Проф. Я. ТАГАМЛИЦКИ

ДИФЕ-РЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ

V ИЗДАНИЕ

СОФИЯ – 1971
НАУКА И ИЗКУСТВО

ПРЕДГОВОР КЪМ ЧЕТВЪРТОТО ИЗДАНИЕ

Промените в настоящото издание се отнасят главно до подробностите.

Приятен дълг ми е да изкажа най-сърдечна благодарност на моя дълбоко уважаван колега Д. Скордев, който допринесе много за подобряването на учебника.

Я. Тагамлицки

София, 30. XI. 1965 г.

ЧАСТ I

РЕАЛНИ ЧИСЛА, РЕДИЦИ ОТ РЕАЛНИ ЧИСЛА, РЕДОВЕ ОТ РЕАЛНИ ЧИСЛА

ГЛАВА I

РЕАЛНИ ЧИСЛА

В основата на диференциалното и интегралното смятане лежи понятието реално число. Ние ще смятаме, че теорията на реалните числа поне отчасти е позната (така ще смятаме, че читателят знае как реалните числа се изобразяват върху една права и пр.), но все пак ще припомним основните им свойства.

§ 1. Равенство между реални числа

1. При всеки избор на реалното число a имаме

$$a=a \qquad \text{(рефлективност).}$$

2. Ако

$$a=b \text{ и } b=c,$$

то

$$a=c \qquad \text{(транзитивност).}$$

3. Ако

$$a=b,$$

то

$$b=a \qquad \text{(симетрия).}$$

§ 2. Аритметични действия

4. На всеки две реални числа a и b е съпоставено едно реално число $a+b$ и едно реално число ab, като при това са изпълнени следните изисквания:

$$a+b=b+a,\ ab=ba \qquad \text{(комутативен закон);}$$

$$(a+b)+c=a+(b+c),\ (ab)c=a(bc) \qquad \text{(асоциативен закон);}$$

$$a(b+c)=ab+ac \qquad \text{(дистрибутивен закон).}$$

Ако $a=b$ и $c=d$, то $a+c=b+d$ и $ac=bd$.

Реалното число $a+b$ наричаме сума, а реалното число ab — произведение на двете реални числа a и b.

След като са дефинирани действията събиране и умножение за две числа, ние можем да разширим тяхната дефиниция, като пишем (по дефиниция)

$$a+b+c=(a+b)+c,$$

$$abc=(ab)c$$

и пр.

5. Уравнението $a+x=b$ има винаги поне едно решение. (По-късно ще докажем, че това уравнение има само едно решение.)

Забележка 1. Съгласно казаното по-горе уравнението $a+x=a$ има решение. Не е трудно да се покаже, че всяко решение на това уравнение удовлетворява и уравнението $b+x=b$, каквото и да бъде реалното число b. И наистина нека y е едно решение на уравнението $a+y=b$. В такъв случай

$$b+x=(a+y)+x=(y+a)+x=y+(a+x)=y+a=a+y=b.$$

Не е трудно да се убедим, че уравнението $a+x=a$ има само едно решение. И наистина нека реалното число y е също едно решение на уравнението $a+y=a$. Ние знаем обаче, че равенствата $a+x=a$ и $a+y=a$ не се нарушават, както и да изменяме a. Специално, поставяйки в първото от тези равенства $a=y$, а във второто $a=x$, получаваме $y+x=y$, $x+y=x$, т. е. $x=y$.

Така намереното единствено и независещо от a решение на уравнението $a+x=a$ се означава със символа 0 и се нарича нула.

Забележка 2. Уравнението $a+x=b$ има само едно решение. И наистина нека y е кое да е решение на уравнението $a+y=0$. В такъв случай, каквото и да бъде решението x на уравнението $a+x=b$, имаме

$$x=x+0=x+(a+y)=(x+a)+y=(a+x)+y=b+y.$$

Така намереното единствено решение на уравнението $a+x=b$ се означава обикновено със символа $b-a$ и се нарича разлика. По-специално уравнението $a+x=0$ също има едно и само едно решение. Това решение се означава със символа $-a$. Очевидно имаме

$$b-a=(b-a)+0=(b-a)+[a+(-a)]=[(b-a)+a]+(-a)=$$

$$=[a+(b-a)]+(-a)=b+(-a).$$

Забележка 3. Като вземем под внимание, че, от една страна, 0 удовлетворява уравнението $0+x=0$ (съгласно дефиницията на 0), а, от друга страна, -0 удовлетворява същото уравнение (съгласно дефиницията на -0), заключаваме с помощта на доказаната вече теорема за единственост, че $-0=0$.

Аналогично, като вземем под внимание, че както a, така и $a-0$ удовлетворяват уравнението $0+x=a$ (първото следва от дефиницията на 0 и от комутативния закон, а второто следва от дефиницията на понятието разлика), заключаваме с помощта на споменатата теорема за единственост, че $a-0=a$.

Забележка 4. Не е трудно да се види, че $-(-a)=a$. И наистина

$$-(-a)=-(-a)+0=-(-a)+[a+(-a)]=-(-a)+[(-a)+a]=$$

$$=[(-(-a))+(-a)]+a=[(-a)+(-(-a))]+a=0+a=a+0=a.$$

6. От двете зависимости $a=0$ и $a\neq0$ (четете така: a е различно от нула) е в сила едната и само едната. Измежду реалните числа има такива, които са различни от нула.

7. Когато $a\neq0$, уравнението $ax=b$ има поне едно решение.

Забележка 1. Ако $a\neq0$, всяко решение на уравнението $ax=a$ удовлетворява уравнението $bx=b$ при всеки избор на b. И наистина нека y е едно решение на уравнението $ay=b$. В такъв случай

$$bx=(ay)x=(ya)x=y(ax)=ya=ay=b.$$

Уравнението $ax=a$ има само едно решение. И наистина нека y е също решение на уравнението $ay=a$. Ако поставим $a=y$ в равенството $ax=a$ и $a=x$ в равенството $ay=a$, ще получим $yx=y$, $xy=x$, т. е. $x=y$.

Така намереното единствено и независещо от a решение на уравнението $ax=a$ се означава със символа 1 и се нарича единица.

Сега не е трудно да се види, че уравнението $ax=b$ при $a\neq0$ има само едно решение. И наистина нека y е едно решение на уравнението $ay=1$. В такъв случай, каквото и да бъде решението x на уравнението $ax=b$, ще имаме

$$x=x\,.\,1=x(ay)=(xa)y=(ax)y=by.$$

Единственото решение на уравнението $ax=b$ при $a\neq0$ се означава със символа $\frac{b}{a}$ и се нарича частно или дроб с числител b и знаменател a.

По такъв начин ние казахме какво означава символът $\frac{b}{a}$ само при $a\neq0$.

Поради това ние няма да си служим с дроби, чийто знаменател е нула.

Забележка 2. Не е трудно да се види, че при всеки избор на a имаме $a\,.\,0=0$. И наистина

$$a\,.\,0=a\,.\,0+0=a\,.\,0+[a+(-a)]=[a\,.\,0+a]+(-a)=(a\,.\,0+a\,.\,1)+(-a)=$$

$$=a(0+1)+(-a)=a(1+0)+(-a)=a\,.\,1+(-a)=a+(-a)=0.$$

Забележка 3. Ще покажем, че $1\neq0$. И наистина нека $a\neq0$ (такова число съществува съгласно условието 6). Ако допуснем, че

$1=0$, ще имаме $a=a\,.\,1=a\,.\,0=0$, което противоречи на избора на a.

Забележка 4. Ще установим, че $(-1)a=-a$. И наистина

$$(-1)a=(-1)a+0=(-1)a+[a+(-a)]=[(-1)a+a]+(-a)=$$
$$=[(-1)a+1\,.\,a]+(-a)=[(-1)+1]a+(-a)=0\,.\,a+(-a)=$$
$$=0+(-a)=-a.$$

Специално при $a=-1$ получаваме $(-1)\,.\,(-1)=-(-1)=1$.

Забележка 5. Не е трудно да се види, че

$$-(a-b)=b-a.$$

И наистина

$$-(a-b)=(-1)[a+(-b)]=(-1)a+(-1)\,(-b)=(-1)\,(-b)+(-1)a=$$
$$=-(-b)+(-a)=b+(-a)=b-a.$$

По такъв начин в съвкупността на реалните числа имаме две действия (събиране и умножение) и една зависимост (равенство), които се подчиняват на седемте условия, които са изброени в този параграф.

Дефиниция. Всяко множество от елементи, в което са дефинирани две действия и една зависимост, подчиняващи се на изброените условия в горните седем точки, се нарича поле или (комутативно) тяло.

§ 3. Сравняване на реалните числа

Част от реалните числа се наричат положителни, като при това са изпълнени следните условия:

8. Нулата не е положително число.

9. Ако $a\neq 0$, то поне едното от двете числа a и $-a$ е положително.

10. Ако a и b са положителни, то $a+b$ и ab са положителни.

11. Ако a е положително число и $a=b$, то b е положително число.

Дефиниция. Тяло, в което част от елементите са наречени положителни, като при това са изпълнени условията 8, 9, 10 и 11, се нарича наредено тяло.

Забележка 1. Числата a и $-a$ не могат да бъдат едновременно положителни, защото в противен случай съгласно условието 10 сумата $a+(-a)$ би била положителна, което противоречи на условията 8 и 11, защото $a+(-a)=0$.

Забележка 2. Елементите, които не са положителни и не са равни на нула, се наричат отрицателни.

Забележка 3. Съгласно условието 9 някое от двете числа 1 и -1 е положително, защото, както вече видяхме, $1\neq 0$. Числото -1 сигурно не е положително, защото в противен случай числото $(-1)\,(-1)=1$ също би било положително, което, както установихме, не е възможно. И така числото 1 е положително.

Ако разликата $a-b$ е положителна, то казваме, че числото a е по-голямо от b, и пишем $a>b$ и $b<a$. Символът $a\geqq b$ или (което е същото) $b\leqq a$ означава, че или $a>b$ или $a=b$.

Ако числата a и b не са равни помежду си, то разликата $a-b$ е различна от нула и следователно едното и само едното от двете числа $a-b$ и $-(a-b)=b-a$ е положително, т. е. в сила е едното и само едното от двете неравенства $a>b$, $b>a$. Това свойство се нарича трихотомия на наредбата при реалните числа.

Забележка 4. Очевидно имаме $a>0$ тогава и само тогава, когато a е положително, защото $a=a-0$.

Забележка 5. Ако $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$. И наистина не е трудно да се види, че

$$(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)$$

например по следния начин:

$$(a+c)-(b+d)=(a+c)+(-1)\,(b+d)=(a+c)+[(-1)b+(-1)d]=$$
$$=[(a+c)+(-1)b]+(-1)d=[a+(c+(-1)b)]+(-1)d=[a+((-1)b+c)]+$$
$$+(-1)d=[(a+(-b))+c]+(-1)d=(a+(-b))+$$
$$+(c+(-1)d)=(a-b)+(c-d).$$

Разликите $a-b$ и $c-d$ са обаче положителни и следователно сумата им $(a-b)+(c-d)$ е също тъй положителна. Оттук заключаваме, че разликата $(a+c)-(b+d)$ е положителна, т. е. наистина $a+c>b+d$. Разбира се, ако $a\geqq b$ и $c\geqq d$, то по същия начин се вижда, че $a+c\geqq$ $\geqq b+d$.

Аналогично може да се провери без труд, че ако

$$a>b,\ c>d,\ c>0,\ b>0,$$

то

$$ac>bd.$$

За тази цел използуваме тъждеството

$$ac-bd=(a-b)c+(c-d)b,$$

което може да се провери например така:

$$(a-b)c+(c-d)b=(a+(-1)b)c+(c+(-1)d)b=(ac+(-1)bc)+$$
$$+(cb+(-1)bd)=ac+[(-1)bc+(bc+(-1)bd)]=ac+[[(-1)bc+bc]+$$
$$+(-1)bd]=ac+[0+(-1)bd]=ac+(-1)bd=ac-bd.$$

По-нататък извършваме разсъжденията така: произведенията $(a-b)c$ и $(c-d)b$ са положителни, защото техните множители са положителни, оттук заключаваме, че сумата $(a-b)c+(c-d)b$ е също тъй положителна, т. е. и разликата $ac-bd$ е положителна и следователно $ac>bd$.

Най-сетне нека читателят сам провери следните прости свойства на неравенствата:

1) ако $a>b$, то $a+c>b+c$;

2) ако $a>b$ и $b>c$, то $a>c$;

3) ако $\lambda>0$ и $a>b$, то $\lambda a>\lambda b$;

4) ако $a>b$, то $-a<-b$

и пр.

§ 4. Абсолютна стойност

Под думите **абсолютна стойност** или **модул** на едно реално число a се разбира по-голямото* от двете числа a и $-a$. Обикновено абсолютната стойност на едно число a се означава със знака $|a|$. Очевидно, ако $a>0$, то $|a|=a$, ако $a<0$, то $|a|=-a$, и най-сетне, ако $a=0$, то $|a|=0$. Всичко това ние можем да обединим в равенството

$$|a|=\varepsilon a,$$

където $\varepsilon=1$, когато $a\geqq 0$, и $\varepsilon=-1$, когато $a<0$.

Примери

$|1|=1$; $|-1|=-(-1)=1$; $|2|=2$; $|-3|=-(-3)=3$; $|0|=0$.

Очевидно каквото и да е реалното число a, имаме $|a|\geqq 0$, а равенството $|a|=0$ е валидно тогава и само тогава, когато $a=0$.

Не е трудно да се види, че

$$|ab|=|a|\,|b|.$$

И наистина

$$|a|=\varepsilon_1 a,\quad |b|=\varepsilon_2 b,\quad |ab|=\varepsilon ab,$$

където $\varepsilon_1=\pm 1$, $\varepsilon_2=\pm 1$, $\varepsilon=\pm 1$. Оттук получаваме

$$|a|\,|b|=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon}|ab|.$$

Като вземем под внимание, че

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon}=\pm 1,$$

заключаваме, че или

$$|a|\,|b|=|ab|,$$

или

$$|a|\,|b|=-|ab|.$$

* Ако тези числа са равни помежду си, то под думите „по-голямото от тях" ще разбираме кое да е от тях.

Във втория случай обаче ще имаме $|a|\,|b|=0$, защото числото $-|ab|$ не е положително, докато произведението $|a|\,|b|$ не е отрицателно. От това следва, че поне едното от двете числа a и b е равно на нула, откъдето заключаваме, че и в този случай е валидно равенството $|a|\,|b|=|ab|$.

Аналогично се установява, че $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ при $b\neq 0$.

В бъдеще ние често ще използуваме следното неравенство:

$$|a+b|\leqq|a|+|b|.$$

Доказателството може да се извърши така: от дефиницията на понятието модул имаме

$$a\leqq|a|,\quad -a\leqq|a|,$$
$$b\leqq|b|,\quad -b\leqq|b|;$$

като съберем неравенствата, които са написани едно под друго, намираме

$$a+b\leqq|a|+|b|,\quad -(a+b)\leqq|a|+|b|,$$

т. е. по-голямото от двете числа $a+b$ и $-(a+b)$ не надминава числото $|a|+|b|$, откъдето

$$|a+b|\leqq|a|+|b|.$$

С оглед на бъдещите нужди ще докажем още и неравенството

$$|a-b|\geqq|a|-|b|.$$

За тази цел разсъждаваме така: съгласно доказаното по-горе имаме

$$|a|=|(a-b)+b|\leqq|a-b|+|b|,$$

т. е.

$$|a|-|b|\leqq|a-b|.$$

В заключение ще покажем, че неравенството

$$|x-a|<\varepsilon,$$

където ε е произволно положително, а x и a са произволни реални числа, е еквивалентно с неравенствата

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon.$$

И наистина, ако

$$|x-a|<\varepsilon,$$

то съгласно дефиницията на понятието модул имаме

$$x-a<\varepsilon,$$
$$-(x-a)<\varepsilon.$$

От първото от тези неравенства получаваме $x<a+\varepsilon$, а от второто получаваме $a-\varepsilon<x$, т. е. $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$.
Обратно, нека

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon.$$

В такъв случай от $x<a+\varepsilon$ намираме $x-a<\varepsilon$, а от $a-\varepsilon<x$ намираме $-(x-a)<\varepsilon$ и сл. по-голямото от двете числа $x-a$ и $-(x-a)$ е по-малко от ε, което значи, че

$$|x-a|<\varepsilon.$$

§ 5. Понятието цяло число и едно негово обобщение*

Множеството N от естествените числа

$$1, 2, 3, \ldots$$

е най-малкото множество от реални числа, което притежава следните три свойства:

1) N съдържа единицата;
2) ако числото n принадлежи на N, то $n+1$ също принадлежи на N;
3) ако числото n принадлежи на N и $n=m$, то числото m също принадлежи на N.

Горните думи трябва да се разбират така: множеството N се съдържа във всяко множество от реални числа, което притежава изброените три свойства.

Обобщение. Нека K е кое да е тяло. Едно множество M от елементи на K ще наричаме негово рекурентно подмножество, ако то притежава следните три свойства:

1) M съдържа всички елементи, равни на единица;
2) ако n принадлежи на M, то $n+1$ също принадлежи на M;
3) ако n принадлежи на M и $n=m$, то m също принадлежи на M.

Ясно е, че всяко тяло K притежава рекурентни подмножества. Такова е например самото множество K. За нашите цели е важно обаче, че измежду рекурентните подмножества на едно тяло винаги има едно най-малко, т. е. такова, което се съдържа във всичките останали рекурентни подмножества на това тяло. За да се убедим в това, образуваме множеството N от елементите на K, които влизат във всичките му рекурентни подмножества. Очевидно единицата влиза в N, защото съгласно условието 1) тя влиза във всичките рекурентни подмножества на K. Също е ясно, че ако n се съдържа в N, то $n+1$ също се съдържа в N, защото ако n се съдържа във всичките рекурентни подмножества на K, то съгласно условието 2) елементът $n+1$ също ще се съдържа във всичките рекурентни подмножества на K. Най-сетне,

* Добре е да се изостави този параграф при първо четене.

ако n принадлежи на всички рекурентни подмножества на K и $n=m$, то съгласно условието 3) елементът m също ще принадлежи на всички рекурентни подмножества на K.

С това показахме, че подмножеството N е рекурентно. За да се убедим, че N е най-малкото рекурентно подмножество на K, избираме кое да е друго рекурентно подмножество M. Тъй като елементите на N се съдържат във всяко рекурентно подмножество на K, то те се съдържат и в подмножеството M, т. е. N наистина се съдържа в M.

Дефиниция. Елементите на минималното рекурентно подмножество N на дадено тяло K се наричат негови естествени елементи.

С други думи, естествените елементи на едно тяло K са онези негови елементи, които се съдържат във всичките му рекурентни подмножества. Такива елементи винаги има. Такъв е например елементът 1.

Принципът за минималност на подмножеството на естествените елементи се нарича понякога принцип на математическата индукция и се формулира обикновено така: нека M е множество от естествени елементи на едно тяло K, което заедно с всеки свой елемент съдържа и равните му; ако M съдържа 1 и заедно с n винаги съдържа и $n+1$, то M съвпада с множеството N на естествените елементи на K. И наистина M е съставено от естествени елементи и следователно се съдържа в N. От друга страна, N е минималното рекурентно подмножество, т. е. то се съдържа във всяко рекурентно подмножество и следователно се съдържа в M.

Пример 1. Ще докажем, че сумата на два естествени елемента на едно тяло K е естествен елемент на това тяло. И наистина нека M е множеството на онези естествени елементи y на K, за които сумата $x+y$ е естествен елемент на K при всички естествени стойности на x. Очевидно 1 принадлежи на M, защото $x+1$ е естествен елемент. От друга страна, ако y принадлежи на M, то $y+1$ също принадлежи на M, защото елементът $x+(y+1)=(x+1)+y$ е естествен. Ако елементът y принадлежи на M и $y=z$, то елементът z също принадлежи на M, защото $x+y=x+z$ и следователно елементът $x+z$ е естествен при всеки избор на естествения елемент x. Въз основа на принципа на математическата индукция заключаваме, че M съдържа всичките естествени елементи на K.

Пример 2. Ще докажем, че произведението на два естествени елемента на едно тяло K е естествен елемент на това тяло. И наистина нека x е произволен естествен елемент на K и нека M е множеството на онези естествени елементи y на K, за които произведението $x \cdot y$ е естествен елемент. Очевидно M съдържа 1, защото елементът $x \cdot 1=x$ е естествен. От друга страна, ако y принадлежи на M, то $y+1$ също принадлежи на M, защото елементът $x(y+1)=xy+x$ е естествен.

Ако елементът y принадлежи на M и $y=z$, то елементът z също принадлежи на M, защото $xy=xz$ и следователно елементът xz е естествен. Въз основа на принципа на математическата индукция заключаваме, че M съдържа всички естествени елементи на K.

Пример 3. Ако $x \neq 1$ и елементът x е естествен в едно тяло K, то елементът $x-1$ е също тъй естествен в това тяло. И наистина нека M е множество, съставено от елементи, равни на единица, и от онези естествени елементи x на тялото K, за които $x-1$ е също естествен елемент. Ако x е произволен елемент от M, то елементът $x+1$ също принадлежи на M, защото двата елемента $x+1$ и $(x+1)-1=x$ са естествени. Освен това, ако x принадлежи на M и $x=y$, то y също принадлежи на M, защото, ако елементът $x-1$ е естествен, то същото е вярно и за елемента $y-1$, тъй като $x-1=y-1$; ако ли пък елементът $x-1$ не е естествен, то $x=1$, защото x принадлежи на M, а следователно и $y-1$. Като приложим принципа на математическата индукция, заключаваме, че M съдържа всичките естествени елементи на K.

Досега не предполагахме, че разглежданото тяло е наредено. Сега ние ще установим някои свойства на естествените елементи в наредените тела.

Нека K е произволно наредено тяло. В такъв случай всичките му естествени елементи x удовлетворяват неравенството $x \geqq 1$. И наистина нека M е множеството на онези естествени елементи, за които това неравенство е изпълнено. В такъв случай M съдържа 1 и ако съдържа x, то съдържа и $x+1$, защото $x+1>x \geqq 1$. Освен това, ако x принадлежи на M и $x=y$, то y принадлежи на M, защото $y \geqq 1$. Оттук заключаваме, че M съдържа всичките естествени елементи на K.

С оглед на нашите нужди ще докажем следното: ако x и n са два естествени елемента и $x>n$, то $x-n$ е естествен елемент. И наистина нека M е множеството на онези естествени елементи n, за които твърдението е вярно. Очевидно M съдържа 1, защото, ако $x>1$, то $x \neq 1$ и следователно съгласно доказаното в пример 3 елементът $x-1$ е естествен. Сега ще докажем, че ако n принадлежи на M, то $n+1$ също принадлежи на M. И наистина нека x е естествен елемент и $x>n+1$. В такъв случай ще имаме $x-1>n$. Обаче $x \neq 1$, защото в противен случай ще имаме $0>n$, което не е възможно, защото n е естествен елемент. Това ни дава възможност да твърдим, че $x-1$ е естествен елемент, а следователно $(x-1)-n$ е също естествен елемент, защото n принадлежи на M и $x-1>n$. От друга страна, $x-(n+1)=(x-1)-n$ и следователно $x-(n+1)$ е също тъй естествен елемент. По такъв начин ние доказахме, че $n+1$ принадлежи на M. Най-сетне нека n принадлежи на M и $n=m$. В такъв случай m също принадлежи на M, защото $x-n=x-m$. От това обаче следва въз основа на принципа на математическата индукция, че множеството M съдържа всички естествени елементи, с което интересуващото ни твърдение е доказано.

Следствие. Неравенствата

$$0<x-n<1$$

не могат да се удовлетворят при никой избор на естествените елементи x и n. И наистина от неравенството $0<x-n$ следва, че елементът $x-n$ е естествен и следователно $x-n \geqq 1$.

Дефиниция. Един елемент p на едно тяло се нарича *цял*, когато той може да се представи като разлика на два естествени елемента на това тяло.

Не е трудно да се види, че сумата, разликата и произведението на два цели елемента на едно тяло е също цял елемент на тялото. Това може да се установи, като се вземе под внимание, че от равенствата

$$p_1=n_1-m_1,$$
$$p_2=n_2-m_2$$

следват равенствата

$$p_1+p_2=(n_1+n_2)-(m_1+m_2),$$
$$p_1-p_2=(n_1+m_2)-(m_1+n_2),$$
$$p_1p_2=(n_1n_2+m_1m_2)-(n_1m_2+n_2m_1).$$

Всеки естествен елемент m е цял, както това се вижда от равенството $m=(m+1)-1$. Специално, ако тялото е наредено, то неговите естествени елементи са и положителни (ние дори видяхме, че те не са по-малки от 1). Сега ще установим, че обратното е също вярно, т. е. всеки цял и положителен елемент на едно наредено тяло е естествен. И наистина нека m е цял и положителен елемент. Тъй като m е цял елемент, ние можем да го представим във вида $m=x-n$, където x и n са естествени елементи. От друга страна, елементът m е положителен и следователно $x>n$. По такъв начин ние можем да приложим доказаното по-горе, според което $x-n$ е естествен елемент.

От изложеното се вижда, че няма цял елемент p, който да удовлетворява неравенствата

$$0<p<1.$$

Ние ще използуваме впоследствие тази бележка.

Дефиниция. Един елемент на едно тяло се нарича *рационален*, когато той може да се представи като отношение на два цели елемента на тялото. Елементите, които не са рационални, се наричат *ирационални*.

Лесно е да се види, че сумата, разликата, произведението и частното на два рационални елемента на едно тяло е също тъй рационален елемент на това тяло.

§ 6. Принцип за непрекъснатост на множеството на реалните числа

Едно множество M от числа се нарича ограничено отгоре, когато съществува число l, което удовлетворява неравенството $x \leqq l$ при всеки избор на x от M. Такова число l се нарича горна граница на множеството M. И така *едно число l се нарича горна граница на едно множество M, когато при всяко x от M е изпълнено неравенството $x \leqq l$*. Аналогично се дефинира понятието долна граница на едно множество от числа.*

Като пример нека разгледаме множеството на дробите

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots$$

Това множество е ограничено отгоре (числото 2 е например една негова горна граница). Това множество е ограничено и отдолу (чис-

* По-точно едно число m се нарича долна граница на едно множество M от числа, ако при всяко x от M е изпълнено неравенството $m \leqq x$.

лото—1 е една негова долна граница). Едно множество от числа ще наричаме ограничено, когато то е ограничено и отгоре, и отдолу.

Разбира се, ако едно множество е ограничено отгоре, то притежава безбройно много горни граници, защото всяко число, което е по-голямо от една негова горна граница, е също тъй негова горна граница. **Най-малката от горните граници на едно ограничено отгоре множество от числа се нарича негова точна горна граница.** Аналогично се дефинира и понятието точна долна граница на едно ограничено отдолу множество от числа.*

Едно ограничено отдолу множество от числа съвсем не е задължено да съдържа най-малък член. Така множеството на съществено положителните числа (т. е. множеството на числата, които са по-големи от нула; нулата не се причислява към това множество) е ограничено отдолу. Нулата например е една негова долна граница. В това множество обаче няма най-малък член (към разглежданото множество са причислени произволно близки до нулата числа, но числото нула не е причислено). Разбира се, аналогична забележка се отнася и за ограничени отгоре множества от числа.

Принцип за непрекъснатост. Всяко ограничено отгоре множество от реални числа притежава точна горна граница.

От принципа за непрекъснатост следва, разбира се, че всяко ограничено отдолу множество от реални числа притежава точна долна граница. И наистина нека множеството M на числата x е ограничено отдолу. В такъв случай множеството N на числата $-x$ е ограничено отгоре. Нека l е точната горна граница на множеството N. Не е трудно да се убедим, че в такъв случай $-l$ е точната долна граница на множеството M. Подробностите на доказателството ще предоставим на читателя.

Принципът за непрекъснатост съществено отличава тялото на реалните числа от тялото на рационалните числа. Ще дадем тук един пример, от който ще се види, че принципът за непрекъснатост не е валиден в тялото на рационалните числа. Този пример е предназначен, разбира се, за читатели, които са запознати поне с основните неща от теорията на рационалните числа.

Разглеждаме множеството M на онези рационални неотрицателни числа x, които удовлетворяват неравенството $x^2 \leq 2$. Множеството M е ограничено отгоре, защото никой негов член не надминава например числото 2. И наистина, ако допуснем, че при някое x от M имаме $x>2$, то ще имаме $x^2>4$, което не е вярно. Въпреки това ние ще покажем, че не съществува рационално число, което да е точна горна граница на множеството M. Доказателството ще извършим от противното. Нека рационалното число l да е точната горна граница на множеството M. Не е трудно да се убедим, че не можем да имаме $l^2<2$. И наистина в противен случай неотрицателното рационално число

$$r=\frac{4+3l}{3+2l}$$

удовлетворява неравенството

$$2-r^2=2-\left(\frac{4+3l}{3+2l}\right)^2=\frac{2-l^2}{(3+2l)^2}>0$$

и следователно принадлежи на M. От друга страна,

$$r-l=\frac{4+3l}{3+2l}-l=\frac{2(2-l^2)}{3+2l}>0, \text{ т. е. } r>l,$$

което противоречи на предположението, че l е една горна граница на M.

Също така не е трудно да се види, че не можем да имаме $l^2>2$. Да допуснем противното. Числото

$$m=\frac{4+3l}{3+2l}$$

е също една горна граница на множеството M. За да се убедим в това, разглеждаме неравенствата

$$m-x=\frac{4+3l}{3+2l}-x=\left(\frac{4+3l}{3+2l}-\frac{4+3x}{3+2x}\right)+\left(\frac{4+3x}{3+2x}-x\right)=$$

$$=\frac{l-x}{(3+2l)(3+2x)}+\frac{2(2-x^2)}{3+2x}\geq 0,$$

които са валидни при всички стойности на x от M. Така конструираната горна граница m е обаче по-малка от l, защото

$$l-m=l-\frac{4+3l}{3+2l}=\frac{2(l^2-2)}{3+2l}>0,$$

нещо, което противоречи на предположението, че l е най-малката горна граница на M. И така от изложеното досега е ясно, че

(1) $$l^2=2.$$

Нашата цел ще бъде постигната, ако успеем да покажем, че няма рационално число l, чийто квадрат е равен на 2. Ние ще извършим доказателството от противното. Нека p и q са две цели числа, за които да имаме

$$l=\frac{p}{q},\quad q\neq 0.$$

* Точна долна граница на едно множество от числа се нарича най-голямата му долна граница.

Без да ограничаваме общността, ние можем да приемем, че дробта $\frac{p}{q}$ е несъкратима. От равенството $l^2=2$ получаваме

$$p^2=2q^2.$$

Това равенство ни учи, че p^2, а следователно и p е четно число. И така ние можем да пишем

$$p=2r,$$

където r е цяло число. Оттук получаваме

$$4r^2=2q^2, \text{ т. е. } 2r^2=q^2.$$

Последното равенство ни учи, че числото q^2, а следователно и числото q е четно. И така двете числа p и q са четни, което противоречи на допускането, че дробта $\frac{p}{q}$ е несъкратима.

Обобщение. Наредено тяло, в което е валиден принципът за непрекъснатост, се нарича непрекъснато наредено тяло.

От направените по-горе разсъждения се вижда, че ако в някое наредено тяло е валиден принципът за непрекъснатост, то в това тяло сигурно има елементи, които не са рационални, т. е. които не могат да се представят като частно на два цели елемента. Такива елементи ще наричаме ирационални. Такъв е например елементът l, който удовлетворява условието (1). Както вече споменахме, от разсъжденията, които ние направихме, се вижда, че такъв елемент има във всяко непрекъснато наредено тяло.

Досега ние се ползувахме (макар и привидно) от познанията, които читателят има за реалните числа. По-нататък с изключение на следващите два параграфа това вече няма да бъде нужно. От този момент ние ще застанем на следната основа: ще си мислим едно произволно наредено непрекъснато тяло (от каквото естество и да бъдат неговите елементи); елементите на това тяло ние ще наричаме реални числа. По-нататък ще градим всичко, като изхождаме от едно такова тяло (впрочем, разбира се, не е необходимо да се обвързваме с никое конкретно тяло). След като застанем на такава основа, понятията като нула, единица, положително число и пр. вече са дефинирани за нас, а като вземем под внимание § 5, ще бъдат дефинирани и понятията цяло число, рационално число и пр.

Тук обаче се налага да поставим следния принципен въпрос: съществуват ли въобще непрекъснати наредени тела? Нека припомним, че тялото на рационалните числа не е непрекъснато. В следващите два параграфа ще покажем два примера на непрекъснати наредени тела, като изхождаме от предположението, че теорията на рационалните тела е изградена по някакъв друг път. Елементите на тези две тела ще изглеждат твърде различни. Ние обаче и в двата случая ще ги наричаме реални числа съгласно дадената по-горе дефиниция. Нека

най-сетне изрично подчертаем, че следващите два параграфа не трябва да се разглеждат като част от тази книга (и следователно те могат въобще да не се четат). Тази книга си поставя за задача само да покаже какво следва от предположението, че съществува поне едно непрекъснато наредено тяло. За да се направи това, не е необходимо предварително да бъде изградена теорията на рационалните числа.

§ 7. Съществуване на непрекъснати наредени тела като следствие от съществуването на тялото на рационалните числа (метода на Г. Кантор)*

В този параграф ще предполагаме, че теорията на рационалните числа е изградена независимо от това, което ние излагахме досега. Методата, с която ще си служим, произхожда от Кантор (Cantor).

Казваме, че е дадена една безкрайна редица от рационални числа

$$(1) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

ако на всяко цяло положително число n е съпоставено по едно рационално число a_n. Ще казваме, че редицата (1) е фундаментална, ако при всеки избор на положителното рационално число ε е изпълнено неравенството

$$(2) \qquad |a_p-a_q|<\varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на p и q. Фундаментални редици съществуват. Такава е например редицата

$$r, r, r, \ldots,$$

каквото и да бъде рационалното число r.

Всяка фундаментална редица е ограничена. И наистина нека редицата (1) е фундаментална и нека ε е едно положително рационално число. Неравенството (2) ни дава

$$a_q-\varepsilon<a_p<a_q+\varepsilon.$$

Да фиксираме едно достатъчно голямо цяло число q по такъв начин, че при $p>q$ да е изпълнено условието (2). В такъв случай най-голямото от числата

$$a_1, a_2, \ldots, a_q, a_q+\varepsilon$$

е една горна граница на редицата (1), а най-малкото от числата

$$a_1, a_2, \ldots, a_q, a_q-\varepsilon$$

е една нейна долна граница. Нека читателят сам докаже това.

Казваме, че две редици

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

* Добре е този параграф да се изостави при първо четене.

са конфинални помежду си, ако при всеки избор на положителното рационално число ε е изпълнено неравенството

$$|b_n-a_n|<\varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на n.

Не е трудно да се види, че ако едната от две конфинални помежду си редици е фундаментална, то и другата е фундаментална. Читателят лесно сам ще докаже това.

Множеството на всичките редици, които са конфинални с дадена фундаментална редица, се нарича Канторов клас, определен от тази редица. Лесно се вижда, че всичките редици от един Канторов клас са конфинални помежду си.

Равенство на два Канторови класа. Нека α и β са два Канторови класа. Ще пишем $\alpha=\beta$, ако поне една редица от α е конфинална с някоя редица от β. Не е трудно да се види, че в такъв случай α и β са съставени от едни и същи редици. И наистина нека класът α е определен от редицата

(3) $$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$

а класът β е определен от редицата

(4) $$b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots$$

По-нататък нека редицата

$$a_1',\ a_2',\ a_3', \ldots$$

от α е конфинална с редицата

$$b_1',\ b_2',\ b_3', \ldots$$

от β и най-сетне нека

(5) $$a_1'',\ a_2'',\ a_3'', \ldots$$

е произволна редица от α и

(6) $$b_1'',\ b_2'',\ b_3'', \ldots$$

е произволна редица от β. В такъв случай при всеки избор на положителното число ε при достатъчно големи стойности на n ще имаме

$$|a_n''-a_n|<\frac{\varepsilon}{4} \qquad |b_n''-b_n|<\frac{\varepsilon}{4}$$

$$|a_n'-a_n|<\frac{\varepsilon}{4} \qquad |b_n'-b_n|<\frac{\varepsilon}{4}$$

$$|a_n'-b_n'|<\frac{\varepsilon}{4}$$

и следователно

$$|a_n''-b_n|\leqq|a_n''-a_n|+|a_n-a_n'|+|a_n'-b_n'|+|b_n'-b_n|<\varepsilon$$
$$|b_n''-a_n|\leqq|b_n''-b_n|+|b_n-b_n'|+|b_n'-a_n'|+|a_n'-a_n|<\varepsilon,$$

т. е. редицата (5) принадлежи на β, защото е конфинална с редицата (4), а редицата (6) принадлежи на α, защото е конфинална с редицата (3).

Събиране. Нека α и β са два Канторови класа. Избираме една редица

(7) $$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$

от α и една редица

(8) $$b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots$$

от β. Образуваме редицата

(9) $$a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3, \ldots$$

Не е трудно да се види, че тази редица е фундаментална. И наистина каквото и да бъде положителното рационално число ε, ще имаме

$$|a_p-a_q|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |b_p-b_q|<\frac{\varepsilon}{2}$$

при достатъчно големи стойности на p и q и следователно

$$|(a_p+b_p)-(a_q+b_q)|\leqq|a_p-a_q|+|b_p-b_q|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Означаваме с γ Канторовия клас, който съдържа редицата (9). Така дефинираният клас γ не зависи от начина, по който са избрани редиците (7) и (8) съответно в α и β. И наистина нека

$$a_1',\ a_2',\ a_3', \ldots$$

е коя да е редица от α и

$$b_1',\ b_2',\ b_3', \ldots$$

е коя да е редица от β. Разглеждаме редицата

(10) $$a_1'+b_1',\ a_2'+b_2',\ a_3'+b_3', \ldots$$

и означаваме с γ' Канторовия клас, който съдържа тази редица. Избираме едно произволно положително рационално число ε. В такъв случай при достатъчно големи стойности на n ще имаме

$$|a_n-a_n'|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|b_n-b_n'|<\frac{\varepsilon}{2}$$

и следователно

$$|(a_n+b_n)-(a_n'+b_n')|\leqq|a_n-a_n'|+|b_n-b_n'|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

което показва, че двете редици (9) и (10) са конфинални помежду си, откъдето следва, както знаем, че двата класа γ и γ' са съставени от едни и същи редици.

По дефиниция полагаме

$$\gamma=\alpha+\beta.$$

Като изхождаме от тази дефиниция на понятието сума, не е трудно да се убедим, че Канторовият клас ξ, който е съставен от редиците, конфинални с редицата

$$0,\ 0,\ 0, \ldots$$

удовлетворява уравнението

$$\alpha+\xi=\alpha$$

при всеки избор на Канторовия клас α. Съгласно с общите дефиниции на § 1 ние ще означаваме този клас със символа 0 и ще го наричаме нулев Канторов клас или по-кратко — нула. Очевидно една редица

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3, \ldots$$

принадлежи на нулевия Канторов клас тогава и само тогава, когато при всеки избор на положителното число ε е изпълнено неравенството

$$|\xi_n|<\varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на n.

Умножение. Нека α и β са два Канторови класа. Избираме една редица

(11) $$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$

от α и една редица

(12) $$b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots$$

от β. Редицата

(13) $$a_1b_1,\ a_2b_2,\ a_3b_3, \ldots$$

е фундаментална (нека читателят сам докаже това). Означаваме с γ Канторовия клас от редиците, които са конфинални с редицата (13). Този клас не зависи от спомагателните редици (11) и (12). Доказателството предоставяме на читателя. По дефиниция полагаме

$$\gamma=\alpha\beta.$$

Относно така дефинираните понятия равенство, събиране и умножение множеството на всичките Канторови класове представлява едно комутативно тяло. Проверката, която не е свързана с принципиални трудности, но изисква търпение и хартия, ще предоставим на трудолюбивия читател.

Наредба на Канторовите класове. Нека α е един Канторов клас. Ще наричаме този клас положителен, ако поне за една негова редица

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$

може да се намери такова положително рационално число ε_0, че да имаме

(14) $$a_n\geqq\varepsilon_0$$

за всички достатъчно големи стойности на n. В такъв случай и при всеки друг избор на редицата

$$a_1',\ a_2',\ a_3', \ldots$$

от α съществува положително число η, за което е изпълнено неравенството

$$a'_n\geqq\eta$$

при всички достатъчно големи стойности на n. За да се убедим в това, достатъчно е да положим $\eta=\frac{\varepsilon_0}{2}$. И наистина при достатъчно големи стойности на n имаме

$$|a_n-a'_n|<\frac{\varepsilon_0}{2}$$

и следователно

$$a_n'=a_n+(a_n'-a_n)\geqq\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Не е трудно да се покаже, че множеството от така дефинираните положителни класове удовлетворява условията 8, 9, 10 и 11 на § 3. Нека читателят сам провери това.

Ще покажем, че за да принадлежи една редица

(15) $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

към неотрицателен клас α (т. е. към клас, който е или положителен, или нула), е необходимо и достатъчно при всеки избор на положителното число ε да бъде изпълнено неравенството

(16) $$a_n>-\varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на n. И наистина, ако редицата (15) принадлежи към положителен клас, то за достатъчно големи стойности на n е изпълнено дори неравенството (14), където ε_0 е избрано по подходящ начин; ако пък (15) принадлежи към нулевия клас, то при всеки избор на положителното рационално число ε е изпълнено неравенството $|a_n|<\varepsilon$, а още повече е изпълнено и условието (16) за достатъчно големи стойности на n. И така интересуващото ни условие е необходимо, за да принадлежи редицата (15) към неотрицателен клас. Ще покажем, че условието е достатъчно. За тази цел да допуснем, че редицата (15) не принадлежи към положителен клас. Това значи, че при всеки избор на положителното рационално число ε неравенството

$$a_n\geqq\frac{\varepsilon}{2}$$

се нарушава за безбройно много стойности на m. Да означим тези стойности с

$$m_1, m_2, m_3, \ldots,$$

т. е.

$$a_{m_k} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } k = 1, 2, \ldots$$

От друга страна, ако n и k са достатъчно големи, то

$$|a_n - a_{m_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и следователно

$$a_n = a_{m_k} + (a_n - a_{m_k}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

което заедно с (16) дава

$$|a_n| < \varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на n, т. е. при тези условия редицата (15) принадлежи към нулевия Канторов клас. С това достатъчността е установена.

От доказаното се вижда следното. Нека α и β са два Канторови класа; нека

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

е една редица от α и

$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

е една редица от β. За да имаме

$$\alpha \leqq \beta,$$

т. е. за да бъде класът $\beta - \alpha$ неотрицателен, е необходимо и достатъчно при всеки избор на положителното рационално число ε да имаме

$$b_n - a_n > -\varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на n. Доказателството предоставяме и този път на читателя.

След всичко изложено дотук ще покажем, че наредeното тяло на Канторовите класове е валиден принципът за непрекъснатост. За тази цел разглеждаме едно ограничено отгоре множество M от Канторови класове ξ и означаваме с α една негова горна граница.

Ще казваме, че едно рационално число q е дясно, ако при всеки избор на положителното рационално число ε и при всеки избор на редицата

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

която принадлежи на някой клас от M, е изпълнено неравенството

$$x_n \leqq q + \varepsilon$$

за всички достатъчно големи стойности на n. Рационално число, което не е дясно, ще наричаме ляво.

Ще покажем, че съществуват десни числа. И наистина нека q е една горна граница на една редица

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

от α, нека ξ е един Канторов клас от M и нека

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

е една редица от ξ. В такъв случай имаме $\xi \leqq \alpha$ и следователно при всеки избор на положителното рационално число ε ще имаме

$$a_n - x_n > -\varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на n. Оттук получаваме

$$x_n < q + \varepsilon,$$

т. е. числото q е дясно.

Ще покажем, че съществуват леви числа. И наистина нека

(17) $$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

е редица от някой клас ξ от M. Означаваме с r една долна граница на редицата (17). В такъв случай при всички стойности на n имаме

$$r \leqq x_n$$

и следователно, ако $p < r$, то неравенството

$$x_n \leqq p + \varepsilon$$

сигурно е нарушено при

$$0 < \varepsilon < r - p,$$

т. е. числото p не е дясно. С това е показано съществуването на леви числа.

С оглед на това, което ще следва, ще отбележим, че левите числа са винаги по-малки от десните. И наистина от дефиницията на понятието дясно число се вижда веднага, че число, което е по-голямо от едно дясно число, е също тъй дясно.

Нека q_1 е едно дясно число и p_1 е едно ляво число. Разглеждаме числото $\frac{p_1+q_1}{2}$. Ако това число е дясно, полагаме

$$p_2 = p_1,$$
$$q_2 = \frac{p_1+q_1}{2},$$

ако пък е ляво, полагаме

$$p_2 = \frac{p_1+q_1}{2},$$
$$q_2 = q_1.$$

И в двата случая числото p_2 е ляво, числото q_2 е дясно и освен това са изпълнени условията

$$p_1 \leqq p_2 < q_2 \leqq q_1,$$
$$q_2 - p_2 = \frac{q_1 - p_1}{2}.$$

Като използуваме числото $\frac{p_2+q_2}{2}$ и приложим още веднъж горните разсъждения, добиваме възможност да дефинираме едно ляво число p_3 и едно дясно число q_3 по такъв начин, че да имаме

$$p_2 \leqq p_3 < q_3 \leqq q_2,$$
$$q_3 - p_3 = \frac{q_2 - p_2}{2}.$$

Този процес продължаваме неограничено. По този начин получаваме редица от леви числа

(18) $$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

и редица от десни числа

(19) $$q_1, q_2, q_3, \ldots,$$

които удовлетворяват условията

$$p_n \leqq p_{n+1} < q_{n+1} \leqq q_n,$$
$$q_{n+1} - p_{n+1} = \frac{q_n - p_n}{2} = \frac{q_1 - p_1}{2^n}.$$

Ще покажем, че редицата (18) е фундаментална. И наистина при всички цели положителни стойности на n и m имаме

$$0 \leqq p_{n+m} - p_n = (p_{n+m} - p_{n+m-1}) + (p_{n+m-1} - p_{n+m-2}) + \ldots + (p_{n+1} - p_n) \leqq$$
$$\leqq (q_{n+m-1} - p_{n+m-1}) + (q_{n+m-2} - p_{n+m-2}) + \ldots + (q_n - p_n) =$$
$$= \frac{q_1 - p_1}{2^{n+m-2}} + \frac{q_1 - p_1}{2^{n+m-3}} + \ldots + \frac{q_1 - p_1}{2^{n-1}} =$$
$$= \frac{q_1 - p_1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-2}} + \ldots + 1\right) = \frac{q_1 - p_1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^m}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{q_1 - p_1}{2^{n-2}},$$

т. е. както и да избираме рационалното число ε, ще имаме при всички достатъчно големи стойности на n неравенството

$$0 \leqq p_{n+m} - p_n < \varepsilon,$$

каквото и да бъде цялото положително число m. И така редицата (18) е наистина фундаментална.

Да означим с δ Канторовия клас на редиците, които са конфинални с редицата (18). Този клас съдържа и редицата (19), защото

$$q_n - p_n = \frac{q_1 - p_1}{2^{n-1}}$$

и следователно редицата (19) е конфинална с редицата (18).

Ще покажем, че Канторовият клас δ е една горна граница на множеството M. И наистина нека ξ е един клас от M и

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

е една редица от ξ. Избираме едно положително рационално число ε. Като вземем под внимание, че редицата (19) е фундаментална (тъй като тя е конфинална с една фундаментална редица), получаваме при всички достатъчно големи стойности на n и m неравенството

(20) $$|q_n - q_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Фиксираме n. В такъв случай при достатъчно големи стойности на m ще имаме

(21) $$x_m \leqq q_n + \frac{\varepsilon}{2},$$

защото числото q_n е дясно. От така получените неравенства (20) и (21) получаваме

$$q_m - x_m = (q_n - x_m) + (q_m - q_n) \geqq -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = -\varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на m, т. е.

$$\xi \leqq \delta,$$

с което е показано, че δ е една горна граница на M.

Ще покажем, че δ е т о ч н а т а горна граница на множеството M, т. е. най-малката от всичките му горни граници. И наистина нека γ е един Канторов клас, за който $\gamma < \delta$, и нека

(22) $$y_1, y_2, y_3, \ldots$$

е една редица от γ. В такъв случай съществува такова положително число ε_1, че при всички достатъчно големи стойности на n да имаме

(23) $$p_n - y_n \geqq \varepsilon_1.$$

Фиксираме едно толкова голямо цяло число n, че при достатъчно големи стойности на m да имаме

$$|y_n - y_m| < \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Това е възможно, защото редицата (22) е фундаментална. В такъв случай ще имаме

$$y_n - y_m > -\frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{24}$$

От друга страна, числото p_n е ляво, т. е. при някое положително число ε_2 имаме поне един клас ξ от M, който съдържа такава редица

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, \tag{25}$$

че неравенството

$$x_s \leq p_n + \varepsilon_2$$

се нарушава за безбройно много стойности на s, т. е. съществува неограничена редица от цели положителни числа

$$s_1, s_2, s_3, \ldots,$$

за които

$$x_{s_k} > p_n + \varepsilon_2 \text{ при } k=1, 2, 3, \ldots \tag{26}$$

Да вземем сега под внимание, че редицата (25) е фундаментална. Това дава възможност да твърдим, че при всички достатъчно големи стойности на m и k имаме

$$|x_m - x_{s_k}| < \frac{\varepsilon_2}{2},$$

следователно

$$x_m - x_{s_k} > -\frac{\varepsilon_2}{2}. \tag{27}$$

Събираме почленно неравенствата (23), (24), (26) и (27). Това ни дава

$$x_m - y_m > \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2}$$

при всички достатъчно големи стойности на m, т. е. $\xi > \gamma$, което показва, че γ не е горна граница на M. И така ξ е най-малката горна граница на M. По такъв начин установихме, че в тялото на Канторовите класове е валиден принципът за непрекъснатост.

И така, като използувахме теорията на рационалните числа, ние можахме да дадем пример на едно непрекъснато наредено тяло. В съгласие с това, което казахме в предния параграф, занапред под реални числа бихме могли да разбираме Канторовите класове.

§ 8. Съществуване на непрекъснати наредени тела като следствие от съществуването на тялото на рационалните числа (метода на Р. Дедекинд)*

В този параграф, както и в предшествуващия, ще предполагаме, че теорията на рационалните числа е изградена независимо от това, което излагахме досега. Методата, с която ще си служим този път, произхожда от Дедекинд (Dedekind).

Дефиниция. Сечение ще наричаме всяка система от две множества A и B от рационални числа, които имат следните свойства:

1. Никое от двете множества A и B не е празно (т. е. във всяко едно от тях има рационални числа).

2. Никое рационално число не принадлежи едновременно на двете множества A и B.

3. Всяко рационално число, с евентуално изключение само на едно, е причислено към едното от двете множества A и B.

4. В множеството A няма най-голямо рационално число, а в множеството B няма най-малко рационално число.

5. Ако a принадлежи на A и $a_1 \leq a$, то a_1 принадлежи на A; ако b принадлежи на B и $b \leq b_1$, то b_1 принадлежи на B.

Двете множества A и B, които образуват сечението, ще наричаме класове; множеството A ще наричаме ляв клас, а множеството B — десен клас. Сечението, чийто ляв клас е A, а десен клас е B, ще означаваме със символа (A, B).

Пример 1. Означаваме с A множеството на числата, които са съществено по-малки от 2, а с B — множеството на числата, които са съществено по-големи от 2. Не е трудно да се убедим, че двете множества A и B удовлетворяват изброените по-горе условия, т. е. образуват сечение.

Пример 2. Означаваме с A множеството, съставено от всичките отрицателни рационални числа и от онези неотрицателни рационални числа, чийто квадрат не надминава 2. С B означаваме множеството на останалите рационални числа. Не е трудно да се убедим, че така дефинираните множества A и B образуват сечение.

В първия от двата примера числото 2 (и само това рационално число) не е причислено към никой от класовете. Напротив, във втория пример всяко рационално число влиза в някой от класовете.

Полезно е да отбележим, че ако (A, B) е едно сечение, то, както и да избираме положителното рационално число ε, винаги може да се намери число a от A и число b от B по такъв начин, че да имаме $b-a<\varepsilon$. И наистина нека a_1 е число от A и b_1 е число от B. Разглеждаме двете числа

$$a_1 + \frac{b_1-a_1}{3} \text{ и } a_1 + 2\frac{b_1-a_1}{3}.$$

* Добре е този параграф да се изостави при първо четене.

От тези две числа поне едното се съдържа в някое от двете множества A и B. Означаваме това число с p. Очевидно имаме

$$p-a_1\leq\frac{2}{3}(b_1-a_1),$$

$$b_1-p\leq\frac{2}{3}(b_1-a_1).$$

Ако p принадлежи на A, полагаме $a_2=p$ и $b_2=b_1$. Ако пък p принадлежи на B, полагаме $a_2=a_1$ и $b_2=p$. По такъв начин получаваме число a_2 от A и число b_2 от B, за които е изпълнено неравенството

$$b_2-a_2\leq\frac{2}{3}(b_1-a_1).$$

След като сме дефинирали a_2 и b_2, по същия начин намираме число a_3 от A и число b_3 от B, за които

$$b_3-a_3\leq\frac{2}{3}(b_2-a_2)$$

и следователно

$$b_3-a_3\leq\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(b_1-a_1\right).$$

Като повторим n пъти тези разсъждения, получаваме число a_n от A и число b_n от B, които удовлетворяват условието

$$b_n-a_n\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(b_1-a_1\right).$$

След всичко извършено, каквото и да бъде положителното рационално число ε, достатъчно е да изберем n толкова голямо, че да имаме

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(b_1-a_1\right)<\varepsilon,$$

за да имаме и

$$b_n-a_n<\varepsilon.$$

За тази цел означаваме с r и s две цели положителни числа, за които

$$\frac{r}{s}=\frac{b_1-a_1}{\varepsilon},$$

и полагаме например

$$n=2r.$$

В такъв случай

$$\frac{n}{2}\geq\frac{b_1-a_1}{\varepsilon}$$

и следователно

$$\frac{b_1-a_1}{\varepsilon}<1+\frac{n-1}{2}\leq\left(1+\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$

което ни дава

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(b_1-a_1\right)<\varepsilon.$$

Равенство на сечения. Две сечения се наричат равни, ако левите им класове са съставени от едни и същи рационални числа.

Събиране. Нека са дадени две сечения (A, B) и (C, D). Означаваме с P множеството на онези числа p, които могат да се представят във вида $p=a+c$, където a принадлежи на A, а c принадлежи на C. След това дефинираме един клас Q по следния начин: едно число q причисляваме към Q тогава и само тогава, когато то е по-голямо от някое число, което не принадлежи на P. Не е трудно да се убедим, че множествата P и Q образуват сечение. Проверката предоставяме на читателя. Сечението (P, Q) се нарича сума на двете сечения (A, B) и (C, D), което символично се записва така:

$$(P, Q)=(A, B)+(C, D).$$

Умножение. Нека са дадени две сечения (A, B) и (C, D). Означаваме с P множеството на онези числа p, за всяко от които могат да се намерят числа a, b, c и d съответно от A, B, C и D по такъв начин, че ако m и n са две произволни числа, които удовлетворяват неравенствата $a\leq m\leq b$, $c\leq n\leq d$, то $p<mn$. След това дефинираме едно множество Q по следния начин: едно число q се причислява към Q тогава и само тогава, когато то е по-голямо от някое число, което не влиза в P. Не е трудно да се провери, че двете множества P и Q образуват сечение. Тази проверка предоставяме на читателя. Сечението (P, Q) се нарича произведение на двете сечения (A, B) и (C, D). Символично това се записва така:

$$(P, Q)=(A, B)\,.\,(C, D).$$

Относно така дефинираните понятия равенство, събиране и умножение сеченията образуват тяло. Ние и този път ще предоставим проверката на трудолюбивия читател.

Наредба на сеченията. Едно сечение (A, B) ще наричаме положително, когато множеството A съдържа поне едно положително число. Нека читателят сам провери, че множеството от положителните сечения удовлетворява условията 8, 9, 10 и 11 на § 3. По такъв начин получаваме една наредба в тялото на сеченията. Не е трудно да се види, че

$$(A, B)<(C, D)$$

тогава и само тогава, когато съществува рационално число ξ, което принадлежи както на B, така и на C. И наистина нека положим

$$(P, Q)=(C, D)-(A, B).$$

Ще отбележим, че понятието разлика на две сечения има смисъл за нас, защото множеството на всичките сечения е тяло. Да допуснем, че сечението (P, Q) е положително. В такъв случай множеството P ще съдържа някое положително число p. Избираме едно число a от A и едно число b от B по такъв начин, че да имаме $b-a<p$. Това е възможно, както вече знаем, защото числото p е положително. По такъв начин получаваме $b<a+p$. От друга страна,

$$(P, Q)+(A, B)=(C, D) \tag{1}$$

и следователно числото $a+p$ принадлежи на C. Като вземем под внимание, че $b<a+p$, заключаваме, че b също тъй принадлежи на C. С това ние намерихме едно число b, което принадлежи както на B, така и на C.

Обратно, нека съществува число b, което принадлежи както на B, така и на C. От равенството (1) и от дефиницията на понятието сума се вижда, че числото b може да се представи във вида

$$b=a+p,$$

където a принадлежи на A и p принадлежи на P. По такъв начин получаваме

$$p=b-a>0,$$

защото b принадлежи на B и a принадлежи на A, т. е. ние намерихме в P едно положително число и следователно показахме (което е същото), че сечението (P, Q) е положително.

След всичко изложено дотук ще покажем, че в нареденото тяло на сеченията е валиден принципът за непрекъснатост. За тази цел разглеждаме едно ограничено множество M от сечения (X, Y) и означаваме с (A, B) една негова горна граница. По-нататък дефинираме един клас P от рационални числа по следния начин: причисляваме едно число p към P тогава и само тогава, когато може да се намери число x от левия клас X на някое сечение (X, Y) от M, удовлетворяващо неравенството $p<x$. След това дефинираме един клас Q така: едно число q се причислява към Q тогава и само тогава, когато то е по-голямо от някое число, което не влиза в P.

Така дефинираните два класа P и Q не са празни. За да видим, че класът P не е празен, избираме едно сечение (X, Y) от M, избираме произволно x от X и означаваме с p кое да е число, по-малко от x. По този начин намерихме едно число, което сигурно принадлежи на P. За да видим, че класът Q не е празен, избираме едно число b от B и означаваме с q кое да е число, по-голямо от b. Числото b не принадлежи на P, защото в противен случай би съществувало число x

от класа X на някое сечение (X, Y) от M, за което $b<x$, т. е. бихме имали $(A, B)<(X, Y)$. Това обаче не е вярно, защото (A, B) е една горна граница на множеството M. И така избраното число q е по-голямо от едно число b, което не принадлежи на P, т. е. q принадлежи на Q.

Дефинираните по този начин два класа P и Q образуват сечение. Проверката е съвсем проста и може да бъде предоставена на читателя. Ние ще докажем, че сечението (P, Q) представлява точната горна граница на множеството M.

Първо ще докажем, че сечението (P, Q) е една горна граница на M. И наистина, ако допуснем, че за някое сечение (X, Y) от M имаме

$$(P, Q)<(X, Y),$$

от това ще следва, че има рационално число x, което фигурира както в Q, така и в X. Съгласно дефиницията на Q съществува число r, което не влиза в P и за което $r<x$. Това обаче не е възможно, защото от неравенството $r<x$ следва, че r принадлежи на P.

Така намерената горна граница (P, Q) е най-малката от всички горни граници на M. И наистина нека

$$(C, D)<(P, Q).$$

Ще покажем, че (C, D) вече не е горна граница на M. Това може да се види по следния начин: нека ξ е рационално число, което фигурира както в D, така и в P. Съгласно дефиницията на P има поне едно сечение (X, Y) в M, за което е възможно да се намери рационално число x по такъв начин, че x да принадлежи на X и при това да имаме $\xi<x$. В такъв случай обаче x принадлежи на D, защото ξ принадлежи на D и $\xi<x$. От доказаното следва, че $(C, D)<(X, Y)$, т. е. сечението (C, D) наистина не е горна граница на M.

По такъв начин можахме да дадем още един пример на непрекъснато наредено тяло, като обаче и този път си послужихме с теорията на рационалните числа. В съгласие с това, което казахме в § 6, занапред под реални числа ние бихме могли да разбираме сеченията.

§ 9. Геометрична терминология

В геометрията се показва, че в множеството на точките на една права могат да се дефинират понятията равенство, събиране, умножение и наредба, относно които това множество представлява непрекъснато наредено тяло. Поради тази причина точките от разглежданата права се наричат често **реални числа**. Ние няма да разглеждаме тук този поучителен геометричен въпрос, защото в същност няма да го използуваме. Все пак ние често ще си служим с геометричен език поради неговата нагледност. Така, вместо да говорим за реални числа, ще говорим за точки, вместо да казваме, че числото a е по-малко от числото b, ще казваме, че точката a лежи наляво от точката b и пр. По-специално множеството от числата x, които удовлетворяват неравенствата $a \leqq x \leqq b$, ще наричаме затворен интервал и ще го означаваме със символа $[a, b]$, а множеството на числата x, които удовлетворяват неравенствата $a<x<b$, ще наричаме отворен интервал и ще го означаваме със символа (a, b).

Множеството от числата x, които удовлетворяват неравенствата $a \leqq x<b$, както и множеството от числата, които удовлетворяват неравенствата $a<x \leqq b$, ще наричаме полузатворен интервал. Независимо от това, дали точките a и b са причислени или не към разглеждания интервал, ние ще ги наричаме краища на този интервал. Точка, която принадлежи на един интервал, но не е край за този интервал, се нарича негова вътрешна точка. Така дефинираните интервали ще наричаме крайни за разлика от множествата от числата x, които удовлетворяват едното от неравенствата $a<x$, $a \leqq x$, $x<a$, $x \leqq a$, които ще наричаме безкрайни интервали и ще означаваме съответно със символите (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$. Също така множеството от всички реални числа ще наричаме безкраен интервал и ще го означаваме със символа $(-\infty, \infty)$. Понятията край и вътрешна точка за безкрайните интервали се дефинират по очевиден начин.

В съгласие с тези дефиниции и дефинициите, които дадохме порано, едно множество от точки ще наричаме ограничено, когато съществува краен интервал, който съдържа всичките му точки. С тези няколко примера, разбира се, не се изчерпват случаите, когато ще си служим с геометрична терминология. Ние обаче няма да формулираме изрично тривиалните дефиниции. Използването на геометрията ще бъде само привидно, защото ние ще можем да프редактираме всичко без затруднения на езика на аритметиката.

§ 10. Съществуване на най-малък член във всяко ограничено отдолу множество от цели числа

Ние знаем, че едно безкрайно множество от числа може да не притежава най-малък член дори когато е ограничено отдолу. Тук ще докажем обаче, че във всяко ограничено отдолу множество от цели числа винаги има най-малко число. И наистина нека N е едно ограничено отдолу множество от цели числа. Да допуснем, че N не съдържа най-малък член. Множеството N обаче е ограничено отдолу и следователно съгласно принципа за непрекъснатост то притежава точна долна граница ν. Числото $\nu+1$ не е долна граница на N, защото то е по-голямо от най-голямата му долна граница. Оттук следва, че в N съществува число p, което удовлетворява неравенството $p<\nu+1$. От друга страна, в N по предположение няма най-малък член. Въз основа на това ние можем да твърдим, че съществува число q в N, което удовлетворява неравенството $q<p$. От това неравенство и от двете неравенства $\nu \leqq q$ и $p<\nu+1$ заключаваме, че $0<p-q<1$, нещо,

което е невъзможно, защото числото $p-q$ е цяло. Полученото противоречие се дължи на допускането, че в множеството N няма най-малък член. С това интересуващото ни твърдение е доказано. Така установената теорема понякога се нарича принцип за добрата наредба на множеството на целите числа.

От доказаното лесно следва, че всяко ограничено отгоре множество от цели числа притежава най-голям член.

Едно множество от цели числа, което е ограничено и отгоре, и отдолу, се нарича крайно. По-специално, ако едно множество от цели положителни числа е ограничено отгоре, то е крайно. Всяко крайно множество от цели числа съдържа най-голям и най-малък член.

§ 11. Принцип на Архимед

Този принцип може да се формулира така: множеството на целите положителни числа не е ограничено отгоре.

Доказателство. Допускаме противното и означаваме с ν точната горна граница на множеството на целите положителни числа. Такава съществува съгласно принципа за непрекъснатост. Числото $\nu-1$ е по-малко от ν и следователно не е горна граница на множеството на целите положителни числа. И така съществува цяло положително число n, което удовлетворява неравенството $n>\nu-1$. От това неравенство получаваме обаче $n+1>\nu$, т. е. намерихме цяло положително число, по-голямо от ν, което е невъзможно, защото ν е горна граница на множеството на целите положителни числа. Полученото противоречие се дължи на допускането, че принципът на Архимед не е верен. С това доказателството е завършено.

§ 12. Теорема на Кантор

Казваме, че е дадена една безкрайна редица от интервали

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots,$$

когато на всяко цяло положително число n е съпоставен по един интервал Δ_n.

Казваме, че един интервал Δ съдържа друг интервал Δ', ако всичките точки на Δ' лежат в Δ.

Една безкрайна редица от интервали

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$$

се нарича Канторова система, ако:

1) всичките интервали от редицата са затворени;
2) всеки интервал Δ_n съдържа следващия Δ_{n+1}.

Теорема на Кантор. Ако

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$$

е една Канторова система от интервали, то има (поне* една) точка, която лежи във всичките интервали на системата.

Доказателство. Нека a_n и b_n са съответно левият и десният край на интервала Δ_n. Тъй като всеки интервал на системата съдържа следващия, то всичките интервали се съдържат в интервала Δ_1. По-специално точката a_n принадлежи на Δ_n и следователно лежи в Δ_1. И така всичките числа

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$

лежат в Δ_1. Това значи, че при всички цели положителни стойности на n имаме $a_n \leqq b_1$. И така множеството от числата

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$

е ограничено отгоре. Съгласно принципа за непрекъснатост това множество притежава точна горна граница. Нека ξ е тази точна горна граница. Очевидно имаме $a_n \leqq \xi$.

Нека p и q са две произволни цели положителни числа. Ние ще покажем, че $a_p \leqq b_q$. И наистина, ако $p \leqq q$, то интервалът Δ_q се съдържа в Δ_p и следователно точката b_q се съдържа в интервала Δ_p, т. е. $a_p \leqq b_q$. Ако $p > q$, то интервалът Δ_p се съдържа в интервала Δ_q, т. е. точката a_p се съдържа в Δ_q, и следователно $a_p \leqq b_q$. След всичко извършено фиксираме q и оставяме p да се мени. Неравенството $a_p \leqq b_q$ ни учи, че b_q е една горна граница на множеството на числата a_p. Като вземем под внимание, че ξ е точната, т. е. най-малката горна граница на тези числа, получаваме $\xi \leqq b_q$. Неравенствата $a_n \leqq \xi$ и $\xi \leqq b_q$ ни позволяват да заключим, че при всички цели положителни стойности на k имаме

$$a_k \leqq \xi \leqq b_k,$$

т. е. намерената точка ξ наистина лежи във всичките интервали Δ_k.

§ 13. Разпределение на рационалните и ирационалните числа

Нека (a, b) е един произволен интервал, при който $a < b$. Ще покажем, че във вътрешността му има както рационални, така и ирационални числа. За тази цел ще изберем едно произволно число c и ще покажем, че може да се избере цяло число p и цяло положително число q така, че да имаме

$$a < c + \frac{p}{q} < b$$

или, което е все същото,

(1) $$q(a-c) < p < q(b-c).$$

* Разбира се, ако измежду интервалите има и произволно малки, то повече от една точка не може да се намира във всичките интервали на системата.

Ако дадем на c рационална стойност, числото $c + \frac{p}{q}$ ще бъде също рационално. Ако c е ирационално, то $c + \frac{p}{q}$ е също ирационално. И така, за да се постигне целта, достатъчно е да се покаже, че целите числа $q > 0$ и p могат да бъдат така избрани, че да е изпълнено неравенството (1).

За да докажем това, избираме едно цяло положително число q, по-голямо от $\frac{1}{b-a}$. Това може да се направи въз основа на принципа на Архимед. След това разглеждаме множеството M от онези цели числа r, които удовлетворяват неравенството

$$q(a-c) < r.$$

Такива числа има, както ни учи принципът на Архимед. Множеството на тези числа е ограничено отдолу и следователно в това множество има едно най-малко число p (вж. § 10). И така цялото число p удовлетворява неравенствата

$$q(a-c) < p, \quad p-1 \leqq q(a-c).$$

От неравенството

$$p-1 \leqq q(a-c)$$

получаваме

$$p \leqq q(a-c)+1$$

и тъй като $q > \frac{1}{b-a}$ или, което е все същото,

$$q(b-a) > 1,$$

то

$$p < q(a-c)+q(b-a) = q(b-c).$$

И така цялото число p удовлетворява неравенствата

$$q(a-c) < p < q(b-c)$$

или

$$a < c + \frac{p}{q} < b.$$

Като дадем на c рационална стойност, заключаваме, че в интервала (a, b) има рационални числа; като дадем на c ирационална стойност, заключаваме, че в интервала (a, b) има ирационални числа. Този резултат често се изразява накратко, като казваме, че рационалните и ирационалните числа се намират навсякъде гъсто върху числовата права.

Общи задачи

1. Да се докаже индуктивно, че при всички цели положителни стойности за n са валидни равенствата

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{(2n+1)(n+1).n}{6},$$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{(1+n)^2n^2}{4}.$$

2. Да се докажат индуктивно формулите:

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \quad \text{при } \sin\frac{\theta}{2}\neq 0;$$

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\ldots+\sin n\theta=\frac{\sin\frac{n}{2}\theta\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \quad \text{при } \sin\frac{\theta}{2}\neq 0;$$

$$\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta+\ldots+\cos(2n-1)\theta=\frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta} \quad \text{при } \sin\theta\neq 0;$$

$$\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta+\ldots+\sin(2n-1)\theta=\frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta} \quad \text{при } \sin\theta\neq 0;$$

$$\frac{n+1}{2}+n\cos\theta+(n-1)\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

$$\text{при } \sin\frac{\theta}{2}\neq 0;$$

$$\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\ldots+\cos^2 n\theta=\frac{2n-1}{4}+\frac{\sin(2n+1)\theta}{4\sin\theta} \quad \text{при } \sin\theta\neq 0.$$

3. Да да се докаже индуктивно, че при всички цели положителни стойности на n е вярно равенството

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

4. Да се докаже, че при всяко n и при всички цели неотрицателни стойности на k е вярно равенството

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1},$$

където при цели положителни стойности на k

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 1},$$

а при $k=0$

$$\binom{n}{0}=1.$$

5. Да се докаже, че при всички цели стойности на n и k, подчинени на неравенствата $0\leq k\leq n$, е в сила

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

Значението на символите е дадено в зад. № 4.

6. Докажете индуктивно, че при всички цели положителни стойности на n имаме

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n}b^n,$$

където значението на символите $\binom{n}{k}$ е изяснено в зад. № 4. Тази важна формула се нарича Нютонов бином.

7. Докажете, че при всички стойности на n и всички цели неотрицателни стойности на k имаме

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\ldots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}.$$

Значението на символите е дадено в зад. № 4.

8. Докажете, че при всички цели неотрицателни стойности на n и k имаме

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\ldots+\binom{n+k}{n}=\binom{n+k+1}{n+1}.$$

Значението на символите е дадено в зад. № 4.

9. Нека $P(x)=x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)$, където m е цяло положително число. Да се докаже, че

$$P(1)+P(2)+P(3)+\ldots+P(n)=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{m+1}.$$

10. Да се докаже, че сумата

$$1^m+2^m+3^m+\ldots+n^m$$

може да се представи като полином на n от $m+1$-ва степен.

11. Да се докаже, че при всички цели положителни стойности на n и при $x\geq -1$ имаме

$$(1+x)^n\geq 1+nx$$

(неравенство на Бернули).

12. Нека са дадени два елемента ω и ε. Дефинираме за тях равенство и действията събиране и умножение с помощта на таблиците:

$\omega=\omega,$	$\varepsilon=\varepsilon,$
$\omega+\omega=\omega,$	$\omega\omega=\omega,$
$\omega+\varepsilon=\varepsilon,$	$\omega\varepsilon=\omega,$
$\varepsilon+\omega=\varepsilon,$	$\varepsilon\omega=\omega,$
$\varepsilon+\varepsilon=\omega,$	$\varepsilon\varepsilon=\varepsilon.$

Да се покаже, че при така дефинираните равенство и действия елементите ω и ε образуват тяло. Да се намерят нулата и единицата на това тяло. Да се покаже, че в това тяло имаме $-1=1$. Да се покаже, че в това тяло не може да се дефинира наредба по такъв начин, че да са изпълнени условията на § 3.

13. Разглеждаме множеството K от всевъзможните двойки (a, b) от реални числа. Дефинираме в K действията събиране и умножение по следния начин:

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b + d),$$

$$(a, b)\ (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc).$$

Две двойки (a, b) и (c, d) се наричат равни тогава и само тогава, когато $a=c$ и $b=d$.

Да се покаже, че при така дефинираните действия събиране и умножение и при така дефинираното равенство множеството K е едно тяло. Да се намери нулата и единицата на това тяло. Да се покаже, че в това тяло не е възможно да се дефинира наредба така, че да бъдат изпълнени условията на § 3.

Упътване. За да покажете, че в K не може да се установи наредба, допуснете противното и разгледайте елемента

$$i=(0, 1).$$

От двата елемента i и $-i$ единият е положителен и следователно неговият квадрат е положителен (като произведение на два положителни елемента). От друга страна, не е трудно да се види, че

$$i^2=(-i)^2=-(1, 0),$$

т. е. елементът $-(1,0)$ е сигурно положителен. Оттук заключаваме, че елементът

$$(1, 0)=[-(1, 0)]^2$$

е положителен като произведение на два положителни елемента. Това обаче не е възможно, защото от двата елемента

$$(1, 0) \text{ и } -(1,0)$$

само единият е положителен.

14. Ако $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \ldots$ и числата n_k са цели положителни, то $n_k \geq k$.

Упътване. Извършете доказателството индуктивно.

ГЛАВА II

БЕЗКРАЙНИ РЕДИЦИ

§ 1. Редици

Ще казваме, че е дефинирана една редица

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$

от числа, ако на всяко цяло положително число n е съпоставено но едно число a_n (числото n се нарича номер на члена a_n). Така например, за да получим редицата от четните числа

$$2,\ 4,\ 6, \ldots,$$

ние на всяко цяло положително число n съпоставяме четното число $2n$, което съпоставяне може кратко да се запише с помощта на равенството

$$a_n=2n.$$

Друг пример ни дава редицата

$$1,\ 1,\ 1,\ 1, \ldots,$$

всички членове на която са равни на 1. Нека изрично кажем, че се позволява при дефинирането на една редица на две **различни** цели положителни числа (номера) да се съпостави **едно и също** число, т. е. (което е все същото) позволява се два члена с различни номера да бъдат равни помежду си. Такъв е случаят с последния пример.

§ 2. Околност

Околност на едно число c ще наричаме всеки отворен интервал (a, b), който съдържа c, т. е. за който $a < c < b$. Ясно е, че всяка точка притежава безбройно много околности. Така например интервалът $(-1,1)$ е околност на точката 0, интервалът $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$ е друга околност на същата точка, но интервалът $(1, 2)$ не е околност на точката 0.

§ 3. Точка на сгъстяване. Теорема на Болцано — Вайерщрас

Нека ни е дадена една редица от числа

(1) $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Една точка ξ се нарича точка на сгъстяване на редицата (1), ако всяка околност на ξ съдържа безбройно много членове на тази редица.

Така да разгледаме например редицата

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

При нечетно n имаме $a_n=1$, а при четно n имаме $a_n=0$; това може да се запише кратко така: $a_n=\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$. Очевидно точката 1 е една точка на сгъстяване за тази редица, защото всяка околност на точката 1 съдържа безбройно много различни по номер членове от редицата, а именно всичките членове с нечетни номера. Точката 0 е също една точка на сгъстяване на редицата, но точката $\frac{1}{2}$ не е точка на сгъстяване, защото например интервалът $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, който е една околност на точката $\frac{1}{2}$, не само не съдържа безбройно много членове от редицата, но той дори не съдържа нито една точка от тази редица. В примера, който дадохме, двете точки на сгъстяване принадлежат на редицата. Това обаче съвсем не се изисква в дефиницията на понятието точка на сгъстяване. Така например точката 0 е точка на сгъстяване за редицата

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

при все че не принадлежи на тази редица (всичките членове на тази редица са различни от 0).

Може да се случи една редица да има само една точка на сгъстяване, какъвто е случаят с редицата

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

Може да се случи редицата да има няколко точки на сгъстяване. Така например редицата

$$1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

ма две точки на сгъстяване. Може една редица да няма нито една очка на сгъстяване, както е случаят с редицата на целите положителни числа

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Обаче всяка ограничена редица притежава поне една точка на сгъстяване. Това твърдение съставлява съдържанието на една важна теорема, която е известна под името теорема на Болцано — Вайерщрас (Bolzano — Weierstrass).

Доказателство. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е една ограничена числова редица и нека Δ_1 е произволен (затворен) интервал с дължина d, който съдържа всичките ѝ членове. Да разделим Δ_1 на две равни части. Поне едната от двете половини (разглеждани като затворени интервали) съдържа безбройно много (различни по номер) членове на редицата. И наистина в противен случай интервалът Δ_1 би съдържал най-много краен брой членове на редицата, което не е вярно. Нека Δ_2 е такава от двете половини, която съдържа безбройно много членове на редицата (ако само едната половина съдържа безбройно много членове на редицата, то Δ_2 е тази половина; ако и двете половини имат това свойство, с Δ_2 означаваме коя да е от тях). Разделяме Δ_2 на две равни части и означаваме с Δ_3 такава затворена половина на Δ_2, която съдържа безбройно много членове на редицата (сигурно поне едната от двете половини на Δ_2 съдържа безбройно много членове на редицата, защото в противен случай интервалът Δ_2 би съдържал само краен брой членове на редицата). Продължавайки този процес на разполовяване на интервалите, получаваме една безкрайна редица от затворени интервали

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots,$$

всеки един от които съдържа следващия. Според теоремата на Кантор (глава I, § 12) има точка c, която принадлежи на всеки един от тези интервали.

От начина, по който са дефинирани интервалите Δ_n, се вижда, че всеки един от тях съдържа безбройно много членове на дадената числова редица. Като използуваме това обстоятелство, ще покажем, че c е една нейна точка на сгъстяване, т. е. че всяка околност на c съдържа безбройно много членове на тази редица.

Нека (p, q) (където p е по-малко от q) е произволна околност на точка c, тъй че разликите $c-p$ и $q-c$ са положителни. Нека d е дължината на Δ_1. Ще изберем цялото положително число n толкова голямо, че дължината* $\frac{d}{2^{n-1}}$ на Δ_n да е по-малка както от $c-p$, така и от $q-c$. За тази цел избираме n така, че да имаме

$$n > \frac{d}{c-p} \quad \text{и} \quad n > \frac{d}{q-c},$$

* Дължината на интервала Δ_2 е равна на половината от дължината d на интервала Δ_1, дължината на Δ_3 е равна на половината от дължината на Δ_2 и т. н. Оттук се вижда, че дължината на Δ_n е равна на $\frac{d}{2^{n-1}}$.

нещо, което е възможно според принципа на Архимед. Като вземем под внимание, че Нютоновият бином ни дава

$$2^{n-1}=(1+1)^{n-1}=1+(n-1)+\ldots\geq n,$$

получаваме

$$2^{n-1}>\frac{d}{c-p} \quad \text{и} \quad 2^{n-1}>\frac{d}{q-c}$$

и следователно

$$c-p>\frac{d}{2^{n-1}} \quad \text{и} \quad q-c>\frac{d}{2^{n-1}}.$$

Не е трудно да се убедим, че при направения избор на числото n интервалът Δ_n се съдържа изцяло в интервала (p, q). И наистина, ако означим с α_n и β_n съответно левия и десния край на Δ_n, то

$$\beta_n-\alpha_n=\frac{d}{2^{n-1}}$$

и следователно $\beta_n-\alpha_n<c-p$, откъдето $\alpha_n>\beta_n-c+p$, т. е. $\alpha_n>p$, тъй като $\beta_n-c\geq 0$. Също така от $\beta_n-\alpha_n<q-c$ следва $\beta_n<q-(c-\alpha_n)$, т. е. $\beta_n<q$.

Така установените неравенства

$$p<\alpha_n<\beta_n<q$$

показват, че Δ_n се съдържа в интервала (p, q). Оттук, като вземем под внимание, че Δ_n съдържа безбройно много членове на дадената числова редица, заключаваме, че същото свойство притежава и интервала (p, q), с което нашето твърдение е доказано.

§ 4. Сходящи редици

Ако една числова редица е ограничена и притежава само една точка на сгъстяване, тя се нарича сходяща. Единствената точка на сгъстяване на една сходяща редица се нарича нейна граница (вместо да казваме, че l е граница на една редица, ние често ще казваме, че редицата клони към l).

Така например редицата

$$1, 1, 1, \ldots$$

е сходяща и клони към 1.

Редицата

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

е сходяща и клони към 0.

Редицата

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

не е сходяща, защото не е ограничена.

Редицата

$$1, 0, 1, 0, 1, \ldots,$$

при все че е ограничена, не е сходяща, защото има две точки на сгъстяване.

Ако c е една точка на сгъстяване на една редица, то (съгласно дадената по-горе дефиниция) във всяка околност на c има безбройно много членове на редицата. Това не изключва обаче вън от някоя околност на c също да има безбройно много (други) членове на редицата. Толкова по-интересно е, че за сходящите редици е в сила следната теорема:

Вън от всяка околност на границата на една сходяща редица може да има най-много краен брой членове на редицата.

Доказателство. Нека

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{1}$$

е една сходяща редица и a е нейната граница. Да допуснем, че може да се намери поне една околност Δ на a, вън от която има безбройно много членове

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots \tag{2}$$

на редицата. Тези безбройно много членове образуват една ограничена редица (защото цялата редица (1) е сходяща и следователно е ограничена), която съгласно теоремата на Болцано—Вайерщрас притежава поне една точка на сгъстяване ξ. Тази точка е различна от a, защото a не е точка на сгъстяване на редицата (2), тъй като околността Δ на точката a не съдържа нито един член на редицата (2). От друга страна, точката ξ е точка на сгъстяване не само на редицата (2), но и на редицата (1), защото всяка околност на ξ съдържа безбройно много членове на редицата (2), а следователно и безбройно много членове на редицата (1). И така ние достигнахме до заключението, че редицата (1) притежава повече от една точка на сгъстяване, което не е вярно, понеже е дадено, че редицата (1) е сходяща.

Нека

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

е една сходяща редица и a е нейната граница. Ние ще изберем едно произволно положително число ε и ще разгледаме околността $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Вън от тая околност могат да се намират най-много краен брой членове на нашата редица, т. е. от известно място в нашата редица всичките членове се намират в интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Нека a_ν е кой да е член на нашата редица, след който всичките членове се намират в интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. В такъв случай при $n>\nu$ имаме

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$$

или (което е все същото*)
$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

И така, ако редицата
$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$
е сходяща и a е нейната граница, то при всеки избор на положителното число ε може да се намери число ν (евентуално зависещо от ε) така, че щом $n > \nu$, да е изпълнено неравенството
$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Сега ще покажем, обратно, че ако за една редица

(3) $$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$

може да се намери такова число a, щото при всеки избор на положителното число ε да може да се намери число ν (не е задължително това число да бъде цяло) така, че при $n > \nu$ да имаме
$$|a_n - a| < \varepsilon,$$
то редицата (3) е сходяща и a е нейната граница.

И наистина, щом разполагаме с избора на положителното число ε, ние можем да вземем например $\varepsilon = 1$. След този избор на ε определяме съответствуващото му число ν. И така при $n > \nu$ имаме
$$|a_n - a| < 1,$$
т. е. $a - 1 < a_n < a + 1$. Така ние намерихме краен интервал, който съдържа всичките членове на редицата с евентуално изключение на краен брой членове. Увеличавайки интервала $(a-1, a+1)$, ако е нужно това, ние можем да намерим (също краен) интервал, който съдържа всичките членове на редицата (3) без изключение, което показва, че редицата (3) е ограничена. Остава да покажем, че редицата (3) не може да има точка на сгъстяване, различна от a (поне една точка на сгъстяване тя сигурно притежава въз основа на теоремата на Болцано — Вайерщрас). Нека допуснем, че редицата (3) притежава някоя точка на сгъстяване b, различна от a. Ще изберем положителното число ε толкова малко, че да имаме $\varepsilon < \frac{|b-a|}{2}$. Това е винаги възможно, защото $b \neq a$. Нека ν е такова число, че при $n > \nu$ да имаме
$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Да разгледаме околността $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ на точката b. Щом точката b е една точка на сгъстяване, то в избраната околност на точката b (както и във всяка околност на тая точка) има безбройно много членове на редицата, а следователно и такива членове, чиито номера са по-големи от ν. Нека a_p е такъв член. И така имаме
$$|a_p - b| < \varepsilon.$$

*) Вж. глава I, § 4.

От друга страна,
$$|a_p - a| < \varepsilon \text{ (защото } p > \nu).$$

Събирайки почленно тези неравенства, намираме
$$|a_p - a| + |a_p - b| < 2\varepsilon$$
и тъй като
$$|a_p - a| + |a_p - b| = |a_p - a| + |b - a_p| \geqq |(a_p - a) + (b - a_p)| = |b - a|,$$
намираме
$$|b - a| < 2\varepsilon$$
противно на направения от нас избор на ε.

Полученият резултат ни дава възможност да дадем нова дефиниция на понятието граница на една редица, която е напълно еквивалентна на тази дефиниция, която вече дадохме.

Дефиниция. Казваме, че едно число a е граница на редицата
$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,$$
ако при всеки избор на положителното число ε може да се намери такова число ν (евентуално зависещо от избора на ε), че при $n > \nu$ да е в сила неравенството
$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

За да изразим, че a е граница на редицата с общ член a_n, често ще си служим с краткото означение
$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

В случай че има число a, удовлетворяващо изброените условия, редицата наричаме сходяща. В противен случай редицата наричаме разходяща. Ние ще си служим както с първата, така и с втората дефиниция на понятието граница на една редица от числа.

Не е трудно да се види, че за да клони редицата
$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$
към l, е необходимо и достатъчно редицата
$$a_1 - l,\ a_2 - l,\ a_3 - l, \ldots$$
да клони към нула. И наистина да положим
$$b_n = a_n - l$$
и да означим с ε едно положително число. Като вземем под внимание, че
$$|a_n - l| = |b_n - 0|,$$
заключаваме, че неравенството
$$|a_n - l| < \varepsilon$$

е изпълнено тогава и само тогава, когато е изпълнено неравенството

$$|b_n - 0| < \varepsilon.$$

Най-сетне ще споменем, че за да клони редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

към нула, е необходимо и достатъчно редицата

$$|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots$$

да клони към нула. И наистина да положим

$$c_n = |a_n|$$

и да означим с ε едно положително число. В такъв случай, като вземем под внимание, че

$$|a_n - 0| = |c_n - 0|,$$

заключаваме, че неравенството

$$|a_n - 0| < \varepsilon$$

е изпълнено тогава и само тогава, когато е изпълнено неравенството

$$|c_n - 0| < \varepsilon.$$

§ 5. Действия със сходящите редици

Нека са дадени двете сходящи редици

(1) $$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$
(2) $$b_1, b_2, b_3, \ldots,$$

чиито граници са съответно a и b. Да образуваме редицата с общ член $c_n = a_n + b_n$. Ние твърдим, че така получената редица е сходяща и нейната граница е $a+b$. За да докажем това твърдение, ще си изберем едно положително число ε. Числото $\frac{\varepsilon}{2}$ е също положително, следователно може да се намери число ν_1 така, че при $n > \nu_1$ да имаме

(3) $$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Също тъй може да се намери число ν_2 така, че при $n > \nu_2$ да имаме

(4) $$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека ν е по-голямото от двете числа ν_1 и ν_2. В такъв случай при $n > \nu$ е изпълнено както неравенството (3), така и неравенството (4). Като съберем почленно тези неравенства, получаваме

$$|a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$$

и като вземем пред вид, че

$$|(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|,$$

намираме, че при всяко $n > \nu$ имаме

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon.$$

Полученото неравенство ни учи, че редицата с общ член $a_n + b_n$ е сходяща и клони към $a+b$.

Аналогично се доказва (пак при предположението, че редиците (1) и (2) са сходящи), че редицата с общ член $a_n - b_n$ е също сходяща и клони към $a-b$. За целта се ползуваме от неравенството

(5) $$|(a_n - b_n) - (a - b)| = |(a_n - a) + (b - b_n)| \leq |a_n - a| + |b - b_n|$$

по следния начин: избираме $\varepsilon > 0$ и след това определяме числото ν така, че при $n > \nu$ да имаме както

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

така и

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

оттук с помощта на неравенството (5) намираме

$$|(a_n - b_n) - (a - b)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Нека

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

са две сходящи редици, които клонят съответно към a и b. Ще докажем, че редицата

$$a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n, \ldots$$

е също сходяща и клони към ab.

За тази цел полагаме

$$a_n - a = \alpha_n,$$
$$b_n - b = \beta_n,$$

откъдето получаваме

$$a_n = a + \alpha_n,$$
$$b_n = b + \beta_n.$$

Като умножим почленно тези две равенства, намираме

$$a_n b_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n,$$

откъдето

$$|a_n b_n - ab| = |a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n| \leqq |a\beta_n| + |b\alpha_n| + |\alpha_n \beta_n|.$$

Избираме си едно произволно положително число ε и определяме ν така, че при $n > \nu$ да имаме

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1},$$

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1},$$

$$|\beta_n| < 1.$$

Това е възможно да се направи, защото a_n клони към a и b_n клони към b. Но в такъв случай имаме

$$|a_n b_n - ab| \leqq |a|\,|\beta_n| + |b|\,|\alpha_n| + |\alpha_n|\,|\beta_n| \leqq |a|\,|\beta_n| + |b|\,|\alpha_n| +$$

$$+ |\alpha_n| < \frac{|a|\,\varepsilon}{|a| + |b| + 1} + \frac{|b|\,\varepsilon}{|a| + |b| + 1} + \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1} = \varepsilon.$$

Сега ще разгледаме въпроса за почленното деление на две сходящи редици.

Нека редиците

$$a_1, a_2, \ldots,$$
$$b_1, b_2, \ldots,$$

където $b_n \neq 0$, са сходящи и клонят съответно към a и b, като $b \neq 0$. В такъв случай редицата

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots$$

е сходяща и клони към $\frac{a}{b}$.

И наистина полагаме

$$a_n - a = \alpha_n,$$
$$b_n - b = \beta_n,$$

откъдето намираме

$$a_n = a + \alpha_n,$$
$$b_n = b + \beta_n,$$

т. е.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n},$$

или

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{\alpha_n b - a\beta_n}{(b + \beta_n) b}\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{|\alpha_n|\,|b| + |a|\,|\beta_n|}{|b + \beta_n|\,|b|}.$$

При това ние съществено се ползуваме от условията $b_n \neq 0$ и $b \neq 0$, тъй като делим с тия числа.

Избираме ν_1 толкова голямо, че при $n > \nu_1$ да имаме $|\beta_n| < \frac{|b|}{2}$.

Това може да се направи, защото $\frac{|b|}{2}$ е положително число и b_n клони към b. В такъв случай получаваме

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \leqq \frac{|\alpha_n|\,|b| + |a|\,|\beta_n|}{(|b| - |\beta_n|)\,|b|} < 2\frac{|\alpha_n|\,|b| + |a|\,|\beta_n|}{b^2}.$$

След това избираме едно положително число ε и определяме ν_2 така, че при $n > \nu_2$ да имаме

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon b^2}{2(|a| + |b|)},$$

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon b^2}{2(|a| + |b|)}.$$

Ако с ν означим по-голямото от двете числа ν_1 и ν_2, заключаваме, че при $n > \nu$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon,$$

т. е. редицата с общ член $\frac{a_n}{b_n}$ е наистина сходяща и клони към $\frac{a}{b}$.

При доказателството ние няколко пъти използувахме, че $b \neq 0$. Това условие е твърде съществено. И наистина нека разделим почленно двете сходящи редици

$$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots,$$

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Получаваме разходящата редица

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

(тази редица е разходяща, защото не е ограничена). Този пример обаче не противоречи ни най-малко на доказаната по-горе теорема, защото тук редицата с общ член $\frac{1}{n}$ клони към 0.

Задачи

1. Нека редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

всички членове на която са различни от 2 и -2, е сходяща и клони към 2. Да се докаже, че редицата с общ член

$$b_n = \frac{a_n^2 - 5a_n + 6}{a_n^2 - 4}$$

е също сходяща, и да се пресметне нейната граница (b_n е добре дефинирано, защото $a_n \neq \pm 2$ и следователно знаменателят a_n^2-4 е различен от нула).

Решение. При все че числителят $a_n^2-5a_n+6$ и знаменателят a_n^2-4 образуват сходящи редици, тук не можем директно да приложим теоремата за почленното деление на две сходящи редици, защото $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2-4)=0$. За да решим задачата, правим следните преобразувания:

$$b_n=\frac{a_n^2-5a_n+6}{a_n^2-4}=\frac{(a_n-2)\,(a_n-3)}{(a_n-2)\,(a_n+2)}=\frac{a_n-3}{a_n+2}.$$

За дробта $\frac{a_n-3}{a_n+2}$ вече можем да приложим теоремата за почленното деление на сходящи редици, защото $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+2)=4\neq 0$. Твърдението, че $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+2)=4$, може да се мотивира с помощта на теоремата за почленното събиране на сходящи редици по следния начин: редицата

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

е сходяща (по условие) и клони към 2, редицата

$$2,\ 2,\ 2,\ldots$$

е също сходяща и клони към 2; от това следва, че редицата

$$a_1+2,\ a_2+2,\ a_3+2,\ldots,$$

чийто общ член е a_n+2, е също сходяща и клони към $2+2=4$.

Аналогично се доказва, че и редицата с общ член a_n-3 е сходяща и клони към $2-3=-1$. От това заключаваме, че редицата с общ член $\frac{a_n-3}{a_n+2}$ е също сходяща и клони към $\frac{-1}{4}$.

2. Нека редицата

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

всички членове на която са различни от -1 и 3, е сходяща и клони към 3. Да се докаже, че редицата с общ член

$$b_n=\frac{a_n^3-7a_n^2+15a_n-9}{a_n^3-5a_n^2+3a_n+9}$$

е също сходяща и да се пресметне нейната граница.

3. Нека редицата

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

е сходяща и клони към 2. Да се докаже, че редицата с общ член

$$b_n=\frac{2a_n^3-a_n+2}{a_n^2-a_n+1}$$

е също сходяща, и да се пресметне нейната граница.

4. Да се докаже, че редицата с общ член $a_n=\frac{n-1}{n+1}$ е сходяща, и да се пресметне нейната граница.

Упътване. Тук числителят $n-1$ и знаменателят $n+1$ образуват разходящи редици (тези редици не са ограничени). Това не е пречка редицата с общ член $\frac{n-1}{n+1}$ да бъде сходяща. И наистина ние можем да пишем

$$a_n=\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}.$$

Сега числителят $1-\frac{1}{n}$ и знаменателят $1+\frac{1}{n}$ образуват вече сходящи редици и при това $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\neq 0$, което ни дава право да приложим теоремата за почленното деление на сходящи редици.

5. Да се докаже, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{3n^4-5n^3+2n-1}{4n^4+n^2+2n+5}$$

е сходяща, и да се пресметне нейната граница.

6. Да се докаже, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{n^2+1}{n+2}$$

е разходяща.

7. Да се докаже, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}$$

е сходяща, и да се пресметне нейната граница.

§ 6. Някои свойства на сходящите редици

Нека

(1) $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

е една безкрайна редица. Ще казваме, че редицата

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3},\ldots$$

е подредица на редицата (1), когато целите положителни числа

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ldots$$

удовлетворяват неравенствата

$$n_1<n_2<n_3<\ldots$$

Ще покажем, че ако една безкрайна редица

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

клони към някоя граница a, то всяка нейна безкрайна подредица

(2) $$a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3},\ldots$$

е също сходяща и също клони към a.

И наистина нека ε е едно произволно избрано положително число. Избираме си едно число ν така, че при $k>\nu$ да имаме

$$|a_k-a|<\varepsilon.$$

От друга страна*, $n_k\geqq k$, т. е. $n_k>\nu$, и следователно

$$|a_{n_k}-a|<\varepsilon,$$

което ни учи, че редицата (2) е действително сходяща и клони към a.

Ще разгледаме друго свойство на сходящите редици. Нека

(3) $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

е една безкрайна редица от числа. Ако всяко цяло положително число фигурира поне в едната от двете редици от цели положителни числа

(4) $$n_1,\ n_2,\ n_3,\ldots$$

(5) $$m_1,\ m_2,\ m_3,\ldots$$

и ако редиците

(6) $$a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3},\ldots$$

(7) $$a_{m_1},\ a_{m_2},\ a_{m_3},\ldots$$

клонят към една и съща граница l, то редицата (3) също клони към l.

И наистина нека ε е произволно положително число. Избираме цяло положително число p по такъв начин, че при $k>p$ да имаме

$$|a_{n_k}-l|<\varepsilon \quad \text{и} \quad |a_{m_k}-l|<\varepsilon.$$

Означаваме с ν най-голямото от числата

$$n_1,\ n_2,\ldots n_p;\quad m_1,\ m_2,\ldots,m_p.$$

В такъв случай при $n>\nu$ ще имаме

$$|a_n-l|<\varepsilon.$$

За да се убедим в това, ще вземем под внимание, че числото n фигурира по предположение поне в едната от двете редици (4) или (5). Нека например това число фигурира в редицата (4), т. е. при подходящ избор на цялото положително число k имаме $n=n_k$. Като вземем под внимание, че $n>\nu$, получаваме $n_k>\nu$ и следователно k не може да бъде никое от числата $1, 2,\ldots,p$, т. е. $k>p$, и следователно

$$|a_{n_k}-l|<\varepsilon$$

или, което е същото,

$$|a_n-l|<\varepsilon.$$

Аналогично се разглежда случаят, когато n принадлежи на редицата (5).

* Вж. задача 14 към глава I.

Специално, ако редиците (4) и (5) удовлетворяват неравенствата

$$n_1<n_2<n_3<\ldots$$

$$m_1<m_2<m_3<\ldots$$

и никое цяло положително число не фигурира едновременно в тези две редици, казваме, че редицата (3) е получена чрез комбиниране на редиците (6) и (7). От изложеното се вижда, че ако една редица е получена чрез комбиниране на две редици, които клонят към една и съща граница l, то тя също клони към l.

Съвсем специален начин на комбиниране на две редици

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ldots$$

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ldots$$

ще получим, като образуваме редицата

$$b_1,\ c_1,\ b_2,\ c_2,\ b_3,\ c_3,\ldots$$

Този начин на комбиниране ще наричаме алтернативен. Ние често ще го използуваме в бъдеще.

Също така просто се установява следното: ако редицата

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

е сходяща и клони към a, то каквото и да е числото b, редицата

$$b,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

е също сходяща и клони към a. С други думи, ако положим

$$b_1=b,\quad b_n=a_{n-1} \quad \text{при} \quad n=2,\ 3,\ldots,$$

ще трябва да докажем, че редицата

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ldots$$

клони към a. Доказателството извършваме така: избираме си едно произволно положително число ε и подбираме положителното число ν по такъв начин, че при $k>\nu$ да имаме

$$|a_k-a|<\varepsilon.$$

Това може да се направи, защото редицата $a_1, a_2,\ldots$ клони към a. След всичко това не е трудно да се убедим, че

$$|b_n-a|<\varepsilon$$

при $n>\nu+1$. И наистина очевидно имаме $n-1>\nu$ и следователно

$$|a_{n-1}-a|<\varepsilon.$$

От друга страна, $b_n=a_{n-1}$, т. е.

$$|b_n-a|<\varepsilon,$$

с което е показано, че редицата $b_1, b_2, b_3,\ldots$ наистина клони към a.

От доказаното се вижда, че ако редицата

(8) $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

е сходяща и клони към a, то каквито и да бъдат числата

$$b_1, b_2, \ldots, b_k,$$

редицата

(9) $$b_1, b_2, \ldots, b_k, \quad a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots$$

е също сходяща и също клони към a. И наистина редицата

$$a_{k+1}, \quad a_{k+2}, \quad a_{k+3}, \ldots$$

е подредица на редицата (8) и следователно клони към a. Оттук заключаваме, като приложим k пъти последната от доказаните теореми, че редицата (9) също клони към a.

В бъдеще често ще използуваме следната проста теорема: ако съществуват границите $a = \lim a_n$ и $b = \lim b_n$ и поне при безбройно много стойности на n имаме $a_n \leqq b_n$, то $a \leqq b$. И наистина да допуснем, че $a > b$, и да положим $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. При достатъчно големи стойности на n имаме

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad |b_n - b| < \varepsilon$$

и следователно

$$a_n - \varepsilon < a < a_n + \varepsilon, \quad b_n - \varepsilon < b < b_n + \varepsilon,$$

откъдето

$$b - a > (b_n - \varepsilon) - (a_n + \varepsilon) = -2\varepsilon + (b_n - a_n) = b - a + (b_n - a_n),$$

т. е. за всички достатъчно големи стойности на n ще имаме

$$b_n - a_n < 0,$$

което противоречи на нашето предположение, че за безбройно много стойности на n имаме $a_n \leqq b_n$. С това доказателството е завършено.

От доказаното следва, че ако редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

клони към a и за безбройно много стойности на n удовлетворява неравенството

$$a_n \leqq b,$$

то

$$a \leqq b.$$

За да се убедим в това, достатъчно е да вземем под внимание, че редицата

$$b, b, b, \ldots$$

клони към b. По същия начин се вижда, че ако за безбройно много стойности на n имаме $a_n \geqq b$, то $a \geqq b$.

Накрая ще докажем, че ако двете редици

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

са сходящи и клонят към една и съща граница l и ако редицата

$$c_1, c_2, c_3, \ldots$$

удовлетворява неравенствата

$$a_n \leqq c_n \leqq b_n,$$

то тя е също сходяща и клони към същата граница l.

И наистина избираме си произволно $\varepsilon > 0$ и след това определяме ν така, че при $n > \nu$ да имаме

$$|a_n - l| < \varepsilon,$$
$$|b_n - l| < \varepsilon,$$

т. е.

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$
$$l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon.$$

От неравенствата

$$l - \varepsilon < a_n \text{ и } a_n \leqq c_n$$

намираме

$$l - \varepsilon < c_n.$$

Аналогично от неравенствата

$$c_n \leqq b_n \text{ и } b_n < l + \varepsilon$$

намираме

$$c_n < l + \varepsilon.$$

По такъв начин

$$l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon,$$

т. е.

$$|c_n - l| < \varepsilon,$$

което ни учи, че редицата с общ член c_n е сходяща и клони към l.

Задачи

1. Нека редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

е сходяща и $|a_n| < a$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$

Докажете, че $|\lim_{n\to\infty} a_n| \leqq a$.

2. Нека

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

са две сходящи редици, които клонят към една и съща граница l, и нека c_n е по-малкото, а d_n е по-голямото от двете числа a_n и b_n. Докажете, че двете редици

$$c_1, c_2, c_3, \ldots$$
$$d_1, d_2, d_3, \ldots$$

са също сходящи и клонят към l.

Упътване. Докажете предварително, че

$$c_n = \frac{a_n + b_n - |a_n - b_n|}{2},$$
$$d_n = \frac{a_n + b_n + |a_n - b_n|}{2}.$$

3. Нека

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

са две сходящи редици, които клонят към една и съща граница l. Докажете, че ако n-тият член c_n на една редица при всяко цяло положително n се заключава между a_n и b_n, то редицата

$$c_1, c_2, c_3, \ldots$$

е сходяща и клони към l. Тази теорема се различава от теоремата на § 6 по това, че не се иска непременно при всички (разбира се, цели положителни) стойности на n да имаме

$$a_n \leqq c_n \leqq b_n,$$

а се позволява при някои или при всички стойности на n да имаме

$$b_n \leqq c_n \leqq a_n.$$

4. Нека редицата

$$a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots$$

е сходяща и клони към a. Да се покаже, че каквито и да са числата $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, редицата

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$$

е също сходяща и клони към a.

5. Нека редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

е сходяща и $\lim a_n > a$. Докажете, че при всички достатъчно големи стойности на n имаме $a_n > a$.

§ 7. Монотонни редици

Една редица

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

се нарича монотонно растяща, ако при всички цели положителни стойности на n е изпълнено неравенството $a_n \leqq a_{n+1}$. Редицата се нарича монотонно намаляваща, ако при всички цели положителни стойности на n е изпълнено неравенството $a_n \geqq a_{n+1}$.

Примери. Редицата 1, 2, 3, ... е монотонно растяща.

Редицата

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

е монотонно намаляваща.

Редицата

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots$$

е също монотонно намаляваща.

Редицата

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

не е нито монотонно растяща, нито монотонно намаляваща.

Когато казваме накратко „монотонна редица", имаме пред вид една редица, която или монотонно расте, или монотонно намалява.

Ако една монотонно растяща редица е сходяща, никой неин член не е по-голям от границата. Ако една монотонно намаляваща редица е сходяща, никой неин член не е по-малък от границата. Доказателството ще изложим само за монотонно растящи редици. За тази цел разглеждаме една монотонно растяща сходяща редица

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

и означаваме с a нейната граница. В такъв случай, както и да фиксираме цялото положително число k, ще имаме

$$a_k \leqq a_n$$

при безбройно много стойности на n (по-точно при всички цели стойности на n, които не са по-малки от k). Оттук получаваме въз основа на едно доказано вече свойство на сходящите редици

$$a_k \leqq a,$$

с което доказателството е завършено.

Теорема. Всяка ограничена монотонна редица е сходяща.

Доказателство. В условието е дадено, че редицата е ограничена. За да покажем, че е сходяща, достатъчно е да установим, че тя не може да притежава повече от една точка на сгъстяване (поне една точка на сгъстяване тя има съгласно теоремата на Болцано—Вайерщрас). Доказателството ще извършим за монотонно растящи редици (случаят на монотонно намаляваща редица се третира аналогично). Нека

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots \tag{1}$$

е една монотонно растяща редица. Да допуснем, че α и β са две нейни различни точки на сгъстяване, като $\alpha < \beta$. Избираме едно положително число $\varepsilon<\frac{\beta-\alpha}{2}$. Това може да се направи, защото $\beta>\alpha$. Тъй като β е една точка на сгъстяване на редицата (1), то във всяка околност на β, а следователно и в околността $(\beta-\varepsilon,\ \beta+\varepsilon)$ има безбройно много членове на редицата. Нека a_k е такъв член, т. е.

$$\beta-\varepsilon<a_k<\beta+\varepsilon.$$

Обаче α е също така точка на сгъстяване за редицата (1), т. е. и в околността $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$ има също тъй безбройно много членове, а следователно ще има и такива, чиито номера са по-големи от k.

Нека a_l е такъв един член, т. е.

$$\alpha-\varepsilon\le a_l<\alpha+\varepsilon \text{ и } l>k.$$

От последното неравенство следва, че $a_l\ge a_k$, тъй като редицата монотонно расте.

Като съберем почленно неравенството

$$a_l<\alpha+\varepsilon$$

и неравенството

$$\beta-\varepsilon<a_k,$$

получаваме

$$a_l+(\beta-\varepsilon)<a_k+(\alpha+\varepsilon)$$

или

$$a_l-a_k<(\alpha+\varepsilon)-(\beta-\varepsilon)=2\varepsilon-(\beta-\alpha)<0,$$

понеже $\varepsilon<\frac{\beta-\alpha}{2}$, а това противоречи на неравенството $a_l\ge a_k$. Полученото противоречие се дължи на допускането, че разглежданата редица има повече от една точка на сгъстяване. И така една монотонна редица не може да има повече от една точка на сгъстяване и следователно, щом е ограничена, тя е непременно сходяща.

Пример. Да разгледаме редицата с общ член $a_n=x^n$ при $0\le x<1$. Като повдигнем трите части на неравенството $0\le x<1$ в n-та степен, получаваме $0\le x^n<1$, т. е. редицата е ограничена. Тая редица е монотонно намаляваща, защото

$$a_n-a_{n+1}=x^n-x^{n+1}=x^n(1-x)\ge0.$$

И така разглежданата редица е сходяща. Нека l е нейната граница. За да пресметнем стойността на l, умножаваме почленно двете сходящи редици

$$x,\ x^2,\ \dots,\ x^n,\ \dots,$$
$$x,\ x,\ \dots,\ x,\ \dots,$$

от които първата клони към l, а втората към x. Получаваме сходящата редица

$$x^2,\ x^3,\ \dots,\ x^{n+1},\ \dots,$$

която клони към xl. Но така получената редица е една подредица от редицата

$$x,\ x^2,\ x^3,\ \dots,\ x^n,\ \dots$$

и следователно клони към l, т. е. като се възползуваме от единствеността на границата на една сходяща редица (границата е единствената точка на сгъстяване на редицата), намираме

$$xl=l,$$

или $l\,(x-1)=0$, и тъй като $x\ne1$, то $l=0$.

Въпрос. Сходяща ли е редицата с общ член x^n при $x>1$? Сходяща ли е при $x=1$?

§ 8. Неперово число

Да разгледаме редицата с общ член

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ще покажем, че тая редица е сходяща. За тази цел развиваме бинома $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ по формулата на Нютон* и получаваме

$$a_n=1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\dots+\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}+\dots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}+\dots+$$

$$+\frac{n(n-1)\dots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+$$

$$+\dots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+$$

$$+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

* Това значи, че ние прилагаме при цели положителни стойности на n формулата

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\dots+\binom{n}{n}b^n,$$

където $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots2.1}$ при цели положителни стойности на k. Ние често ще означаваме произведението $k(k-1)\dots2.1$ със знака $k!$. Така

$$4!=4.3.2.1=24.$$

Очевидно

$$a_n \leqq 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)=$$
$$=a_{n+1}-\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)<a_{n+1}.$$

И така редицата

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \dots$$

е растяща. За да покажем, че е сходяща, достатъчно е да покажем, че е ограничена отгоре (че редицата е ограничена отдолу, се вижда от това, че тя расте, и следователно $a_1=2$ е една нейна долна граница).

Очевидно имаме

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<1,$$

т. е.

$$a_n \leqq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

От друга страна,

$$k!=k(k-1)\dots 3.2 \geqq 2.2\dots 2=2^{k-1},$$

т. е.

$$a_n \leqq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

което показва, че редицата

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \dots$$

е ограничена и следователно (тъй като тя е и монотонна) е сходяща. Границата на тая редица се означава обикновено с буквата e. Тази константа играе много важна роля в анализа. Тя служи за основа на така наречената Неперова (естествена) логаритмична система. В бъдеще (освен ако не е казано противното) при логаритмуване ще избираме винаги това число за основа на логаритмичната система. Тъй като всичките членове на редицата

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \dots$$

се намират между 2 и 3, то и границата на тази редица се намира между 2 и 3. Както ще видим по-късно, числото e е ирационално. Ние обаче

можем да го пресметнем с произволно голяма точност. Ето няколко първи десетични знака на това число:

$$e=2{,}718281828\dots$$

§ 9. Ограничени редици

Ако една редица е ограничена, това още не значи, че тя е сходяща, защото тя може да има повече от една точка на сгъстяване. Обаче от всяка ограничена редица може да се избере сходяща поредица.

И наистина нека

$$(1) \qquad a_1,\ a_2,\ a_3, \dots$$

е една ограничена редица. Според теоремата на Болцано—Вайерщрас тази редица има поне една точка на сгъстяване a. Във всяка околност на точката a има безбройно много членове на редицата; специално в околността $(a-1, a+1)$ също има безбройно много членове на редицата. Нека a_{n_1} е един такъв член. В околността $\left(a-\frac{1}{2},\ a+\frac{1}{2}\right)$ също има безбройно много членове, т. е. ще има и такъв член a_{n_2}, за който $n_2>n_1$. В околността $\left(a-\frac{1}{3}, a+\frac{1}{3}\right)$ избираме член a_{n_3}, за който $n_3>n_2$, и т. н. Изобщо означаваме с a_{n_k} такъв член на редицата (1), който принадлежи на околността $\left(a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k}\right)$ и за който $n_k>n_{k-1}$. По този начин ние получаваме една подредица

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3}, \dots,$$

членовете на която удовлетворяват неравенствата

$$a-\frac{1}{k}<a_{n_k}<a+\frac{1}{k}.$$

Обаче редиците с общи членове $a-\frac{1}{k}$ и $a+\frac{1}{k}$ са сходящи и клонят към a, следователно редицата с общ член a_{n_k} е също сходяща (и също клони към a).

Доказаното в този параграф твърдение се нарича понякога принцип за компактност.

От направените разсъждения е ясно, че може винаги да се избере подредица, която да клони към отнапред зададена точка на сгъстяване на дадената редица.

§ 10. Общо условие за сходимост на редиците (теорема на Коши)

За да бъде една редица

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

сходяща, необходимо и достатъчно е за всяко положително число ε да може да се намери такова число ν, че при $n>\nu$ да е изпълнено неравенството

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$$

при всяка цяла и положителна стойност на p.

Доказателство. Най-напред ще докажем, че условието е необходимо, т. е. ако редицата е сходяща, то условието на Коши (Cauchy) трябва да бъде изпълнено. И така нека редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

е сходяща и нека a е нейната граница. Избираме произволно $\varepsilon>0$ и определяме ν така, че при $n>\nu$ да имаме

(1) $$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Но щом $n>\nu$ и $p>0$, то $n+p>\nu$ и следователно

(2) $$|a_{n+p}-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Като съберем почленно неравенствата (1) и (2), намираме

$$|a_n-a|+|a_{n+p}-a|<\varepsilon,$$

или като се възползуваме от неравенството

$$|a_{n+p}-a|+|a_n-a|\geqq|(a_{n+p}-a)+(a-a_n)|=|a_{n+p}-a_n|,$$

получаваме

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon.$$

И така необходимостта на условието е доказана.

Сега ще покажем, че ако условието на Коши е изпълнено, то редицата е сходяща, т. е. ще покажем, че условието на Коши е достатъчно, за да осигури сходимостта на редицата.

И така нека условието на Коши е изпълнено. Ще покажем най-напред, че редицата е ограничена. За тази цел избираме например $\varepsilon=1$ и определяме ν така, че при $n>\nu$ да имаме

$$|a_{n+p}-a_n|<1,$$

или (което е все същото) $a_n-1<a_{n+p}<a_n+1$. Да фиксираме n и да оставим p да се мени. В такъв случай заключаваме, че редицата

(3) $$a_{n+1},\ a_{n+2},\ a_{n+3},\ldots$$

е ограничена, а следователно и редицата

(4) $$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots,$$

която се отличава от редицата (3) само по краен брой членове, е също тъй ограничена.

Остава да покажем, че редицата (4) не може да има повече от една точка на сгъстяване (поне една точка на сгъстяване тя има съгласно теоремата на Болцано—Вайерщрас). Ние ще докажем това от противното. Нека α и β са две различни точки на сгъстяване на редицата (4). Избираме положително число $\varepsilon<\frac{|\alpha-\beta|}{3}$. Това може да се направи, понеже $\alpha\neq\beta$. Избираме ν така, че при $n>\nu$ и при всички цели положителни p да имаме

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon.$$

От друга страна, числото α е една точка на сгъстяване на редицата (4). Това значи, че във всяка нейна околност, а следователно и в околността $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ има безбройно много членове на редицата, а следователно сигурно има членове, чиито номера са по-големи от ν. Нека a_k е такъв член, тъй че

$$\alpha-\varepsilon<a_k<\alpha+\varepsilon \text{ и } k>\nu$$

или

(5) $$|a_k-\alpha|<\varepsilon,\ k>\nu.$$

Обаче β е също точка на сгъстяване на редицата (4), т. е. използувайки аналогични разсъждения, можем да намерим член a_{k+q} с номер, по-голям от k, за който

(6) $$|a_{k+q}-\beta|<\varepsilon.$$

От друга страна,

$$|\beta-\alpha|=|(\beta-a_{k+q})+(a_{k+q}-a_k)+(a_k-\alpha)|\leqq$$
$$\leqq|\beta-a_{k+q}|+|a_{k+q}-a_k|+|a_k-\alpha|<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon,$$

както това се вижда от неравенствата (5) и (6) и от неравенството $|a_{k+q}-a_k|<\varepsilon$. Това обаче противоречи на условието, на което подчинихме числото ε. Полученото противоречие се дължи на допускането, че редицата (4) има повече от една точка на сгъстяване.

И така ние доказахме, че ако е изпълнено условието на Коши, редицата (4) е ограничена и има само една точка на сгъстяване, т. е. тя е сходяща.

Накрая ще споменем, че на теоремата на Коши може, разбира се, да се даде следната по-симетрична форма:

За да бъде редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

сходяща, необходимо и достатъчно е за всяко положително число ε да съществува такова число ν, че при $m>\nu$ и $n>\nu$ да е изпълнено неравенството

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

§ 11. Несобствени точки

Понякога е удобно (при все че не е наложително) да се въведат двата нищо неозначаващи символа $+\infty$ и $-\infty$. Тези два символа ще наричаме несобствени точки за разлика от реалните числа.

Каквото и да е реалното число x, ще пишем $-\infty < x$ и $x < +\infty$.

Казваме, че $+\infty$ е точка на сгъстяване за една редица от реални числа

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

ако тази редица не е ограничена отгоре.

Казваме, че $-\infty$ е точка на сгъстяване на една редица от реални числа, ако тази редица не е ограничена отдолу.

Въведените по този начин точки на сгъстяване ще наричаме несобствени за разлика от редовните точки на сгъстяване, които ще наричаме собствени.

Всяка редица (дори да не е ограничена) притежава поне една собствена или несобствена точка на сгъстяване. И наистина, ако една редица не притежава несобствени точки на сгъстяване, тя е ограничена и отгоре, и отдолу и следователно според теоремата на Болцано—Вайерщрас тя притежава поне една собствена точка на сгъстяване.

§ 12. Най-дясна и най-лява точка на сгъстяване

Измежду точките на сгъстяване на една редица от числа

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

винаги има една най-дясна и една най-лява дори когато те са безбройно много. Ще установим съществуването на най-дясната точка на сгъстяване; съществуването на най-лява точка се установява по същия начин.

Ако $+\infty$ е точка на сгъстяване на редицата, то $+\infty$ е и най-дясната точка на сгъстяване. Ако $+\infty$ не е точка на сгъстяване, то разглежданата редица е ограничена отгоре. Нека m е една нейна горна граница. Да допуснем, че разглежданата редица притежава поне една собствена точка на сгъстяване и нека M е тяхното множество. Очевидно множеството M е ограничено отгоре, защото вдясно от m няма нито една точка на сгъстяване. Нека l е точната горна граница на M. В такъв случай каквото и да бъде положителното число ε, числото $l-\varepsilon$ не е вече горна граница на M и следователно има поне една точка

на сгъстяване ξ, за която $l-\varepsilon<\xi$. Като вземем под внимание още, че $\xi \leq l$, намираме $l-\varepsilon<\xi<l+\varepsilon$. Оттук следва, че в интервала $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ има безбройно много членове на разглежданата редица

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

т. е. l е една нейна точка на сгъстяване. От друга страна, вдясно от l няма точки на сгъстяване и следователно l е най-дясната точка на сгъстяване. Остана да се разгледа случаят, когато разглежданата редица е ограничена отгоре (т. е. $+\infty$ не е нейна точка на сгъстяване) и няма собствени точки на сгъстяване. В този случай редицата не може да бъде ограничена отдолу, защото в противен случай съгласно теоремата на Болцано—Вайерщрас тя би трябвало да има поне една собствена точка на сгъстяване. И така в този случай единствената точка на сгъстяване на редицата е $-\infty$, която е същевременно и най-дясната точка на сгъстяване. С това доказателството е завършено.

Най-дясната точка на сгъстяване на редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

се означава със символа $\overline{\lim}\, a_n$ и се нарича limes superior (четете — лѝмес суперѝор), а най-лявата ѝ точка на сгъстяване се означава със символа $\underline{\lim}\, a_n$ и се нарича limes inferior (четете — лѝмес инфѐриор).

За да бъде една ограничена редица

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

сходяща, необходимо и достатъчно е да имаме $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$.

При неограничените редици са особено интересни случаите, когато

$$\underline{\lim}\, a_n = +\infty$$

или когато

$$\overline{\lim}\, a_n = -\infty.$$

В първия случай редицата е ограничена отдолу, но няма собствени точки на сгъстяване. Такъв случай имаме тогава и само тогава, когато при всеки избор на числото A неравенството $a_n \leq A$ може да бъде изпълнено най-много за краен брой стойности на n или, с други думи, каквото и да бъде числото A, може винаги да се намери число ν по такъв начин, че при $n>\nu$ да имаме $a_n>A$. В този случай казваме, че редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

дивергира към $+\infty$ (или расте неограничено, или още клони към $+\infty$), и пишем $\lim a_n = +\infty$.

В случая, когато $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$, казваме, че редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

дивергира към $-\infty$, и пишем $\lim a_n = -\infty$. Това е в сила тогава и само тогава, когато при всеки избор на числото A е изпълнено неравенството $a_n < A$ при всички достатъчно големи стойности на n.

Пример. Редицата

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n, \ldots$$

дивергира към $+\infty$.

Редицата

$$-1,\ -2,\ -3, \ldots,\ -n, \ldots$$

дивергира към $-\infty$.

Общи задачи

1. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}.$$

Упътване. Използувайте, че

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Отговор. $\lim a_n = e^2$.

2. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Отговор. $\lim a_n = e$.

3. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n.$$

Отговор. $\lim a_n = e$.

4. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Решение. При $n > 1$

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)},$$

т. е.

$$\lim a_n = \frac{1}{e}.$$

5. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Отговор. $\lim a_n = 1$.

6. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1+\frac{k}{n}\right)^n,$$

където k е цяло положително число.

Упътване. Разсъждавайте индуктивно по k, като използувате, че

$$\left(1+\frac{k+1}{n}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{k}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{1+\frac{k}{n+1}}.$$

Отговор. $\lim a_n = e^k$.

7. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1-\frac{k}{n}\right)^n,$$

където k е цяло положително число.

Упътване. Използувайте, че

$$\left(1-\frac{k+1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{k}{n-1}\right)^n.$$

Отговор. $\lim a_n = \frac{1}{e^k}$.

8. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

монотонно намаляващи, клони към e.

Упътване. Използувайте неравенството на Бернули.

Забележка. Като вземем под внимание, че $a_n \geq 0$, получаваме директно доказателство за сходимост на редицата с общ член $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Това обстоятелство може да се използува, за да се дефинира константата e като $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

9. Да се покаже, че при всички цели положителни стойности на n са валидни неравенствата

$$n^n e^{-n+1} \leq n! \leq n^{n+1} e^{-n+1}.$$

Упътване. Покажете, че редицата с общ член $\frac{n^n e^{-n}}{n!}$ е намаляваща, а редицата с общ член $\frac{n^{n+1} e^{-n}}{n!}$ е растяща.

10. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n + \left(1-\frac{2}{n}\right)^n + \ldots + \left(1-\frac{n-1}{n}\right)^n$$

е сходяща и клони към $\frac{1}{e-1}$.

Упътване. Докажете, че

$$\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \leq \frac{1}{2^k}, \quad k=1, 2, \ldots, n-1,$$

като използувате, че

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\leq\frac{1}{2}$$

и че неравенството на Бернули дава

$$1-\frac{k}{n}\leq\left(1-\frac{1}{n}\right)^k.$$

Нека ε е произволно положително число. Изберете цялото число ν толкова голямо, че да имаме

$$\frac{1}{2^\nu}+\frac{1}{e^\nu(e-1)}<\frac{\varepsilon}{2},$$

и го фиксирайте. Като си послужите с неравенството

$$\left|a_n-\frac{1}{e-1}\right|\leq$$

$$\leq\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-\frac{1}{e}\right|+\left|\left(1-\frac{2}{n}\right)^n-\frac{1}{e^2}\right|+\ldots+\left|\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^n-\frac{1}{e^\nu}\right|+$$

$$+\left(1-\frac{\nu+1}{n}\right)^n+\left(1-\frac{\nu+2}{n}\right)^n+\ldots+\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^n+\frac{1}{e^\nu(e-1)}$$

покажете, че при всички достатъчно големи стойности на n имаме

$$\left|a_n-\frac{1}{e-1}\right|<\varepsilon.$$

11. Нека k е цяло положително число. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\left(1+\frac{1}{kn}\right)^n$$

е сходяща и границата ѝ удовлетворява уравнението $x^k=e$.

Упътване. Като вземете под внимание, че $a_n>0$ и че редицата с общ член $a_{nk}=\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn}$ е поредица на монотонно растящата редица с общ член $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, докажете, че редицата $a_1, a_2, a_3, \ldots$ расте монотонно. След това, като използувате, че

$$\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn}<3\leq 2^k,$$

т. е. че

$$a_n<3,$$

покажете че редицата

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$

е сходяща.

12. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n=\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2}-\frac{n}{3}.$$

Отговор. $\lim a_n=\frac{1}{2}$.

13. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}$$

е сходяща

Упътване. От

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>0$$

се вижда, че редицата е монотонно растяща. От

$$a_n\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{n}{n}=1$$

се вижда, че тя е ограничена отгоре.

14. Покажете, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$

е разходяща.

Упътване. Използувайте неравенството

$$a_{2n}-a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

15. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n}$$

е сходяща, и да се намери нейната граница.

Упътване. Използувайте неравенствата

$$\frac{n^2}{n^2+n}\leq a_n\leq\frac{n^2}{n^2+1}.$$

16. Да се докаже, че редицата

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,$$

за която

$$a_1=\frac{1}{2}$$

и

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2+1}{2},$$

е сходяща, и да се намери нейната граница.

Упътване. Покажете, че редицата е монотонно растяща, като използувате, че

$$a_{n+1}-a_n=\frac{(a_n-1)^2}{2}.$$

Покажете индуктивно, че

$$a_n<1.$$

Отговор. $\lim a_n=1$.

17. Да се покаже, че редицата

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,$$

при която $a_1=2$ и

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2+1}{2}$$

е разходяща.

Решение. Да допуснем, че редицата е сходяща и клони към c. В такъв случай редицата

$$a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, \ldots$$

също клони към c, а редицата

$$a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2, \ldots$$

клони към c^2. Като вземем под внимание, че

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2+1}{2},$$

намираме

$$c=\frac{c^2+1}{2},$$

или $c^2-2c+1=0$, откъдето $c=1$.

От друга страна, редицата $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е монотонно растяща, както това се вижда от равенството

$$a_{n+1}-a_n=\frac{(a_n-1)^2}{2}.$$

Въз основа на това, като вземем под внимание, че $a_1=2$, намираме $a_n\geq 2$. Оттук заключаваме, че точката 1 не е точка на сгъстяване на дадената редица и следователно тази редица не може да клони към 1. По такъв начин предположението, че редицата е сходяща, ни доведе до противоречие, т. е. тя е разходяща.

18. Покажете, че редицата с общ член $a_n=\cos nx$ е разходяща, ако $\cos x\neq 1$.

Решение. Да предположим, че редицата е сходяща и клони към c. В такъв случай нейната подредица

$$\cos 3x, \cos 4x, \ldots, \cos (n+2)x, \ldots$$

е също сходяща и също клони към c, поради което редицата с общ член

$$b_n=\cos nx+\cos (n+2)x$$

клони към $2c$. От друга страна, и редицата, чийто n-ти член е $\cos (n+1)x$, клони към c, т. е. като извършим граничен преход в равенството

$$\cos nx+\cos (n+2)x=2\cos x\cos (n+1)x,$$

намираме

$$2c=2c\cos x$$

и следователно $2c(1-\cos x)=0$. Оттук, като вземем под внимание, че $\cos x\neq 1$, намираме $c=0$. И така, ако дадената редица е сходяща, нейната граница е равна на нула.

От друга страна, като извършим граничен преход в равенството

$$\cos 2nx=2\cos^2 nx-1$$

и вземем под внимание, че редицата

$$\cos 2x, \cos 4x, \ldots, \cos 2nx, \ldots$$

е подредица на дадената редица и следователно клони към c, получаваме $c=2c^2-1$, което очевидно не се удовлетворява при $c=0$. Полученото противоречие се дължи на допускането, че дадената редица е сходяща.

19. Сходяща ли е редицата с общ член $a_n=\cos nx$, когато $\cos x=1$?

20. Да се покаже, че редицата с общ член $a_n=\sin nx$ е разходяща, когато $\sin x\neq 0$.

21. Да се покаже, че редицата $a_1, a_2, a_3, \ldots$, за която $a_1=a$, $a_2=b$ и

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2} \text{ при } n=3, 4, \ldots,$$

е сходяща, и да се намери нейната граница.

Упътване. От равенството

$$a_n-a_{n-1}=-\frac{1}{2}(a_{n-1}-a_{n-2})$$

се вижда, че разликите

$$a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3, \ldots$$

образуват геометрична прогресия. Това обстоятелство ни позволява да изразим a_n чрез n, като използуваме, че

$$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_n-a_{n-1}).$$

Отговор. $\lim a_n=\frac{a+2b}{3}$.

22. Дадени са две редици

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

$$b_1, b_2, b_3, \ldots,$$

където

$$a_1=0,\ b_1=\alpha,$$

$$a_{n+1}=\frac{\alpha+b_n}{1+b_n},$$

$$b_{n+1}=\frac{\alpha+a_n}{1+a_n},$$

$$\alpha\geq 1.$$

Да се докаже, че двете редици са сходящи и клонят към една и съща неотрицателна граница, която удовлетворява уравнението $x^2=\alpha$.

Забележка. Оттук се вижда, че уравнението $x^2=\alpha$ сигурно притежава неотрицателно решение поне при $\alpha\geq 1$. Не е трудно да се убедим, че това уравнение притежава неотрицателно решение и при $0<\alpha\leq 1$, като разгледаме помощното уравнение $y^2=\frac{1}{\alpha}$. Случаят $\alpha=0$ е тривиален. И така уравнението $x^2=\alpha$ сигурно има неотрицателно решение при $\alpha\geq 0$. Това решение е единствено, защото от $p\neq q$ и $p>0$, $q>0$ следва $p^2\neq q^2$ (така, ако $p>q\geq 0$, то $p^2>q^2$). Читателят знае, че неотрицателното решение на уравнението $x^2=\alpha$ при $\alpha\geq 0$ се означава със символа $\sqrt{\alpha}$.

Упътване. Покажете, че

$$a_n\leq a_{n+1}\leq b_{n+1}\leq b_n,$$

като си послужите с равенствата

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{(\alpha-1)(b_n-a_n)}{(1+a_n)(1+b_n)},$$

$$b_n-b_{n+1}=\frac{(\alpha-1)(a_n-a_{n-1})}{(1+a_n)(1+a_{n-1})},$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{(\alpha-1)(b_{n-1}-b_n)}{(1+b_n)(1+b_{n-1})}.$$

За да покажете, че двете редици клонят към една и съща граница, която удовлетворява уравнението $x^2=\alpha$, положете $\lim a_n=a$, $\lim b_n=b$ и използувайте, че

$$a=\frac{\alpha+b}{1+b},$$

$$b=\frac{\alpha+a}{1+a}.$$

З а б е л е ж к а. Интервалите $[a_1,\ b_1]$, $[a_2,\ b_2]$, … образуват Канторова система, която дефинира числото $\sqrt{\alpha}$.

23. Нека a и b са две неотрицателни числа и нека $a\geqq b$, $a\neq 0$. Образуваме двете редици*

$$a_1=\frac{a+b}{2},\ a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\ \ldots,\ a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\ \ldots$$

$$b_1=\frac{2ab}{a+b},\ b_2=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1},\ \ldots,\ b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},\ \ldots$$

Покажете, че тия две редици са сходящи и имат обща граница, която удовлетворява уравнението $x^2=ab$. Използувайте този резултат, за да установите съществуването на неотрицателно решение на уравнението $x^2=c$ при всяко $c\geqq 0$.

У п ъ т в а н е. Покажете, че

$$b_n\leqq b_{n+1}\leqq a_{n+1}\leqq a_n,$$

и използувайте тези неравенства, за да установите, че двете редици са сходящи.

За да покажете, че двете редици имат обща граница, използувайте равенството

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}.$$

За да покажете, че границата на двете редици удовлетворява уравнението, $x^2=c$, използувайте, че $a_{n+1}\ b_{n+1}=a_nb_n$.

За да установите съществуването на неотрицателно решение на уравнението $x^2=c$ при $c\geqq 0$, положете $a=c$, $b=1$ при $c\geqq 1$ и

$$a=1,\quad b=c\quad \text{при } c<1.$$

З а б е л е ж к а. Интервалите $[b_1,\ a_1]$, $[b_2,\ a_2]$, … образуват Канторова система, която дефинира числото $\sqrt{ab}$.

24. Нека a и b са две неотрицателни числа и нека $a\geqq b$. Образуваме двете редици

$$a_1=\frac{a+b}{2},\ a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\ \ldots,\ a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\ \ldots,$$

$$b_1=\sqrt{ab},\ b_2=\sqrt{a_1b_1},\ \ldots,\ b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\ \ldots$$

Покажете, че тези две редици са сходящи и имат обща граница.

* Членът a_{n+1} представлява средна аритметична, а членът b_{n+1} — средна хармонична на членовете a_n и b_n. Едно число c се нарича средна хармонична на двете положителни числа a и b, ако $\frac{1}{c}$ е средна аритметична на $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$, т. е.

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ \text{или}\ c=\frac{2ab}{a+b}$$

З а б е л е ж к а 1. Общата граница на горните две редици се нарича средна аритметично-геометрична на двете числа a и b. Тази средна е използувана от Гаус в теорията на елиптичните интеграли.

З а б е л е ж к а 2. Относно дефиницията на квадратния корен вж. първата забележка към зад. 22.

У п ъ т в а н е. За да установите сходимостта на редиците, докажете, че

$$b_n\leqq b_{n+1}\leqq a_{n+1}\leqq a_n,$$

а за да покажете, че те клонят към обща граница, използувайте, че

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}.$$

24. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

е сходяща, и да се намери нейната граница.

У п ъ т в а н е. Използувайте, че

$$\frac{n^2}{n^2+n}\leqq\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqq a_n\leqq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\leqq 1$$

26. Нека редицата

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

е сходяща и клони към a. Да се покаже, че редицата

$$\frac{a_1}{1},\ \frac{a_1+a_2}{2},\ \frac{a_1+a_2+a_3}{3},\ \ldots,\ \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},\ \ldots$$

е също сходяща и клони към a.

У п ъ т в а н е. Нека $\varepsilon>0$. Изберете m толкова голямо, че при $p>m$ да имаме $|a_p-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. В такъв случай при $n>m$

$$\left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}-a\right|=$$

$$=\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\ldots+(a_m-a)+(a_{m+1}-a)+\ldots+(a_n-a)}{n}\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\ldots+|a_m-a|+|a_{m+1}-a|+\ldots+|a_n-a|}{n}\leqq$$

$$\leqq\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\ldots+|a_m-a|}{n}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{n-m}{n}.$$

Фиксирайте m. Тогава при всички достатъчно големи стойности на n

$$\left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}-a\right|<\varepsilon.$$

27. Една редица

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$

се нарича лимитируема с помощта на средни аритметични, ако редицата

$$\frac{a_1}{1},\ \frac{a_1+a_2}{2}, \ldots, \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}, \ldots$$

е сходяща. Границата на

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

се нарича обобщена граница на a_n. От предната задача се вижда, че всяка сходяща редица е лимитируема с помощта на средни аритметични и нейната обобщена граница е равна на редовната ѝ граница.

Да се покаже, че разходящата редица с общ член $a_n=\cos nx$ е лимитируема с помощта на средни аритметични и нейната обобщена граница е равна на нула, когато $\cos x \neq 1$.

Упътване. Използувайте, че

$$\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\cos\frac{n+1}{2}x \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

28. Нека

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots$$

са две редици от числа. Ако редицата

$$b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots$$

расте неограничено, като при това

$$b_n<b_{n+1} \text{ и } b_n \neq 0,$$

то от съществуването от границата

$$l=\lim\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$$

следва, че редицата

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots$$

е сходяща и клони също към l.

Упътване. Нека $\varepsilon>0$. Изберете m толкова голямо, че при $n>m$ да имате

$$\left|\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}-l\right|<\varepsilon,$$

. е.

$$(l-\varepsilon)(b_n-b_{n-1})<a_n-a_{n-1}<(l+\varepsilon)(b_n-b_{n-1}).$$

Нека цялото число k е по-голямо от m. В такъв случай, като дадете на n стойностите $m+1,\ m+2, \ldots, k$ и съберете получените неравенства, ще намерите

$$(l-\varepsilon)(b_k-b_m)<a_k-a_m<(l+\varepsilon)(b_k-b_m),$$

т. е.

$$\left|\frac{a_k-a_m}{b_k-b_m}-l\right|<\varepsilon.$$

Оттук, като вземете под внимание, че

$$\left|\frac{a_k}{b_k}-l\right|=\left|\frac{a_m}{b_k}-\frac{b_m}{b_k}\frac{a_k-a_m}{b_k-b_m}+\frac{a_k-a_m}{b_k-b_m}-l\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{a_m}{b_k}\right|+\left|\frac{b_m}{b_k}\right|\left|\frac{a_k-a_m}{b_k-b_m}\right|+\left|\frac{a_k-a_m}{b_k-b_m}-l\right|,$$

ще намерите

$$\left|\frac{a_k}{b_k}-l\right|<\left|\frac{a_m}{b_k}\right|+\left|\frac{b_m}{b_k}\right|(|l|+\varepsilon)+\varepsilon.$$

Фиксирайте m. Тогава при всички достатъчно големи стойности на k ще получите

$$\left|\frac{a_k}{b_k}-l\right|<2\varepsilon.$$

29. Нека k е цяло положително число. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$$

е сходяща и да се намери нейната граница.

Упътване. Използувайте предната задача.

Отговор. $\lim a_n=\frac{1}{k+1}$.

30. Нека редиците

$$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots$$
$$b_0,\ b_1,\ b_2, \ldots$$

са сходящи и $\lim a_n=a$, $\lim b_n=b$. Да се покаже, че редицата с общ член

$$c_n=\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{n+1}$$

е сходяща и клони към ab.

31. Нека a е произволно неотрицателно число и k е цяло число, по-голямо от 1. Да се покаже, че редицата

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,$$

където x_1 е произволно число и

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^k-a}{kx_n^{k-1}},$$

е сходяща и че нейната граница е неотрицателна и удовлетворява уравнението $x^k=a$.

Упътване. Покажете, че $x_n>0$, като използувате равенството

$$x_{n+1}=\frac{(k-1)x_n^k+a}{kx_n^{k-1}}.$$

След това покажете, е $x_{n+1}^k \geq a$ при $n=1, 2, 3, \ldots$, като си послужите с неравенството на Бернули по следния начин:

$$x_{n+1}^k-a=\left(x_n-\frac{x_n^k-a}{kx_n^{k-1}}\right)^k-a=$$

$$=x_n^k\left(1-\frac{x_n^k-a}{kx_n^k}\right)^k-a\geq$$

$$\geq x_n^k\left(1-k\frac{x_n^k-a}{kx_n^k}\right)-a=0.$$

По-нататък покажете, че редицата

$$x_2, x_3, \ldots$$

монотонно намалява, като използувате за целта равенството

$$x_{n+1}-x_n=-\frac{x_n^k-a}{kx_n^{k-1}}.$$

32. Нека k е цяло положително число. Покажете, че уравнението $x^k=a$ не може да има повече от един неотрицателен корен.

Упътване. Използувайте, че при $p\geq 0$ от неравенството $q>p$ следва неравенството $q^k>p^k$, нещо което може да се установи например индуктивно чрез почленно умножаване на двете неравенства $q^{k-1}>p^{k-1}$ и $q>p$.

Забележка. Единственото (съгласно зад. 32) и сигурно съществуващото (съгласно зад. 31) неотрицателно решение на уравнението $x^k=a$ при $a\geq 0$ се означава със символа $\sqrt[k]{a}$ или $a^{\frac{1}{k}}$.

От този момент нататък ние постоянно ще използуваме тези символи.

33. Нека k е цяло положително число и a е неотрицателно число. На всяко цяло положително число n съпоставяме най-голямото цяло неотрицателно число p_n, за което е в сила неравенството

$$\left(\frac{p_n}{n}\right)^k\leq a.$$

Покажете, че редицата с общ член $\frac{p_n}{n}$ е сходяща и клони към $\sqrt[k]{a}$.

Упътване. Покажете, че при всяко цяло положително m имаме

$$a<\left(\frac{p_m+1}{m}\right)^k$$

и следователно при всеки избор на двете цели положителни числа n и m е в сила неравенството

$$\frac{p_n}{n}<\frac{p_m+1}{m}.$$

Извлечете оттук, че

$$\left|\frac{p_n}{n}-\frac{p_m}{m}\right|<\frac{1}{n}+\frac{1}{m}.$$

Това ни дава възможност да приложим теоремата на Коши от § 10 на тази глава.

34. Нека редицата от неотрицателни числа

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

е сходяща и клони към a и нека k е цяло число, по-голямо от 1. Да се докаже, че редицата

$$\sqrt[k]{a_1}, \sqrt[k]{a_2}, \sqrt[k]{a_3}, \ldots$$

е сходяща и клони към $\sqrt[k]{a}$.

Упътване. При $a>0$ използувайте, че

$$\left|\sqrt[k]{a}-\sqrt[k]{a_n}\right|=\frac{|a-a_n|}{a^{\frac{k-1}{k}}+a^{\frac{k-2}{k}}a_n^{\frac{1}{k}}+\ldots+a_n^{\frac{k-1}{k}}}\leq\frac{|a-a_n|}{a^{\frac{k-1}{k}}}.$$

При $a=0$ използувайте, че каквото и да бъде положителното число ε, при всички достатъчно големи стойности на n имаме $a_n<\varepsilon^k$ и следователно $\sqrt[k]{a_n}<\varepsilon$.

35. Нека $a>0$. Да се докаже, че редицата с общ член

$$a_n=\sqrt[n]{a}$$

клони към 1.

Упътване. Нека $a\geq 1$. Положете $\sqrt[n]{a}-1=\alpha_n$. В такъв случай $\alpha_n\geq 0$. Очевидно $a=(1+\alpha_n)^n$, т. е. съгласно неравенството на Бернули

$$a\geq 1+n\alpha_n,$$

откъдето $0\leq\alpha_n\leq\frac{a-1}{n}$ и следователно $\lim\alpha_n=0$. Аналогично се разглежда случаят, когато $0<a<1$.

36. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\sqrt[n]{n}$$

клони към 1.

Упътване. Положете $\sqrt[n]{n}-1=\alpha_n$. В такъв случай $\alpha_n \geq 0$ и $n=(1+\alpha_n)^n$ и следователно

$$n=1+\frac{n}{1!}\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2+\ldots,$$

откъдето

$$n>\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2, \text{ т. е. при } n>1$$

$$\alpha_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

37. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\left(\frac{1+\sqrt[n]{e}}{2}\right)^n$$

е сходяща и да се пресметне нейната граница.

Упътване. Като използувате неравенствата

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n,$$

валидни при $n=2, 3, \ldots$, покажете, че

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n<a_n<\left(1+\frac{1}{2(n-1)}\right)^n.$$

Отговор. $\lim a_n=\sqrt{e}$.

38. Ако съществува границата

$$l=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

и $a_n>0$, то редицата с общ член

$$b_n=\sqrt[n]{a_n}$$

е сходяща и клони към l.

Упътване. Да разгледаме случая, когато $l>0$. Нека ε е произволно положително число, по-малко от l. Избираме m толкова голямо, че при $n\geq m$ да имаме

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l\right|<\varepsilon$$

или

$$l-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<l+\varepsilon.$$

Нека k е цяло число, по-голямо от m. В такъв случай, като дадем на n стойностите $m, m+1, \ldots, k-1$ и умножим получените неравенства, ще получим

$$(l-\varepsilon)^{k-m}<\frac{a_k}{a_m}<(l+\varepsilon)^{k-m}$$

или

$$(l-\varepsilon)\frac{\sqrt[k]{a_m}}{\sqrt[k]{(l-\varepsilon)^m}}<\sqrt[k]{a_k}<(l+\varepsilon)\frac{\sqrt[k]{a_m}}{\sqrt[k]{(l+\varepsilon)^m}}.$$

Фиксираме m. В такъв случай, като вземем под внимание, че

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_m}=1, \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{(l+\varepsilon)^m}=1$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{(l-\varepsilon)^m}=1,$$

получаваме при достатъчно големи стойности на k

$$l-2\varepsilon<\sqrt[k]{a_k}<l+2\varepsilon.$$

Случаят $l=0$ се разглежда още по-просто.

39. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

е сходяща и клони към $\frac{1}{e}$.

Упътване. Използувайте зад. 38.

40. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}$$

е сходяща и да се пресметне нейната граница.

Упътване. Използувайте зад. 38.

Отговор. $\lim a_n=\frac{4}{e}$.

41. Нека $x>0$. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=2^n\left(\sqrt[2^n]{x}-1\right)$$

е сходяща.

Упътване. Да разгледаме първо случая, когато $x>1$. В такъв случай $a_n>0$. Покажете, че в този случай

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\sqrt[2^{n+1}]{x}+1}{2}>1$$

Случаят, когато $0<x<1$, може да се сведе към разгледания, като се вземе под внимание, че

$$a_n=-2^n\left(\sqrt[2^n]{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot\sqrt[2^n]{x}.$$

Случаят, когато $x=1$, е тривиален.
Забележка. Границата на разгледаната редица

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

се означава обикновено със символа $\ln x$. По-късно ще се запознаем с други дефиниции на този символ, които са еквивалентни на тази, която даваме сега.

42. Като се използува дефиницията на символа $\ln x$ от предната задача, да се докаже, че при всички положителни стойности на x и y имаме

$$\ln xy=\ln x+\ln y,$$

$$\ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y.$$

Упътване. Използувайте, че

$$n\,(\sqrt[n]{xy}-1)=\sqrt[n]{x}\,.\,n(\sqrt[n]{y}-1)+n(\sqrt[n]{x}-1),$$

$$n\left(\sqrt[n]{\frac{x}{y}}-1\right)=n(\sqrt[n]{x}-1)-n(\sqrt[n]{y}-1)\sqrt[n]{\frac{x}{y}}.$$

43. Да се докаже, че при всички стойности на x редицата с общ член

$$a_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

е сходяща.
Упътване. При $x\geq 0$ използувайте, че

$$a_n=1+\frac{x}{1\,!}+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{x^3}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{x^n}{n\,!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

и покажете, че редицата е монотонно растяща и ограничена.

При $x<0$ положете $-x=t$ и използувайте, че

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{t}{n-t}\right)^n},$$

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\leq\left(1+\frac{t}{n-t}\right)^n\leq\left(1+\frac{t}{n-k}\right)^{n-k}\left(1+\frac{t}{n-k}\right)^k,$$

където k е цяло число, по-голямо от t, и $n>k$.

Забележка. Границата на разгледаната редица се означава със символа e^x. По-късно ще се запознаем с друга еквивалентна дефиниция.

44. Нека

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

е произволна редица от реални числа. Нека b_n е точната горна граница на редицата

$$a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots$$

Да се покаже, че $\overline{\lim}\ a_n=\lim\ b_n$.

Забележка. Това твърдение е вярно и тогава, когато редицата $a_1,\ a_2,\ \ldots$ не е ограничена отгоре. В този случай трябва да се смята по дефиниция

$$b_n=\infty \text{ и } \lim\ b_n=\infty.$$

ГЛАВА III

БЕЗКРАЙНИ РЕДОВЕ

§ 1. Сходимост на редовете

Символ от вида

(1) $$u_1+u_2+u_3+\ldots,$$

или по-кратко

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

се нарича **ред**. Този символ, разбира се, е лишен от всякакъв смисъл, докато не сме казали какво ще означаваме с него. Символът (1) се различава съществено от аналогични символи, които са съставени от краен брой събираеми, по това, че ние знаем какво означава сума от краен брой събираеми, но още никъде не сме казали какво означава съдържащият безбройно много събираеми символ (1).

Сумата

$$u_1+u_2+\ldots+u_n$$

от първите n члена на реда (1) ще наричаме негова n-та частична (парциална) сума. Тя във всеки случай има смисъл за нас, защото е съставена от краен брой събираеми. Да означим тази n-та частична сума с s_n, т. е.

$$s_1=u_1,\ s_2=u_1+u_2,\ s_3=u_1+u_2+u_3,\ldots,$$

и да разгледаме безкрайната редица от числа

(2) $$s_1,\ s_2,\ s_3,\ldots$$

Ако редицата (2) е сходяща, ще казваме, че и редът (1) е сходящ (в противен случай ще казваме, че той е разходящ). Границата на редицата (2) се нарича сума на реда (1). И така **един ред се нарича сходящ, когато редицата от частичните му суми е сходяща. Сума на един сходящ ред се нарича границата на редицата от частичните му суми.**

Когато редът (1) е сходящ, символът (1) се използва за означаване на сумата му. И така ние казахме какво ще означаваме със символа (1) *само* когато редът е сходящ, т. е. за разлика от крайните суми символът

$$u_1+u_2+u_3+\ldots$$

означава число само в някои случаи.

Пример 1. Редът

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\,(n+1)}+\ldots$$

е сходящ. За да покажем това, разглеждаме неговата n-та частична сума

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\,(n+1)}=$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Редицата с общ член $1-\frac{1}{n+1}$ е сходяща и клони към 1. И така ние не само установихме, че редът е сходящ, но и пресметнахме неговата сума.

Пример 2. Редът

$$1+1+1+\ldots$$

е разходящ, защото редицата от частичните му суми

$$1,\ 2,\ 3,\ldots$$

е неограничена и следователно разходяща.

Пример 3. Редът*

$$1-1+1-1+1-\ldots$$

е също разходящ, защото редицата от частичните му суми

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ldots$$

има две точки на сгъстяване и следователно е разходяща.

И така ние въведохме понятието сума само за сходящите редове и следователно само за такива редове ще можем да се ползуваме от това понятие (освен ако не го дефинираме другояче).

В теорията на редовете от основно значение е да умеем да определяме дали един ред е сходящ или разходящ. Тук ще дадем едно важно необходимо условие за сходимост на един ред.

---

* Ние тук имаме пред вид реда

$$1+(-1)+1+(-1)+\ldots$$

С подобни съкращения в означенията ние често ще си служим в бъдеще.

За да бъде един ред

$$u_1+u_2+u_3+\dots$$

сходящ, необходимо е редицата от членовете му

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\dots$$

да клони към нула.

Да допуснем, че редът е сходящ. В такъв случай редицата от частичните му суми

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\dots,\ S_n,\dots$$

е сходяща. Нейната подредица

$$S_2,\ S_3,\dots,\ S_{n+1},\dots$$

следователно е сходяща и клони към същата граница, поради което редицата с общ член

$$u_{n+1}=S_{n+1}-S_n$$

клони към нула.

Така например редът

$$1+2+3+\dots+n+\dots$$

сигурно не е сходящ, защото общият му член не клони към нула.

Установеното условие обаче не е достатъчно. Да вземем за пример реда

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots,$$

който се нарича хармоничен ред. Общият му член клони към нула, но редът не е сходящ. Наистина нека S_n е n-тата му частична сума. Ако допуснем, че редицата

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\dots,\ S_n,\dots$$

е сходяща, то нейната подредица

$$S_2,\ S_4,\ S_8,\dots,\ S_{2n},\dots$$

трябва също да бъде сходяща и да клони към същата граница, поради което разликата $S_{2n}-S_n$ трябва да клони към нула. Това обаче не е вярно, защото

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\geqq$$

$$\geqq\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

§ 2. Геометрична прогресия

В бъдеще ние често ще си служим с безкрайния ред

$$1+x+x^2+\dots+x^{n-1}+\dots,$$

който се нарича геометрична прогресия. При $|x|\geqq 1$ този ред е разходящ, защото $|x|^{n-1}\geqq 1$, и следователно общият му член не клони към нула. Ние ще покажем обаче, че при $|x|<1$ този ред е сходящ и сумата му е $\frac{1}{1-x}$. И наистина нека S_n е неговата n-та частична сума. Очевидно имаме

$$S_n=1+x+x^2+\dots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}.$$

Тъй като $|x|<1$, то редицата с общ член $|x^n|=|x|^n$ клони към нула. Оттук следва, че и редицата с общ член $\frac{x^n}{1-x}$ също клони към нула, т. е. редицата с общ член S_n е сходяща и клони към $\frac{1}{1-x}$. И така при $|x|<1$ геометричната прогресия е сходяща и

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots$$

§ 3. Общо условие на Коши за сходимост на редовете

За да бъде редът

$$u_1+u_2+u_3+\cdots$$

сходящ, е необходимо и достатъчно за всяко положително число ε да може да се намери такова число ν, че при $n>\nu$ да е изпълнено неравенството

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{n+p}|<\varepsilon$$

каквото и да е цялото положително число p.

И наистина, ако означим n-тата частична сума на дадения ред с S_n, получаваме

$$S_{n+p}-S_n=u_{n+1}+\dots+u_{n+p}.$$

Това ни дава възможност да редактираме по следния начин горната теорема: за да бъде редът

$$u_1+u_2+\cdots$$

сходящ, необходимо и достатъчно е на всяко положително число ε да може да се съпостави число ν така, че при $n>\nu$ да е изпълнено неравенството

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon \tag{1}$$

при всички цели положителни стойности на p.

При тази редакция на теоремата нейната вярност е очевидна. Тя изразява, че за да бъде един ред сходящ, необходимо и достатъчно е редицата от частичните му суми да удовлетворява условието (1) (т. е. да бъде сходяща).

§ 4. Елементарни свойства на редовете

Ако от един сходящ ред

$$u_1+u_2+u_3+\cdots$$

премахнем краен брой членове

$$u_1+u_2+\cdots+u_k$$

получаваме сходящ ред. Ако от един разходящ ред премахнем краен брой членове, получаваме пак разходящ ред. И наистина да разгледаме двата реда

$$u_1+u_2+u_3+\cdots, \tag{1}$$

$$u_{k+1}+u_{k+2}+u_{k+3}+\cdots \tag{2}$$

Нека n-тата частична сума на реда (2) е σ_n и $k+n$-тата частична сума на реда (1) е S_{k+n}. В такъв случай имаме

$$S_{k+n}=(u_1+u_2+\cdots+u_k)+\sigma_n. \tag{3}$$

От това равенство е ясно, че редицата с общ член σ_n е сходяща тогава и само тогава, когато редицата с общ член S_{k+n} е сходяща.

Нека S е сумата на реда (1) и σ е сумата на реда (2). Като извършим граничен преход в равенството (3), ще получим

$$S=u_1+u_2+\cdots+u_k+\sigma.$$

Аналогично се вижда, че ако към един сходящ (съответно разходящ) ред прибавим краен брой членове, получаваме пак сходящ (съответно разходящ) ред.

Читателят знае как се смята с крайни суми. Ние сега обаче изучаваме безкрайни суми. Разбира се, ако сме доказали някое твърдение за крайни суми, но не сме го доказали за безкрайни редове, не можем да твърдим, че доказаното от нас е валидно и за безкрайните

редове. Има много случаи, при които за безкрайните редове не са верни твърдения, които ние знаем за суми с краен брой събираеми, дори когато броят на събираемите може да бъде произволно голям. Обяснението на това явление е просто: макар за суми с краен брой събираеми ние и да сме доказали тези твърдения, за верността им при безкрайните суми не сме дали доказателство. Ето един пример: ние знаем, че при суми с краен брой събираеми могат да се разкриват скоби, като се спазват познатите правила; при безкрайните редове това не винаги може да се прави; така например редът

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

или, което е все също,

$$0+0+0+\cdots$$

е сходящ, защото редицата от частичните му суми е съставена от нули и следователно е сходяща; сумата на реда е нула. Ако разкрием формално скобите, получаваме ред, който няма сума:

$$1-1+1-1+\cdots$$

Този ред е разходящ, защото общият му член не клони към нула. Поставяме отново скоби, обаче този път по следния начин:

$$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots$$

Така получаваме реда

$$1+0+0+0+\cdots.$$

Този ред е сходящ и сумата му е 1, защото редицата от парциалните му суми клони към 1.

Разбира се, няма нищо странно в това, че макар и да сме доказали някоя теорема при някои условия, заключението може и да не е вярно, ако не са налице условията, при които е извършено доказателството.

Впоследствие често ще се ползуваме от следното свойство на сходящите редове: нека

$$u_1+u_2+\cdots,$$

$$v_1+v_2+\cdots$$

са два сходящи реда, сумите на които са съответно S и σ, и нека a и b са две произволни числа. В такъв случай редът

$$(au_1+bv_1)+(au_2+bv_2)+(au_3+bv_3)+\cdots \tag{4}$$

е сходящ и сумата му е $aS+b\sigma$.

И наистина нека S_n, σ_n и Σ_n са n-тите частични суми съответно на първия, втория и третия ред. Очевидно имаме

$$\Sigma_n=(au_1+bv_1)+\cdots+(au_n+bv_n)=$$
$$=a(u_1+u_2+\cdots+u_n)+b(v_1+v_2+\cdots+v_n)=aS_n+b\sigma_n.$$

Тези пресмятания са напълно законни, защото са извършени с крайни суми. Тъй като редиците с общи членове S_n и σ_n са сходящи, то и редицата с общ член $aS_n+b\sigma_n$ е също сходяща и клони към $aS+b\sigma$. И така доказахме, че редът (4) е сходящ и че

$$aS+b\sigma=(au_1+bv_1)+(au_2+bv_2)+\cdots$$

Специално при $a=b=1$ получаваме едно правило за почленно събиране на два сходящи реда, при $a=1$, $b=-1$ имаме правило за почленно изваждане на два сходящи реда, а при $b=0$ имаме правило за умножаване на един ред с едно число (дистрибутивен закон при безкрайните редове).

Редът $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k+v_k)$ се нарича сума, а редът $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k-v_k)$ се нарича разлика на двата реда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$. И така както сумата, така и разликата на два сходящи реда е сходящ ред.

Ако редът $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ е сходящ, то каквото и да е числото λ, редът $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda u_k$ е също сходящ.

§ 5. Редове с неотрицателни* членове

Ако членовете на един ред

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

са неотрицателни, то редицата от частичните му суми

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\cdots$$

расте монотонно, тъй като

$$S_n-S_{n-1}=u_n\geqq 0.$$

* Терминът „неотрицателни" значи положителни или нули.

Оттук следват редица свойства на такива редове. Така например никоя частична сума на един сходящ ред с неотрицателни членове не надминава сумата на този ред, защото, както знаем, членовете на една монотонно растяща сходяща редица не надминават границата ѝ. Също така от монотонността на редицата от частичните суми следва, че за да бъде един ред с неотрицателни членове сходящ, необходимо и достатъчно е редицата от частичните му суми да бъде ограничена. Ние в бъдеще много често ще използуваме това свойство. Върху него се основава така нареченият принцип за сравняване на редовете. Този принцип може да се формулира така:

Ако членовете на един ред

$$(1)\qquad u_1+u_2+u_3+\cdots$$

са неотрицателни и не надминават съответните членове на един сходящ ред

$$(2)\qquad v_1+v_2+v_3+\cdots$$

(т. е. ако $0\leqq u_n\leqq v_n$), то редът (1) е сходящ.

Доказателството може да се извърши така: нека S_n и σ_n са n-тите частични суми съответно на редовете (1) и (2). Очевидно

$$S_n\leqq\sigma_n.$$

Редът (2) е сходящ, следователно редицата от частичните му суми е ограничена (тъй като е сходяща). Нека σ е една горна граница на тази редица. Очевидно имаме

$$S_n\leqq\sigma_n\leqq\sigma,$$

т. е. редицата с общ член S_n е също ограничена, и тъй като е монотонно растяща, тя е сходяща. С това доказателството се завършва.

Пример 1. Да се изследва дали е сходящ или разходящ редът

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Изследването може да се извърши така: вместо да изследваме дадения ред, достатъчно е да изследваме реда

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots,$$

който са получава от дадения, след като премахнем първия му член; така полученият ред обаче е сходящ, защото членовете му не са отрицателни и не надминават съответните членове на сходящия ред

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

Пример 2. Редът

$$\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\dots+\frac{2}{2n-1}+\dots$$

е разходящ. И наистина в противен случай, използувайки неравенството

$$\frac{2}{2n-1}>\frac{1}{n},$$

бихме заключили, че хармоничният ред

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

е сходящ, което, както знаем, не е вярно.*

§ 6. Признаци (критерии) за сходимост на редове с положителни членове

Ние ще дадем някои достатъчни условия за сходимост и за разходимост на редове с положителни** членове.

Критерий на Даламбер (d'Alembert). За да бъде един ред с положителни членове

$$u_1+u_2+u_3+\dots \tag{1}$$

сходящ, достатъчно е да бъде изпълнено неравенството

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqq q \tag{2}$$

от известно n нататък, където $q<1$. За да бъде редът (1) разходящ, достатъчно е да имаме от известно n нататък

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqq 1.$$

* Аналогично може да се установи по-общо следното: ако $0\leqq u_n\leqq v_n$ и ако редът

$$u_1+u_2+\dots$$

е разходящ, то редът

$$v_1+v_2+\dots$$

е също разходящ. И наистина, ако допуснем, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ е сходящ, ще следва, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е също сходящ, което не е вярно.

** Терминът „положителни" трябва да се разбира в смисъл на „съществено положителни", т. е. всички различни от нула, за разлика от термина „неотрицателни", който допуска някои от членовете да са нули.

Доказателство. Ще започнем с първата част на твърдението. Нека при $n\geqq k$ имаме $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqq q$. В такъв случай $u_{n+1}\leqq qu_n$. Оттук получаваме последователно неравенствата

$$u_{k+1}\leqq qu_k,$$
$$u_{k+2}\leqq qu_{k+1}\leqq q^2u_k,$$
$$u_{k+3}\leqq qu_{k+2}\leqq q^3u_k,$$
$$\dots\dots\dots$$

които показват, че членовете на реда

$$u_k+u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots \tag{3}$$

не надминават съответните членове на сходящата геометрична прогресия

$$u_k+u_kq+u_kq^2+\cdots$$

(тази геометрична прогресия е сходяща, защото се получава, като умножим с числото u_k всички членове на прогресията

$$1+q+q^2+\cdots,$$

за която ние вече знаем, че е сходяща, тъй като $0<q<1$).

И така редът (3) е сходящ. Това обаче е достатъчно, за да твърдим, че и редът

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_k+\cdots$$

е също сходящ.

За да докажем втората част от теоремата, достатъчно е да забележим, че ако $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqq 1$, то $u_{n+1}\geqq u_n$. И така редицата от положителните числа

$$u_k,\ u_{k+1},\cdots$$

монотонно расте и следователно не клони към нула (тъй като $u_n\geqq u_k$ при $n\geqq k$). Това е достатъчно, за да твърдим, че редът (1) не е сходящ.

Нека отбележим изрично, че ние не предположихме съществуването на $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Когато тази граница съществува, на критерия на Даламбер може да се даде следната, макар и по-малко обща, но по-удобна форма.

Ако редицата

$$\frac{u_2}{u_1},\ \frac{u_3}{u_2},\ \frac{u_4}{u_3},\dots \tag{4}$$

е сходяща и клони към граница, която е по-малка от 1, редът е сходящ. Когато тази редица клони към граница, която е по-голяма от 1, редът е разходящ, но когато редицата (4) клони към единица, без обаче поне от известно място нататък членовете ѝ да остават по-големи или равни на единица, критерият на Даламбер не ни дава никакво указание за сходимостта или разходимостта на реда.

Ако $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l<1$, то за всички достатъчно големи стойности на n имаме $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<\frac{1-l}{2}$, тъй като числото $\frac{1-l}{2}$ е съществено положително. Оттук получаваме $\frac{u_{n+1}}{u_n}-l<\frac{1-l}{2}$ и следователно

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\frac{1-l}{2}=\frac{1+l}{2}.$$

Това е достатъчно, за да твърдим, че редът (1) е сходящ, защото

$$\frac{1+l}{2}<\frac{1+1}{2}=1,$$

а следователно е изпълнено достатъчното условие за сходимост на Даламбер.

В случай че $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=l>1$, то за всички достатъчно големи стойности на n имаме $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, което ни осигурява разходимостта на реда (1).

Накрая нека споменем, че ние изрично изключихме случаите, при които редът притежава членове, равни на нула, за да имаме свободата да делим с тях. Разбира се, достатъчно би било да се иска членовете на реда (1) да са положителни от известно място нататък.

Пример. Редът $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$ е сходящ, защото

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!}=\frac{1}{n+1} \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0.$$

Критерий на Коши (Cauchy)

За да бъде един ред с неотрицателни членове

$$u_1+u_2+u_3+\cdots \tag{5}$$

сходящ, достатъчно е да бъде изпълнено неравенството*

$$\sqrt[n]{u_n}\leqq q$$

за всички достатъчно големи стойности на n, където $q<1$. За да бъде редът (5) разходящ, достатъчно е за безбройно много стойности на n да е изпълнено неравенството $\sqrt[n]{u_n}\geqq 1$.

Доказателство. Ще започнем с първата част на твърдението. От неравенството $\sqrt[n]{u_n}\leqq q$ получаваме $u_n\leqq q^n$, т. е. членовете на дадения ред поне от известно място нататък не надминават съответните членове на една сходяща геометрична прогресия (тук използуваме, че $0\leqq q<1$). Това е достатъчно, за да ни осигури сходимостта на реда (5), тъй като членовете му са неотрицателни.

Доказателството на втората част може да се извърши така: от $\sqrt[n]{u_n}\geqq 1$ получаваме неравенството $u_n\geqq 1$, което е изпълнено за безбройно много стойности на n. И така u_n сигурно не клони към нула когато n расте неограничено, и следователно редът (5) не е сходящ

Ние досега не изисквахме редицата с общ член $\sqrt[n]{u_n}$ да е сходяща. Ако се случи обаче $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$ да съществува, то на критерия на Коши може да се даде следната по-удобна форма (макар и не толкова обща):

Ако $\lim\sqrt[n]{u_n}=l$ съществува и $l<1$, редът е сходящ. Ако $l>1$, редът е разходящ. Ако $l=1$, критерият на Коши не ни дава никакво указание за сходимостта на разглеждания ред.

Нека $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l<1$. Избираме произволно число q, за което $l<q<1$ (такова число може да се избере, защото $l<1$). В такъв случай за всички достатъчно големи стойности на n ще имаме $\sqrt[n]{u_n}<q$, което е достатъчно, за да твърдим, че редът (5) е сходящ.

Ако $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l>1$, то за всички достатъчно големи стойности на n имаме $\sqrt[n]{u_n}\geqq 1$ и следователно редът (5) е разходящ.

* Вж. относно дефиницията на действието коренуване зад. 31 и 32 в края на глава 2.

Пример. Редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$ е сходящ, защото

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0.$$

Критерий на Раабе и Дюамел (Raabe—Duhamel). Нека

$$u_1+u_2+u_3+\ldots \tag{6}$$

е един ред с положителни членове. Определяме числото α_n от уравнението

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha_n}.$$

Ако за всички достатъчно големи стойности на n произведението $n\alpha_n$ не е по-малко от едно (независещо от n) число, което е по-голямо от 1, редът (6) е сходящ. Ако от известно място нататък това произведение е по-малко или равно на 1, редът е разходящ.

И наистина очевидно

$$\alpha_n=\frac{u_n-u_{n+1}}{u_{n+1}}.$$

Ако при $n\geqq k$ имаме $n\alpha_n\geqq\mu$, където $\mu>1$, то

$$n\frac{u_n-u_{n+1}}{u_{n+1}}\geqq\mu,$$

откъдето получаваме последователно

$$nu_n-nu_{n+1}\geqq\mu u_{n+1},$$

$$nu_n-(n+1)\,u_{n+1}\geqq(\mu-1)u_{n+1}.$$

Събираме почленно неравенствата

$$ku_k-(k+1)u_{k+1}\geqq(\mu-1)u_{k+1},$$

$$(k+1)u_{k+1}-(k+2)u_{k+2}\geqq(\mu-1)u_{k+2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(k+p-1)u_{k+p-1}-(k+p)u_{k+p}\geqq(\mu-1)u_{k+p},$$

които се получават, когато на n даваме последователно стойностите k, $k+1,\ldots,\ k+p-1$, и получаваме

$$ku_k-(k+p)u_{k+p}\geqq(\mu-1)\,(u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_{k+p})$$

или

$$u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_{k+p}\leqq\frac{ku_k-(k+p)u_{k+p}}{\mu-1}<\frac{ku_k}{\mu-1}.$$

Полученото неравенство ни учи, че редицата от частичните суми на реда

$$u_{k+1}+u_{k+2}+u_{k+3}+\ldots$$

е ограничена — нещо, което е достатъчно, за да твърдим, че редът е сходящ, тъй като членовете му са положителни. От доказаното следва, че и редът

$$u_1+u_2+u_3+\ldots$$

е сходящ.

Сега ще преминем към втората част на теоремата. Да допуснем, че при $n\geqq k$ имаме $n\alpha_n\leqq 1$, т. е.

$$n\frac{u_n-u_{n+1}}{u_{n+1}}\leqq 1$$

или

$$nu_n\leqq(n+1)\,u_{n+1}.$$

Оттук получаваме

$$ku_k\leqq(k+1)u_{k+1}\leqq\ldots\leqq(k+p)\,u_{k+p},$$

т. е.

$$\frac{ku_k}{k+p}\leqq u_{k+p}.$$

Ако допуснем, че редът (6) е сходящ, оттук ще следва, че и редът

$$\frac{ku_k}{k+1}+\frac{ku_k}{k+2}+\frac{ku_k}{k+3}+\ldots \tag{7}$$

е сходящ, което не е вярно, защото в противен случай редът

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots$$

(който се получава от реда (7), след като се умножи с $\frac{1}{ku_k}$) трябва да бъде сходящ, откъдето пък би следвала сходимостта на хармоничния ред

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots$$

Но ние знаем, че хармоничният ред е разходящ. От това следва, че и редът (6) не може да бъде сходящ.

Пример. Да разгледаме реда

$$\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}+\ldots$$

Тук

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+1}{2n+2}.$$

Това число клони към 1 чрез стойности, по-малки от 1, т. е. критерият на Даламбер не ни дава никакво указание за сходимостта или разходимостта на реда. Ние обаче ще приложим тук критерия на Раабе—Дюамел. От уравнението

$$\frac{2n+1}{2n+2}=\frac{1}{1+\alpha_n}$$

получаваме

$$\alpha_n=\frac{1}{2n+1},$$

т. е.

$$n\alpha_n=\frac{n}{2n+1}<1,$$

което показва, че редът е разходящ.

§ 7. Представяне на константата *e* във вид на безкраен ред

Сега ще докажем, че константата e може да се представи като сума на следния безкраен ред:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

За целта ще си послужим с развитието

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

което вече използувахме в § 8 на глава 2 при дефиницията на числото e.

Нека k е произволно цяло положително число и нека n е цяло число, по-голямо от k. В такъв случай

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Като оставим в това неравенство n да расте неограничено, ще получим след граничния преход

$$e\geqq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}.$$

Това неравенство ни учи, че редът

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$$

е сходящ* и неговата сума не надминава константата e.

Да положим

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots=S.$$

По такъв начин установихме, че $S\leqq e$.

От друга страна,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

и толкова повече

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqq S.$$

Като извършим граничен преход, заключаваме от това неравенство, че $e\leqq S$ — нещо, което заедно с установеното по-горе неравенство $S\leqq e$ ни учи, че $S=e$. С това доказателството е завършено.

§ 8. Теорема на Коши за редове с неотрицателни монотонно намаляващи членове

Нека членовете на реда

$$u_1+u_2+u_3+\ldots$$

са неотрицателни и при всяко цяло положително n имаме $u_n\geqq u_{n+1}$. В такъв случай този ред е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ редът

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^k u_{2^k}.$$

За да докажем тази теорема на Коши, полагаме

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n,$$
$$\sigma_n=u_1+2u_2+4u_4+\ldots+2^n u_{2^n}.$$

* Тъй като членовете му са неотрицателни, а редицата от частичните му суми е ограничена.

Тъй като редицата

$$u_1, u_2, u_3, \ldots,$$

монотонно намалява, то имаме следните неравенства:

$$u_2 \leqq u_1 - u_1,$$
$$2u_4 \leqq u_2 + u_3 \leqq 2u_2,$$
$$4u_8 \leqq u_4 + u_5 + u_6 + u_7 \leqq 4u_4,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$2^n u_{2^{n+1}} \leqq u_{2^n} + u_{2^n+1} + \ldots + u_{2^{n+1}-1} \leqq 2^n u_{2^n}.$$

Като съберем почленно тези неравенства, получаваме

$$\frac{\sigma_{n+1} - u_1}{2} \leqq S_{2^{n+1}-1} \leqq \sigma_n.$$

Ако редът

$$u_1 + u_2 + \ldots$$

е сходящ, редицата от частичните му суми е ограничена. Нека A е една нейна горна граница. В такъв случай $S_{2^{n+1}-1} \leqq A$ и следователно

$$\frac{\sigma_{n+1} - u_1}{2} \leqq A,$$

т. е.

$$\sigma_{n+1} \leqq u_1 + 2A.$$

И така редицата от частичните суми на реда с неотрицателни членове $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k u_{2^k}$ е ограничена, т. е. този ред е сходящ.

Ако редът

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

е разходящ, то редицата с общ член $S_{2^{n+1}-1}$ расте неограничено*, а следователно частичните суми σ_n също растат неограничено, както това се вижда от неравенството

$$S_{2^{n+1}-1} \leqq \sigma_n.$$

От това следва, че редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k u_{2^k}$ е разходящ. По такъв начин теоремата на Коши е доказана.

* Тъй като членовете на реда $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ са неотрицателни.

§ 9. Критерий за сходимост на Лайбниц (Leibniz)

Ще докажем, че ако монотонно намаляващата редица

$$u_1 \geqq u_2 \geqq u_3 \geqq \ldots$$

клони към нула, то редът

(1) $$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots$$

е сходящ.

За да докажем твърдението, избираме едно положително число ε и след това вземаме ν така, че при $n > \nu$ да е изпълнено неравенството $u_n < \varepsilon$. Това може да се направи, защото $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Разглеждаме разликата

$$S_{n+p} - S_n = (-1)^n [u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots + (-1)^{p-1} u_{n+p}],$$

където S_n и S_{n+p} означават съответно n-тата и $n+p$-тата частична сума на реда (1). Очевидно за всяко цяло положително p имаме

$$|S_{n+p} - S_n| = |u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots + (-1)^{p-1} u_{n+p}| =$$
$$= |(u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \ldots| =$$
$$= u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \ldots + (-1)^{p-1} u_{n+p} =$$
$$= u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) \ldots \leqq$$
$$\leqq u_{n+1}.$$

И така

(2) $$|S_{n+p} - S_n| \leqq u_{n+1},$$

т. е.

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon,$$

което е достатъчно, за да твърдим, че редът е сходящ.

Направените разсъждения могат да се използват за оценка на грешката, която се прави, когато вместо сумата на реда (1) се взима някоя негова частична сума. И наистина нека S е неговата сума. Ако оставим p да расте неограничено в неравенството (2), ще получим след граничен преход

$$|S - S_n| \leqq u_{n+1}.$$

Ние ще използуваме в бъдеще това неравенство.

Пример. Редът

(3) $$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

е сходящ, защото знаците на членовете му алтернативно се сменят и редицата

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

клони към нула, монотонно намалявайки.

Ако S е сумата на реда (3), а S_n е неговата n-та частична сума, то както отбелязахме по-горе, е в сила неравенството

$$|S-S_n| \leqq \frac{1}{n+1}.$$

§ 10. Абсолютно сходящи редове

Един ред

$$u_1+u_2+u_3+\ldots$$

се нарича абсолютно сходящ, когато редът

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots,$$

съставен от абсолютните стойности на членовете му, е сходящ. Така например редът

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\ldots$$

е абсолютно сходящ, защото редът

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$$

е сходящ. Напротив, редът

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots,$$

макар и да е сходящ (според критерия на Лайбниц), не е абсолютно сходящ, защото редът

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$

е разходящ (това е хармоничният ред). Ред, който е сходящ, но не е абсолютно сходящ, се нарича условно сходящ. Редът

$$1-1+1-1+\ldots$$

не е нито сходящ (защото общият му член не клони към нула), нито е абсолютно сходящ, защото редът

$$1+1+1+1+\ldots$$

е разходящ.

Ще докажем, че ако един ред е абсолютно сходящ, той е сходящ.

За тази цел ще си послужим с неравенствата

(1) $$0 \leqq \frac{|a|+a}{2} \leqq |a|, \quad 0 \leqq \frac{|a|-a}{2} \leqq |a|,$$

които са валидни при всички реални стойности на a. Верността на тези неравенства може да се установи например по следния начин. Дефиницията на понятието абсолютна стойност ни дава

(2) $$a \leqq |a|, \quad -a \leqq |a|$$

и следователно

$$0 \leqq \frac{|a|-a}{2}, \quad 0 \leqq \frac{|a|+a}{2}.$$

От друга страна, като прибавим към двете части на неравенствата (2) числото $|a|$, получаваме

$$|a|+a \leqq 2|a|, \quad |a|-a \leqq 2|a|$$

и следователно

$$\frac{|a|+a}{2} \leqq |a|, \quad \frac{|a|-a}{2} \leqq |a|.$$

След тази малка подготовка вече сме готови да докажем, че ако един ред

$$u_1+u_2+u_3+\ldots$$

е абсолютно сходящ, той е сходящ. И наистина нека редът

(3) $$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots$$

е сходящ. Разглеждаме двата реда

(4) $$\frac{|u_1|+u_1}{2}+\frac{|u_2|+u_2}{2}+\frac{|u_3|+u_3}{2}+\ldots$$

(5) $$\frac{|u_1|-u_1}{2}+\frac{|u_2|-u_2}{2}+\frac{|u_3|-u_3}{2}+\ldots$$

Въз основа на неравенствата (1) можем да пишем

$$0 \leqq \frac{|u_k|+u_k}{2} \leqq |u_k|, \quad 0 \leqq \frac{|u_k|-u_k}{2} \leqq |u_k|,$$

т. е. членовете на редовете (4) и (5) са неотрицателни и не надминават съответните членове на сходящия ред (3). Това е достатъчно, за да твърдим, че двата реда (4) и (5) са сходящи. Като се възползуваме от теоремата, според която разликата на два сходящи реда е сходящ ред (относно тази теорема и относно дефиницията на понятието разлика на два реда вж. глава 3, § 4), заключаваме, че редът

$$\left(\frac{|u_1|+u_1}{2}-\frac{|u_1|-u_1}{2}\right)+\left(\frac{|u_2|+u_2}{2}-\frac{|u_2|-u_2}{2}\right)+\ldots$$

т. е. редът

$$u_1+u_2+u_3+\ldots$$

е сходящ.

От направените разсъждения се вижда, че всеки абсолютно сходящ ред може да се представи като разлика на два сходящи реда с неотрицателни членове. Обратното е също вярно. И наистина, ако двата реда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ са сходящи и $a_k \geqq 0$, $b_k \geqq 0$, то редът $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - b_k)$ е абсолютно сходящ, защото $|a_k - b_k| \leqq a_k + b_k$ и редът $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ е сходящ.

Ние бихме могли да установим, че всеки абсолютно сходящ ред е сходящ, и с помощта на теоремата на Коши по следния начин: нека ε е произволно положително число; избираме ν по такъв начин, че при $n > \nu$ и при всички цели положителни стойности на p да имаме

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon;$$

това може да се направи, защото редът (3) е сходящ; последното неравенство и неравенството

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| \leqq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}|$$

ни позволяват да заключим, че

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon,$$

т. е. редът $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ е наистина сходящ.

Пример 1. Редът

$$\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{2^3} + \ldots + \frac{\sin nx}{2^n} + \ldots \tag{6}$$

е сходящ, защото редът

$$\frac{|\sin x|}{2} + \frac{|\sin 2x|}{2^2} + \frac{|\sin 3x|}{2^3} + \ldots + \frac{|\sin nx|}{2^n} + \ldots$$

е сходящ (неговите членове са неотрицателни и не надминават съответните членове на сходящата геометрична прогресия $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$). От направените разсъждения се вижда, че редът е дори абсолютно сходящ.

Пример 2. Ако при достатъчно големи стойности на n имаме $u_n \neq 0$ и $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqq r < 1$, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ (дори абсолютно), защото редът $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ е сходящ. Ако пък при достатъчно големи стойности на n имаме $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqq 1$, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е разходящ, защото $|u_{n+1}| \geqq |u_n|$ и следователно u_n не клони към нула, когато n расте неограничено. По-специално, ако съществува границата $l = \lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ и $l < 1$, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ; ако пък $l > 1$, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е разходящ.

§ 11. Комутативен закон при абсолютно сходящите редове

Нека

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{1}$$

е един абсолютно сходящ ред и нека редът

$$u_{n_1} + u_{n_2} + u_{n_3} + \ldots \tag{2}$$

се получава от реда (1) чрез разместване на членовете му. Това значи, че в редицата от цели положителни числа

$$n_1, n_2, n_3, \ldots$$

се среща всяко цяло положително число, и то само веднъж. Ще докажем, че редът (2) е също абсолютно сходящ и сумата му е равна на сумата S на реда (1).

Да изберем едно цяло положително число k. Нека ν е цяло число, по-голямо от всяко едно от числата $n_1, n_2, \ldots, n_k$. В такъв случай всичките тези числа се срещат в редицата $1, 2, \ldots, \nu$. Като вземем под внимание още, че никои две от тях не са равни помежду си, намираме

$$|u_{n_1}| + |u_{n_2}| + \ldots + |u_{n_k}| \leqq |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_\nu|.$$

Да означим със Σ сумата на сходящия ред

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots$$

В такъв случай

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_\nu| \leqq \Sigma$$

и следователно

$$|u_{n_1}| + |u_{n_2}| + \ldots + |u_{n_k}| \leqq \Sigma.$$

И така редицата от частичните суми на реда

$$|u_{n_1}| + |u_{n_2}| + |u_{n_3}| + \ldots$$

е ограничена — нещо, което е достатъчно, за да твърдим, че този ред е сходящ, тъй като членовете му са неотрицателни. По такъв начин ние доказахме, че редът (2) е абсолютно сходящ. Нека σ е неговата сума. Остава да покажем, че $\sigma = S$. За тази цел избираме едно произволно положително число ε и след това избираме едно толкова голямо цяло число m, че да имаме

$$|u_{m+1}|+|u_{m+2}|+\ldots+|u_{m+p}|<\varepsilon$$

при всички цели положителни стойности на p. Това може да се направи, защото редът (1) е абсолютно сходящ и следователно редът

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots$$

е сходящ. Фиксираме m. В такъв случай при достатъчно големи стойности на p числата $1, 2, \ldots, m$ сигурно фигурират в редицата $n_1, n_2, \ldots, n_{m+p}$, защото в безкрайната редица

$$n_1,\ n_2,\ n_3, \ldots$$

фигурират всичките цели положителни числа. Останалите членове на редицата $n_1, n_2, \ldots, n_{m+p}$ са по-големи от m, защото никое цяло число не фигурира повече от един път в тази редица. Този резултат ни позволява да твърдим, че

$$u_{n_1}+u_{n_2}+\ldots+u_{n_{m+p}}=u_1+u_2+\ldots+u_m+u_{m+\nu_1}+u_{m+\nu_2}+\ldots+u_{m+\nu_p},$$

където целите числа $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ са положителни.

Да разгледаме разликата

$$\alpha_p=(u_1+u_2+\ldots+u_{m+p})-(u_{n_1}+u_{n_2}+\ldots+u_{n_{m+p}})=$$
$$=(u_1+u_2+\ldots+u_m+u_{m+1}+\ldots+u_{m+p})-$$
$$-(u_1+u_2+\ldots+u_m+u_{m+\nu_1}+\ldots+u_{m+\nu_p})=(u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots+$$
$$+u_{m+p}-u_{m+\nu_1}-u_{m+\nu_2}-\ldots-u_{m+\nu_p},$$

т. е.

$$|\alpha_p|\leqq|u_{m+1}|+|u_{m+2}|+\ldots+|u_{m+p}|+|u_{m+\nu_1}|+|u_{m+\nu_2}|+\ldots+$$
$$+|u_{m+\nu_p}|\leqq\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

И така ние установихме неравенството

$$|(u_1+u_2+\ldots+u_{m+p})-(u_{n_1}+u_{n_2}+\ldots+u_{n_{m+p}})|<2\varepsilon$$

за всички достатъчно големи стойности на p. Като извършим граничния преход $p\to\infty$, получаваме

(3) $$|S-\sigma|\leqq 2\varepsilon.$$

Положителното число ε обаче е произволно, а разликата $S-\sigma$ ни най-малко не зависи от ε. Оттук заключаваме, че $S-\sigma=0$. И наистина в

противен случай ще имаме $\frac{|S-\sigma|}{2}>0$ и следователно ще можем да изберем положителното число ε така, че да имаме

$$\varepsilon<\frac{|S-\sigma|}{2},$$

което противоречи на неравенството (3).

И така ние доказахме следната теорема. **В един абсолютно сходящ ред при разместване на членовете му нито се нарушава абсолютната му сходимост, нито се променя сумата му.**

Един ред може да бъде сходящ, без да бъде абсолютно сходящ. Такъв ред се нарича условно сходящ или полусходящ. Като пример за условно сходящ ред може да ни служи редът

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$$

Този ред е сходящ според критерия на Лайбниц, но не е абсолютно сходящ, защото редът

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$

е разходящ.

При условно сходящите редове не е валиден комутативният закон. Ще разгледаме за пример полусходящия ред

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\ldots$$

Сумата на този ред е нула. Разместваме членовете му по следния начин:

(4) $$1+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}+\ldots$$

Сумата на този ред обаче не може да бъде нула, защото колкото и да бъде голямо цялото положително число n, имаме

$$1+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}=$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\right)=$$
$$=\frac{1}{2.1}+\frac{1}{3.2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2n}\geqq\frac{1}{2},$$

т. е. измежду парциалните суми на реда (4) има безбройно много такива, които не клонят към нула.

Трудолюбивият читател, който ще проучи задачите към тази глава, ще узнае, че във всеки полусходящ ред е възможно по такъв начин да се разместят членовете, че да се получи ред с отнапред дадена сума. Разместването може да се извърши дори така, че да се получи разходящ ред. Тази проста теорема произхожда от Риман (Riemann).

§ 12. Умножаване на безкрайните редове. Теорема на Мертенс. Теорема на Коши

Нека са дадени двата реда

(1) $$u_0+u_1+u_2+\ldots$$

(2) $$v_0+v_1+v_2+\ldots$$

Редът

$$3)\quad u_0v_0+(u_1v_0+u_0v_1)+(u_2v_0+u_1v_1+u_0v_2)+\ldots+(u_nv_0+u_{n-1}v_1+\ldots+u_0v_n)+\ldots$$

(се нарича произведение на двата реда (1) и (2) по правилото на Коши. Ще докажем следната теорема на Мертенс (Mertens): ако поне единият от двата реда (1) и (2) е абсолютно сходящ, а другият е сходящ (поне условно), то произведението им (3) в смисъл на Коши е сходящо и сумата му е равна на произведението от сумите на двата реда (1) и (2).

За да докажем тази теорема, ние ще положим

$$S'_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$$

$$S''_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$$

и

$$S_n=u_0v_0+(u_1v_0+u_0v_1)+(u_2v_0+u_1v_1+u_0v_2)+\ldots+$$
$$+(u_nv_0+u_{n-1}v_1+\ldots+u_0v_n).$$

В такъв случай очевидно

$$\begin{aligned}S'_nS''_n&=u_0v_0+u_0v_1+u_0v_2+\ldots+u_0v_n+\\&+u_1v_0+u_1v_1+u_1v_2+\ldots+u_1v_n+\\&+u_2v_0+u_2v_1+u_2v_2+\ldots+u_2v_n+\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+u_nv_0+u_nv_1+u_nv_2+\ldots+u_nv_n.\end{aligned}$$

Нека k е цяло положително число, по-малко от n. Допълнително ще уточним неговия избор. Не е трудно да се види, че

$$\begin{aligned}S'_nS''_n-S_n&=u_nv_1+u_nv_2+\ldots+u_nv_n+\\&+u_{n-1}v_2+u_{n-1}v_3+\ldots+u_{n-1}v_n+\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+u_{k+1}v_{n-k}+u_{k+1}v_{n-k+1}+\ldots+u_{k+1}v_n+\\&+u_kv_{n-k+1}+u_kv_{n-k+2}+\ldots+u_kv_n+\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+u_2v_{n-1}+u_2v_n+\\&+u_1v_n\end{aligned}$$

и следователно

$$\begin{aligned}|S'_nS''_n-S_n|&\leqq|u_n|\,|v_1+v_2+\ldots+v_n|+\\&+|u_{n-1}|\,|v_2+v_3+\ldots+v_n|+\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+|u_{k+1}|\,|v_{n-k}+v_{n-k+1}+\ldots+v_n|+\\&+|u_k|\,|v_{n-k+1}+v_{n-k+2}+\ldots+v_n|+\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+|u_2|\,|v_{n-1}+v_n|+\\&+|u_1|\,|v_n|.\end{aligned}$$

Редът (2) е сходящ и следователно редицата от частичните му суми е ограничена. Нека A е една горна граница на $|S''_\nu|$, когато ν приема всевъзможни цели положителни стойности. В такъв случай при всеки избор на целите положителни числа p и q имаме

$$|v_{p+1}+v_{p+2}+\ldots+v_{p+q}|=|S''_{p+q}-S''_p|\leqq|S''_{p+q}|+|S''_p|\leqq A+A=2A.$$

Това ни позволява да заключим, че

$$\begin{aligned}|S'_nS''_n-S_n|&\leqq(|u_n|+|u_{n-1}|+\ldots+|u_{k+1}|)\,.\,2A+\\&+|u_k|\,|v_{n-k+1}+v_{n-k+2}+\ldots+v_n|+\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+|u_2|\,|v_{n-1}+v_n|+\\&+|u_1|\,|v_n|.\end{aligned}$$

Нека редът (1) е абсолютно сходящ и нека

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots=B.$$

Избираме произволно положителното число ε и след това даваме на k толкова голяма стойност, че при всички цели положителни значения на n, които са по-големи от k, да имаме

$$|u_{k+1}|+|u_{k+2}|+\ldots+|u_{n-1}|+|u_n|<\varepsilon.$$

В такъв случай получаваме следното неравенство:

$$\begin{aligned}|S'_n S''_n - S_n| \leqq \varepsilon . 2A + &\\ +|u_k|\,|v_{n-k+1}+v_{n-k+2}+\ldots+v_n| &+ \\ \cdots\cdots &\\ +|u_2|\,|v_{n-1}+v_n| &+\\ +|u_1|\,|v_n|.&\end{aligned}$$

Редът (2) е сходящ и следователно може да се избере толкова голямо число ν, че при $q \geqq \nu$ да имаме

$$|v_{q+1}+v_{q+2}+\ldots+v_{q+p}|<\varepsilon.$$

Фиксираме k. В такъв случай при достатъчно големи стойности на n ще имаме $n-k>\nu$ и следователно

$$\begin{aligned}&|v_{n-k+1}+v_{n-k+2}+\ldots+v_n|<\varepsilon,\\ &|v_{n-k+2}+v_{n-k+3}+\ldots+v_n|<\varepsilon,\\ &\cdots\cdots\\ &|v_{n-1}+v_n|<\varepsilon,\\ &|v_n|<\varepsilon,\end{aligned}$$

т. е.

$$|S'_n S''_n - S_n| \leqq 2A\varepsilon + (|u_k|+|u_{k-1}|+\ldots+|u_2|+|u_1|)\,\varepsilon,$$

откъдето

$$|S'_n S''_n - S_n| \leqq 2A\varepsilon + B\varepsilon = (2A+B)\varepsilon.$$

Да означим сумата на реда (1) с S', а сумата на реда (2) с S''. Като вземем под внимание, че $\lim S'_n = S'$ и $\lim S''_n = S''$, заключаваме, че $\lim S'_n S''_n = S'\,S''$, и следователно при всички достатъчно големи цели стойности на n имаме

$$|S'_n S''_n - S'\,S''|<\varepsilon,$$

откъдето получаваме

$$|S_n - S'\,S''| = |(S_n - S'_n S''_n) + (S'_n S''_n - S'\,S'')| \leqq$$

$$\leqq |S_n - S'_n S''_n| + |S'_n S''_n - S'\,S''| < (2A+B)\,\varepsilon + \varepsilon = (2A+B+1)\varepsilon,$$

т. е. $\lim S_n = S'\,S''$. С това е установено, че редът (3) е наистина сходящ и сумата му е $S'\,S''$, т. е. теоремата на Мертенс е доказана.

Ако и двата реда (1) и (2) са абсолютно сходящи, то (както установи това Коши) редът (3) е също абсолютно сходящ. И наистина, ако положим

$$\begin{aligned}B&=|u_0|+|u_1|+|u_2|+\ldots,\\ C&=|v_0|+|v_1|+|v_2|+\ldots,\end{aligned}$$

ще имаме

$$\begin{aligned}&|u_0v_0|+|u_1v_0+u_0v_1|+|u_2v_0+u_1v_1+u_0v_2|+\ldots+\\ &\quad+|u_nv_0+u_{n-1}v_1+\ldots+u_0v_n| \leqq\\ &\leqq |u_0|\,|v_0|+|u_0|\,|v_1|+\ldots+|u_0|\,|v_n|+\\ &\quad+|u_1|\,|v_0|+|u_1|\,|v_1|+\ldots+|u_1|\,|v_n|+\\ &\quad+|u_2|\,|v_0|+|u_2|\,|v_1|+\ldots+|u_2|\,|v_n|+\\ &\quad\cdots\cdots\\ &\quad+|u_n|\,|v_0|+|u_n|\,|v_1|+\ldots+|u_n|\,|v_n|=\\ &=(|u_0|+|u_1|+\ldots+|u_n|)(|v_0|+|v_1|+\ldots+|v_n|)\leqq\\ &\leqq BC,\end{aligned}$$

което ни учи, че редицата от частичните суми на реда

$$|u_0v_0|+|u_1v_0+u_0v_1|+|u_2v_0+u_1v_1+u_0v_2|+\ldots$$

е ограничена. Това е достатъчно, за да твърдим, че редът (3) е абсолютно сходящ.

Общи задачи

1. Нека редицата $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е сходяща и клони към a. Да се покаже, че редът $a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ е сходящ и сумата му е a.

2. Да се покаже, че редът

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$$

е сходящ и сумата му е $\frac{1}{2}$.

Упътване. Използувайте, че

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}.$$

3. Да се покаже, че редът

$$\frac{1}{1.4.7}+\frac{1}{4.7.10}+\frac{1}{7.10.13}+\ldots+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)}+\ldots$$

е сходящ, и да се пресметне сумата му.

Упътване. Използувайте, че

$$\frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)}=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}-\frac{1}{(3n+4)(3n+7)}\right].$$

4. Нека $a_n \geq 0$. Покажете, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$$

е сходящ.

Упътване. Използувайте, че

$$\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)} = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{n-1})} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{n-1})(1+a_n)}.$$

5. Покажете, че при $b > a > 0$ редът

$$\frac{1}{b} + \frac{a}{b(b+1)} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)(b+2)} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)(b+3)} + \dots$$

е сходящ и сумата му е $\frac{1}{b-a}$.

Упътване. Използувайте тъждеството

$$\frac{a(a+1)\dots(a+n)}{b(b+1)\dots(b+n+1)} = \left[\frac{a(a+1)\dots(a+n)}{b(b+1)\dots(b+n)} - \frac{a(a+1)\dots(a+n)(a+n+1)}{b(b+1)\dots(b+n)(b+n+1)}\right]\frac{1}{b-a}.$$

6. Покажете, че редът

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

е сходящ при $|x| \neq 1$ и

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{при } |x| < 1 \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Упътване. Използувайте, че

$$\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

7. Да се изследва дали са сходящи, или са разходящи редовете:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{3^n}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots2n} \cdot \frac{1}{n+1}$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4.6\dots2n}{1.3.5\dots(2n-1)} \cdot \frac{1}{n+1}$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}}$.

Упътване. Приложете някой от критериите за сходимост или разходимост на редове с положителни членове.

8. Да се изследва дали са сходящи или разходящи редовете:

a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^n}{n!}$.

9. Покажете, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2.4\dots2n}{1.3\dots(2n-1)} \cdot \frac{1}{n+1}$$

е сходящ.

Упътване. Използувайте, че

$$\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 < \frac{k}{k-1}, \quad k=2, 3, 4, \dots$$

и следователно

$$\left(\frac{4.6\dots2n}{3.5\dots(2n-1)} \cdot \frac{1}{n+1}\right)^2 < \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2}.$$

След това приложете критерия на Лайбниц, като докажете предварително, че членовете на реда намаляват монотонно по абсолютна стойност.

10. Покажете, че редът

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \dots$$

е разходящ, при все че общият му член клони към нула и знаците на членовете му се сменят алтернативно.

Упътване: Нека S_n е n-тата частична сума на дадения ред. Покажете, че

$$S_{2n} = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

11. Да се изследва при какви стойности на x (положителни или не) е сходящ редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{n^n}.$$

Упътване. Нека $U_n = \frac{n!\,x^n}{n^n}$. При $x \neq 0$ и $|x| < e$ приложете критерия на Даламбер за реда $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$. При $|x| \geq e$ покажете, че $|U_{n+1}| \geq |U_n|$ и следователно U_n не клони към нула.

12. Да се изследва при какви стойности на x (положителни или не) са сходящи следните редове:

$$a)\ 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots;$$

$$b)\ \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\dots;$$

$$c)\ 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\dots;$$

$$d)\ \frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+\dots;$$

$$e)\ \frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\dots$$

13. Да се изследва при какви стойности на x е сходящ редът

$$\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}+\dots+\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}+\dots$$

Упътване. При $x>0$ използувайте критерия на Раабе и Дюамел. При $-1<x\leq 0$ използувайте критерия на Лайбниц, като вземете пред вид, че при $\alpha<1$

$$\frac{1.2\dots n}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}=\left(1+\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1-\alpha}{\alpha+1}\right)\dots\left(1+\frac{1-\alpha}{n+\alpha-1}\right)\geq$$

$$\geq 1+\frac{1-\alpha}{\alpha}+\frac{1-\alpha}{\alpha+1}+\frac{1-\alpha}{\alpha+2}+\frac{1-\alpha}{\alpha+3}+\dots+\frac{1-\alpha}{n+\alpha-1}.$$

При $x\leq -1$ общият член не клони към нула.

14. Да се покаже, че $\lim \frac{x^n}{n!}=0.$

Упътване. Покажете, че редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ е сходящ. От това ще следва, че общият му член клони към нула.

15. Да се покаже, че

$$\lim \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n=0 \text{ при } |x|<1.$$

16. Нека редът

$$u_1+u_2+\dots$$

е сходящ. Докажете, че ако редицата с общ член nu_n е сходяща, границата ѝ е равна на нула.

Упътване. Извършете доказателството от противното, като разгледате отделно случая, когато $\lim nu_n>0$, и отделно случая, когато $\lim nu_n<0$. В първия случай изберете едно положително число ε, по-малко от $\lim nu_n$, и използувайте, че при всички достатъчно големи стойности на n имаме $nu_n>\varepsilon$, т. е. $u_n>\frac{\varepsilon}{n}$. Аналогично разгледайте случая, при който $\lim nu_n<0$.

Забележка. Може да се случи редът $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ да е сходящ, но nu_n да не клони към никаква граница. Такъв е случаят с реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Може да се покаже дори пример на сходящ ред $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с неотрицателни членове, при който произведението nu_n не клони към никаква граница. Достатъчно е да положим $u_n=\frac{1}{n^2}$, когато n не е точен квадрат, и $u_n=\frac{1}{n}$, когато n е точен квадрат.

17. Ако редът

$$u_0+u_1+u_2+\dots$$

е сходящ, то редицата с общ член

$$a_n=\frac{u_1+2u_2+\dots+nu_n}{n}$$

клони към нула.

Упътване. Използувайте, че

$$a_n=S_n-\frac{S_0+S_1+\dots+S_{n-1}}{n}, \text{ където } S_k=u_0+u_1+\dots+u_k.$$

18. Нека редът $\sum_{k=0}^{\infty}u_k$ е сходящ и редицата

$$p_0, p_1, p_2, \dots$$

монотонно дивергира към $+\infty$. В такъв случай редицата с общ член

$$a_n=\frac{p_0u_0+p_1u_1+\dots+p_nu_n}{p_n}$$

клони към нула.

Упътване. Нека

$$S_k=u_0+u_1+\dots+u_k.$$

Използувайте, че

$$a_n=S_n-\frac{(p_1-p_0)S_0+(p_2-p_1)S_1+\dots+(p_n-p_{n-1})S_{n-1}}{p_n}.$$

19. Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ е сходящ и редицата $u_1, u_2, u_3, \dots$ монотонно намалява, то nu_n клони към нула.

Упътване. Нека ε е произволно положително число. Да изберем n толкова голямо, че при всички цели положителни стойности на $k>n$ да имаме

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_k<\frac{\varepsilon}{2}.$$

В такъв случай имаме

$$(k-n)u_k < \frac{\varepsilon}{2}$$

и следователно при $k > 2n$

$$ku_k < \varepsilon.$$

20. Нека е даден редът с положителни членове $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. При критерия на Раабе и Дюамел се разглежда редицата с общ член $n\alpha_n$, където α_n се определя от равенството

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_n}.$$

Докажете, че ако редицата с общ член $n\alpha_n$ е сходяща и $\lim n\alpha_n > 1$, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ; ако ли пък $\lim n\alpha_n < 1$, редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е разходящ.

21. Нека редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, членовете на който са положителни, е разходящ и нека $s_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$. Да се докаже, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{s_n}$$

е разходящ (Абел).

Упътване. Използувайте, че

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{u_\nu}{s_\nu} > \frac{1}{s_{n+p}} \sum_{\nu=n+1}^{n+p} u_\nu = \frac{s_{n+p}-s_n}{s_{n+p}} = 1 - \frac{s_n}{s_{n+p}}$$

и следователно каквото и да бъде цялото положително число n, винаги можем да изберем p толкова голямо, че да имаме

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{u_\nu}{s_\nu} > \frac{1}{2}.$$

22. За да бъде сходящ един ред

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

с положителни членове, необходимо и достатъчно е да съществува такава редица

$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

от положителни числа, че да бъдат изпълнени неравенствата

$$b_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} b_{n+1} \geq 1$$

(критерий на Кумер).

Упътване. За да покажете, че условието на Кумер е достатъчно, използувайте, че

$$b_n a_n - a_{n+1} b_{n+1} \geqq a_n > 0$$

и следователно редицата с общ член $a_n b_n$, монотонно намалявайки, клони към някаква граница. Оттук заключете, че редът

(1) $$\Sigma\,(b_n a_n - a_{n+1} b_{n+1})$$

е сходящ. Сравнете реда Σa_n с реда (1).

За да покажете, че условието на Кумер е необходимо, положете

$$b_n = \frac{\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu}{a_n}.$$

23. Получете достатъчните условия за сходимост на Даламбер и Раабе — Дюамел като следствие от критерия на Кумер.

Упътване. Положете

$$b_n = b_1 \text{ и } b_n = nb_1.$$

24. Ако редицата

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

клони към нула, като монотонно намалява, и ако редицата от частичните суми на реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е ограничена, то редът}$$

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n + \ldots,$$

е сходящ (Абел).

Упътване. Нека

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \text{ и } |s_n| \leqq A.$$

В такъв случай

$$\begin{aligned}
&|a_{n+1}\alpha_{n+1} + a_{n+2}\alpha_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\alpha_{n+p}| = |(s_{n+1}-s_n)\,\alpha_{n+1} + \\
&+ (s_{n+2}-s_{n+1})\alpha_{n+2} + \ldots + (s_{n+p}-s_{n+p-1})\alpha_{n+p}| = |-s_n\,\alpha_{n+1} + \\
&+ s_{n+1}(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}) + s_{n+2}(\alpha_{n+2}-\alpha_{n+3}) + \ldots + s_{n+p-1}(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p}) + \\
&+ s_{n+p}\alpha_{n+p}| \leqq |s_n\,\alpha_{n+1}| + |s_{n+1}|(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}) + |s_{n+2}|(\alpha_{n+2}-\alpha_{n+3}) + \ldots + \\
&+ |s_{n+p-1}|(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p}) + |s_{n+p}|\alpha_{n+p} \leqq A\alpha_{n+1} + A(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}) + \\
&+ A(\alpha_{n+2}-\alpha_{n+3}) + \ldots + A(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p}) + A\alpha_{n+p} = 2A\alpha_{n+1}.
\end{aligned}$$

25. Ако $a_n > 0$ и

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1 - \frac{1}{n} - \frac{A}{n^2},$$

където A не зависи от n, то редът

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

е разходящ.

Упътване. Нека

$$\sigma_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}.$$

Покажете, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sigma_n}$ е разходящ, като използувате зад. 21. Като вземете пред вид, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{n} = 0,$$

установете, че при достатъчно големи стойности на n имаме,

$$\frac{(n-1)\sigma_{n-1}}{n\sigma_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n\sigma_n}\right) < 1 - \frac{1}{n} - \frac{A}{n^2} \leqq \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

т. е. $a_{n+1} \geqq \frac{k}{n\sigma_n}$, където k не зависи от n.

26. Да се изследва кога е сходящ и кога е разходящ хипергеометричният ред

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots,$$

където α, β, γ са различни от $0, -1, -2, -3, \dots$

27. Умножете двата реда

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

$$1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots$$

по правилото на Коши.

28. Покажете, че произведението (по правилото на Коши) на двата разходящи реда

$$1 - \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \dots,$$

$$1 + \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\left(2^2 + \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2\left(2^3 + \frac{1}{2^4}\right) + \dots$$

е абсолютно сходящ ред

$$1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots$$

29. Покажете, че достатъчното условие на Даламбер (в по-общата му форма) за сходимост на ред $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положителни членове е еквивалентно с условието

$$\overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

а достатъчното условие на Коши е еквивалентно с условието

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} < 1.$$

Покажете, че критерият на Коши е по-силен от критерия на Даламбер в смисъл, че

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} \leqq \overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

но положителните числа u_n могат да се изберат така, че да имаме

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} < 1, \qquad \overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$$

30. Казваме, че един ред

(2) $$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

е сумируем по метода на Чезаро, ако редицата

$$s_1, s_2, s_3, \dots$$

от частичните му суми е лимитируема с помощта на средни аритметични, т. е. ако редицата с общ член

$$\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$$

е сходяща.

Да се покаже, че ако редът (2) е сумируем по метода на Чезаро и ако произведението nu_n клони към нула, когато n расте неограничено, то той е сходящ.

Упътване. Използувайте, че

$$s_{n+1} - \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n} = \frac{u_2 + 2u_3 + 3u_4 + \dots + nu_{n+1}}{n}.$$

31. Ако редът

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

е сходящ, а редицата

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

расте монотонно и неограничено, то

$$\lim \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{\infty} b_k a_k = 0$$

(Л. Кронекер).

33. Нека редът

(3) $$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

е условно сходящ. Да се покаже, че каквото и да бъде числото A, винаги е възможно така да се разместят членовете на този ред, че да се получи ред със сума A. Възможно е също тъй да се разместят членовете и така, че да се получи разходящ ред.

Упътване. Покажете, че редът (3) притежава както безбройно много неотрицателни членове

$$v_1, v_2, v_3, \dots,$$

така и безбройно много отрицателни членове

$$-w_1, -w_2, -w_3, \dots$$

Покажете след това, че двата реда

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

и

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots$$

са разходящи. Покажете, че съществува цяло положително число n, за което

$$v_1+v_2+\dots+v_n > A.$$

Нека n_1 е най-малкото такова число. Покажете, че съществува цяло положително число m, за което

$$v_1+v_2+\dots+v_{n_1}-w_1-w_2-\dots-w_m < A.$$

Нека m_1 е най-малкото такова число. Означаваме с n_2 най-малкото цяло число, по-голямо от n_1, за което

$$v_1+v_2+\dots+v_{n_1} - w_1 - w_2 - \dots - w_{m_1} + v_{n_1+1} + v_{n_1+2} + \dots + v_{n_2} > A$$

и т. н. Покажете, че редът

$$v_1+v_2+\dots+v_{n_1} - w_1 - w_2 - \dots - w_{m_1} + v_{n_1+1} + \dots + v_{n_2} - \dots$$

е сходящ и сумата му е A, като използувате, че двете редици

$$v_{n_1}, v_{n_2}, v_{n_3}, \dots$$

и

$$w_{m_1}, w_{m_2}, w_{m_3}, \dots$$

клонят към нула.

По подобен начин покажете, че в реда (3) могат така да се разместят членовете, че да се получи разходящ ред.

ЧАСТ II

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИИ НА ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

ГЛАВА I

ФУНКЦИИ НА ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

§ 1. Функционална зависимост

Нека е дадено множество M от реални числа. Казваме, че в множеството M е дефинирана една функция, ако на всяко число от M е съпоставено по едно число.

За да изразим, че на всяко число x от едно множество M сме съпоставили по едно число y, пишем кратко

$$y=f(x) \text{ (четете — игрек равно на еф икс).}$$

или пък $y=\varphi(x)$, $y=g(x)$ и пр.

Знакът (в случая x), който служи за общо означаване на числа, принадлежащи на M, се нарича аргумент или независима променлива, а знакът (в случая y или $f(x)$ и пр.), с който означаваме съпоставените стойности, се нарича функция. Множеството M, в което е дефинирана функцията, се нарича дефиниционна област или област на съществуване на функцията.

Пример 1. Нека на всяко число x от интервала $-1 \leq x \leq 1$ съпоставим числото x^2. По този начин ние сме дефинирали една функция в затворения интервал $[-1, 1]$. Нека означим с $f(x)$ тази функция. При всяко x от затворения интервал $[-1, 1]$ е казано какво означава $f(x)$. Така например $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$. Напротив, $f(2)$ няма никакъв смисъл, защото ние сме казали какво означава $f(x)$ само при $|x| \leq 1$.

2. Нека на всяко число x съпоставим числото x^2. Така ние сме дефинирали една функция за всяка стойност на x. Сега се касае за една функция, различна от функцията в първия пример (двете функции имат различни дефиниционни области).

3. Нека под $\varphi(x)$ разбираме x^2 при $|x| \leq 1$ и $\varphi(x)=2$ при $|x|>1$. С това ние сме дефинирали една функция за всяко x без изключение.

4. Нека под $g(x)$ разбираме числото x, когато $x \geqq 0$, а $-x$, когато $x<0$. С това ние сме дефинирали една функция на x при всички стойности на x. Както знаем вече, тази функция се означава кратко със знака $|x|$ и се нарича абсолютна стойност на x.

5. Нека $f(x)=1$ за всички рационални стойности на x и $f(x)=0$ за всички ирационални стойности на x. Дефиниционната област на тази функция се състои от всичките реални числа.

6. Нека M е множеството от онези стойности на x, за които уравнението $y^2=x$ притежава (поне едно) реално решение. Множеството M очевидно не е празно (то съдържа например числото 1). Нека на всяко число x от M съпоставим в с и ч к и т е решения на уравнението $y^2=x$. С това например на числото $x=4$ са съпоставени двете числа 2 и -2. Така установеното съответствие н е д е ф и н и р а ф у н к ц и я, защото не е еднозначно.

7. Нека M е множеството от онези стойности на x, за които уравнението $y^2=x$ притежава (поне едно) реално решение. Разбира се, ако $y^2=x$, то и $|y|^2=x$, т. е. ако x принадлежи на M, уравнението $y^2=x$ има сигурно и неотрицателно решение. Това неотрицателно решение е единствено, защото от $0 \leqq y_1 < y_2$ следва $y_1^2 < y_2^2$ и следователно при $0 \leqq y_1 < y_2$ не може да имаме $y_1^2=y_2^2$.

Ако на всяко x от M съпоставим единственото неотрицателно решение на уравнението $y^2=x$, то с това дефинираме една функция (установеното съответствие е еднозначно!) в множеството M. Така дефинираната функция се означава със символа $\sqrt{x}$. Дадената дефиниция може да се резюмира така: под $\sqrt{x}$ (където x принадлежи към M) се разбира (единственото) число y, което удовлетворява равенството $y^2=x$ и неравенството $y \geqq 0$. Впоследствие ние ще покажем, че множеството M в същност не е нищо друго освен множеството от неотрицателните числа.

Полезно е да се знае, че

$$(\sqrt{x})^2=x \text{ при } x \geqq 0$$

и

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

за всички стойности на x без изключение. Верността на първото твърдение е ясна: числото $\sqrt{x}$ ние дефинирахме като (неотрицателното) решение на уравнението $y^2=x$. Заествайки y с $\sqrt{x}$, получаваме $(\sqrt{x})^2=x$. Тъждеството $\sqrt{x^2}=|x|$ може да се установи така: числото $y=\sqrt{x^2}$ се дефинира като число y, което удовлетворява равенството $y^2=x^2$ и неравенството $y \geqq 0$. Очевидно $|x|$ е едно такова число, защото $|x|^2=x^2$ и $|x| \geqq 0$. Както вече знаем, друго число с тези свойства не може да има.

8. Нека на всяко цяло положително число n съпоставим числото $1 . 2 . 3 \ldots n$. По този начин ние получаваме една функция, дефинирана за всички цели положителни стойности на n и само за тях. Тази функция се означава обикновено със символа $n!$ (четете n факториел). Така например $4!=1 . 2 . 3 . 4=24$. Ние често ще срещаме в бъдеще тая функция.

9. Общият член a_n на една редица

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

от числа представлява функция, дефинирана за цели положителни стойности на аргумента n. (Понятието редица може да се дефинира като функция, чиято дефиниционна област е множеството от целите положителни числа.)

В бъдеще често ще използуваме стандартни означения за някои важни функции. Така например под $\sin x$ ще разбираме функция, дефинирана при всяко x като ордината на точка P от равнината XOY, която се намира на разстояние 1 от началото O на координатната система, за която лъчът OP сключва с положителната част на абсцисната ос ъгъл, чиято радианна мярка е x. Последните думи означават, че за мярка на ъгъла се избира частното на дължината на дъгата, принадлежаща на този ъгъл, от коя да е окръжност с център във върха на ъгъла към радиуса на тази окръжност. Аналогично се дефинира функцията $\cos x$. Под $\operatorname{tg} x$ ще разбираме функция, дефинирана чрез равенството

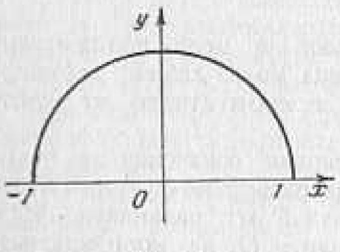
$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

п р и о н е з и и с а м о п р и о н е з и с т о й н о с т и н а x, з а к о и т о $\cos x \neq 0$, и пр. Нека изрично кажем, че дефиниционната област на тези функции се посочва, разбира се, още при дефиницията им, поради което ние ще я считаме за известна. Така например дефиниционната област на функцията $\frac{1}{x}$ е съставена от всички реални числа с изключение на нулата, дефиниционната област на функцията $\sqrt{x}$ е множеството от неотрицателните числа и пр.

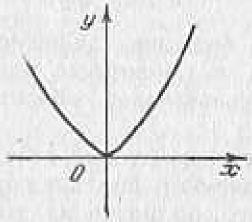
§ 2. Графика на една функция

Нека $f(x)$ е една функция, дефинирана в някое точково множество M. Множеството от точките в равнината на една правоъгълна координатна система XOY с координати $(x, f(x))$, където x се мени в M, се нарича графика на функцията $f(x)$ или крива с уравнение $y=f(x)$. Така например графиката на функцията $y=\sqrt{1-x^2}$, където x се мени в интервала $-1 \leqq x \leqq 1$, е една полуокръжност с център в началото на координатната система и радиус 1. Графиката на тази функция е изобразена на черт. 1.

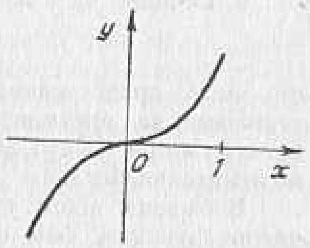
На черт. 2 е изобразена графиката на функцията $y=x^2$, дефинирана с това уравнение при всички стойности на x.



Черт. 1



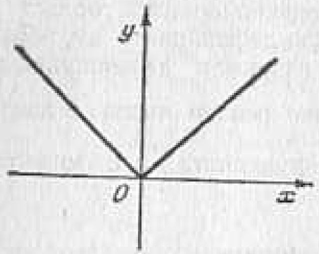
Черт. 2.



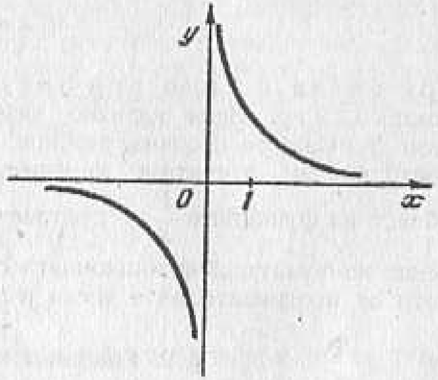
Черт. 3

На черт. 3 е изобразена графиката на функцията $y=x^3$, дефинирана с това уравнение при всички стойности на x.

На черт. 4 е изобразена графиката на функцията $y=|x|$, дефинирана с това уравнение при всички стойности на x.



Черт. 4



Черт. 5

На черт. 5 е изобразена графиката на функцията $y=\frac{1}{x}$, дефинирана с това уравнение за всички стойности на x, които са различни от нула.

§ 3. Ограничени функции

Една функция се нарича ограничена отгоре (отдолу), когато множеството от функционалните ѝ стойности е ограничено отгоре (отдолу). Една функция се нарича ограничена, когато тя е ограничена и отгоре, и отдолу. Така например функцията $f(x)=x^3$ при $0 \leqq x \leqq 1$ е ограничена. Напротив, функцията $g(x)=\frac{1}{x}$ при $0<x \leqq 1$, макар и да е ограничена отдолу, не е ограничена отгоре. И наистина, колкото и голямо положително число L да вземем, измежду функционалните стойности на $g(x)$ има по-големи от L. За да получим такава функционална стойност, достатъчно е да вземем $x<\frac{1}{L}$. Нека отбележим изрично, че функцията $g(x)$ е добре дефинирана в интервала $0<x \leqq 1$, защото точката 0 не е причислена към този интервал.

Ако една функция е ограничена отгоре, тя притежава съгласно принципа за непрекъснатост точна горна граница (най-малката от горните граници). Точната горна граница на една функция обаче не е задължена да бъде една функционална стойност на тая функция. Това може да се види при следния прост пример. Нека дефинираме функция $\varphi(x)$ в отворения интервал $0<x<1$ с условието $\varphi(x)=x$; тази функция е ограничена (точната ѝ горна граница е 1), но никоя от функционалните ѝ стойности не е равна на 1. В този пример функцията е дефинирана в един отворен интервал. За да имаме пример на една ограничена функция, която е дефинирана в един затворен интервал и въпреки това не достига точната си горна граница, нека означим с $[x]$ (четете „скобка x") най-голямото цяло число, което не надминава x. Така $\left[2\frac{1}{2}\right]=2$, $[5]=5$, $[\pi]=3$, $\left[-1\frac{1}{2}\right]=-2$ и пр. Нека $\psi(x)=x-[x]$ при $0 \leqq x \leqq 1$. Тази функция е ограничена. При $0 \leqq x<1$ имаме $[x]=0$, т. е. $\psi(x)=x<1$. При $x=1$ имаме $\psi(1)=1-[1]=1-1=0$, т. е. и в тоя случай $\psi(1)<1$. Очевидно числото 1 е една горна граница за функцията $\psi(x)$. Това е и най-малката от горните граници, защото функцията $\psi(x)$ е способна да приема стойности, произволно близки до 1 (имаме $\psi(x)=x$ при $0 \leqq x<1$). Функцията $\psi(x)$ обаче не достига тая своя точна горна граница при никаква стойност на x; ние видяхме, че имаме винаги $\psi(x)<1$, дори при $x=1$.

Разбира се, аналогична забележка е в сила и за точната долна граница на една функция.

§ 4. Граници на функции

Нека $f(x)$ е една функция, дефинирана в някое множество M от точки, и нека x_0 е една такава точка (която може и да не принадлежи на M), във всяка околност на която има точки от M, различни от x_0.

Казваме, че функцията $f(x)$ притежава граница при x, клонящо към x_0 (чрез стойности, различни от x_0), когато при всеки избор на редицата

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

от стойностите на аргумента, принадлежащи на дефиниционната област M, различни от x_0 и клонящи към x_0, съответната редица

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$$

от функционалните стойности е сходяща (какво значи една редица от числа да бъде сходяща, ние знаем).

Не е трудно да се убедим, че в такъв случай границата на редицата

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$$

не зависи от специалния избор на редицата

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

И наистина нека

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

$$x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots$$

са две редици от точки от M, различни от x_0 и клонящи към x_0. Ще покажем, че $\lim f(x_n) = \lim f(x_n^*)$. За да се убедим в това, вземаме под внимание, че редицата

$$x_1, x_1^*, x_2, x_2^*, x_3, x_3^*, \ldots,$$

членовете на която са различни от x_0 и принадлежат на M, клони към x_0. В такъв случай, щом функцията $f(x)$ притежава граница, когато x клони към x_0 (чрез стойности, различни от x_0), редицата

$$f(x_1), f(x_1^*), f(x_2), f(x_2^*), f(x_3), f(x_3^*), \ldots$$

е сходяща и следователно двете нейни подредици

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$$

$$f(x_1^*), f(x_2^*), f(x_3^*), \ldots$$

клонят към една и съща граница.

И така нека функцията $f(x)$ притежава граница, когато x клони към x_0 (чрез стойности, различни от x_0). Независещата от специалния избор на числата x_n граница на редицата

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots,$$

когато числата x_n са различни от x_0, принадлежат на M и клонят към x_0, се нарича граница на функцията $f(x)$ при x, клонящо към x_0 (чрез стойности, различни от x_0).

За да изразим, че числото l е граница на една функция $f(x)$, когато x клони към x_0, пишем кратко $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ (четете „лимес $f(x)$ при x, клонящо към x_0, е l").

Когато една функция $f(x)$ клони към l при x, клонящо към x_0, тогава при всеки избор на положителното число ε може да се намери такова положително число δ (евентуално зависещо от ε), че при всички стойности на x от дефиниционната област на функцията, различни от x_0, за които $|x - x_0| < \delta$, да е в сила неравенството

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

И наистина, ако допуснем противното, заключаваме, че има поне едно положително число ε_0, на което не може да се съпостави положително число δ с исканото свойство. Така, ако изберем $\delta = 1$, ще може да се намери число $x_1 \neq x_0$ (от дефиниционната област на функцията), за което да имаме $|x_1 - x_0| < 1$ и въпреки това $|f(x_1) - l| \geqq \varepsilon_0$. При $\delta = \frac{1}{2}$ също може да се намери някое число $x_2 \neq x_0$ така, че $|x_2 - x_0| < \frac{1}{2}$, но $|f(x_2) - l| \geqq \varepsilon_0$, и т. н. Изобщо при $\delta = \frac{1}{n}$, където n е цяло положително число, има число $x_n \neq x_0$ в дефиниционната област на функцията, за което $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ и въпреки това

$$|f(x_n) - l| \geqq \varepsilon_0.$$

Така получихме една редица от числа

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

всички принадлежащи на дефиниционната област на функцията, различни от x_0 и клонящи към x_0 $\left(\text{поради } |x_n - x_0| < \frac{1}{n}\right)$, за които съответната редица от функционалните стойности

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$$

сигурно не клони към l (поради $|f(x_n) - l| \geqq \varepsilon_0$). Това обаче противоречи на нашето допускане, според което функцията $f(x)$ клони към l при $x \to x_0$. С това доказателството е завършено.

Сега ще покажем, че и обратното е в сила, т. е. ако за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери $\delta > 0$ така, че за всички стойности на $x \neq x_0$ от дефиниционната област на функцията, удовлетворяващи неравенството $|x - x_0| < \delta$, е изпълнено и неравенството $|f(x) - l| < \varepsilon$, то функцията $f(x)$ клони към l при $x \to x_0$. Това значи, че каквато и да е редицата

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

от стойности на аргумента, принадлежащи на дефиниционната област на функцията, различни от x_0 и клонящи към x_0, съответната редица

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3), \ldots$$

клони към l.

За да покажем това, избираме $\varepsilon > 0$. Нека $\delta > 0$ е съответното му число. Очевидно може да се намери число ν така, че при $n > \nu$ да имаме $|x_n - x_0| < \delta$ (защото числото δ е положително и $x_n \to x_0$). В такъв случай обаче $|f(x_n) - l| < \varepsilon$, което ни учи, че редицата с общ член $f(x_n)$ е сходяща и клони към l.

От направения анализ заключаваме, че на понятието граница на една функция можем да дадем още и следната дефиниция, която е напълно еквивалентна на дадената вече по-горе дефиниция:

Едно число l се нарича граница на една функция $f(x)$ при x, клонящо към x_0 чрез стойности, различни от x_0, ако на всяко положително число ε може да се съпостави положително число δ по такъв начин, че щом x е различно от x_0, принадлежи на дефиниционната област на $f(x)$ и удовлетворява неравенството $|x - x_0| < \delta$, да е изпълнено неравенството

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

В заключение ще дадем още следните дефиниции:

1. Казваме, че функцията $f(x)$ дивергира към $+\infty$ (или расте неограничено) при x, клонящо към x_0, и пишем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty,$$

когато при всеки избор на редицата от различните от x_0 точки

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,$$

които принадлежат към дефиниционната област на функцията $f(x)$ и клонят към x_0, съответната редица

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3), \ldots$$

от стойностите на функцията расте неограничено.

2. Казваме, че функцията $f(x)$ дивергира към $-\infty$, когато x клони към x_0, и пишем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

ако

$$\lim_{x \to x_0} (-f(x)) = +\infty.$$

§ 5. Граница на функции, когато аргументът клони към $+\infty$ или към $-\infty$

Нека в дефиниционната област M на една функция $f(x)$ има произволно големи числа. Ще казваме, че функцията $f(x)$ клони към l, когато x клони към $+\infty$, ако при всеки избор на редицата

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$$

от стойности на аргумента, които принадлежат на M и растат неограничено, съответната редица от функционални стойности

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3), \ldots$$

е сходяща и клони към l.

На тази дефиниция може да се даде още следната форма: ще казваме, че $f(x)$ клони към l, когато x клони (или дивергира) към $+\infty$, ако при всеки избор на положителното число ε може да се намери число A по такъв начин, че за всяко x, което принадлежи на дефиниционната област на $f(x)$ и удовлетворява неравенството $x > A$, да е изпълнено неравенството

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

Предоставяме на читателя да докаже, че горните две редакции са наистина еквивалентни. Разсъжденията могат да се извършат съвсем аналогично на съответните разсъждения от § 4.

За да изразим, че $f(x)$ клони към l, когато x клони към $+\infty$, пишем

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l.$$

Казваме, че функцията $f(x)$ клони или дивергира към $+\infty$ при x, клонящо към $+\infty$, и пишем

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty,$$

ако при всеки избор на числото A може да се намери такова число B, че щом x принадлежи към дефиниционната област на $f(x)$ и удовлетворява неравенството $x > B$, да имаме $f(x) > A$. Нека припомним, че още в началото на този параграф предположихме, че в дефиниционната област на $f(x)$ има произволно големи числа.

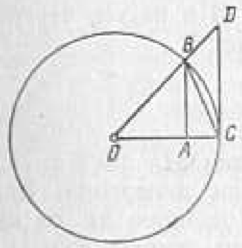
Аналогично се дефинират символите

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = l,\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

където l е едно реално число. Нека читателят сам редактира съответните дефиниции.

§ 6. Границата на $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$

Частното $\frac{\sin x}{x}$ е дефинирано при всички стойности на x, различни от нула (при $x=0$ това частно не е дефинирано, защото знаменателят става нула). Разбира се, няма смисъл да поставяме въпроса за пресмятане на стойността на това частно при $x=0$ (за тази стойност на x то не е дефинирано), но има смисъл да изследваме дали това частно има граница, когато x клони към нула (разбира се, чрез стойности, различни от нула). Тук ще докажем, че $\frac{\sin x}{x}$ притежава граница при $x \to 0$ и когато ъгълът е измерен в радиани*,



Черт. 6

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

За целта ще се възползуваме от неравенствата

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

валидни при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Ето как могат да се докажат тези неравенства. От чертеж 6 се вижда, че лиц. $\triangle\, OCB <$ лиц. сект. $OCB <$ лиц. $\triangle OCD$, или

$$\frac{1}{2} OC.AB < \frac{1}{2} OC.\breve{C}B < \frac{1}{2} OC.CD.$$

Нека радиусът на окръжността е r и ъгълът COB, измерен в радиани, е x. В такъв случай

$$\frac{1}{2} r.r.\sin x < \frac{1}{2} r.rx < \frac{1}{2} r.r \operatorname{tg} x$$

(имаме $\breve{C}B = r.x$, понеже x е абсолютната мярка на $\sphericalangle COB$), т. е.

(1) $$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

---

* Да припомним, че това значи, че за мярка на ъгъла се избира частното на дъгата, принадлежаща на този ъгъл, от кой да е окръжност с център във върха на ъгъла, към радиуса на тази окръжност. Този начин на измерване на ъглите се нарича абсолютен.

Така абсолютната мярка на ъгъл от 90° е $\frac{\pi}{2}$, на ъгъл от 180° е π, на 360° е 2π и пр. Ъгъл, чиято абсолютна мярка е 1, се нарича радиан.

В бъдеще, ако изрично не е казано противното, ще измерваме ъглите винаги в радиани.

С това помощните неравенства са доказани. От тях получаваме

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

и

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

От друга страна, $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, т. е. $1 - \cos x < \frac{x^2}{2}$ (понеже $\sin x < x$, виж (1)). И така ние получаваме

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}.$$

Последното неравенство доказахме само за положителни стойности на x, по-малки от $\frac{\pi}{2}$, но то е вярно* и за отрицателни стойности на x, по-големи от $-\frac{\pi}{2}$, защото

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}.$$

Ако изберем произволно $\varepsilon > 0$ и означим с δ по-малкото от числата $\frac{\pi}{2}$ и ε, то при $|x| < \delta$ получаваме

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < \frac{|x|.|x|}{2} < \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}.\varepsilon < \varepsilon,$$

което ни учи, че $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ съществува и има стойност 1.

---

* Неравенството е вярно и за всички стойности на x, но ние няма да се спираме на това, защото то няма да ни трябва поне засега.

Задачи

Да се намерят границите на следните функции:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$.

2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-ax^2-a^2x+a^3}{2x^3-3ax^2+a^3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-x^2-5x-3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-10x^2+9}{x^4-8x^2-9}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x+1}{\sin x-\cos x}$.

10. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\dots\cos\frac{x}{2^n}.$$

Упътване. Докажете, че при $\sin\dfrac{x}{2^n}\neq 0$ имаме

$$a_n=\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}.$$

11. Докажете, че $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{x}-\operatorname{ctg} x$

при $\sin x\neq 0$.

Упътване. Използувайте, че

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha.$$

12. Намерете границата на редицата с общ член

$$a_n=\frac{\cos\dfrac{\pi}{2n}+\cos\dfrac{2\pi}{2n}+\cos\dfrac{3\pi}{2n}+\dots+\cos\dfrac{n\pi}{2n}}{n}.$$

Упътване. Използувайте, че

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\dots+\cos n\alpha=\frac{\cos\dfrac{n+1}{2}\alpha\,.\,\sin\dfrac{n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

13. Нека a е произволно реално число и b е число, за което $|b|<1$. Образуваме редицата

$$x_0, x_1, x_2, \dots,$$

за която първият член x_0 се избира произволно и

$$x_{n+1}=a+b\sin x_n.$$

Покажете, че тази редица е сходяща и границата ѝ удовлетворява уравнението $x=a+b\sin x$.

Забележка. Уравнението

$$x=a+b\sin x$$

се използува в небесната механика и се нарича уравнение на Кеплер.

Упътване. Покажете, че редът

$$x_0+(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\dots+(x_{n+1}-x_n)+\dots$$

е сходящ, като се възползувате от това, че

$$x_{n+1}-x_n=b\,(\sin x_n-\sin x_{n-1})=2\,b\sin\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\cos\frac{x_n+x_{n-1}}{2},$$

следователно

$$|x_{n+1}-x_n|\leq|b|\,|x_n-x_{n-1}|.$$

§. 7 Непрекъснати функции

Може да се случи една функция $f(x)$ да не притежава граница, когато x клони към някоя точка x_0 (разбира се, за да има смисъл да поставяме въпроса за съществуване или несъществуване на $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, трябва във всяка околност на точката x_0 да има точка от дефиниционната област на функцията $f(x)$, различни от x_0). Такъв е например случаят с функцията, дефинирана при $x\neq 0$ с условието $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Тук $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не съществува, защото редицата от функционалните стойности

$$\frac{1}{x_1},\ \frac{1}{x_2},\ \frac{1}{x_3},\dots$$

е неограничена и следователно не е сходяща, когато редицата

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

от стойностите на аргумента клони към нула. Ако функцията $f(x)$ е дефинирана при $x=x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ съществува, когато $x\to x_0$ чрез стойности, различни от x_0, от това още не следва, че $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Това ние можем да си уясним със следния пример. Да дефинираме $f(x)$ като сума на реда

$$f(x)=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^3}+\dots$$

за такива стойности на x, за които редът е сходящ. Очевидно редът е сходящ за всяко реално x. При $x\neq 0$ имаме

$$f(x)=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\dots=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\frac{x^2(1+x^2)}{1+x^2-1}=1+x^2,$$

а при $x=0$ всичките членове на реда са нули и следователно $f(0)=0$. Функцията $f(x)$ притежава граница, когато x клони към нула чрез стойности, различни от нула, но

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1\neq f(0).$$

Ние бихме могли да дадем и по-прост пример. Нека $\varphi(x)=x$ при $x\neq 0$ и $\varphi(0)=1$. Тогава очевидно $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0\neq\varphi(0)$.

Ако една функция $f(x)$ притежава граница, когато x клони към x_0 (чрез стойности, различни от x_0), и тая граница е равна на $f(x_0)$, казваме, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0.

Понякога се препоръчва да се дефинира понятието непрекъснатост така, че да се прилага и за случая, когато точката x_0 е изолирана.* Затова ние ще дадем следната дефиниция: **Една функция $f(x)$ се нарича непрекъсната в една точка x_0 от дефиниционната си област, ако за всяка редица**

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\dots$$

от стойности на аргумента, които принадлежат на дефиниционната област на функцията $f(x)$ и клонят към x_0, съответната редица от функционалните стойности**

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\dots$$

е сходяща.

* Това значи, че ние искаме да допуснем и такива точки x_0, около които има околности, несъдържащи други точки от дефиниционната област на функцията освен x_0.

** Тук не се иска да имаме непременно $x_n\neq x_0$. В нашия курс ще изхождаме от тази редакция на дефиницията.

Не е трудно да се убедим, че от сходимостта на редицата

$$f(x_1),\ f(x_2),\dots,f(x_n),\dots$$

при **всички**, клонящи към x_0 редици от стойности на аргумента, включително и онези, в които фигурира x_0, следва, че $\lim f(x_n)=f(x_0)$. И наистина, ако $\lim x_n=x_0$, то редицата

$$x_1,\ x_0,\ x_2,\ x_0,\ x_3,\ x_0,\ x_4,\dots$$

също клони към x_0 и следователно редицата

$$f(x_1),\ f(x_0),\ f(x_2),\ f(x_0),\ f(x_3),\ f(x_0),\dots$$

е сходяща. От това следва, че двете редици

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\dots$$
$$f(x_0),\ f(x_0),\ f(x_0),\dots$$

клонят към една и съща граница като подредици на една и съща сходяща редица, т. е. $\lim f(x_n)=f(x_0)$.

На дефиницията на понятието непрекъснатост може да се даде още и следната форма: **една функция $f(x)$ се нарича непрекъсната в една точка x_0 от дефиниционната си област, когато на всяко положително число ε може да се съпостави положително число δ (евентуално зависещо от ε) така, че за всички точки x от дефиниционната област на функцията, за които $|x-x_0|<\delta$, да е изпълнено неравенството**

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Както ще видим, последните две дефиниции на понятието непрекъснатост са еквивалентни помежду си.

Доказателство. Нека е дадено, че каквато и да е редицата

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\dots$$

от точки, които принадлежат на дефиниционната област на $f(x)$ и клонят към x_0, съответната редица от функционални стойности

$$f(x_1),\ f(x_2),\dots$$

е сходяща и клони към $f(x_0)$. Ще докажем, че при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число δ така, че всеки път, когато е изпълнено неравенството $|x-x_0|<\delta$ и точката x принадлежи на дефиниционната област на $f(x)$, да имаме

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Доказателството извършваме от противното, като допускаме, че има (поне едно) положително число ε_0, за което не е възможно да се избере положително число δ с исканото свойство. В такъв случай, ако вземем $\delta = \frac{1}{n}$, където n е цяло положително число, можем да намерим точка x_n от дефиниционната област на $f(x)$, за която

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n},$$

но при все това

$$|f(x_n) - f(x_0)| \geqq \varepsilon_0.$$

От друга страна, редицата

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

както това се вижда от неравенството $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, клони към x_0 и според допускането редицата

$$f(x_1), f(x_2), \ldots$$

трябва да клони към $f(x_0)$, което не е възможно поради неравенството

$$|f(x_n) - f(x_0)| \geqq \varepsilon_0.$$

С това исканото противоречие е получено.

Сега нека разгледаме обратния въпрос. Нека е дадено, че при всеки избор на положително число ε може да се намери положително число δ така, че ако $|x - x_0| < \delta$ и точката x принадлежи на дефиниционната област на $f(x)$, да имаме

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ще докажем, че каквато и да е редицата от числата

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

които принадлежат на дефиниционната област на $f(x)$ и клонят към x_0 съответната редица от функционални стойности

$$f(x_1), f(x_2), \ldots$$

е сходяща и клони към $f(x_0)$.

Нека

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

е една произволна редица от точки, принадлежащи на дефиниционната област на $f(x)$ и клонящи към x_0. Ще докажем, че $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

За тази цел избираме едно произволно положително число ε и определяме δ така, че при $|x - x_0| < \delta$ да имаме

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

всеки път, когато x принадлежи на дефиниционната област на $f(x)$. Избираме си след това числото ν така, че при $n > \nu$ да имаме $|x_n - x_0| < \delta$. Това е възможно, защото числото δ е положително и редицата

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

клони към x_0. Но щом $|x_n - x_0| < \delta$, тогава

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Последното неравенство е изпълнено при всички цели положителни стойности на n, които са по-големи от ν. С това ние доказахме, че редицата

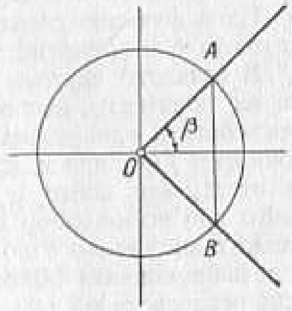
$$f(x_1), f(x_2), \ldots$$

е сходяща и клони към $f(x_0)$.

Пример. Функцията $f(x) = \sin x$, дефинирана за всички стойности на x, е непрекъсната за всяко x_0. За да докажем това, предварително ще установим неравенството

$$|\sin\alpha| \leqq |\alpha|.$$

При $|\alpha| \geqq \frac{\pi}{2}$ верността на това неравенство се вижда непосредствено, защото $|\sin\alpha| \leqq 1 < \frac{\pi}{2} \leqq |\alpha|$. Остава да се изучи случаят, когато $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$. Но в такъв случай $|\sin\alpha| = \sin|\alpha|$ и следователно имаме да установим неравенството $\sin\beta \leqq \beta$ при $\beta < \frac{\pi}{2}$, където сме положили $|\alpha| = \beta$ и следователно имаме $\beta \geqq 0$. Това неравенство може да се установи, като вземем под внимание, че (черт. 7)



Черт. 7

$$\overline{AB} \leqq \breve{AB}$$

или

$$2 . OA . \sin\beta \leqq OA . 2\beta, \quad \text{т. е.} \quad \sin\beta \leqq \beta.$$

За да покажем непрекъснатостта на функцията $\sin x$ в една точка x_0, ползуваме се от неравенството

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| . \left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leqq 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| . 1 = |x - x_0|.$$

Избираме едно положително число ε и полагаме $\delta = \varepsilon$. Тогава при $|x - x_0| < \delta$ имаме

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon.$$

С това непрекъснатостта на функцията $\sin x$ е установена при всеки избор на точката x_0. Аналогично се установява непрекъснатостта и на функцията $\cos x$ при всички стойности на аргумента.

Една функция се нарича прекъсната в една точка от дефиниционната си област, когато не е непрекъсната в тая точка. Нека изрично кажем, че за да има смисъл да се питаме дали една функция е непрекъсната в една точка x_0, трябва точката x_0 да принадлежи на дефиниционната област на функцията (в дефинициите, които дадохме, участвува $f(x_0)$ и следователно, за да можем да приложим коя да е от тия дефиниции, трябва да се знае какво означава $f(x_0)$). Така например въпросът, дали функцията $f(x)=\frac{1}{x}$, дефинирана при $x\neq 0$, е прекъсната, или не, при $x=0$ е лишен от смисъл. Тази функция не е дефинирана при $x=0$. Напротив, ако дефинираме функцията $f(x)$ с условията $f(x)=\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$ и $f(0)=1$, то тази функция е дефинирана при $x=0$ и в тази точка е прекъсната.

Една функция се нарича непрекъсната в едно множество от точки когато тя е непрекъсната във всяка точка в това множество.

В началото на този параграф ние дадохме още и такава дефиниция на понятието непрекъснатост: една функция $f(x)$ се нарича непрекъсната в една точка x_0 от дефиниционната си област, когато $f(x)$ клони към $f(x_0)$ при x, клонящо към x_0 через стойности, различни от x_0, или, което е същото, $f(x)$ се нарича непрекъсната в x_0, когато при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число δ по такъв начин, че при всички стойности на x от дефиниционната област на $f(x)$, различни от x_0 и удовлетворяващи неравенството $|x-x_0|<\delta$, е изпълнено неравенството

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Разбира се, тази дефиниция може да се прилага само когато във всяка околност на точката x_0 има точки от дефиниционната област на $f(x)$, които са различни от x_0. В такъв случай тя е еквивалентна с другите две дефиниции, които ние разгледахме в този параграф, защото неравенството

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

е изпълнено очевидно и при $x=x_0$.

§ 8. Свойства на непрекъснатите функции

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две функции, дефинирани в някое точково множество M, и нека точката x_0 принадлежи на M. Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в x_0, то функциите

$$(1)\qquad f(x)+g(x),\quad f(x)-g(x),\quad f(x)\,g(x)$$

са също непрекъснати в точката x_0. Ако освен това $g(x)\neq 0$ в M, то и функцията

$$(2)\qquad \frac{f(x)}{g(x)}$$

е непрекъсната в точката x_0.

За да докажем това, разглеждаме произволна редица

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots$$

от точки, които принадлежат на множеството M и клонят към x_0. В такъв случай, като вземем под внимание, че функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в x_0, заключаваме, че редиците

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ldots$$
$$g(x_1),\ g(x_2),\ g(x_3),\ldots$$

са сходящи. Оттук следва, че редиците

$$f(x_1)+g(x_1),\quad f(x_2)+g(x_2),\ldots$$
$$f(x_1)-g(x_1),\quad f(x_2)-g(x_2),\ldots$$
$$f(x_1)\,g(x_1),\quad f(x_2)\,g(x_2),\ldots$$

са също сходящи, а ако $g(x)\neq 0$ в M, то и редицата

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)},\ \frac{f(x_2)}{g(x_2)},\ldots$$

е сходяща. С това е показано, че функциите (1) и (2) са наистина непрекъснати в точката x_0.

Преминаваме към едно друго често използувано свойство на непрекъснатите функции. За тази цел ще дефинираме първо понятието функция от функция (или, както се казва често, сложна функция).

Нека $F(x)$ е една функция и M е нейната дефиниционна област. Ако всички функционални стойности на една функция $f(t)$ принадлежат на M, то както и да избираме t от дефиниционната област на $f(t)$, символът

$$F(f(t))$$

има смисъл. Стойността на този израз е еднозначно определена при всеки избор на t от дефиниционната област на $f(t)$. По този начин, като положим

$$(3)\qquad \varphi(t)=F(f(t)),$$

получаваме една функция на t, която е дефинирана в същото множество, където е дефинирана и функцията $f(t)$. Така получената функция (3) се нарича функция от функция или сложна функция.

Ще покажем, че непрекъсната функция от непрекъсната функция е непрекъсната. По-точно ще покажем, че ако функцията $f(t)$ е непрекъсната в точката t_0, а функцията $F(x)$ е непрекъсната в точката $x_0 = f(t_0)$ (и ако, разбира се, стойностите на $f(t)$ не напускат дефиниционната област на $F(x)$, когато t се мени), то функцията (3) е непрекъсната в точката t_0.

И наистина нека ε е произволно положително число. Избираме положителното число η по такъв начин, че ако $|x - x_0| < \eta$ и x принадлежи към дефиниционната област на $F(x)$, то $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$. След като е дефинирано положителното число η, избираме положителното число δ по такъв начин, че ако t принадлежи на дефиниционната област на $f(t)$ и $|t - t_0| < \delta$, да имаме

$$|f(t) - f(t_0)| < \eta$$

или, което е същото,

$$|f(t) - x_0| < \eta. \tag{4}$$

Щом обаче е изпълнено неравенството (4), ще имаме

$$|F(f(t)) - F(x_0)| < \varepsilon$$

и следователно

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \varepsilon,$$

с което е показано, че функцията (3) е непрекъсната в точката t_0.

В бъдеще ние често ще си служим и със следното свойство на непрекъснатите функции: ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в една точка x_0 от дефиниционната си област и $f(x_0) > 0$, то може да се намери положително число δ по такъв начин, че за всички точки x от дефиниционната област на $f(x)$, за които $|x - x_0| < \delta$, да имаме $f(x) > 0$. За да докажем това, избираме положителното число δ по такъв начин, че при всички стойности на x от дефиниционната област на $f(x)$, за които $|x - x_0| < \delta$, да имаме

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2} f(x_0).$$

В такъв случай ще имаме

$$-\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}$$

и следователно

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

По същия начин се установява, разбира се, че ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в x_0 и ако $f(x_0) < 0$, то за всички стойности на x от

дефиниционната област на $f(x)$, които са достатъчно близо до x_0, имаме

$$f(x) < 0.$$

И така ние установихме няколко съвсем прости свойства на непрекъснатите функции. Нека обърнем вниманието на читателя, че при доказателството ние не си служихме с принципа на непрекъснатост на множеството на реалните числа. Сега ще разгледаме няколко теореми, доказателствата на които съществено почиват на този принцип. Така ние често ще използуваме принципа за компактност, който получихме като следствие от теоремата на Болцано — Вайерщрас. Тази теорема ние получихме обаче като следствие от теоремата на Кантор, която от своя страна доказахме въз основа на принципа за непрекъснатост.

Теоремите, които ще разгледаме сега, се отнасят за функции, които са дефинирани и непрекъснати в така наречени компактни множества. Едно множество от точки се нарича компактно, когато е ограничено и когато всяка сходяща редица от точки, принадлежащи на това множество, клони към точка, която също принадлежи на това множество. Така например всеки краен и затворен интервал $a \leqq x \leqq b$ е компактно множество, защото това множество е ограничено и защото границата x_0 на всяка сходяща редица

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

членовете на която удовлетворяват условието

$$a \leqq x_n \leqq b,$$

също удовлетворява условието

$$a \leqq x_0 \leqq b,$$

както ни учи теоремата за граничен преход в неравенствата (вж. част I, глава II, § 6).

Теорема. Ако една функция $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в едно компактно множество M, тя е ограничена (и отгоре, и отдолу).

Доказателството ще извършим от противното. Да допуснем, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в M, но не е ограничена. В такъв случай може да се намери число x_1 от M, за което $|f(x_1)| > 1$, защото в противен случай бихме имали $|f(x)| \leqq 1$ навсякъде в M, т. е. функцията би била ограничена. Разсъждавайки по същия начин, заключаваме, че може да се намери число x_2, за което $|f(x_2)| > 2$, и пр. Така ние получаваме една редица от числа

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, \tag{5}$$

принадлежащи на M, за която $|f(x_n)| > n$. Редицата (5) е обаче ограничена (всичките ѝ членове се намират в компактното множество M)

и следователно можем да изберем от нея (вж. § 9 от гл. II) сходяща подредица

(6) $$x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \ldots,$$
$$m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$$

Нека ξ е границата на редицата (6). Тъй като всичките членове на редицата (6) принадлежат на компактното множество M, то и точката ξ лежи в него. От друга страна, функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната във всичките точки на множеството M, следователно тя е дефинирана и непрекъсната и в точката ξ. От това следва, че редицата

$$f(x_{m_1}), f(x_{m_2}), f(x_{m_3}), \ldots$$

е сходяща, нещо, което не е възможно, защото неравенствата

$$|f(x_{m_k})| > m_k \geq k$$

ни учат, че тази редица не е ограничена (ние знаем, че всяка сходяща редица е ограничена). С това доказателството е завършено.

При доказателството ние съществено се възползувахме (къде?) от обстоятелството, че функцията е непрекъсната в едно компактно множество. Ако това условие е нарушено, не можем да твърдим, че функцията е ограничена. Така например функцията $f(x) = \frac{1}{x}$ е непрекъсната за всяко x от отворения интервал $0 < x < 1$, но тя не е ограничена в този интервал. Това, разбира се, не противоречи на теоремата, която току-що доказахме, защото множеството от точките, в което разглеждаме $f(x)$, не е компактно.

Теорема на Вайерщрас (Weierstrass). Измежду стойностите на една функция, дефинирана и непрекъсната в едно компактно множество, има най-голяма и най-малка стойност.

Разбира се, всяко множество от краен брой числа има най-голямо и най-малко число. Но множеството на функционалните стойности на една функция, изобщо казано, е съставено от безбройно много числа, поради което съвсем не е ясно дали тя съдържа най-голям член, или не. Едно множество от безбройно много числа може да няма най-голям или най-малък член дори тогава, когато то е ограничено. Така например измежду числата, които образуват полузатворения интервал $0 \leq x < 1$, има едно най-малко, но няма най-голямо число.

Ние вече знаем, че една непрекъсната функция е ограничена както отгоре, така и отдолу и следователно притежава точна горна и точна долна граница. Ние не знаем обаче дали тази функция достига точната си долна и точната си горна граница.

Функцията $f(x) = x$ при $0 \leq x < 1$ е ограничена; точната ѝ горна граница е 1, а точната ѝ долна граница е нула. Тази функция достига точната си долна граница, но не достига точната си горна граница (точката $x = 1$ не е причислена към дефиниционния интервал).

Теоремата на Вайерщрас може да се формулира още така:

Ако една функция $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в едно компактно множество M, то тя достига както точната си горна граница, така и точната си долна граница.

Това трябва да се разбира така: при изброените условия има точка x_1 от M, за която $f(x_1)$ е равно на точната горна граница на функцията, и точка x_2, за която $f(x_2)$ е равно на точната долна граница на функцията.

След тази предварителна бележка ще пристъпим към доказателството на теоремата на Вайерщрас. Нека $f(x)$ е една непрекъсната функция в компактното множество M и нека L е точната ѝ горна граница (функцията има точна горна граница, защото, както ние вече доказахме, тя е ограничена). Колкото и голямо да е цялото положително число n, числото $L - \frac{1}{n}$ не е горна граница на $f(x)$ (защото L е най-малката от горните граници) и следователно има поне едно число x_n от M, за което $f(x_n) > L - \frac{1}{n}$. По тоя начин ние добиваме възможност да дефинираме една редица от числа

(7) $$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

принадлежащи на M, за които са изпълнени неравенствата

(8) $$f(x_n) > L - \frac{1}{n}.$$

Редицата (7) е ограничена (защото множеството M е компактно) и следователно ние можем от нея да изберем сходяща подредица

(9) $$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots \quad (n_1 < n_2 < n_3 < \ldots).$$

Да означим с ξ границата на тази редица. Тъй като множеството M е компактно и всичките членове на редицата (9) принадлежат на него, то границата ѝ ξ също принадлежи на M. Това ни дава основание да твърдим, че функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в точката ξ и следователно редицата

$$f(x_{n_1}), f(x_{n_2}), \ldots$$

е сходяща и клони към $f(\xi)$. От друга страна, имаме

(10) $$L - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq L, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

(Неравенствата $L - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k})$ следват от неравенствата (8), а неравенствата $f(x_{n_k}) \leq L$ са изпълнени, понеже L е една горна граница на $f(x)$.)

Редицата с общ член $L-\dfrac{1}{n_k}$ е сходяща и клони към L. Редицата с общ член L е също сходяща и клони също към L. Това ни позволява да заключим с помощта на неравенствата (10), че редицата с общ член $f(x_{n_k})$ клони към L. От друга страна, ние знаем, че

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi),$$

откъдето заключаваме, че $f(\xi)=L$. Разбира се, $f(\xi)$ е най-голямата стойност на функцията, защото за всяка функционална стойност на $f(x)$ имаме $f(x)\leqq L$ и следователно $f(x)\leqq f(\xi)$ (понеже $f(\xi)=L$). С това доказателството е завършено.

Аналогично се установява и съществуването на най-малка функционална стойност.

Теорема. Ако една функция $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в едно компактно множество M, то множеството N от функционалните стойности на $f(x)$ е също тъй компактно.

Доказателство. Ние вече знаем, че множеството N е ограничено, тъй като множеството M е компактно, а функцията $f(x)$ е непрекъсната в M. Остава да покажем, че границата y_0 на всяка сходяща редица

$$y_1, y_2, y_3, \ldots,$$

членовете на която принадлежат на N, също тъй принадлежи на N. Това можем да установим така. Тъй като y_n принадлежи на N, то ние можем да намерим поне една точка x_n от M, за която

$$f(x_n) = y_n.$$

Редицата

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

обаче е ограничена, защото членовете ѝ принадлежат на компактното множество M. Това ни дава възможност да изберем от нея сходяща подредица

$$x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \ldots \qquad (m_1 < m_2 < m_3 < \ldots).$$

Нека x_0 е границата на тази сходяща подредица. Точката x_0 принадлежи на M, защото множеството M е компактно. Функцията обаче е непрекъсната навсякъде в M и следователно е непрекъсната и в точката x_0, което ни дава

$$f(x_0) = y_0,$$

т. е. точката y_0 действително принадлежи на N, с което е показано, че множеството N е компактно.

Сега ще разгледаме друго важно свойство на непрекъснатите функции.

Теорема. Ако една функция $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в един краен и затворен интервал $[a, b]$ и в краищата на този интервал приема стойности с противни знаци, то има поне една точка в интервала $[a, b]$, за която функцията се анулира.

Нека например $f(a)>0$ и $f(b)<0$ (аналогично се разглежда случаят, когато $f(a)<0$ и $f(b)>0$). Да означим с M множеството от онези точки x на интервала $[a, b]$, в които $f(x)>0$. Такива точки има. Такава е във всеки случай точката a. Множеството M е ограничено, защото лежи в крайния интервал $[a, b]$. Нека x_0 е точната горна граница на M. Както ще видим, точката x_0 принадлежи на дефиниционната област на $f(x)$ и при това $f(x_0)=0$.

И наистина очевидно $a\leqq x_0$, защото точката a принадлежи на M, а x_0 е една горна граница на M. Също така $x_0\leqq b$, защото b е една горна граница на M, а x_0 е най-малката от горните граници на M. И така $a\leqq x_0\leqq b$, т. е. функцията $f(x)$ е дефинирана в точката x_0. Остава да покажем, че $f(x_0)=0$. Точката x_0 е най-малката от горните граници на M, следователно $x_0-\dfrac{1}{n}$ вече не е горна граница на M, колкото и голямо да е положителното число n. Това значи, че имаме поне една точка x_n от M, за която $x_n > x_0-\dfrac{1}{n}$. Разбира се, имаме $x_n\leqq x_0$, защото x_n принадлежи на M, а x_0 е една горна граница на M. Като даваме на n стойностите

$$1, 2, 3, \ldots,$$

получаваме редица, която клони към x_0, както това се вижда от току-що доказаните неравенства

$$x_0-\frac{1}{n} < x_n \leqq x_0.$$

Това ни дава право да твърдим,* че $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$. От друга страна, $f(x_n)>0$ (защото x_n принадлежи на M) и следователно

$$f(x_0)\geqq 0$$

(ако имахме $f(x_0)<0$, то числото $f(x_0)$ не би могло да бъде точка на сгъстяване за редицата $f(x_1), f(x_2), \ldots$).

Ние винаги можем да изберем в интервала $[a, b]$ една редица от числа

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots,$$

които не принадлежат на M и клонят към x_0. И действително, ако $x_0=b$, то достатъчно е да поставим $\xi_n=b$. Ако $x_0<b$, числата ξ_n из-

* Използуваме непрекъснатостта на $f(x)$ при $x=x_0$.

бираме произволно в отворения интервал (x_0, b), подчинявайки ги на единственото условие да клонят към x_0. Редицата

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$$

клони към x_0 и следователно (поради непрекъснатостта на $f(x)$ в точката x_0) имаме

$$\lim f(\xi_n) = f(x_0).$$

От друга страна, числата ξ_n не принадлежат на M, т. е. $f(\xi_n) \leqq 0$, нещо, което е достатъчно да твърдим, че и

$$f(x_0) \leqq 0.$$

И така получихме двете неравенства

$$f(x_0) \geqq 0 \text{ и } f(x_0) \leqq 0,$$

от което заключаваме, че $f(x_0) = 0$.

Доказаната теорема може да се формулира в малко по-обща форма по следния начин:

Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$ и ако λ е едно число, заключено между $f(a)$ и $f(b)$, то има поне една точка x_0 в интервала $[a, b]$, за която $f(x_0) = \lambda$.

За да докажем това, образуваме помощната функция $\varphi(x) = f(x) - \lambda$. Функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и в краищата на този интервал приема стойностите $\varphi(a) = f(a) - \lambda$ и $\varphi(b) = f(b) - \lambda$, които имат противни знаци, защото λ се намира между $f(a)$ и $f(b)$ (ако $f(a) < \lambda < f(b)$, то $\varphi(a) < 0$ и $\varphi(b) > 0$; ако ли пък $f(b) < \lambda < f(a)$, то $\varphi(a) > 0$ и $\varphi(b) < 0$). Това ни дава право да твърдим, че има поне една точка x_0 в интервала $[a, b]$, за която $\varphi(x_0) = 0$ и следователно

$$f(x_0) = \lambda.$$

§ 9. Равномерна непрекъснатост

Ние знаем кога една функция се нарича непрекъсната. Така не е трудно да се види, че функцията $f(x) = x^2$, дефинирана за всички стойности на x, е непрекъсната навсякъде. Това може да се покаже по следния начин: избираме произволно положително число ε и с δ означаваме по-малкото от двете числа 1 и $\frac{\varepsilon}{2|x|+1}$; в такъв случай от неравенството

$$|(x+h)^2 - x^2| = |2xh + h^2| \leqq (2|x| + |h|)|h|$$

заключаваме, че при $|h| < \delta$ имаме

$$|(x+h)^2 - x^2| < [2|x|+1]|h| < (2|x|+1)\frac{\varepsilon}{2|x|+1} = \varepsilon.$$

Числото δ, което съпоставихме по този начин на ε, зависи в дадения случай не само от ε, но и от x. Ние ще си зададем сега следния въпрос: може ли, след като е направен изборът на положителното число ε, да се намери *независещо* от x положително число δ така, че неравенството

$$|(x+h)^2 - x^2| < \varepsilon$$

да бъде изпълнено при *всички стойности* на x, щом $|h| < \delta$? Отговорът на този въпрос е отрицателен. И наистина, ако такова число би могло да се намери, то бихме имали например при $h = \frac{\delta}{2}$ и *при всички стойности* на x

$$\left|\left(x+\frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2\right| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\left|\delta x + \frac{\delta^2}{4}\right| < \varepsilon$$

и толкова повече

$$\delta|x| - \frac{\delta^2}{4} < \varepsilon.$$

Това неравенство обаче сигурно е нарушено, ако $|x|$ е достатъчно голямо, защото δ е различно от нула.

Като друг пример да разгледаме функцията $\cos x$, дефинирана за всяко x. За да покажем, че тази функция е непрекъсната, избираме едно положително число ε и полагаме $\delta = \varepsilon$. В такъв случай от неравенството

$$|\cos(x+h) - \cos x| = -2\left|\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right|$$

$$= 2\left|\sin\frac{h}{2}\right| \cdot \left|\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right| \leqq 2\left|\frac{h}{2}\right| \cdot 1 = |h|$$

заключаваме, че при $|h| < \delta$ имаме

$$|\cos(x+h) - \cos x| < \varepsilon \tag{1}$$

при всяко x. Ние можахме да изберем в този случай едно *независещо* от x положително число δ така, че неравенството (1) да е изпълнено за *всяко* x, щом $|h| < \delta$. Често тази особеност на непрекъснатата функция $\cos x$ изразяваме, като казваме, че тя е *равно-*

мерно непрекъсната. Изобщо казваме, че една функция $f(x)$ на независимата променлива x е равномерно непрекъсната в едно множество M от точки, когато на всяко положително число ε може да се съпостави такова положително число δ, евентуално зависещо от ε, но не и от x, че неравенството

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon$$

да бъде изпълнено за всички стойности на x от M и за всички стойности на h, за които $|h|<\delta$ и точката $x+h$ принадлежи на M.

Ние вече видяхме, че не всяка непрекъсната функция е равномерно непрекъсната в дефиниционната си област. Ние ще докажем обаче сега следната важна теорема:

Ако една функция $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в едно компактно множество M, тя е равномерно непрекъсната в M.

Доказателството ще извършим от противното. Да допуснем, че има някое положително число ε, за което не е възможно да се избере положителното число δ така, че за всеки две числа x и x' от M, за които $|x-x'|<\delta$, да имаме $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$. Това значи, че при всеки избор на δ могат да се намерят две числа x и x', за които, макар и да имаме $|x-x'|<\delta$, при все това $|f(x)-f(x')|\geqq\varepsilon$. Специално, ако изберем $\delta=\frac{1}{n}$, където n е цяло положително число, ще можем да намерим две числа x_n и x'_n от M, за които

$$|x_n-x'_n|<\frac{1}{n}, \tag{2}$$

но

$$|f(x_n)-f(x_n')|\geqq\varepsilon. \tag{3}$$

Като дадем на n стойностите 1, 2, 3,..., добиваме възможност да дефинираме две редици от числа

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$
$$x_1', x_2', x_3', \ldots,$$

удовлетворяващи неравенствата (2) и (3).

Редицата

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

е ограничена (тъй като всичките ѝ членове се намират в компактното множество M) и следователно от тази редица можем да изберем сходяща подредица

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots \quad (n_1<n_2<n_3<\ldots).$$

Нека ξ е границата на тази подредица. Редицата

$$x'_{n_1}, x'_{n_2}, \ldots$$

е също така сходяща и клони към ξ, както това се вижда от неравенствата

$$|\xi-x'_{n_k}|=|(\xi-x_{n_k})+(x_{n_k}-x'_{n_k})|\leqq|\xi-x_{n_k}|+$$
$$+|x_{n_k}-x'_{n_k}|\leqq|\xi-x_{n_k}|+\frac{1}{n_k}.$$

От друга страна, точката ξ лежи в компактното множество M, защото тя е граница на редица от числа, които лежат в M. И така функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в точката ξ. Оттук заключаваме, че двете редици

$$\begin{aligned} &f(x_{n_1}), f(x_{n_2}), \ldots, \\ &f(x'_{n_1}), f(x'_{n_2}), \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

са сходящи и клонят към $f(\xi)$, тъй като двете редици

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots,$$
$$x'_{n_1}, x'_{n_2}, x'_{n_3}, \ldots$$

клонят към ξ и функцията е непрекъсната в точката ξ. Двете редици (4) обаче не могат да клонят към обща граница, защото

$$|f(x_{n_k})-f(x'_{n_k})|\geqq\varepsilon.$$

И така ние достигнахме до противоречие, което се дължи на допускането, че функцията $f(x)$ не е равномерно непрекъсната в M.

§ 10. Осцилация на една функция

Ако една функция е ограничена (и отгоре, и отдолу), тя притежава точна горна граница M и точна долна граница m. Разликата $M-m$ се нарича осцилация на функцията. И така осцилация на една функция се нарича разликата между точната горна и точната долна граница на функцията.

Ако една функция $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в един краен и затворен интервал $[a, b]$, то каквото и да бъде положителното число ε, може да се намери такова положително число δ, че всеки път, когато разделим интервала $[a, b]$ на подинтервали

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n],$$

чиито дължини са по-малки от δ, с помощта на точките

$$a=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_{n-1}<a_n=b,$$

осцилацията на функцията $f(x)$ във всеки един от тях да бъде по-малка от ε.

Доказателството ще извършим по следния начин. Въз основа на теоремата за равномерна непрекъснатост ние можем да изберем положителното число δ така, че щом $|x-x'|<\delta$, да имаме

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

Нека дължината на всеки един от подинтервалите е по-малка от δ, т. е. $a_k-a_{k-1}<\delta$, $k=1, 2,\ldots, n$. Нека M_k е точната горна и m_k е точната долна граница на функцията в интервала $[a_{k-1}, a_k]$. Според теоремата на Вайерщрас има точка x'_k и точка x''_k от интервала $[a_{k-1}, a_k]$, за които

$$f(x'_k)=M_k,$$
$$f(x''_k)=m_k.$$

От друга страна, $|x'_k-x''_k|<\delta$, защото дължината на интервала $[a_{k-1}, a_k]$ който съдържа точките x'_k и x''_k, е по-малка от δ. Това ни дава основание да заключим, че

$$|f(x'_k)-f(x''_k)|<\varepsilon$$

или, което е същото,

$$M_k-m_k<\varepsilon.$$

С това всичко е доказано.

§ 11. Още една форма на дефиницията на понятието непрекъснатост

Нека $f(x)$ е една функция, която е непрекъсната в точката x_0 от дефиниционната ѝ област M. Ако

$$x'_1, x'_2,\ldots,$$
$$x''_1, x''_2,\ldots$$

са две произволни редици от числа, принадлежащи на M и клонящи към x_0, а редицата с общ член

$$f(x''_n)-f(x'_n)$$

клони към нула, както това се вижда от дефиницията на понятието непрекъснатост.

Това ние изразяваме накратко, като казваме, че разликата

$$f(x'')-f(x')$$

клони към нула, когато x' и x'' клонят независимо едно от друго към x_0 чрез стойности на дефиниционната област на $f(x)$.

Обратното твърдение е също така в сила. Това значи, че ако разликата

$$f(x''_n)-f(x'_n)$$

клони към нула при всеки избор на двете клонящи x_0 редици

$$x'_1, x'_2, x'_3,\ldots,$$
$$x''_1, x''_2, x''_3,\ldots$$

от числа, принадлежащи на дефиниционната област на $f(x)$, то функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0.

За нашите цели е важно, че може да се установи непрекъснатостта на $f(x)$ в дадена точка x_0 при по-малко ограничителни условия: за да се твърди, че $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0, достатъчно е да се знае, че

$$\lim_{n\to\infty}[f(x''_n)-f(x'_n)]=0$$

поне за онези клонящи към x_0 редици

$$x'_1, x'_2, x'_3,\ldots,$$
$$x''_1, x''_2, x''_3,\ldots$$

от числа, принадлежащи на дефиниционната област на $f(x)$, които удовлетворяват неравенствата

$$x'_n\leqq x_0\leqq x''_n.$$

И наистина нека

$$x_1, x_2, x_3,\ldots$$

е произволна редица от числа, които принадлежат на дефиниционната област на $f(x)$ и клонят към x_0. Означаваме с x'_n по-малкото от двете числа x_n и x_0, а с x''_n — по-голямото от тези числа. В такъв случай числата x'_n и x''_n принадлежат на дефиниционната област на $f(x)$ (защото x_n и x_0 имат това свойство) и удовлетворяват неравенствата $x'_n\leqq x_0\leqq x''_n$. Освен това двете редици

$$x'_1, x'_2, x'_3,\ldots,$$
$$x''_1, x''_2, x''_3,\ldots$$

са сходящи и клонят към x_0, както се вижда от лесно доказуемите равенства

$$x'_n = \frac{x_n + x_0 - |x_n - x_0|}{2},$$

$$x''_n = \frac{x_n + x_0 + |x_n - x_0|}{2}.$$

Дадено е обаче, че за всеки две редици

$$x'_1, x'_2, x'_3, \ldots,$$
$$x''_1, x''_2, x''_3, \ldots,$$

които удовлетворяват изброените условия, имаме

$$\lim_{n\to\infty} [f(x''_n) - f(x'_n)] = 0.$$

Като се възползуваме от равенството

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |f(x''_n) - f(x'_n)|,$$

заключаваме, че

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

което показва, че функцията $f(x)$ е действително непрекъсната в точката x_0.

Направените разсъждения ни позволяват да формулираме по следния начин дефиницията на понятието непрекъснатост на една функция:

Казваме, че една функция $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0 от дефиниционната си област, ако разликата

$$f(x'') - f(x')$$

клони към нула, когато оставим x' и x'' да клонят по произволен начин (т. е. чрез произволни редици от стойности) към x_0, като удовлетворяват неравенството $x' \leq x_0 \leq x''$ и остават в дефиниционната област на $f(x)$.

Задачи

Забележка. Символът $[x]$ означава най-голямото цяло число, което не надминава x (срв. част II, § 3).

1. Покажете, че функцията $[x]$ се прекъсва при цели стойности на x и че при останалите стойности на x тя е непрекъсната.
2. Покажете, че функцията $f(x) = \sin \pi (x - [x])$ е непрекъсната при всяко x.
3. Покажете, че функцията $f(x) = [x] \sin \pi x$ е непрекъсната при всяко x.
4. Покажете, че функцията $f(x) = [x]^2 - 2x[x] + [x]$ е непрекъсната при всяко x.
5. Покажете, че функцията

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} [\lim_{n\to\infty} \cos^{2n} (m!\,\pi x)]$$

е дефинирана при всяко x и при всяко x е прекъсната (Дирикле).

Упътване. Покажете, че при рационални стойности на x имаме $f(x) = 1$, а при ирационални стойности на x имаме $f(x) = 0$.

6. Нека $f(x)$ е функция, дефинирана при $0 < x \leq 1$ по следния начин: ако $x = \frac{p}{q}$, където p и q са две цели положителни взаимно прости числа, то $f(x) = \frac{1}{q}$; ако x е ирационално, то $f(x) = 0$. Покажете, че функцията $f(x)$ е прекъсната при всички рационални стойности на x, но е непрекъсната при всички ирационални стойности на x в дефиниционния си интервал.

7. Нека $f(x)$ е функция, дефинирана при $0 < x \leq 1$ по следния начин: ако $x = \frac{p}{q}$, където p и q са две цели положителни взаимно прости числа, то $f(x) = q$; ако x е ирационално, то $f(x) = 0$. Покажете, че функцията $f(x)$ не е ограничена в никой подинтервал на интервала $0 < x \leq 1$.

8. Нека n е цяло положително число и $a \geq 0$. Покажете, че уравнението $x^n - a = 0$ има поне едно неотрицателно решение, като използувате общите свойства на непрекъснатите функции. Читателят вече познава някои доказателства на това твърдение; знае също така, че решението е единствено; тук се иска друго доказателство за съществуване, почиващо върху теорията на непрекъснатите функции.)

Упътване. Разгледайте непрекъснатата функция $f(x) = x^n - a$ в крайния и затворен интервал $0 \leq x \leq a + 1$ и покажете, че $f(0) \leq 0$ и $f(a+1) > 0$.

§ 12. Производна на функция

Нека е дадена една крива* с уравнение $y = f(x)$, където функцията $f(x)$ е дефинирана при $a < x < b$. Ще си поставим за задача да дефинираме понятието допирателна към кривата $y = f(x)$ в една точка от тази крива. Нека координатите на точката, която ни интересува, са $[x_0, f(x_0)]$, където, разбира се, $a < x_0 < b$. Ако $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$ са координатите на друга точка (т. е. такава, за която $h \neq 0$) от кривата, ние можем да напишем уравнението** на секущата, която съединява точките $[x_0, f(x_0)]$ и $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$.

---

* Често, вместо да казваме „графика на функцията $y = f(x)$", ще казваме „крива с уравнение $y = f(x)$".

** Читателят знае, че графиката на всяка линейна функция $y = ax + b$ е права. Поради това често пъти уравнение от вида $y = ax + b$ се нарича уравнение на права. Променливите x и y се наричат текущи координати, а коефициентът a се нарича ъглов коефициент на правата.

Уравнението на тази права е*

$$\eta - f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(\xi - x_0), \tag{1}$$

където с ξ и η сме означили текущите координати. Ние можем да напишем това уравнение, колкото и малко да е числото h, стига да е различно от нула и точката x_0+h да принадлежи на дефиниционната област на $f(x)$. Поради тази причина има смисъл да поставим въпроса, дали коефициентите в уравнението (1) клонят към някакви граници, когато h клони към нула (разбира се, чрез стойности, различни от нула).

За да притежават всичките коефициенти в уравнението (1) граници, необходимо и достатъчно е изразът

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

да притежава граница при $h \to 0$. Тази граница ще означим с $f'(x_0)$. Правата с уравнение

$$\eta - f(x_0) = f'(x_0)(\xi - x_0)$$

се нарича гранична права, към която клонят секущите (1) при $h \to 0$ или накратко — допирателна. И така допирателна (или тангента, както се казва понякога) към кривата $y=f(x)$ в точката $[x_0, f(x_0)]$ се нарича правата с уравнение

$$\eta - f(x_0) = f'(x_0)(\xi - x_0).$$

В бъдеще ние ще се ползуваме често от израза

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

* Ако $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ са две точки с различни абсциси, то графиката на линейната функция

$$y = ax+b, \text{ където } a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \text{ и } b = y_1 - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1, \tag{*}$$

минава през двете точки P_1 и P_2, защото, както се вижда с прости пресмятания, тази линейна функция при $x=x_1$ приема стойността y_1, а при $x=x_2$ приема стойността y_2.

Често пъти уравнението (*) се пише във вида

$$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

или

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

(ако $y_2 \neq y_1$) и пр.

който е добре дефиниран, когато точките x_0 и x_0+h принадлежат на дефиниционната област на функцията $f(x)$ и h е различно от нула. При фиксирано x_0 този израз представлява една функция на h.

Разбира се, няма смисъл да се питаме каква е стойността на този израз при $h=0$. При $h=0$ той не е дефиниран, защото знаменателят става нула. Има смисъл да си зададем въпроса обаче, дали той притежава граница или не, когато h клони към нула чрез стойности, различни от нула. С няколко прости примера ще покажем, че има функции, за които

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

съществува, но има също функции, за които тази граница не съществува. Нека $f(x)=x^2$. В такъв случай

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h} = 2x_0+h.$$

Очевидно в този случай интересуващата ни граница съществува при всички стойности на x_0 и има стойност $2x_0$.

Да разгледаме функцията $f(x)=|x|$ и да изберем $x_0=0$. В такъв случай

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{|h|}{h},$$

т. е.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 1 \text{ при } h>0 \text{ и } \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -1 \text{ при } h<0.$$

Ако оставим h да клони към нула чрез една редица

$$h_1, h_2, h_3, \ldots$$

от стойности, която съдържа както безбройно много положителни, така и безбройно много отрицателни членове, заключаваме, че съответната редица от стойности на израза

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

не клони към никаква граница, защото има две точки на сгъстяване (безбройно много от нейните членове са равни на 1 и безбройно много други са равни на -1, поради което точките 1 и -1 са точки на сгъстяване на тази редица).

В основата на всичко, което ще следва в този курс, лежи следната дефиниция.

Нека във всяка околност на една точка x_0 от дефиниционната област M на една функция $f(x)$ има точки, принадлежащи на M, различни от x_0. Казваме, че функцията $f(x)$ е диференцуема* в точката x_0, ако изразът

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

притежава граница, когато h клони към нула чрез стойности, различни от нула, за които точката x_0+h не напуска дефиниционната област на $f(x)$.

Границата, към която клони изразът

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(когато функцията е диференцуема) при $h \to 0$, се нарича производна на функцията $f(x)$ при $x=x_0$.

Производната на функцията $y=f(x)$ в точката x обикновено ще означаваме със знака $f'(x)$ или y' (четете — еф прим, игрек прим). Употребяват се обаче и означенията

$$\dot{y},\ \frac{dy}{dx},\quad Dy$$

и пр. (четете — игрек точка, де игрек де икс, де игрек и пр.).

Понятието допирателна към една крива $y=f(x)$ дефинирахме само в случая, когато в разглежданата точка функцията $f(x)$ е диференцуема. В такъв случай ъгловият коефициент на допирателната в една точка от кривата с абсциса x_0 е равен на стойността на производната $f'(x_0)$ в тази точка.

Сега ще покажем, че ако една функция е диференцуема в една точка, тя е непрекъсната в тази точка. За да докажем това, образуваме си помощната функция $\varphi(x)$ в дефиниционната област на $f(x)$ по следния начин:

(2)
$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)$$

при $x \neq x_0$ и $\varphi(x_0)=0$.

В такъв случай получаваме

(3)
$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\varphi(x)(x-x_0)$$

* Вместо да казваме, че $f(x)$ е диференцуема в една точка, често казваме, че $f(x)$ има производна в тази точка.

за всички стойности на x от дефиниционната област на $f(x)$. Тъй като

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),$$

не е трудно да се види, че при произволен избор на редицата

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\dots,$$

която клони към x_0 и членовете на която принадлежат на дефиниционната област на $f(x)$, съответната редица

$$\varphi(x_1),\ \varphi(x_2),\ \varphi(x_3),\dots$$

клони към нула. Като вземем това пред вид, заключаваме с помощта на равенството (3), че $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(x_0)]=0$, т. е. редицата

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3),\dots$$

клони към $f(x_0)$, което показва, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0.

И така, ако една функция е диференцуема в една точка, тя е непрекъсната в тази точка.

Обратното не е вярно. И наистина функцията $f(x)=|x|$ е непрекъсната навсякъде, както това лесно може да се види, но ние видяхме, че тя няма производна при $x=0$. През миналия век Вайерщрас показа с един пример, че има функции, които са дефинирани и непрекъснати за всяко x, но за никое x нямат производна.

Нека пак $f(x)$ означава функция, която е диференцуема в точката x_0. Ако x' и x'' клонят независимо едно от друго към x_0 (чрез стойности от дефиниционната област на $f(x)$) по такъв начин, че

$$x'\leqq x_0\leqq x'' \text{ и } x''\neq x',$$

частното

$$\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}$$

клони към $f'(x_0)$.

Това твърдение трябва да се разбира така: каквито и да са двете клонящи към x_0 редици

$$x_1',\ x_2',\ x_3',\dots,$$
$$x_1'',\ x_2'',\ x_3'',\dots$$

от числа, които принадлежат на дефиниционната област на $f(x)$ и удовлетворяват неравенствата

$$x_n'\leqq x_0\leqq x_n'',\ x_n'\neq x_n'',$$

редицата с общ член

$$\frac{f(x_n'')-f(x_n')}{x_n''-x_n'}$$

е сходяща и клони към $f'(x_0)$.

За да докажем това, ще се възползуваме от равенството (3). И така

$$f(x_n'')-f(x_0)=f'(x_0)(x_n''-x_0)+\varphi(x_n'')(x_n''-x_0),$$

$$f(x_n')-f(x_0)=f'(x_0)(x_n'-x_0)+\varphi(x_n')(x_n'-x_0).$$

Последните две равенства са валидни дори тогава, когато някое от двете числа x_n' и x_n'' е равно на x_0. Като извадим почленно тези две равенства, получаваме

$$f(x_n'')-f(x_n')=f'(x_0)(x_n''-x_n')+\varphi(x_n'')(x_n''-x_0)+$$
$$+\varphi(x_n')(x_0-x_n')$$

или

$$\frac{f(x_n'')-f(x_n')}{x_n''-x_n'}-f'(x_0)=\varphi(x_n'')\frac{x_n''-x_0}{x_n''-x_n'}+\varphi(x_n')\frac{x_0-x_n'}{x_n''-x_n'}.$$

Избираме едно произволно положително число ε и определяме ν така, че при $n>\nu$ да имаме

$$|\varphi(x_n'')|<\varepsilon \text{ и } |\varphi(x_n')|<\varepsilon.$$

Това е възможно, понеже

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n'')=0 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\varphi(x_n')=0.$$

В такъв случай при $n>\nu$ имаме

$$\left|\frac{f(x_n'')-f(x_n')}{x_n''-x_n'}-f'(x_0)\right|\leqq|\varphi(x_n'')|\frac{x_n''-x_0}{x_n''-x_n'}+|\varphi(x_n')|\frac{x_0-x_n'}{x_n''-x_n'}<$$

$$<\varepsilon\frac{x_n''-x_0}{x_n''-x_n'}+\varepsilon\frac{x_0-x_n'}{x_n''-x_n'}=\varepsilon,$$

с което твърдението е доказано.

Нека подчертаем, че в доказателството ние използуваме съществено, че $x_n'\leqq x_0\leqq x_n''$ (къде?). Ако това условие не е изпълнено, може да се случи редицата с общ член

$$\frac{f(x_n'')-f(x_n')}{x_n''-x_n'}$$

да не клони към $f'(x_0)$, макар $f(x)$ и да е диференцуема в точката x_0. За да се убедим в това, ние ще разгледаме функцията, дефинирана с условието

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$$

при $x\neq 0$ и с условието $f(0)=0$ при $x=0$. Тази функция е диференцуема при $x=0$ и $f'(0)=0$. И наистина при $h\neq 0$ имаме

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}=h\sin\frac{1}{h}.$$

Но множителят $\sin\frac{1}{h}$ остава ограничен, когато h се мени. От това заключаваме, че произведението $h\sin\frac{1}{h}$ клони към нула; заедно с h, което показва, че функцията $f(x)$ е диференцуема при $x=0$ и $f'(0)=0$.

Избираме

$$x_n'=\frac{2}{(4n+3)\pi} \text{ и } x_n''=\frac{2}{(4n+1)\pi}.$$

В такъв случай редицата с общ член

$$\frac{f(x_n'')-f(x_n')}{x_n''-x_n'}=\frac{(4n+3)^2+(4n+1)^2}{(4n+1)(4n+3)\pi}$$

клони към $\frac{2}{\pi}$, т. е. не клони към $f'(0)$.

Да означим пак с x_0 една точка от дефиниционната област на една функция $f(x)$. Ако изразът

$$\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}$$

клони към някаква граница l, когато x' и x'' клонят* към x_0 независимо едно от друго чрез стойности от дефиниционната област на $f(x)$ удовлетворяващи неравенствата

$$x'\leqq x_0\leqq x'',\quad x'\neq x'',$$

то може да се твърди, че функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_0 и $f'(x_0)=l$.

* Ние вече поясних ме по-горе в какъв смисъл трябва да се разбират тези думи

И наистина нека

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \dots$$

е една произволна редица от числа, които принадлежат на дефиниционната област на $f(x)$ и удовлетворяват условията

$$x_n \neq x_0,\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Нека по-малкото от числата x_n и x_0 означим с x'_n, а по-голямото — с x''_n. В такъв случай двете редици

$$x'_1,\ x'_2,\ x'_3, \dots,$$
$$x''_1,\ x''_2,\ x''_3, \dots$$

са сходящи и клонят към x_0 (вж. задача 2 към § 6 от глава II). Освен това очевидно числата x'_n и x''_n принадлежат на дефиниционната област на $f(x)$ и удовлетворяват неравенствата

$$x''_n - x'_n = |x_0 - x_n| \neq 0 \text{ и } x'_n \leq x_0 \leq x''_n.$$

Ако знаем, че редицата с общ член

$$\frac{f(x''_n)-f(x'_n)}{x''_n-x'_n}$$

е сходяща и клони към l, заключаваме с помощта на равенството

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = \frac{f(x''_n)-f(x'_n)}{x''_n-x'_n},$$

че функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_0 и $f'(x_0) = l$.

Направените разсъждения ни дават възможност да дадем още и следната форма на дефиницията на понятието производна:

Функцията $f(x)$ е диференцуема в една точка x_0 от дефиниционната си област*, ако изразът

$$\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}$$

притежава граница l, когато x' и x'' клонят независимо едно от друго към x_0 чрез стойности от дефиниционната област на $f(x)$, удовлетворявайки условията

$$x' \leq x_0 \leq x'',\ x' \neq x''.$$

Границата l се нарича производна на $f(x)$ в точката x_0.

* Разбира се, тук трябва да се иска във всяка околност на x_0 да има точки от дефиниционната област на $f(x)$, които са различни от x_0.

§ 13. Механично значение на производната

Понятието производна е тясно свързано с понятието скорост. Решавайки задачата за определянето на скоростта на една неравномерно движеща се точка, Нютон достигна до понятието производна също както Лайбниц достигна до това понятие, решавайки задачата за допирателните.

Нека си мислим една точка M, която се движи по една права. Да изберем върху тая права една точка за начало на координатната система. В такъв случай положението на точката M се определя еднозначно с нейната абсциса. Движението на точката M считаме познато, когато абсцисата на точката M е дадена като функция на времето. Нека времето означим с t и нека $x=f(t)$ е абсцисата на точката M в момента t. Да разгледаме два момента t и t_0. В такъв случай, както знаем от механиката, изразът

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

се нарича средна скорост на точката M в интервала от време (t_0, t). (В случая, когато точката M се движи еднопосочно, разликата $|f(t)-f(t_0)|$ има много прост механичен смисъл: това е точно дължината на пътя, описан от точката M през интервала от време (t_0, t).)

Границата

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

се нарича скорост на точката M в момента t_0. Като вземем под внимание дефиницията на понятието производна, заключаваме, че скоростта в момента t_0 е $f'(t_0)$.

Пример. При равноускорителното движение на точка с абсциса x, когато в началния момент точката се намира в началото на координатната система, имаме $x=\frac{1}{2}qt^2+v_0t$, където q е ускорението и v_0 е началната скорост. За скоростта v в момента t получаваме $v=x'=qt+v_0$, както това се вижда от дефиницията на понятието производна.

§ 14. Елементарни свойства на производните

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат обща дефиниционна област M; нека точката x_0 принадлежи на M и нека във всяка околност на x_0 има точки от M, различни от x_0. Ако при тези предположения функциите $f(x)$ и $g(x)$ са диференцуеми в точката x_0, то функцията $F(x)=f(x)+g(x)$ е също диференцуема в тази точка и

$$F'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

За да докажем това, изхождаме от тъждеството

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}.$$

Тъй като отношенията

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ и } \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

притежават граница, когато h клони към нула, то отношението

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$$

също притежава граница при $h\to 0$. И така функцията е диференцуема при $x=x_0$. От

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

заключаваме, че

$$F'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Аналогично при същите предположения се доказва, че функцията $F(x)=f(x)-g(x)$ е също диференцуема в тази точка и

$$F'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0).$$

За доказателство използваме тъждеството

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}.$$

При същите предположения се доказва, че функцията $F(x)=f(x)\,g(x)$ е също диференцуема в точката x_0 и

$$F'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

За да докажем това, ще положим

$$u(h)=f(x_0+h)-f(x_0),$$

$$v(h)=g(x_0+h)-g(x_0),$$

откъдето

$$f(x_0+h)=f(x_0)+u(h),$$

$$g(x_0+h)=g(x_0)+v(h).$$

Разглеждаме отношението

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}.$$

Очевидно

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{[f(x_0)+u(h)][g(x_0)+v(h)]-f(x_0)g(x_0)}{h}=$$

$$=\frac{f(x_0)v(h)+g(x_0)u(h)+u(h)v(h)}{h}=f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}+$$

$$+g(x_0)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}h,$$

откъдето заключаваме, като оставим h да клони към нула, че производната $F'(x_0)$ съществува и

$$F'(x_0)=f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0).$$

Най-сетне все при същите предположения относно функциите $f(x)$ и $g(x)$ и при условие, че $g(x)\neq 0$, ще установим, че функцията $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ е диференцуема в точката x_0 и

$$F'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

И наистина, ако положим

$$u(h)=f(x_0+h)-f(x_0),$$

$$v(h)=g(x_0+h)-g(x_0),$$

имаме

$$f(x_0+h)=f(x_0)+u(h),$$

$$g(x_0+h)=g(x_0)+v(h)$$

и следователно

$$(1)\qquad \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h}=$$

$$=\frac{\frac{f(x_0)+u(h)}{g(x_0)+v(h)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h}=\frac{g(x_0)u(h)-f(x_0)v(h)}{hg(x_0)[g(x_0)+v(h)]}=$$

$$=\frac{g(x_0)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}{g(x_0)g(x_0+h)}.$$

От тъждеството (1) заключаваме, като извършим граничния преход $h\to 0$, че производната $F'(x_0)$ съществува и

$$F'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

(тук ние се ползуваме от това, че функцията $g(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и следователно $g(x_0+h) \to g(x_0)$ при $h \to 0$).

Нека $u(x)$ е функция, която има производна в точката x_0, и нека a е едно число. В такъв случай функцията

$$\varphi(x) = a\,u(x)$$

също има производна в точката x_0 и

$$\varphi'(x_0) = au'(x_0),$$

както се вижда от равенството

$$\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h} = a\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}.$$

Сега ще изведем правилото за диференциране на функция от функция.

Нека $f(x)$ и $F(u)$ са две функции. Означаваме дефиниционната област на $f(x)$ с M, а дефиниционната област на $F(u)$ с N. Ако функционалните стойности на $f(x)$ не напускат N, когато x се мени, ние можем да образуваме функцията

$$\varphi(x) = F(f(x)).$$

Тази функция, както вече казахме по-рано, се нарича сложна функция или функция от функция. Ще покажем, че ако във всяка околност на една точка x_0 от M има винаги точки от M, различни от x_0, и ако във всяка околност на точката $u_0 = f(x_0)$ има точки от N, различни от u_0, и ако най-сетне функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_0, а функцията $F(u)$ е диференцуема в точката u_0, то функцията $\varphi(x)$ е диференцуема в точката x_0 и

$$\varphi'(x_0) = F'(u_0)\,f'(x_0).$$

За да докажем това поне в случая, когато $f'(x_0) \neq 0$, полагаме $k = f(x_0+h) - f(x_0)$, т. е. $f(x_0+h) = u_0 + k$, и образуваме равенството

$$\text{(2)} \qquad \frac{F[f(x_0+h)]-F[f(x_0)]}{h} = \frac{F(u_0+k)-F(u_0)}{h} = \frac{F(u_0+k)-F(u_0)}{k}\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Ясно е, че когато h клони към нула чрез някаква редица стойности, k също приема редица от стойности, която клони към нула (функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0, защото е диференцуема в тази точка). Ако $h \neq 0$ и $k \neq 0$, ние бихме могли да образуваме равенството (2). По-нататък разсъжденията се развиват така: когато оставим h да клони към нула чрез една произволна редица различни от нула стойности, за които точките x_0+h принадлежат на M, променливата k приема също така редица от стойности, клоняща към нула. Това ни дава право да заключим, че отношенията

$$\frac{F(u_0+k)-F(u_0)}{k} \text{ и } \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

клонят съответно към $F'(u_0)$ и $f'(x_0)$. Оттук следва, че отношението

$$\frac{F[f(x_0+h)]-F[f(x_0)]}{h}$$

притежава граница, когато $h \to 0$, и че тази граница е $F'(u_0)\cdot f'(x_0)$; с други думи, функцията $F[f(x)]$ е диференцуема при $x = x_0$ и

$$\varphi'(x_0) = F'(u_0)\,f'(x_0)$$

Тези разсъждения имат обаче следната непълнота: ние не сме сигурни, че $k \neq 0$, макар и да знаем, че $h \neq 0$, и следователно не знаем дали можем да делим k. Има един случай, при който поне за достатъчно малки стойности на $|h|$ можем да твърдим, че $k \neq 0$. Това е случаят, когато $f'(x_0) \neq 0$. И наистина, ако допуснем, че има произволно малки по абсолютна стойност различни от нула значения на h, за които $k = 0$, то бихме могли да изберем една клоняща към нула редица от различни от нула числа

$$h_1, h_2, h_3, \ldots,$$

за които

$$f(x_0+h_n) - f(x_0) = 0,$$

и следователно противно на нашето допускане

$$\lim_{n\to0}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} = f'(x_0) = 0.$$

И така разсъжденията, които ние направихме, водят до целта поне когато $f'(x_0) \neq 0$. В случая, когато $f'(x_0) = 0$, празнотата в направените по-горе разсъждения също може да се отстрани, обаче ние ще предпочетем да постъпим другояче, което ще ни позволи да получим изведнъж едно общо доказателство, без да има нужда да разглеждаме отделно случаите, когато $f'(x_0) \neq 0$ и когато $f'(x_0) = 0$. За тази цел ние ще дефинираме една помощна функция $\psi(t)$ на независимата променлива t по следния начин:

$$\psi(t) = \frac{F(u_0+t)-F(u_0)}{t} - F'(u_0)$$

при $t \neq 0$ и $\psi(0) = 0$. Ясно е, че функцията $\psi(t)$ е дефинирана при всички t, за които u_0+t принадлежи на N, и е непрекъсната при $t = 0$ Непрекъснатостта на $\psi(t)$ следва от това, че

$$\lim_{t\to0}\frac{F(u_0+t)-F(u_0)}{t} = F'(u_0)$$

и следователно

$$\lim_{t\to 0}\psi(t)=0=\psi(0).$$

Не е трудно да се провери, че функцията $\psi(t)$ удовлетворява уравнението

$$F(u_0+t)-F(u_0)=F'(u_0)\,t+\psi(t)\,t$$

както при $t\neq 0$, така и при $t=0$.

От това следва, като поставим $t=k=f(x_0+h)-f(x_0)$, че

$$\frac{F[f(x_0+h)]-F[f(x_0)]}{h}=F'(u_0)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+$$

$$+\psi(k)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Извършваме в това равенство граничния преход $h\to 0$. Понеже дясната страна на равенството има граница и тази граница е $F'(u_0)f'(x_0)$ (тия две твърдения следват от обстоятелството, че $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ и $\psi(k)$ имат граници и те са съответно $f'(x_0)$ и $\psi(0)=0$), то частното

$$\frac{F[f(x_0+h)]-F[f(x_0)]}{h}$$

също притежава граница, когато h клони към нула (разбира се, чрез стойности, различни от нула), и тази граница е равна на $F'(u_0)f'(x_0)$. С това е показано, че функцията $F[f(x)]$ е диференцуема при $x=x_0$ и

$$(F[f(x_0)])'=F'(u_0)\,f'(x_0).$$

§ 15. Производни на елементарни функции

Казваме, че една функция $f(x)$ е константа в един интервал, когато при всички стойности на x функцията има една и съща стойност. Сега ще покажем, че ако $f(x)$ е константа в един интервал, то тя е диференцуема във всяка точка x_0 от този интервал и производната ѝ е равна на нула. И наистина при всички различни от нула стойности на h, за които точката x_0+h принадлежи на дефиниционния интервал на $f(x_0)$, имаме

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0.$$

Оттук е ясно, че каквато и да бъде клонящата към нула редица

$$h_1,\ h_2,\ h_3,\dots$$

от различни от нула стойности на h, за които точките x_0+h_n принадлежат на дефиниционния интервал на $f(x)$, съответната редица от стойностите на отношението

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

е сходяща и клони към нула. И така производната $f'(x_0)$ съществува и $f'(x_0)=0$.

Да разгледаме функцията $f(x)=x^n$ при цели положителни стойности на n. Ще докажем, че тя е диференцуема при всяко x и

$$f'(x)=nx^{n-1}.$$

И наистина

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=$$

$$=\frac{\left(x^n+\frac{n}{1!}x^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\dots+h^n\right)-x^n}{h}=$$

$$=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+\dots+h^{n-1},$$

откъдето, като извършим граничния преход $h\to 0$, заключаваме, че $f'(x)$ съществува и $f'(x)=nx^{n-1}$.

Функцията $f(x)=x^n$ е добре дефинирана и при цели отрицателни стойности на n, когато $x\neq 0$. Под x^n при отрицателни стойности на n се разбира $\frac{1}{x^{-n}}$. Тук показателят $-n$ е вече положителен. Като се възползуваме от правилото за диференциране на частно, заключаваме, че при $x\neq 0$ функцията $f(x)$ е диференцуема, когато n е цяло отрицателно число, и

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x^{-n}}\right)'=\frac{0\,.\,x^{-n}-1\,.\,(-n)\,x^{-n-1}}{x^{-2n}}=nx^{n-1}.$$

И така формулата

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

е валидна за всички цели (както положителни, така и отрицателни) стойности на n. Когато n е отрицателно, трябва да се иска x да бъде различно от нула. Така получената формула е валидна, разбира се, и при $n=0$ (но $x\neq 0$), защото $f(x)=1$, и следователно $f'(x)=0$.

Правилото за диференциране на функция от функция ни дава възможност да диференцираме и функции от вида $y=[u(x)]^n$, откъдето $u(x)$ е диференцуема функция на x и n е цяло число. Съгласно това правило намираме

$$y'=nu^{n-1}\,.\,u'.$$

Пример. Да се намери производната на $y=\frac{1}{(x^2+3x+5)^2}$. Тук имаме да намерим производната на една функция от вида $y=[u(x)]^n$, където $n=-2$ и $u=x^2+3x+5$. Ние знаем, че $y'=nu^{n-1}.\,u'$. В нашия специален случай получаваме

$$y'=-2(x^2+3x+5)^{-3}(x^2+3x+5)'=-2(x^2+3x+5)^{-3}(2x+3)=$$
$$=\frac{-2(2x+3)}{(x^2+3x+5)^3}.$$

Тук извършихме подробно пресмятанията. Тия пресмятания обаче се правят обикновено наум. Намерете производната на функцията

$$y=\frac{1}{(x^4+6x^2+x+2)^3},$$

като извършите пресмятанията наум!

Сега ще разгледаме правилата за диференциране на тригонометричните функции. Нека $f(x)=\sin x$. В такъв случай имаме

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=2\frac{\sin\frac{h}{2}}{h}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Когато h клони към нула, $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ клони към $\cos x$, защото $\cos x$ е непрекъсната функция при всяко x. От друга страна, частното

$$\frac{\sin\frac{h}{2}}{h}$$

клони към $\frac{1}{2}$, когато $h\to 0$. И наистина, ако изберем една произволна редица от различни от нула числа

$$h_1,\ h_2,\ h_3,\ldots,$$

която клони към нула, то редицата с общ член $x_n=\frac{h_n}{2}$ също ще клони към нула. Оттук заключаваме, че редицата с общ член

$$\frac{\sin x_n}{x_n}$$

клони към 1. Като вземем под внимание, че

$$\frac{\sin\frac{h_n}{2}}{h_n}=\frac{1}{2}\frac{\sin x_n}{x_n},$$

заключаваме, че

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{h_n}{2}}{h_n}=\frac{1}{2}.$$

Полученият резултат е достатъчен, за да твърдим, че частното

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

има граница, когато h клони към нула чрез стойности, различни от нула, и тази граница е равна на $\cos x$. Това значи, че функцията $f(x)=\sin x$ е диференцуема и

$$f'(x)=\cos x.$$

Аналогично може да се установи, че функцията $f(x)=\cos x$ е също диференцуема при всяко x и

$$f'(x)=-\sin x.$$

За да докажем това, изхождаме от равенството

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-2\frac{\sin\frac{h}{2}}{h}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Оттук е ясно, че $f'(x)$ съществува и $f'(x)=-\sin x$.

След като знаем да диференцираме функциите $\sin x$ и $\cos x$, лесно можем да намерим производните на $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, като си послужим с правилото за диференциране на частно. Така получаваме

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

при $\cos x\neq 0$ и

$$(\operatorname{ctg} x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}$$

при $\sin x\neq 0$.

Правилото за диференциране на функция от функция ни дава възможност да дадем правила за диференциране на функциите

$$\sin u(x),\ \cos u(x),\ \operatorname{tg} u(x),\ \operatorname{ctg} u(x),$$

където $u(x)$ е диференцуема функция на x. Правилата са следните:

$$(\sin u)'=(\cos u)\,u',\ (\cos u)'=-(\sin u)\,u',\ (\operatorname{tg} u)'=$$
$$=\frac{u'}{\cos^2 u}\text{ при }\cos u\neq 0\text{ и }(\operatorname{ctg} u)'=\frac{-u'}{\sin^2 u}\text{ при }\sin u\neq 0.$$

Пример. Да се намери производната на функцията $y=\sin(2x^2+3)$. Тук имаме да намерим производната на функция от вида $y=\sin u$, където $u=2x^2+3$. Ние знаем, че $(\sin u)'=(\cos u)\,u'$. Въз основа на това получаваме

$$y'=[\cos(2x^2+3)]\,(2x^2+3)'=4x\cos(2x^2+3).$$

Да вземем друг пример. Нека $y=\operatorname{tg}\frac{x^2-1}{\sin 2x}$. В такъв случай

$$y'=\frac{1}{\cos^2\frac{x^2-1}{\sin 2x}}\left(\frac{x^2-1}{\sin 2x}\right)'=\frac{1}{\cos^2\frac{x^2-1}{\sin 2x}}\cdot\frac{2x\sin 2x-(x^2-1)(\cos 2x)(2x)'}{\sin^2 2x}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2\frac{x^2-1}{\sin 2x}}\cdot\frac{2x\sin 2x-(x^2-1)(\cos 2x)\,2}{\sin^2 2x}$$

§ 16. Диференциал

Произведението $f'(x)k$ на производната $f'(x)$ на една функция $y=f(x)$ с един постоянен множител $k\neq 0$ се нарича диференциал на $f(x)$ и се бележи със знака dy (четете де игрек) или $df(x)$. Множителят k (освен ако изрично не е казано противното) се избира един и същ за всички функции и за всички стойности на x. Ако вземем специално функцията $y=x$, получаваме

$$dx=k.$$

Това ни дава възможност да пишем

$$dy=f'(x)\,dx,$$

като се възползуваме от това, че се съгласихме да избираме един и същ множител k за всички функции. Така например, ако

$$y=x^2,\text{ то } dy=2x\,dx;\text{ ако } y=\operatorname{tg}x,\text{ то } dy=\frac{dx}{\cos^2 x}$$

и пр.

От $dy=f'(x)\,dx$ получаваме $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ $\left(\text{символът } \frac{dy}{dx} \text{ се чете „де игрек де икс"}\right)$. Този начин за означаване на производните е въведен от Лайбниц (Leibniz).

Правилата за смятане с диференциали са съвсем аналогични на правилата за смятане с производни. Така

$$d(u+v)=du+dv.$$

Доказателството може да се извърши така: очевидно $(u+v)'=u'+v'$; като умножим двете части на това равенство с k, получаваме

$$(u+v)'k=u'k+v'k$$

или

$$d(u+v)=du+dv.$$

Аналогично получаваме

$$d(u-v)=du-dv,$$

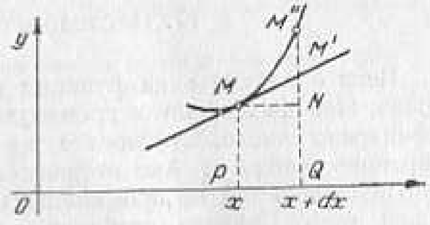
$$d(uv)=v\,du+u\,dv,$$

$$d\,\frac{u}{v}=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2},$$

$$d[f(u)]=f'(u)\,du \text{ и пр.}$$

Специално когато изберем $k=1$, диференциалите преминават в производни. При дефиницията на понятието диференциал ние изрично поставихме условието $k\neq 0$, за да имаме свобода да делим с k.

Да изберем върху кривата $y=f(x)$ една точка M с координати (x, y). В такъв случай, както знаем, допирателната към тази крива в точката (x, y) има уравнение



Черт. 8

(1) $\qquad \eta-y=f'(x)(\xi-x),$

където ξ и η са текущите координати. Непосредствено се вижда, че точката M' с координати $(x+dx,\ y+dy)$ лежи върху допирателната (1) (координатите на M' удовлетворяват уравнението (1)).

От това заключаваме, че щом сегментът PQ (черт. 8) е равен на dx, то ординатата QM' е равна на $y+dy$. Оттук получаваме

$$NM'=QM'-QN=(y+dy)-y=dy,$$

което показва, че сегментът NM' представлява dy.

Често разликата

$$f(x+k)-f(x)$$

се означава със знака Δy. Обръщаме внимание на това, че Δy и dy в общия случай имат различни стойности. На черт. 8 разликата Δy се изобразява със сегмента NM'', докато dy се изобразява, както видяхме със сегмента NM'.

Разбира се, както стойността на Δy, така и стойността на dy зависи от избора на x и k, макар че в символите Δy и dy не участвуват нито x, нито k.

Да разгледаме функцията

$$\varphi(k)=\frac{f(x+k)-f(x)}{k}-f'(x).$$

Очевидно

$$f(x+k)-f(x)=f'(x)\,k+\varphi(k)\,k.$$

При фиксирано x функцията $\varphi(k)$ клони към нула заедно с k. Поради това $df(x)=f'(x)k$ се нарича понякога главна част на нарастването $f(x+k)-f(x)$.

Най-сетне нека забележим, че символът

$$\Delta y=f(x+k)-f(x)$$

има смисъл, когато x и $x+k$ принадлежат към дефиниционната област на $f(x)$, докато

$$dy=f'(x)k$$

има смисъл при всяко k, стига $f'(x)$ да има смисъл.

§ 17. Последователни производни

Нека е дадена една функция $y=f(x)$, диференцуема в някой интервал. При фиксирано x производната $f'(x)$ представлява едно добре дефинирано число. Стойността на тази производна обаче зависи от избраното число x. Ако оставим x да се мени, в общия случай се мени и стойността на производната. Стойността на производната $f'(x)$ зависи от x. Нейната стойност е обаче еднозначно дефинирана, когато е избрано числото x. И така производната на една функция е също функция на x. Ако се случи функцията $f'(x)$ да бъде диференцуема, то казваме, че $f(x)$ е два пъти диференцуема и производната на $f'(x)$ наричаме втора производна на $f(x)$. Втората производна се означава със символите y'', $f''(x)$, $\ddot{y}$ и пр. (четете — игрек секонд, еф секонд, игрек две точки и пр.).

Пример. Да разгледаме функцията $y=x^2$. Очевидно $y'=2x$. Производната $y'=2x$ от своя страна е диференцуема функция на x. Това значи, че y има втора производна; очевидно $y''=2$.

Аналогично се дефинира понятието трета производна като производна на втората производна и пр. Изобщо n-та производна се нарича производната на $n-1$-вата производна.

Аналогично се дефинира понятието втори, трети и пр. диференциал на една функция. Така втори диференциал се нарича диференциалът на първия диференциал. Вторият диференциал на една функция $y=f(x)$ се бележи със знака d^2y (четете — де две игрек). Като помним, че dx е константа, получаваме

$$d^2y=d(dy)=d(f'(x)\,dx)=(f''(x)\,dx)\,dx=f''(x)\,dx^2.$$

Трети диференциал на y се нарича диференциалът на втория диференциал и се бележи със знака d^3y. Очевидно имаме

$$d^3y=d(d^2y)=d(f''(x)\,dx^2)=(f'''(x)\,dx^2)\,dx=f'''(x)\,dx^3.$$

Изобщо n-ти диференциал се нарича диференциалът на $n-1$-вия диференциал и се бележи със знака d^ny. Индуктивно намираме

$$d^ny=f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Оттук получаваме

$$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2},\quad f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3},\ldots,\ f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$$

(символа $\frac{d^2y}{dx^2}$ четете — де две игрек де икс квадрат; изобщо четете символа $\frac{d^ny}{dx^n}$ така: де ен игрек де икс на ента).

Сега ще разгледаме няколко примера, при които може лесно да се намери закономерността, по която се получават последователните производни.

1. Пример. Да се намери n-тата производна на $y=\sin x$. Очевидно имаме

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]\left(x+\frac{\pi}{2}\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\left[\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)\right]\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)'=\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right),$$

. . . .

$$y^{(n)}=\ldots=\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right).$$

По аналогичен път намираме

$$\frac{d^n\cos x}{dx^n}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

2. Пример. Да се намерят последователните производни на $y=\frac{x^k}{k!}$, където k е цяло положително число.

Като извършим диференцирането, намираме

$$y'=\frac{x^{k-1}}{(k-1)!},$$

$$y''=\frac{x^{k-2}}{(k-2)!},$$

. . . .

$$y^{(k-1)}=\frac{x}{1!},$$

$$y^{(k)}=1.$$

Производните от по-висок ред са равни на нула.

§ 18. Формула на Лайбниц (Leibniz)

Ние вече разгледахме правилото за диференциране на произведение от две функции, според което, ако $y=uv$, то

$$y'=u'v+uv'.$$

Формулата на Лайбниц, която ще разгледаме сега, е обобщение на правилото за диференциране на произведение, отнасящо се за производни от произволен ред. За да изясним закономерността, по която се получават последователните производни на $y=uv$, ще пресметнем няколко от тях. Така получаваме

$$y''=u''v+u'v'+u'v'+uv''=u''v+2u'v'+uv'',$$

$$y'''=u'''v+u''v'+2u''v'+2u'v''+u'v''+uv'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''.$$

Законът, по който се получават пресметнатите от нас производни, може да се изрази със следната обща формула, известна под името формула на Лайбниц:

$$(1)\qquad y^{(n)}=u^{(n)}v+\binom{n}{1}u^{(n-1)}v'+\binom{n}{2}u^{(n-2)}v''+\dots+\binom{n}{n}uv^{(n)},$$

където u и v означават функции, които притежават производни до n-ти ред, и, както обикновено се прави, сме положили за краткост

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

По своята структура формулата на Лайбниц напомня Нютоновия бином. За да установим, че формулата на Лайбниц е в сила при всички цели положителни стойности на n, ще си послужим с метода на пълната математическа индукция. За целта ще докажем, че ако е вярно равенството (1) при някоя стойност на n, то вярно е и равенството

$$y^{(n+1)}=u^{(n+1)}v+\binom{n+1}{1}u^{(n)}v'+\binom{n+1}{2}u^{(n-1)}v''+\dots+\binom{n+1}{n+1}uv^{(n+1)}.$$

И наистина, ако диференцираме двете части на равенството (1), получаваме

$$y^{(n+1)}=u^{(n+1)}v+\left[\binom{n}{1}+1\right]u^{(n)}v'+\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{1}\right]u^{(n-1)}v''+$$

$$+\left[\binom{n}{3}+\binom{n}{2}\right]u^{(n-2)}v'''+\dots+\left[\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}\right]u'v^{(n)}+\binom{n}{n}uv^{(n+1)}.$$

От друга страна,

$$\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k)}{(k+1)!}+\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}=$$

$$=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k+1)!}[(n-k)+(k+1)]=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k+1)!}(n+1)=$$

$$=\frac{(n+1)\,n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k+1)!}=\binom{n+1}{k+1}$$

и следователно

$$y^{(n+1)}=u^{(n+1)}v+\binom{n+1}{1}u^{(n)}v'+\binom{n+1}{2}u^{(n-1)}v''+\binom{n+1}{3}u^{(n-2)}v'''+\dots+$$

$$+\binom{n+1}{n}u'v^{(n)}+\binom{n+1}{n+1}uv^{(n+1)}.$$

И така, ако тази формула е вярна при някоя стойност на n, тя е вярна и при следващата стойност на n. Обаче знаем, че формулата е вярна при $n=1$ и следователно тя е вярна при всяко цяло положително n.

Пример. Да се намери n-тата производна на функцията $y=x^2\sin x$. Тук имаме да намерим n-тата производна на едно произведение, като знаем да намираме последователните производни на двата множителя. Прилагаме формулата на Лайбниц и получаваме

$$y^{(n)}=x^2(\sin x)^{(n)}+\binom{n}{1}(x^2)'(\sin x)^{(n-1)}+\binom{n}{2}(x^2)''(\sin x)^{(n-2)}+$$

$$+\binom{n}{3}(x^2)'''(\sin x)^{(n-3)}+\dots=$$

$$=x^2\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+n\,.\,2x\sin\left(x+\frac{n-1}{2}\pi\right)+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\,.\,2\sin\left(x+\frac{n-2}{2}\pi\right)+0+\dots=$$

$$=x^2\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)+2nx\sin\left(x+\frac{n-1}{2}\pi\right)+n(n-1)\sin\left(x+\frac{n-2}{2}\pi\right).$$

§ 19. Теорема на Рол (Rolle)

Сега ще докажем една от най-важните теореми в диференциалното смятане. Ето формулировката на тази теорема:

Ако функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, ако е диференцуема поне в отворения интервал (a, b) и ако в краящата на този интервал приема равни стойности (т. е. $f(a)=f(b)$), в такъв случай в интервала (a, b) има поне една вътрешна точка ξ, в която производната $f'(x)$ е равна на нула.

Преди да пристъпим към доказателството, нека обърнем внимание на това, че се иска функцията да бъде дефинирана и непрекъсната в затворения интервал, т. е. не само във вътрешните точки, но и в краищата на този интервал, докато съществуването на производната се изисква само за вътрешни точки на интервала (a, b). В краищата на интервала функцията $f(x)$ може да бъде диференцуема, може и да не бъде. Отсъствието на производната в краищата на интервала не е пречка за валидността на формулираната теорема. Най-сетне нека обърнем внимание още на това, че в теоремата се установява съществуването на вътрешна точка ξ в интервала (a, b), за която $f'(\xi)=0$, т. е. точка, различна както от a, така и от b.

След тези предварителни бележки да преминем към доказателството на теоремата.

Тъй като функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в крайния и затворения интервал $[a, b]$, то за тази функция можем да приложим теоремата на Вайерщрас, според която има точка x_1, където функцията приема най-голяма, и има точка x_2, където функцията приема най-малка стойност. Ние знаем, че точката x_1 лежи в затворения интервал $[a, b]$, т. е. може евентуално да се намира във вътрешността, но може евентуално да се намира и в някой от краищата на този интервал. Ще покажем най-напред валидността на интересуващата ни теорема в специалния случай, когато точката x_1 се намира във вътрешността на интервала (a, b). Разглеждаме отношението

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}, \tag{1}$$

което е дефинирано за всички достатъчно малки по абсолютна стойност, различни от нула значения на h. Тъй като точката x_1 е вътрешна за интервала $[a, b]$, а във всички вътрешни точки функцията $f(x)$ е диференцуема, то частното (1) притежава граница, когато h клони към нула. Границата на това частно е $f'(x_1)$.

Точката x_1 е вътрешна за интервала $[a, b]$, следователно ние можем да оставим h да клони към нула както чрез положителни, така и чрез отрицателни стойности, без обаче да напускаме дефиниционната област на $f(x)$. Да се възползуваме от тази свобода и да оставим h да клони към нула чрез положителни стойности. В такъв случай знаменателят на частното

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \tag{2}$$

е положителен. Числителят му обаче е или отрицателен, или нула, тъй като $f(x_1)$ е най-голямата функционална стойност на $f(x)$. И така

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \leqq 0,$$

т. е.

$$f'(x_1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \leqq 0.$$

Ние в частното (2) можем да оставим h да клони към нула и чрез отрицателни стойности (точката x_1 е вътрешна!). Но когато $h<0$, тогава

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \geqq 0,$$

понеже, както видяхме вече, $f(x_1+h)-f(x_1)\leqq 0$. Оттук следва, че

$$f'(x_1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \geqq 0.$$

От двете неравенства

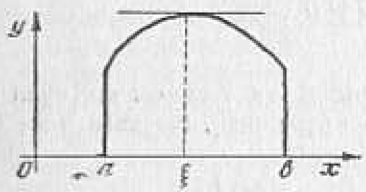
$$f'(x_1)\leqq 0 \quad \text{и} \quad f'(x_1)\geqq 0,$$

които получихме, заключаваме, че $f'(x_1)=0$. И така, когато точката x_1 е вътрешна, ние намерихме вътрешна точка ξ (това е точката x_1), за която $f'(\xi)=0$. Теоремата на Вайерщрас обаче не ни осигурява ни най-малко, че точката x_1 трябва да бъде във вътрешността на интервала $[a, b]$. По подобен начин се доказва, че ако точката x_2 е вътрешна, то $f'(x_2)=0$. И така валидността на теоремата засега ние установихме само в случаите, когато поне една от двете точки x_1 или x_2 е вътрешна. Остана да разгледаме случая, когато и двете точки x_1 и x_2 са крайни точки за интервала $[a, b]$. Обаче в краищата на интервала $[a, b]$ функцията $f(x)$ приема равни стойности (това условие още не сме използували!), откъдето следва, че

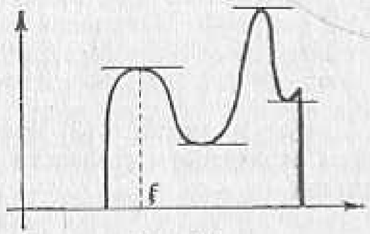
$$f(x_1)=f(x_2),$$

тъй като в разглеждания случай и двете точки x_1 и x_2 са крайни. И така най-голямата и най-малката стойност на функцията са равни помежду си. От това следва, че функцията $f(x)$ е константа (от $f(x_2)\leqq f(x)\leqq f(x_1)$ и от $f(x_1)=f(x_2)$ заключаваме, че при всички стойности на x от интервала $[a, b]$ имаме $f(x)=f(x_1)=f(x_2)$). Щом функцията $f(x)$ е константа, нейната производна е нула навсякъде, следователно и в този случай твърдението на теоремата е вярно. С това теоремата е доказана докрай.

Теоремата, която доказахме, е известна под името теорема на Рол. Нейният геометричен смисъл е прост. Според тази теорема, ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, диференцуема



Черт. 9



Черт. 10

е поне в отворения интервал (a, b) и $f(a)=f(b)$, то върху графиката на тази функция има поне една точка (различна от краищата ѝ), в която допирателната е успоредна на оста OX. Чертежите 9 и 10 илюстрират геометричния смисъл на теоремата на Rolle.

§ 20. Теорема за крайните нараствания

Сега ще дадем едно важно обобщение на теоремата на Рол, известно под името теорема за крайните нараствания. Същата теорема се нарича понякога теорема на Лагранж (Lagrange). Ето формулировката на тази теорема:

Ако функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$ и е диференцуема поне във вътрешността на този интервал, то има поне една вътрешна точка ξ, за която е изпълнено равенството

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi). \tag{1}$$

Твърдението е вярно както при $a<b$, така и при $a>b$.

Тази теорема се отличава от теоремата на Рол по това, че тук не се иска да имаме непременно $f(a)=f(b)$. В специалния случай, когато $f(a)=f(b)$, получаваме

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

т. е. теоремата на Рол се явява действително специален случай от теоремата за крайните нараствания.

Доказателството на теоремата за крайните нараствания ще извършим с помощта на теоремата на Рол. За тази цел образуваме помощната функция

$$\varphi(x)=f(x)-kx,$$

където константата k избираме така, че да имаме

$$\varphi(a)=\varphi(b), \quad \text{т. е.} \quad f(a)-ka=f(b)-kb, \tag{2}$$

за да можем за функцията $\varphi(x)$ да приложим теоремата на Рол. Равенството (2) е изпълнено при

$$k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, диференцуема е поне във вътрешните му точки и $\varphi(a)=\varphi(b)$. Това ни дава право да приложим за функцията $\varphi(x)$ теоремата на Рол. И така има поне една точка ξ в отворения интервал (a, b), за която

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-k=0$$

или

$$f'(\xi)=k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

с което доказателството на теоремата за крайните нараствания е завършено.

Ако положим

$$\frac{\xi-a}{b-a}=\theta \quad \text{и} \quad b-a=h,$$

получаваме

$$\xi=a+\theta h.$$

При тези означения равенството (1) добива вида

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h).$$

Числото ξ обаче се намира в отворения интервал (a, b). Оттук не е трудно да се заключи, че $0<\theta<1$. И наистина при $a<b$ имаме $a<\xi<b$, откъдето получаваме последователно

$$0<\xi-a<b-a,$$

$$0<\frac{\xi-a}{b-a}<1.$$

При $a>b$ имаме $a>\xi>b$, което ни дава

$$0>\xi-a>b-a$$

и следователно

$$0<\frac{\xi-a}{b-a}<1,$$

с което е установено, че наистина във всички случаи имаме $0 < \theta < 1$.

Равенството

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$$

е очевидно вярно и при $h=0$.

Теоремата за крайните нараствания има следния геометричен смисъл. При направените предположения за функцията $f(x)$ има поне една точка върху дъгата с уравнение $y=f(x)$, $a<x<b$, допирателната в която е успоредна на хордата, съединяваща краищата на тази дъга.

§ 21. Обобщение на теоремата за крайните нараствания (теорема на Коши)

Ще разгледаме следното обобщение на теоремата за крайните нараствания.

Ако $f(x)$ и $g(x)$ са две функции, дефинирани и непрекъснати в крайния и затворен интервал $[a, b]$, ако са диференцуеми поне в отворения интервал (a, b) и ако освен това $g'(x) \neq 0$ за всички точки от отворения интервал (a, b), то съществува поне една точка ξ във вътрешността на интервала (a, b), за която

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{1}$$

Тази теорема наричаме обобщение на теоремата за крайните нараствания, защото, ако изберем специално $g(x)=x$, равенството (1) преминава в

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$

т. е. теоремата за крайните нараствания е наистина специален случай от тази по-обща теорема.

Нека изрично отбележим, че не се иска от функциите $f(x)$ и $g(x)$ непременно да бъдат диференцуеми при $x=a$ и $x=b$. Също така се позволява $g'(x)$ да се анулира при $x=a$ и $x=b$ (ако функцията $g(x)$ в тези точки е диференцуема). Обаче иска се непременно $g'(x)$ да бъде различно от нула в **отворения интервал** (a, b). За да покажем колко е съществено това условие, ще си послужим с един пример: да разгледаме двете функции $f(x)$ и $g(x)$, дефинирани в затворения интервал $[-1, 1]$ по следния начин:

$$f(x)=x^2,$$
$$g(x)=x^3.$$

Функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати и диференцуеми в затворения интервал $[-1, 1]$. Очевидно имаме

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=\frac{0}{2}=0.$$

От друга страна,

$$f'(x)=2x \quad \text{и} \quad g'(x)=3x^2,$$

откъдето намираме

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2}{3x}.$$

Сега е ясно, че както и да изберем числото ξ (за което, разбира се, частното $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ е дефинирано), не може да имаме

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Този пример ни най-малко не противоречи на теоремата, която ние се стремим да докажем сега, защото във вътрешността на интервала $(-1, 1)$ има точка, в която $g'(x)=0$. Тази точка е $x=0$.

За да **извършим** доказателството на интересуващата ни теорема, съществено ще използуваме условието, че $g'(x) \neq 0$ във вътрешността на разглеждания интервал (както ще използуваме, разбира се, всичките условия, които ние изрично формулирахме).

Накрая, преди да пристъпим към доказателството на теоремата на Коши, нека подчертаем, че в теоремата се твърди, че има поне една **вътрешна** точка ξ в интервала (a, b), за която е изпълнено равенството (1).

След тия предварителни бележки да преминем към доказателството на теоремата на Коши. И тук, както при теоремата за крайните нараствания, ще си послужим с теоремата на Рол. За тази цел образуваме помощната функция

$$\varphi(x)=f(x)-kg(x),$$

където множителя k определяме така, че да имаме

$$f(a)-kg(a)=f(b)-kg(b), \tag{2}$$

което ни е нужно; за да можем да приложим за функцията $\varphi(x)$ теоремата на Рол. Ние можем да определим k от уравнението (2), защото $g(b)-g(a) \neq 0$. И наистина, ако допуснем, че $g(b)-g(a)=0$, ще можем да приложим за функцията $g(x)$ теоремата на Рол и да заключим, че има поне една точка x_0 от вътрешността на интервала (a, b), в която $g'(x_0)=0$. Това обаче не е възможно, защото по предположение производната $g'(x)$ не се анулира във вътрешността на интервала (a, b). И така ние доказахме, че $g(b)-g(a) \neq 0$, и въз основа на това намираме

$$k=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \tag{3}$$

Функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и е диференцуема поне във вътрешните му точки. Освен това имаме

$$\varphi(a)=\varphi(b).$$

Това ни дава право да приложим теоремата на Рол за функцията $\varphi(x)$. И така във вътрешността на интервала $[a, b]$ има поне една точка ξ, в която

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-kg'(\xi)=0.$$

Това равенство може да се представи още във вида

$$k=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

защото $g'(\xi)\neq 0$. При това преобразуване съществено използувахме условието, според което $g'(x)\neq 0$ във вътрешността на интервала (a, b) (точката ξ е вътрешна за интервала (a, b) и следователно $g'(\xi)\neq 0$ — нещо, което ни дава право да делим с $g'(\xi)$. Като заместим k с равното му от (3), получаваме

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

с което теоремата на Коши е доказана.

§ 22. Основна теорема на интегралното смятане

Ние знаем, че ако една функция $f(x)$ е константа в един интервал, то нейната производна е нула във всички точки на този интервал. За интегралното смятане, което ние ще изучаваме по-късно, е от основно значение обратният въпрос: знае се, че една функция $f(x)$ е диференцуема във всяка точка на един интервал и производната ѝ навсякъде е нула; пита се дали при тези предположения може да се твърди, че функцията $f(x)$ е константа в този интервал. Отговорът на този въпрос е утвърдителен независимо от това, дали интервалът, в който разглеждаме функцията, е краен или безкраен, отворен или затворен. И така ние ще докажем сега следната теорема:

Ако една функция $f(x)$ е диференцуема във всяка точка на един интервал и производната ѝ във всяка точка на този интервал има стойност нула, то функцията е константа.

Доказателството извършваме с помощта на теоремата за крайните нараствания по следния начин: нека x_1 и x_2 са две произволни точки от разглеждания интервал; в такъв случай

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)f'(\xi),$$

където точката ξ се намира между x_1 и x_2; дадено е обаче, че производната $f'(x)$ е равна на нула при всяко x от разглеждания интервал; специално имаме $f'(\xi)=0$, откъдето

$$f(x_1)-f(x_2)=0$$

и следователно $f(x_1)=f(x_2)$. С това доказателството е завършено.

§ 23. Полиноми

Полином или цяла рационална функция (чиято степен не надминава n) се нарича функция от вида

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n,$$

където n е цяло положително число и коефициентите $a_0, a_1, \dots, a_n$ не зависят от x. Казваме, че полиномът

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

е от n-та степен, когато $a_0\neq 0$. Така $2x^2-3x+1$ е полином от втора степен.

Един полином от n-та степен не може да се анулира за повече от n различни стойности на аргумента.

Доказателството ще извършим индуктивно. Да допуснем, че вече знаем, че един полином от $n-1$-ва степен не може да се анулира за повече от $n-1$ различни стойности на x. Нека

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$$

е един полином от n-та степен, т. е. $a_0\neq 0$. Ако допуснем, че има (поне) $n+1$ точки $x_0<x_1<x_2<\dots<x_n$, в които $f(x)$ се анулира, то към всеки един от интервалите $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ ние можем по отношение на функцията $f(x)$ да приложим теоремата на Рол. Това ни дава право да твърдим, че във вътрешността на всеки един от интервалите (x_{k-1}, x_k), $k=1, 2, \dots, n$, има поне една точка ξ_k, в която производната $f'(x)$ се анулира. И така ние намерихме n точки

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n,$$

в които $f'(x)$ се анулира. Точките ξ_k $(k=1, 2, \dots, n)$ са всички различни помежду си, защото са вътрешни в съответните им интервали (x_{k-1}, x_k) и следователно

$$x_0<\xi_1<x_1<\xi_2<x_2<\dots<x_{n-1}<\xi_n<x_n.$$

Полиномът

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\dots+a_{n-1}$$

е обаче от $(n-1)$-ва степен (тъй като $a_0\neq 0$) и следователно не може да се анулира за n различни стойности на x. Противоречието, до което достигнахме, се дължи на допускането, че полиномът $f(x)$ се анулира за повече от n различни стойности на x. От друга страна, един полином от нулева степен представлява една различна от нула константа и следователно не може да се анулира при нито една стойност на x. От това заключаваме (като вземем пред вид доказаното), че един полином от първа степен не може да се анулира за повече от едно значение на x. От това пък следва, че един полином от втора степен не може да се анулира за повече от две стойности на x и пр.

От доказаната теорема заключаваме, че ако равенството

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n=0$$

е изпълнено за повече от n различни стойности на x, то

$$a_0=a_1=a_2=\dots=a_n=0$$

и следователно това равенство е изпълнено при всички стойности на x. И наистина, ако допуснем, че $a_0\neq 0$, получаваме полином от n-та степен, който се анулира за повече от n различни стойности на x, нещо, което, както знаем, не е възможно. И така $a_0=0$. Замествайки a_0 с равното му, получаваме

$$a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n=0.$$

Като разсъждаваме по подобен начин, заключаваме, че $a_1=0$. По подобен начин намираме, че $a_2=0$ и пр.

Върху това свойство на полиномите се основава важният принцип за сравняване на коефициентите при полиномите. Този принцип може да се формулира по следния начин.

Ако равенството

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_n$$

е изпълнено за повече от n стойности на x, то

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\dots,\ a_n=b_n.$$

Доказателството се получава непосредствено, като вземем под внимание, че изразът

$$(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+\dots+(a_n-b_n)$$

се анулира за повече от n стойности на x и следователно

$$a_0-b_0=a_1-b_1=\dots=a_n-b_n=0.$$

§ 24. Интерполация

Читателят знае, че при използуването на логаритмичните таблици често си служим с така наречената линейна интерполация. По-точно ние си служим с линейната функция $f(x)$, която в две различни дадени

точки x_0 и x_1 приема съответно дадени стойности y_0 и y_1. Очевидно линейната функция

$$f(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

притежава това свойство (т. е. $f(x_0)=y_0$ и $f(x_1)=y_1$) и друга линейна функция с това свойство няма (защото $y=f(x)$ е декартовото уравнение на правата, която минава през двете различни точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1); тази права е еднозначно дефинирана, а с това е еднозначно дефинирано и нейното декартово уравнение). Тук ние ще се занимаем с обобщение на въпроса за интерполирането, като си поставим за задача да намерим полином, чиято степен не надминава n и който в $n+1$ различни точки $x_0, x_1,\dots, x_n$ приема съответно стойностите $y_0, y_1,\dots, y_n$. Засега не е ясно дали такива полиноми има (въпрос за съществуване) и в случай че задачата има решение, не е ясно колко решения има тази задача (въпрос за единственост).

Въпроса за съществуване ще решим, като посочим полином с исканото свойство. Такъв е полиномът

$$\begin{aligned}f(x)=&y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}+\\&+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}+\\&\dots\dots\dots\dots\\&+y_k\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}+\\&+y_n\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}.\end{aligned}\tag{1}$$

Очевидно имаме полином, чиято степен не надминава n, защото той представлява сума от полиноми, чиито степени не надминават n. Този полином удовлетворява равенствата

$$f(x_0)=y_0,\ f(x_1)=y_1,\dots,\ f(x_k)=y_k,\dots,\ f(x_n)=y_n,$$

както това се вижда с директна проверка.

Сега ще докажем, че $f(x)$ е единственият полином, който удовлетворява всички тези изисквания. За целта означаваме с $\varphi(x)$ произволен полином, удовлетворяващ равенствата

$$\varphi(x_0)=y_0,\ \varphi(x_1)=y_1, \dots,\ \varphi(x_n)=y_n,$$

чиято степен не надминава n. В такъв случай $f(x)-\varphi(x)$ представлява полином, чиято степен също не надминава n. Този полином се анулира за $n+1$ различни стойности на x и следователно се анулира тъждествено.

Формулата (1) се нарича интерполационна формула на Лагранж. В бъдеще ще се ползуваме често от тази формула.

Понякога е удобно на интерполационния полином $f(x)$ да се дава видът

$$f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\dots+c_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}). \tag{2}$$

За да покажем, че полиномът $f(x)$ може да се представи във вида (2), образуваме си полинома

$$\psi(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\dots+c_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}),$$

където коефициентите $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ определяме от равенствата

$$\begin{aligned}
&y_0=\psi(x_0)=c_0,\\
&y_1=\psi(x_1)=c_0+c_1(x_1-x_0),\\
&y_2=\psi(x_2)=c_0+c_1(x_2-x_0)+c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&y_n=\psi(x_n)=c_0+c_1(x_n-x_0)+c_2(x_n-x_0)(x_n-x_1)+\dots+\\
&+c_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1}).
\end{aligned} \tag{3}$$

В такъв случай полиномът $\psi(x)$ удовлетворява условията

$$\psi(x_0)=y_0,\ \psi(x_1)=y_1, \dots,\ \psi(x_n)=y_n$$

и тъй като неговата степен не надминава n, той е идентичен с полинома $f(x)$ (съгласно теоремата за единственост, която доказахме по-горе). Формулата (2) се нарича интерполационна формула на Нютон (Newton). Определянето на коефициентите $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ се извършва твърде удобно от системата (3). Ние можем обаче без труд да намерим и общ израз за тези коефициенти. За да намерим интересуващата ни формула за c_k, образуваме си помощния полином

$$g_k(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\dots+c_k(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1}).$$

От равенствата

$$\begin{aligned}
&y_0=c_0,\\
&y_1=c_0+c_1(x_1-x_0),\\
&y_2=c_0+c_1(x_2-x_0)+c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&y_k=c_0+c_1(x_k-x_0)+c_2(x_k-x_0)(x_k-x_1)+\dots+\\
&\qquad+c_k(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})
\end{aligned}$$

заключаваме, че полиномът $g_k(x)$ удовлетворява условията

$$g_k(x_0)=y_0,\ g_k(x_1)=y_1, \dots,\ g_k(x_k)=y_k.$$

От друга страна, с директна проверка се вижда, че полиномът

$$\begin{aligned}
h_k(x)=&\,y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_k)}+\\
&+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_k)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_k)}+\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&+y_k\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})}
\end{aligned}$$

също удовлетворява равенствата

$$h_k(x_0)=y_0,\ h_k(x_1)=y_1, \dots,\ h_k(x_k)=y_k.$$

И тъй стойностите на двата полинома $g_k(x)$ и $h_k(x)$ съвпадат при $k+1$ различни стойности на x. Като вземем под внимание, че степените им не надминават k, заключаваме, че те са идентични. Като сравним коефициентите пред x_k в двата полинома $g_k(x)$ и $h_k(x)$, получаваме

$$\begin{aligned}
c_k=&\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_k)}+\\
&+\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_k)}+\\
&\dots\dots\dots\\
&+\frac{y_k}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})}.
\end{aligned}$$

Полученият израз за c_k се нарича k-то Нютоново частно на $y_0, y_1, \dots, y_k$ спрямо $x_0, x_1, \dots, x_k$.

Задачи

1. Нека
$$f(x)=x\,(x^2-1)\,(x^2-4).$$
Докажете, че уравнението
$$f'(x)=0$$
има четири различни реални корена.

Упътване. Приложете теоремата на Рол.

2. Намерете полином $f(x)$ от възможно най-ниска степен, който удовлетворява условията
$$f(-1)=3,\ f(0)=1,\ f(1)=-1,\ f(2)=3,\ f(3)=19.$$
Решете задачата както с помощта на интерполационната формула на Лагранж, така и с помощта на интерполационната формула на Нютон.

3. Намерете всички полиноми $f(x)$, които удовлетворяват условията
$$f(0)=-1,\ f(1)=0,\ f(2)=-7,\ f(3)=26.$$

4. Намерете четири константи A, B, C и D по такъв начин, че равенството
$$x^3+3x+1=A+B\,(x-1)+C(x-1)\,(x-2)+D\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$$
да е изпълнено при всяко x (покажете, че задачата има, и то само едно решение).

5. Нека x_1 и x_2 са две различни реални числа. Покажете, че е възможно да се определят две реални константи A_1 и A_2, и то еднозначно така, че за всички стойности на x, които са различни от x_1 и x_2, да е в сила равенството
$$\frac{1}{(x-x_1)\,(x-x_2)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}.$$

6. Докажете, че при всички цели положителни стойности на n е в сила равенството
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k)^2=n\,(n+1)\,2^{n-2}.$$

Решение. Изхождаме от тъждеството
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}=(1+x)^n.$$

Чрез диференциране намираме
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k)\,x^{n-k-1}=n\,(1+x)^{n-1}.$$

Умножаваме двете части на това равенство по x и диференцираме още веднъж. По този начин добиваме
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k)^2x^{n-k-1}=n\,(n-1)\,(1+x)^{n-2}x+n\,(1+x)^{n-1}.$$

Специално при $x=1$ получаваме
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k)^2=n\,(n+1)\,2^{n-2}.$$

7. Докажете, че при всички цели положителни стойности на n е в сила равенството
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^n=n!$$

Упътване. Приложете методата от предната задача към тъждеството
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n-k}=(x-1)^n.$$

8. Докажете, че
$$\sum_{\nu=0}^{n}\nu^2\binom{n}{k}x^\nu\,(1-x)^{n-\nu}=n\,(n-1)\,x^2+nx.$$

Решение. Изхождаме от тъждеството
$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu\,a^{n-\nu}=(x+a)^n.$$

Като диференцираме спрямо x, получаваме
$$\sum_{\nu=0}^{n}\nu\binom{n}{\nu}x^{\nu-1}\,a^{n-\nu}=n\,(x+a)^{n-1}.$$

Умножаваме двете части на последното равенство с x, диференцираме по x и пак умножаваме с x. Така добиваме
$$\sum_{\nu=0}^{n}\nu^2\binom{n}{\nu}x^\nu\,a^{n-\nu}=n\,(n-1)\,x^2\,(x+a)^{n-2}+nx\,(x+a)^{n-1}.$$

Като поставим $a=1-x$, получаваме исканото тъждество.

9. Докажете, че при всички цели положителни стойности на n е в сила равенството
$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

(По дефиниция се полага $\binom{n}{0}=1$.)

Упътване. Сравняваме коефициентите пред x^n в тъждеството
$$(x+1)^n(x+1)^n=(x+1)^{2n}.$$

10. Докажете, че при всички цели положителни стойности на n е в сила равенството

$$\binom{2n}{0}^2-\binom{2n}{1}^2+\binom{2n}{2}^2-\dots-\binom{2n}{2n-1}^2+\binom{2n}{2n}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}.$$

Упътване. Сравняваме коефициентите пред x^{2n} в тъждеството

$$(1+x)^{2n}(1-x)^{2n}=(1-x^2)^{2n}.$$

11. Да се покаже, че при цели стойности пред n, по-големи от 1, имаме

$$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-\dots+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}=0$$

(вярно ли е твърдението при $n=1$?).

Упътване. Сравнете коефициентите пред x в тъждеството

$$x^n=1+\binom{n}{1}(x-1)+\binom{n}{2}(x-1)^2+\binom{n}{3}(x-1)^3+\dots+\binom{n}{n}(x-1)^n.$$

12. Докажете, че при всички цели положителни стойности на n е в сила равенството

$$\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\frac{1}{4}\binom{n}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}.$$

Решение. Разглеждаме двата полинома

$$P(x)=\frac{1}{1}\binom{n}{1}x+\frac{1}{2}\binom{n}{2}x^2+\dots+\frac{1}{n}\binom{n}{n}x^n,$$

$$Q(x)=\frac{1}{1}(x+1)+\frac{1}{2}(x+1)^2+\dots+\frac{1}{n}(x+1)^n.$$

Очевидно

$$P'(x)=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}x+\dots+\binom{n}{n}x^{n-1}=\frac{(x+1)^n-1}{x},$$

$$Q'(x)=1+(x+1)+(x+1)^2+\dots+(x+1)^{n-1}=\frac{(x+1)^n-1}{x},$$

т. е. двата полинома $P(x)$ и $Q(x)$ имат една и съща производна. Оттук заключаваме, че разликата им е константа (тъй като производната на тази разлика е нула). И така

$$Q(-1)-P(-1)=Q(0)-P(0),$$

което доказва верността на твърдението.

13. Нека

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n.$$

Докажете, че ако има $n+1$ точки $x_0, x_1, \dots, x_n$, за които

$$f^{(k)}(x_k)=0,\ k=0, 1, \dots, n,$$

то $a_0=a_1=a_2=\dots=a_n=0$.

Упътване: От $f^{(n)}(x_n)=n!\,a_0$ заключаваме, че $a_0=0$. След като вече знаем, че $a_0=0$, намираме $f^{(n-1)}(x_{n-1})=(n-1)!\,a_1$, т. е. и $a_1=0$, и пр.

14. Нека $f(x)$ е полином, чиято степен не надминава n. Да се докаже, че

$$f(x)=f(a)-f'(a+h)\frac{a-x}{1!}+f''(a+2h)\frac{(a-x)(a+2h-x)}{2!}-\dots+$$

$$+(-1)^k f^{(k)}(a+kh)\frac{(a-x)(a+kh-x)^{k-1}}{k!}+\dots+$$

$$+(-1)^n f^{(n)}(a+nh)\frac{(a-x)(a+nh-x)^{n-1}}{n!}.$$

(Абел).

Упътване. Нека

$$\varphi(x)=f(a)-f'(a+h)\frac{a-x}{1!}+f''(a+2h)\frac{(a-x)(a+2h-x)}{2!}+\dots+$$

$$+(-1)^n f^{(n)}(a+nh)\frac{(a-x)(a+nh-x)^{n-1}}{n!}.$$

Докажете, че

$$f^{(k)}(a+kh)=\varphi^{(k)}(a+kh)$$

при $k=0, 1, \dots, n$, и използувайте предната задача.

§ 25. Монотонни функции

Една функция $f(x)$ се нарича монотонно растяща, когато при всеки две точки x_1 и x_2 от дефиниционната ѝ област, свързани с неравенството $x_1<x_2$, съответните функционални стойности са свързани с неравенството $f(x_1)\leqq f(x_2)$. Ако всеки път, когато е изпълнено неравенството $x_1<x_2$, имаме $f(x_1)\geqq f(x_2)$, функцията $f(x)$ се нарича монотонно намаляваща.

В специалния случай, когато дефиниционната област на функцията $f(x)$ е интервал (безразлично дали той е краен или безкраен, затворен или не), е в сила следната теорема.

Ако $f(x)$ е диференцуема в дефиниционния си интервал и производната ѝ е неотрицателна, то функцията $f(x)$ е монотонно растяща; ако производната ѝ никъде не е положителна, то функцията е монотонно намаляваща.

Доказателството се извършва без труд с помощта на теоремата за крайните нараствания.

Нека x_1 и x_2 са две точки от дефиниционния интервал на $f(x)$, като $x_1<x_2$. Прилагайки теоремата за крайните нараствания, получаваме

$$(1)\qquad f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi),$$

където ξ е едно число от вътрешността на интервала (x_1, x_2). Ако във всяка точка на дефиниционния интервал на $f(x)$ имаме $f'(x)\geqq 0$, то специално и $f'(\xi)\geqq 0$, откъдето

$$f(x_2)-f(x_1)\geqq 0,$$

т. е. функцията $f(x)$ е монотонно растяща. От равенството (1) се вижда, че ако $f'(x)$ не се анулира никъде и $x_1 \neq x_2$, то и $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ако пък навсякъде имаме $f'(x) \leq 0$, то и $f'(\xi) \leq 0$ и следователно

$$f(x_2)-f(x_1) \leq 0,$$

което показва, че функцията $f(x)$ е монотонно намаляваща.

С това доказателството на теоремата е завършено.

Монотонно растящите и монотонно намаляващите функции се наричат с общо име монотонни функции.

Пример. Функцията $f(x)=x^3$, дефинирана при всички стойности на x, е монотонно растяща, защото $f'(x)=3x^2 \geq 0$. Докажете това, без да си служите с производни!

Не е трудно да се докаже, че в този специален случай имаме $f(x_1)-f(x_2)$ само ако $x_1=x_2$. И наистина не е възможно едното от числата x_1 и x_2 да бъде съществено положително, а другото съществено отрицателно, защото в противен случай едното от числата $f(x_1)$ и $f(x_2)$ ще бъде съществено положително, а другото съществено отрицателно и следователно не бихме имали $f(x_1)=f(x_2)$. Ако допуснем, че числата x_1 и x_2 са различни, то пред вид $f(x_1)=f(x_2)$ можем да приложим към $f(x)$ теоремата на Рол. И така има поне една вътрешна точка x_0 в интервала (x_1, x_2), в която производната $f'(x)$ се анулира. От

$$f'(x_0)=3x_0^2=0$$

получаваме $x_0=0$, т. е. точката 0 е вътрешна за интервала (x_1, x_2) откъдето следва, че едното от числата x_1 и x_2 е съществено положително, а другото съществено отрицателно, което, както знаем, не е възможно. С това ние достигнахме до исканото противоречие, което се дължи на допускането, че $x_1 \neq x_2$. Докажете, че от $x_1^3=x_2^3$ следва $x_1=x_2$, без да си служите с производни!

ГЛАВА II

РАЗВИВАНЕ НА ФУНКЦИИТЕ В РЕДОВЕ

§ 1. Степенни редове

Редове от вида*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

където коефициентите $a_0, a_1, a_2, \ldots$ не зависят от x, се наричат степенни редове. Понятието степенен ред може да се разглежда като обобщение на понятието полином.

Пример. Геометричната прогресия

$$1+x+x^2+\cdots$$

представлява един специален степенен ред, при който всички коефициенти са равни на 1.

Когато е даден един степенен ред, може да се случи за едни стойности на x той да бъде сходящ, а за други разходящ. Множеството на всички точки, за които един степенен ред е сходящ, се нарича негова област на сходимост.

Пример. Редът

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

е сходящ за всички стойности на x. Неговата област на сходимост се състои от цялата ос x.

Редът

$$1+x+x^2+x^3+\cdots$$

е сходящ при $-1<x<1$. При $|x| \geq 1$ този ред е разходящ.

Редът

$$1+1!x+2!x^2+\cdots+n!x^n+\cdots$$

е сходящ само при $x=0$, защото при $x \neq 0$ общият му член не клони към нула. И наистина при $x \neq 0$ се установява лесно с помощта на критерия на Даламбер, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!|x|^n}$$

* Редове от вида

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\cdots$$

също често пъти се наричат степенни редове.

е сходящ. От това следва, че общият му член $\frac{1}{n!\,|x|^n}$ клони към нула, откъдет пък следва, че $n!\;|x|^n$ расте неограничено.

Разбира се, при $x=0$ един степенен ред е непременно сходящ. Сега ще докажем, че ако степенният ред

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

е сходящ при някое $x_0 \neq 0$, той е абсолютно сходящ за всички стойности на x, за които $|x|<|x_0|$. Доказателството извършваме така. Щом редът

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots$$

е сходящ, редицата от членовете му

$$a_0,\ a_1x_0,\ a_2x_0^2,\ldots$$

е сходяща (тя клони към нула) и следователно тя е ограничена. Да означим с A една горна граница на $|a_n x_0^n|$. В такъв случай имаме

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq A\left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

И така членовете на реда

(1) $$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots$$

не надминават съответните членове на геометричната прогресия

$$A+A\left|\frac{x}{x_0}\right|+A\left|\frac{x}{x_0}\right|^2+\cdots$$

Когато $|x|<|x_0|$, имаме $\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$, т. е. получената геометрична прогресия е сходяща. От това следва, че редът (1) е също сходящ или, което е същото, редът

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

е абсолютно сходящ.

Сега ще покажем, че областта на сходимост на един степенен ред е един интервал с център в началото на координатната система. Този интервал може да представлява цялата ос OX, може да се изражда в една точка и най-сетне може да представлява един истински интервал с крайна дължина.

И наистина нека M е областта на сходимост на степенния ред

(2) $$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

Множеството M сигурно не е празно, защото то съдържа поне точката 0. Ако множеството M е неограничено отгоре, то съдържа всички

реални числа (т. е. редът (2) е сходящ при всички стойности на x). Това може да се установи по следния начин. Нека x_1 е произволно реално число. Щом множеството M отгоре не е ограничено, винаги може да се намери число x_0 в M, за което $|x_1|<x_0$, т. е. $|x_1|<|x_0|$. Но тъй като редът (2) е сходящ в точката x_0 (точката x_0 принадлежи на M), въз основа на това, което доказахме преди малко, заключаваме, че той е сходящ и в точката x_1.

Сега ще разгледаме случая, когато множеството M е ограничено отгоре. Нека r е точната горна граница на M. Ще покажем, че при $|x|<r$ редът (2) е сходящ, а при $|x|>r$ той е разходящ. И наистина нека $|x_1|<r$. В такъв случай $|x_1|$ не е горна граница на M (тъй като $|x_1|$ е по-малко от най-малката горна граница на M) и следователно има поне едно число x_0 от M (където следователно редът е сходящ), за което $|x_1|<x_0$. Но щом в точката x_0 редът (2) е сходящ, той трябва съгласно доказаното да бъде сходящ и в точката x_1. Нека сега x_2 е една точка, за която $|x_2|>r$. Ще покажем, че редът (2) е разходящ в тази точка. И наистина нега $r<x'<|x_2|$. Тъй като r е една горна граница на M, то x' не принадлежи на M, т. е. редът (2) е разходящ в точката x'. От това следва, че редът е разходящ и в точката x_2, защото в противен случай от неравенството $0<x'<|x_2|$ би следвало, че редът (2) трябва да бъде сходящ и в точката x', което не е вярно. И така ние доказахме, че редът (2) е сходящ при $|x|<r$ и разходящ при $|x|>r$. При $x=r$ и при $x=-r$ ние не разгледахме реда. Както ще видим с помощта на примери, има редове, които в тия две точки са разходящи, има редове, които в тия две точки са сходящи, и най-сетне има редове, които в едната от точките са сходящи, а в другата разходящи. Числото r се нарича радиус на сходимост на степенния ред. Когато степенният ред е сходящ за всяко x, казваме, че неговият радиус на сходимост е безкрайност. В случай че $r=0$, редът е сходящ само при $x=0$.

Примери. Радиусът на сходимост на реда

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

е безкрайност (този ред е сходящ при всички стойности на x).

Радиусът на сходимост на реда

$$1+1!\,x+2!\,x^2+3!\,x^3+\cdots$$

е нула (този ред е сходящ само при $x=0$).

Радиусът на сходимост на реда

$$1+x+x^2+x^3+\cdots$$

е единица (редът е сходящ при $-1<x<1$ и разходящ вън от този интервал; специално при $x=-1$ и $x-1$ този ред е разходящ).

Радиусът на сходимост на реда

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots$$

е единица (редът е сходящ при $-1 \leq x < 1$ и вън от този интервал е разходящ; специално при $x=-1$ редът е сходящ, а при $x=1$ той е разходящ).

Радиусът на сходимост на реда

$$\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots+\frac{x^n}{n^2}+\cdots$$

е единица (защо?). Редът е сходящ при $-1 \leq x \leq 1$ и вън от този интервал е разходящ; специално при $x=-1$ и $x=1$ редът е сходящ.

От посочените примери е ясно, че в краищата на интервала на сходимост редът може да бъде сходящ, може да бъде разходящ и най-сетне в единия край може да бъде сходящ, а в другия разходящ.

§ 2. Диференциране на степенни редове

Нека

(1) $$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

е един степенен ред, чийто радиус на сходимост е различен от нула. Сумата на този ред, разбира се, зависи от избора на числото x. Тя е обаче еднозначно дефинирана, когато редът е сходящ при избраната стойност на x. И така сумата на един степенен ред е функция на x, дефинирана в областта на сходимост на реда. Да означим с $f(x)$ тази функция. Ще докажем, че функцията $f(x)$ е диференцуема във всички вътрешни точки на интервала на сходимост на дадения степенен ред, че редът

$$1a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

е сходящ за тия точки и че

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

Това твърдение не следва непосредствено от правилото за диференциране на сума, защото ние доказахме това правило само за суми от краен брой събираеми, а в дадения случай се касае за почленното диференциране на един безкраен ред.

Преди да пристъпим към доказателството на интересуващата ни теорема, ще докажем, че радиусът на сходимост на реда

(2) $$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$$

е равен на радиуса на сходимост на реда

(3) $$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

Нека x_0 е една точка от вътрешността на интервала на сходимост на реда (3). В такъв случай може да се намери число x_1, по-голямо от $|x_0|$, за което редът (3) все още е сходящ. От сходимостта на реда

$$a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+a_3x_1^3+\cdots$$

следва, че редицата

$$a_0,\ a_1x_1,\ a_2x_1^2,\ a_3x_1^3,\cdots$$

клони към нула и следователно е ограничена. Нека A е една горна граница на $|a_nx_1^n|$ за $n=1, 2, 3,\ldots$ В такъв случай получаваме неравенството

$$|na_nx_0^{n-1}|=n|a_nx_1^n|\cdot\left|\frac{x_0}{x_1}\right|^{n-1}\frac{1}{x_1}<n\frac{A}{x_1}q^{n-1},$$

където сме положили $q=\left|\frac{x_0}{x_1}\right|$. Това неравенство ни учи, че редът

$$1a_1+2a_2x_0+3a_3x_0^2+\cdots$$

е сходящ (дори абсолютно), тъй като членовете му не надминават по абсолютна стойност съответните членове на реда

$$\frac{A}{x_1}(1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}+\cdots),$$

чиято сходимост се установява лесно например с помощта на критерия на Даламбер, тъй като $0 \leq q < 1$.

От друга страна, ако x_0 е една вътрешна точка от интервала на сходимост на реда (2), то редът

$$|x_0|(|a_1|+|2a_2x_0|+|3a_3x_0^2|+\cdots)$$

е сходящ (понеже при $x=x_0$ редът (2) е абсолютно сходящ). От неравенството

$$|a_nx_0^n| \leq |na_nx_0^n|,\qquad n=1, 2, 3,\ldots,$$

заключаваме, че редът

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots$$

е също сходящ (дори абсолютно).

Направените разсъждения показват, че редовете (2) и (3) имат един и същ радиус на сходимост.

Като приложим доказаното за реда

$$1.2a_2+2.3a_3x+3.4a_4x^2+\cdots,$$

който се получава чрез почленното диференциране на реда

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots,$$

заключаваме, че неговият радиус на сходимост съвпада с радиуса на сходимост на реда (2), а следователно и на реда (3). Като приложим няколко пъти тези разсъждения, заключаваме, че всеки ред, получен от реда (1) чрез неколкократно почленно диференциране, има еднакъв с него (краен или безкраен) радиус на сходимост.

След тези предварителни бележки ние вече сме готови да преминем към доказателството на интересуващата ни теорема. За целта изхождаме от дефиницията на понятието производна. Нека x_0 е една точка от вътрешността на интервала на сходимост на реда (1). Нека x_1 е една точка също от вътрешността на интервала на сходимост на реда (1), за която $x_1 > |x_0|$. Такава точка може да се намери, защото точката x_0 е вътрешна за интересуващия ни интервал. Нека h е достатъчно малко по абсолютна стойност число, за да имаме $|x_0+h| < x_1$. В такъв случай, ако $h \neq 0$, можем да пишем

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a_1\frac{(x_0+h)-x_0}{h} + a_2\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} + \tag{4}$$

$$+a_3\frac{(x_0+h)^3-x_0}{h}+\cdots$$

Редът

$$\varphi(x_0) = a_1+2a_2x_0+3a_3x_0^2+\cdots \tag{5}$$

е сходящ, защото точката x_0 лежи във вътрешността на интервала на сходимост на реда (1), а следователно и на реда (2). От равенствата (4) и (5) получаваме

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \varphi(x_0) = a_2\left[\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} - 2x_0\right]+\cdots+$$

$$+a_n\left[\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h} - n\,x_0^{n-1}\right]+\cdots$$

Като приложим теоремата за крайните нараствания, добиваме

$$\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h} = n\,\xi_n^{n-1},\ \xi_n = x_0+\theta_n h,\ 0<\theta_n<1,$$

а оттук въз основа пак на теоремата за крайните нараствания —

$$\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h} - nx_0^{n-1} = n(\xi_n^{n-1}-x_0^{n-1}) = n(n-1)(\xi_n-x_0)\eta_n^{n-2},$$

$$\eta_n = x_0+\theta_n'(\xi_n-x_0), \qquad 0<\theta_n'<1.$$

По такъв начин, като вземем под внимание, че $|\eta_n| < x_1$ и $|\xi_n - x_0| < |h|$, достигаме до следното неравенство:

$$\left|\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h} - nx_0^{n-1}\right| \leq n(n-1)\,x_1^{n-2}|h|,$$

откъдето

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \varphi(x_0)\right| \leq |h|(2.1\,|a_2|+3.2\,|a_3x_1|+4.3\,|a_4x_1^2|+\ldots).$$

Редът

$$2.1\,|a_2|+3.2\,|a_3x_1|+4.3\,|a_4x_1^2|+\cdots$$

обаче е сходящ, защото точката x_1 е вътрешна за интервала на сходимост и сумата му ни най-малко не зависи от h и следователно, както и да изберем положителното число ε, винаги може да се намери положително число δ така, че при $|h|<\delta$ да имаме

$$|h|(2.1\,|a_2|+3.2\,|a_3x_1|+4.3\,|a_4x_1^2|+\cdots)<\varepsilon,$$

а следователно и

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \varphi(x_0)\right| < \varepsilon.$$

С това ние доказахме, че функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_0 и нейната производна е $\varphi(x_0)$.

И така ние доказахме следната важна теорема:

Ако радиусът на сходимост на степенния ред

$$f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

е отличен от нула, то сумата $f(x)$ е диференцуема във всяка вътрешна точка x_0 от интервала на сходимостта му и

$$f'(x_0) = a_1+2a_2x_0+3a_3x_0^2+\cdots+na_nx_0^{n-1}+\cdots$$

§ 3. Редици от функции

Нека е дадена една редица от функции

$$f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_n(x),\ldots, \tag{1}$$

които са дефинирани в някой интервал Δ. Казваме, че тази редица от функции е сходяща в разглеждания интервал, когато е сходяща редицата от функционалните стойности при всяка фиксирана стойност на x в интервала Δ. С други думи, казваме, че редицата (1) е сходяща в интервала Δ, когато при всяко фиксирано x от този интервал може да се намери такова число $f(x)$, че при всеки избор на положителното число ε може да се намери число ν по такъв начин, че при $n>\nu$ да е изпълнено неравенството

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Числото $f(x)$ се нарича граница на редицата (1) при избраната стойност на x. Ние означихме границата със символа $f(x)$, за да напомним, че тя може евентуално да се мени, когато изменяме x. Тя обаче е еднозначно дефинирана, когато x е дадено, и следователно представлява функция на x.

Нека подчертаем изрично, че в дефиницията, която дадохме, не се забранява ν евентуално да се мени, когато изменяме ε и x. Поради това ние често ще пишем $\nu=\nu(\varepsilon, x)$.

Ако при всеки избор на $\varepsilon>0$ е възможно да се избере число $\nu(\varepsilon)$, евентуално зависещо от ε, *но не и от* x по такъв начин, че при $n>\nu(\varepsilon)$ да имаме

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

при всички стойности на x в интервала Δ, казваме, че редицата (1) е равномерно сходяща в този интервал.

Като пример да разгледаме редицата с общ член

$$f_n(x)=\frac{x}{n} \tag{2}$$

върху цялата ос x. Тази редица е сходяща и граничната й функция е константата нула. И наистина нека ε е произволно положително число. Ако поставим $\nu=\frac{|x|}{\varepsilon}$, ще имаме

$$|f_n(x)-0|=\frac{|x|}{n}<\varepsilon$$

при $n>\nu$.

Числото ν, което ние по този начин съпоставихме на ε, зависи в този специален случай не само от ε, но и от x. Ще покажем, че не е възможно да се избере независещо от x число $\nu(\varepsilon)$ така, че когато $n>\nu(\varepsilon)$, да имаме

$$|f_n(x)-0|<\varepsilon \tag{3}$$

при всички стойности на x. Доказателството ще извършим, като допуснем противното. Нека в неравенството (3) фиксираме n (като му дадем, разбира се, стойност, по-голяма от $\nu(\varepsilon)$). В такъв случай, ако е вярно допускането, от което изхождаме, ще имаме при всички стойности на x

$$\frac{|x|}{n}<\varepsilon$$

или

$$|x|<\varepsilon n.$$

Последното неравенство обаче сигурно е нарушено, когато $|x|$ е достатъчно голямо. С това ние доказахме, че редицата (2) не е равномерно сходяща върху цялата ос x.

Напротив, редицата с общ член

$$g_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$$

е равномерно сходяща върху цялата ос x (нейната граница е константата нула). И наистина да изберем едно кое да е положително число ε.

В такъв случай, ако положим $\nu=\frac{1}{\varepsilon}$, то при $n>\nu$ ще имаме

$$|g_n(x)-0|=\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\leqq\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

В този пример числото $\nu=\frac{1}{\varepsilon}$ не зависи от x и следователно разглежданата редица е равномерно сходяща.

Не е трудно да се докаже, че за да бъде редицата (1) равномерно сходяща в Δ, необходимо и достатъчно е при всеки избор на положителното число ε да може да се намери едно независещо от x число $\nu=\nu(\varepsilon)$ по такъв начин, че ако $n>\nu$, да имаме

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

при всички цели положителни стойности на p и при всяко x от Δ. Доказателството предоставяме на читателя.

За да фиксираме идеите, ние дефинирахме понятието равномерна сходимост по отношение на един интервал. Читателят може обаче, ако иска, под Δ да разбира произволно точково множество. Нека все пак изрично подчертаем, че понятието равномерна сходимост представлява интерес само когато множеството Δ е съставено от безбройно много точки, защото в противен случай всяка сходяща редица от функции е и равномерно сходяща (защо?).

§ 4. Редове, членовете на които са функции

Един ред

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots, \tag{1}$$

членовете на който са функции, дефинирани в един интервал Δ, се нарича сходящ, когато редицата от частичните му суми е сходяща. Редът се нарича равномерно сходящ в интервала Δ, когато редицата от частичните му суми е равномерно сходяща в този интервал.

Ще дадем сега едно просто и важно достатъчно условие за равномерна сходимост на един ред. Това условие може да се формулира така: ако редът

$$a_1+a_2+a_3+\cdots, \tag{2}$$

членовете на който не зависят от x, е сходящ и ако при всяко x от интервала Δ са изпълнени неравенствата

$$|u_n(x)|\leqq a_n, \tag{3}$$

то редът (1) е равномерно сходящ в този интервал.

Нека отбележим, че неравенствата (3) осигуряват сходимостта на реда (1) при всяко x в интервала Δ. Това, което искаме да покажем, е, че сходимостта е равномерна в този интервал. Да означим с $S(x)$

сумата на реда (1), а с $S_n(x)$ неговата n-та частична сума. В такъв случай

$$S(x)-S_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots$$

Да си изберем едно произволно положително число ε и да му съпоставим число $\nu(\varepsilon)$ така, че при $n>\nu(\varepsilon)$ да имаме

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots<\varepsilon.$$

Това е възможно да се направи, защото редът (2) е сходящ. Нека обърнем внимание на това, че начинът, по който сме дефинирали числото $\nu(\varepsilon)$, ни най-малко не зависи от x. От друга страна, неравенствата (3) ни дават

$$|S(x)-S_n(x)|\leqq|u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+\cdots\leqq a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots,$$

откъдето следва, че при $n>\nu(\varepsilon)$ имаме

$$|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon,$$

каквото и да е x в интервала Δ. Този резултат ни учи, че редът (1) е равномерно сходящ в разглеждания интервал.

Пример 1. Редът

$$\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{n^2}+\cdots$$

е равномерно сходящ върху цялата ос x, защото

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\leqq\frac{1}{n^2}$$

и редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, членовете на който не зависят от x, е сходящ.

В заключение нека отбележим, че няма връзка между абсолютната и равномерната сходимост. Така например редът

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}x^\nu(1-x^2)$$

е абсолютно сходящ при $-1\leqq x\leqq 1$, но не е равномерно сходящ, а редът

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu x}{\nu}$$

е равномерно сходящ във всеки краен интервал, но не е абсолютно сходящ освен при $x=0$.

Пример 2. Нека

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

е степенен ред и r е неговият радиус на сходимост. Ако $0\leqq\rho<r$, то този ред е равномерно сходящ при $|x|\leqq\rho$, защото редът

$$|a_0|+|a_1\rho|+|a_2\rho^2|+\cdots$$

е сходящ и

$$|a_nx^n|\leqq|a_n\rho^n|.$$

§ 5. Редици от непрекъснати функции

Нека редицата от функциите

$$(1)\qquad f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_n(x),\ldots$$

е сходяща в интервала Δ. Тук ще си поставим следния въпрос: може ли да се твърди, че граничната функции $f(x)$ е непрекъсната, ако се знае, че всичките членове на редицата (1) са непрекъснати функции в интервала Δ? Отговорът на този въпрос е отрицателен. Ще си уясним това с един пример. Нека Δ е затвореният интервал $[0, 1]$ и нека $f_n(x)=x^n$. В такъв случай функциите $f_n(x)$ са всички непрекъснати в разглеждания интервал. Въпреки това обаче граничната функция $f(x)$ е прекъсната при $x=1$, защото

$$f(x)=0 \text{ при } 0\leqq x<1 \text{ и}$$

$$f(1)=1.$$

И така непрекъснатостта на членовете на една сходяща редица не е достатъчна, за да ни осигури непрекъснатостта на граничната функция. Ако обаче редицата (1) е равномерно сходяща в интервала Δ и членовете ѝ са непрекъснати в този интервал, то граничната функция $f(x)$ е също тъй непрекъсната в интервала Δ.

И наистина нека x_0 е произволна точка от интервала Δ. Да изберем едно произволно положително число ε и да му съпоставим такова число $\nu(\varepsilon)$, че при $n>\nu(\varepsilon)$ да имаме

$$(2)\qquad |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

при всички стойности на x от Δ. Това е възможно да се направи, защото редицата (1) е равномерно сходяща. След като е фиксирано числото $\varepsilon>0$, ние можем да фиксираме и $\nu(\varepsilon)$, а с това да фиксираме и n, като му дадем произволна стойност, по-голяма от $\nu(\varepsilon)$. Функцията $f_n(x)$ е обаче непрекъсната при $x=x_0$. Следователно ние можем да изберем положително число δ така, че при $|x-x_0|<\delta$ да имаме

$$(3)\qquad |f_n(x)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

разбира се, когато точката x принадлежи на Δ. От друга страна,

$$|f(x)-f(x_0)| \leqq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(x_0)| + |f_n(x_0)-f(x_0)| .$$

Оттук, като вземем пред вид неравенствата (2) и (3), получаваме при $|x-x_0|<\delta$

$$|f(x)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

което показва, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0.

Пример. Редът

$$S(x)=\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}+\dots$$

е равномерно сходящ по цялата ос x, защото $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$. От това заключаваме, че редицата от частичните му суми е също равномерно сходяща. Членовете на реда, а следователно и частичните му суми са непрекъснати функции на x. От това заключаваме, че сумата му $S(x)$ е непрекъсната функция на x.

§ 6. Диференциране на безкрайни редици от функции

Нека функциите

(1) $$f_1(x),\ f_2(x), \dots,\ f_n(x), \dots$$

са дефинирани и диференцуеми в някой интервал Δ и нека редицата от производните

$$f_1'(x),\quad f_2'(x), \dots\quad f_n'(x), \dots$$

е равномерно сходяща в Δ. Ако има поне една точка x_0 в Δ, за която редицата от функционалните стойности

$$f_1(x_0),\ f_2(x_0), \dots,\ f_n(x_0), \dots$$

е сходяща, то редицата (1) е сходяща навсякъде в Δ, граничната функция е диференцуема и

$$(\lim f_n(x))'=\lim f_n'(x).$$

Доказателство. Ние първо ще установим сходимостта на редицата (1) в целия интервал Δ. За тази цел разглеждаме функцията

$$g(x)=f_{n+p}(x)-f_n(x).$$

Теоремата за крайните нараствания ни дава

$$g(x)-g(x_0)=(x-x_0)g'(x_0+\theta h),\quad 0<\theta<1,\quad h=x-x_0.$$

Оттук получаваме

$$f_{n+p}(x)-f_n(x)=f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)+(x-x_0)\,[f_{n+p}'(x_0+\theta h)-f_n'(x_0+\theta h)].$$

Избираме произволно положителното число ε. В такъв случай при достатъчно големи стойности на n, при всички цели неотрицателни стойности на p и при всяко t от Δ имаме

$$|f_{n+p}'(t)-f_n'(t)|<\varepsilon,$$

$$|f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)|<\varepsilon$$

и следователно

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)| \leqq \varepsilon(1+|x-x_0|),$$

откъдето следва, че редицата (1) е наистина сходяща. (От направените разсъждения се вижда, че сходимостта е дори равномерна, когато x остава ограничено).

Преминаваме към доказателството на втората част на теоремата. За тази цел полагаме

$$\lim f_n(x)=f(x),$$

$$\lim f_n'(x)=\varphi(x).$$

Избираме произволно положително число ε и му съпоставяме цялото* положително число n по такъв начин, че при всички цели положителни стойности на p и при всяко x от Δ да имаме

$$|f_{n+p}'(x)-f_n'(x)|<\varepsilon.$$

В такъв случай очевидно имаме и

$$|\varphi(x)-f_n'(x)| \leqq \varepsilon.$$

Нека x_1 е точка от Δ. Означаваме с h едно различно от нула число, за което точката x_1+h принадлежи на Δ. Нека h е толкова малко, че да имаме

$$\left|\frac{f_n(x_1+h)-f_n(x_1)}{h}-f_n'(x_1)\right|<\varepsilon.$$

В такъв случай при всички цели положителни стойности на p имаме

$$\left|\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}-\varphi(x_1)\right| \leqq \left|\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}-\frac{f_{n+p}(x_1+h)-f_{n+p}(x_1)}{h}\right| +$$

$$+\left|\frac{f_{n+p}(x_1+h)-f_{n+p}(x_1)}{h}-\frac{f_n(x_1+h)-f_n(x_1)}{h}\right| +$$

$$+\left|\frac{f_n(x_1+h)-f_n(x_1)}{h}-f_n'(x_1)\right| + |f_n'(x_1)-\varphi(x_1)|$$

* По-нататък при нашите разсъждения n остава фиксирано.

и следователно, ако p е достатъчно голямо, то

$$\left|\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}-\varphi(x_1)\right|<$$

$$<3\varepsilon+\left|\frac{f_{n+p}(x_1+h)-f_{n+p}(x_1)}{h}-\frac{f_n(x_1+h)-f_n(x_1)}{h}\right|.$$

Прилагаме теоремата за крайните нараствания към функцията

$$p(x)=f_{n+p}(x)-f_n(x).$$

Това ни дава

$$p(x_1+h)-p(x_1)=hp'(x_1+\theta_1 h)=h\left[f'_{n+p}(x_1+\theta_1 h)-f'_n(x_1+\theta_1 h)\right],$$

където $0<\theta_1<1$. По такъв начин получаваме

$$\left|\frac{f_{n+p}(x_1+h)-f_{n+p}(x_1)}{h}-\frac{f_n(x_1+h)-f_n(x_1)}{h}\right|<\varepsilon.$$

Оттук намираме окончателно, че при всички достатъчно малки, различни от нула стойности на h, за които точката x_1+h принадлежи на Δ, е в сила неравенството

$$\left|\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}-\varphi(x_1)\right|<4\varepsilon.$$

По такъв начин доказахме, че функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_1 и $f'(x_1)=\varphi(x_1)$, с което доказателството е завършено.

Пример. Нека

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$

е степенен ред и r е неговият радиус на сходимост. Да означим с ρ едно положително число, което е по-малко от r (обаче не равно на r). В такъв случай редът

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\dots,$$

чийто радиус на сходимост е също r, е равномерно сходящ при $|x|\leqq\rho$ (вж. пример 2 към § 4 от тази глава), а следователно и редицата от частичните му суми е равномерно сходяща в този интервал. Оттук се вижда, като вземем под внимание, че ρ може да се избира произволно близо до r, че функцията $f(x)$ е диференцуема при $|x|<r$ и

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\dots,$$

нещо, което доказахме директно в § 2 от тази глава.

§ 7. Формула на Тейлор (Taylor) за полиноми

Нека $f(x)$ е произволен полином, чиято степен не надминава n, и a е едно произволно число. Ще покажем, че е в сила следната формула:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\dots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

Тази формула носи името на Тейлор. Верността ѝ се установява по следния начин: нека

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n;$$

оттук получаваме

$$f(a+h)=a_0+a_1(a+h)+a_2(a+h)^2+\dots+a_n(a+h)^n;$$

като разкрием скобите и направим приведение, получаваме за $f(a+h)$ един полином на h, чиято степен не надминава n; като означим с $b_0, b_1, \dots, b_n$ коефициентите на този полином, получаваме

$$f(a+h)=b_0+b_1h+b_2h^2+\dots+b_nh^n; \tag{1}$$

това равенство е валидно при всички стойности на h; специално като поставим $h=0$, намираме

$$f(a)=b_0;$$

диференцирайки равенството (1) по h, намираме

$$f'(a+h)=b_1+2b_2h+3b_3h^2+\dots+nb_nh^{n-1}; \tag{2}$$

оттук при $h=0$ получаваме $f'(a)=b_1$; диференцираме още веднъж равенството (2) по h и получаваме

$$f''(a+h)=2.1b_2+3.2b_3h+\dots+n(n-1)b_nh^{n-2},$$

откъдето, като положим $h=0$, намираме $f''(a)=2.1b_2$; като продължим тези разсъждения, намираме последователно

$$b_0=f(a),\quad b_1=\frac{f'(a)}{1!},\quad b_2=\frac{f''(a)}{2!},\dots,\quad b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

С това интересуващата ни формула е изведена.

Ако положим $a+h=x$, формулата на Тейлор за полином $f(x)$ от степен $\leqq n$ добива вида

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\dots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

§ 8. Обща формула на Тейлор

В този параграф ще разгледаме въпроса за приближено представяне на функциите с полиноми.

Нека $f(x)$ е една функция, дефинирана и диференцуема $n+1$ пъти в някой интервал, който съдържа точката a. Ние знаем, че в специалния случай, когато $f(x)$ е полином, чиято степен не надминава n, е в сила формулата

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\dots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a). \tag{1}$$

В общия случай (т. е. когато $f(x)$ не е такъв полином) това равенство не е задължено да бъде изпълнено. Може да се постави обаче въпросът, дали равенството (1) не е поне приблизително вярно и в случая, когато $f(x)$ не е полином от степен $\leqq n$. Така поставеният въпрос не е достатъчно ясен, защото не е ясно какво значи „една приблизително вярна формула". Ние по-точно ще си поставим за задача да изучим грешката, която се прави, когато вместо $f(x)$ вземем стойността на полинома x

$$f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

За тази цел означаваме с R_n разликата

$$R_n=f(x)-f(a)-\frac{x-a}{1!}f'(a)-\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)-\cdots-\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

и така получаваме вече напълно точното равенство

(2) $$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n.$$

Интересуващата ни грешка е R_n. Обикновено R_n се нарича остатъчен член, а равенството (2) се нарича формула на Тейлор (Taylor). За да изследваме по-отблизо R_n, когато x е различно от a число от вътрешността на околността Δ, образуваме си помощната функция на t

$$\varphi(t)=f(x)-f(t)-\frac{x-t}{1!}f'(t)-\cdots-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)-\lambda(x-t)^p,$$

където p е произволно цяло положително число, x е фиксирано и константата λ избираме така, че да имаме

(3) $$\varphi(a)=\varphi(x),$$

за да можем да приложим за функцията $\varphi(t)$ теоремата на Рол. От равенството (3) получаваме

$$f(x)-f(a)-\frac{x-a}{1!}f'(a)-\cdots-\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)-\lambda(x-a)^p=0$$

или

(4) $$R_n-\lambda(x-a)^p=0,$$

отъдето определяме стойността на множителя λ.

Функцията $\varphi(t)$ е непрекъсната в затворения интервал* $[a, x]$ и диференцуема в него; освен това $\varphi(a)=\varphi(x)$; това ни дава право да приложим теоремата на Рол за функцията $\varphi(t)$ по отношение на интервала $[a, x]$. И така има поне една точка ξ във вътрешността на интервала $[a, x]$, в която $\varphi'(\xi)=0$. Като вземем под внимание, че

* Нека изрично подчертаем, че точката x може да се намира както отдясно, така и отляво на a, макар и в символа $[a, x]$ да сме поставили x отдясно.

$$\varphi'(t)=-f'(t)+\left[f'(t)-\frac{x-t}{1!}f''(t)\right]+\left[\frac{x-t}{1!}f''(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)\right]+$$
$$+\cdots+\left[\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\right]+p\lambda(x-t)^{p-1}=$$
$$=-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+p\lambda(x-t)^{p-1},$$

намираме

$$\varphi'(\xi)=-\frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)+p\lambda(x-\xi)^{p-1}=0$$

и следователно

$$\lambda=\frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(\xi).$$

Това ни дава възможност, като имаме пред вид равенството (4), да представим остатъчния член R_n във вида

$$R_n=\frac{(x-\xi)^{n-p+1}(x-a)^p}{n!\,p}f^{(n+1)}(\xi).$$

Ако положим, както това често се прави,

$$x-a=h \quad\text{и}\quad \frac{\xi-a}{x-a}=\theta,$$

получаваме

$$R_n=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(a+\theta h),$$

където $0<\theta<1$. Числото θ зависи от функцията $f(x)$ и от числата a, x, n и p. Нека припомним, че ние имаме голяма свобода в избора на p. Ако изберем специално $p=n+1$, получаваме

(5) $$R_n=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Така получената форма за остатъчния член се нарича форма на Лагранж (Lagrange). Ако поставим $p=1$, получаваме

(6) $$R_n=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Тази форма носи името форма на Коши (Cauchy) за остатъчния член. Числото θ, което участвува във формулата (5) в общия случай, е различно от числото θ, което участвува във формулата (6).

По този начин изведохме формулите (5) и (6) при предположение, че $a\neq x$ (ние прилагахме теоремата на Рол за интервала $[a, x]$). Те са верни обаче и при $a=x$, защото в този случай имаме както $R_n=0$, така и $h=0$.

Остатъчният член може да се представи и в други форми, но за нашите нужди ще бъдат достатъчни двете форми (на Лагранж и Коши), които ние му дадохме.

Специално, когато $a=0$, формулата на Тейлор се нарича формула на Маклорен (Mac Laurin). И така формулата

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\dots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+R_n$$

се нарича формула на Маклорен (тук вместо h сме писали x), където остатъчният член R_n, представен във формата на Лагранж, има вида

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x),\quad 0<\theta<1,$$

а във формата на Коши —

$$R_n=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x),\quad 0<\theta<1.$$

В заключение ще отбележим, че за да можем да проведем разсъжденията от този параграф, достатъчно е да се предполага, че функцията $f(t)$ е диференцуема n пъти в затворения интервал $[a, x]$, а n-тата производна $f^{n}(t)$ е диференцуема поне в отворения интервал (a, x) и е непрекъсната в крайните му точки.

§ 9. Отношение на два остатъчни члена

Нека в някой интервал Δ, който съдържа точката a, са дефинирани две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$; нека освен това функцията $f(x)$ е диференцуема поне $n+1$ пъти, функцията $\varphi(x)$ е диференцуема поне $k+1$ пъти и $\varphi^{(k+1)}(x)\neq 0$ в Δ. При тези предположения ще намерим една проста зависимост между двата остатъчни члена

$$R_n=f(x)-f(a)-\frac{x-a}{1!}f'(a)-\dots-\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a),$$

$$\rho_k=\varphi(x)-\varphi(a)-\frac{x-a}{1!}\varphi'(a)-\dots-\frac{(x-a)^k}{k!}\varphi^{(k)}(a).$$

За тази цел прилагаме обобщената теорема за крайните нараствания за функциите

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{x-t}{1!}f'(t)-\dots-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t),$$

$$\Phi(t)=\varphi(x)-\varphi(t)-\frac{x-t}{1!}\varphi'(t)-\dots-\frac{(x-t)^k}{k!}\varphi^{(k)}(t)$$

по отношение на интервала $[a, x]$. По такъв начин получаваме

$$\frac{F(a)-F(x)}{\Phi(a)-\Phi(x)}=\frac{F'(\xi)}{\Phi'(\xi)},$$

където ξ принадлежи на отворения интервал (a, x).

Оттук, като вземем под внимание, че

$$F(x)=0,\quad F(a)=R_n,$$

$$\Phi(x)=0,\quad \Phi(a)=\rho_k,$$

$$F'(t)=-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t),$$

$$\Phi'(t)=-\frac{(x-t)^k}{k!}\varphi^{(k+1)}(t),$$

намираме

$$\frac{R_n}{\rho_k}=\frac{k!(x-\xi)^{n-k}f^{(n+1)}(\xi)}{n!\varphi^{(k+1)}(\xi)}.$$

От тази обща формула получаваме при $k=0$ и $\varphi(t)=(x-t)^p$, $p>0$, познатото представяне на остатъчния член във формулата на Тейлор

$$R_n=\frac{(x-a)^p(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(\xi),$$

от което, както знаем, при $p=n+1$ се получава представянето на Лагранж, а при $p=1$ се получава представянето на Коши.

Общата формула, която получихме, приема следния особено прост вид при $k=n$:

$$\frac{R_n}{\rho_n}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)}.$$

Оттук заключаваме, че ако

$$|f^{(n+1)}(t)|\leqq|\varphi^{(n+1)}(t)|$$

във всички вътрешни точки на интервала (a, x), то

$$|R_n|\leqq|\rho_n|.$$

При

$$\varphi(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{b-x},\quad b\neq a,$$

имаме

$$\varphi^{(n+1)}(x)=\frac{(n+1)!(b-a)^{n+1}}{(b-x)^{n+2}},\quad \rho_n=\varphi(x)$$

и следователно при $|x-a|<|b-a|$ равенството

$$\frac{R_n}{\rho_n}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)}$$

добива вида

$$R_n=\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n+1}\cdot\frac{(b-\xi)^{n+2}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!\,(b-x)}.$$

§ 10. Тейлоров ред

Нека функцията $f(x)$ е безбройно много пъти диференцуема в някоя околност на точката a. В такъв случай безкрайният ред

$$f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots$$

се нарича Тейлоров ред на функцията $f(x)$. Така написаният ред не винаги е сходящ. И наистина да разгледаме функцията $f(x)=\frac{1}{x}$ и да изберем $a=1$.

От

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{(k)}\frac{k!}{x^{k+1}},\quad k=1, 2, 3,\ldots,$$

намираме

$$f^{(k)}(1)=(-1)^k k!$$

и следователно интересуващият ни ред е

$$1-h+h^2-h^3+\ldots$$

Този ред е разходящ при $|h|\geqq 1$. Има случаи, когато при някои (или при всички) стойности на h Тейлоровият ред на една функция е сходящ. В горния пример Тейлоровият ред е сходящ при $|h|<1$.

Като имаме пред вид формулата на Тейлор

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n,$$

която разгледахме в предния параграф, близко е до ума да направим опит да развием функционалната стойност $f(a+h)$ в Тейлоров ред, като оставим в Тейлоровата формула n да расте неограничено. Разбира се, ако съществува такова развитие, необходимо е преди всичко интересуващият ни ред да бъде сходящ. Това обаче все още не е достатъчно. Макар редът да е сходящ, сумата му (както ще видим покъсно) в общия случай не е задължена да бъде равна на $f(a+h)$. Ако се случи Тейлоровият ред

$$f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots$$

да бъде сходящ при някоя стойност на h и сумата му да е точно $f(a+h)$, казваме, че функцията $f(x)$ е развиваема в Тейлоров ред при $x=a+h$ около точката a (последните думи напомнят за това, че стойностите на последователните производни са пресметнати при $x=a$). Като се възползуваме от дефиницията за понятието сходимост на един безкраен ред, заключаваме, че една функция $f(x)$ е развиваема в Тейлоров ред в една точка $a+h$, когато редицата с общ член

$$S_n=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

е сходяща и клони към $f(a+h)$. Затова пък е необходимо и достатъчно редицата с общ член R_n да бъде сходяща и да клони към нула. И така, за да бъде функцията $f(x)$ развиваема около точката a в Тейлоров ред при $x=a+h$, необходимо и достатъчно е остатъчният член R_n при така избраните стойности на a и h да клони към нула.

Специално при $a=0$ получаваме реда (като поставим $h=x$)

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots,$$

който е познат под името Маклоренов ред. Маклореновият ред, както изобщо всеки Тейлоров ред, е степенен ред.

§ 11. Развиване на тригонометрични функции в степенни редове

Ще си поставим за задача сега да изучим Маклореновото развитие на функциите $\sin x$ и $\cos x$.

Нека $f(x)=\sin x$. В такъв случай

$$f(x)=\sin x,\quad f'(x)=\cos x,\quad f''(x)=-\sin x,\quad f'''(x)=-\cos x,$$
$$f^{IV}(x)=\sin x,\quad f^{V}(x)=\cos x,\ldots$$

Оттук намираме

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,\quad f^{IV}(0)=0,\quad f^{V}(0)=1,\ldots$$

и следователно интересуващото ни Маклореново развитие е

$$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

Ще установим, че този ред е сходящ за всяко x и сумата му е равна на $\sin x$. За тази цел разглеждаме остатъчния член

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\theta x+\frac{n+1}{2}\pi\right).$$