За идеал ще използваме означението $\blacktriangleleft$; на лекции е писано $\lhd$, което някак си напомня за *нормална подгрупа*. Внимавайте на контролните/изпитите ;)

Идеал

Дефиниция (идеал)

Нека K е пръстен и $\varnothing \neq I \subseteq K$.
Ще казваме, че I е ляв (десен) идеал на K и ще записваме $I \blacktriangleleft K$, ако:

1. $a - b \in I$, за всеки $a, b \in I$
2. $ka \in I$, за всяко $a \in I$ и $k \in K$ (за десен идеал е $ak \in I$)

Ако I е едновременно ляв и десен идеал на K ще казваме, че е *двустранен идеал*.

Забележка: На лекции преди дефиницията е направен един пример (първия пример по-долу). Това което си заслужава да се отбележи, е че идеалът е просто подпръстен, при който умножението 'работи' и с външни елементи. Т.е при подпръстен трябва просто умножение на 2 елемента от подпръстена да остава в подпръстена. При идеал се изисква умножение на произволен елемент от пръстена с елемент от идеала да остава в идеала (независимо дали ляво или дясно умножение - съответно ляв/десен идеал).

Пример - ядро на хомоморфизъм между пръстени

Нека $\varphi : K \to M$, където K, M са пръстени, и φ е хомоморфизъм.
Ще покажем, че $\operatorname{Ker}\varphi$ е идеал на K:
Нека $a, b \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогава $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Освен това $\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b) = 0 - 0 = 0$, следователно и $a - b \in \operatorname{Ker}\varphi$.
Нека $a \in \operatorname{Ker}\varphi \& x \in K$. Тогава $\varphi(xa) = \varphi(x).\varphi(a) = \varphi(x).0 = 0$, следователно $xa \in \operatorname{Ker}\varphi$. Същото е вярно и за ax.
Следователно $\operatorname{Ker}\varphi$ е двустранен идеал на K - записваме $\operatorname{Ker}\varphi \blacktriangleleft K$.

Теорема (идеалите във Z)

Нека $\varnothing \neq I \blacktriangleleft \mathbb{Z}$. Тогава съществува $n \in \mathbb{N} : I = n\mathbb{Z}$. (т.е всеки идеал в $\mathbb{Z}$ е от вида $n\mathbb{Z}$).
Доказателство:
Нека $\varnothing \neq I \blacktriangleleft \mathbb{Z}$.
Нека d е *минималният положителен елемент* от I. Ще докажем, че $I = d\mathbb{Z}$.
Нека $a \in I$ е произволен. Да разделим с частно и остатък на d : $a = qd + r$, където разбира се $0 \leq r < d$.
Тъй като $r = a - qd$, и освен това $a \in I$, $qd \in I$ (защото $d \in I \& q \in \mathbb{Z}$). Тогава $r = a - qd \in I$. От избора на d получаваме, че $r = 0$ (иначе би бил положителен, по-малък от d в идеала). Получихме, че d/a, за всяко $a \in I$. Следователно $a \in d\mathbb{Z}$.
Т.е доказахме ,че $I \subseteq d\mathbb{Z}$.
Нека $x \in d\mathbb{Z}$ е произволен. Тогава той се представя като dx'. Но $dx' \in I$, защото $d \in I \& x' \in \mathbb{Z}$. Следователно $x \in I$. Така доказахме и $d\mathbb{Z} \subseteq I$.
Окончателно показахме $I = d\mathbb{Z}$.

Пример за идеал в поле

Да видим какво се случва, когато поискаме да имаме идеал $\varnothing \neq I$ в поле K.
Нека $a \in I$ е произволен. Тъй като $a^{-1} \in K$, то $a.a^{-1} \in I$. Тогава $1 \in I$. И сега вече за произволен елемент $x \in K$ имаме $x = 1.x \in I$ (защото $1 \in I$). Така получихме, че $I = K$ - т.е скучна работа (всеки идеал в поле е самото поле).

Дефиниция (главен идеал)

Нека K е комутативен пръстен с единица.
Тогава множеството $\{ax | x \in K\}$ за произволно a ще наричаме *главен идеал породен от a* и ще го отбелязваме с (a).

// тук все пак мисля трябва да се докаже, че дефиницията е коректна - т.е това наистина е идеал

Теорема

Нека K е комутативен пръстен с единица. Ако K няма идеали различни от $\{0\}$ и K, то K е поле.
Доказателство:
Нека $a \in K$ е произволен, ненулев елемент. Тогава $(a) = K$, защото е различен от $\{0\}$.
От тук $1 \in (a)$. Следователно съществува елемент $x \in K$, такъв че $xa = 1$. Е да ама това значи, че $x = a^{-1}$ - т.е намерихме обратния на произволен ненулев елемент на K. Това, заедно с факта че K е комутативен пръстен с 1 води до K - поле.

Факторпръстен

Дефиниция (факторпръстен)

Нека K е пръстен и нека $I \blacktriangleleft K$.
Дефинираме съседен клас на I по отношение на събирането:

$$a + I = \{a + x | x \in I\} \tag{1}$$

От теорията за съседните класове получаваме, че K може да бъде разбито на непресичащи се съседни класове (може безкраен брой):

$$K = I \cup (a_1 + I) \cup (a_2 + I) \cup \cdots \tag{2}$$

Съответно записваме множеството от съседните класове като $K/I = \{a + I | a \in K\}$ (същото означение като при факторгрупа - факторизираме пръстена K, по I). Та K/I е *факторпръстен*, със операции: $(a+I)+(b+I) = (a+b)+I$ и умножение $(a+I).(b+I) = a.b+I$.

Доказателство: Трябва да докажем, че K/I е пръстен.
1. ***Събиране***
1.1 ***комутативност***: $(a+I)+(b+I) = (a+b)+I = (b+a)+I = (b+I)+(a+I)$
1.2 ***асоциативност***:

$$[(a+I)+(b+I)]+(c+I) = [(a+b)+I]+(c+I) = ((a+b)+c)+I = (a+(b+c))+I = (a+I)+[(b+c)+I] = (a+I)+[(b+I \tag{3}$$

1.3 ***неутрален елемент***: $I = (0+I)$

$$(0+I)+(a+I) = (0+a)+I = a+I = (a+0)+I = (a+I)+(0+I) \tag{4}$$

1.4 ***противоположен елемент***: На $(a+I)$ противоположния му е $((-a)+I)$:

$$(a+I)+((-a)+I) = (a+(-a))+I = 0+I = I \tag{5}$$

2. ***Умножение***:
2.1 ***асоциативност***:

$$[(a+I).(b+I)].(c+I) = [a.b+I].(c+I) = (a.b).c+I = a.(b.c)+I = (a+I).[(b.c)+I] = (a+I).[(b+I).(c+I)] \tag{6}$$

3. ***Дистрибутивни закони***:

$$(a+I).[(b+I)+(c+I)] = (a+I).[(b+c)+I] = a.(b+c)+I = (a.b+a.c)+I = (a.b+I)+(a.c+I) = (a+I).(b+I)+(a+I). \tag{7}$$

$$[(a+I)+(b+I)].(c+I) = [(a+b)+I].(c+I) = (a+b).c+I = (a.c+b.c)+I = (a.c+I)+(b.c+I) = (a+I).(c+I)+(b+I).(\tag{8}$$

Теорема за хомоморфизмите при пръстени

Дефиниция (естествен хомоморфизъм при пръстени)

Нека K е пръстен и $I \blacktriangleleft K$.
Нека $\eta : K \to K/I$ е дефинирана по следния начин: $\eta(a) = a + I$.
Наричаме η *естесвен хомоморфизъм* от K във K/I.

Освен това $\operatorname{Ker}\eta = I$.
Доказателство: Сега разбира се трябва да докажем, че глупостите по-горе са валидни - именно че η е хомоморфизъм.
Нека $a, b \in K$ са произволни. Да разгледаме **сбора**:

$$\eta(a+b) = (a+b)+I = (a+I)+(b+I) = \eta(a)+\eta(b) \tag{9}$$

Сега **произведението**:

$$\eta(a.b) = a.b+I = (a+I).(b+I) = \eta(a).\eta(b) \tag{10}$$

Следователно η е хомоморфизъм.
Сега ядорото му: $x \in \operatorname{Ker}\eta \iff \eta(x) = I$. Това е равносилно на $x+I = I$, т.е $x \in I$. Показахме, че $\operatorname{Ker}\eta = I$.

Теорема (за хомоморфизмите при пръстени)

Нека K, M са пръстени и φ е хомоморфизъм между тях:

$$\varphi : K \to M \tag{11}$$

То $K/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$.
Доказателство:
Само да кажа, че доказателството е 1:1 предното доказателство, просто трябва да се провери и умножението. Освен това в следващата глава има още поне 2 подробни доказателства на изоморфизми, затова ще караме **сбито**.
Нека $\operatorname{Ker}\varphi = I$. От първия пример виждаме, че всъщност I е идеал на K (това е лирическо отклонение, подкрепящо избора на I като буква за $\operatorname{Ker}\varphi$).
Да си дефинираме функция $\psi : K/I \to \operatorname{Im}\varphi$:

$$\psi(a+I) = \varphi(a) \tag{12}$$

коректност на дефиницията и инекция: Сега ще докажем, 2 в 1, че горната дефиниция е коректна (т.е функционалните стойности са еднакви при еднакви аргументи), както и че функцията е инекция (т.е от функционалните стойности съвпадат следва, че и аргументите съвпадат). Както виждате от обясненията, това всъщност е твърдение с тогава и само тогава. Да разпишем $\psi(a+I) = \psi(b+I)$, и да проверим, че е еквивалентно с $a+I = b+I$:

$$\begin{aligned} \psi(a+I) &= \psi(b+I) \iff \\ \varphi(a) &= \varphi(b) \iff \\ \varphi(a)-\varphi(b) &= 0 \iff \\ \varphi(a-b) &= 0 \iff \\ a-b &\in \operatorname{Ker}\varphi = I \iff \\ (a-b)+I &= I \iff \\ (a+I)-(b+I) &= I \iff \\ (a+I) &= (b+I)+(0+I) \iff \\ (a+I) &= (b+I) \end{aligned} \tag{13}$$

Както виждате, показахме че функционалните стойности съвпадат тогава и само тогава когато и аргументите съвпадат.
сюрекция: За всяко $\varphi(a)$, $a \in K$, следователно съществува съседен клас $a+I$, такъв че $\psi(a+I) = \varphi(a)$.
хомоморфизъм: Сега трябва да покажем, че ψ запазва събирането и умножението.

$$\begin{aligned} \psi((a+I)+(b+I)) &= \psi((a+b)+I) \\ &= \varphi(a+b) \\ &= \varphi(a)+\varphi(b) \\ &= \psi(a+I)+\psi(b+I) \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \psi((a+I).(b+I)) &= \psi((a.b)+I) \\ &= \varphi(a.b) \\ &= \varphi(a).\varphi(b) \\ &= \psi(a+I).\psi(b+I) \end{aligned} \tag{15}$$

Е, не сте се съмнявали нали?
С това доказахме, че ψ е изоморфизъм, следователно $K/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$.

page revision: 5, last edited: 21 Jun 2010, 19:39 (1111 days ago)