Хомоморфизъм

Дефиниция:
Нека $(G_1, \circ)$ и $(G_2, *)$ са групи.

- Тогава казваме, че $\varphi : G_1 \to G_2$ е *хомоморфизъм*, ако $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$.
- $\operatorname{Ker} \varphi = \{x \in G_1 | \varphi(x) = e_2\} \subseteq G_1$ - *ядро на хомоморфизма*
- $\operatorname{Im} \varphi = \{\varphi(x) | x \in G_1\} \subseteq G_2$ - *образ на хомоморфизма*.

Свойства

Свойство 1

$\varphi(e_1) = e_2$ - т.е единичният елемент отива в единичния елемент.

скрий

$$\begin{aligned} \varphi(e_1 g) &= \varphi(g e_1) &= \varphi(g) \\ \varphi(e_1)\varphi(g) &= \varphi(g)\varphi(e_1) &= \varphi(g) \end{aligned} \tag{1}$$

Следователно $\varphi(e_1)$ е единичен елемент за **образа** - за да е единичен за G_2, трябва да знаем, че единичният елемент в $\operatorname{Im}\varphi$ съвпада с единичния елемент в G_2. Което пък следва от факта, че $\operatorname{Im}\varphi \leq G_2$, а единичният елемент в (под)група е винаги точно един и същи.

Свойство 2

$\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ - т.е противоположен елемент при хомоморфизъм отива при съответния му противоположен.

скрий

$$\begin{array}{rcccl} \varphi(gg^{-1}) & = & \varphi(g^{-1}g) & = & \varphi(e_1) \\ \varphi(g)\varphi(g^{-1}) & = & \varphi(g^{-1})\varphi(g) & = & e_2 \end{array} \tag{2}$$

Следователно $\varphi(g^{-1})$ е противоположен елемент на $\varphi(g)$, т.е $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$.

Свойство 3

Нека $\varphi : G_1 \to G_2$ е хомоморфизъм. Тогава

$$\begin{array}{c} \operatorname{Ker}\varphi < G_1 \\ \operatorname{Im}\varphi < G_2 \end{array} \tag{3}$$

скрий

$(\operatorname{Ker}\varphi < G_1)$
Нека $a, b \in \operatorname{Ker}\varphi$ са произволни елементи. Тогава

$$\left.\begin{cases} \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = e.e = e & \Rightarrow & ab & \in & \operatorname{Ker}\varphi \\ \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} = e^{-1} = e & \Rightarrow & a^{-1} & \in & \operatorname{Ker}\varphi \end{cases}\right\} \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi < G_1 \tag{4}$$

$(\operatorname{Im}\varphi < G_2)$
Нека $a, b \in \operatorname{Im}\varphi$. Тогава съществуват $a', b' \in G_1 : \varphi(a') = a \& \varphi(b') = b$. Тогава:

$$\left.\begin{cases} ab = \varphi(a')\varphi(b') = \varphi(a'b') & \Rightarrow & ab & \in & \operatorname{Im}\varphi \\ a^{-1} = \varphi(a')^{-1} = \varphi(a'^{-1}) & \Rightarrow & a^{-1} & \in & \operatorname{Im}\varphi \end{cases}\right\} \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi < G_2 \tag{5}$$

Свойство 4

Нека $x, y \in G$. Тогава следните 5 твърдения са еквивалентни:

1. $\varphi(x) = \varphi(y)$
2. $xy^{-1} \in \operatorname{Ker} \varphi$
3. $x^{-1}y \in \operatorname{Ker} \varphi$
4. $Hx = Hy \quad H = \operatorname{Ker} \varphi$
5. $xH = yH \quad H = \operatorname{Ker} \varphi$

скрий

$|1 \Rightarrow 2|$Ще използваме, че $e = \varphi(x)\varphi(x)^{-1}$:

$$\begin{aligned} e &= \varphi(x)\varphi(x)^{-1} \\ &= \varphi(x)\varphi(y)^{-1} \\ &= \varphi(x)\varphi(y^{-1}) \\ &= \varphi(xy^{-1}) \end{aligned} \tag{6}$$

Следователно $xy^{-1} \in \operatorname{Ker} \varphi$.
$|2 \Rightarrow 1|$ Нека $xy^{-1} \in \operatorname{Ker} \varphi$.

$$\varphi(xy^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)^{-1} = e \Rightarrow \varphi(y)^{-1} = \varphi(x)^{-1} \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y) \tag{7}$$

$|1 \iff 3|$ - аналогично на $|1 \iff 2|$
$|2 \iff 4|$ - $xy^{-1} \in H = \operatorname{Ker} \varphi \iff Hx = Hy$ (от свойство 2'' от предната лекция).
$|3 \iff 5|$ - $x^{-1}y \in H = \operatorname{Ker} \varphi \iff xH = yH$ (от свойство 2' от предната лекция).

Нормални подгрупи

Дефиниция:
Нека G е група и $H < G$. Тогава H е *нормална подгрупа* на G, ако

1. $\forall x \in G \Rightarrow xH = Hx$ - т.е левия съседен клас и десния съседен клас, генерирани от един и същ елемент съвпадат.
2. $\{gH | g \in G\} = \{Hg | g \in G\}$ - т.е лявото разбиване на съседни класове на G посредством H съвпада с дясното разбиване на съседни класове на G посредством H (обърнете внимание, че горното твърдение изглежда по-силно, но след малко ще докажем еквивалентност).
3. $xhx^{-1} \in H \quad \forall h \in H, \forall x \in G$ - т.е спрегнатите елементи на елементите от H са също от H.

Т.е горните 3 твърдения са еквивалентни помежду си и са алтернативни дефиниции на *нормална подгрупа*.

скрий

$|1 \Rightarrow 2|$ - очевидно!
$|1 \Leftarrow 2|$

Очевидно $x \in xH \& x \in Hx$. Понеже $\{Hg|g \in G\} = \{gH|g \in G\}$ $xH = Hx'$ за някое $x' \in G$. Но x участва в точно една дясна съседна група - именно Hx. Следователно $Hx = Hx' = xH$.

$|1 \Rightarrow 3|$

Нека $x \in G$ и $h \in H$ са произволни. Тогава $xh \in xH = Hx$. Следователно $xh \in Hx$. Но тогава съществува $h_2 \in H$, такова че $xh = h_2x$. От тук $xhx^{-1} = h_2 \in H$, т.е доказахме, че $xhx^{-1} \in H$ за произволни $x \in G$ и $h \in H$.

$|1 \Leftarrow 3|$ Нека $xhx^{-1} \in H$ за произволни $x \in G$ и $h \in H$. Тогава съществува $h_2 \in H$, за което $xhx^{-1} = h_2$, следователно $xh = h_2x$. Т.е доказахме, че произволен елемент $xh \in xH$ принадлежи на Hx, т.е $xH \subseteq Hx$. Аналогично се доказва, че $Hx \subseteq xH$, следователно $Hx = xH$ за произволно $x \in G$.

Примери

1. $\{e\} \lhd G$ - групата на единичния елемент е нормална подгрупа за всяка група
2. $G \lhd G$ - всяка група е нормална подгрупа на себе си
3. Ако G е комутативна (абелева) и $H < G$, тогава $H \lhd G$ - т.е всяка подгрупа е нормална подгрупа при комутативните групи (доказва се лесно с 3тата дефиниция)
4. Нека $\varphi : G_1 \to G_2$ е хомоморфизъм. Тогава $\operatorname{Ker} \varphi \lhd G_1$.

скрий

Нека $h \in \operatorname{Ker} \varphi$ и $x \in G_1$ са произволни. Тогава:

$$\begin{aligned}\varphi(xhx^{-1}) &= \varphi(x)\varphi(h)\varphi(x^{-1}) \\ &= \varphi(x)e\varphi(x)^{-1} \\ &= \varphi(x)\varphi(x)^{-1} \\ &= e\end{aligned} \tag{8}$$

Следователно $xhx^{-1} \in \mathrm{Ker}\varphi$ за всяко $h \in \mathrm{Ker}\varphi$ и $x \in G_1$, т.е $\mathrm{Ker}\varphi \lhd G_1$

5. Нека $H < G$ и $|G : H| = 2$. Следователно $H \lhd G$.

скрий

Очевидно имаме два леви съседни класа : H, xH. Понеже $H \cup xH = G \Rightarrow xH = G \setminus H$. Т.е левите съседни класове са $H, G \setminus H$. Аналогично се доказва, че и десните съседни класове са $H, G \setminus H$, от където по 2рата дефиниция получаваме, че $H \lhd G$.

5.1 A_n е алтернативната група от ред n (т.е всички четни пермутации с n елемента). Тъй като $|S_n : A_n| = 2$ получаваме, че $A_n \lhd S_n$.

Забележка: Има групи G, които нямат други нормални подгрупи освен *тривиалните* $\{e\}, G$. Такива групи се наричат ***прости***.

Факторгрупи

Дефиниция: Нека $H \lhd G$. Тогава множеството $G/H = \{gH | g \in G\}$ с операцията умножение $xHyH = (xy)H$ е група - нарича се ***факторгрупа***.

Да разгледаме един хомоморфизъм между две групи G_1, G_2 и по-специално неговото ядро:

$$\varphi : G_1 \to G_2 \quad H = \mathrm{Ker}\, \varphi \lhd G_1 \tag{9}$$

Да разгледаме множеството

$$G/H = \{gH | g \in G\} \tag{10}$$

т.е всички леви съседни класове спрямо ядрото.
Ще докажем, че G/H е група, с операция умножение дефинирана по следния начин:

$$(g_1 H)(g_2 H) = (g_1 g_2) H \tag{11}$$

`0`. Първо ще докажем, че операцията е коректно дефинирана, именно че:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} g_1 H & = & gH \\ t_1 H & = & tH \end{array} \right\} \Rightarrow (g_1 t_1) H = (gt) H \tag{12}$$

Ще използваме 2ро свойство от предната глава:

$$\begin{aligned} (g_1 t_1) H = (gt) H &\iff (gt)^{-1} g_1 t_1 \in H \\ g_1 H = gH &\iff h' = g^{-1} g_1 \in H \\ t_1 H = tH &\iff h'' = t^{-1} t_1 \in H \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} (gt)^{-1} g_1 t_1 &= t^{-1} \underbrace{g^{-1} g_1}_{h'} t_1 \\ &= t^{-1} h' t_1 \\ &= t^{-1} h' \underbrace{t t^{-1}}_{e} t_1 \\ &= \underbrace{t^{-1} h' t}_{\in H \lhd G} \underbrace{t^{-1} t_1}_{h'' \in H} \in H \end{aligned} \tag{14}$$

С това доказахме, че операцията е коректно дефинирана.
1. Да докажем, че е асоциативна

$$\begin{aligned}(aHbH)cH &= (ab)HcH \\ &= (ab)cH \\ &= a(bc)H \\ &= aH(bc)H \\ &= aH(bHcH)\end{aligned} \tag{15}$$

т.е използвахме 'в дъното' асоциативността на елементите на групата G
2. Неутрален елемент - разбира се, това е $eH = H$:

$$eHxH = (ex)H = xH = (xe)H = xHeH \tag{16}$$

т.е сега използвахме неутралния елемент на групата
3. Противоположен елемент - за $(xH)^{-1}$ избираме $x^{-1}H$:

$$(xH)(x^{-1}H) = (xx^{-1})H = eH = H \tag{17}$$

Пример

Нека $n \in \mathbb{N} \& n > 1$. Тогава $H = \langle n \rangle = n\mathbb{Z}$ очевидно е нормална подгрупа, т.е $H \lhd \mathbb{Z}$.
Да разгледаме

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n = \{a + n\mathbb{Z} | a \in \mathbb{Z}\} \tag{18}$$

Това всъщност са класовете остатъци по модул n. До сега я записвахме по друг начин, но това е без голямо значение - както виждате може да се дефинира като факторгрупа.

Добре е да се забележи, че:

$$|G/H| = |G : H| = \frac{|G|}{|H|} \tag{19}$$

Теорема за хомоморфизмите

Твърдение: Нека $H \lhd G$. Тогава изображението

$$\eta : G \to G/H \quad \eta(g) = gH \tag{20}$$

е хомоморфизъм, при това $\operatorname{Ker}\eta = H$.

скрий

Да разгледаме на колко е равно $\eta(x)\eta(y)$:

$$\eta(g_1 g_2) = (g_1 g_2)H = g_1 H g_2 H = \eta(g_1)\eta(g_2) \tag{21}$$

Следователно η е хомоморфизъм. Сега да проверим ядрото на η:

$$\operatorname{Ker}\eta = \{g \in G | \eta(g) = eH\} \tag{22}$$

но по 1во свойство за съседните класове имаме, че
$\eta(g) = H \iff gH = H \iff g \in H$, т.е доказахме, че всъщност $\operatorname{Ker}\eta = H$.

Теорема *(за хомоморфизмите)*:

Нека $\varphi : G_1 \to G_2$ е хомоморфизъм.
Тогава ако $H = \operatorname{Ker}\varphi \lhd G_1$, то $G_1/H \cong \operatorname{Im}\ \varphi$

скрий

Нека $\tau : G_1/H \to \operatorname{Im} G_1$ е дефинирана по следния начин:

$$\tau(aH) = \varphi(a) \tag{23}$$

Ще докажем, че дефиницията е коректна:
Нека $aH = bH$. Тогава според 2ро свойство $a^{-1}b \in H$. Тогава

$$\begin{aligned} e &= \varphi(a^{-1}b) \\ &= \varphi(a)^{-1}\varphi(b) \end{aligned} \tag{24}$$

От където получаваме, че $\varphi(a) = \varphi(b)$ $(\star)$.
Сега очевидно и $\tau(aH) = \varphi(a) = \varphi(b) = \tau(bH)$, т.е дефиницията е коректна.

Ще докажем, че τ е изоморфизъм.
1. Хомоморфизъм

$$\begin{aligned} \tau(aHbH) &= \tau((ab)H) \\ &= \varphi(ab) \\ &= \varphi(a)\varphi(b) \\ &= \tau(aH)\tau(bH) \end{aligned} \tag{25}$$

2. Биекция

2.1 Инекция

$$aH \neq bH \overset{\text{\Star}}{\iff} \varphi(a) \neq \varphi(b) \iff \tau(aH) \neq \tau(bH) \qquad \text{?} \tag{26}$$

2.2 Сюрекция

Нека $x \in \operatorname{Im}\varphi$. Следователно съществува $x' \in G_1 : \varphi(x') = x$.
Но тогава $\tau(x'H) = \varphi(x') = x$ (всичко това е в 2те посоки). Следователно $\operatorname{Im}\tau = \operatorname{Im}\varphi$.
Т.е окончателно получихме, че τ е изоморфизъм, следователно $G_1/H \cong \operatorname{Im}\varphi$.

page revision: 19, last edited: 1 Jul 2011, 17:18 (736 days ago)