Делимост на полиноми

Дефиниция

Нека $f, g \in F[x]$, F е поле.
Казаме, че полиномът g дели полинома f, когато $f = g.h$, $h \in F[x]$

Записваме $g \big| f$.

Свойства

1. $f \big| f,\ f \big| \alpha f,\ f \big| gf$
2. $g \big| f,\ f \big| g \Longrightarrow g = \alpha f,\ \alpha \in F*$
3. $f \big| g,\ g \big| h \Longrightarrow f \big| h$
4. $f \big| g_1,\ f \big| g_2 \Longrightarrow f \big| (u_1 g_1 + u_2 g_2)$
5. $f \big| 0$
6. $f \big| g$ и $g \neq 0 \Longrightarrow \deg f \leq \deg g$

Скрий доказателствата

Доказателство на 2.

$f|g \Rightarrow g = f.h$
$g|f \Rightarrow f = g.t \Longrightarrow g = (g.t).h = g(t.h) \Longrightarrow g(1 - th) = 0$

$\Longrightarrow 1 = t.h \Rightarrow \deg h = \deg t = 0$
$\Longrightarrow g = \alpha f, \alpha \in F*$

Другите са също толкова лесно (ако не и повече ;))

Най-голям общ делител на полиноми (дефиниция)

Нека F е поле и $f,\ g \in F[x]$, като $f(x) \neq 0$ или $g(x) \neq 0$
Най-големият общ делител на f и g е $d \in F[x]$, такъв, че:

1. $d|f$ и $d|g$
2. ако $d_1|f$ и $d_1|g$, то $d_1|d$

Записваме НОД$(f, g) = (f, g) = d$

Забележка: НОД на два полинома **не** е единствен!

Ако $d = (f, g)$ и $t = (f, g)$, то $d = \alpha t, \alpha \in F*$

Теорема (на Безу за полиноми)

Нека F е поле и $f,\ g \in F[x]$, като $f \neq 0$ или $g \neq 0$

$\Longrightarrow \exists\ d = (f, g)$ и $\exists u, v \in F[x]$, такива че $d = uf + vg$

Доказателство:
Вземаме си идеала

$$I = \{uf + vg | u,\ v \in F[x]\} = (f) + (g) \blacktriangleleft F[x] \tag{1}$$

$I \neq \{0\}$

Нека $d = u_1 f + v_1 g$ и $I = (d)$ (I е главен)

Ще докажем, че $d = (f, g)$

$f = f.1 + g.0 \in I \Longrightarrow d|f$
$g = f.0 + g.1 \in I \Longrightarrow d|g$
Ако $t|f$ и $t|g \Longrightarrow t|(u_1 f + v_1 g) \Longrightarrow t|d$

$\Longrightarrow d = (f, g)$

Алгоритъм на Евклид за намиране на НОД(f, g):

Дадено: $f,\ g \in F[x],\ g \neq 0$

Резултат: $d \in F[x],\ d = (f, g)$

Процедура:

От теоремата за деление с частно и остатък на полиноми:

$f = q_1 g + r_1,\ \deg r_1 < \deg g$

НОД(f, g) = НОД (g, r_1)

Скрий 'Защо'-то ;)

//TODO
От горе се вижда, че $r_1 = f - q_1 g$
Нека $d_1 = (f, g)$ и $d_2 = (g, r_1)$
Тогава $d_1|f \& d_1|g \Longrightarrow d_1|u_1 f + u_2 g \Longrightarrow d_1|1.f - q_1.g \Longrightarrow d_1|r_1$
Тъй като $d_1|g \& d_1|r_1 \Longrightarrow d_1|d_2$

Аналогично $d_2|g \& d_2|r_1 \Longrightarrow d_2|u_1 g + u_2 r_1 \Longrightarrow d_2|q_1.g + 1.r_1 \Longrightarrow d_2|f$
и от $d_2|f \& d_2|g \Longrightarrow d_2|d_1$

Воала! :) $d_1|d_2 \& d_2|d_1 \Longrightarrow g_1 = \alpha g_2$

Ако $r_1 = 0$, то НОД$(f, g) = g$
Иначе, ако $r_1 \neq 0$, то $g = q_2 r_1 + r_2$, като $\deg r_2 < \deg r_1$
НОД(g, r_1) = НОД (r_1, r_2)

Ако $r_2 = 0 \Rightarrow d = r_1$
Иначе: процесът се повтаря.

Ясно е, че имаме краен брой стъпки, т.е. на някоя стъпка ще получим нулев остатък.
Най-големият общ делител ще е последният ненулев остатък.

Взаимно прости полиноми (дефиниция)

Два полинома f и g се наричат взаимно прости, ако НОД$(f, g) = 1$

/* Пораждат взаимно прости идеали */

Твърдения

Нека F е поле и $f, g \in F[x]$, като НОД$(f, g) = 1$

Тогава:

1. $f|h,\ g|h \Longrightarrow fg|h$
2. $f|gt \Longrightarrow f|t$

page revision: 6, last edited: 31 May 2012, 23:41 (401 days ago)