Орбити. Стабилизатори. Теорема за Класовете

Действие на група върху множество

Сега ще вкараме едно определение - просто ще наричаме стари неща по нов начин :) нищо страшно.

Дефиниция: Нека G е група и $M \neq \varnothing$ е множество.
Нека изображението $\varphi : G \times M \to M$ (за напред ще записваме $\varphi(g, m)$ като просто $g(m)$ или още по-просто gm) изпълнява следните условия:

- $em = m$
- $(g_1 g_2)m = g_1(g_2 m)$

Тогава казваме, че групата G действа на множеството M.

Примери

Пример 1: S_n действа на множеството $\{1, \cdots, n\}$. Т.е всеки елемент S_n е пермутация, т.е може да си мислим, че показва кой елемент на кое място трябва да отиде, и точно това е резултата от действие на една пермутация с конкретно число от 1 до n.
Пример 2: D_n действа на множеството на правилни n-ъгълници. Очевидно всеки връх на правилен n-ъгълник отива в друг връх под действието на произволен елемент от D_n (който всъщност представлява произведение на ротация на ъгъл кратен на $\frac{2\pi}{n}$ и осева симетрия.

Примери с M = G

Най-често се използва действие на множество при $M \equiv G$.
Пример 3: Нека G е група и $M = G$. Тогава дефинираме

$$g(m) = gm \tag{1}$$

Т.е действието се изразява в умножение на 2 елемента от една група - възможно най-елементарната операция.
Сега да проверим, че са изпълнени условията от дефиницията:

- $e(m) = em = m$
- $(g_1 g_2)(m) = (g_1 g_2)m = g_1(g_2 m) = g_1(g_2(m))$

Изпълнени са! Следователно може да разглеждаме умножението на 2 елемента на група като действие на групата над множеството образувано от самата група.

Пример 4: Нека G е група и $M = G$. Дефинираме

$$g(m) = g[m] = gmg^{-1} \tag{2}$$

(в този случай ще записваме $g[m]$ за да не се бъркаме с умножението).
Сега да докажем, че спрягането отговаря на условията от дефиницията за действие на група върху множество:

- $e[m] = eme^{-1} = eme = m$
- $g_1 g_2[m] = (g_1 g_2)m(g_1 g_2)^{-1} = g_1(g_2 m g_2^{-1})g_1^{-1} = g_1[g_2[m]]$

Изпълнени са! Следователно може да разглеждаме спрягането на елемент като действие на група над множество образувано от самата група.

Теорема на Кейли

Сега ще образуваме една функция, ще докажем че е хомоморфизъм, една малка помощна теоремка и накрая теоремата на Кейли. Всичко по реда си обаче :)

Теорема: Нека G е група и M е множество. Тогава G действа върху M т.с.т.к.

съществува хомоморфизъм $\Phi : G \to S_n$.
$|\Rightarrow|$
Нека G е група и $M \neq \varnothing$ е множество. Тогава може да разглеждаме действието на конкретен елемент от групата върху множеството като функция (то винаги си е било функция, но все пак :)).

$$\varphi_g : M \to M \quad \forall g \in G \tag{3}$$

Ще докажем, че φ_g е биекция.

- **сюрекция**: Нека $m \in M$ е произволен елемент и нека g^{-1} е противоположния елемент на g. Тогава $\varphi_g(g^{-1}(m)) = g(g^{-1}(m)) = (gg^{-1})(m) = em = m$, т.е получихме че съществува елемент $m' = g^{-1}(m)$, за който $\varphi_g(m') = m$. Направихме разсъждението за произволно m, следователно е вярно за всяко! Т.е всеки елемент от M си има първообраз, т.е φ_g е сюрекция.
- **инекция**: Нека $\varphi_g(m_1) = \varphi_g(m_2) \in M$. Да подложим и 2$^{\text{те}}$ страни на равенството под действието на $g^{-1} \in G$:
$g^{-1}(\varphi_g(m_1)) = g^{-1}(\varphi_g(m_2)) \Rightarrow (g^{-1}g)m_1 = (g^{-1}g)m_2$, т.е $m_1 = m_2$.
Следователно φ_g е инекция.

Сега, след като получихме $\varphi_g : M \to M$ биекция спокойно може да заключим, че $\varphi_g \in S_n$ (множеството от всички биекции над едно множество). На всеки елемент от G съпоставихме елемент на S_n. Да си кръстим това изображение Φ:

$$\Phi : G \to S_n \quad \Phi(g) = \varphi_g \tag{4}$$

Да докажем, че Φ е хомоморфизъм. Нека $m \in M$ е произволно. Тогава:

$$\begin{aligned}
\Phi(g_1 g_2)(m) &= \varphi_{g_1 g_2}(m) \\
&= (g_1 g_2)(m) \\
&= g_1(g_2(m)) \\
&= \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(m)) \\
&= \Phi(g_1)(\Phi(g_2)(m)) \\
&= \Phi(g_1)\Phi(g_2)(m)
\end{aligned} \tag{5}$$

Следователно Φ е хомоморфизъм (запазва операцията).
$|\Leftarrow|$
Нека $\Phi : G \to S_n$ е хомоморфизъм. Дефинираме $g(m) = \Phi(g)(m)$. Сега ще докажем, че дефиницията удовлетворява условията от дефиницията за действие на група над множество:

- $e(m) = \Phi(e)(m) = id(m) = m$ - заради хомоморфизма $\Phi(e)$ е идентитета

(единичния елемент на S_n);
- $(g_1 g_2)(m) = \Phi(g_1 g_2)(m) = \Phi(g_1)\Phi(g_2)(m) = g_1(g_2(m))$

Следователно G действа върху M!

Теорема*(на Кейли)*:
Нека G е група, $|G| = n$. Тогава G е изоморфна на подгрупа на S_n:

$$G \cong H < S_n \tag{6}$$

Доказателство: Нека $M = G$. Разглеждаме G действа върху $M = G$, при $g(m) = gm$ (т.е произведение - от 3ти пример). От предишната теорема получаваме, че съществува хомоморфизъм $\Phi : G \to S_n$.
Нека $H = \operatorname{Im}\Phi \subseteq S_n$. Ще докажем, че $G \cong H$, което е еквивалентно, да докажем че $\Phi : G \to H$ е биекция и хомоморфизъм. За 2рото знаем от теоремата, сега ще докажем биекция:

- **инекция**: Нека $\Phi(g_1) = \Phi(g_2)$. Това означава, че за всяко $m \in M = G$ е изпълнено $\Phi(g_1)(m) = \Phi(g_2)(m)$. Избираме $m = e$ (единичния елемент). Тогава $\Phi(g_1)(e) = g_1 e = g_1$. Аналогично получаваме, и $\Phi(g_2)(e) = g_2 e = g_2$, т.е получихме, че $g_1 = g_2$. Следователно Φ е инективна.
- **сюрекция**: Очевидно - нали $H = \operatorname{Im}\Phi$ - т.е множеството е 'ограничено' само до тези, които имат първообраз.

Доказахме, че $G \cong H \subseteq S_n$. Т.е получихме, че H е подмножество на S_n, което поради изоморфизма с G се оказа група. Но подмножество на група, което е група е подгрупа! Следователно $G \cong H < S_n$.

Орбити. Стабилизатори.

Орбити

Дефиниция: Нека G действа на множеството M. Тогава

$$O(m) = \{g(m) | g \in G\} \tag{7}$$

наричаме орбита на елемента m.

Свойства

Свойство 1: Нека $x \in O(m)$. Тогава $O(x) = O(m)$.
Доказателство: Нека $x \in O(m)$. От дефиницията на орбита съществува $g \in G$, такова че $x = g(m)$. Да разгледаме произволен елемент $y \in O(x)$.
$y = t(x) = t(g(m)) = (tg)(m)$, следователно $y \in O(m)$. Доказахме, че $O(x) \subseteq O(m)$.
Сега да разгледаме пак $x = g(m)$. От 2те страни прилагаме действието на

елемента g^{-1} и получаваме $g^{-1}(x) = m$. Това е еквивалентно на $m \in O(x)$ и сега аналогично получаваме, че $O(m) \subseteq O(x)$, т.е окончателно $O(x) = O(m)$.

Свойство 2: Нека $m_1, m_2 \in M$ са произволни елементи. Тогава

$$O(m_1) \cap O(m_2) = \begin{cases} \varnothing \\ O(m_1) = O(m_2) \end{cases} \tag{8}$$

Доказателство: Доказва се тривиално с използване на предното свойство.

Твърдение: M се разбива на непресичащи се орбити под действието на G:

$$M = O(x_1) \cup O(x_2) \cup \cdots \cup O(x_k) \tag{9}$$

Доказателство: Очевидно от последното свойство - вземаме всички орбити, образувани от всички елементи - те или съвпадат една с друга или са непресичащи се - изваждаме си по един представител и сме готови :)

Стабилизатори

Дефиниция: Нека G е група и действа върху множеството M. Дефинираме

$$\mathrm{St}(m) = \{g | g \in G \& gm = m\} \tag{10}$$

Т.е за всеки елемент на множеството M стабилизатора са тези елементи от групата, който не го променят при действието си.

Твърдение: $\mathrm{St}(m) < G$
Доказателство: Нека $g_1, g_2 \in G$

$$\left.\begin{matrix} g_1 m & = & m \\ g_2 m & = & m \end{matrix}\right\} (g_1 g_2) m = g_1(g_2(m)) = g_1 m = m \tag{11}$$

Т.е доказахме, че произведение на 2 елемента от стабилизатора пак е в стабилизатора. Остана противоположния елемент:

$$\begin{aligned} g(m) &= m \\ g^{-1}(g(m)) &= g^{-1}(m) \\ (g^{-1}g)(m) &= g^{-1}(m) \\ em &= g^{-1}(m) \\ m &= g^{-1}(m) \end{aligned} \tag{12}$$

следователно g^{-1} също е от стабилизатора. Следователно $\mathrm{St}(m)$ е група.

Твърдение:
Нека $m \in M$ и групата G действа върху елемента m. Тогава:

$$|G : \mathrm{St}(m)| = |O(m)| \tag{13}$$

Доказателство:
Нека $S = \{g\mathrm{St}(m) | g \in G\}$ - т.е множеството от левите съседни класове на $\mathrm{St}(m)$, както знаем те са точно $|G : \mathrm{St}(m)|$ на брой. Да дефинираме функцията χ по следния начин:

$$\chi : S \to O(m) \quad \chi(g\mathrm{St}(m)) = gm \tag{14}$$

Ще докажем, че χ е биекция:

- **инекция**: Нека $\chi(g\mathrm{St}(m)) = gm = tm = \chi(t\mathrm{St}(m))$.

$$\begin{aligned} gm &= tm \\ t^{-1}gm &= m \\ t^{-1}g &\in \mathrm{St}(m) \\ g\mathrm{St}(m) &= t\mathrm{St}(m) \end{aligned} \tag{15}$$

т.е доказахме, че ако образите съвпадат, и първообразите съвпадат.

- **сюрекция**: Нека $x \in O(m)$. Тогава $x = gm$, за някое $g \in G$. Тогава $\chi(g\mathrm{St}(m)) = gm$ по дефиницията на χ.

Следователно функцията е биективна - т.е броя елементи в 2те множества S и $O(m)$ съвпадат, следователно $|S| = |O(m)|$, т.е $|G : \mathrm{St}(m)| = |O(m)|$.

Забележка: Ако разглеждаме операцията върху множеството като спрягане на елементи, тогава орбитите се наричат *класове спрегнати елементи*, а стабилизаторите се наричат *централизатори*.

Теорема за Класовете

Теорема*(за класовете / формула за класовете)*:
Нека G действа върху M и $|M| < \infty$. Тогава M може да бъде разбито на непресичащи се орбити:

$$M = O(x_1) \cup O(x_2) \cup \cdots O(x_k) \quad O(x_i) \cap O(x_j) = \varnothing \, \&i \neq j \tag{16}$$

Освен това броя на елементите може да бъде представен по 2 начина:

$$
\begin{aligned}
|M| &= |O(x_1)| + |O(x_2)| + \cdots + |O(x_k)| \\
|M| &= |G : \mathrm{St}(x_1)| + |G : \mathrm{St}(x_2)| + \cdots + |G : \mathrm{St}(x_k)|
\end{aligned} \tag{17}
$$

Тук, разбира се, x_i са елементи на M - по един представител за всяка орбита / съседен клас.

page revision: 7, last edited: 15 Jun 2011, 15:22 (752 days ago)