy} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (четете — де две зет де икс де игрек). Ако искаме да посочим изрично, че пресмятането на една производна, например f''_{xx}, се извършва в точката (x_0, y_0), ще пишем $f''_{xx}(x_0, y_0)$ или $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, y_0)$. По-точно под $f''_{xx}(x_0, y_0)$ се разбира производната $\varphi'(x_0)$ на функцията

$$\varphi(\xi)=f'_x(\xi, y_0).$$

Аналогично се дефинират символите f''_{yx}, f''_{yy}. Така например символът f''_{yx} означава производната, която получаваме, като диференцираме f спрямо y и след това диференцираме f''_y спрямо x.

Аналогично се дефинират частните производни от по-висок ред. Така под $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ (или, както се пише понякога, f'''_{xxy}) разбираме $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]$.

С един пример ние ще изясним как става намирането на частните производни от по-висок ред. Да разгледаме функцията

$$z=xe^y+\operatorname{acr\,tg}\frac{1}{x} \quad \text{при } x \neq 0.$$

В този случай

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}+e^y,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}+xe^y.$$

Оттук получаваме

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2yx}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+e^y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+e^y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}+xe^y$$

и пр.

Нека читателят обърне внимание на това, че в разгледания пример имаме $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Това явление не е случайно. Както ще видим покъсно, това равенство е изпълнено винаги, ако производните $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ са непрекъснати (дори, както ще покажем, достатъчно е едната от тях да бъде непрекъсната; точната формулировка на условията, при които ще докажем тази теорема, ще бъде дадена на съответното място). Тук ще покажем с един пример, че условието за непрекъснатост, за което споменахме, е съществено. Ако то не е изпълнено, може да се случи двете производни $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ да имат различни стойности. В това ще се убедим с един пример. Да разгледаме функцията $f(x, y)$, дефинирана в цялата равнина по следния начин:

$$f(x, y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{при } x^2+y^2 \neq 0$$

и

$$f(0, 0)=0.$$

Да разгледаме отношението

$$\frac{f(h, y)-f(0, y)}{h}$$

при $h \neq 0$. Като вземем пред вид, че $f(0, y)=0$ при всички стойности на y (включително и в точката $y=0$), намираме

$$\frac{f(h, y)-f(0, y)}{h}=\frac{f(h, y)}{h}.$$

Като вземем още пред вид, че $h \neq 0$, получаваме

$$f(h, y)=hy\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2},$$

откъдето

$$\frac{f(h, y)-f(0, y)}{h}=y\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}.$$

Това ни дава право да заключим, че

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,\,y)-f(0,\,y)}{h}=-y$$

както при $y\neq 0$, така и при $y=0$. С това ние установихме съществуването на производната $f'_x(0,\,y)$ и показахме, че

(1) $$f'_x(0,\,y)=-y.$$

Аналогично се показва, че

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(x,\,k)-f(x,\,0)}{k}=\lim_{k\to 0}x\frac{x^2-k^2}{x^2+k^2}=x,$$

което ни дава

(2) $$f'_y(x,\,0)=x$$

при всички стойности на x (включително и $x=0$).

Равенствата (1) и (2) ни дават

$$f''_{xy}(0,\,0)=-1,$$
$$f''_{yx}(0,\,0)=1,$$

т. е.

$$f''_{xy}(0,\,0)\neq f''_{yx}(0,\,0).$$

В разгледания пример двете частни производни f''_{xy} и f''_{yx} са прекъснати в началото. И наистина при $\xi\neq 0$ имаме

$$f'_x(\xi,\,\eta)=\eta\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2+\eta^2}+\frac{4\xi^2\eta^3}{(\xi^2+\eta^2)^2},$$

откъдето намираме

$$f''_{xy}(\xi,\,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f'_x(\xi,\,k)-f'_x(\xi,\,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\left(\frac{\xi^2-k^2}{\xi^2+k^2}+\frac{4\xi^2k^2}{(\xi^2+k^2)^2}\right)=1,$$

т. е.

$$\lim_{\xi\to 0}f''_{xy}(\xi,\,0)=1\neq f''_{xy}(0,\,0),$$

защото, както видяхме, $f''_{xy}(0,\,0)=-1$. Аналогично се установява прекъснатостта и на f''_{yx} в началото.

След тези примери ще докажем следната теорема за независимостта на резултата на диференцирането от реда, в който се извършва диференцирането:

Нека функцията $f(x,\,y)$ е дефинирана в някоя околност Δ на точката $(x_0,\,y_0)$, като във всяка точка от тази околност съществуват производните f'_x, f'_y и f''_{xy}. Ако производната f''_{xy} е непрекъсната в точката $(x_0,\,y_0)$, то в тази точка съществува и производната f''_{yx}, като при това

$$f''_{yx}(x_0,\,y_0)=f''_{xy}(x_0,\,y_0).$$

Преди да пристъпим към доказателството, нека отбележим, че в теоремата не се поставят никакви изисквания за непрекъснатост на производните f'_x, f'_y (иска се само тяхното съществуване във всяка точка на Δ). За производната f''_{xy} се предполага непрекъснатост само в точката $(x_0,\,y_0)$, обаче нейното съществуване се иска в цялата околност Δ. За производната f''_{yx} пък въобще не се правят никакви предположения. Така например ние не предполагаме съществуването на производната f''_{yx} в точката $(x_0,\,y_0)$, а ще докажем това.

След тези предварителни бележки преминаваме към доказателството.

За да фиксираме идеите, нека си мислим, че околността Δ е квадратна със страни, успоредни на съответните координатни оси, и нека дължината на страната на тази околност е $2\,\delta$ (разбира се, разсъжденията протичат без всякакви затруднения и тогава, когато околността Δ е кръгова). Образуваме си помощната функция*

$$\varphi_k(x)=f(x,\,y_0+k)-f(x,\,y_0),$$

където $k\neq 0$ и $|k|<\delta$. Тази функция е дефинирана и диференцуема при $|x-x_0|<\delta$, защото функцията $f(x,\,y)$ е диференцуема частно спрямо x във всички точки на околността Δ. Очевидно имаме

$$\varphi'_k(x)=f'_x(x,\,y_0+k)-f'_x(x,\,y_0).$$

---

* При съставянето на тази функция ние се ръководим от следните съображения. Дадено е, че съществува производната $f''_{xy}(x_0,\,y_0)$. Обаче

$$f''_{xy}(x_0,\,y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f'_x(x_0,\,y_0+k)-f'_x(x_0,\,y_0)}{k}=$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,\,y_0+k)-f(x_0,\,y_0+k)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,\,y_0)-f(x_0,\,y_0)}{h}\right]=$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,\,y_0+k)-f(x_0+h,\,y_0)-f(x_0,\,y_0+k)+f(x_0,\,y_0)}{h}\right].$$

Изразът

$$\frac{f(x_0+h,\,y_0+k)-f(x_0+h,\,y_0)-f(x_0,\,y_0+k)+f(x_0,\,y_0)}{h},$$

до който достигнахме, представлява диференчното частно на функцията

$$\varphi_k(x)=f(x,\,y_0+k)-f(x,\,y_0),$$

която образувахме в нашето доказателство.

Като приложим към функцията $\varphi_k(x)$ теоремата за крайните нараствания, получаваме

$$\varphi_k(x_0+h)-\varphi_k(x_0)=h\varphi_k'(x_0+\theta h)=$$
$$=h[f_x'(x_0+\theta h,\ y_0+k)-f_x'(x_0+\theta h,\ y_0)],$$

където $0<\theta<1$. Засега фиксираме h и k. С това добиваме право да разглеждаме и θ като фиксирано. Прилагаме теоремата за крайните нараствания към функцията

$$\psi(y)=f_x'(x_0+\theta h,\ y)$$

(където θ е фиксирано по казания по-горе начин). Ние можем да приложим теоремата за крайните нараствания, защото по предположение функцията $f(x, y)$ е диференцуема частно спрямо y във всички точки на околността Δ и следователно функцията $\psi(y)$ е също диференцуема. Това ни дава

$$\psi(y_0+k)-\psi(y_0)=k\psi'(y_0+\theta_1 k),\ 0<\theta_1<1,$$

или

$$f_x'(x_0+\theta h,\ y_0+k)-f_x'(x_0+\theta h,\ y_0)=kf_{xy}''(x_0+\theta h,\ y_0+\theta_1 k),$$

откъдето

(1) $$\varphi_k(x_0+h)-\varphi_k(x_0)=hkf_{xy}''(x_0+\theta h,\ y_0+\theta_1 k).$$

Ние предположихме обаче, че смесената производна f_{xy}'' е непрекъсната в точката (x_0, y_0). Това ни позволява да твърдим, че при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число η по такъв начин, че при $|h|<\eta$ и $|k|<\eta$ да имаме

$$|f_{xy}''(x_0+\theta h,\ y_0+\theta_1 k)-f_{xy}''(x_0, y_0)|<\varepsilon,$$

а следователно и

$$\left|\frac{1}{h}\left[\frac{\varphi_k(x_0+h)}{k}-\frac{\varphi_k(x_0)}{k}\right]-f_{xy}''(x_0, y_0)\right|<\varepsilon,$$

ако $h\neq 0$ и $k\neq 0$, както се вижда това от равенството (1). Да извършим в последното неравенство граничния преход $k\to 0$ при фиксирано h. Като вземем пред вид, че

$$\lim_{k\to 0}\frac{\varphi_k(x_0+h)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0+h,\ y_0)}{k}=f_y'(x_0+h,\ y_0),$$
$$\lim_{k\to 0}\frac{\varphi_k(x_0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,\ y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k}=f_y'(x_0, y_0),$$

намираме

$$\left|\frac{f_y'(x_0+h,\ y_0)-f_y'(x_0, y_0)}{h}-f_{xy}''(x_0, y_0)\right|\leq\varepsilon.$$

Този резултат ни учи, че отношението

$$\frac{f_y'(x_0+h,\ y_0)-f_y'(x_0, y_0)}{h}$$

има граница при $h\to 0$ и че неговата граница е $f_{xy}''(x_0, y_0)$. С други думи, функцията $f_y'(x, y_0)$ е диференцуема в точката x_0 и производната ѝ в тази точка е равна на $f_{xy}''(x_0, y_0)$, т. е. производната $f_{yx}''(x_0, y_0)$ съществува и е равна на $f_{xy}''(x_0, y_0)$.

Внимателният читател ще забележи, че в изложеното доказателство се използува съществуването на производната $f_y'(x, y)$ само при $y=y_0$. По такъв начин би било достатъчно, когато формулирахме теоремата, да поискаме производната $f_y'(x, y)$ да съществува само в онези точки на Δ, чиято ордината е y_0.

Прилагайки няколко пъти доказаната теорема, можем да докажем, че и при производните от по-висок ред резултатът не зависи от реда, в който извършваме диференцирането, стига съответните частни производни да са непрекъснати. За пример ще покажем, че

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2},$$

като предположим, че всичките частни производни на функцията до трети ред включително съществуват и са непрекъснати в някоя околност на разглежданата точка. Като приложим няколко пъти доказаната преди малко теорема, получаваме

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}.$$

Ние предполагахме (за улеснение) непрекъснатостта на всичките частни производни до трети ред. Разбира се, толкова много нямаше нужда да се предполага. Изискванията за непрекъснатост могат да се намалят. Това може да стане по различни начини. Покажете един такъв начин.

Всичко това, което изложихме в този параграф, се обобщава без затруднения и за случая, когато имаме функция, която зависи от произволен брой аргументи.

Задачи

1. Проверете с непосредствено пресмятане на частните производни, че е в сила равенството $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ за следните функции:

$$z = x^y,$$
$$z = xe^{xy}.$$

В следните задачи се иска функциите φ и ψ да бъдат диференцуеми достатъчен брой пъти.

2. Покажете, че функцията $z = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$ удовлетворява уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

3. Покажете, че функцията $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$ удовлетворява уравнението

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

4. Покажете, че функцията $z = \varphi(x+at) + \psi(x-at)$ удовлетворява уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

5. Покажете, че функцията $z = x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y^{-n}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ удовлетворява уравнението

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = n^2 z.$$

§ 12. Производни от по-висок ред на съставни функции

Нека

$$z = F(u, v),$$

където

$$u = f(t), \quad v = g(t).$$

В този случай z е функция на t, която зависи от t посредством u и v. Ние знаем как се намира производната на тази съставна функция, когато са налице условията, при които изведохме правилото за диференциране на съставни функции. Това правило ни дава

$$z' = \frac{\partial F}{\partial u}u' + \frac{\partial F}{\partial v}v'.$$

С помощта на това правило ние можем да намерим и производните от по-висок ред. Така например

$$z'' = \left(\frac{\partial F}{\partial u}u'\right)' + \left(\frac{\partial F}{\partial v}v'\right)' = \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)'u' + \frac{\partial F}{\partial u}u'' + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)'v' + \frac{\partial F}{\partial v}v'' =$$
$$= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}u' + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}v'\right)u' + \frac{\partial F}{\partial u}u'' + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}u' + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}v'\right)v' + \frac{\partial F}{\partial v}v'',$$

откъдето намираме при предположение, че смесените производни са равни помежду си,

$$z'' = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}u'^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}u'v' + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}v'^2 + \frac{\partial F}{\partial u}u'' + \frac{\partial F}{\partial v}v''.$$

След като сме намерили втората производна, можем да намерим третата производна, като диференцираме още веднъж:

$$z''' = \left(\frac{\partial^3 F}{\partial u^3}u' + \frac{\partial^3 F}{\partial u^2 \partial v}v'\right)u'^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}u'u'' +$$
$$+ 2\left(\frac{\partial^3 F}{\partial u \partial v \partial u}u' + \frac{\partial^3 F}{\partial u \partial v^2}v'\right)u'v' + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u''v' + u'v'') +$$
$$+ \left(\frac{\partial^3 F}{\partial v^2 \partial u}u' + \frac{\partial^3 F}{\partial v^3}v'\right)v'^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}v'v'' +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}u' + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}v'\right)u'' + \frac{\partial F}{\partial u}u''' +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}u' + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}v'\right)v'' + \frac{\partial F}{\partial v}v'''$$

и пр.

С оглед на нашите нужди ще разгледаме специално случая, когато функциите u и v са линейни, т. е. когато те имат вида

$$u = a + ht,$$
$$v = b + kt.$$

В такъв случай при съответните предположения за диференцуемост на функцията $F(u, v)$ и за непрекъснатост на нейните частни производни получаваме последователно:

$$z' = \frac{\partial F}{\partial u}h + \frac{\partial F}{\partial v}k,$$

$$z'' = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}h + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}k\right)h + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}h + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}k\right)k =$$
$$= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}hk + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}k^2,$$

$$z''' = \left(\frac{\partial^3 F}{\partial u^3}h + \frac{\partial^3 F}{\partial u^2 \partial v}k\right)h^2 + 2\left(\frac{\partial^3 F}{\partial u \partial v \partial u}h + \frac{\partial^3 F}{\partial u \partial v^2}k\right)hk +$$

$$+\left(\frac{\partial^3 F}{\partial v^2 \partial u}h + \frac{\partial^3 F}{\partial v^3}k\right)k^2 = \frac{\partial^3 F}{\partial u^3}h^3 + 3\frac{\partial^3 F}{\partial u^2 \partial v}h^2k + 3\frac{\partial^3 F}{\partial u \partial v^2}hk^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial v^3}k^3,$$

. . . .

$$z^{(n)} = \frac{\partial^n F}{\partial u^n}h^n + \binom{n}{1}\frac{\partial^n F}{\partial u^{n-1}\partial v}h^{n-1}k + \binom{n}{2}\frac{\partial^n F}{\partial u^{n-2}\partial v^2}h^{n-2}k^2 + \dots + \frac{\partial^n F}{\partial v^n}k^n.$$

Този резултат ще записваме често символично по следния начин:

$$z^{(n)} = \left(\frac{\partial}{\partial u}h + \frac{\partial}{\partial v}k\right)^n F.$$

Задачи

1. Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана и притежава непрекъснати частни производни до n-ти ред включително в някоя околност на точката (x_0, y_0). Докажете, че ако функцията $f(x, y)$ е хомогенна от степен k и точката (x_0, y_0), то е изпълнено равенството

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}x_0 + \frac{\partial}{\partial y}y_0\right)^n f(x_0, y_0) = k(k-1)\dots(k-n+1) f(x_0, y_0).$$

Упътване. Намерете производната $\varphi^{(n)}(1)$ на функцията

$$\varphi(t) = f(x_0 t, y_0 t)$$

и използувайте, че

$$\varphi(t) = t^k f(x_0, y_0).$$

2. Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана и притежава непрекъснати частни производни до $n+1$-ви ред включително в някоя околност на точката (x_0, y_0), като всичките производни от ред $n+1$ са равни на нула в тази околност. Докажете, че $f(x, y)$ е полином на x и y в разглежданата околност, степента на който не надминава n, т. е. че $f(x, y)$ може да се представи във вида

$$f(x, y) = \sum\sum_{k+l \leq n} a_{kl} \cdot x^k y^l,$$

където a_{kl} са константи, а индексите k и l приемат всевъзможни цели неотрицателни стойности, чиято сума не надминава n.

Упътване. Фиксирайте една точка (x, y) от разглежданата околност и образувайте помощната функция

$$\varphi(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt),$$

където

$$h = x - x_0, \; k = y - y_0.$$

Покажете, че във формулата на Тейлор

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \dots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0) + R_n$$

остатъчният член

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta), 0 < \theta < 1,$$

е равен на нула, като вземете пред вид, че

$$\varphi^{(n+1)}(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

Покажете, че $\varphi^{(m)}(0)$ е полином на x и y, степента на който не надминава m, като се послужите с формулата

$$\varphi^{(m)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^m f(x_0, y_0).$$

Вземете най-сетне под внимание, че

$$\varphi(1) = f(x, y).$$

§ 13. Тотални диференциали от по-висок ред

Ние дефинирахме тоталния диференциал dz на една функция $z = f(x, y)$ с помощта на равенството

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

където dx и dy са константи. Тоталният диференциал на функцията dz се нарича втори тотален диференциал и се означава със символа d^2z. Така при съответните предположения за диференцуемост на функцията $f(x, y)$ и за непрекъснатост на нейните частни производни, като вземем пред вид, че dx и dy са константи, намираме

$$d^2z = d(dz) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)\right]dx + \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)\right]dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

Аналогично получаваме

$$d^3z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3,$$

. . . .

$$d^nz = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}dx^n + \binom{n}{1}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy + \dots + \binom{n}{n}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}dy^n.$$

Този резултат ще записваме символично по следния начин:

$$d^n z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f.$$

По-рано имахме случай да видим как първият тотален диференциал можеше да се използува за пресмятане на първите производни. Сега ще покажем с един пример как тоталните диференциали от по-висок ред ще могат да се използуват за пресмятане на производните от по-висок ред. Нека

$$z=y^2e^x.$$

В такъв случай

$$dz=2ye^x\,dy+y^2e^x dx,$$

$$d^2z=2e^x\,dy^2+2ye^x\,dx\,dy+2ye^x\,dy\,dx+y^2e^x\,dx^2 \text{ или}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=y^2e^x\,dx^2+4ye^x\,dx\,dy+2e^x\,dy^2.$$

В последното равенство ние разполагаме със свободата да избираме dx и dy произволно. Ще фиксираме dy. По такъв начин получаваме едно равенство между два полинома на dx, което е валидно при всички стойности на dx. Като се възползуваме от принципа за сравняване на коефициентите при полиномите, получаваме, като положим $dy=1$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2ye^x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2e^x.$$

Задачи

1. Намерете с помощта на тоталните диференциали всички частни производни от втори ред на функциите

$$z=xe^{xy},$$

$$z=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

2. Намерете с помощта на тоталните диференциали всички частни производни от трети ред на функциите

$$z=x^3e^y,$$

$$z=\sin(x+y).$$

3. Намерете с помощта на тоталните диференциали всички частни производни от n-ти ред на функциите

$$z=e^{ax+by}$$

$$z=xe^y.$$

§ 14. Тейлоров ред при функции на няколко независими променливи

Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана и притежава непрекъснати частни производни до $n+1$-ви ред включително в някое отворено точково множество M. Непрекъснатостта на самата функция не се предполага. Нека затворената отсечка

$$[(x_0, y_0), (x_0+h, y_0+k)]$$

изцяло лежи в M. Това значи, че всичките точки с координати

$$(x_0+th, y_0+tk),$$

където t се мени в затворения интервал $[0, 1]$, принадлежат на M. При тези предположения е в сила равенството

$$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)f(x_0, y_0)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(x_0, y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^n f(x_0, y_0)+R_n,$$

където

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$$

и числото θ е избрано по подходящ начин в отворения интервал $(0, 1)$. За да докажем това, образуваме помощната функция

$$\varphi(t)=f(x_0+ht, y_0+kt).$$

Тази функция е дефинирана и $n+1$ пъти диференцуема в затворения интервал $[0, 1]$, както това се вижда от теоремата за диференциране на съставни функции. Въз основа на това ние можем да приложим към функцията $\varphi(t)$ формулата на Тейлор, което ни дава

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{1}{1!}\varphi'(0)+\frac{1}{2!}\varphi''(0)+\ldots+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)+R_n, \tag{1}$$

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta),\ 0<\theta<1.$$

Като се възползуваме от правилото за диференциране на съставни функции, получаваме

$$\varphi^{(m)}(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^m f(x_0, y_0),\ m=1, 2, \ldots, n,$$

$$\varphi^{(n+1)}(\theta)=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k).$$

Като вземем пред вид още, че

$$\varphi(1)=f(x_0+h, y_0+k) \text{ и } \varphi(0)=f(x_0, y_0),$$

от равенството (1) намираме

$$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0, y_0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)f(x_0, y_0)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(x_0, y_0)+\dots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^n f(x_0, y_0)+R_n,$$

където

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k).$$

При горните разсъждения ние предполагахме, че частните производни на $f(x, y)$ са непрекъснати в M, обаче нищо не предполагахме за непрекъснатостта на самата функция $f(x, y)$. Не е трудно да се убедим обаче, че от съществуването и непрекъснатостта на първите производни следва непрекъснатостта и на $f(x, y)$. И наистина нека (x_0, y_0) е коя да е точка от M. Тъй като множеството M е отворено, точката (x_0, y_0) е вътрешна за M и следователно точките

$$(x_0+th, y_0+tk),$$

където $0\leqq\theta\leqq 1$, ще принадлежат на M, щом $|h|$ и $|k|$ са достатъчно малки. Използуваме формулата на Тейлор при $n=0$

$$f(x_0+h, y_0+k)=$$

$$=f(x_0, y_0)+hf'_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k)+kf'_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k),$$

където $0<\theta<1$. Оттук се вижда веднага непрекъснатостта на функцията $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0), защото, ако оставим точката (x_0+h, y_0+k) да описва произволна редица от точки, клоняща към (x_0, y_0), членовете на която принадлежат на M, съответната редица от стойностите на

$$f(x_0+h, y_0+k)$$

ще клони към $f(x_0, y_0)$.

В заключение ще споменем, че теоремата на Тейлор при $n=0$, с която си послужихме сега, се нарича често теорема за крайните нараствания при функции на няколко променливи.

§ 15. Максимум и минимум при функции на две независими променливи

Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана в някое точково множество D и нека (x_0, y_0) е една вътрешна точка за това множество. Казваме, че функцията $f(x, y)$ притежава локален максимум в точката (x_0, y_0), ако в някоя околност на тази точка е изпълнено неравенството

$$f(x, y)\leqq f(x_0, y_0).$$

Казваме, че локалният максимум е строг, ако в някоя околност на точката (x_0, y_0) е изпълнено равенството

$$f(x, y)=f(x_0, y_0)$$

само при $x=x_0$ и $y=y_0$. Ако пък в някоя околност на точката (x_0, y_0) е изпълнено неравенството

$$f(x, y)\geqq f(x_0, y_0),$$

казваме, че функцията $f(x, y)$ притежава локален минимум в тази точка. Казваме, че този локален минимум е строг, ако в някоя околност на точката (x_0, y_0) равенството се достига само в точката (x_0, y_0). Ние и тук често ще си служим с термина локален екстремум, както правихме това, когато разглеждахме функции на една променлива.

Ако една функция $f(x, y)$ е диференцуема както частно спрямо x, така и частно спрямо y в една вътрешна точка (x_0, y_0) от дефиниционната си област и ако тази функция притежава в точката (x_0, y_0) локален екстремум, то двете частни производни f_x и f_y имат стойност нула в разглежданата точка.

Н Ч

Преди да пристъпим към доказателството, нека обърнем внимание на това, че в дефиницията на понятието екстремум не се иска съществуването на частните производни. Така например функцията $\varphi(x, y)$, дефинирана с равенството

$$\varphi(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

при всички стойности на x и y, притежава минимум в началото на координатната система, защото $\varphi(x, y)\geqq 0$, но $\varphi(0, 0)=0$. Въпреки това тази функция не притежава в началото например частна производна спрямо x, защото функцията

$$\varphi(x, 0)=\sqrt{x^2}=|x|,$$

както знаем, не е диференцуема в точката $x=0$. В теоремата, която предстои да докажем, се иска обаче от функцията $f(x, y)$ не само да притежава локален екстремум в точката (x_0, y_0), но и да има частни производни в тази точка. Последното условие се налага, за да има въобще смисъл да се питаме каква е стойността на тези частни производни в точката (x_0, y_0).

И така нека функцията $f(x, y)$ има локален екстремум в една вътрешна точка (x_0, y_0) от дефиниционната си област и нека в тази точка съществуват двете частни производни f_x и f_y. Трябва да докажем, че

T

$$f_x(x_0, y_0)=0 \text{ и } f_y(x_0, y_0)=0.$$

Ние ще извършим доказателството за случая, когато функцията $f(x,y)$ притежава локален максимум. Случаят, когато имаме локален минимум, се разглежда по същия начин. Щом функцията $f(x, y)$ притежава локален максимум в точката (x_0, y_0), може да се намери положително число δ по такъв начин, че за всички точки от околността

$$|x-x_0|<\delta, \ |y-y_0|<\delta$$

да е изпълнено неравенството

$$f(x, y) \leqq f(x_0, y_0).$$

Специално, ако изберем $y=y_0$, получаваме

$$f(x, y_0) \leqq f(x_0, y_0)$$

при $|x-x_0|<\delta$, което ни учи, че функцията

$$\varphi(x)=f(x, y_0)$$

има локален максимум в точката $x=x_0$. Функцията $\varphi(x)$ обаче зависи само от един аргумент и е диференцуема в точката x_0 (последното не означава в същност нищо друго освен това, че функцията $f(x, y)$ е диференцуема частно спрямо x в точката (x_0, y_0)). Като се възползуваме от това, което знаем за максимумите и минимумите на функциите, които зависят от един аргумент (вж. § 2, глава IV от част II), получаваме

$$\varphi'(x_0)=0$$

или, което е същото,

$$f'_x(x_0, y_0)=0.$$

Аналогично се доказва, че $f'_y(x_0, y_0)=0$.

С това ние получихме едно необходимо условие за съществуване на локален екстремум на диференцуеми функции. Сега ще потърсим достатъчни условия.

Нека функцията $f(x, y)$ притежава непрекъснати частни производни поне до втори ред в някоя околност Δ на точката (x_0, y_0) и нека

$$f'_x(x_0, y_0)=0, \ f'_y(x_0, y_0)=0.$$

Ако при тези условия квадратичната форма на λ и μ

(1) $$f''_{xx}(x_0, y_0)\lambda^2+2f''_{xy}(x_0, y_0)\lambda\mu+f''_{yy}(x_0, y_0)\mu^2$$

е положително дефинитна, функцията $f(x, y)$ има строг локален минимум в точката (x_0, y_0); ако ли пък квадратичната форма (1) е отрицателно дефинитна, функцията $f(x, y)$ има строг локален максимум.

Ще разгледаме само случая, когато квадратичната форма (1) е положително дефинитна. Случаят, когато тя е отрицателно дефинитна, се разглежда по същия начин. Имаме да докажем, че функцията $f(x, y)$ има строг локален минимум в точката (x_0, y_0). Да допуснем противното. В такъв случай във всяка околност на точката (x_0, y_0)

ще може да се намери поне една точка (x_0+h, y_0+k), различна от точката (x_0, y_0) за която

$$f(x_0+h, y_0+k) \leqq f(x_0, y_0).$$

Това ни дава възможност да изберем редица от точки

$$(x_0+h_1, y_0+k_1), (x_0+h_2, y_0+k_2), \ldots, (x_0+h_n, y_0+k_n), \ldots,$$

които са различни от точката (x_0, y_0) и които клонят към тази точка по такъв начин, че да имаме

(2) $$f(x_0+h_n, y_0+k_n) \leqq f(x_0, y_0).$$

От друга страна, формулата на Тейлор ни дава

$$f(x_0+h_n, y_0+k_n)=f(x_0, y_0)+\frac{1}{1!}\Big(f_x(x_0, y_0)h_n+f_y(x_0, y_0)k_n\Big)+$$
$$+\frac{1}{2!}\Big(f''_{xx}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)h_n^2+2f''_{xy}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)h_n k_n+$$
$$+f''_{yy}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)k_n^2\Big),$$

където $0<\theta_n<1$. По такъв начин, като вземем под внимание, че

$$f_x(x_0, y_0)=0 \quad f_y(x_0, y_0)=0,$$

намираме

$$f(x_0+h_n, y_0+k_n)=f(x_0, y_0)+\frac{1}{2!}\Big(f''_{xx}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)h_n^2+$$
$$+2f''_{xy}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)h_n k_n+f''_{yy}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)k_n^2\Big),$$

което заедно с неравенството (2) ни дава

(3) $$f''_{xx}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)h_n^2+2f''_{xy}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)h_n k_n+$$
$$+f''_{yy}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)k_n^2 \leqq 0.$$

Да положим

$$\frac{h_n}{\sqrt{h_n^2+k_n^2}}=\lambda_n \quad \text{и} \quad \frac{k_n}{\sqrt{h_n^2+k_n^2}}=\mu_n.$$

Това ние можем да направим, защото точката (x_0+h_n, y_0+k_n) е различна от точката (x_0, y_0) и следователно $h_n^2+k_n^2 \neq 0$. В такъв случай очевидно

(4) $$\lambda_n^2+\mu_n^2=1,$$

а неравенството (3) добива вида

(5) $$f''_{xx}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)\lambda_n^2+2f''_{xy}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)\lambda_n\mu_n+ +f''_{yy}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)\mu_n^2\leqq 0.$$

От (4) получаваме

$$|\lambda_n|\leqq 1,\quad |\mu_n|\leqq 1,$$

т. е. двете редици

(6) $$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

(7) $$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$$

са ограничени. Да изберем строго растяща редица от цели положителни числа

$$m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$$

по такъв начин, че двете подредици

$$\lambda_{m_1}, \lambda_{m_2}, \lambda_{m_3}, \ldots$$

$$\mu_{m_1}, \mu_{m_2}, \mu_{m_3}, \ldots$$

да бъдат сходящи. Това може да стане така: първо избираме от редицата (6) сходяща подредица

$$\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \lambda_{k_3}, \ldots$$

а след това от редицата

$$\mu_{k_1}, \mu_{k_2}, \mu_{k_3}, \ldots$$

избираме сходяща подредица и означаваме с

$$m_1, m_2, m_3, \ldots$$

номерата на нейните членове. Да поставим m_n вместо n в равенството (4) и неравенството (5). По такъв начин получаваме

(8) $$\lambda_{m_n}^2+\mu_{m_n}^2=1,$$

(9) $$f''_{xx}(x_0+\theta_{m_n}h_{m_n}, y_0+\theta_{m_n}k_{m_n})\lambda_{m_n}^2+ +2f''_{xy}(x_0+\theta_{m_n}h_{m_n}, y_0+\theta_{m_n}k_{m_n})\lambda_{m_n}\mu_{m_n}+ +f''_{yy}(x_0+\theta_{m_n}h_{m_n}, y_0+\theta_{m_n}k_{m_n})\mu_{m_n}^2\leqq 0.$$

Да положим

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_{m_n}=\lambda_0 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\mu_{m_n}=\mu_0$$

и да извършим граничен преход в (8) и (9). Така получаваме

$$\lambda_0^2+\mu_0^2=1,$$

$$f''_{xx}(x_0, y_0)\lambda_0^2+2f''_{xy}(x_0, y_0)\lambda_0\mu_0+f''_{yy}(x_0, y_0)\mu_0^2\leqq 0,$$

което противоречи на допускането, че квадратичната форма (1) е положително дефинитна. С това е установено, че функцията $f(x, y)$ наистина има локален минимум в точката (x_0, y_0).

Ние знаем (вж. § 5, глава IV на част II), че ако

$$f''^2_{xy}(x_0, y_0)-f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0)<0,$$

$$f''_{xx}(x_0, y_0)>0,$$

то квадратичната форма (1) е положително дефинитна, а ако

$$f''^2_{xy}(x_0, y_0)-f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0)<0,$$

$$f''_{xx}(x_0, y_0)<0,$$

то тя е отрицателно дефинитна. Това ни дава възможност да формулираме получения резултат още така:

Ако функцията $f(x, y)$ е дефинирана и притежава непрекъснати производни до втори ред в някоя околност на точката (x_0, y_0), ако

$$f'_x(x_0, y_0)=f'_y(x_0, y_0)=0$$

и

$$f''^2_{xy}(x_0, y_0)-f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0)<0,$$

то в точката (x_0, y_0) имаме локален екстремум; при $f''_{xx}(x_0, y_0)>0$ имаме локален минимум, а при $f''_{xx}(x_0, y_0)<0$ имаме локален максимум.

Ако функцията $f(x, y)$ има непрекъснати частни производни до втори ред в някоя околност на точката (x_0, y_0) и притежава локален минимум в тази точка, то квадратичната форма

$$g(\lambda, \mu)=f''_{xx}(x_0, y_0)\lambda^2+2f''_{xy}(x_0, y_0)\lambda\mu+f''_{yy}(x_0, y_0)\mu^2$$

приема само неотрицателни стойности, каквито и да бъдат стойностите на λ и μ. За да докажем това, избираме произволно числата λ и μ и разглеждаме помощната функция

$$\varphi(t)=f(x_0+\lambda t, y_0+\mu t),$$

която е очевидно дефинирана за всички достатъчно малки стойности на t. По предположение функцията $f(x, y)$ има локален минимум в точката (x_0, y_0). Това ни дава основание да твърдим, че при всички достатъчно малки стойности на t

$$f(x_0+\lambda t, y_0+\mu t)\geqq f(x_0, y_0)$$

и следователно

$$\varphi(t)\geqq\varphi(0).$$

Последното неравенство ни учи, че функцията $\varphi(t)$ има локален минимум в точката $t=0$ и следователно $\varphi'(0)=0$. От това можем да заключим, че

$$\varphi''(0) \geqq 0.$$

И наистина, като се възползуваме от формулата на Тейлор

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1!}\varphi'(0) + \frac{t^2}{2!}\varphi''(\theta t),\ 0<\theta<1,$$

и вземем пред вид, че $\varphi'(0)=0$, при достатъчно малки, но различни от нула стойности на t получаваме

$$\varphi''(\theta t) = \frac{2}{t^2}[\varphi(t)-\varphi(0)] \geqq 0$$

и след като извършим граничния преход $t\to 0$, намираме $\varphi''(0)\geqq 0$. Като вземем пред вид, че

$$\varphi'(t)=f_x(x_0+\lambda t,\ y_0+\mu t)\lambda+f_y(x_0+\lambda t,\ y_0+\mu t)\mu,$$

$$\varphi''(t)=f''_{xx}(x_0+\lambda t,\ y_0+\mu t)\lambda^2+2f''_{xy}(x_0+\lambda t,\ y_0+\mu t)\lambda\mu+$$
$$+f''_{yy}(x_0+\lambda t,\ y_0+\mu t)\mu^2,$$

при $t=0$ добиваме

$$f''_{xx}(x_0,\ y_0)\lambda^2+2f''_{xy}(x_0,\ y_0)\lambda\mu+f''_{yy}(x_0,\ y_0)\mu^2=\varphi''(0)\geqq 0.$$

С това нашето твърдение е доказано. Аналогично се установява, че ако функцията $f(x,y)$ има локален максимум в точката (x_0, y_0) (и ако са изпълнени, разбира се, останалите условия), то

$$f''_{xx}(x_0,\ y_0)\lambda^2+2f''_{xy}(x_0,\ y_0)\lambda\mu+f''_{yy}(x_0,\ y_0)\mu^2\leqq 0.$$

Тези разсъждения не ни дават право обаче да заключим, че квадратичната форма

$$g(\lambda,\mu)=f''_{xx}(x_0,\ y_0)\lambda^2+2f''_{xy}(x_0,\ y_0)\lambda\mu+f''_{yy}(x_0,\ y_0)\mu^2$$

е дефинитна, защото не е изключено да имаме $g(\lambda,\mu)=0$, без да имаме $\lambda=\mu=0$.

По този начин получихме още едно необходимо условие за съществуване на локален екстремум, което се отнася обаче за двукратно диференцуеми функции, частните производни на които са непрекъснати. Този резултат ни дава право да твърдим, че при

$$f''^2_{xy}(x_0,\ y_0)-f''_{xx}(x_0,\ y_0)f''_{yy}(x_0,\ y_0)>0$$

функцията $f(x,y)$ сигурно няма локален екстремум в точката (x_0, y_0), защото, както знаем, квадратичната форма

$$a\lambda^2+2b\lambda\mu+c\mu^2$$

не си мени знака само когато

$$b^2-ac\leqq 0.$$

В заключение нека подчертаем, че направените разсъждения не ни дават никакво указание за съществуване или несъществуване на екстремум в случая, когато

$$f''^2_{xy}(x_0,\ y_0)-f''_{xx}(x_0,\ y_0)f''_{yy}(x_0,\ y_0)=0.$$

В този случай може да имаме, но може и да нямаме екстремум. В това ще се убедим със следните примери:

1. Функцията

$$f(x,y)=x^4+y^4$$

има минимум в точката (0, 0). Въпреки това за нея

$$f''^2_{xy}(0,\ 0)-f''_{xx}(0,\ 0)f''_{yy}(0,\ 0)=0.$$

2. За функцията

$$f(x,y)=x^3-y^3$$

имаме

$$f''^2_{xy}(0,\ 0)-f''_{xx}(0,\ 0)f''_{yy}(0,\ 0)=0.$$

Въпреки това тя не притежава екстремум в началото, защото разликата

$$f(x,y)-f(0,0)=x^3-y^3$$

си мени знака във всяка околност на началото.

Ще покажем с един пример как могат да се използуват резултатите от изследванията в този параграф за намиране на локални екстремуми на функции, които зависят от два аргумента.

Да разгледаме функцията

$$z=ax^2+2bxy+cy^2,$$

където $b^2-ac\neq 0$. В такъв случай

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2ax+2by,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2bx+2cy.$$

Тези производни се анулират само в началото, следователно в никоя друга точка не можем да имаме локален екстремум. От друга страна,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2a,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=2b,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2c.$$

Това ни дава

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\,(b^2-ac).$$

И така, ако $b^2-ac<0$, то разглежданата функция притежава локален екстремум в точката (0, 0). Когато $a<0$, имаме локален максимум, а когато $a>0$, имаме локален минимум. Ако $b^2-ac>0$, то разглежданата функция няма локален екстремум. В този случай повърхнината с уравнение

$$z=ax^2+2b\,xy+cy^2$$

е хиперболичен параболоид и точката (0, 0) е седловидна точка върху него.

Задачи

1. Намерете локалните екстремуми на функцията

$$z=x^3-y^3-3x+3y.$$

Отг. В точката $(1, -1)$ имаме локален минимум, а в точката $(-1, 1)$ — **локален** максимум.

2. Покажете, че функцията

$$z=2x^4+2y^4+4x^2y^2-16x+16y+1$$

има локален минимум в точката $(1, -1)$.

3. Намерете три неотрицателни числа x, y и z, сумата на които е равна на $a>0$, за които произведението xyz има най-голяма стойност.

Решение. Имаме да намерим най-голямата стойност на функцията

$$f(x, y)=xy(a-x-y),$$

където $x\geq 0$, $y\geq 0$ и $x+y\leq a$. Не е трудно да се покаже, че разглежданата функция има един локален максимум, и не е трудно да се намери къде се намира този локален максимум. С това обаче задачата съвсем няма да бъде решена, защото ние знаем, че един локален максимум не е задължен да представлява най-голямата от всичките стойности на функцията. Поради това ние ще разсъждаваме другояче. Областта, в която разглеждаме функцията, е ограничена и затворена и според една теорема на Вайерщрас има поне една точка, в която непрекъснатата функция $f(x, y)$ приема най-голяма стойност. Тази функция приема очевидно в някои точки от разглежданата област съществено положителни стойности. Така например $f\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)=\frac{a^3}{27}>0$

и точката $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ лежи в интересуващата ни област, защото $\frac{a}{3}>0$, $\frac{a}{3}+\frac{a}{3}<a$. Въз основа на казаното ние можем да твърдим, че най-голямата стойност на функцията $f(x, y)$ е също съществено положителна; тази най-голяма стойност се достига във вътрешна точка от разглежданата област, защото по контура имаме $f(x, y)=0$, както това читателят лесно ще провери. И така всяка точка (x, y), в която $f(x, y)$ има най-голяма стойност, е вътрешна за разглежданата област и следователно тя е точка на един локален максимум. От това заключаваме, че в разглежданата точка имаме

$$\frac{\partial f}{\partial x}=ay-2\,xy-y^2=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=ax-x^2-2\,xy=0.$$

Като вземем пред вид, че интересуващата ни точка е вътрешна и че следователно $x\neq 0$, $y\neq 0$, намираме

$$a-2x-y=0,$$

$$a-x-2y=0,$$

откъдето $x=\frac{a}{3}$, $y=\frac{a}{3}$. Максималната стойност на $f(x, y)$ е следователно

$$f\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)=\frac{a^3}{27}.$$

4. Дадени са n точки (x_i, y_i), $i=1, 2, \ldots, n$, в равнината XOY и n положителни числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Да намерим точка (x, y), за която сумата

$$S=\sum_{i=1}^{n} m_i\,[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]$$

има най-малка стойност.

Отговор.

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n},\quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}.$$

5. Да се докаже, че измежду всички правоъгълни паралелепипеди, вписани в дадена сфера, кубът има най-голям обем.

6. Измежду всички правоъгълни паралелепипеди с дадена пълна повърхнина да се намери онзи, който има най-голям обем.

7. Нека G е затворено и ограничено точково множество в едно пространство с n измерения, което има вътрешни точки. Нека $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е непрекъсната функция в G, която притежава частни производни от първи ред спрямо всичките независими променливи във всички вътрешни точки на G. Ако $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е константа върху контура на G, то има поне една вътрешна за G точка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, в която

$$f'_{x_1}(a_1, a_2, \ldots, a_n)=f'_{x_2}(a_1, a_2, \ldots, a_n)=\ldots=f'_{x_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n)=0.$$

ГЛАВА II

НЕЯВНИ ФУНКЦИИ

§ 1. Основни понятия

Нека $F(x, y)$ е една функция и нека M е нейната дефиниционна област. Казваме, че функцията $\varphi(x)$ е една неявна функция, определена от уравнението

$$F(x, y)=0,$$

когато:

1) точката с координати $[x, \varphi(x)]$ се намира в дефиниционната област M на $F(x, y)$, както и да избираме x от дефиниционната област на $\varphi(x)$;

2) при всички стойности на x от дефиниционната област на $\varphi(x)$ е изпълнено равенството

$$F[x, \varphi(x)]=0.$$

Ние ще изясним смисъла на тази дефиниция с няколко примера. Да разгледаме функцията $F(x, y)$, дефинирана с условието

$$F(x, y)=x^2+y^2-1$$

в цялата равнина. В такъв случай функцията $\varphi(x)$, дефинирана с равенството $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$ при $-1 \leq x \leq 1$, е една неявна функция, която се определя от уравнението $F(x, y)=0$. И наистина точката с координати $[x, \varphi(x)]$ сигурно лежи в дефиниционната област на $F(x, y)$, защото функцията $F(x, y)$ е дефинирана в цялата равнина. Освен това при всички стойности на x, за които функцията $\varphi(x)$ е дефинирана, имаме

$$F(x, \varphi(x))=x^2+(\sqrt{1-x^2})^2-1=x^2+1-x^2-1=0.$$

Ние можем обаче да си образуваме и други функции, които се определят като неявни от същото уравнение $F(x, y)=0$. И наистина нека $\varepsilon(x)$ е една произволна функция, която е дефинирана в някое подмножество R на интервала $[-1, 1]$ и приема само стойностите $+1$ и -1. Всяка функция $\psi(x)$, дефинирана с равенството

$$\psi(x)=\varepsilon(x)\sqrt{1-x^2}$$

в множеството R, е една неявна функция, която се определя от уравнението $F(x, y)=0$, защото

$$F[x, \varphi(x)]=x^2+[\varepsilon(x)\sqrt{1-x^2}]^2-1=x^2+1-x^2-1=0.$$

Като друг пример може да ни послужи понятието обратна функция. И наистина нека $f(y)$ е една функция и нека $\varphi(x)$ е една нейна обратна функция. Читателят знае от дефиницията на понятието обратна функция, че при всички стойности на x от дефиниционната област на $\varphi(x)$ имаме

$$f[\varphi(x)]=x$$

или, което е същото,

$$x-f[\varphi(x)]=0,$$

като точката $\varphi(x)$ не напуска никой път дефиниционната област на $f(y)$.

Това обаче означава, че функцията $\varphi(x)$ е една неявна функция, която се определя от уравнението

$$x-f(y)=0.$$

Нека обърнем внимание на читателя, че далеч не всяко уравнение $F(x, y)=0$ определя неявни функции. Нека например при всички стойности на x и y имаме $F(x, y)=1$. В такъв случай на уравнението $F(x, y)=0$ не отговаря никаква неявна функция по простата причина, че $F(x, y)$ никъде не се анулира. Разбира се, в този пример бихме могли вместо константата 1 да поставим коя да е функция, която не приема стойност нула. И така на едно уравнение $F(x, y)=0$ може да не отговаря нито една неявна функция. Може обаче едно такова уравнение да определи дори безбройно много неявни функции.

Понятието неявна функция може да бъде обобщено. Така ние можем да въведем понятието неявна функция на произволен брой независими променливи. Това става по следния начин. Нека ни е дадено уравнението

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)=0. \tag{1}$$

Казваме, че функцията $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е една неявна функция, която отговаря на уравнението (1), когато за всички точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от дефиниционната област на $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е изпълнено равенството

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n))=0,$$

като при това точките $[x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ не напускат дефиниционната област на $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$, когато точката $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ се мени в дефиниционната област на $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Понятието неявна функция може да се обобщи още по-нататък, като вместо едно уравнение разглеждаме система от уравнения. За простота ние ще разгледаме случая, когато ни са дадени две уравнения

$$(2)\qquad \begin{aligned} F(x, y, z)&=0,\\ G(x, y, z)&=0, \end{aligned}$$

които свързват x, y и z. Казваме, че двете функции

$$y=f(x),$$
$$z=g(x),$$

които са дефинирани в едно и също точково множество R, са неявни функции, отговарящи на системата (2), когато при всички стойности на x от R са изпълнени равенствата

$$F(x, f(x), g(x))=0,$$
$$G(x, f(x), g(x))=0,$$

като точката с координати $[x, f(x), g(x)]$ не напуска дефиниционните области на функциите $F(x, y, z)$ и $G(x, y, z)$, когато x се мени в R.

Ние няма да изясняваме по-подробно как става дефинирането на неявни функции, когато броят на уравненията и когато броят на независимите променливи е произволен. Нека читателят сам обмисли подробностите.

§ 2. Диференциране на неявни функции, които зависят от един аргумент

В тоя параграф ще си поставим за задача да изясним принципите, върху които почива техниката на диференцирането на неявните функции. При това ние няма да формулираме точно условията, при които ще бъдат валидни нашите разсъждения. Читателят ще може сам да направи това, като се възползува от указанията, които ние ще дадем в края на параграфа.

Нека $y=f(x)$ е една неявна функция, която се определя от уравнението

$$F(x, y)=0.$$

Да разгледаме функцията*

$$\varphi(x)=F[x, f(x)].$$

* Ние често ще пишем $F(x, y)$ вместо $F[x, f(x)]$. Трябва да напомним в такъв случай, че y е кратко означение за $f(x)$, а не е независима променлива. При такова означение изразът $F(x, y)$ е една съставна функция на x, която зависи от x непосредствено и посредством y.

Ние можем да диференцираме тази функция по правилото за диференциране на съставни функции (разбира се, ако са изпълнени условията, при които установихме това правило). По такъв начин получаваме

$$\varphi'(x)=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'.$$

От друга страна, $\varphi(x)$ е константа (нейната стойност е нула), защото $f(x)$ е една неявна функция, която се определя от уравнението $F(x, y)=0$. Оттук заключаваме, че $\varphi'(x)=0$ и следователно

$$(1)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0.$$

Като решим това уравнение относно y', намираме

$$y'=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}},$$

ако, разбира се, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$. По този начин ние намерихме един израз за производната y' на неявната функция $y=f(x)$.

Аналогично, пак като се ползуваме от правилото за диференциране на съставни функции, ние можем да намерим y''. Това може да стане по следния начин: като вземем пред вид, че $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ зависят от x непосредствено и посредством y, получаваме с помощта на правилото за диференциране на съставни функции

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y',$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y';$$

пресмятаме производната $\psi'(x)$ на функцията

$$\psi(x)=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'$$

и получаваме

$$\psi'(x)=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y'\right)+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'\right)y'+\frac{\partial F}{\partial y}y''=$$
$$=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y'';$$

като имаме пред вид, че $\psi(x)$ е константа (равенството (1) ни учи, че $\psi(x)=0$), получаваме $\psi'(x)=0$ или, което е същото,

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0.$$

От това равенство определяме y'', стига да имаме $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$. Аналогично можем да пресметнем y'''. За тази цел диференцираме двете части на равенството (2) спрямо x и получаваме

$$\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}y'\right)+2\left[\frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}y'\right]y'+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y''+$$

$$+\left(\frac{\partial^3 F}{\partial y^2\partial x}+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}y'\right)y'^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot 2\,y'\,y''+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'\right]y''+\frac{\partial F}{\partial y}y'''=0$$

или

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}y'+3\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}y'^2+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}y'^3+3\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'\,y''+3\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y''+$$

$$+\frac{\partial F}{\partial y}y'''=0.$$

Аналогично намираме y^{IV} и пр.

Разсъжденията, които направихме досега, се извършваха, без да се посочват условията за тяхната валидност. В случая, когато се търси първата производна на функцията $y=f(x)$ в точката x_0, ние можем да формулираме по следния начин една система от достатъчни условия, за да могат да се извършат пресмятанията, за които говорихме по-горе: за функцията $F(x, y)$ се иска да бъде дефинирана в някоя околност Δ на точката (x_0, y_0) където сме положили $y_0=f(x_0)$, да има частни производни F'_x и F'_y в Δ, които да бъдат непрекъснати в точката (x_0, y_0); за неявната функция $f(x)$, която е определена от уравнението $F(x, y)=0$, достатъчно е да искаме да бъде дефинирана в някоя околност на точката x_0 и да бъде диференцуема при $x=x_0$. В такъв случай правилото за диференциране на съставни функции ни дава

$$F'_x(x_0, y_0)+F'_y(x_0, y_0)f'(x_0)=0.$$

Ако искаме да делим с $F'_y(x_0, y_0)$, трябва да искаме още това число да бъде различно от нула.

Тези условия са само достатъчни за валидността на горните пресмятания. Те не са необходими.

Накрая ще отбележим, че ако производните F'_x и F'_y са непрекъснати не само в точката (x_0, y_0), но и в някоя околност на тази

точка и ако $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$, то не е нужно да се иска от функцията $f(x)$ да бъде диференцуема. Достатъчно е да се иска тази функция да бъде дефинирана в някоя околност на точката x_0 и **непрекъсната** в тази околност. От това вече следва нейната диференцуемост във всяка достатъчно малка околност D на точката x_0. И наистина нека x_1 е една точка от D. Ако положим

$$f(x_1+h)-f(x_1)=k \text{ и } f(x_1)=y_1,$$

получаваме с помощта на теоремата на Тейлор за функции на две променливи

$$F(x_1+h, y_1+k)=$$

$$=F(x_1, y_1)+F'_x(x_1+\theta h, y_1+\theta k)h+F'_y(x_1+\theta h, y_1+\theta k)\,k,$$

където $0<\theta<1$. Като вземем пред вид, че

$$F(x_1+h, y_1+k)=F(x_1, y_1)=0,$$

намираме

$$\frac{k}{h}=-\frac{F'_x(x_1+\theta h, y_1+\theta k)}{F'_y(x_1+\theta h, y_1+\theta k)}$$

или още

$$(3)\qquad \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}=-\frac{F'_x(x_1+\theta h, y_1+\theta k)}{F'_y(x_1+\theta h, y_1+\theta k)},$$

тъй като

$$k=f(x_1+h)-f(x_1).$$

Да извършим в равенството (3) граничния преход $h\to 0$. В такъв случай от непрекъснатостта на $f(x)$ при $x=x_1$ заключаваме, че $k\to 0$. От друга страна, $F'_y(x_1, y_1)\neq 0$, стига околността D да е достатъчно малка, защото частната производна $F'_y(x, y)$ е непрекъсната и $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$. Като вземем под внимание това обстоятелство и се възползуваме от непрекъснатостта на частните производни F'_x и F'_y, заключаваме, че изразът

$$-\frac{F'_x(x_1+\theta h, y_1+\theta k)}{F'_y(x_1+\theta h, y_1+\theta k)}$$

притежава граница, когато $h\to 0$, и тази граница е

$$-\frac{F'_x(x_1, y_1)}{F'_y(x_1, y_1)}.$$

Полученият резултат ни дава право да твърдим, че отношението

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

също има граница, когато h клони към нула, т. е. функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_1 и

$$f'(x_1) = -\frac{F'_x(x_1, y_1)}{F'_y(x_1, y_1)}.$$

Задачи

1. Намерете y', като знаете, че y е една диференцуема функция на x, която удовлетворява уравнението

$$x^2+y^2=1.$$

Забележка. За да се убедим в съществуването на такива функции, достатъчно е да решим уравнението относно y. Така например функцията $y=\sqrt{1-x^2}$ има искането свойство. Очевидно и $y=-\sqrt{1-x^2}$ е една такава функция. Не е трудно да се намерят всичките диференцуеми функции в отворения интервал $(-1, 1)$, които удовлетворяват уравнението

$$x^2+y^2-1=0.$$

Очевидно всяка такава функция може да се представи във вида

$$y=\varepsilon(x)\sqrt{1-x^2},$$

където функцията $\varepsilon(x)$ приема само стойностите 1 и -1. От друга страна,

$$\varepsilon(x)=\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Като имаме пред вид, че функцията y е непрекъсната (защото е диференцуема), а функцията $\sqrt{1-x^2}$ е също непрекъсната и различна от нула в отворения интервал $(-1, 1)$, заключаваме, че и $\varepsilon(x)$ е една непрекъсната функция на x. Това ни дава право да заключим, че $\varepsilon(x)$ е константа. И наистина, ако допуснем, че има две точки x_1 и x_2, за които $\varepsilon(x_1)=1$ и $\varepsilon(x_2)=-1$, ще можем да заключим поради непрекъснатостта на $\varepsilon(x)$, че има поне една точка между x_1 и x_2, в която $\varepsilon(x)$ се анулира, нещо, което не е възможно, защото $\varepsilon(x)$ приема само стойностите 1 и -1. И така други диференцуеми функции освен $\sqrt{1-x^2}$ и $-\sqrt{1-x^2}$ няма в отворения интервал $(-1, 1)$, които да удовлетворяват уравнението $x^2+y^2-1=0$.

Решение. Като вземем пред вид, че

$$y=\varepsilon\sqrt{1-x^2},$$

където при всички стойности на x имаме или $\varepsilon=1$, или $\varepsilon=-1$, получаваме

$$y'=\frac{-\varepsilon x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{y}.$$

Ние можем да намерим y' и без да решаваме уравнението $x^2+y^2-1=0$ относно y. За тази цел диференцираме израза

$$\varphi(x)=x^2+y^2-1,$$

като помним, че y е една функция на x и че $\varphi(x)$ е една константа. Това ни дава

$$\varphi'(x)=2x+2yy'=0,$$

откъдето

$$y'=-\frac{x}{y}.$$

Този начин за намиране на производните на неявните функции се използува, когато не можем или не искаме да решаваме уравнението, което определя неявната функция.

2. Намерете y'' за онези стойности на x, за които $y^2-ax\neq 0$, като знаете, че y е една диференцуема функция на x, която удовлетворява уравнението

$$x^3+y^3-3axy=0,\quad a\neq 0.$$

Забележка. Такива функции има. За да покажем това, разглеждаме помощната функция

$$f(t)=\frac{3\,at}{1+t^3}$$

в кой да е краен и затворен интервал $[p, q]$, който не съдържа точките -1 и $2^{-\frac{1}{3}}$. Функцията $f(t)$ е дефинирана и диференцуема в този интервал (защото точката -1 не лежи в него) и производната

$$f'(t)=3a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$$

е различна от 0 (защото точката $2^{-\frac{1}{3}}$ лежи вън от разглеждания интервал). От това заключаваме, че функцията $f(t)$ приема всяка своя стойност само веднъж (в противен случай от теоремата на Рол бихме заключили, че $f'(t)$ се анулира в интервала (p, q), което не е вярно) и следователно е обратима. Нека $g(x)$ е обратната функция на $f(t)$, т. е.

$$\frac{3ag(x)}{1+g^3(x)}=x.$$

Дефиниционната област на $g(x)$, както знаем, е един краен и затворен интервал и функцията $g(x)$ е диференцуема в него. От това заключаваме, че функцията

$$\varphi(x)=xg(x)$$

е също диференцуема в дефиниционната област на $g(x)$. За функцията $\varphi(x)$ не е трудно да се провери, че удовлетворява уравнението

$$x^3+y^3-3axy=0,$$

като се вземе пред вид, че

$$\frac{3ag(x)}{1+g^3(x)}=x.$$

В дефиниционния интервал на $\varphi(x)$ сигурно има точки, за които $y^2-ax\neq 0$, защото системата

$$x^3+y^3-3\,axy=0,$$
$$y^2-ax=0$$

има само краен брой решения, както това се вижда например, като елиминираме x.

Решение. Диференцираме израза

$$F(x)=x^3+y^3-3axy,$$

като помним, че y е функция на x и че $F(x)$ е константа. Това ни дава

$$F'(x)=3x^2+3y^2y'-3ay-3axy'=0.$$

Оттук намираме

$$y'=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}.$$

Като вземем пред вид, че y е диференцуема функция на x и че

$$y^2-ax\neq 0,$$

заключаваме, че y' е също така диференцуема функция на x. Производната на y' можем да намерим например, като диференцираме $F'(x)$. Това ни дава

$$F''(x)=6x+6yy'^2+3y^2y''-3ay'-3ay'-3axy''=0.$$

Като заместим y' с равното му и вземем под внимание уравнението

$$x^3+y^3-3axy=0,$$

намираме

$$y''=-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}.$$

Къде използувахме условието $y^2-ax\neq 0$?

3. Намерете y', като се знае, че y е диференцуема функция на x, определена от уравнението

$$-1+x^2e^x+x\sin y+\cos 2y=0.$$

Забележка. В съществуването на такава функция можем да се убедим, като решим разглежданото уравнение относно y.

4. Намерете y' и y'', като знаете, че y е диференцуема функция на x, която удовлетворява уравнението

$$x=y-\alpha\sin y,\quad |\alpha|<1.$$

Забележка. Съществуването на такава функция може да се установи по следния начин. Нека $g(x)$ е една обратна функция на функцията

$$f(y)=y-\alpha\sin y.$$

Функцията $g(x)$ е дефинирана при всички стойности на x, защото $f(y)$ може да приема всяка стойност. Функцията $y=g(x)$ удовлетворява също така уравнението $x=f(y)$. Остава да покажем, че функцията $g(x)$ е диференцуема. Като вземем пред вид, че функцията

$$F(x, y)=x-y+\alpha\sin y$$

притежава непрекъснати частни производни спрямо x и y и че

$$F'_y=-1+\alpha\cos y<0,$$

заключаваме, че е достатъчно да покажем непрекъснатостта на $g(x)$, за да сме сигурни, че тази функция е диференцуема (нека обърнем внимание на това, че непрекъснатостта на функцията $g(x)$ не следва непосредствено от общата теорема, която пие доказахме по-рано за непрекъснатост на обратни функции).

Непрекъснатостта на функцията $g(x)$ може да се установи по следния начин:

$$x-x_0=f[g(x)]-f[g(x_0)]=[g(x)-g(x_0)]f'(\eta)=[g(x)-g(x_0)](1-\alpha\cos\eta),$$

където η е едно число, подходящо избрано между $g(x)$ и $g(x_0)$. Това ни дава

$$|g(x)-g(x_0)|=\left|\frac{x-x_0}{1-\alpha\cos\eta}\right|\leq\frac{|x-x_0|}{1-|\alpha|},$$

с което е установена непрекъснатостта на $g(x)$ в произволно избрана точка x_0.

5. Нека y е една диференцуема намаляваща функция, определена от уравнението

$$x^2+y^2=1 \text{ при } 0<x<1$$

(има ли такава?). Докажете, че

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0.$$

6. Нека y е една диференцуема намаляваща функция, определена при $0<x<1$ от уравнението

$$x^2y^2+x^2+y^2=1$$

(има ли такава?). Докажете, че

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

7. Нека $y=F(x)$ е една два пъти диференцуема функция, която е дефинирана в някоя околност на началото и удовлетворява уравнението

$$x^3+y^3-3axy=0,\quad a\neq 0$$

(има ли такава функция?). Пресметнете $F'(0)$.

Упътване. За да се убедите в съществуването на такава функция, разгледайте помощната функция

$$f(t)=\frac{3at}{1+t^3}$$

в кой да е затворен интервал $[p, q]$, който не съдържа точките $t=-1$ и $t=2^{-\frac{1}{3}}$, обаче съдържа точката $t=0$. Покажете, че тази функция е обратима и обратната ѝ функция е диференцуема. Нека $g(x)$ е нейната обратна. Покажете, че функцията $g(x)$ е диференцуема поне два пъти. (Това ще бъде достатъчно за нашите нужди. Не е трудно да се види обаче, че тази функция е диференцуема дори безбройно много пъти.) За тази цел се възползувайте от равенството

$$\frac{3ag(x)}{1+g^3(x)}=x.$$

Покажете, че дефиниционният интервал на $g(x)$ съдържа началото на вътрешността си. Покажете най-сетне, че функцията $y=xg(x)$ удовлетворява уравнението

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

За да намерите y', диференцирайте последното уравнение. Това ще ви даде

$$x^2-ay+y'(y^2-ax)=0.$$

Оттук обаче все още не можем да определим y', защото $F(0)=0$ и следователно изразът y^2-ax се анулира при $x=0$. Ние все пак можем да намерим y'. За целта диференцирайте още веднъж. Това ще ви даде

$$2x-ay'+y'(2yy'-a)+y''(y^2-ax)=0.$$

Като вземете под внимание, че за $x=0$ имаме $y=0$, ще получите $F'(0)=0$. Сравнете със задача 2.

8. Намерете z'', като знаете, че y и z са две функции на x, които удовлетворяват уравненията

$$f(y, z)=0,$$
$$g(x, y)=0,$$

(Тук се предполага, че са налице всичките условия, при които можем да извършим интересуващите ни пресмятания. Така например предполага се, че функциите допускат производни, които ни трябват, и пр.).

Решение. С еднократно диференциране намираме

$$\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial z}z'=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}y'=0. \tag{2}$$

Като диференцираме още веднъж, получаваме

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}z'\right)y'+\frac{\partial f}{\partial y}y''+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}z'\right)z'+\frac{\partial f}{\partial z}z''=0,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}y'+\left(\frac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}y'\right)y'+\frac{\partial g}{\partial y}y''=0$$

или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}y'z'+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}z'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''+\frac{\partial f}{\partial z}z''=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial g}{\partial y}y''=0. \tag{4}$$

От уравненията (1), (2), (3) и (4) елиминираме y', z' и y'' и получаваме уравнение, от което определяме z''.

9. Намерете y'' и z'', като знаете, че y и z са функции на x, които удовлетворяват уравненията

$$F(x,\ y,\ z)=0,$$

$$G(x,\ y,\ z)=0.$$

(Тук се предполага, както и в предната задача, че са налице всичките условия, при които можем да извършим пресмятанията, които ни трябват.)

Решение. Като диференцираме един път уравненията, получаваме

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial z}z'=0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}y'+\frac{\partial G}{\partial z}z'=0.$$

Като диференцираме още веднъж, намираме

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}z'^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y'+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}z'+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}y'z'+\frac{\partial F}{\partial y}y''+\frac{\partial F}{\partial z}z''=0,$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}z'^2+2\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}y'+2\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial z}z'+2\frac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial z}y'z'+\frac{\partial G}{\partial y}y''+\frac{\partial G}{\partial z}z''=0.$$

Забележка. Сравнете с предната задача. В специалния случай, когато функцията $F(x,\ y,\ z)$ не зависи от x, а функцията $G(x,\ y,\ z)$ не зависи от z, получаваме задача 8. От това е ясно, че ние можем да получим решението на задача 8 от решението на задача 9, като поставим $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial G}{\partial z}=0$.

10. Нека y е една достатъчен брой пъти диференцуема функция на x, която удовлетворява уравнението

$$f(y)=x,$$

където функцията $f(y)$ също допуска достатъчен брой производни. Пресметнете y''' при предположение, че $f'(y)\neq 0$.

Забележка. Очевидно y е една обратна функция на функцията $f(y)$.

Решение. С последователно диференциране намираме

$$f'(y)y'=1,$$

$$f''(y)y'^2+f'(y)y''=0,$$

$$f'''(y)y'^3+3f''(y)y'y''+f'(y)y'''=0,$$

откъдето

$$y'=\frac{1}{f'(y)},$$

$$y''=-\frac{f''(y)}{f'^3(y)},$$

$$y'''=\frac{3f''^2(y)-f'(y)f'''(y)}{f'^5(y)}.$$

§ 3. Диференциране на неявни функции, които зависят от няколко аргумента

Нека $u=\varphi(x,\ y)$ е една функция на x и y, която удовлетворява уравнението

$$F(x,\ y,\ u)=0.$$

Като вземем пред вид, че функцията

$$f(x,\ y)=F[x,\ y,\ \varphi(x,\ y)]$$

е константа (нейната стойност е нула), получаваме с помощта на правилото за диференциране на съставни функции

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

От тези уравнения можем да определим $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, стига да имаме $\frac{\partial F}{\partial u}\neq 0$. Аналогично намираме

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

или

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

От тези уравнения можем да определим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, стига, както и по-горе, да имаме $\frac{\partial F}{\partial u}\neq 0$. Аналогично се пресмятат третите производни и пр.

Задачи

Забележка. В задачите, които следват, се предполага, че функциите, за които става дума, са такива, че е възможно да се извършат за тях интересуващите ни пресмятания. Така например ще се предполага (при все че ние няма всеки път да казваме това), че тези функции са достатъчен брой пъти диференцуеми и пр.

1. Намерете производните $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ на z, като знаете, че z е една функция на x и y, която удовлетворява уравнението

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

(Има ли такава функция?)

Отговор.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{c^4(b^2-y^2)}{a^2\,b^2\,z^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{c^4(a^2-x^2)}{a^2\,b^2\,z^3}.$$

2. Нека z е една функция на x и y, която удовлетворява уравнението

$$y=x\varphi(z)+\psi(z).$$

Покажете, че

(1)
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=0.$$

Упътване. Покажете, че

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\varphi}{x\varphi'+\psi'},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x\varphi'+\psi'},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\varphi(2x\varphi'^2+2\varphi'\psi'-x\varphi\varphi''-\varphi\psi'')}{(x\varphi'+\psi')^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\varphi'(x\varphi'+\psi')-\psi''\varphi-x\varphi\varphi''}{(x\varphi'+\psi')^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x\varphi''+\psi''}{(x\varphi'+\psi')^3},$$

и заместете в уравнението (1).

3. Нека y е една функция на x и α, която удовлетворява уравнението

$$y=\alpha+x\varphi(y).$$

Докажете, че

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial\alpha^{n-1}}\left[\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right],$$

където $u=u(y)$ е една функция на y.

Упътване. Извършете доказателството индуктивно по следния начин:

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial\alpha^{n-1}}\left(\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial^{n-1}}{\partial\alpha^{n-1}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)\right].$$

Преобразувайте израза

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right),$$

като се възползувате от тъждеството

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F(y)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(F(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

при

$$F(y)=\varphi^n(y).$$

Верността на това тъждество се проверява с непосредствено диференциране така:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F(y)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)=F'(y)u'\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial\alpha}+F(y)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(F(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=F'(y)u'\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial x}+F(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\alpha}.$$

След като е установено, че

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

разсъжденията се развиват по-нататък по следния начин:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u'\frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}=u'\frac{\partial y}{\partial \alpha},$$

$$[1-x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial x}=\varphi(y),\quad [1-x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial \alpha}=1,$$

следователно

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(y)\frac{\partial u}{\partial \alpha}.$$

Оттук получаваме

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\varphi^{n+1}(y)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right]$$

и най-сетне

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\varphi^{n+1}(y)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[\varphi^{n+1}(y)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right].$$

Забележка. При $x=0$ имаме $y=\alpha$. Ако положим $u=f(y)$, получаваме

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}f[y(0,\alpha)]=\frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}}[\varphi^n(\alpha)f'(\alpha)].$$

Редът на Маклорен

$$f(y)=f[y(0,\alpha)]+\frac{x}{1!}\frac{\partial}{\partial x}\left[f[y(0,\alpha)]\right]+\cdots$$

добива в този случай вида

$$f(y)=f(\alpha)+\frac{x}{1!}\varphi(\alpha)f'(\alpha)+\frac{x^2}{2!}\frac{d}{d\alpha}[\varphi^2(\alpha)f'(\alpha)]+\cdots+\frac{x^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}}[\varphi^n(\alpha)f'(\alpha)]+\cdots$$

Редът, който получихме, се нарича ред на Лагранж (J. Lagrange).

4. Нека z е функция на x и y, която удовлетворява уравнението

$$x-az=\varphi(y-bz),$$

където a и b са константи, а φ е една диференцуема функция.

Докажете, че

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

5. Нека z е функция на x и y, която удовлетворява уравнението

$$z=x\varphi\left(\frac{z}{y}\right).$$

Докажете, че

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

§ 4. Диференциране на неявни функции, определени чрез системи

С помощта на методите, които изяснихме в § 2 и § 3 на тази глава, ние можем да намерим производните и на такива неявни функции, които са определени с помощта на няколко уравнения.

Нека ни е дадена една система

$$\begin{aligned}
F_1(x_1, x_2,\ldots, x_m;\ y_1, y_2,\ldots, y_n)&=0,\\
F_2(x_1, x_2,\ldots, x_m;\ y_1, y_2,\ldots, y_n)&=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\
F_n(x_1, x_2,\ldots, x_m;\ y_1, y_2,\ldots, y_n)&=0
\end{aligned}$$

от n уравнения с $n+m$ променливи. Нека

$$\begin{aligned}
y_1&=f_1(x_1, x_2,\ldots, x_m),\\
y_2&=f_2(x_1, x_2,\ldots, x_m),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
y_n&=f_n(x_1, x_2,\ldots, x_m)
\end{aligned}$$

са n функции на $x_1, x_2,\ldots, x_m$, които удовлетворяват тази система. В този случай, ако са налице условията, при които установихме теоремата за диференциране на съставни функции, можем да определим $\frac{\partial y_1}{\partial x_k}, \frac{\partial y_2}{\partial x_k},\ldots,\frac{\partial y_n}{\partial x_k}$ еднозначно от системата

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial x_k}+\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k}+\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_k}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k}&=0,\\
\frac{\partial F_2}{\partial x_k}+\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k}+\frac{\partial F_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_k}+\cdots+\frac{\partial F_2}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k}&=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\
\frac{\partial F_n}{\partial x_k}+\frac{\partial F_n}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k}+\frac{\partial F_n}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_k}+\cdots+\frac{\partial F_n}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k}&=0,
\end{aligned}$$

стига да имаме

$$\Delta=\begin{vmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\\
\frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}
\end{vmatrix}\neq 0.$$

В бъдеще при много въпроси ще срещаме детерминанти от този вид. Детерминантата Δ се нарича функционална или Якобиева детерминанта на функциите $F_1, F_2, \ldots, F_n$ по отношение на променливите $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и се означава съкратено с

$$\Delta=\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}.$$

Ние показахме как могат да се пресметнат частните производни $\frac{\partial y_1}{\partial x_k}, \frac{\partial y_2}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial x_k}$. Аналогично се пресмятат и производните от по-висок ред.

Задачи

Забележка. В задачите, които следват, се предполага, че са налице условията, при които могат да се извършат интересуващите ни пресмятания. Така например ще предполагаме, че функциите, които разглеждаме, са достатъчен брой пъти диференцуеми и пр.

1. Нека z и α са две функции на x и y, които удовлетворяват системата

$$[z-\varphi(\alpha)]^2=x^2(y^2-\alpha^2)$$
$$[z-\varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha)=\alpha x^2.$$

Докажете, че

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$$

2. Нека z и α са две функции на x и y, които удовлетворяват системата

$$z=\alpha x+yf(\alpha)+\varphi(\alpha),$$
$$0=x+yf'(\alpha)+\varphi'(\alpha).$$

Докажете, че

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

3. Нека z и α са две функции на x и y, които удовлетворяват системата

$$z\varphi'(\alpha)=[y-\varphi(\alpha)]^2,$$
$$(x+\alpha)\varphi'(\alpha)=y-\varphi(\alpha).$$

Докажете, че

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

4. Нека u и v са две функции на x и y, които удовлетворяват системата

$$x=f(u, v),$$
$$y=g(u, v).$$

Намерете $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Решение. Като диференцираме двете дадени уравнения частно спрямо x, получаваме

$$1=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$0=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Оттук намираме

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}}.$$

5. Нека u и v са две функции на x и y, които удовлетворяват системата

$$x=f(u, v),$$
$$y=g(u, v).$$

Намерете $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Решение. Като диференцираме системата частно спрямо x, получаваме

$$1=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$0=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Като диференцираме получените две уравнения още веднъж спрямо x, получаваме

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0.$$

От така получените четири уравнения елиминираме $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ и получаваме уравнение, от което определяме $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

§ 5. Теорема за съществуване на неявни функции

Знаем, че не всяко уравнение $F(x, y)=0$ дефинира неявна функция. Така например няма функция $y=\varphi(x)$, която да удовлетворява уравнението $e^{x+y}=0$, защото, както знаем, показателната функция не се анулира при никоя стойност на показателя. Сега ще си поставим за задача да дадем една система от достатъчни условия, при които може да се твърди, че съществува неявна функция, която се определя от дадено уравнение. Условията, които ще посочим, ще ни осигурят дори непрекъснатостта на тази функция.

Първоначално ще разгледаме уравнението

$$y=y_0+f(x, y), \tag{1}$$

където функцията $f(x, y)$ е дефинирана и непрекъсната поне в някоя околност R на точката (x_0, y_0), анулира се в тази точка и при всеки избор на двете точки (x, η_1), (x, η_2), които имат обща абсциса и лежат в R, удовлетворява неравенството*

$$|f(x, \eta_1)-f(x, \eta_2)| \leqq k |\eta_1-\eta_2|,$$

където k е положителна константа, по-малка от единица (но не и равна).

При тези условия може да се твърди, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има една и само една непрекъсната функция $\varphi(x)$, която удовлетворява уравнението

$$\varphi(x)=y_0+f[x, \varphi(x)]$$

при всички стойности на x от тази околност и приема стойност y_0 в точката x_0.

Ние ще извършим доказателството с помощта на така наречения метод на последователните приближения.

Без да ограничаваме общността, ние можем да считаме, че околността R е правоъгълник, страните на който са успоредни на съответните координатни оси. Една точка (x, y) лежи в R тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата

$$x_0-a < x < x_0+a,$$
$$y_0-b < y < y_0+b,$$

където $2a$ и $2b$ означават дължините на съответните страни на R.

Ще си образуваме една безкрайна редица от функции

$$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x), \ldots, \tag{2}$$

които ще наричаме последователни приближения на търсената функция $\varphi(x)$. За тази цел заместваме в дясната страна на равенството (1) променливата y с константата y_0. Така получената функция на x означаваме с $y_1(x)$, т. е.

$$y_1(x)=y_0+f(x, y_0)$$

* Ако при всеки избор на двете точки x_1 и x_2 от дефиниционната област на една функция $\psi(x)$ е изпълнено неравенството

$$|\psi(x_1)-\psi(x_2)| \leq k |x_1-x_2|,$$

където k е една константа, която не зависи от x_1 и x_2, казваме, че функцията $\psi(x)$ удовлетворява условието на Липшиц (R. Lipschitz). Константата k се нарича константа на Липшиц. Така например, ако функцията $\psi(x)$ е диференцуема в някой интервал и производната ѝ е ограничена, то тази функция удовлетворява уравнението на Липшиц, както това се вижда от теоремата за крайните нараствания:

$$|\psi(x_1)-\psi(x_2)|=|x_1-x_2|\,\psi'(\xi)| \leq k|x_1-x_2|,$$

където k е една горна граница на $|\psi'(x)|$.

Ползувайки се от тази терминология, можем да кажем, че функцията $f(x, y)$, която разглеждаме в текста, удовлетворява условието на Липшиц по отношение на y, като константата на Липшиц k не зависи от x и е по-малка от 1.

След като дефинирахме функцията $y_1(x)$, заместваме y в дясната страна на уравнението (1) с $y_1(x)$ и означаваме така получената функция с $y_2(x)$, т. е.

$$y_2(x)=y_0+f[x, y_1(x)].$$

Функцията $y_2(x)$ поставяме в дясната страна на уравнението (1) вместо y и означаваме резултата с $y_3(x)$, така че

$$y_3(x)=y_0+f[x, y_2(x)],$$

и т. н. Като продължаваме неограничено този процес, получаваме една безкрайна редица от функции, дефинирани по следния начин:

$$y_1(x)=y_0+f(x, y_0),$$
$$y_2(x)=y_0+f[x, y_1(x)],$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n(x)=y_0+f[x, y_{n-1}(x)],$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Функцията $y_1(x)$ е дефинирана в интервала (x_0-a, x_0+a). Ние не можем обаче да твърдим същото за функцията $y_2(x)$, защото не е изключена възможността точката с координати $[x, y_1(x)]$ да не принадлежи на R (има опасност стойностите на функцията $y_1(x)$ да напускат интервала (y_0-b, y_0+b), когато x се мени между x_0-a и x_0+a). Същото се отнася и за следващите функции от редицата (2). За да отстраним тази пречка, ще оставим x да се мени в по-тесния интервал $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$, където положителната константа α избираме по такъв начин, че да бъде по-малка от a и при $|x-x_0|<\alpha$ да е изпълнено неравенството

$$|f(x, y_0)|=|f(x, y_0)-f(x_0, y_0)|<q,$$

където q означава една константа, произволно избрана в отворения* интервал $(0, (1-k)\,b)$. Това може да се направи (стига α да изберем достатъчно малко), защото функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в точката (x_0, y_0) и $q>0$. Всички функции $y_n(x)$ са добре дефинирани в интервала $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ и стойностите им не напускат отворения интервал

$$(y_0-b,\ y_0+b).$$

Доказателството извършваме индуктивно. Ако функцията $y_{n-1}(x)$ е дефинирана в интервала $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ и удовлетворява неравенството

$$|y_{n-1}(x)-y_0|<b,$$

* За да постигнем целта, която преследваме, ние бихме могли да вземем $q=(1-k)b$. Ние избираме обаче $q<(1-k)\,b$ с оглед на по-далечни цели. Върху това ще се върнем на съответното място.

то същото се отнася и за функцията $y_n(x)$, защото*

(3) $|y_n(x)-y_0|=|f[x, y_{n-1}(x)]|=|f[x, y_{n-1}(x)]-f(x, y_0)+f(x, y_0)|\leqq$
$\leqq|f[x, y_{n-1}(x)]-f(x, y_0)|+|f(x, y_0)|<k|y_{n-1}(x)-y_0|+q<kb+q$

и следователно

$$|y_n(x)-y_0|<kb+(1-k)b=b.$$

От друга страна, функцията $y_1(x)$ е дефинирана в интересуващия ни интервал [тя е дефинирана дори в интервала (x_0-a, x_0+a)] и удовлетворява неравенството

$$|y_1(x)-y_0|=|f(x, y_0)|<q<(1-k)b<b.$$

С това ние си осигурихме всички функции

$$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\dots$$

да са дефинирани в интервала $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$.

Тези функции са и непрекъснати. И наистина това е очевидно за функцията $y_1(x)$, защото функцията $f(x, y)$ е непрекъсната. От непрекъснатостта на $y_1(x)$ и от непрекъснатостта на $f(x, y)$ заключаваме за непрекъснатостта на $y_2(x)$ и т. н.

Ние ще докажем, че редицата

$$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\dots$$

е равномерно сходяща в интервала $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$. За тази цел разглеждаме реда

(4) $$y_1(x)+[y_2(x)-y_1(x)]+[y_3(x)-y_2(x)]+\cdots$$

Очевидно имаме

(5) $|y_{n+1}(x)-y_n(x)|=|f[x, y_n(x)]-f[x, y_{n-1}(x)]|\leqq k|y_n(x)-y_{n-1}(x)|,$

защото функцията $f(x, y)$ удовлетворява условието на Липшиц. От неравенството (5) получаваме

$$\begin{aligned}
&|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\leqq k|y_n(x)-y_{n-1}(x)|,\\
&|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqq k|y_{n-1}(x)-y_{n-2}(x)|,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&|y_3(x)-y_2(x)|\leqq k|y_2(x)-y_1(x)|,\\
&|y_2(x)-y_1(x)|\leqq k|y_1(x)-y_0|<kb
\end{aligned}$$

* Прилагаме неравенството на Липшиц.

и следователно

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|<k^n b.$$

Това неравенство ни учи, че общият член на реда (4) не надминава по абсолютна стойност съответния член на сходящата геометрична прогресия Σbk^n (тази прогресия е сходяща, защото $0<k<1$). Като вземем пред вид, че членовете на прогресията не зависят от x, заключаваме, че редът е равномерно сходящ, а следователно равномерно сходяща е и редицата от частичните му суми

(6) $$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\dots$$

Да означим с $\varphi(x)$ границата на тази редица. Функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната в интервала $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$, защото редицата (6) е равномерно сходяща и членовете на тази редица са непрекъснати функции. Освен това графиката на функцията $\varphi(x)$ лежи в дефиниционната област на $f(x, y)$. За да се убедим в това, достатъчно е да покажем, че*

$$|\varphi(x)-y_0|<b.$$

Доказателството може да се извърши така. Ние видяхме по-горе (виж неравенството (3)), че

$$|y_n(x)-y_0|<kb+q.$$

Като извършим граничния преход $n\to\infty$, получаваме

$$|\varphi(x)-y_0|\leqq kb+q,$$

откъдето

$$|\varphi(x)-y_0|<kb+(1-k)b=b.$$

Сега ще установим, че функцията $\varphi(x)$ удовлетворява уравнението (1). За тази цел извършваме граничния преход $n\to\infty$ в равенството

$$y_n(x)=y_0+f[x, y_{n-1}(x)],$$

като се възползуваме от непрекъснатостта на функцията $f(x, y)$. Това ни дава

$$\varphi(x)=y_0+f[x, \varphi(x)],$$

което искахме да установим.

* От неравенството $|y_n(x)-y_0|<b$ се получава непосредствено $|\varphi(x)-y_0|\leqq b$. Това обаче не е достатъчно за нас, защото ние искаме да си осигурим, че точката $[x, \varphi(x)]$ лежи в о т в о р е н и я правоъгълник R. Поради това ние искаме да сме сигурни, че при никоя стойност на x от разглеждания интервал нямаме $|\varphi(x)-y_0|=b$. Тъкмо с оглед на тази цел ние избираме

$$q<(1-k)b, \text{ а не } q=(1-k)b.$$

Най-сетне не е трудно да се види, че $\varphi(x_0)=y_0$. И наистина, като се възползуваме от условието $f(x_0, y_0)=0$, получаваме последователно

$$y_1(x_0)=y_0+f(x_0, y_0)=y_0,$$
$$y_2(x_0)=y_0+f[x_0, y_1(x_0)]=y_0+f(x_0, y_0)=y_0,$$
$$y_3(x_0)=y_0+f[x_0, y_2(x_0)]=y_0+f(x_0, y_0)=y_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n(x_0)=y_0+f[x_0, y_{n-1}(x_0)]=y_0+f(x_0, y_0)=y_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Оттук заключаваме, че $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x_0)=y_0$ или (което е същото) $\varphi(x_0)=y_0$.

Остава да покажем, че няма друга **непрекъсната** функция в интервала $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$, която при всички стойности на x от този интервал да удовлетворява уравнението (1) и при $x=x_0$ да приема стойност y_0.

Доказателството ще извършим от противното. Да допуснем, че съществува функция $\psi(x)$, **непрекъсната** в интервала $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$, удовлетворяваща условията

$$\psi(x)=y_0+f[x, \psi(x)] \text{ при } |x-x_0|<\alpha,$$
$$\psi(x_0)=y_0$$

и различна от $\varphi(x)$. Последното условие означава, че има поне една точка x_1, за която

$$\psi(x_1)\neq\varphi(x_1).$$

Ще разгледаме подробно случая, когато $x_1>x_0$; случаят $x_1<x_0$ се разглежда по същия начин (разбира се, не можем да имаме $x_1=x_0$, защото $\varphi(x_0)=\psi(x_0)=y_0$).

Нека ξ е точната долна граница на точките x от интервала $(x_0, x_0+\alpha)$, за които $\psi(x)\neq\varphi(x)$. Това значи, че при всеки избор на положителното число δ има поне една точка x в интервала $[\xi, \xi+\delta)$ и, разбира се, в интервала $(x_0, x_0+\alpha)$, за която $\psi(x)\neq\varphi(x)$, обаче няма нито една точка x, за която са изпълнени едновременно неравенствата $x_0\leqq x<\xi$ и $\psi(x)\neq\varphi(x)$. Очевидно $\xi\geqq x_0$. Ще докажем, че

$$\psi(\xi)=\varphi(\xi).$$

И наистина, ако $\xi=x_0$, това е очевидно, защото $\varphi(x_0)=y_0$ и $\psi(x_0)=y_0$. Ако пък $\xi>x_0$, то за всички стойности на x, за които $x_0\leqq x<\xi$, ще имаме $\psi(x)=\varphi(x)$. Като вземем пред вид, че функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ са непрекъснати в точката ξ, получаваме

$$\psi(\xi)=\varphi(\xi).$$

Ние знаем, че точката $[\xi, \varphi(\xi)]$, а следователно и точката $[\xi, \psi(\xi)]$ лежи във **вътрешността*** на правоъгълника R. Като се възползуваме от това обстоятелство и от непрекъснатостта на функцията $\psi(x)$, заключаваме, че може да се намери точка ξ_1 във вътрешността на интервала $(\xi, x_0+\alpha)$ по такъв начин, че графиката на $\psi(x)$ да не напуска* R, когато x се мени между ξ и ξ_1. В такъв случай имаме при $\xi<x<\xi_1$

$$\varphi(x)=y_0+f[x, \varphi(x)],$$
$$\psi(x)=y_0+f[x, \psi(x)]$$

и следователно

$$|\varphi(x)-\psi(x)|=|f[x, \varphi(x)]-f[x, \psi(x)]|\leqq k|\varphi(x)-\psi(x)|.$$

Нека c е точка от интервала (ξ, ξ_1), за която $\varphi(c)\neq\psi(c)$ (такава, както знаем, има). В такъв случай имаме

$$|\varphi(c)-\psi(c)|\leqq k|\varphi(c)-\psi(c)|,$$

откъдето, като съкратим на $|\varphi(c)-\psi(c)|$, получаваме

$$1\leqq k,$$

което противоречи на неравенството $k<1$. Противоречието, до което достигнахме, се дължи на предположението, че функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ са различни. И така не може да има в интервала $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ повече от една непрекъсната функция, която удовлетворява уравнението (1) и при $x=x_0$ приема стойност y_0. С това е решен въпросът за единственост.

Изследванията, които направихме, ни дават възможност да докажем следната теорема.

Нека функцията $F(x, y)$ е дефинирана и непрекъсната в някоя околност на точката (x_0, y_0) и притежава частна производна спрямо y в тази околност, която е непрекъсната в точката (x_0, y_0); нека освен това

$$F(x_0, y_0)=0$$

и

$$F_y(x_0, y_0)\neq 0;$$

при тези предположения във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има една и само една непрекъсната функция $y=\varphi(x)$, която удовлетворява уравнението

$$F[x, \varphi(x)]=0$$

и приема стойност y_0 при $x=x_0$.

* Тук съществено използуваме обстоятелството, че правоъгълникът R е отворен.

* Графиката на $\varphi(x)$, разбира се, не напуска дефиниционната област на $f(x, y)$, но може да напуска R.

Доказателството може да се извърши така. Разглеждаме помощната функция

$$f(x, y)=y-y_0+\lambda F(x, y),$$

където избираме константата λ по такъв начин, че да имаме

$$f_y'(x_0, y_0)=0$$

или, което е същото,

$$1+\lambda F_y'(x_0, y_0)=0;$$

това е възможно да се направи, защото $F_y'(x_0, y_0)\neq 0$. Означаваме с k една произволна положителна константа, по-малка от единица. Като вземем пред вид, че $f_y'(x, y)$ е непрекъсната функция на x и y и че $f_y'(x_0, y_0)=0$, заключаваме, че може да се намери достатъчно малка околност R на точката (x_0, y_0), в която

$$|f_y'(x, y)|\leq k$$

и следователно при всеки избор на двете точки (x, η_1) и (x, η_2) от R е изпълнено неравенството на Липшиц

$$|f(x, \eta_1)-f(x, \eta_2)|=|(\eta_1-\eta_2)f_y'(x, \eta)|\leq k|\eta_1-\eta_2|$$

(тук η означава едно число, което е избрано по подходящ начин между η_1 и η_2). От друга страна, функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в околността R (защото функцията $F(x, y)$ е непрекъсната) и приема стойност нула в точката (x_0, y_0) (защото $F(x_0, y_0)=0$. Това ни дава право, както знаем, да твърдим, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има една и само една непрекъсната функция $y=\varphi(x)$, която приема стойност y_0 в точката x_0 и удовлетворява уравнението

$$y=y_0+f(x, y)$$

или, което е същото,

$$y=y_0+[y-y_0+\lambda F(x, y)],$$

или още

$$F(x, y)=0.$$

§ 6. Обобщение на теоремата за съществуване на неявни функции

Теоремата, която доказахме в началото на предния параграф, може да се обобщи по следния начин: нека функциите

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p),$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)$$

на променливите, $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p$ са дефинирани и непрекъснати в някоя околност R на точката $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p)$; нека

$$f_1(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p)=0,$$
$$f_2(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f_p(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p)=0$$

и най-сетне нека

$$|f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)-f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \ldots, \eta_p)|\leq$$
$$\leq k[|y_1-\eta_1|+|y_2-\eta_2|+\cdots+|y_p-\eta_p|],$$
$$|f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)-f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \ldots, \eta_p)|\leq$$
$$\leq k[|y_1-\eta_1|+|y_2-\eta_2|+\cdots+|y_p-\eta_p|],$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$|f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)-f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \ldots, \eta_p)|\leq$$
$$\leq k[|y_1-\eta_1|+|y_2-\eta_2|+\cdots+|y_p-\eta_p|],$$

където константата k удовлетворява неравенствата $0<k<\frac{1}{p}$, а точките $(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_p)$ и $(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ могат произволно да се менят в R (условие на Липшиц). В такъв случай във всяка достатъчно малка околност на точката $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ съществува една и само една система от непрекъснати функции

$$y_1=\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$y_2=\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_p=\varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

които удовлетворяват системата

$$y_1=b_1+f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p),$$
$$y_2=b_2+f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_p=b_p+f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p),$$

като при това са изпълнени още и допълнителните условия

$$\varphi_1(a_1, a_2, \ldots, a_n)=b_1,$$
$$\varphi_2(a_1, a_2, \ldots, a_n)=b_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_p(a_1, a_2, \ldots, a_n)=b_p.$$

Ние няма да излагаме доказателството, защото то се извършва без затруднения по същия начин, както това стана в предния параграф.

След всичко казано ние можем да докажем следната важна теорема:

Нека функциите

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p),$$
$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p),$$
$$\dots\dots\dots$$
$$F_p(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p)$$

са дефинирани и непрекъснати в някоя околност на точката

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p)$$

и допускат непрекъснати частни производни от първи ред спрямо $y_1, y_2, \dots, y_p$ в тази околност; освен това

$$F_1(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p)=0$$
$$F_2(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p)=0,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$F_p(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p)=0$$

и

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_p} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_p} \\ \dots & & \\ \frac{\partial F_p}{\partial y_1} & \frac{\partial F_p}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial F_p}{\partial y_p} \end{vmatrix} \neq 0$$

в точката $(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p)$. При тези предположения във всяка достатъчно малка околност на точката $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ съществува една и само една система от непрекъснати функции

$$y_1=\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$y_2=\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$\dots\dots$$
$$y_p=\varphi_p(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

която удовлетворява системата

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p)=0,$$
$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p)=0,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$F_p(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p)=0$$

и за която

$$\varphi_1(a_1, a_2, \dots, a_n)=b_1,$$
$$\varphi_2(a_1, a_2, \dots, a_n)=b_2,$$
$$\dots\dots$$
$$\varphi_p(a_1, a_2, \dots, a_n)=b_p.$$

За да докажем това, разглеждаме помощните функции

$$f_\nu=y_\nu-b_\nu+\lambda_{\nu1} F_1+\lambda_{\nu2} F_2+\dots+\lambda_{\nu p} F_p, \quad \nu=1, 2, \dots, p,$$

където избираме константите $\lambda_{\nu1}, \lambda_{\nu2}, \dots, \lambda_{\nu p}$ по такъв начин, че да имаме

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial y_1}=\frac{\partial f_\nu}{\partial y_2}=\dots=\frac{\partial f_\nu}{\partial y_p}=0$$

в точката $(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p)$ или, което е същото,

$$\lambda_{\nu1}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}+\lambda_{\nu2}\frac{\partial F_2}{\partial y_1}+\dots+\lambda_{\nu p}\frac{\partial F_p}{\partial y_1}=0,$$
$$\lambda_{\nu1}\frac{\partial F_1}{\partial y_2}+\lambda_{\nu2}\frac{\partial F_2}{\partial y_2}+\dots+\lambda_{\nu p}\frac{\partial F_p}{\partial y_2}=0,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$(1)\qquad \lambda_{\nu1}\frac{\partial F_1}{\partial y_\nu}+\lambda_{\nu2}\frac{\partial F_2}{\partial y_\nu}+\dots+\lambda_{\nu p}\frac{\partial F_p}{\partial y_\nu}=-1,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\lambda_{\nu1}\frac{\partial F_1}{\partial y_p}+\lambda_{\nu2}\frac{\partial F_2}{\partial y_p}+\dots+\lambda_{\nu p}\frac{\partial F_p}{\partial y_p}=0$$

при

$$x_1=a_1, x_2=a_2, \dots, x_n=a_n; y_1=b_1, \dots, y_p=b_p.$$

Ние можем да направим това, защото в разглежданата точка

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_p}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_p}{\partial y_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_1}{\partial y_p} & \frac{\partial F_2}{\partial y_p} & \frac{\partial F_p}{\partial y_p} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Означаваме с k една произволна положителна константа, по-малка от $\frac{1}{p}$. Като вземем пред вид, че производните $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_1}, \frac{\partial f_\nu}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f_\nu}{\partial y_p}$ са непрекъснати и се анулират в точката $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p)$, заключаваме, че може да се намери достатъчно малка околност R_ν на тази точка, в която

$$\left|\frac{\partial f_\nu}{\partial y_1}\right| \leq k, \left|\frac{\partial f_\nu}{\partial y_2}\right| \leq k, \ldots, \left|\frac{\partial f_\nu}{\partial y_p}\right| \leq k.$$

При всеки избор на двете точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)$ и $(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \ldots, \eta_p)$ от R_ν имаме според формулата на Тейлор

$$f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) - f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \ldots, \eta_p) =$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial y_1}(y_1 - \eta_1) + \frac{\partial}{\partial y_2}(y_2 - \eta_2) + \cdots + \frac{\partial}{\partial y_p}(y_p - \eta_p)\right] f_\nu(x_1, \ldots, x_n, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_p).$$

Тук

$$\bar{\eta}_1 = y_1 + \theta(\eta_1 - y_1),\ \bar{\eta}_2 = y_2 + \theta(\eta_2 - y_2), \ldots, \bar{\eta}_p = y_p + \theta(\eta_p - y_p),$$

където числото θ е избрано по подходящ начин между 0 и 1. Оттук заключаваме, че функциите f_ν удовлетворяват условието на Липшиц

$$|f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) - f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \ldots, \eta_p)| \leq$$
$$\leq k[|y_1 - \eta_1| + \ldots + |y_p - \eta_p|].$$

Ние можем да твърдим още, че функциите f_ν са непрекъснати, защото са непрекъснати функциите $F_1, F_2, \ldots, F_p$. Най-сетне не е трудно да се установи, че функциите f_ν се анулират в точката

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p),$$

защото функциите $F_1, F_2, \ldots, F_p$ се анулират в тази точка. Нека R е една околност на точката $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p)$, която се съдържа във всичките околности $R_1, \ldots, R_2, \ldots, R_p$. В такъв случай по отношение на тази околност са изпълнени всичките условия, при които е валидна формулираната от нас в началото на този параграф теорема. Това ни дава право да твърдим, че във всяка достатъчно малка околност на точката $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ има една и само една система от непрекъснати функции

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_p &= \varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{2}$$

за които са изпълнени условията

$$\begin{aligned} \varphi_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= b_1, \\ \varphi_2(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_p(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= b_p \end{aligned} \tag{3}$$

и които удовлетворяват системата

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 + f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p), \\ y_2 &= b_2 + f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_p &= b_p + f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) \end{aligned} \tag{4}$$

или, което е същото,

$$\begin{aligned} \lambda_{11} F_1 + \lambda_{12} F_2 + \cdots + \lambda_{1p} F_p &= 0, \\ \lambda_{21} F_1 + \lambda_{22} F_2 + \cdots + \lambda_{2p} F_p &= 0, \\ &\ldots\ldots \\ \lambda_{p1} F_1 + \lambda_{p2} F_2 + \cdots + \lambda_{pp} F_p &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Ще докажем, че детерминантата

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \ldots \lambda_{1p} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \ldots \lambda_{2p} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_{p1} & \lambda_{p2} \ldots \lambda_{pp} \end{vmatrix}$$

е различна от нула. За тази цел умножаваме детерминантите Δ и Δ_1 по редове и вземаме пред вид системата (1). Това ни дава

$$\Delta\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & -1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & -1 \ldots 0 \\ & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots -1 \end{vmatrix} = (-1)^p \neq 0,$$

т. е. наистина $\Delta_1 \neq 0$, и следователно хомогенната система (5) е удовлетворена само ако

$$F_1 = F_2 = \cdots = F_p = 0. \tag{6}$$

И така функциите (2), които удовлетворяват системата (4), удовлетворяват и системата (6). Обратното е по-просто — ако е удовлетворена системата (6), то очевидно е удовлетворена и системата (5), а следователно и системата (4). Това ни дава основание да твърдим, че в достатъчно малка околност на точката $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ не може да има повече от една система от непрекъснати неявни функции, които удовлетворяват системата (6) и за които е изпълнено условието (3).

§ 7. Достатъчни условия за съществуване на производни на неявни функции

Нека функциите

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2,\dots, x_n;\, y_1,\dots, y_p),\\
&f_2(x_1, x_2,\dots, x_n;\, y_1,\dots, y_p),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&f_p(x_1, x_2,\dots, x_n;\, y_1,\dots, y_p)
\end{aligned}
$$

са дефинирани, притежават непрекъснати частни производни от първи ред (спрямо всичките аргументи) в някоя околност на точката

$$(a_1, a_2,\dots, a_n;\, b_1,\dots, b_p),$$

анулират се в тази точка и освен това функционалната детерминанта

$$\Delta(x_1, x_2,\dots, x_n;\, y_1,\dots, y_p)=\frac{D(f_1, f_2,\dots, f_p)}{D(y_1, y_2,\dots, y_p)}$$

е различна от нула при $x_1=a_1$, $x_2=a_2,\dots, x_n=a_n$; $y_1=b_1,\dots, y_p=b_p$. Нека функциите

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1, x_2,\dots, x_n),\\
&\varphi_2(x_1, x_2,\dots, x_n),\\
&\dots\dots\dots\\
&\varphi_p(x_1, x_2,\dots, x_n)
\end{aligned}
$$

са дефинирани в някоя околност R на точката $(a_1, a_2,\dots, a_n)$ и са непрекъснати поне в тази точка. Нека най-сетне функциите $\varphi_1, \varphi_2,\dots,\varphi_p$ удовлетворяват равенствата

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2,\dots, x_n, \varphi_1,\dots, \varphi_p)=0,\\
&f_2(x_1, x_2,\dots, x_n, \varphi_1,\dots, \varphi_p)=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&f_p(x_1, x_2,\dots, x_n, \varphi_1,\dots, \varphi_p)=0,\\
&\quad\varphi_1(a_1, a_2,\dots, a_n)=b_1,\\
&\quad\varphi_2(a_1, a_2,\dots, a_n)=b_2,\\
&\quad\dots\dots\dots\\
&\quad\varphi_p(a_1, a_2,\dots, a_n)=b_p.
\end{aligned}
$$

При тези предположения ще докажем, че функциите $\varphi_1, \varphi_2,\dots,\varphi_p$ са диференцуеми частно спрямо всеки един от своите аргументи в точката $(a_1, a_2,\dots, a_n)$. За тази цел полагаме

$$
\begin{aligned}
k_1=\varphi_1(a_1,\dots, a_{r-1}, a_r+h, a_{r+1},\dots, a_n)&-\\
-\varphi_1(a_1,\dots, a_{r-1}, a_{r+1},\dots, a_n)&,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_2=\varphi_2(a_1,\dots, a_{r-1}, a_r+h, a_{r+1},\dots, a_n)&-\\
-\varphi_2(a_1,\dots, a_{r-1}, a_r, a_{r+1},\dots, a_n)&,\\
\dots\dots\dots&\\
k_p=\varphi_p(a_1,\dots, a_{r-1}, a_r+h, a_{r+1},\dots, a_n)&-\\
-\varphi_p(a_1,\dots, a_{r-1}, a_r, a_{r+1},\dots, a_n)&,
\end{aligned}
$$

където h е достатъчно малко, различно от нула число.

Оттук получаваме

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(a_1,\dots, a_{r-1}, a_r+h, a_{r+1},\dots, a_n)=b_1+k_1,\\
&\varphi_2(a_1,\dots, a_{r-1}, a_r+h, a_{r+1},\dots, a_n)=b_2+k_2,\\
&\dots\dots\dots\\
&\varphi_p(a_1,\dots, a_{r-1}, a_r+h, a_{r+1},\dots, a_n)=b_p+k_p.
\end{aligned}
$$

Като се възползуваме от непрекъснатостта на $\varphi_1, \varphi_2,\dots, \varphi_n$ в точката $(a_1, a_2,\dots, a_n)$, заключаваме, че $k_1, k_2,\dots, k_p$ клонят към нула, когато h клони към нула.

Разглеждаме равенствата

$$
\begin{aligned}
&f_1(a_1, a_2,\dots, a_r+h,\dots, a_n;\, b_1+k_1,\dots, b_p+k_p)=0,\\
&f_2(a_1, a_2,\dots, a_r+h,\dots, a_n;\, b_1+k_1,\dots, b_p+k_p)=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f_p(a_1, a_2,\dots, a_r+h,\dots, a_n;\, b_1+k_1,\dots, b_p+k_p)=0
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&f_1(a_1, a_2,\dots, a_r,\dots, a_n;\, b_1,\dots, b_p)=0,\\
&f_2(a_1, a_2,\dots, a_r,\dots, a_n;\, b_1,\dots, b_p)=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&f_p(a_1, a_2,\dots, a_r,\dots, a_n;\, b_1,\dots, b_p)=0.
\end{aligned}
$$

Чрез почленно изваждане на съответните равенства добиваме

$$
\begin{aligned}
f_1(a_1, a_2,\dots, a_r+h,\dots, a_n;\, b_1+k_1,\dots, b_p+k_p)&-\\
-f_1(a_1, a_2,\dots, a_r,\dots, a_n;\, b_1,\dots, b_p)&=0,\\
f_2(a_1, a_2,\dots, a_r+h,\dots, a_n;\, b_1+k_1,\dots, b_p+k_p)&-\\
-f_2(a_1, a_2,\dots, a_r,\dots, a_n;\, b_1,\dots, b_p)&=0.\\
\dots\dots\dots\dots\dots&\\
f_p(a_1, a_2,\dots, a_r+h,\dots, a_n;\, b_1+k_1,\dots, b_p+k_p)&-\\
-f_p(a_1, a_2,\dots, a_r,\dots, a_n;\, b_1,\dots, b_p)&=0.
\end{aligned}
$$

Преобразуваме тази система с помощта на теоремата за крайните нараствания за функции на няколко променливи. Резултатът може да се напише символично така:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_r}h+\frac{\partial}{\partial y_1}k_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial y_p}k_p\right)f_1(a_1, a_2,\ldots, a_r+\theta_1 h,\ldots, a_n;$$
$$b_1+\theta_1 k_1,\ldots, b_p+\theta_1 k_p)=0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_r}h+\frac{\partial}{\partial y_1}k_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial y_p}k_p\right)f_2(a_1, a_2,\ldots, a_r+\theta_2 h,\ldots, a_n;$$
$$b_1+\theta_2 k_1,\ldots, b_p+\theta_2 k_p)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_r}h+\frac{\partial}{\partial y_1}k_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial y_p}k_p\right)f_p(a_1, a_2,\ldots, a_r+\theta_p h,\ldots, a_n;$$
$$b_1+\theta_p k_1,\ldots, b_p+\theta_p k_p)=0,$$
$$0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1,\ldots, 0<\theta_p<1.$$

Това е една линейна система относно $k_1,\ldots, k_p$. Като решим тази система, добиваме възможност да представим отношението

$$\frac{k_q}{h}\ (q=1, 2,\ldots, p)$$

като частно на две детерминанти. Тези детерминанти* притежават граница, когато h клони към нула, защото производните на функциите $f_1, f_2,\ldots, f_p$ са непрекъснати. Освен това детерминантата в знаменателя клони към

$$\Delta(a_1, a_2,\ldots, a_n; b_1,\ldots, b_p),$$

когато h клони към нула, т. е. към число, различно от нула. Оттук заключаваме, че частното

$$\frac{k_q}{h}=\frac{\varphi_q(a_1, a_2,\ldots, a_r+h,\ldots, a_n)-\varphi_q(a_1, a_2,\ldots, a_r,\ldots, a_n)}{h}$$

също има граница, когато h клони към нула. С това е установено съществуването на производните

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\varphi_q(a_1, a_2,\ldots, a_r,\ldots, a_n)$$

при

$$q=1, 2,\ldots, p,\ r=1, 2,\ldots, n.$$

§ 8. Множители на Лагранж

Нека функциите

$$F(x, u, v),\ G_1(x, u, v) \text{ и } G_2(x, u, v)$$

са дефинирани и притежават непрекъснати частни производни от първи ред в някоя околност D на точката (x_0, u_0, v_0), като при това

$$G_1(x_0, u_0, v_0)=0,\quad G_2(x_0, u_0, v_0)=0$$

* Нека читателят напише тези детерминанти.

и

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial u}G_1(x_0, u_0, v_0) & \frac{\partial}{\partial v}G_1(x_0, u_0, v_0)\\ \frac{\partial}{\partial u}G_2(x_0, u_0, v_0) & \frac{\partial}{\partial v}G_2(x_0, u_0, v_0)\end{vmatrix}\neq 0;$$

нека за всички точки (x, u, v) от D, за които

$$G_1(x, u, v)=0$$
$$G_2(x, u, v)=0$$

да имаме

$$F(x, u, v)\leqq F(x_0, u_0, v_0)$$

или за всички такива точки да имаме

$$F(x, u, v)\geqq F(x_0, u_0, v_0).$$

Да образуваме функцията

$$\Phi=F-\lambda_1 G_1-\lambda_2 G_2.$$

Ще покажем, че двете константи λ_1 и λ_2 могат да се определят по такъв начин, че да имаме*

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x_0, u_0, v_0)=0,\quad \frac{\partial}{\partial u}\Phi(x_0, u_0, v_0)=0,\quad \frac{\partial}{\partial v}\Phi(x_0, u_0, v_0)=0.$$

Доказателство. Нека Δ е толкова малка околност на точката x_0, че да съществуват в нея две диференцуеми функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, за които точката $[x, \varphi(x), \psi(x)]$ да принадлежи на D и освен това да имаме

$$G_1(x, \varphi, \psi)=0$$
$$G_2(x, \varphi, \psi)=0$$

и

$$\varphi(x_0)=u_0,\ \psi(x_0)=v_0.$$

В такъв случай функцията

$$f(x)=F(x, \varphi, \psi)$$

има локален екстремум в точката x_0 и следователно $f'(x_0)=0$, т. е

(1) $$F'_x(x_0, u_0, v_0)+F'_u(x_0, u_0, v_0)\varphi'(x_0)+F'_v(x_0, u_0, v_0)\psi'(x_0)=0.$$

Определяме λ_1 и λ_2 така, че да бъдат удовлетворени уравненията

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial v}=0.$$

* Тези константи се наричат множители на Лагранж и играят роля в някои въпроси на вариационното смятане, аналитичната механика и пр.

За да се убедим, че това е възможно, написваме тези уравнения по-подробно така:

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial u}-\lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}-\lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial v}-\lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial v}=0.$$

Получената система има решение, защото е линейна относно λ_1 и λ_2 и детерминантата от коефициентите пред неизвестните е различна от нула. Ще покажем, че така намерените числа λ_1 и λ_2 удовлетворяват и уравнението

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=0.$$

За тази цел диференцираме уравненията

$$G_1(x, \varphi, \psi)=0,$$
$$G_2(x, \varphi, \psi)=0,$$

което ни дава

$$\frac{\partial G_1}{\partial x}+\frac{\partial G_1}{\partial u}\varphi'+\frac{\partial G_1}{\partial v}\psi'=0,$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial x}+\frac{\partial G_2}{\partial u}\varphi'+\frac{\partial G_2}{\partial v}\psi'=0.$$

Оттук и от (1) при $x=x_0$ получаваме

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial x}-\lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial x}\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial u}-\lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial u}\right)\varphi'+$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial v}-\lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial v}\right)\psi'=0.$$

Като вземем пред вид начина, по който сме определили λ_1 и λ_2, намираме

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial x}-\lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial x}=0$$

или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=0,$$

с което доказателството е завършено.

Не е трудно да се убедим, че полученият резултат може да се обобщи по следния начин. Нека функциите

$$F(x_1, x_2,\dots, x_p;\ y_1, y_2,\dots, y_n),$$
$$G_1(x_1, x_2,\dots, x_p;\ y_1, y_2,\dots, y_n),$$
$$G_2(x_1, x_2,\dots, x_p;\ y_1, y_2,\dots, y_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$G_n(x_1, x_2,\dots, x_p;\ y_1, y_2,\dots, y_n)$$

са дефинирани и притежават непрекъснати частни производни в някоя околност D на точката, $(a_1, a_2,\dots, a_p;\ b_1, b_2,\dots, b_n)$, като при това в точката $(a_1, a_2,\dots, a_p;\ b_1, b_2,\dots, b_n)$ имаме

$$G_k(a_1, a_2,\dots, a_p;\ b_1, b_2,\dots, b_n)=0,\quad k=1, 2,\dots, n,$$

и

$$\frac{D(G_1, G_2,\dots, G_n)}{D(y_1, y_2,\dots, y_n)}\neq 0.$$

Нека за всяка точка $(x_1, x_2,\dots, x_p;\ y_1, y_2,\dots, y_n)$ от D, за която

$$G_k(x_1, x_2,\dots, x_p;\ y_1, y_2,\dots, y_n)=0$$
$$(k=1, 2,\dots, n)$$

да имаме

$$F(x_1, x_2,\dots, x_p;\ y_1, y_2,\dots, y_n)\leq F(a_1, a_2,\dots, a_p;\ b_1, b_2,\dots, b_n)$$

или за всяка такава точка да имаме

$$F(x_1, x_2,\dots, x_p;\ y_1, y_2,\dots, y_n)\geq F(a_1, a_2,\dots, a_p;\ b_1, b_2,\dots, b_n).$$

Разглеждаме функцията

$$\Phi=F-\lambda_1 G_1-\lambda_2 G_2-\dots-\lambda_n G_n.$$

В такъв случай n-те константи $\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_n$ могат да се определят по такъв начин, че да бъдат изпълнени следните $n+p$ уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Phi(a_1, a_2,\dots, a_p;\ b_1, b_2,\dots, b_n)=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial}{\partial x_p}\Phi(a_1, a_2,\dots, a_p;\ b_1, b_2,\dots, b_n)=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y_1}\Phi(a_1, a_2,\dots, a_p;\ b_1, b_2,\dots, b_n)=0;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial}{\partial y_n}\Phi(a_1, a_2,\dots, a_p;\ b_1, b_2,\dots, b_n)=0.$$

Доказателството в общия случай се извършва по същия начин както в специалния случай, който ние разглеждахме, и поради това го предоставяме на читателя.

ГЛАВА III

СМЯНА НА ПРОМЕНЛИВИТЕ*

§ 1. Смяна на независимата променлива при функции на един аргумент

Нека във функцията $y=y(x)$ направим субституцията $x=\varphi(t)$. В такъв случай y се обръща във функция на t. Да означим тази функция с $u(t)$, така че

$$u(t)=y[\varphi(t)].$$

Ще покажем, че производните на y спрямо x (поне когато е възможно да се извършат пресмятанията, за които става дума) могат да се изразят чрез производните u и x спрямо t. Смисълът на тези думи се нуждае от прецизиране, но ние няма да се спираме тук на този въпрос, защото това не е единственото място, което се нуждае от прецизиране.

Нека $\psi(x)$ е една обратна функция на функцията $\varphi(t)$. В такъв случай

$$u[\psi(x)]=y[\varphi(\psi(x))]=y(x),$$

защото $\varphi(\psi(x))=x$. Това ни дава право да предоставим $y(x)$ във вид на сложната функция $u(t)$, където $t=\psi(x)$. Да разгледаме равенствата

(1) $$x=\varphi(t),$$

(2) $$y=u(t),$$

където $t=\psi(x)$. Като диференцираме равенството (2) спрямо x, получаваме съгласно правилото за диференциране на функция от функция

$$y'_x=u'_t\, t'_x.$$

Диференцирайки равенството $x=\varphi(t)$ спрямо x, получаваме

$$1=x'_t\, t'_x,$$

* В първите четири параграфа на тази глава ще се ограничим само с техническата страна на въпроса, без да прецизираме условията, при които могат да се извършат интересуващите ни пресмятания. За извършване на такова прецизиране няма принципиални трудности в смисъл, че могат да се посочат достатъчни условия от локален характер, при които тези пресмятания са законни. Ще направим това в последния параграф на тази глава.

откъдето

$$t'_x=\frac{1}{x'_t},$$

т. е.

(3) $$y'_x=\frac{u'_t}{x'_t}.$$

По този начин успяхме да изразим y'_x чрез производните (на u и x) спрямо t. За да изразим y''_x чрез производните спрямо t, диференцираме още веднъж равенството (3) спрямо x, като помним, че t е функция на x. Това ни дава

$$y''_x=\left(\frac{u'_t}{x'_t}\right)'_x=\left(\frac{u'_t}{x'_t}\right)'_t t'_x=\frac{u''_t\, x'_t-u'_t\, x''_t}{x'^2_t}\, t'_x=$$
$$=\frac{u''_t\, x'_t-u'_t x''_t}{x'^2_t}\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{u''_t\, x'_t-u'_t\, x''_t}{x'^3_t}.$$

Аналогично намираме

$$y'''_x=\frac{(u'''_t\, x'_t+u''_t\, x''_t-u''_t\, x''_t-u'_t\, x'''_t)\, x'^3_t-(u''_t\, x'_t-u'_t\, x''_t)\, 3x'^2_t x''_t}{x'^6_t}\, t'_x=$$
$$=\frac{(u'''_t\, x'_t-u'_t\, x'''_t)\, x'_t-3\,(u''_t\, x'_t-u'_t\, x''_t)\, x''_t}{x'^5_t}$$

и пр.

Тук ще дадем два примера, за да илюстрираме техниката на тези пресмятания.

Пример 1. Да се намерят всичките функции y на независимата променлива x (ако има такава), които са два пъти диференцуеми в затворения интервал $[-1, 1]$ и удовлетворяват уравнението

(4) $$(1-x^2)\,y''-xy'+y=0.$$

Решение. Да допуснем, че има два пъти диференцуема функция y, която удовлетворява уравнението (4) в разглеждания интервал $[-1, 1]$ (допускане, за което не знаем дали е вярно или не). Ще направим субституцията $x=\cos t$, като оставим t да се мени в затворения интервал $[0, \pi]$ и да положим $u(t)=y(\cos t)$. Тази субституция може да се направи, защото стойностите на функцията $x=\cos t$ не напускат дефиниционната област на $y(x)$. Функцията $x=\cos t$ е обратима в интервала $[0, \pi)$, защото производната ѝ не се анулира в никоя вътрешна точка на този интервал. Разглеждаме равенството

(5) $$y(x)=u(t),$$

където $t=\arccos x$ и x е независима променлива.

Независимата променлива x може да се мени произволно в интервала $[-1, 1]$, защото както функцията $y(x)$, така и функцията $\arccos x$ е дефинирана в този интервал и стойностите на функцията $\arccos x$ не напускат дефиниционната област на функцията $u(t)$.

Ние ще диференцираме равенството (5) спрямо x. Тук обаче се явява едно затруднение: функцията $\arccos x$ не е диференцуема при $x=\pm 1$. Поради това ще разгледаме най-напред равенството (5) в отворения интервал $(-1, 1)$. Сега вече можем да диференцираме двете части на това равенство спрямо x, защото:

1) функцията $y(x)$ е диференцуема (дори два пъти, и то в затворения интервал $[-1, 1]$), а следователно и сложната функция $u(t)=y(\cos t)$ е диференцуема в интервала $(0, \pi)$ и

2) функцията $\arccos x$ е диференцуема в отворения интервал $(-1, 1)$.

Като диференцираме равенството (5) спрямо x, намираме

(6)
$$y'_x=u'_t\, t'_x$$

или

$$y'_x=\frac{-u_t}{\sin t},$$

понеже

$$t'_x=\frac{-1}{\sin t}.$$

Оттук намираме

(7)
$$y''_x=\frac{-u''_t \sin t+u'_t \cos t}{\sin^2 t}\, t'_x=\frac{u''_x \sin t-u'_t \cos t}{\sin^3 t}.$$

Като заместим в равенството (4), получаваме

(8)
$$u''_t+u=0.$$

По този начин смяната на променливите, която извършихме, опрости нашето уравнение.

В така полученото уравнение u е една два пъти диференцуема функция на независимата променлива t в отворения интервал $(0, \pi)$. За нас ще бъде важно да знаем, че t може да приема в с и ч к и стойности от този интервал. За да покажем това, достатъчно е да изберем t_0 произволно в интервала $(0, \pi)$, да положим $x_0=\cos t_0$ и да се възползуваме от равенствата (4), (6) и (7) при $x=x_0$. Ние видяхме обаче по-рано (вж. зад. 42 от края на глава IV от част II), че само функциите

(9)
$$u(t)=A\cos t+B\sin t,$$

където A и B са константи, удовлетворяват уравнението (8). Тогава ние разглеждахме функциите върху цялата ос x; разсъжденията обаче запазват своята валидност, ако се ограничим с кой да е интервал; в дадения случай ние разглеждаме отворения интервал $(0, \pi)$.

Като вземем пред вид, че

$$y(x)=u(\arccos x),$$

получаваме от (9)

(10)
$$y(x)=A\cos(\arccos x)+B\sin(\arccos x)=Ax+B\sqrt{1-x^2}.$$

Така полученото равенство е установено при всички стойности на x от интервала $(-1, 1)$. За да се убедим в това, избираме x_0 произволно в интервала $(-1, 1)$, полагаме $t_0=\arccos x_0$ и използуваме равенството (9) при $t=t_0$.

Равенството (10) е установено в отворения интервал $(-1, 1)$. Това обаче е вярно и за $x=\pm 1$ поради непрекъснатостта на функциите, които стоят в двете части на това равенство.

И така решенията на задачата (ако въобще такива има) трябва да се търсят измежду функциите

(11)
$$y=Ax+B\sqrt{1-x^2}.$$

В задачата се иска функцията y да бъде диференцуема (два пъти) в з а т в о р е н и я интервал $[-1, 1]$. Обаче функцията, която стои в дясната страна на равенството (11), не е диференцуема при $x=\pm 1$, ако $B\neq 0$ (защо?). От това заключаваме, че $B=0$. И така ние още повече стеснихме множеството на функциите, измежду които трябва

да се търсят решенията на задачата (за които, както казахме, все още не знаем дали съществуват).

С директна проверка обаче се вижда, че функциите

$$y=Ax$$

удовлетворяват поставените условия при всеки избор на константата A.

С това интересуващата ни задача е решена докрай.

П р и м е р 2. Да се намерят всичките функции y на независимата променлива x (ако има такива), които са два пъти диференцуеми в безкрайния интервал $x>1$ и удовлетворяват уравнението

(12)
$$(1-x^2)y''-xy'+y=0$$

(по какво се отличава тази задача от предишната?).

Р е ш е н и е. Да допуснем, че задачата има решение. Тук ние не можем да направим субституцията $x=\cos t$, която направихме в предишната задача, защото стойностите на функцията $\cos t$ не лежат в дефиниционната област на функцията y. Ние ще направим сега субституцията $x=\operatorname{ch} t$, като оставим t да се мени в безкрайния интервал $t>0$. Функцията $\operatorname{ch} t$ е обратима в този интервал, защото производната ѝ не се анулира при $t>0$. Нека $\varphi(x)$ е обратната функция на $\operatorname{ch} t$. При $t>0$ функцията $\varphi(x)$ е диференцуема, защото, както това лесно може да се докаже, тя се изразява по следния начин чрез диференцуеми функции:

$$\varphi(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

Полагаме $u(t)=y(\operatorname{ch} t)$ и разглеждаме равенството

(13)
$$y(x)=u(t),$$

където $t=\varphi(x)$. В равенството (13) независимата променлива x може да се мени произволно в безкрайния интервал $x>1$, защото в този интервал са дефинирани функциите $y(x)$ и $\varphi(x)$, като при това стойностите на $\varphi(x)$ не напускат дефиниционната област на $u(t)$. Диференцираме равенството (13) спрямо x по правилото за диференциране на сложни функции (ние можем да направим това поради диференцуемостта на функциите $y(x)$, $\varphi(x)$ и $u(t)=y(\operatorname{ch} t)$. Това ни дава

$$y'_x=u'_t\, t'_x.$$

Като диференцираме спрямо x още и равенството

$$x=\operatorname{ch} t,$$

където $t=\varphi(x)$, получаваме

$$1=(\operatorname{sh} t)\, t'_x$$

или

$$t'_x=\frac{1}{\operatorname{sh} t}.$$

Оттук намираме

$$y'_x=\frac{u'_t}{\operatorname{sh} t}.$$

Диференцирайки втори път спрямо x, получаваме

$$y''_x=\frac{u''_t \operatorname{sh} t-u'_t \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t}\, t'_x=\frac{u''_t \operatorname{sh} t-u'_t \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^3 t}.$$

Като заместим y'_x и y''_x с равните им в уравнението (12), намираме

(14)
$$u''_t-u=0.$$

По този начин ние успяхме да опростим уравнението (12) благодарение на извършената смяна на независимата променлива. Така полученото уравнение е удовлетворено при всички положителни стойности на t. За да намерим всичките функции t, които са два пъти диференцуеми при $t > 0$ и удовлетворяват уравнението (14), образуваме двете помощни функции

$$p(t)=u\,\mathrm{ch}\,t-u'\,\mathrm{sh}\,t, \tag{15}$$
$$q(t)=u\,\mathrm{sh}\,t-u'\,\mathrm{ch}\,t.$$

Не е трудно да се види, че $p'(t)=0$ и $q'(t)=0$, т. е. двете функции $p(t)$ и $q(t)$ са константи. Ако положим $p(t)=A$ и $-q(t)=B$, получаваме от системата (15)

$$u=A\,\mathrm{ch}\,t+B\,\mathrm{sh}\,t.$$

Оттук, като използуваме равенството

$$y(x)=u(\psi(x)),$$

намираме

$$y(x)=A\,\mathrm{ch}\,\psi(x)+B\,\mathrm{sh}\,\psi(x)=Ax+B\sqrt{x^2-1}. \tag{16}$$

Не е трудно да се види, че ние установихме по този начин валидността на равенството (16) при всички стойности на x, които са по-големи от единица. И така ние показахме, че сигурно няма други функции, които удовлетворяват условията на задачата, освен функциите (16). От друга страна, с директна проверка се вижда, че функциите (16) удовлетворяват в с и ч к и условия на задачата при всеки избор на константите A и B. С това задачата е решена докрай.

§ 2. Обща задача за смяна на променливите при функции на един аргумент

По-горе ние разгледахме една задача, при която се извършваше смяна на променливите с помощта на трансформачните формули

$$x=\varphi(t),$$
$$y=u,$$

където u е функция на t. Сега ще разгледаме по-общата задача, при която трансформачните формули имат вида

$$x=f(t,u), \tag{1}$$
$$y=g(t,u).$$

И така нека

$$y=F(x) \tag{2}$$

е функция на x. От уравненията (1) и (2) получаваме*

$$g(t,u)=F[f(t,u)].$$

От това уравнение можем** да определим или u като функция на t, или t като функция на u. Да определим например u като функция на t и да означим тази функция с $u(t)$. След тези предварителни бележки ще покажем, че производните* на y спрямо x могат да се изразят чрез производните на $u(t)$ спрямо t и чрез частните производни на $f(t,u)$ и $g(t,u)$.

* Разбира се, за да можем да направим тази субституция, трябва да сме сигурни, че стойностите на функцията $f(t,u)$ принадлежат на дефиниционната област на $F(x)$.

** Разбира се, не винаги.

Смисълът на тези думи се нуждае от прецизиране, което няма да правим сега, защото тога не е единственото място, което се нуждае от прецизиране.

Определяме** от уравнението

$$x=f[t,u(t)]$$

t като функция на x. Да означим тази функция с $t(x)$. Ние твърдим, че

$$g[t(x),u(t(x))]=F(x).$$

Това може да се види по следния начин: функцията $u(t)$ е дефинирана с помощта на условието

$$g(t,u(t))=F[f(t,u(t))],$$

и специално при $t=t(x)$ имаме

$$g[t(x),u(t(x))]=F[f[t(x),u(t(x))]];$$

от друга страна, функцията $t=t(x)$ удовлетворява уравнението

$$f[t,u(t)]=x$$

и следователно

$$F[f[t(x),u(t(x))]]=F(x),$$

откъдето

$$g[t(x),u(t(x))]=F(x).$$

И така ние представихме функцията $y=F(x)$ във вид на съставната функция

$$y=g[t,u(t)],$$

където $t=t(x)$ е функция на x, удовлетворяваща уравнението

$$x=f[t,u(t)].$$

Като диференцираме равенството***

$$y=g[t,u(t)]$$

* Тук ще предполагаме, че функциите $F(x)$, $f(t,u)$ и $g(t,u)$ са диференцуеми достатъчен брой пъти. Това обаче не е достатъчно. Трябва да сме сигурни още и в съществуването на съответните производни на $u(t)$ (нека припомним на това място, че в общия случай ние не сме сигурни дори в съществуването на функцията $u(t)$, та още по-малко можем да твърдим нещо за съществуването на нейните производни).

** Стига да можем.

*** За да можем да извършим това обаче, не стига да знаем, че функциите $y=F(x)$, $g(t,u)$ и $u(t)$ са диференцуеми. Трябва да сме сигурни още в диференцуемостта на функцията $t(x)$ и в непрекъснатостта на частните производни на g и f.

спрямо x и вземем пред вид, че t е функция на x, получаваме по правилото за диференциране на съставни функции

$$y'_x = (g[t, u(t)])'_x = (g[t, u(t)])'_t \cdot t'_x =$$
$$= \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial u} u'_t\right) \cdot t'_x .$$

Като диференцираме спрямо x още и равенството

$$x = f[t, u(t)]$$

(като помним, че t е функция на x), получаваме*

$$1 = (f[t, u(t)])'_x = (f[t, u(t)])'_t \, t'_x = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} u'_t\right) t'_x ,$$

откъдето

$$t'_x = \frac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial u} u'_t}$$

и следователно

$$y'_x = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{\partial g}{\partial u} u'_t}{\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial u} u'_t} .$$

Като диференцираме това равенство още веднъж спрямо x, ще получим y''_x и пр.

Нека изрично отбележим на това място, че за да можем да решим задачата, която току-що разгледахме, не стига да бъдат дадени трансформачните формули. Трябва още да бъде казано коя от променливите се избира за функция и коя за аргумент. Така например, ако искаме да направим смяната на променливите с помощта на трансформачните формули (1), където t се разглежда като функция на u, имаме друга задача, различна от тази, която ние разглеждахме в текста, макар че трансформачните формули са същите (тази друга задача, разбира се, се решава по същия начин).

Пример. В израза

(3) $$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} ,$$

* След като веднъж сме стигнали по един или друг начин до това равенство, ние вече можем да извлечем от него и заключението, че

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} u'_t \neq 0 .$$

където $y = f(x)$ е функция на x, да се направи смяна на променливите с помощта на трансформачните формули

$$x = r \cos \theta ,$$
$$y = r \sin \theta ,$$

където r разглеждаме като функция на θ.

Решение. Нека $r(\theta)$ е функция, която удовлетворява уравнението

$$r \sin \theta = f(r \cos \theta),$$

и нека $\theta = \theta(x)$ е функция на x, която удовлетворява уравнението

$$x = r(\theta) \cos \theta .$$

В такъв случай ние добиваме възможност да представим функцията $y = f(x)$ още по следния начин:

(4) $$y = r(\theta) \sin \theta ,$$

където $\theta = \theta(x)$. Диференцираме равенството (4) спрямо x, като помним, че θ е функция на x. Това ни дава

$$y'_x = (r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta)\, \theta'_x .$$

Като диференцираме още и равенството

$$x = r(\theta) \cos \theta$$

спрямо x, получаваме

$$1 = (r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta)\, \theta'_x ,$$

откъдето

$$\theta'_x = \frac{1}{r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta} .$$

Това ни дава

$$y'_x = \frac{r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta}{r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta} ;$$

Като диференцираме още веднъж спрямо x, получаваме

$$y''_x = \frac{(r''_\theta \sin \theta + 2 r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta)(r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta)}{(r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta)^2}\, \theta'_x -$$
$$- \frac{(r''_\theta \cos \theta - 2 r'_\theta \sin \theta - r \cos \theta)(r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta)}{(r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta)^2}\, \theta'_x = \frac{-r''r + 2r'^2 + r^2}{(r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta)^3} .$$

Сега остава да заместим y'_x и y''_x в (3). Това ще ни даде

$$R = \pm \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} .$$

Това решение не може да се разглежда като завършено, защото то оставя открит въпроса за границите на неговата валидност. На читателя е ясно, че горните пресмятания не винаги могат да се извършат. Така например ние си послужихме с помощни функции, за които тихомълком предполагахме дори, че имат производни, докато самото им съществуване не беше осигурено, и пр. Засега няма да анализираме повече този пример. Нека той служи само като илюстрация на техническата страна на тези пресмятания. Читателят, който вижда нуждата от едно прецизиране на въпроса, ще намери интересуващия го отговор в § 5.

§ 3. Смяна на независимите променливи при функции на няколко аргумента

Да направим във функцията $z = f(x, y)$ субституцията*

$$x = \varphi(u, v),$$
$$y = \psi(u, v).$$

В такъв случай z се обръща във функция на u и v. Да означим с $w(u, v)$ тази функция, така че

$$w(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)].$$

Ще покажем, че производните** на z спрямо x и y могат да се изразят*** чрез производните на w, φ и ψ спрямо u и v. За тази цел означаваме с $u(x, y)$ и $v(x, y)$ две функции**** на x и y, които удовлетворяват системата

$$\varphi[u(x, y), v(x, y)] = x,$$
$$\psi[u(x, y), v(x, y)] = y.$$

Ние твърдим, че

$$z(x, y) = w[u(x, y), v(x, y)].$$

Това се вижда от следната верига от равенства:

$$w[u(x, y), v(x, y)] = f[\varphi[u(x, y), v(x, y)], \psi[u(x, y), v(x, y)]] = z(x, y).$$

И така ние представихме функцията $z = f(x, y)$ по следния начин:

$$z = w(u, v), \tag{1}$$

---

* Разбира се, за да можем да извършим това, трябва да сме сигурни, че точката с координати $[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$ принадлежи на дефиниционната област на $z(x, y)$.

** Тук трябва да сме сигурни в диференцуемостта не само на функциите $z(x, y)$, $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$, но и на $w(u, v)$. Достатъчни условия за диференцуемост на $w(u, v)$ ни дава теоремата за диференциране на съставни функции.

*** Смисълът на тези думи се нуждае, разбира се, от прецизиране, което сега няма да правим, защото това не е единственото място, което се нуждае от прецизиране.

**** Разбира се, такива две функции не винаги съществуват. Теоремата за съществуване на неявни функции ни дава все пак едно достатъчно условие за съществуване на такива функции.

където $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$. Диференцираме* равенството (1) частно спрямо x и y по правилото за диференциране на съставни функции. Това ни дава

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{2}$$

За да намерим производните $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, диференцираме съответно спрямо x и y равенствата**

$$x = \varphi(u, v),$$
$$y = \psi(u, v),$$

където $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$. Това ни дава

$$1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

и

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$
$$1 = \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

От така получените уравнения*** определяме $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Като диференцираме още веднъж равенствата (2), получаваме

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ и пр.}$$

---

* За да можем да извършим това, достатъчно е да сме сигурни, че функциите $u(x, y)$ и $v(x, y)$ са диференцуеми, а производните на $w(u, v)$ спрямо u и v са непрекъснати.

** Разбира се, и тук трябва да сме сигурни, че са налице условията, при които изведохме правилото за диференциране на съставни функции.

*** Тези системи имат една и съща детерминанта. След като пресмятанията по един или друг начин са доведени дотук, ние можем да твърдим, че тази детерминанта е различна от нула, защото

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Пример. Дадено е уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad a \neq 0, \tag{3}$$

където $z = z(x, y)$ е функция на x и y, която допуска непрекъснати частни производни до втори ред включително в някоя околност на точката (x_0, y_0). Да се сменят независимите променливи x и y, като се въведат нови независими променливи u и v, свързани с x и y посредством трансформачиите формули

$$x = \frac{u - v}{2a},$$

$$y = \frac{u + v}{2}.$$

Решение. Да положим

$$w(u, v) = z\left(\frac{u - v}{2a}, \frac{u + v}{2}\right).$$

В такъв случай имаме

$$z(x, y) = w(u, v)$$

при

$$u = y + ax,$$

$$v = y - ax.$$

Правилото за диференциране на съставни функции ни дава

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Като вземем пред вид, че

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -a,$$

намираме

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a\frac{\partial w}{\partial u} - a\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Аналогично намираме

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

и следователно

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}.$$

Като диференцираме още веднъж, получаваме

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x} - a\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} - a\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2a^2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

Заместваме $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ в уравнението (3) с равните им и получаваме

$$-4a^2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0,$$

тъй като $a \neq 0$.

§ 4. Обща задача за смяна на променливите при функции на няколко аргумента

Нека $z = F(x, y)$ е една функция на x и y и нека

$$\begin{aligned} x &= f(u, v, w), \\ y &= g(u, v, w), \\ z &= h(u, v, w), \end{aligned} \tag{1}$$

са три функции на u, v и w. Като заместим* x, y и z с равните им в уравнението $z = F(x, y)$ получаваме

$$h(u, v, w) = F[f(u, v, w), \; g(u, v, w)]. \tag{2}$$

Нека $w = w(u, v)$ е една функция на u и v, която удовлетворява* уравнението (2). Това значи, че

$$h[u, v, w(u, v)] = F[f(u, v, w(u, v)), \; g(u, v, w(u, v))]. \tag{2a}$$

Нека $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ са две функции на x и y, които удовлетворяват* системата

$$\begin{aligned} f[u, v, w(u, v)] &= x, \\ g[u, v, w(u, v)] &= y. \end{aligned} \tag{3}$$

В такъв случай не е трудно да се докаже, че

$$h[u(x, y), v(x, y), w(u(x, y)\; v(x, y))] = F(x, y).$$

(Нека читателят сам докаже това, като използува равенствата (2a) и (3)). Нашата задача е да покажем как производните на $F(x, y)$ спрямо x и y могат да се изразят** чрез производните* на w спрямо u и v и чрез производните на f, g и h. За тази цел използуваме представянето на функцията $z = F(x, y)$, за което говорихме по-горе:

* Ние вече имахме случай да обърнем внимание на трудностите, с които са свързани тези разсъждения.

** Смисълът на тези думи се нуждае от прецизиране. Ние обаче на това няма да се спираме, защото тази празнота не е единствената.

$$z=h[u,\ v,\ w\ (u,\ v)], \tag{4}$$

където $u=u\,(x,\ y)$, $v=v\,(x,\ y)$. Като диференцираме* равенството (4) частно по x и помним, че w е функция на u и v, а u и v са функции на x и y, получаваме

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial w}\left[\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right].$$

За да намерим производните $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$, диференцираме* спрямо x равенствата

$$x=f[u,\ v,\ w\ (u,\ v)],$$
$$y=g[u,\ v,\ w\ (u,\ v)],$$

като помним, че w е функция на u и v, а u и v са функции на x и y (при това диференциране, което се извършва частно спрямо x, независимата променлива y е фиксирана). Това ни дава

$$1=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\left[\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right],$$

$$0=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial w}\left[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right].$$

От тази система определяме $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$. Аналогично намираме $\frac{\partial}{\partial y}$ и пр.

§ 5. Достатъчни условия, при които може да се извърши смяна на променливите

В този параграф ще дадем една система от достатъчни условия, при които може да се извърши смяната на променливите по метода, техническата страна на който изложихме в предните четири параграфа. Ще се ограничим при това само със случая, при който имаме функция на две независими променливи и се прави смяна само на първите частни производни. Това ограничение, разбира се, не е съществено и всичко изложено в този параграф може без труд да се обобщи.

Нека функциите

$$x=f(u,\ v,\ w),$$
$$y=g\,(u,\ v,\ w),$$
$$z=h\,(u,\ v,\ w)$$

* Ние вече имахме случай да обърнем внимание на трудностите, с които са свързани тези разсъждения.

са дефинирани и притежават непрекъснати първи частни производни в някоя околност на точката $(u_0,\ v_0,\ w_0)$. Полагаме

$$f(u_0,\ v_0,\ w_0)=x_0,$$
$$g\,(u_0,\ v_0,\ w_0)=y_0,$$
$$h\,(u_0,\ v_0,\ w_0)=z_0.$$

Нека функцията

$$z=F(x,\ y)$$

е дефинирана, непрекъсната, притежава непрекъснати първи частни производни в някоя околност на точката $(x_0,\ y_0)$ и приема стойност z_0 при $x=x_0$ и $y=y_0$. Нека освен това

$$\delta=h'_w(u_0,\ v_0,\ w_0)-F'_x(x_0,\ y_0)\,f'_w(u_0,\ v_0,\ w_0)-\\-F'_y(x_0,\ y_0)\,g'_w(u_0,\ v_0,\ w_0)\neq 0 \tag{1}$$

и нека най-сетне в точката $(u_0,\ v_0,\ w_0)$ имаме

$$\Delta=\begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u & h'_v & h'_w \end{vmatrix}\neq 0.$$

При тези предположения ще покажем, че:

1) в достатъчно малка околност на точката $(u_0,\ v_0)$ има една (и само една) непрекъсната функция $w=w(u,\ v)$, която удовлетворява уравнението

$$h\,(u,\ v,\ w)=F[f\,(u,\ v,\ w),\ g\,(u,\ v,\ w)]$$

и приема стойност w_0 в точката $(u_0,\ v_0)$;

2) в достатъчно малка околност на точката $(x_0,\ y_0)$ има една (и само една) двойка непрекъснати функции $u=u\,(x,\ y)$, $v=v\,(x,\ y)$, които удовлетворяват условията

$$x=f[u,\ v,\ w\,(u,v)],$$
$$y=g\,[u,\ v,\ w\,(u,\ v)],$$
$$u\,(x_0,\ y_0)=u_0,\quad v\,(x_0,\ y_0)=v_0;$$

3) функциите $w(u,\ v)$, $u\,(x,\ y)$, $v\,(x,\ y)$ притежават непрекъснати частни производни от първи ред и тези производни удовлетворяват уравненията

$$F'_x(x_0,\ y_0)=h'_u(u_0,\ v_0,\ w_0)\ u'_x(x_0,\ y_0)+h'_v(u_0,\ v_0,\ w_0)\,v'_x(x_0,\ y_0)+\\+h'_w(u_0,\ v_0,\ w_0)\,[w'_u(u_0,\ v_0)\ u'_x(x_0,\ y_0)+w'_v(u_0,\ v_0)\ v'_x(x_0,\ y_0)],$$

$$1=f'_u(u_0, v_0, w_0)\,u'_x(x_0, y_0)+f'_v(u_0, v_0, w_0)\,v'_x(x_0, y_0)+$$
$$+f'_w(u_0, v_0, w_0)[w'_u(u_0, v_0)\,u'_x(x_0, y_0)+w'_v(u_0, v_0)\,v'_x(x_0, y_0)],$$
$$0=g'_u(u_0, v_0, w_0)\,u'_x(x_0, y_0)+g'_v(u_0, v_0, w_0)\,v'_x(x_0, y_0)+$$
$$+g'_w(u_0, v_0, w_0)\,[w'_u(u_0, v_0)\,u'_x(x_0, y_0)+w'_v(u_0, v_0)\,v'_x(x_0, y_0)] \text{ и пр.}$$

И наистина да разгледаме уравнението

$$h(u, v, w)-F[f(u, v, w), g(u, v, w)]=0.$$

Точката с координати (u_0, v_0, w_0) удовлетворява това уравнение, защото

$$z_0-F(x_0, y_0)=0.$$

Като вземем пред вид, от друга страна, че функцията $F(x, y)$ е дефинирана в някоя околност на точката (x_0, y_0), че функциите $f(u, v, w)$ и $g(u, v, w)$ са дефинирани и непрекъснати в някоя околност на точката (u_0, v_0, w_0) и приемат съответно стойности x_0 и y_0 в тази точка заключаваме, че точката с координати

$$[f(u, v, w), g(u, v, w)]$$

няма да напуска дефиниционната област на $F(x, y)$, когато (u, v, w) се изменят в някоя достатъчно малка околност на точката (u_0, v_0, w_0).

И така функцията

$$G(u, v, w)=h(u, v, w)-F[f(u, v, w), g(u, v, w)]$$

е дефинирана в някоя достатъчно малка околност на точката (u_0, v_0, w_0). Като вземем пред вид, че функциите $f(u, v, w)$, $g(u, v, w)$, $h(u, v, w)$ и $F(x, y)$ притежават непрекъснати частни производни, заключаваме с помощта на теоремата за деференциране на съставни функции, че функцията $G(u, v, w)$ също притежава частни производни спрямо трите си аргумента. Специално

$$\frac{\partial G(u_0, v_0, w_0)}{\partial w}=h'_w(u_0, v_0, w_0)-F'_x(x_0, y_0)\,f'_w(u_0, v_0, w_0)-$$
$$-F'_y(x_0, y_0)\,g'_w(u_0, v_0, w_0)$$

и следователно

(3) $$\frac{\partial G(u_0, v_0, w_0)}{\partial w}\neq 0,$$

както ни учи неравенството (1).

От друга страна, функцията $G(u, v, w)$ и нейната частна производна $\dfrac{\partial G(u, v, w)}{\partial w}$ са непрекъснати. Това ни дава право да приложим тео-

ремата за съществуване на неявни функции, според която във всяка достатъчно малка околност на точката (u_0, v_0) има една и само една непрекъсната функция $w=w(u, v)$, която удовлетворява уравнението

$$h(u, v, w)-F[f(u, v, w), g(u, v, w)]=0$$

и приема стойност w_0 при $u=u_0$, $v=v_0$.

От непрекъснатостта на тази функция, от непрекъснатостта на частните производни на функцията $G(u, v, w)$ и от условието (3) следва, както знаем, съществуването на частните производни на $w(u, v)$ спрямо u и v. От изразите, които получаваме за тези частни производни, се вижда, че те са непрекъснати.

Сега ще разгледаме въпроса за съществуването на функциите $u(x, y)$ и $v(x, y)$, които удовлетворяват системата

(4) $$x=f[u, v, w(u, v)],\qquad y=g[u, v, w(u, v)].$$

Ние ще покажем, че функционалната детерминанта

$$D=\begin{vmatrix} f'_u+f'_w w'_u & f'_v+f'_w w'_v \\ g'_u+g'_w w'_u & g'_v+g'_w w'_v \end{vmatrix}$$

е различна от нула в точката (u_0, v_0). И наистина, като диференцираме равенството

$$h[u, v, w]-F[f(u, v, w), g(u, v, w)]=0$$

(където $w=w(u, v)$) спрямо u и v получаваме

$$h'_u+h'_w w'_u-F'_x.[f'_u+f'_w w'_u]-F'_y.[g'_u+g'_w w'_u]=0,$$
$$h'_v+h'_w w'_v-F'_x.[f'_v+f'_w w'_v]-F'_y.[g'_v+g'_w w'_v]=0,$$

т. е.

(5) $$w'_u=-\frac{h'_u-F'_x.f'_u-F'_y g'_u}{h'_w-F'_x f'_w-F'_y g'_w},\qquad w'_v=-\frac{h'_v-F'_x f'_v-F'_y g'_v}{h'_w-F'_x f'_w-F'_y g'_w}.$$

От друга страна, детерминантата D може да се представи още във вида

$$D=\begin{vmatrix} f'_u+f'_w w'_u & f'_v+f'_w w'_v & 0 \\ g'_u+g'_w w'_u & g'_v+g'_w w'_v & 0 \\ -w'_u & -w'_v & 1 \end{vmatrix}$$

или още

$$D=\begin{vmatrix} f_u & f_v & f_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ -w'_u & -w'_v & 1 \end{vmatrix}.$$

Като вземем пред вид равенствата (5), получаваме при $u=u_0$, $v=v_0$, $w=w_0$

$$D=\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} f'_u & f_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u-F'_xf'_u-F'_yg'_u & h'_v-F'_xf'_v-F'_yg'_v & h'_w-F'_xf'_w-F'_yg'_w \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u & h'_v & h'_w \end{vmatrix}\neq 0.$$

Като вземем пред вид още, че функциите $f(u, v, w)$, $g(u, v, w)$ и $w(u, v)$ са непрекъснати и притежават непрекъснати частни производни, заключаваме, че са налице условията, при които доказахме теоремата за съществуване на неявни функции. И така във всяка достатъчно малка околност на точката (x_0, y_0) имаме една двойка непрекъснати функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, които удовлетворяват системата (4) и приемат съответно стойности u_0 и v_0 в точката (x_0, y_0). Тези функции са диференцуеми частно спрямо x и y, защото функциите $f[u, v, w(u, v)]$ и $g[u, v, w(u, v)]$ са диференцуеми частно спрямо u и v, частните им производни са непрекъснати и функционалната детерминанта D е различна от нула в достатъчно малка околност на точката (u_0, v_0).

Да разгледаме функцията

$$h[u(x, y), v(x, y), w[u(x, y), v(x, y)]],$$

която е дефинирана в достатъчно малка околност на точката (x_0, y_0).

Очевидно имаме

$$h[u, v, w(u, v)]=E[f(u, v, w(u,v)), g(u, v, w(u, v))],$$

$$f[u(x, y), v(x, y), w(u(x, y), v(x, y))]=x,$$

$$g[u(x, y), v(x, y), w(u(x, y), v(x, y))]=y$$

и следователно

$$h[u(x, y), v(x, y), w(u(x,y), v(x, y))]=F(x, y).$$

Ще положим $p(x, y)=w[u(x, y), v(x, y)]$ и по такъв начин ще пишем накратко

$$F(x, y)=h(u, v, w),$$

където

$$u=u(x, y),$$
$$v=v(x, y),$$
$$w=p(x, y).$$

Като се възползуваме от правилото за диференциране на съставни функции*, получаваме

$$F'_x(x_0, y_0)=h'_u(u_0, v_0, w_0)\,u'_x(x_0, y_0)+h'_v(u_0, v_0, w_0)\,v'_x(x_0, y_0)+$$
$$+h'_w(u_0, v_0, w_0)\,p'_x(x_0, y_0).$$

Като вземем пред вид, че

$$p'_x(x_0, y_0)=w'_u(u_0, v_0)\,u'_x(x_0, y_0)+w'_v(u_0, v_0)\,v'_x(x_0, y_0),$$

намираме

$$F'_x(x_0, y_0)=h'_u(u_0, v_0, w_0)\,u'_x(x_0, y_0)+h'_v(u_0, v_0, w_0)\,v'_x(x_0, y_0)+$$
$$+h'_w(u_0, v_0, w_0)\,[w'_u(u_0, v_0)\,u'_x(x_0, y_0)+w'_v(u_0, v_0)\,v'_x(x_0, y_0)].$$

Аналогично, като диференцираме спрямо x равенствата

$$x=f(u, v, w),$$
$$y=g(u, v, w)$$

при $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$, $w=p(x, y)$ по правилото за диференциране на съставни функции, намираме

$$1=f'_u(u_0, v_0, w_0)\,u'_x(x_0, y_0)+f'_v(u_0, v_0, w_0)\,v'_x(x_0, y_0)+$$
$$+f'_w(u_0, v_0, w_0)\,[w'_u(u_0, v_0)\,u'_x(x_0, y_0)+w'_v(u_0, v_0)\,v'_x(x_0, y_0)],$$
$$0=g'_u(u_0, v_0, w_0)\,u'_x(x_0, y_0)+g'_v(u_0, v_0, w_0)\,v'_x(x_0, y_0)+$$
$$+g'_w(u_0, v_0, w_0)\,[w'_u(u_0, v_0)\,u'_x(x_0, y_0)+w'_v(u_0, v_0)\,v'_x(x_0, y_0)]$$

и пр.

* Не е трудно да се провери, че тук са налице всичките условия, при които изведохме това правило.

Общи задачи

1. Да се извърши субституцията $x=\operatorname{tg} t, -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, в уравнението

(1) $$(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y'+y=0.$$

Решение. Нека $y=f(x)$ е една функция, която удовлетворява даденото уравнение. Разглеждаме функцията

$$u=u(t)=f(\operatorname{tg} t).$$

В такъв случай имаме очевидно

$$u(\operatorname{arc\,tg} x)=f[\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)]=f(x)$$

или

$$f(x)=u(t),$$

където

$$t=\operatorname{arc\,tg} x.$$

Правилото за диференциране на функция от функция ни дава

$$y'_x=u'_t t'_x,$$

където

$$t'_x=\frac{1}{1+x^2}$$

и следователно

$$y'_x=\frac{u'_t}{1+x^2}.$$

Като диференцираме още веднъж, получаваме

$$y''_x=\frac{u''_t t'_x(1+x^2)-u'_t\,2x}{(1+x^2)^2}=\frac{u''_t-2xu'_t}{(1+x^2)^2}.$$

Заместваме x, y'_x и y''_x с равните им в уравнението (1). Това ни дава

$$u''_t+u=0.$$

В бъдеще, за да не въвеждаме много нови букви, ние често ще означаваме функцията $u(t)$ с y, т. е. със същата буква, с която е означена и функцията $f(x)$. При този начин на означаване резултатът ще има следния вид:

$$y''_t+y=0.$$

2. Да се извърши субституцията $x=e^t$ в уравнението

$$x^2y''+3xy'+y=0$$

при $x>0$.

Отговор.

$$y''_t+2y'_t+y=0.$$

3. Да се извърши субституцията $t=\frac{x^2}{4}$, $x>0$, в уравнението

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0.$$

Отговор.

$$t\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=0.$$

4. Да се извърши субституцията $t=\ln x$ в уравнението

$$x^3y'''+2x^2y''-xy'+y=0$$

при $x>0$.

Отговор.

$$y'''_t-y''_t-y'+y=0.$$

5. Да се извърши субституцията $x=a\sin t$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, в уравнението

$$(a^2-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0$$

при $-a<x<a$, $a>0$.

Отговор.

$$\frac{d^2y}{dt^2}=0.$$

6. Да се извърши субституцията $e^{2x}=\operatorname{tg} t$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, в уравнението

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}\frac{dy}{dt}+\frac{4n^2y}{(e^{2x}+e^{-2x})^2}=0.$$

Отговор.

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0.$$

7. Нека функцията $y=F(x)$ е дефинирана и диференцуема достатъчен брой пъти в някоя околност на точката x_0, нека

$$F(x_0)-x_0F'(x_0)\neq 0$$

(геометрически това означава, че допирателната към кривата $y=F(x)$ в точката $[x_0, F(x_0)]$ не минава през началото) и нека

$$x_0=\rho_0\cos\theta_0,$$

$$F(x_0)=\rho_0\sin\theta_0.$$

Покажете, че може да се направи смяна на променливите с помощта на трансформачните формули

$$x=\rho\cos\theta,$$

$$y=\rho\sin\theta,$$

където ρ се разглежда като непрекъсната функция на θ, която е дефинирана в достатъчно малка околност на точката θ_0 и приема стойност ρ_0 при $\theta=\theta_0$.

Упътване. Използувайте изследванията от § 5 на тази глава.

8. Нека $y=y(x)$ е два пъти диференцуема функция на x в някоя околност на точката x_0, удовлетворяваща условието

$$y(x_0)-x_0y'(x_0)\neq 0,$$

и нека

$$x_0=\rho_0\cos\theta_0,$$
$$y(x_0)=\rho_0\sin\theta_0.$$

Да се извърши смяна на променливите в израза

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=\rho\cos\theta,$$
$$y=\rho\sin\theta,$$

където $\rho=\rho(\theta)$ е непрекъсната функция на θ, която е дефинирана в достатъчно малка околност на θ_0 и удовлетворява условието $\rho(\theta_0)=\rho_0$.

Отговор.

$$\pm\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}.$$

9. Нека $y=y(x)$ е диференцуема функция на x с непрекъсната производна в някоя околност на точката x_0, удовлетворяваща условието

$$y(x_0)-x_0y'(x_0)\neq 0,$$

и нека

$$x_0=\rho_0\cos\theta_0,$$
$$y(x_0)=\rho_0\sin\theta_0.$$

Да се направи смяна на променливите в израза

$$\frac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}}$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=\rho\cos\theta,$$
$$y=\rho\sin\theta,$$

където $\rho=\rho(\theta)$ е непрекъсната функция на θ, подчинена на условието $\rho(\theta_0)=\rho_0$.

Отговор.

$$\pm\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2\theta}}.$$

10. Нека $y=y(x)$ е три пъти диференцуема функция на x в някоя околност на точката x_0 и нека $y'(x_0)\neq 0$. Да се направи смяна на променливите в израза

$$\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=u,$$
$$y=t,$$

където u е непрекъсната функция на t, дефинирана в достатъчно малка околност на точката t_0 и подчинена на условието $u(t_0)=x_0$ (инвариантен израз на Шварц — H. A. Schwarz).

Отговор. $-\frac{1}{u_t'^2}\left[\frac{u_t'''}{u_t'}-\frac{3}{2}\left(\frac{u_t''}{u_t'}\right)^2\right].$

11. Нека $y(x)$ е два пъти диференцуема функция на x в някоя околност на точката x_0, нека

$$x_0=t_0e^{u_0},$$
$$y(x_0)=t_0$$

и нека

$$y(x_0)\neq 0,\ y'(x_0)\neq 0.$$

Да се направи смяна на променливите в израза

$$xy''-\frac{x}{y}y'^2+y'$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=te^u,$$
$$y=t,$$

където $u=u(t)$ е непрекъсната функция на t, дефинирана в достатъчно малка околност на точката t_0 и подчинена на условието $u(t_0)=u_0$.

Отговор.

$$\frac{-te^{-u}}{(1+t\dot{u})^2}(t\ddot{u}+\dot{u}).$$

12. Нека y е една три пъти диференцуема функция на x в някой интервал Δ. Нека u е функция на x, дефинирана в Δ и свързана с y посредством равенството

$$yu=1.$$

Да се докаже, че

$$\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y}\right)^2=\frac{u'''}{u'}-\frac{3}{2}\left(\frac{u''}{u'}\right)^2$$

(Шварц).

13. Нека $y=y(x)$ е една три пъти диференцуема функция на x в някой интервал Δ. Нека u е една функция на x, дефинирана в Δ и свързана с y посредством равенството

$$u=\frac{ay+b}{cy+d},$$

където a, b, c са константи и

$$ad-bc\neq 0.$$

Да се докаже, че

$$\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2=\frac{u'''}{u'}-\frac{3}{2}\left(\frac{u''}{u'}\right)^2$$

(Шварц).

Упътване. Редуцирайте общия случай към случаите

$$c=0,\ d=1$$

и

$$a=0,\ d=0,\ b=1,\ c=1$$

и използувайте предната задача.

14. Нека $z=f(x, y)$ е функция на x и y, която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някое отворено точково множество. Да се извърши смяна на независимите променливи в уравнението

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \tag{2}$$

посредством трансформачните формули

$$x+2y=u,$$
$$x+y=v.$$

Решение. Полагаме

$$\varphi(u, v)=f[2v-u,\ u-v]$$

и представяме функцията $f(x, y)$ във вида

$$f(x, y)=\varphi[x+2y,\ x+y]$$

или по-кратко

$$f(x, y)=\varphi(u, v), \tag{3}$$

където

$$u=x+2y,$$
$$v=x+y.$$

Като диференцираме равенството (3) спрямо x и y, получаваме

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{4}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Производните $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ намираме, като диференцираме равенствата

$$u=x+2y,$$
$$v=x+y$$

спрямо x и y. Това ни дава

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=1,\ \frac{\partial v}{\partial y}=1.$$

Като диференцираме още веднъж равенствата (4), намираме

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+3\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

По такъв начин уравнението (2) приема вида

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0.$$

15. Нека z е една функция на x и y, която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някое отворено точково множество. Да се направи смяна на независимите променливи в уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=u,$$
$$x+y=v.$$

16. Нека z е една функция на x и y, която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някое отворено точково множество G, което не съдържа точки от оста y. Да се направи смяна на независимите променливи в уравнението

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=n^2 z$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=u,$$
$$\frac{y}{x}=v.$$

17. Нека z е една функция на x и y, която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някое отворено точково множество G, което не съдържа точки от оста y. Да се направи смяна на независимите променливи в уравнението

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=u,$$
$$y=uv.$$

18. Нека z е една функция на x и y, която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някое отворено точково множество G, което не съдържа точки от оста x. Да се направи смяна на независимите променливи в уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+2(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z=0$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=uv,$$
$$y=\frac{1}{v}.$$

Отговор.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2uv^2\frac{\partial z}{\partial y}+2(v-v^3)\frac{\partial z}{\partial v}+u^2v^2z=0.$$

19. Нека

$$x_0=\rho_0\cos\theta_0,$$
$$y_0=\rho_0\sin\theta_0,$$
$$x_0^2+y_0^2\neq 0$$

и нека z е функция на x и y, която притежава непрекъснати първи частни производни в някоя околност на точката (x_0, y_0). Да се направи смяна на независимите променливи в израза

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=\rho\cos\theta,$$
$$y=\rho\sin\theta,$$

като се преобразува z във функция на ρ и θ, дефинирана в достатъчно малка околност на точката (θ_0, ρ_0).

Отговор.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2.$$

20. Нека

$$x_0=\rho\cos\theta_0,$$
$$y_0=\rho_0\sin\theta_0,$$
$$x_0^2+y_0^2\neq 0$$

и нека z е една функция на x и y, която притежава непрекъснати частни производни от първи ред в някоя околност на точката (x_0, y_0). Да се направи смяна на независимите променливи в израза

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=\rho\cos\theta,$$
$$y=\rho\sin\theta,$$

като се преобразува z във функция на ρ и θ, дефинирана в достатъчно малка околност на точката (θ_0, ρ_0).

Отговор.

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=0.$$

21. Нека

$$x_0=\rho_0\cos\theta_0,$$
$$y_0=\rho\sin\theta_0,$$
$$x_0^2+y_0^2\neq 0$$

и нека z е една функция на x и y, която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някоя околност на точката (x_0, y_0). Да се направи смяна на независимите променливи в уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=\rho\cos\theta,$$
$$y=\rho\sin\theta,$$

като се преобразува z във функция на ρ и θ, дефинирана в достатъчно малка околност на точката (θ_0, ρ_0).

Отговор.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}=0.$$

22. Нека

$$u_0=x_0^2+y_0^2,$$
$$v_0=x_0^2-y_0^2,$$
$$w_0=2e^{z_0},$$
$$x_0\neq 0,\ y\neq 0$$

и нека функцията $z=z(x, y)$ притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някоя околност на точката (x_0, y_0) и да приема стойност z_0 при $x=x_0$ и $y=y_0$. При тези условия направете смяна на променливите в уравнението

$$y^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+x^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-x^2y^2e^{z}=0$$

с помощта на трансформачните формули

$$u=x^2+y^2,$$
$$v=x^2-y^2,$$
$$w=2e^{z},$$

където $w=w(u, v)$ се определя в достатъчно малка околност на точката (u_0, v_0) като непрекъсната функция на u, v, подчинена на условието $w(u_0, v_0)=w_0$.

Упътване. Покажете, че

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{w}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{1}{w}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot 2x\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{w}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{1}{w}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 2y+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot(-2y)\right).$$

23. Нека функцията $z=z(x, y)$ притежава непрекъснати частни производни до втори ред в някое отворено точково множество. Направете смяна на променливите в уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

с помощта на трансформачните формули

$$u=x+y,$$
$$v=x-y,$$
$$w=xy-z,$$

където w се разглежда като функция на u и v.

Упътване. Покажете, че

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y-\left[\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]=y-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x-\left[\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]=x-\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

Отговор.

$$1-2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0.$$

24. Нека z е функция на x и y, която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в едно отворено точково множество G, което няма общи точки с координатните оси. Да се направи смяна на променливите в уравнението

$$\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x}$$

с помощта на трансформачните формули

$$u=\frac{x}{y},$$

$$v=x,$$

$$w=xz-y,$$

където w се разглежда като функция на u и v.

Отговор.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0.$$

25. Нека z е една функция на x и y, която притежава непрекъснати частни производни до втори ред в някое отворено точково множество G, което няма общи точки с правите $x=0$, $x+y=0$. Да се направи смяна на променливите в уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

с помощта на трансформачните формули

$$u=x+y,$$

$$v=\frac{y}{x},$$

$$w=\frac{z}{x},$$

където w се разглежда като функция на u и v.

Отговор.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

СЪДЪРЖАНИЕ

Част I

Реални числа, редици от реални числа, редове от реални числа

Част II

Диференциално смятане на функции на една реална променлива

Част III

Диференциално смятане на функции на няколко независими променливи

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ V ИЗД.

Ярослав Александров Тагамлицки

Художник *Ив. Марков*
Художествен редактор *Б. Мавродинов*
Техн. редактор *Н. Минчева*
Коректор *М. Вътова*

Дадена за набор на **19. XI. 1970 г.** Подписана за печат на **25. XII. 1971 г.**
Издателски коли 27 Печатни коли 27
Издателски № 19047 Лит. група I-4 Тираж **6066** Тем. № 503
Формат 65×92/16 Цена **1,61** лв. Излязло от печат на 30. XII. 1971 г.

Държавна печатница „Александър Пъшев" — Плевен