Глава 4

Частни производни

§ 1. Частно диференциране

Производната на функцията $x \mapsto f(x, y_0)$ при $x = x_0$ означаваме $f'_x(x_0, y_0)$, а производната на функцията $y \mapsto f(x_0, y)$ при $y = y_0$: $f'_y(x_0, y_0)$. По-нататък: $(f'_x)'_x = f''_{xx}$, $(f'_x)'_y = f''_{xy}$, $(f'_y)'_x = f''_{yx}$, $(f'_y)'_y = f''_{yy}$. При функции на m променливи $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ имаме m частни производни от първи ред: $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_m}$. За f'_x се употребяват още означенията: f_x, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $D_x f$, $f'_1, D_1 f, \partial_1 f$; аналогично за f'_y; примерно за f''_{xy}: f_{xy}, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $D_{xy} f$, f''_{12}, $D_{12} f$, $\partial_{12} f$ и т. н. Всяка от тези производни може и да не съществува.

1.1. Пресметнете частните производни от първи и втори ред на функцията $x^y (x > 0)$.

Решение. Когато търсим f'_x, считаме y за константа. Щом $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, то $(x^y)'_x = yx^{y-1}$. Когато търсим f'_y, считаме x за константа. Щом $(a^y)' = a^y.\ln a$, то $(x^y)'_y = x^y \ln x$. Вторите производни намерете самостоятелно.

1.2. Пресметнете частните производни от първи ред на функциите:

а) $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $\quad x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$(a \neq 0, b^2 - 4ac > 0)$;

б) $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$, a, b, c са страни на триъгълник с ъгъл α срещу a;

в) $f(a_{11}, \ldots, a_{nn}) = \det(a_{ij})$.

Решение. в) $f = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$, където A_{ij} са адюнгираните

количества на a_{ij}. Но A_{ik} не зависят от a_{ij} $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Следователно $\dfrac{\partial f}{\partial a_{ij}} = A_{ij}$.

1.3. Ако V е обемът, p — налягането, T — абсолютната температура на 1 мол идеален газ, R — числото на Рейнолдс, то от закона на Клапейрон $pV = RT$ изведете: $\dfrac{\partial p}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial p} = -1$.

1.4. Ако R е съпротивление, I — сила на тока, U — напрежение, P — мощност, то $P = \dfrac{U^2}{R} = I^2 R$. От първото представяне на P получете $\dfrac{\partial P}{\partial R} = -\dfrac{P}{R}$, а от второто: $\dfrac{\partial P}{\partial R} = \dfrac{P}{R}$.

1.5. а) $f(x, y) = \varphi(y) + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x} (x \neq 0)$. Намерете f''_{xy}. Съществува ли f''_{yx}?

б) $f(x, y) = x + (y - 1)\varphi(x, y)$. Намерете $f'_x(x, 1)$.

Решение. б) Тъй като $f(x, 1) = x$, то $f'_x(x, 1) = 1$.

1.6. $f(x, y) = 1$, ако $xy \neq 0$; $f(x, y) = 0$, ако $xy = 0$. В кои точки f е непрекъсната, в кои съществува f'_x, в кои — f'_y?

1.7. Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана в множество D, симетрично относно правата $y = x$, и притежава частните производни f'_1, f''_{11} и f''_{12}:

а) Ако $f(x, y) = f(y, x)$ в D, докажете, че съществуват още: $f'_2(x, y) = f'_1(y, x)$, $f''_{22}(x, y) = f''_{11}(y, x)$, $f''_{21}(x, y) = f''_{12}(y, x)$;

б) Направете изводи, ако $f(x, y) = -f(y, x)$ в D.

1.8. Нека $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ при $(x, y) \neq (0, 0)$ и $f(0, 0) = 0$. Намерете f'_x и f'_y и се убедете, че f, която не е непрекъсната в точката $(0, 0)$, е диференцуема частно спрямо x и спрямо y във всяка точка на координатната равнина $\mathbb{R}^2$. Намерете и вторите частни производни на f.

Решение. Несъмнено при $(x, y) \neq (0, 0)$ първите и вторите производни на f съществуват, например

$$f'(x) = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(Напишете f'_y направо, като използвате зад. 1.7.) Тъй като $f(x,0) = 0$ (и за $x \neq 0$, и за $x = 0$), то $f'_x(0,0) = 0$. Тъй като $f(0,y) = 0$, то $f'_y(0,0) = 0$. Функцията f не е непрекъсната в точката $(0,0)$, защото $f(x,x) = \frac{1}{2} \not\to f(0,0) = 0$ при $x \to 0$. От $f'_x(x,0) = 0$ (и за $x \neq 0$, и за $x = 0$) получаваме $f''_{xx}(0,0) = 0$. Аналогично $f''_{yy}(0,0) = 0$. От $f'_x(0,y) = \frac{1}{y}$ (при $y \neq 0$) получаваме, че

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y^2}$$

не съществува. И $f''_{yx}(0,0)$ не съществува. Остава да се пресметнат f''_{xx} и f''_{xy} при $(x,y) \neq (0,0)$, а f''_{yy} и f''_{yx} да се получат по симетрия. Резултатите за $f'_y(0,0)$, $f''_{yy}(0,0)$ и дори за $f''_{yx}(0,0)$ също можем да получим както в зад. 1.7.

1.9. Намерете частните производни от произволен ред на функцията $u = x_1 x_2 \dots x_m$.

Р е ш е н и е. $\delta = \dfrac{\partial^{\alpha+\beta+\dots+\varepsilon} u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots \partial x_\varepsilon} = \prod\limits_{i\neq\alpha,\beta,\dots,\varepsilon} x_i$, ако $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$ са различни, в противен случай $\delta = 0$.

1.10. Докажете, че функцията:

а) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$; б) $z = \ln\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)$;

в) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{x-y}$; г) $u = \dfrac{x-y}{x-t} + \dfrac{t-x}{y-z}$;

д) $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$;

е) $u = e^{\lambda x + \lambda^2 a^2 t}$ или $u = e^{-\lambda^2 a^2 t}.(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)$;

ж) $\dfrac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^m} e^{-\frac{x_1^2+\dots+x_m^2}{4a^2 t}}$;

з) $u = \ln r$ при $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$;

и) $u = \dfrac{1}{r^{m-2}}$ при $r = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2}$ $(m \geqq 2)$;

й) $u = 4\operatorname{arctg} e^{ax+bt+c}$;

к) $u = -2a^2.\mathrm{sech}^2(ax - 4a^3 t)$ ($\mathrm{sech} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}}$, хиперболичен секанс);

л) $u = 2b\dfrac{e^{i(c-2ax-4(a^2-b^2)t)}}{\mathrm{ch}(2bx + 8abt + d)}$,

удовлетворява в естествената си дефиниционна област съответно уравнението:

а) $l\dfrac{\partial T}{\partial l} + g\dfrac{\partial T}{\partial g} = 0$; б) $z''_{xx} + z''_{xy} = \dfrac{1}{x^2}$; в) $z'_x + z'_y = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$;

г) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$; д) $(x+y+z)(u'_x + u'_y + u'_z) = 3$;

е) едномерното уравнение на топлопроводността: $u'_t = a^2 u''_{xx}$;

ж) уравнението на топлопроводността

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2.\Delta u, \qquad \Delta u = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

(о п е р а т о р н а Л а п л а с);

з) уравнението на Лаплас $\Delta u = 0$ (тук $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$), а също и уравнението $(x-a)u'_x + (y-b)u'_y = 1$;

и) уравнението на Лаплас $\Delta u = 0$, а също и уравненията

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - a_i)\frac{\partial u}{\partial x_i} = (2-m)u, \quad \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{(m-2)^2}{r^{2m-2}};$$

й) синус-уравнението на Гордън: $u''_{xx} - u''_{tt} = (a^2 - b^2)\sin u$;

к) уравнението на Кортевег — де Фриз: $u'_t - 6uu'_x + u'''_{xxx} = 0$;

л) кубичното уравнение на Шрьодингер: $iu'_t + u''_{xx} + 2u.|u|^2 = 0$.

(За функцията e^{ix} и производната ѝ вж. зад. 1.18, I ч., гл. 3; $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$, оттук $|e^{ix}| = 1$.)

1.11. Ако $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, пресметнете

$$\begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix}.$$

Съставете и пресметнете аналогична детерминанта от трети ред, ако $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$.

1.12. Нека $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = -F(y,x), \quad F(x,y) + F(y,z) = F(x,z)$$

и за всяко x съществува $\lim\limits_{y\to x} \dfrac{F(x,y)}{y-x} = f(x)$. Докажете, че F притежава първите си частни производни и ги пресметнете.

Решение. $\dfrac{F(x+h,y) - F(x,y)}{h} = \dfrac{F(x+h,y)+F(y,x)}{h}$ $= \dfrac{F(x+h,x)}{h} = -\dfrac{F(x,x+h)}{h} \to -f(x)$ при $h \to 0$. Следователно

$$F_1'(x,y) = -f(x); \quad F_2'(x,y) = -F_1'(y,x) = f(y).$$

1.13. Нека $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ притежава всичките си производни от първи и втори ред и за всеки правоъгълник $ABCD$: $F(A) + F(C) = F(B) + F(D)$. Докажете, че F има вида $F(x,y) = a(x^2+y^2) + bx + cy + d$, и обратно, че функциите от този вид имат изброените свойства (C е срещу A).

Решение. Във връзка с правоъгълника $A(x,y_1)$, $B(x+h,y_1)$, $C(x+h,y_2)$, $D(x,y_2)$ получаваме

$$\frac{F(x+h,y_1) - F(x,y_1)}{h} = \frac{F(x+h,y_2) - F(x,y_2)}{h} \quad (h \neq 0).$$

При $h \to 0$ имаме $F_x'(x,y_1) = F_x'(x,y_2)$, $F_x'(x,y)$ е функция само на x, следователно $F(x,y) = f(x) + g(y)$, $F_{xy}'' = 0$. Съществуват f'' и g'', защото съществуват F_{xx}'' и F_{yy}''. Свойството на F относно правоъгълниците не зависи от избора на декартовата координатна система в равнината. Да положим $x = u - v$, $y = u + v$ (завъртане на ъгъл $\dfrac{\pi}{4}$ и хомотетия с коефициент $\sqrt{2}$). Точка P с нови координати (u,v) има стари координати $(x,y) = (u-v, u+v)$. Функцията $G(u,v) = F(u-v,u+v)$ има свойствата на F и следователно $G_{uv}'' = 0$. (От представянето $G(u,v) = f(u-v) + g(u+v)$ разбираме, че G притежава всичките си производни от първи и втори ред.) Но $G_{uv}''(u,v) = -f''(u-v) + g''(u+v)$. Тогава $f''(x) = g''(y)$ при всеки избор на x и y, т. е. $f'' = g'' = a$, $f(x) = ax^2 + bx + d_1$, $g(y) = ay^2 + cy + d_2$. За доказване на обратното достатъчно е да направим проверката за функциите 1, x, y, x^2+y^2. Как можем да намалим изискванията за F?

1.14. Нека функцията $f(x,y)$ е дефинирана в $\mathbb{R}^2$, притежава първите си частни производни и $f(tx,ty) = t^a f(x,y)$ при $t > 0$. Докажете, че $xf_x' + yf_y' = af$ (тъждество на Ойлер).

Решение. При $x > 0$, ако положим $\varphi(u) = f(1,u)$, то $f(x,y) = x^a f\left(1, \dfrac{y}{x}\right) = x^a \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Пресмятаме

$$xf_x'(x,y) + yf_y'(x,y) = x.ax^{a-1}.\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x.x^a.\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$+yx^a.\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x} = a.x^a\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = a.f(x,y).$$

При $x < 0$ имаме $f(x,y) = (-x)^a f\left(-1, \dfrac{y}{-x}\right) = (-x)^a.\psi\left(\dfrac{y}{-x}\right)$ и отново пресмятаме. Аналогично разглеждаме случая $y \neq 0$. В точката $(0,0)$ тъждеството е вярно, защото от $a \neq 0$ следва $f(0,0) = 0$ $(t = 2$: $f(0,0) = 2^a.f(0,0)$, $2^a \neq 1)$.

1.15. Нека функцията $f(x,y)$ е дефинирана в някоя околност U на точката (a,b), f_y' съществува и е ограничена в U, функцията $x \mapsto f(x,b)$ е непрекъсната при $x = a$. Докажете, че f е непрекъсната в точката (a,b).

Решение. Нека $\varepsilon > 0$. Има такова положително число δ, че щом $|x-a| < \delta$, то точката $(x,b) \in U$ и $|f(x,b) - f(a,b)| < \varepsilon$. Тогава, ако $(x,y) \in U$ и $|x-a| < \delta$, ще имаме

$$|f(x,y) - f(a,b)| \leq |f(x,y) - f(x,b)| + |f(x,b) - f(a,b)|$$

$$< |y-b||f_y'(x,\eta)| + \varepsilon < 2\varepsilon,$$

щом $|y-b| < \dfrac{\varepsilon}{M}$, където $M > 0$ е някоя горна граница на $|f_y'|$ в U. Тук приложихме формулата за крайните нараствания към функцията $y \mapsto f(x,y)$, η е число между y и b. Ако околност на една точка е всяко отворено множество, което я съдържа, какво допълнително изискване за U използвахме и как можем да го избегнем?

1.16. Ако $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, нека дефинираме:

$$\partial f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{\|h\|};$$

Кои функции, диференцуеми частно спрямо всеки от аргументите си, притежават „производната“ $\partial f(x)$ навсякъде?

1.17. Ако $f,\ g,\ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и съществуват f'', g'', φ', докажете, че функцията:

а) $\varphi(x^2+y^2)$; **б)** $x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$; **в)** $y.\varphi(x^2-y^2)$;

г) $x^a\varphi\left(\frac{y}{x^2}\right)$; **д)** $f(x+at)+g(x-at)$; **е)** $f(x+\lambda y)+g(x+\mu y)$;

ж) $xf(x,y)+yg(x,y)$; **з)** $xf\left(\frac{y}{x}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$; **и)** $f(xy)+g\left(\frac{x}{y}\right)$;

й) $x^af\left(\frac{y}{x}\right)+y^{-a}g\left(\frac{y}{x}\right)$; **к)** $f(bx+ay)g(bx-ay)$;

л) $\varphi(x)+f(y)+(x-y)f'(y)$; **м)** $f(x)+yf'(x)$

удовлетворява в естествената си дефиниционна област съответно уравнението:

а) $yz'_x = xz'_y$; **б)** $xz'_x + yz'_y = z - x^2 - y^2$;

в) $y^2z'_x + xyz'_y = xz$; **г)** $xz'_x + 2yz'_y = az$;

д) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; **е)** $\lambda\mu z''_{xx} - (\lambda+\mu)z''_{xy} + z''_{yy} = 0$;

ж) $z''_{xx} - 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$; **з)** $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$;

и) $x^2z''_{xx} - y^2z''_{yy} + xz'_x - yz'_y = 0$;

й) $x^2z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2z''_{yy} + xz'_x + yz'_y = a^2z$;

к) $a^2(z.z''_{xx} - z'^2_x) = b^2(z.z''_{yy} - z'^2_y)$;

л) $(x-y)z''_{xy} = z'_y$; **м)** $z'_x = z'_y + yz''_{xy}$.

1.18. Съставете примери, подобни на дадените в зад. 1.17, за функциите:

а) $\varphi(x+y)$; **б)** $\varphi(xy)$; **в)** $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$; **г)** $\varphi(x)\psi(y)$;

д) $\varphi(x^a+y^b)$; **е)** $f(y+g(x))$; **ж)** $f(g(x)+h(y))$;

з) $f(x+y)+g(x^2+y^2)$; **и)** $f(x+y)+g(xy)$; **й)** $x+\varphi(xy)$.

Р е ш е н и е. а) $z=\varphi(x+y)$, $z'_x=\varphi'(x+y)$, $z'_y=\varphi'(x+y)$, следователно z удовлетворява уравнението $z'_x = z'_y$ (в него φ не участва, φ бе елиминирана);

е) $z=f(y+g(x))$, $z'_x = f'.g'$, $z'_y = f'$, $g'(x) = \dfrac{z'_x(x,y)}{z'_y(x,y)}$ не зависи от y, следователно производната ѝ по y е нула: $\dfrac{z''_{xy}z'_y - z'_xz''_{yy}}{z'^2_y} = 0$. Така $z'_yz''_{xy} = z'_x.z''_{yy}$ (f и g са елиминирани);

и) $z=f(x+y)+g(xy)$, $z'_x = f'(x+y)+yg'(xy)$, $z'_y = f'(x+y) + xg'(xy)$. Може да запишем по-кратко: $z'_x = f'+yg'$, $z'_y = f'+xg'$, $g' = -\dfrac{z'_x - z'_y}{x-y}$, като помним, че f и f' се вземат в точката $x+y$, а g и g' — в точката xy, за което постоянно следим с поглед изходното равенство $z = f(x+z)+g(xy)$. По-нататък получаваме $z''_{xx} = f''+y^2g''$, $z''_{yy} = f''+x^2g''$, $z''_{xy} = f''+xyg''+g'$. Оттук съобразяваме, че $xz''_{xx}+yz''_{yy} = (x+y)(f''+xyg'') = (x+y)(z''_{xy}-g')$ $= (x+y)\left(z''_{xy} + \dfrac{z'_x - z'_y}{x-y}\right)$, като f и g са елиминирани.

1.19. Нека функциите f и g са дефинирани в $\mathbb{R}$ и съществуват f'' и g'. Проверете, че формулата на Даламбер

$$u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds$$

решава задачата $u''_{tt} = a^2u''_{xx}$, $u(x,0)=f(x)$, $u'_t(x,0)=g(x)$ (задача на Коши за уравнение на струна).

1.20. а) Ако $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, f'' съществува,

$r = \sqrt{(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_m-a_m)^2} > 0$ и $u(x_1,\ldots,x_m) = f(r)$,

пресметнете $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$;

б) Съгласно а) уравнението на Лаплас $\Delta u = 0$ се превръща в уравнение за f. Положете $y = f'$ и намерете първо y, а после и f, като си припомните зад. 4.5 и 7.5, ч. I, гл. 3;

в) При $m=2$ пресметнете $\Delta(\Delta u)$;

8

г) Ако $v(x_1, \ldots, x_m, t) = g(r, t)$, g е дефинирана за $r > 0$ и за всяко t, g''_{rr} и g''_{tt} съществуват и $v''_{tt} = a^2 \Delta v$, то от а) получете уравнение за g;

д) При $m = 3$ положете $h = rg$ и получете уравнение за h.

1.21. а) Проверете, че уравнението $u'_t = a^2 u''_{xx} + bu$ се превръща в уравнение $w'_t = a^2 w''_{xx}$, ако положим $w(x,t) = e^{-bt}.u(x,t)$;

б) За уравнението $u'_t = a^2 u''_{xx} + bu'_x$ положете

$$w(x,t) = e^{\frac{b}{2a^2}(x - \frac{bt}{2})}.u(x,t).$$

1.22. Проверете, че ако $\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_m^2 = 1$, функцията $u(x_1, \ldots, x_m, t) = f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m + at)$ удовлетворява вълновото уравнение $u''_{tt} = a^2 \Delta u$ (тук $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и f'' съществува).

1.23. За уравнението $u'_t = a^2 u''_{xx}$ ще търсим решение, което не се анулира при $0 < x < 1$, има вида $u(x,t) = X(x)T(t)$ и $u(0,t) = u(1,t) = 0$ за всяка стойност на t:

а) Изведете уравнения за $X(x)$ и $T(t)$;

б) Като си припомните зад. 2.19 и зад. 7.5, ч. I, гл. 3, решете тези уравнения.

Решение. а) При $0 < x < 1$ получаваме

$$a^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)},$$

следователно това е константа λ. Тогава $a^2 X'' - \lambda X = 0$, $T' - \lambda T = 0$. Условията при $x = 0$ и $x = 1$ дават $X(0) = X(1) = 0$;

б) За да намерите $X(x)$, разгледайте случаите $\lambda = \mu^2 \geqq 0$ и $\lambda = -\mu^2 < 0$ и се убедете, че първият случай отпада, а при втория са възможни само някои стойности на λ.

1.24. Проверете, че ако f и g са дефинирани (всяка в свой интервал) f'' и g'' съществуват, f' и g' са различни от нула,

$$f'^2 = af^4 + (1+b)f^2 - c, \quad g'^2 = cg^4 + bg^2 - a \quad (a,\ b,\ c \text{ — константи}),$$

то функцията $u(x,t) = 4\operatorname{arctg}[f(x)g(t)]$ удовлетворява синус-уравнението на Гордън: $u''_{xx} - u''_{tt} = \sin u$. (Например при $a = c = 0$ и $b > 0$ може $f(x) = e^{\sqrt{1+b}x}$ и $g(t) = e^{\sqrt{b}t}$. Сравнете със зад. 1.10 й).)

1.25. С полагане от вида

$$w(x,y) = z(x,y)e^{-\lambda x - \mu y}$$

трансформирайте уравнението $z''_{xy} + az'_x + bz'_y + cz = 0$ в уравнение $w''_{xy} + pw = 0$.

Решение. Нека в едно отворено множество $U \subset \mathbb{R}^2$ е дефинирана функцията $z(x,y)$ и съществуват z'_x, z'_y и z''_{xy}. Тогава функцията $w = ze^{-\lambda x - \mu y}$ е дефинирана в U и съществуват w'_x, w'_y и w''_{xy}. От $z = we^{\lambda x + \mu y}$ имаме

$$z'_x = e^{\lambda x + \mu y}(\lambda w + w'_x), \qquad z'_y = e^{\lambda x + \mu y}(\mu w + w'_y),$$

$$z''_{xy} = e^{\lambda x + \mu y}\left[\mu(\lambda w + w'_x) + \lambda w'_y + w''_{xy}\right],$$

$$z''_{xy} + az'_x + bz'_y + cz$$

$$= e^{\lambda x + \mu y}\left[w''_{xy} + (a+\mu)w'_x + (b+\lambda)w'_y + (\lambda\mu + \lambda a + \mu b + c)w\right]$$

$$= e^{\lambda x + \mu y}\left[w''_{xy} + (c - ab)w\right],$$

като сме взели $\lambda = -b$, $\mu = -a$. Новото уравнение е $w''_{xy} + (c-ab)w = 0$, в смисъл, че ако z удовлетворява старото, то w удовлетворява новото уравнение, и обратно.

1.26. Нека $f(x,y) = \dfrac{y}{|y|}(|x| - x)$ при $y \neq 0$, $f(x,0) = 0$ при $x > 0$.

Проверете, че дефиниционната област на f е отворено свързано множество, в което $f'_y = 0$, но f зависи от y.

1.27. Нека f и F са две функции, дефинирани и три пъти диференцуеми в интервала Δ, като f''' и F''' са непрекъснати; при всеки избор на a и b от Δ, $a \neq b$, съществува точка ξ, строго между a и b, за която $f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi)$, $F(b) - F(a) = (b-a)F'(\xi)$. Докажете, че ако f' е обратима в Δ, то съществуват такива константи A, B и C, че за всяко $x \in \Delta$ е в сила равенството $F(x) = Af(x) + Bx + C$ (А. Кючуков).

Решение. Нека g е обратната функция на f', $h(u) = F'(g(u))$. Тъй като f' и F' са два пъти диференцуеми, то и g и h са два пъти диференцуеми. Ако при $a \neq b$ положим $u(a,b) = g\left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)$, от $\xi = g\left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)$ ще получим $F(b) - F(a) = (b-a)h(u(a,b))$.

Диференцираме това равенство по a: $(b-a)h'(u)u'_a - h(u) = -F'(a)$. Диференцираме по b:

$$(b-a)h'(u)u''_{ab} + (b-a)h''(u)u'_b u'_a + h'(u)u'_a - h'(u)u'_b = (b-a)u'_a u'_b h''(u)$$
$$+[(b-a)u''_{ab} + u'_a - u'_b]h'(u) = (b-a)u'_a u'_b h''(u) = 0.$$

Тук $u = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $(b-a)u''_{ab} + u'_a - u'_b = 0$, $u'_a \neq 0$, $u'_b \neq 0$. Получихме $h''(u) = 0$ за точките от вида $u = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $a \neq b$, следователно и за точките от $f'(\Delta)$, защото h'' е непрекъсната и $u \to f'(a)$ при $b \to a$. Така $h(u) = Au + B$ в интервала $f'(\Delta)$ и тогава при $x \in \Delta$ имаме

$$h(f'(x)) = F'(x) = Af'(x) + B, \quad F(x) = Af(x) + Bx + C.$$

§ 2. Необходимо условие за съществуване на локален екстремум при наличие на частни производни

Понятието локален екстремум се отнася за вътрешна точка от дефиниционната област на функцията. От теоремата на Ферма имаме, че ако f притежава локален екстремум в точката $a = (a_1, \ldots, a_m)$ и съществува например $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i}$, то $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$. Според теоремата на Вайерщрас, ако някоя функция е непрекъсната в ограничено и затворено множество, тя обезателно достига там най-голяма и най-малка стойност. Ако най-голяма или най-малка стойност се достига във вътрешна точка от дефиниционната област, то това е точка на локален екстремум.

2.1. Нека между величините x и y имаме зависимостта $y = ax + b$ и нека сме направили n измервания, които за стойностите $x_1, \ldots, x_n$ са дали резултати $y_1, \ldots, y_n$. При $n > 2$ системата $ax_i + b = y_i$ едва ли ще има точно решение за a и b. (Но при по-голямо n е по-малко вероятно случайни грешки на измерването да повлияят съществено върху стойностите на a и b.) За да намерите подходящи a и b, приложете метода на най-малките квадрати, т. е. потърсете точка, в която функцията $f(a,b) = \sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$ достига най-малка стойност.

Решение. $f'_a = 2a.\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = 0,$

$$f'_b = 2a\sum_{i=1}^{n} x_i + 2nb - 2\sum_{i=1}^{n} y_i = 0.$$

Детерминантата на тази система е

$$4\left(u.\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) > 0,$$

защото

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j} 2x_i x_j < \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j}(x_i^2 + x_j^2) = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

тъй като (по смисъла на задачата) измежду числата x_i има различни. Ако $x_1 \neq x_2$, от равенствата $p = ax_1 + b - y_1$ и $q = ax_2 + b - y_2$, решени относно a и b, получаваме, че докато p и q са ограничени, то и a и b ще бъдат ограничени. Затова от $a^2 + b^2 \to \infty$ следва $p^2 + q^2 \to \infty$, а тогава и $f(a,b) \to \infty$. (По-точно, ако $a_n^2 + b_n^2 \to \infty$ и на (a_n, b_n) съответна е (p_n, q_n), то за всяко A не може $p_n^2 + q_n^2 \leqq A$ за безброй n, защото иначе би имало подредица, за която $p_{n_k}^2 + q_{n_k}^2 \leqq A$, а $a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2 \to \infty$.) Следователно има число r, така че $f(a,b) > f(0,0)$ при $a^2 + b^2 > r^2$. В кръга $a^2 + b^2 \leqq r^2$ функцията f достига най-малка стойност, която е въобще най-малката стойност на f. Остава да решим системата $f'_a = 0$, $f'_b = 0$.

2.2. Съществуване на най-малка и най-голяма стойност за следващите функции ни дава теоремата на Вайерщрас. Намерете тези стойности и точките, в които се достигат:

а) $\sqrt{1 - x^2 - y^2}\, e^{-3x^2 - 3xy + y^2}$; б) $ye^x \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

в) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ в кълбото $x^2 + y^2 + z^2 \leqq r^2$ $(a > b > c > 0)$;

г) $x^2 + y^2 + z^2$ върху елипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > b > c > 0)$;

д) $ax + by + cz$ в кълбото $x^2 + y^2 + z^2 \leqq r^2$;

е) $x + y + z$ при $x^2 + y^2 \leqq z \leqq 1$;

ж) $(1-x^2-y^2)(x+y)$ при условия $x^2+y^2 \leqq 1,\ x+y \geqq 1$;

з) $x+z$ при условия $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2=ax\ (a>0)$;

и) $x^2-y^2+2e^{-x^2}$ в кръга $x^2+y^2 \leqq 1$;

й) $ax^2+by^2+cz^2-(ax^2+by^2+cz^2)^2$ върху сферата $x^2+y^2+z^2 = 1\ (a>b>c>\frac{1}{2})$;

к) $\sin x+\sin y-\sin(x+y)$; **л)** $\sin x+\cos y-\cos(x-y)$;

м) $x_1x_2\dots x_n$ при $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a > 0,\ x_i \geqq 0$;

н) $x^6+y^6+z^6$ в кълбото $x^2+y^2+z^2 \leqq 1$;

о) $\cos x.\cos y.\cos z$ при $x+y+z=\pi$;

п) $x^2+\sqrt{1-x^2}.\cos y$; **р)** $\left(y-\sqrt{2-x^2-y^2}\right)e^x$;

с) $x^6+y^6-3x^2+6xy-3y^2$ при $0 \leqq y \leqq x \leqq 2$;

т) xy^2z^3 при $x+y+z=6,\ x,y,z \geqq 0$;

у) $\sin x\sin y\sin z$ при $x+y+z=\frac{\pi}{2}$;

ф) $x^2+x^2y^2+y^4+y^2z^2+2z^2$ в кълбото $x^2+y^2+z^2 \leqq 1$.

Решение. б) Функцията е дефинирана и непрекъсната в ограниченото и затворено множество $K=\{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 1\}$ и следователно достига в него най-малка и най-голяма стойност. Ако това стане във вътрешна точка (x,y), $x^2+y^2<1$, то в нея $f'_x=0$ и $f'_y=0$, т. е. след опростяване:

$$y(1-x^2-y^2-x)=0 \quad \text{и} \quad 1-x^2-2y^2=0.$$

Ако $y=0$, то $x^2=1$, а трябва $x^2+y^2<1$. Следователно $y \neq 0$. Тогава $1-x^2-y^2=x$ и $1-x^2-y^2=y^2$, т. е. $x=y^2$, $x^2+2x-1=0$, $x=\sqrt{2}-1$ (защото $x=y^2 \geqq 0$), $y=\pm\sqrt{\sqrt{2}-1}$ и $x^2+y^2=1-x=2-\sqrt{2}<1$, следователно точките са вътре в кръга. При $x^2+y^2=1$ получаваме $f=0$. Накрая сравняваме числата 0 и $f(\sqrt{2}-1,\pm\sqrt{\sqrt{2}-1})=\pm(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}-1}$. Най-голямото от тях е максимумът, а най-малкото — минимумът. Множеството K е затворено, защото въобще, ако една функция $g(x,y)$ е непрекъсната в $\mathbb{R}^2$, то множествата $A=\{(x,y) : g(x,y) \geqq 0\}$ и $B=\{(x,y) : g(x,y)=0\}$ са затворени. (Например, ако $g(x_n,y_n) \geqq 0$ и $(x_n,y_n) \to (x_0,y_0)$, то $g(x_n,y_n) \to g(x_0,y_0) \geqq 0$.) Множеството $C=\{(x,y) : g(x,y)>0\}$ е отворено (непрекъснатата функция локално запазва знака си), но C може да не е вътрешността на A. (Например в $\mathbb{R}$ множеството $\{x : x^4-x^2<0\}$ не е вътрешността на $\{x : x^4-x^2 \leqq 0\}=[-1,1]$.) В конкретните случаи не е необходимо да изследваме дали C е вътрешността на A, достатъчно е да потърсим екстремални стойности отделно в C и в B $(A=C\cup B)$. След всичко казано проверете, че множеството $\{(x,y) : \frac{xy}{x^2+y^2}=0\}$ не е затворено в $\mathbb{R}^2$, а множеството $\{(x : e^{\sqrt{x}}>0\}$ не е отворено в $\mathbb{R}$;

в) За $x^2+y^2+z^2<r^2$ от условията $f'_x, f'_y, f'_z=0$ получаваме една точка $(0,0,0)$, в нея $f=0$. За $x^2+y^2+z^2=r^2$ изразяваме $z^2=r^2-x^2-y^2$ и разглеждаме при $x^2+y^2 \leqq r^2$ (защото $z^2 \geqq 0$) функцията

$$\varphi=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{r^2-x^2-y^2}{c^2}.$$

И тук при $x^2+y^2<r^2$ решаваме $\varphi'_x=0$, $\varphi'_y=0$, а при $x^2+y^2=r^2$ изразяваме $y^2=r^2-x^2$ и свеждаме към функция на x в $[-r,r]$. Направете необходимите пресмятания;

е) При $x^2+y^2<z<1$ системата f'_x, f'_y, $f'_z=0$ няма решение. Заместваме в f първо $z=x^2+y^2$ и получаваме $\varphi=x+y+x^2+y^2$, а после $z=1$, получаваме $\psi=x+y+1$ — все при $x^2+y^2 \leqq 1$. При всяко от заместванията разглеждаме първо $x^2+y^2<1$ (решаваме $\varphi'_x=0$, $\varphi'_y=0$ или $\psi'_x=0$, $\psi'_y=0$) и после $x^2+y^2=1$ — изразяваме y и свеждаме към функция на x в $[-1,1]$. Извършете подробно пресмятанията;

ж) Предварително скицирайте множеството, зададено от условията;

з) $x^2+y^2=ax$ или $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$ — това е окръжност в равнината xy с център $\left(\frac{a}{2},0\right)$ и радиус $\frac{a}{2}$, следователно $0 \leqq x \leqq a$. Цилиндърът над тази окръжност и кълбото с център началото и радиус a се пресичат — това е кривата на Вивиани. Да положим $x=a\sin^2 t$. Тогава $y^2=a^2\sin^2 t\cos^2 t$, $z^2=a^2\cos^2 t$.

При $0 \leqq t \leqq 2\pi$ точката $x = a\sin^2 t$, $y = a\sin t\cos t$, $z = a\cos t$ лежи на кривата. Проверете, че и обратното е вярно, т. е. всяка точка от кривата се получава за някоя стойност на t по горните формули. ($0 \leqq x \leqq a$, $\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{x}{a}}$; ако $0 < x < a$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; то за t имаме четири възможности: α, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $2\pi - \alpha$. И т. н.) $x + z = a(\sin^2 t + \cos t) = \varphi(t)$, това е функция на една променлива;

к), л), о), п) Използвайте периодичността на функциите;

м) Явно най-малката стойност е 0 и се достига, когато поне едно $x_i = 0$. Следователно в точка на най-голяма стойност всички $x_i > 0$. Изразяваме $x_n = a - x_1 - \dots - x_{n-1}$ и разглеждаме

$$\varphi = x_1 \dots x_{n-1}(a - x_1 - \dots - x_{n-1}) \quad \text{при} \quad x_1 + \dots + x_{n-1} < a$$

(защото $x_n > 0$) и $x_i > 0$. Пресмятаме $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = x_2 \dots x_{n-1}(a - 2x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}) = 0$, $x_1 + \dots + x_{n-1} = a - x_1$. Аналогично $x_1 + \dots + x_{n-1} = a - x_i$, $x_1 = \dots = x_{n-1} = x$, $(n-1)x = a - x$, $x = \frac{a}{n}$. Тогава и $x_n = \frac{a}{n}$, $f\left(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}\right) = \frac{a^n}{n^n}$ е най-голяма стойност. Така при $x_i \geqq 0$ имаме неравенството на Коши: $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leqq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, като равенство се достига само при $x_1 = \dots = x_n$.

2.3. Намерете най-близките до началото точки от повърхнината:

а) $ax + by + cz = 1$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$; б) $2z^2 = 3(1 - x^2)(1 - y^2)$.

Решение. б) Търсим точките, в които $f = x^2 + y^2 + z^2$ достига най-малка стойност. Изразяваме z^2 от условието и разглеждаме

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{3}{2}(1 - x^2 - y^2 + x^2y^2)$$

при $|x| < 1$, $|y| < 1$ или $|x| > 1$, $|y| > 1$ ($2z^2 > 0$). От $\varphi'_x = 0$, $\varphi'_y = 0$ получаваме $x = y = 0$ или $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$, като $\varphi = \frac{3}{2}$ в първия случай и $\varphi = \frac{11}{8}$ във втория. Остава още да положим $|x| = 1$ или $|y| = 1$ ($2z^2 = 0$). Нека $|y| = 1$, тогава $\varphi(x, y) = 1 + x^2$ — минимум при $x = 0$, $\varphi(0, \pm 1) = 1$. Аналогично при $|x| = 1$ имаме $\varphi(x, y) = 1 + y^2$

— минимум при $y = 0$, $\varphi(\pm 1, 0) = 1$. От числата $\frac{3}{2}$, $\frac{11}{8}$ и 1 най-малко е 1. Но дали въобще f достига най-малка стойност? Достига я например в кълбото $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 2$, защото

$$A = \{(x, y, z) : 2z^2 = 3(1 - x^2)(1 - y^2),\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 2\}$$

е ограничено и затворено множество, а f е непрекъсната. В точките $(\pm 1, 0, 0)$ и $(0, \pm 1, 0)$ от A получаваме $f = 1$, а при $x^2 + y^2 + z^2 \geqq 2$ имаме $f \geqq 2 > 1$. Следователно минимумът се достига във вътрешни за кълбото точки от A (именно посочените четири), като той е и абсолютен минимум на f върху дадената повърхнина.

2.4. Изяснете въпроса за най-малка и най-голяма стойност на следните функции:

а) $x^2 + y + e^{-x-y}$;

б) Функцията на Розенброк: $100(x^2 - y)^2 + (1 - x)^2$;

в) $x^2 + xy + y^2 - x - y$; г) $x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;

д) $(x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}$; е) $(x + y + z)e^{-x-2y-3z}$, ако $x, y, z \geqq 0$;

ж) $\frac{xy}{x^2 + y^2}e^{x+y}$ при $0 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq 1$, $(x, y) \neq (0, 0)$;

з) $\sum_{i=1}^{n} x_i$, ако $x_1 \dots x_n = 1$, $x_1, \dots, x_n > 0$;

и) $ax^2 + by^2$ при $x + y = c$, $x, y > 0$ ($c > 0$);

й) x при $x^3 + y^3 = 3xy$, x, $y \geqq 0$.

Решение. а) Функцията $f > x^2 + y$ очевидно няма най-голяма стойност. Функцията $\varphi(y) = x^2 + y + e^{-x-y}$ достига най-малка стойност при $y = -x$, $\varphi(-x) = x^2 - x + 1$. Този израз достига най-малка стойност при $x = \frac{1}{2}$, като $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ е най-малката стойност на f. (Имаме $\varphi'(y) = 1 - e^{-x-y}$, анулира се при $y = -x$, като отляво $\varphi' < 0$, отдясно $\varphi' > 0$);

д) $f(0, 0) = 0$, иначе $f > 0$. Тъй като $f(x, y) \to 0$ при $x^2 + y^2 \to \infty$, то има $p > 2$, така че $f(x, y) < f(1, 1)$ при $x^2 + y^2 \geqq p$. Най-голямата стойност на f в кръга $x^2 + y^2 \leqq p$ се достига във вътрешна точка (защото $1^2+1^2<p$) и в нея $f'_x=0$, $f'_y=0$. Продължете самостоятелно. ($f(x,y) \leqq 2(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2} \to 0$ при $x^2+y^2\to\infty$, защото $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2t}{e^t}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2}{e^t}=0$.);

ж) При дадените ограничения $f(x,1)$, $f(2,y)$ и $f(x,tx)$ са растящи функции съответно на x, y и x ($t>0$, фиксирано);

и) Разгледайте първо $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x+y=c$;

й) Положете $y=tx$.

2.5. Намерете в равнината точка с минимална сума на:

а) разстоянията ѝ до две дадени точки;

б) разстоянията ѝ до три дадени точки;

в) квадратите на разстоянията ѝ до n дадени точки.

2.6. Намерете двучлен $ax+b$, който минимизира

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(ax+b-\sin x)^2\,dx.$$

2.7. Потърсете най-малкото възможно a, за което при $x,y,z\geqq 0$ е в сила: $xy+yz+zx \leqq a(x+y+z)^2$.

Решение. При условие $x+y+z=\lambda$, $x,y,z\geqq 0$, най-голямата стойност на $f=xy+yz+zx$ е $f\left(\frac{\lambda}{3},\frac{\lambda}{3},\frac{\lambda}{3}\right)=\frac{\lambda^2}{3}$. Следователно $f\leqq\frac{\lambda^2}{3}=\frac{1}{3}(x+y+z)^2$, като равенство имаме при $x=y=z$, т. е. има „възможни" a и има най-малко от тях: $a=\frac{1}{3}$.

2.8. Намерете разстоянието между правите

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad\text{и}\quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

2.9. В елипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ впишете правоъгълен паралелепипед с ръбове, успоредни на координатните оси, и с максимален обем.

2.10. Ако снаряд излети от дулото на оръдие със скорост $v_0=100$ м/сек, може ли да достигне цел, отстояща по хоризонтала и по вертикала на 500 м?

Решение. Ще пренебрегнем съпротивлението на въздуха. При ъгъл на излитане $\varphi\in(0,\pi)$, $\varphi\neq\frac{\pi}{2}$, траекторията е

$$y=x\operatorname{tg}\varphi-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}x^2,\quad g=9,8\ \text{м/сек}^2.$$

Полагаме $a=\frac{g}{2v_0^2}>0$ и получаваме

$$y=x\operatorname{tg}\varphi-a\frac{x^2}{\cos^2\varphi}.$$

При дадено $x\neq 0$ търсим максималната достижима височина $y_{\max}$:

$$y'_\varphi=\frac{x}{\cos^2\varphi}\left(1-\frac{2ax\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)=0,\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2ax},$$

$$y=\frac{1}{4a}-ax^2.\quad\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}=\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}=1+\operatorname{tg}^2\varphi.\right)$$

Параболата $y=\frac{1}{4a}-ax^2$ обвива траекториите отгоре. При $v_0=100$ м/сек и $x=500$ м получаваме $a=\frac{9,8}{20000}\approx\frac{1}{2000}$, т. е. максималната достижима височина е $y\approx 500-\frac{500.500}{2000}=500-125=375<500$. Целта е недостижима, дори като пренебрегнем съпротивлението на въздуха. Проверете, че при $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2ax}$ наистина y достига най-голяма стойност.

2.11. Ако функцията f е дефинирана и непрекъсната в едно затворено и ограничено множество $A\subset\mathbb{R}^m$ с непразна вътрешност B, върху контура $A\setminus B$ е константа, а в точките на B притежава всичките си частни производни от първи ред, то има точка $b\in B$, в която $\frac{\partial f}{\partial x_i}(b)=0$ при $i=1,2,\dots,m$. Сравнете с теоремата на Рол.

2.12. Нека функцията f е дефинирана, непрекъсната и диференцуема частно спрямо x и y в кръга $K: x^2+y^2\leqq 1$. Ако $|f|\leqq 1$ в K, докажете, че има вътрешна точка на K, в която $f_x'^2+f_y'^2<16$.

Решение. Функцията $g=f+2(x^2+y^2)$ е непрекъсната в K, а K е ограничено и затворено множество, следователно g достига в K най-малка стойност m. $g(0,0)=f(0,0)\leqq 1$. При $x^2+y^2=1$: $g(x,y)=f(x,y)+2\geqq -1+2=1$, следователно има вътрешна точка (a,b) на K, в която m се достига. В (a,b) функцията g има локален минимум и затова

$$g'_x(a,b)=f'_x(a,b)+4a=0, \quad g'_y(a,b)=f'_y(a,b)+4b=0.$$

Тогава $f'^2_x(a,b)+f'^2_y(a,b)=16(a^2+b^2)<16$.

2.13. Ако в някоя околност U на точката $(0,0)$ е дадена една непрекъсната функция f, диференцуема частно спрямо x и y, докажете, че има точка $(a,b)\in U$, $(a,b)\neq(0,0)$, в която $b.f'_x(a,b) = a.f'_y(a,b)$.

Решение. Нека кръгът $K: x^2+y^2\leqq\varepsilon$ се съдържа в U. Функцията $g=(\varepsilon-x^2-y^2)e^{\lambda f}$ е непрекъсната в ограниченото и затворено множество K, следователно достига в K най-голяма стойност — във вътрешна точка, защото по окръжността $x^2+y^2=\varepsilon$ имаме $g=0$, а вътре в нея $g>0$. Нека това е точката (a,b), $a^2+b^2<\varepsilon$. От $g'_x(a,b)=0$, $g'_y(a,b)=0$ получаваме

$$\lambda f'_x(a,b)=\frac{2a}{\varepsilon-a^2-b^2}, \quad \lambda f'_y(a,b)=\frac{2b}{\varepsilon-a^2-b^2},$$

$$\lambda b f'_x(a,b)=\lambda a f'_y(a,b).$$

Ако изберем $\lambda\neq 0$, имаме нужното равенство. Но още трябва да сме сигурни, че $(a,b)\neq(0,0)$. Ако f не е константа вътре в K, нека $f(x,y)\neq f(0,0)$ за някоя точка (x,y), $x^2+y^2<\varepsilon$. Ще изберем $\lambda\neq 0$ така, че $g(x,y)>g(0,0)$, т. е.

$$(\varepsilon-x^2-y^2)e^{\lambda f(x,y)}>\varepsilon e^{\lambda f(0,0)}, \quad \lambda[f(x,y)-f(0,0)]>\ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon-x^2-y^2}.$$

Това е възможно. Тогава $(a,b)\neq(0,0)$.

2.14. **а)** Минимизирайте приблизително $I=\int\limits_0^1(y'^2+xy^2)\,dx$ при условията $y(0)=0$, $y(1)=1$, като положите $y=x+Ax(1-x)+Bx^2(1-x)$ и потърсите най-малка стойност на $I=f(A,B)$ (метод на Риц);

б) За $J=\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-1}^{1}(u'^2_x+u'^2_y+2u)\,dx\right)dy$ при условие $u(\pm1,y) = u(x,\pm1)=0$ положете $u=A(1-x^2)(1-y^2)$ и чрез избор на A направете J възможно най-малко. Първо се интегрира по x, а y е константа. После резултатът се интегрира по y;

в) В б) положете $u=B\cos\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi y}{2}$ и сравнете двете минимални стойности и двете стойности на $u(0,0)$.

2.15. От правоъгълен лист ламарина с размери 5×6 дм да се изрежат пет правоъгълника, от които може да се състави вана с максимален обем.

2.16. Покажете, че функцията $f(x,y)=(y-x^2)(2y-x^2)$ няма локален екстремум в точката $(0,0)$, но разгледана върху всяка права през началото, има локален минимум в тази точка.

§ 3. Теорема на Шварц

Ако в някоя околност на точката (a,b) е дефинирана функцията $f(x,y)$ и съществуват производните f'_x, f'_y, f''_{xy}, като f''_{xy} е непрекъсната в (a,b), то в тази точка съществува f''_{yx} и $f''_{yx}(a,b)=f''_{xy}(a,b)$.

Нека $A\subset\mathbb{R}^m$. Множеството на функциите $f: A\to\mathbb{R}$, които имат непрекъснати производни до ред p включително, означаваме с $C^p(A)$; $C(A)$ е множеството на непрекъснатите в A функции; $C^\infty(A)=\bigcap\limits_{p=1}^{\infty}C^p(A)$. Ако $f=(f_1,\dots,f_n): A\to B\subset\mathbb{R}^n$ и f_i са от $C^p(A)$, пишем $f\in C^p(A,B)$.

3.1. За функцията $f=x^\lambda y^\beta\,(x,y>0)$ проверете, че $f''_{xy}=f''_{yx}$.

3.2. За функцията $f(x,y)$ от зад. 1.7 докажете, че ако f''_{12} е непрекъсната, то в случай а) $f''_{12}(x,y)=f''_{12}(y,x)$, а в случая б) $f''_{12}(x,y)=-f''_{12}(y,x)$.

3.3. **а)** Нека $f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ при $(x,y)\neq 0$ и $f(0,0)=0$. Докажете, че f, f'_x и f'_y са непрекъснати в $\mathbb{R}^2$, $f''_{xy}(0,0)=-1\neq 1 = f''_{yx}(0,0)$. Проверете непосредствено, че f''_{xy} и f''_{yx} не са непрекъснати в $(0,0)$;

б) За функцията $f(x,y)=xy\sqrt{-\ln(x^2+y^2)}$ при $0<x^2+y^2\leqq 1$ и $f(0,0)=0$ докажете, че f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{yy} са непрекъснати, а $f''_{xy}(0,0)$ не съществува.

Решение. а) При $(x,y)\neq(0,0)$ всички производни на f съществуват и са непрекъснати.

$$|f(x,y)|\leqq |xy|\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)=|xy|\to 0 \quad \text{при} \quad (x,y)\to(0,0),$$

$$f'_x(x,y)=y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \quad \text{при } (x,y)\neq(0,0),$$

$$f'_y(x,y)=-f'_x(y,x),$$

защото $f(x,y)=-f(y,x)$. От $f(x,0)=0$ и $f(0,y)=0$ получаваме $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$. При $(x,y)\to(0,0)$, $f'_x\to 0$, $f'_y\to 0$, защото

$$\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\leqq\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1,\quad \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\leqq 1$$

(от $2xy\leqq x^2+y^2$). Тъй като $f'_x(0,y)=-y$, $f'_y(x,0)=-f'_x(0,x)=x$, то $f''_{xy}(0,0)=-1$, $f''_{yx}(0,0)=1$. За $(x,y)\neq(0,0)$ имаме

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left(1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

Ако $x\neq 0$, то

$$f''_{xy}(x,tx)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\left(1+\frac{8t^2}{(1+t^2)^2}\right),$$

което е границата при $x\to 0$; тя зависи от t. Следователно не съществува граница при $(x,y)\to(0,0)$.

3.4. а) Защо не може $z'_x=y$, $z'_y=2x$ в отворено множество?

б) Ако $u(x,y)$ притежава в $\mathbb{R}^2$ всичките си производни от първи и втори ред, u''_{xy} е непрекъсната, $u''_{xx}=u''_{yy}$, $u(x,2x)=x$, $u'_x(x,2x)=x^2$, то пресметнете вторите производни в точката $(x,2x)$;

в) Въз основа на зад. 1.17 д) покажете, че има функция с изброените в б) свойства.

Решение. б) От $u(x,2x)=x$ получаваме

$$u'_x+2u'_y=x^2+2u'_y=1,\quad 2x+2u''_{yx}+4u''_{yy}=0,$$

т. е. $2u''_{xx}+u''_{xy}=-x$, а от $u'_x=x^2$ получаваме $u''_{xx}+2u''_{xy}=2x$. Решаваме системата относно u''_{xx} и u''_{xy}: $u''_{xx}=u''_{yy}=-\frac{4x}{3}$, $u''_{xy}=\frac{5x}{3}$. Всички производни се вземат в точката $(x,2x)$;

в) Функцията $u=f(x-y)+g((x+y)$ удовлетворява уравнението $u''_{xx}=u''_{yy}$, $u(x,2x)=f(-x)+g(3x)=x$, $-f'(-x)+3g'(3x)=1$. Освен това $u'_x(x,2x)=f'(-x)+g'(3x)=x^2$. От системата намираме

$$f'(x)=\frac{3x^2}{4}-\frac{1}{4},\quad g'(x)=\frac{1}{4}+\frac{x^2}{4.9}.$$

Функцията

$$u(x,y)=\frac{y}{2}+\frac{(x-y)^3}{4}+\frac{(x+y)^3}{108}+C$$

удовлетворява изискванията.

3.5. а) Нека $z=x\ln(xy)$. Пресметнете z'''_{xxy} $(xy>0)$;

б) Ако от

$$L_x=-i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad L_y=-i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$L_z=-i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

съставим вектор $L=(L_x,L_y,L_z)$, докажете, че $L\times L=i\hbar L$;

в) Нека f и F са функции, дефинирани в $\mathbb{R}$, а функцията $y(x,\alpha)$ — в $\mathbb{R}^2$, съществуват f'', F', y'_x, y'_α и непрекъсната $y''_{x\alpha}$. Ако $u(x,\alpha)=f(y(x,\alpha))$, докажете, че

$$\frac{\partial}{\partial x}(F(y)u'_\alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}(F(y)u'_x).$$

Решение. а) $z'''_{xxy}=z'''_{yxx}=(z'_y)''_{xx}=\left(\frac{x}{y}\right)''_{xx}=\left(\frac{1}{y}\right)'_x=0.$

3.6. Нека $u(x,t)$ е дефинирана в $\mathbb{R}^{m+1}$, $x=(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m$, $t\in\mathbb{R}$, и всички производни на u до трети ред съществуват и са непрекъснати (т. е. $u\in C^3\left(\mathbb{R}^{m+1}\right)$). Докажете, че ако $u''_{tt}=a^2\Delta u$, $u(x,0)=0$, $u'_t(x,0)=\varphi(x)$, то като положим $v=u'_t$, ще имаме $v''_{tt}=a^2\Delta v$, $v(x,0)=\varphi(x)$, $v'_t(x,0)=0$. (За Δ вж. зад. 1.10.)

3.7. Нека функциите u_1 и u_2 са дефинирани в $\mathbb{R}^3$ и производните им до четвърти ред съществуват и са непрекъснати (т. е. $u_1,\ u_2 \in C^4(\mathbb{R}^3)$). Докажете, че ако u_1 и u_2 са хармонични, т. е. $\Delta u_1 = 0$ и $\Delta u_2 = 0$, то функцията $v = u_1 + (x^2+y^2+z^2)u_2$ удовлетворява бихармоничното уравнение $\Delta(\Delta v) = 0$. Напишете подробно това уравнение. (За Δ вж. зад. 1.10.)

3.8. Нека функцията $u(x,t)$ е дефинирана в $\mathbb{R}^2$ и съществуват производните $u_{x^4}^{IV}$ и u_{xt}'', като u_{xt}'' е непрекъсната. Ако положим $v = u^2 + u_x'$, $Au = u_t' - 6u^2u_x' + u_{xxx}'''$, $Bv = v_t' - 6vv_x' + v_{xxx}'''$, докажете, че $\left(2u + \dfrac{\partial}{\partial x}\right) Au = Bv$.

3.9. В правоъгълника $K : a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d$ е дефинирана функцията $F(x,y)$, съществуват и са непрекъснати производните F_x', F_y', F_{xy}''. Докажете, че

$$\int_a^b \left(\int_c^d F_{xy}''(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b F_{xy}''(x,y)\,dx \right) dy.$$

Р е ш е н и е. Функцията $y \mapsto F_{xy}''(x,y)$ е непрекъсната в $[c,d]$ и

$$\int_c^d F_{xy}''(x,y)\,dy = F_x'(x,y)\Big|_{y=c}^{y=d} = F_x'(x,d) - F_x'(x,c).$$

Тази функция е непрекъсната в $[a,b]$ и следователно съществува

$$\int_a^b \left(\int_c^d F_{xy}''\,dy \right) dx = \int_a^b [F_x'(x,d) - F_x'(x,c)]\,dx$$

$$= F(x,d)\Big|_{x=a}^{x=b} - F(x,c)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c).$$

За другия повторен интеграл:

$$\int_a^b F_{xy}''\,dx = \int_a^b F_{yx}''\,dx = F_y'\Big|_{x=a}^{x=b} = F_y'(b,y) - F_y'(a,y),$$

която е непрекъсната в $[c,d]$ функция и пр.

3.10. Нека $P(r,\varphi)$ и $Q(r,\varphi)$ са съответно реалната и имагинерната част на полинома $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_j \in \mathbb{C}$, $n \geqq 1$, $x = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Ако $Q \neq 0$, $u = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{P}{Q}$, то

$$u_r' = \alpha = \frac{QP_r' - PQ_r'}{P^2+Q^2}, \qquad u_\varphi' = \beta = \frac{QP_\varphi' - PQ_\varphi'}{P^2+Q^2}.$$

Възможно е обаче в някои точки $Q = 0$. Ако $P^2 + Q^2 > 0$, α и β имат смисъл (дори u да няма смисъл). Проверете непосредствено, че $\alpha_\varphi' = \beta_r'$, и докажете (заедно с Гаус) основната теорема на алгебрата (че f има нула в $\mathbb{C}$), като след допускането $P^2 + Q^2 > 0$ стигнете до противоречие във връзка с равенството

$$A = \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \alpha_\varphi'\,d\varphi \right) dr = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \beta_r'\,dr \right) d\varphi = B.$$

Правилото от зад. 3.9 се смята известно за всяка непрекъсната в K функция f (вместо за F_{xy}''; вж. гл. 5).

Р е ш е н и е. Щом $P^2 + Q^2 > 0$, α_φ' и β_r' са непрекъснати. $\int_0^{2\pi} \alpha_\varphi'\,d\varphi = \alpha(r,2\pi) - \alpha(r,0) = 0$, защото α е периодична относно φ с период 2π. Следователно $A = 0$. $\int_0^a \beta_r'\,dr = \beta(a,\varphi) - \beta(0,\varphi)$ е непрекъсната функция на φ и следователно B съществува. Като проверим, че $\alpha_\varphi' = \beta_r'$, ще имаме $A = B$. $\beta(0,\varphi) = 0$, защото свободните членове (относно r) на P и Q са $\operatorname{Re} a_n$ и $\operatorname{Im} a_n$ и не зависят от φ, $P_\varphi'(0,\varphi) = Q_\varphi'(0,\varphi) = 0$. От $x^k = r^k e^{ik\varphi} = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$ (зад. 1.18, ч. I, гл. 3) имаме

$$QP_\varphi' - PQ_\varphi'$$

$$= (r^n \sin n\varphi + \cdots)(-nr^n \sin n\varphi + \cdots) - (r^n \cos n\varphi + \cdots)(nr^n \cos n\varphi + \cdots)$$

$$= -nr^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} r^k g_k(\varphi); \quad P^2 + Q^2 = r^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} r^k.h_k(\varphi) > 0.$$

9

Функциите g_k и h_k са периодични с период 2π и непрекъснати, следователно са ограничени. Нека $|g_k(\varphi)| \leqq M$ и $|h_k(\varphi)| \leqq M$;

$$\beta(a,\varphi) = \frac{-n + \sum\limits_{k=0}^{2n-1} g_k(\varphi)/a^{2n-k}}{1 + \sum\limits_{k=0}^{2n-1} h_k(\varphi)/a^{2n-k}} < -n + \frac{1}{2},$$

ако

$$\sum_{k=0}^{2n-1} g_k(\varphi)/a^{2n-k} + \left(n - \frac{1}{2}\right) \sum_{k=0}^{2n-1} h_k(\varphi)/a^{2n-k} < \frac{1}{2}.$$

Това може да се постигне с избор на достатъчно голямо a, защото и двете суми по абсолютна стойност не надминават $M \sum\limits_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{a^{2n-k}}$.

Накрая

$$B = \int_0^{2\pi} \beta(a,\varphi)\, d\varphi \leqq \int_0^{2\pi} \left(-n + \frac{1}{2}\right) d\varphi = 2\pi \left(-n + \frac{1}{2}\right) < 0 = A.$$

Противоречие.

3.11. Равенството $f''_{yx} - f''_{xy} = 0$ можем да напишем символично по следния начин: $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f'_x & f'_y \end{vmatrix} = 0$.

а) Докажете, че

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Тук $f, g \in C^2\left(\mathbb{R}^3\right)$. (Това е изразително, но само условно записване. Например не можем да развием тази детерминанта по елементите на третия ред.);

б) Формулирайте и докажете твърдение за m функции от $C^2\left(\mathbb{R}^{m+1}\right)$.

Решение. б) Нека функциите са $f_k(x_0, x_1, \dots, x_m)$, $k = 1, 2, \dots, m$. Съставяме детерминантата Δ и я развиваме по елементите на първия ред: $\Delta = \sum\limits_{i=0}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i$. После развиваме A_i по елементите на първия (за A_i) ред: $A_i = \sum\limits_{j \neq i} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} B_{ij}$. Тук B_{ij} е поддетерминантата на Δ, която получаваме след махане на първите два реда и на стълбовете с номера i и j, взета със знак $(-1)^j$, ако $j < i$, и $(-1)^{j-1}$, ако $j > i$. Така $(-1)^i B_{ij} + (-1)^j B_{ji} = 0$. От представянето

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \frac{\partial}{\partial x_i} A_i = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j \neq i} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_j \partial x_i} (-1)^i B_{ij} + \sum_{i=0}^{m} \sum_{j \neq i} (-1)^i \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} B_{ij}$$

е ясно, че производната $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j}$ се среща точно два пъти, но с противоположни коефициенти. Вторите производни на f_1 отпадат. Това е вярно за всяка f_k (разменяме първия и k-тия ред), а събираемите на Δ са произведения на една втора производна и на $m-1$ първи производни.

§ 4. Диференцуеми функции

Нека $U \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество, функцията f е дефинирана в U и $a = (a_1, \dots, a_m) \in U$. Ако в някоя околност на a съществуват първите производни на f и те са непрекъснати в a, то

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(a).h_i + o(\|h\|) \quad (h \to 0,\ a+h \in U).$$

Тук $h = (h_1, \dots, h_m)$, $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_m^2}$. По-общо (без други предположения за функцията освен това тя да бъде дефинирана в U) казваме, че f е *диференцуема в точката* a, ако може да се намерят такива m константи A_i, че $f(a+h) = f(a) + \sum\limits_{i=1}^{m} A_i h_i + o(\|h\|)$ $(h \to 0)$. Тогава f се оказва непрекъсната в a, първите производни на f в точката a съществуват и $f'_{x_i}(a) = A_i$. Дори съществуват производните в a по всички вектори $v \in \mathbb{R}^m$:

$$\frac{\partial f(a)}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} v_i = (\operatorname{grad} f(a), v),$$

$$\operatorname{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_m}\right).$$

(Производна по посока е производната по единичен вектор с тази посока.) Диференцуемост на f при $x = a$ — това е възможност $f(x)$ локално да се апроксимира с полином от първа степен $y = f(a) + \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(a)(x_i - a_i)$. Графиката на y е хиперравнина в $\mathbb{R}^{m+1}$, допирателна към графиката на f при $x = a$. Векторът $(f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_m}(a), -1)$ е нормален вектор на тази равнина и е направляващ за нормалата — права през $(a, f(a))$, перпендикулярна на допирателната.

Ако в някоя околност на $\tau \in \mathbb{R}$ са дефинирани m функции $x_i(t)$, $x_i(\tau) = a$, и съществуват производните $\dot{x}_i(\tau)$, то $\varphi(t) = f(x(t))$ е дефинирана в достатъчно малка околност на τ и

$$\dot\varphi(\tau) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}\dot{x}_i(\tau)$$

(щом f е диференцуема в a). За случая $f: U \to \mathbb{R}^n$ понятието диференцуемост в някоя точка a означава представяне $f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + o(\|h\|)$, като диференциалът $df(a)$ е линейна трансформация $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Матрицата на тази трансформация е $f'(a) = \left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}\right)$ (матрица на Якоби) и ако от компонентите на $h \in \mathbb{R}^m$ образуваме стълб (пак „h“), то можем да напишем: $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(\|h\|)$ $(h \to 0)$. Да бъде $f = (f_1, \dots, f_n)$ диференцуема в a, това е равнозначно с диференцуемост в a на компонентите f_i. При $n = m$ $\det f'(a)$ се нарича детерминанта на Якоби или *якобиан* и се означава

$$\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_m)}(a).$$

Ако V е отворено множество в $\mathbb{R}^l$, $b \in V$, $g: V \to U$, $g(b) = a$, то от диференцуемост на g в точката b и на f в точката a следва диференцуемост на $\varphi = f(g): V \to \mathbb{R}^n$ в точката b. При това $\varphi'(b) = f'(a)g'(b)$.

4.1. Кои понятия и конструкции от увода към този параграф зависят от избора на базис в $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^l$ и кои не зависят?

4.2. Нека $f(0,0) = 0$, а при $(x,y) \neq (0,0)$:

а) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$; б) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$;

в) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$; г) $f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

Докажете, че функцията от а) е диференцуема в $\mathbb{R}^2$, въпреки че f'_x и f'_y имат прекъсване в точката $(0,0)$ и дори са неограничени във всяка нейна околност. Функцията от б) е непрекъсната, има в $\mathbb{R}^2$ ограничени производни от първи ред, но към $\varphi(t) = f(t,t)$ правилото за диференциране на съставни функции е неприложимо. Функциите от в) и от зад. 1.8 не са диференцуеми в $(0,0)$, а тези от г) и зад. 3.3 са диференцуеми навсякъде.

Р е ш е н и е. а) В точките, различни от началото, f е диференцуема, защото f'_x и f'_y са непрекъснати. $f(x,0) = x^2 \sin\dfrac{1}{x^2}$ при $x \neq 0$,

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = x\sin\frac{1}{x^2} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

следователно $f'_x(0,0) = 0$. По симетрия и $f'_y(0,0) = 0$.

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2} \to 0 \text{ при } (x,y) \to (0,0),\ (x,y) \neq (0,0).$$

Следователно $f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2})$ $((x,y) \to (0,0)$ и f е диференцуема в $(0,0))$. При $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f'_x(x,y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Ако положим $x_n = y_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n\pi}} \to 0$, ще имаме

$$\frac{1}{x_n^2+y_n^2} = 2n\pi, \quad f'_x(x_n, y_n) = -\frac{2n\pi}{\sqrt{n\pi}} \to -\infty.$$

Поради симетрията $f'_y(x,y) = f'_x(y,x)$. Въпреки дадения пример обикновено диференцуемите функции, с които работим, са от C^1, така е и тук при $(x,y) \neq (0,0)$;

б) $\dfrac{|x^2y|}{x^2+y^2} \leqq \dfrac{|x|}{2} \to 0$ при $(x,y) \to (0,0)$ (от $|2xy| \leqq x^2+y^2$), следователно f е непрекъсната и в $(0,0)$. $f(x,0) = f(0,y) = 0$, затова $f'_x(0,0) = 0$, $f'_y(0,0) = 0$. При $(x,y) \neq (0,0)$ имаме

$$f'_x(x,y) = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad f'_y = \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Те са ограничени, защото

$$\frac{|2xy|}{x^2+y^2}\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2} \leqq 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leqq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1.$$

$\varphi(t) = f(t,t) = \dfrac{t}{2}$, $\varphi'(0) = \dfrac{1}{2}$, а правилото за диференциране на съставни функции ни дава

$$\varphi'(0) = f'_x(0,0).1 + f'_y(0,0).1 = 0;$$

в) $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 1$. Ако f е диференцуема в $(0,0)$, трябва

$$f(x,y) = x + y + o(\sqrt{x^2+y^2}),$$

$$\frac{\sqrt[3]{x^3+y^3} - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \to (0,0).$$

Но при $y = x > 0$ това е $\dfrac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}} \not\to 0$. Функцията от зад. 1.8 не е непрекъсната в $(0,0)$.

4.3. Нека $f(0,y) = by$, $f(x,y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right).x$ при $x \neq 0$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Проверете, че в началото на координатната система f има производни по всеки вектор. Намерете всички диференцуеми в точката $(0,0)$ функции от този вид.

Р е ш е н и е. Ако $v = (p,q)$, то $\dfrac{f(pt,qt)}{t} = \varphi\left(\dfrac{q}{p}\right)p$ при $p \neq 0$ и $\dfrac{f(0,qt)}{t} = bq$. И в двата случая има граница при $t \to 0$, т. е. $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial v}$ съществува. От $f(x,0) = \varphi(0).x$ получаваме $f'_x(0,0) = \varphi(0)$, $f'_y(0,0) = b$. Ако f е диференцуема в началото,

$$f(x,y) = \varphi(0)x + by + o(\sqrt{x^2+y^2}) \quad \text{при} \quad (x,y) \to (0,0).$$

При $x > 0$ и $y = tx$:

$$\frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)x - \varphi(0)x - by}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\varphi(t) - \varphi(0) - bt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Този израз трябва да клони към нула при $x \to 0$, а той не зависи от x. Следователно $\varphi(t) = \varphi(0) + bt = a + bt$. Тогава

$$f(x,y) = (a + b\frac{y}{x})x = ax + by \quad (\text{при } x \neq 0 \text{ и при } x = 0).$$

Тези функции са диференцуеми, защото са от $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

4.4. Ако v е вектор, а функцията f е диференцуема в a, докажете, че при $(\operatorname{grad} f(a), v) > 0$ за достатъчно малки положителни стойности на t е изпълнено $f(a+tv) > f(a)$, а при $(\operatorname{grad} f(a), v) < 0$ за малки положителни t имаме $f(a+tv) < f(a)$. Ако $|v| = 1$ и $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$, докажете, че $\dfrac{\partial f(a)}{\partial v}$ приема максимална стойност при $v = v_0 = \dfrac{\operatorname{grad} f(a)}{|\operatorname{grad} f(a)|}$ и минимална при $v = -v_0$.

4.5. **а)** Докажете, че повърхнините $z = \dfrac{xy}{4x-y}$ и $z = \sqrt{\dfrac{5x-y}{3}}$ се пресичат под прав ъгъл в точката $(1,2,1)$;

б) Докажете, че допирателните равнини към повърхнината $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ $(a > 0)$ отсичат от координатните оси отрези с един и същ сбор;

в) Намерете допирателната и нормалата към повърхнината $2^{x/z} + 2^{y/z} = 4$ в точката $(1,1,1)$. (Решете относно x.);

г) Нека $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$. Намерете производната по посоката на лъч от правата $y = x$, разположен в първи квадрант.

4.6. Ако за системата $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ сме получили приблизително $x = a$, $y = b$, то за да намерим евентуално по-добро решение (x,y), може да линеаризираме уравненията около точката (a,b), като заместим f и g с полиноми от първа степен. Получете формули за новите стойности на x и y. (м е т о д н а Н ю т о н)

Р е ш е н и е.

$$\left| \begin{array}{l} f + (x-a)f'_x + (y-b)f'_y = 0 \\ g + (x-a)g'_x + (y-b)g'_y = 0. \end{array} \right.$$

Тук f, g и производните се вземат в точката (a,b). Ако

$$\Delta = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix}(a,b) \neq 0,$$

то непосредствено или по формулите на Крамер намираме:

$$x = a - \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} f & f'_y \\ g & g'_y \end{vmatrix}, \quad y = b - \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} f'_x & f \\ g'_x & g \end{vmatrix}.$$

4.7. Нека $\mathbb{C}$ е множеството на всички комплексни числа, U е отворено множество в $\mathbb{C}$, $a \in U$, $f : U \to \mathbb{C}$. Ще дефинираме понятието производна с равенството

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (h \in \mathbb{C}, a+h \in U).$$

а) Ако при $z = x + iy \in U$ представим $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ (зад. 1.17 и 1.18, ч. I, гл. 3; u и v са реални функции), докажете, че за съществуване на производната $f'(a)$, $a = \alpha + i\beta$, е необходимо и достатъчно u и v да са диференцуеми в (α, β) и в тази точка да бъдат изпълнени условията на Коши—Риман (или на Ойлер—Даламбер) $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$;

б) Ако представим $f(z) = P(x,y)e^{iQ(x,y)}$ (P и Q са реални функции) и ако $P > 0$ в U (т. е. $u^2 + v^2 > 0$), то за съществуване на $f'(a)$ е необходимо и достатъчно P и Q да са диференцуеми в (α, β) и в тази точка да имаме $P'_x = PQ'_y$, $P'_y = -PQ'_x$;

в) Докажете още, че u, v, $\ln P$ и Q са хармонични, ако притежават в U непрекъснати производни от втори ред;

г) Докажете правилото на Шварц и формулата за диференциране на съставни функции в комплексния случай.

Р е ш е н и е. а) Нека $h = p + iq$. Тъй като $\left|\frac{h}{|h|}\right| = 1$, то

$$o(h) = o(|h|) = o(\sqrt{p^2+q^2}) \quad (h \to 0).$$

От съществуването на $f'(a) = A + iB$ получаваме, че

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f'(a)h + o(h) \\ &= (A + Bi)(p + iq) + o(|h|) \\ &= (Ap - Bq) + i(Bp + Aq) + o(\sqrt{p^2+q^2}) \end{aligned}$$

или, като вземем отделно реалните и имагинерните части:

$$u(\alpha + p, \beta + q) - u(\alpha, \beta) = Ap - Bq + o(\sqrt{p^2+q^2}),$$
$$v(\alpha + p, \beta + q) - v(\alpha, \beta) = Bp + Aq + o(\sqrt{p^2+q^2}).$$

Това означава диференцуемост на u и v в (α, β), $A = u'_x(\alpha,\beta) = v'_y(\alpha,\beta)$, $B = -u'_y(\alpha,\beta) = v'_x(\alpha,\beta)$. (Тогава $f'(a) = u'_x + iv'_x = u'_x - iu'_y = \ldots$) Следователно

$$u''_{xx} = v''_{yx} = v''_{xy} = -u''_{yy}, \quad \Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0.$$

Аналогично $\Delta v = 0$;

б) От диференцуемост на P и Q в (α,β) следва диференцуемост на u и v, защото $u = P\cos Q$, $v = P\sin Q$. Обратно, от диференцуемост на u и v в (α,β) следва диференцуемост първо на $P = \sqrt{u^2+v^2} > 0$, а после и на Q. Останалите пресмятания извършете самостоятелно.

4.8. Нека u и v са диференцуеми функции, дефинирани в $\mathbb{R}^2$ и $f = (u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Преди всичко df е линейно изображение с матрица — матрицата на Якоби. Освен това, ако разглеждаме f като функция от $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{C}$ ($f = u + iv$), можем да положим $df = f'_x\,dx + f'_y\,dy$, като $f'_x = u'_x + iv'_x$, $f'_y = u'_y + iv'_y$. И накрая, ако разгледаме f като функция от $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ ($(x,y) = x + iy$), при условие че $f'(z)$ съществува, можем да положим $df(z) = f'(z)\,dz$:

а) Изяснете връзката между тези три диференциала;

б) Ако z и $\overline{z}$ са функциите $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$, изразете $df = f'_x\,dx + f'_y\,dy$ чрез dz и $d\overline{z}$.

Р е ш е н и е. а) Трите диференциала представляват едно и също линейно изображение;

б) $dz = dx + idy$, $d\overline{z} = dx - idy$, оттук

$$dx = \frac{dz + d\overline{z}}{2}, \quad dy = \frac{dz - d\overline{z}}{2i},$$

$$df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\overline{z}.$$

Това представяне дава повод за означенията:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Проверете, че равенството $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ изразява условията на Коши—Риман от зад. 4.7. Пресметнете $dz\,d\overline{z}$.

4.9. Намерете матриците — производни на трансформациите:

а) $(x,y) \mapsto (x^2+y^2, e^x, y)$;

б) $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)$, $f \in C^2(\mathbb{R}^m)$, производните се взимат в точката $(x_1, \ldots, x_m)$.

Р е ш е н и е. б) Това е матрицата на Хесе $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$.

4.10. Пресметнете детерминантата на Якоби за трансформациите:

а) $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ (преход от полярни координати (r,φ) към декартови (x,y));

б) $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, z = z$ (цилиндрични координати);

в) $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ (сферични координати);

г) $x_1 = r\cos\varphi_1,\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\ \dots,$

$x_{m-1} = r\sin\varphi_1\dots\sin\varphi_{m-2}\cos\varphi_{m-1},\ x_m = r\sin\varphi_1\dots\sin\varphi_{m-1}$ (сферични координати $(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{m-1})$ в $\mathbb{R}^m$).

Р е ш е н и е. в) Ако положим $\rho = r\sin\theta$, дадената трансформация се оказва суперпозиция от две цилиндрични: първата $(r,\theta,\varphi) \to (\rho,\varphi,z)$ по формулите $\rho = r\sin\theta,\ \varphi = \varphi,\ z = r\cos\theta$ и втората $(\rho,\varphi,z) \to (x,y,z)$ по формулите $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$.

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)} \cdot \frac{D(\rho,\varphi,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \rho.r = r^2\sin\theta$$

(срв. зад. 1.11). Якобианите се умножават, защото се умножават матриците на Якоби.

4.11. Ако напишем формулите на Виет за корените на уравнението $x^n - a_1x^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n = 0$, възникват функции $a_i(x_1,\dots,x_n)$. Пресметнете

$$\frac{D(a_1,\dots,a_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}.$$

4.12. Нека $e_1, \dots, e_m$ са взаимно перпендикулярни единични вектори, $u \in C^2(\mathbb{R}^m)$. Докажете, че

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial e_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2, \quad \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial e_i^2} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \Delta u.$$

4.13. Ако $u, v \in C^1(\mathbb{R}^m)$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R}^2)$, докажете:

а) $\operatorname{grad}(uv) = u.\operatorname{grad} v + v.\operatorname{grad} u$;

б) $\operatorname{grad}(u^p) = pu^{p-1}\operatorname{grad} u$;

в) $\operatorname{grad}(\varphi(u)) = \varphi'(u)\operatorname{grad} u$;

г) $\operatorname{grad}(\psi(u,v)) = \psi'_u\operatorname{grad} u + \psi'_v\operatorname{grad} v$.

4.14. Чрез оператора на Хамилтон „набла“:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

можем да напишем $\operatorname{grad} u = \nabla u$. Нека въведем още дивергенция: $\operatorname{div} F = (\nabla, F)$, и ротация, вихър: $\operatorname{rot} F = \operatorname{curl} F = \nabla \times F$. Тук $F = (P,Q,R)$; $P,\ Q,\ R \in C^1(\mathbb{R}^3)$; $u, v \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Напишете подробно $\operatorname{div} F$ и $\operatorname{rot} F$. Имаме $\Delta = (\nabla,\nabla)$. Докажете:

а) $\Delta(uv) = u.\Delta v + v.\Delta u + 2(\nabla u, \nabla v)$;

б) $\operatorname{div}(u.\operatorname{grad} v) = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + u\Delta v$;

в) $\operatorname{rot}(uF) = u.\operatorname{rot} F + (\operatorname{grad} u) \times F$;

г) $\operatorname{div}(F_1 \times F_2) = (F_2, \operatorname{rot} F_1) - (F_1, \operatorname{rot} F_2)$.

§ 5. Диференциране на съставни функции

Както бе казано в увода на §4, ако една функция f е дефинирана в някоя околност U на точката $a \in \mathbb{R}^m$, първите производни на f съществуват в U и са непрекъснати в a, и ако в околност на $\tau \in \mathbb{R}$ са дадени m функции $x_i(t)$, $x_i(\tau) = a_i$ и съществуват $\dot{x}_i(\tau)$, то $\varphi(t) = f(x(t))$ е дефинирана в достатъчно малка околност на τ и

$$\dot{\varphi}(\tau) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}\dot{x}_i(\tau).$$

Прилагахме вече тази формула в §4, а тук ще разгледаме нови примери.

5.1. а) Намерете първите производни на функцията

$$G(u,v) = g(x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

Тук $x, y, z \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, $g \in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$;

б) Намерете вторите производни на $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$, $x, y, f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Р е ш е н и е. а) $G'_u = g'_x x'_u + g'_y y'_u + g'_z z'_u$, $G'_v = g'_x.x'_v + g'_y.y'_v + g'_z.z'_v$. Производните на G, x и y се вземат в точката (u,v), а на g — в $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$;

б) $F'_u = f'_x . x'_u + f'_y . y'_u$, $F'_v = f'_x . x'_v + f'_y . y'_v$. Всъщност „$f'_x$" е $f'_x(x(u,v), y(u,v))$, затова диференцираме f'_x, както току-що диференцирахме $f(x(u,v), y(u,v))$, аналогично за f'_y. И така:

$$F''_{uu} = (f''_{xx}x'_u + f''_{xy}y'_u)x'_u + f'_x . x''_{uu} + (f''_{yx}x'_u + f''_{yy}.y'_u)y'_u + f'_y . y''_{uu}$$
$$= f''_{xx}.x'^2_u + 2f''_{xy}.x'_u y'_u + f''_{yy}.y'^2_u + f'_x.x''_{uu} + f'_y.y''_{uu}.$$

Намерете F''_{uv} и F''_{vv} самостоятелно. При дълги пресмятания избягвайте означенията на Якоби (от вида $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial x}{\partial u}$). В кои точки се вземат f''_{xx} и x'_u? Можем да напишем и така:

$$F''_{uu} = \left(x'_u \frac{\partial}{\partial x} + y'_u \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f + x''_{uu}\frac{\partial f}{\partial x} + y''_{uu}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Напишете по същия начин изразите за F''_{uv} и F''_{vv}. Особено прости са получените формули, ако x и y са полиноми на u и v от първа степен. За този случай намерете и производните от по-висок ред на функцията F.

5.2. Да намерим производната на функцията x^x. Някои диференцират така: $(x^x)' = x x^{x-1} = x^x$ (по формулата $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$); други прилагат формулата $(a^x)' = a^x \ln a$ и получават $(x^x)' = x^x \ln x$. Верният отговор е сумата на двата резултата: $x^x(\ln x + 1)$. Обяснете!

5.3. а) Ако $f(u,v)$ е от $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$,

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6}(y+z) + \frac{x^2yz}{2} + f(y-x, z-x),$$

то пресметнете $\varphi'_x + \varphi'_y + \varphi'_z$;

б) Нека $U = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$, $u \in C^1(U)$, съществува u''_{xx}. Ако $u'_t = a^2 u''_{xx}$ $(a > 0)$, докажете, че и функцията

$$v(x,t) = \frac{1}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} . u\left(\frac{x}{a^2t}, -\frac{1}{a^4t}\right)$$

удовлетворява същото уравнение;

в) Докажете, че ако

$$u = yf(x+z) + g(xy, yz), \quad f \in C^2(\mathbb{R}), \quad g \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right),$$

то

$$(x-z)u''_{xz} + y(u''_{xy} - u''_{yz}) = xu''_{xx} - zu''_{zz} + u'_x - u'_z;$$

г) Ако $\varphi(u,v)$ е от $C^3\left(\mathbb{R}^2\right)$ и при $y, z \neq 0$ положим $f(x,y,z) = \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$, докажете, че $f'''_{xyz} = \frac{2}{z^3}\varphi''_{uv} + \frac{y}{z^4}\varphi'''_{uvv}$;

д) Нека $\varphi, \psi \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ и удовлетворяват условията на Коши — Риман: $\varphi'_u = \psi'_v$, $\varphi'_v = -\psi'_u$ (зад. 4.7), $z \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ и $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$. Ако $w(u,v) = z(\varphi(u,v), \psi(u,v))$, докажете, че $w''_{uu} + w''_{vv} = 0$;

е) Ако $\Delta u = 0$ и $v = \frac{1}{r}u\left(\frac{a^2x}{r^2}, \frac{a^2y}{r^2}, \frac{a^2z}{r^2}\right)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq 0$, докажете, че $\Delta v = 0$;

ж) Както в зад. 1.18 елиминирайте φ: $u = \varphi(x-y, y-z)$.

5.4. а) Проверете непосредствено, че

$$\frac{D(\Phi,\Psi)}{D(u,v)} = \frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)} \cdot \frac{D(x,y)}{D(u,v)}.$$

Тук φ, ψ, x, $y \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, $\Phi(u,v) = \varphi(x(u,v), y(u,v))$, $\Psi(u,v) = \psi(x(u,v), y(u,v))$;

б) За $f, g \in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ и $x, y, z \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ да положим

$$F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad G(u,v) = g(x(u,v), y(u,v)z(u,v)).$$

Докажете, че:

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)} = \frac{D(f,g)}{D(x,y)} \cdot \frac{D(x,y)}{D(u,v)} + \frac{D(f,g)}{D(y,z)} \cdot \frac{D(y,z)}{D(u,v)} + \frac{D(f,g)}{D(z,x)} \cdot \frac{D(z,x)}{D(u,v)}.$$

5.5. Нека $y(x)$ е от $C^2(\mathbb{R})$, F — от $C^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ и y удовлетворява уравнението на Ойлер

$$F'_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y,y') = 0.$$

Докажете, че ако F не зависи от x, $F(x,y,y') - F'_{y'}(x,y,y')$ е константа. (Трите първи производни на F са означени F'_x, F'_y, $F'_{y'}$.)

5.6. Нека функцията f е дефинирана в едно отворено множество $U \subset \mathbb{R}^m$ и е локално хомогенна от степен $p \in \mathbb{R}$, т. е. за всяка точка x от U имаме $f(tx) = t^p f(x)$, когато t се мени в достатъчно малка околност на единицата. Докажете, че:

а) Ако $f \in C^1(U)$, то първите производни на f са локално хомогенни от степен $p-1$;

б) Ако $f \in C^1(U)$, то в сила е тъждеството на Ойлер

$$\sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = pf(x);$$

в) Ако $f \in C^2(U)$, то $\left(\sum\limits_{i=1}^m x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(x) = p(p-1)f(x);$

г) Ако $f \in C^n(U)$, то $\left(\sum\limits_{i=1}^m x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)^n f(x) = p(p-1)\ldots(p-n+1)f(x);$

д) Обратно, ако $g \in C^1(U)$ и за някое $p \in \mathbb{R}$ е в сила тъждеството на Ойлер за g навсякъде в U, то g е локално хомогенна в U от степен p.

Решение. а) Диференцираме по x_i равенството $f(tx) = t^p f(x)$. Всъщност $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m), f(tx) = f(tx_1, \ldots, tx_m)$. Получаваме $\dfrac{\partial f(tx)}{\partial x_i} \cdot t = t^p \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$. Следователно

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = t^{p-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x);$$

б) Диференцираме по t равенството $f(tx) = t^p f(x)$. Всъщност $f(tx) = f(tx_1, \ldots, tx_m)$. Имаме

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} \cdot x_i = pt^{p-1} f(x).$$

Полагаме $t = 1$. Как можем да намалим изискванията за f?

в) Диференцираме по t равенството

$$\sum_{i=1}^m tx_i \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} = pf(tx)$$

и полагаме $t = 1$:

$$\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = (p-1)\sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = p(p-1)f(x).$$

5.7. Нека G е отворено изпъкнало множество в $\mathbb{R}^m$, $f \in C^1(G)$, производните на f са ограничени. Докажете, че f е равномерно непрекъсната в G.

Решение. Ако $a, b \in G$, то и $a + t(b-a) \in G$ при $0 \leqq t \leqq 1$, защото това е точка от отсечката, която съединява a и b. Като образуваме $\varphi(t) = f(a+t(b-a))$, пресмятаме:

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^m (b_i - a_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+t(b-a)),$$

$$|f(b) - f(a)| = |\varphi(1) - \varphi(0)| = |\varphi'(\xi)|$$

$$\leqq M.\sum_{i=1}^m |b_i - a_i| \leqq mM.\sqrt{\sum_{i=1}^m (b_i-a_i)^2} = mM.\|b-a\|,$$

ако $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right| \leqq M$ за всяко i. Когато $\|b-a\| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{mM}$, в сила е $|f(b) - f(a)| < \varepsilon$. Приложихме оценката: $|x_i| \leqq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2} = \|x\|$. Можехме да напишем и така:

$$|f(b) - f(a)| = |\varphi'(\xi)| = |(\operatorname{grad} f(a+\xi(b-a)), b-a) \leqq L.\|b-a\|,$$

ако $|\operatorname{grad} f| \leqq L$ в G.

5.8. Докажете, че ако U е отворено изпъкнало множество в $\mathbb{R}^m$, $f \in C^1(U)$ и производните на f се анулират тъждествено в U, то f е константа.

Решение. Две точки $a, b \in U$ съединяваме с отсечката $\{a+t(b-a) : 0 \leqq t \leqq 1\} \subset U$ и като образуваме $\varphi(t) = f(a+t(b-a))$, пресмятаме

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\xi(b-a)).(b_i - a_i) = 0.$$

Следователно $f(a) = f(b)$. Изискването за изпъкналост на U е прекалено силно. Ако всеки две точки $a, b \in U$ могат да се съединят с гладка крива $x : [0,1] \to U$, $x_i \in C^1([0,1])$, $x(0) = a$, $x(1) = b$ и $\varphi(t) = f(x(t))$, то

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(\xi)).\dot{x}_i(\xi) = 0.$$

Може ли по същия начин да се намалят ограниченията в зад. 5.7? За случая на комплексна функция на една комплексна променлива $f(z)$ докажете, че ако $f'(z) = 0$ в някое отворено изпъкнало множество $U \subset \mathbb{C}$, то f е константа (вж. зад. 4.7).

5.9. Нека K е изпъкнало, а U — отворено множество в $\mathbb{R}^m$, $K \subset U$, $f \in C^1(U)$. Докажете, че ако в K функцията f достига при $x = a$ най-малка стойност, то $(\operatorname{grad} f(a), x - a) \geqq 0$ за всяко $x \in K$.

Р е ш е н и е. $x \in K$ и a съединяваме с отсечката $\{a + t(x-a) : 0 \leqq t \leqq 1\} \subset K$. Функцията $\varphi(t) = f(a + t(x-a))$ достига най-малка стойност в $[0,1]$ при $t = 0$. Тогава $\dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \geqq 0$ при $0 < t \leqq 1$ и следователно $\varphi'(0) \geqq 0$. Но

$$\varphi'(0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}(x_i - a_i) = (\operatorname{grad} f(a), x - a).$$

5.10. Нека $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$:

а) Докажете, че ако $yf'_x \leqq xf'_y$, то f зависи само от $x^2 + y^2$ (и неравенството всъщност е равенство);

б) Ако $f - yf'_x + xf'_y = 0$, докажете, че $f \equiv 0$.

Р е ш е н и е. а) Да положим $\varphi(t) = f(a\cos t, a\sin t)$, $a \geqq 0$ е фиксирано, $t \subset \mathbb{R}$. Пресмятаме

$$\varphi'(t) = -a\sin t.f'_x + a\cos t.f'_y = -yf'_x + xf'_y \geqq 0,$$

като $x = a\cos t$, $y = a\sin t$. Функцията φ е периодична и расте (защото $\varphi'(t) \geqq 0$), следователно е константа. За $f(x,y) = g(x^2 + y^2)$ проверяваме, че е налице равенство. Докажете, че и от $y^2 f''_{xx} - 2xyf''_{xy} + x^2 f''_{yy} \geqq xf'_x + yf'_y$ следва $f = g(x^2 + y^2)$ и неравенството е равенство $\left(f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$;

б) Полагаме $\varphi(t) = f(a\cos t, a\sin t)e^t$.

$$\varphi'(t) = (-a\sin t.f'_x + a\cos t.f'_y + f)e^t = (-yf'_x + xf'_y + f)e^t,$$

като $x = a\cos t$, $y = a\sin t$. Щом $\varphi' \equiv 0$, то $\varphi(t) = c$, $f(a\cos t, a\sin t) = ce^{-t}$. Лявата страна на това равенство е ограничена, тъй като е непрекъсната и периодична функция на t, а дясната страна при $c \neq 0$ не е ограничена. Следователно $c = 0$. Щом $f = 0$ върху всяка окръжност $x^2 + y^2 = a$, то $f \equiv 0$. Докажете, че от $f + yf'_x - xf'_y = 0$ също следва $f \equiv 0$.

5.11. Ако $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, $f(0,0) = 0$, $|f'_x(x,y)| \leqq 2|x-y|$ и $|f'_y(x,y)| \leqq 2|x-y|$, докажете, че $|f(x,y)| \leqq (x-y)^2$.

Р е ш е н и е. $f'_x(t,t) = f'_y(t,t) = 0$. За функцията $\varphi(t) = f(t,t)$ имаме $\varphi'(t) = f'_x(t,t) + f'_y(t,t) = 0$, следователно $\varphi(t) = \varphi(0) = 0$, $f(t,t) = 0$. При $x < y$ получаваме

$$|f(x,y)| = |f(x,y) - f(x,x)| = \left| \int_x^y f'_y(x,\eta)\, d\eta \right| \leqq \int_x^y |f'_y(x,\eta)|\, d\eta$$

$$\leqq \int_x^y 2(\eta - x)\, d\eta = (\eta - x)^2 \Big|_{\eta=x}^{\eta=y} = (y-x)^2.$$

Аналогично за $y < x$. Използвахме формулата на Нютон и Лайбниц: $g(b) - g(a) = \int_a^b g'$.

5.12. Нека $f(x_1, \ldots, x_m)$ е хомогенен полином от степен $n > 1$, $H(f) = \det\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ е детерминантата на Хесе. Докажете, че

$$H(f^2) = \frac{2^m(2n-1)}{n-1} f^m H(f).$$

5.13. Нека $x_i \in C^1(\Delta)$ за някой интервал Δ, $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_m(t)) \neq 0$ за всяко $t \in \Delta$. Тогава знаем, че $\dot{x}(t)$ е направляващ вектор на тангентата към кривата x в точката $x(t)$. Докажете:

а) Ако кривата x лежи върху повърхнината $x_m = f(x_1, \ldots, x_{m-1})$, то тангентата към кривата в точката $x(t)$ лежи в хиперравнината, допирателна в тази точка към повърхнината;

б) Ако $\Delta = [\alpha, \beta]$ и кривата x е затворена, т. е. $x(\alpha) = x(\beta)$, то за всеки даден вектор има точка от кривата, в която тангентата е перпендикулярна на вектора;

в) Нека $f(z)$ е функция на комплексна променлива $z = x + iy$, дефинирана в някоя околност U на $a \in \mathbb{C}$ $(f : U \to \mathbb{C})$. Нека още $z_1(t) = x_1(t) + iy_1(t)$ и $z_2(t) = x_2(t) + iy_2(t)$ са две криви в $\mathbb{C}$, които минават през a, $z_1(t_1) = z_2(t_2) = a$, $|\dot{z}_1(t_1)| \neq 0$, $|\dot{z}_2(t_2)| \neq 0$ (z_1 и z_2 са дефинирани съответно в околности на t_1 и t_2 (в $\mathbb{R}$) и имат производни съответно в t_1 и t_2). Докажете, че ако f е диференцуема в a и $f'(a) \neq 0$, то ъгълът между кривите z_1 и z_2 в точката a е същият както и ъгъла между кривите $f(z_1)$ и $f(z_2)$, т. е. f е конформна в a. (Припомнете си зад. 4.7.)

г) Ако $u \in C^1(\mathbb{R}^m)$ и удовлетворява уравнението

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = 0, \text{ т. е. } \frac{\partial u(x)}{\partial a(x)} = (\operatorname{grad} u(x), a(x)) = 0 \ (a_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}),$$

то от $\dot{x}_i(t) = a_i(x(t))$ за $i = 1, \dots, m$ следва, че $u(x(t))$ е константа.

Решение. а) $x_m(t) = f(x_1(t), \dots, x_{m-1}(t))$, затова

$$\dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)).\dot{x}_i(t).$$

Направляващият вектор (на тангентата)

$$\left(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{m-1}, \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\dot{x}_i\right)$$

е перпендикулярен на вектора

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{m-1}}(x), -1\right),$$

нормален към повърхнината $x_m = f$, защото скаларното произведение на двата вектора е нула;

б) Ако $a \in \mathbb{R}^m$, прилагаме теоремата на Рол към функцията $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i(t)$ $(\varphi(\alpha) = \varphi(\beta))$. Има $\tau \in (\alpha, \beta)$, така че

$$\varphi'(\tau) = \sum_{i=1}^{m} a_i \dot{x}_i(\tau) = 0, \quad \text{т. е.} \quad (a, \dot{x}_i(\tau)) = 0.$$

Не е необходимо изискването за диференцуемост на x_i при $t = \alpha, \beta$;

в) Нека $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. От зад. 4.7 знаем, че в точката a функциите u и v са диференцуеми, $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$, $f'(a) = u'_x + iv'_x$. Щом $f'(a) \neq 0$, то $u'^2_x + v'^2_x > 0$. Кривите z_1 и z_2 имат тангенти в a, като един от ъглите между тях е ъгълът $\varphi \in [0, \pi]$, който векторите $(\dot{x}_1, \dot{y}_1)$ и $(\dot{x}_2, \dot{y}_2)$ сключват,

$$\cos\varphi = \frac{\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{y}_1\dot{y}_2}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}\sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}}.$$

Този израз, пресметнат за кривите $f(z_1)$ и $f(z_2)$, се оказва същият. Извършете самостоятелно проверката.

5.14. За кривата $x(t)$, $y(t)$ в равнината $\mathbb{R}^2$ $(x, y \in C^1(\mathbb{R})$, $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0)$ векторът $v = (\dot{y}, -\dot{x})$ е нормален, т. е. перпендикулярен на тангенциалния вектор $(\dot{x}, \dot{y})$. Съответният единичен вектор е $n = \dfrac{v}{|v|}$. Ако $z(x, y)$ е от $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, пресметнете $\dfrac{\partial z(x(t), y(t))}{\partial n(t)}$.

5.15. а) Ако $x(t), y(t)$ и $z(t)$ са гладки криви в $\mathbb{R}^3$, а $\varphi(t)$ е гладка функция, докажете формулите:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi x) = \dot{\varphi}x + \varphi\dot{x}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(x, y) = (\dot{x}, y) + (x, \dot{y}),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(x \times y) = (\dot{x} \times y) + (x \times \dot{y}), \quad \frac{\partial}{\partial t}(xyz) = (\dot{x}yz) + (x\dot{y}z) + (xy\dot{z})$$

((x, y) означава скаларно, а (xyz) — смесено произведение);

б) Ако $z_1(t) = \alpha_1(t) + i\beta_1(t)$ и $z_2(t) = \alpha_2(t) + i\beta_2(t)$ са гладки криви в $\mathbb{C}$, то $\dfrac{\partial}{\partial t}(z_1 z_2) = \dot{z}_1 z_2 + z_1 \dot{z}_2$;

в) Ако $u_1(t) = \alpha_1(t) + i\beta_1(t) + j\gamma_1(t) + k\delta_1(t)$ и $u_2(t) = \alpha_2(t) + i\beta_2(t) + j\gamma_2(t) + k\delta_2(t)$ са гладки криви в H — тялото на кватернионите ($i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$; няма комутативност), то

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1 u_2) = \dot{u}_1 u_2 + u_1 \dot{u}_2.$$

§ 6. Диференциали

Както бе споменато в увода на §4, ако функцията $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$ е дефинирана в едно отворено множество U и е диференцуема в точката $x \in U$, то диференциал на f в x е линейното изображение

$$df(x)(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}.$$

Графиката на функцията $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mapsto f(x) + df(x)(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ в $\mathbb{R}^{m+1}$ с хиперравнина, допирателна в точката $(x, f(x))$ към графиката на f. Тъй като диференциал на функцията x_i във всяка точка е изображението $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mapsto \lambda_i$, то можем да напишем $df(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i$. Това изразяване остава в сила и ако x_i са функции. Например при $m = 3$ нека $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, x, y, z са дефинирани в някоя околност на точката (u_0, v_0) и са диференцуеми в (u_0, v_0), f е дефинирана в околност V на $(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$ и е диференцуема в тази точка. При тези предположения от теоремата за диференциране на съставни функции имаме

$$dF = (f'_x x'_u + f'_y y'_u + f'_z z'_u)\, du + (f'_x x'_v + f'_y y'_v + f'_z z'_v)\, dv$$

$$= f'_x \cdot (x'_u\, du + x'_v\, dv) + f'_y \cdot (y'_u\, du + y'_v\, dv) + f'_z \cdot (z'_u\, du + z'_v\, dv)$$

$$= f'_x\, dx + f'_y\, dy + f'_z\, dz.$$

Ако употребим буквата „f" и за означаване на функцията F, то ще получим $df = f'_x\, dx + f'_y\, dy + f'_z\, dz$, сякаш x, y и z са независими променливи. Често вместо да пишем $dx_1\left(\frac{1}{2}, \dots\right) = \frac{1}{2}$, записваме просто $dx_1 = \frac{1}{2}$. Нека положим още

$$d^2 f(x) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j \quad (\text{ако } f \in C^2(U)).$$

Това означава, че

$$d^2 f(x)(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \lambda_i \lambda_j.$$

Полагаме още

$$d^n f(x) = \sum \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} dx_{i_1} \dots dx_{i_n} \quad (\text{ако } f \in C^n(U)).$$

Символично записваме

$$d^n f(x) = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^n f(x).$$

Диференциалите от по-висок ред могат формално да се пресмятат и чрез последователно диференциране, при което dx_i се третират като константи. Валидни са познатите формули:

$$d(u+v) = du + dv, \quad d(uv) = v\,du + u\,dv, \quad d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}, \quad df(u) = f'(u)\,du.$$

6.1. Нека $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$:

а) Пресметнете $df(x,y,z)$;

б) Ако $z = z(x,y)$ е от $C^1(\mathbb{R}^2)$ и $F(x,y) = f(x,y,z(x,y))$, пресметнете $dF(x,y)$;

в) Ако $y(x)$ и $z(x)$ са от $C^1(\mathbb{R})$ и $\Phi(x) = f(x, y(x), z(x))$, пресметнете $d\Phi(x)$;

г) Докажете, че ако x_i са полиноми от първа степен на $t_1, \dots, t_l$, формата на всички диференциали на $f(x_1, \dots, x_m)$ се запазва;

д) Докажете, че ако $P(x_1, \dots, x_m)$ е хомогенен полином от n-та степен, то $d^n P = n! P(dx_1, \dots, dx_n)$. Сравнете със зад. 6.2 й).

6.2. Пресметнете:

а) dx^y; б) $d \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; в) $d \ln \sqrt{x^2 + y^2}$;

г) $d \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$; д) $d \ln |xy|$; е) $d \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}$;

ж) $d \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$;

з) $d \arccos \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}$;

и) $d^2 \ln|x+y|$; й) $d^3(xyz)$; к) $d^3\left(\frac{y}{x}\right)$;

л) $d^n e^{x+y}$; м) $d^2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Р е ш е н и е. г) При $xy \neq 1$:

$$df = d \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \frac{(1-xy)(dx+dy) + (x+y)(y\,dx + x\,dy)}{(1-xy)^2}$$

$$= \frac{(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy}{(1-xy)^2 + (x+y)^2} = \frac{(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$= \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2}.$$

Задачата е решена. С едно пресмятане намерихме и $f'_x = \dfrac{1}{1+x^2}$, и $f'_y = \dfrac{1}{1+y^2}$. Всъщност получихме $d(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = dg$. Ако $df = dg$, то $d(f-g) = 0$, първите производни на $f-g$ са равни на нула. Линията $xy = 1$ разделя равнината на три отворени свързани части, от които две са изпъкнали, а третата не е. Според зад. 5.8 $f-g$ е константа в двете изпъкнали части (поотделно), а според бележката, направена при решаването на тази задача, $f-g$ е константа и в третата, неизпъкнала част. Да намерим константата именно в тази част, където $xy < 1$. При $x = y = 0$ получаваме $f - g = 0$. Константата е нула и имаме

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \quad (xy < 1).$$

Намерете константата и за всяка от останалите две части. Огледайте и другите диференциали в този смисъл, например ж). Обмислете как бихте доказали педантично, че множествата $\{(x,y) : xy > 1,\ x > 0\}$ и $\{(x,y) : xy > 1,\ x < 0\}$ са изпъкнали, а всеки две точки на $A = \{(x,y) : xy < 1\}$ могат да се съединят с гладка крива в A;

и) При $x + y \neq 0$ имаме $d \ln|x+y| = \dfrac{dx+dy}{x+y}$, $d^2 \ln|x+y| = d\dfrac{dx+dy}{x+y} = \dfrac{-1}{(x+y)^2} d(x+y)(dx+dy) = -\left(\dfrac{dx+dy}{x+y}\right)^2$. Третирахме dx и dy като константи.

6.3. а) Докажете, че ако $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ и $df = P\,dx + Q\,dy$, то $P'_y = Q'_x$;

б) Ако $f \in C^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ и $df = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, то $P'_y = Q'_x$, $Q'_z = R'_y$, $R'_x = P'_z$.

Р е ш е н и е. а) $f'_x = P$, $f'_y = Q$; $P'_y = (f'_x)'_y = f''_{xy} = f''_{yx} = (f'_y)'_x = Q'_x$.

6.4. Интегрирайте следните диференциали, т. е. намерете всички функции f, за които:

а) $df = xy^2\,dx + (x^2 y + e^y)\,dy$ в $\mathbb{R}^2$;

б) $df = (x^2+y+z)\,dx + (x+y^2+z)\,dy + (x+y+z^2)\,dz$ в $\mathbb{R}^3$;

в) $df = \dfrac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2 y}\,dx + \dfrac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)}{xy^2}\,dy$ при $x, y > 0$;

г) $df = (x^2+y)\,dx + (x^2-y)\,dy$ в $\mathbb{R}^2$;

д) $df = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ в $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

Р е ш е н и е. а) При фиксирано y от $f'_x = xy^2$ получаваме $f = \dfrac{x^2}{2} y^2 + \varphi(y)$. Щом съществува f'_y, φ е диференцуема;

$$f'_y = x^2 y + \varphi'(y) = x^2 y + e^y, \quad \varphi'(y) = e^y,$$

$$\varphi = e^y + C, \quad f = \frac{x^2 y^2}{2} + e^y + C;$$

г) От $f'_x = x^2 + y$ имаме $f = \dfrac{x^3}{3} + yx + \varphi(y)$, $f'_y = x + \varphi'(y) = x^2 - y$. Не е възможен избор на φ. Още отначало трябваше да проверим дали е изпълнено условието за интегруемост от задача 6.3: $P'_y = Q'_x$. Тук то не е изпълнено и следователно не съществува търсената функция f;

д) Условието $P'_y = Q'_x$ е в сила. Нека $df = \dfrac{x dy - y dx}{x^2+y^2}$ при $(x,y) \neq (0,0)$. От $f'_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ при $x \neq 0$ имаме

$$f(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int \frac{d\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \varphi(x),$$

$$f'_x = \frac{-y}{x^2+y^2} + \varphi'(x) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad \varphi'(x) = 0,$$

следователно φ е константа (една за $x > 0$ и може би друга за $x < 0$). И така $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + C$ при $x > 0$, $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + C_1$

при $x < 0$. Нека $y > 0$. Тогава

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x,y) = \frac{\pi}{2} + C, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x,y) = -\frac{\pi}{2} + C_1,$$

следователно $\frac{\pi}{2} + C = -\frac{\pi}{2} + C_1$, $C_1 = C + \pi$. Но тогава при $y < 0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x,y) = -\frac{\pi}{2} + C \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x,y) = \frac{\pi}{2} + C + \pi$$

се различават с 2π, което е противоречие. Задачата няма решение в $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, въпреки че условието за интегруемост от зад. 6.3 а) е изпълнено. Ако от $\mathbb{R}^2$ махнем лъча $x = 0$, $y \leq 0$, то задачата има безброй решения. (C е произволно.)

6.5. В триъгълник със страни 2,4 м и 1,5 м първата страна расте със скорост 10 см/сек., а втората намалява със скорост 5 см/сек. Ъгълът между тях е $60°$ и расте със скорост $2°$ в секунда. С каква скорост се променя лицето?

Р е ш е н и е. Лицето е $S = \frac{ab}{2}\sin\gamma$ (a и b са страните, γ е ъгълът между тях). Получаваме

$$dS = \frac{b}{2}\sin\gamma . da + \frac{a}{2}\sin\gamma . db + \frac{ab}{2}\cos\gamma . d\gamma$$

$$= \frac{150}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10 - \frac{240}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 5 + \frac{240.150}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{90}$$

$$= 75\sqrt{3} + 100\pi = 75\sqrt{\frac{25}{9} + \frac{2}{9}} + 100\pi$$

$$= 75\cdot\frac{5}{3}\sqrt{1 + \frac{2}{25}} + 100\pi \approx 125\left(1 + \frac{1}{25}\right) + 314 = 125 + 5 + 314 = 444.$$

В първия момент лицето расте със скорост 444см^2/сек. (Защото диференциалът локално апроксимира „нарастването" на функцията.)

6.6. Пресметнете с лист и молив:

а) $\sqrt{(3{,}4)^2 + (4{,}3)^2}$; б) $\sqrt{(1{,}02)^3 + (1{,}97)^3}$;

в) $(2{,}02)^{3{,}03}$; г) $1{,}003.(2{,}004)^2.(3{,}005)^3$.

Р е ш е н и е. а) $d\sqrt{x^2+y^2} = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. При $x = 3$, $y = 4$, $dx = 0{,}4$, $dy = 0{,}3$ получаваме 0,48. Следователно

$$\sqrt{(3{,}4)^2 + (4{,}3)^2} \approx \sqrt{3^2 + 4^2} + 0{,}48 = 5{,}48;$$

в) $dx^y = yx^{y-1}dx + x^y \ln x\, dy = 3.2^2.(0{,}02) + 2^3 \ln 2.(0{,}03) = 0{,}24(1 + \ln 2)$. Ако сметнем най-грубо

$$\ln 2 = \ln\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{3}\right) \approx \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

то $dx^y \approx 0{,}4$. Така $(2{,}02)^{3{,}03} \approx 2^3 + 0{,}4 = 8{,}4$;

г) Най-грубо това е $1.2^2.3^3 = 108$. По-точно:

$$1{,}003.(2{,}004)^2(3{,}005)^3 = 1.2^2.3^3.1{,}003.(1{,}002)^2.\left(1{,}00\frac{5}{3}\right)^3$$

$$\approx 108.1{,}003.1{,}004.1{,}005 \approx 108.1{,}012 = 109{,}296 \approx 109{,}30.$$

Защото за $f = (1+x)(1+y)(1+z)$, $df(0,0,0) = dx + dy + dz$. Можем да разгледаме направо

$$g = (1+x)(1+y)^2(1+z)^3, \quad dg(0,0,0) = dx + 2\,dy + 3\,dz,$$

или

$$h = (1+x)(2+y)^2(3+z)^3, \quad dh(0,0,0) = 108(dx + dy + dz).$$

6.7. а) Ако du и dv са положителни числа, да разгледаме правоъгълника $P_1P_2P_3P_4$: $P_1(u,v)$, $P_2(u+du,v)$, $P_3(u+du,v+dv)$, $P_4(u,v+dv)$. Нека са дадени още функциите $x(u,v)$ и $y(u,v)$ от $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, а следователно и трансформацията $\tau : (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$. Пресметнете приблизително $\tau(P_i) \approx Q_i$, като вместо „нарастването" вземете диференциала, и намерете лицето S на четириъгълника $Q_1Q_2Q_3Q_4$;

б) Решете същата задача в тримерния случай, изхождайки от правоъгълен паралелепипед с размери du, dv, dw и със страни, успоредни на координатните оси.

Р е ш е н и е. а) $\tau(P_1) = (x(u,v), y(u,v)) = (x,y) = Q_1$,

$$\tau(P_2) = (x(u+du,v), y(u+du,v)) \approx (x + x'_u\,du, y + y'_u\,du) = Q_2,$$
$$\tau(P_3) = (x(u+du,v+dv), y(u+du,v+dv))$$
$$\approx (x + x'_u\,du + x'_v\,dv, y + y'_u\,du + y'_v\,dv) = Q_3,$$
$$\tau(P_4) = (x(u,v+dv), y(u,v+dv)) \approx (x + x'_v\,dv, y + y'_v\,dv) = Q_4.$$

Четириъгълникът $Q_1Q_2Q_3Q_4$ се оказва успоредник, построен върху векторите $\overrightarrow{Q_1Q_2} = (x'_u\,du, y'_u\,du)$ и $\overrightarrow{Q_1Q_4} = (x'_v\,dv, y'_v\,dv)$. По формулата за лице на успоредник, построен върху два вектора с общо начало, получаваме:

$$S = \left|\,\begin{vmatrix} x'_u\,du & y'_u\,du \\ x'_v\,dv & y'_v\,dv \end{vmatrix}\,\right| = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv.$$

Тук си послужихме с уговорката, че вместо $dx\left(\frac{1}{2},\dots\right) = \frac{1}{2}$ пишем просто $dx = \frac{1}{2}$.

6.8. Функцията $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ е хармонична в $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ (зад. 1.10 з). Намерете такива функции $v(x,y)$, че ако положим

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

f да се окаже диференцуема функция на комплексна променлива.

Решение. Условията на Коши–Риман от зад. 4.7 изискват $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$. Тогава

$$dv = v'_x\,dx + v'_y\,dy = -u'_y\,dx + u'_x\,dy = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Това е зад. 6.4 д). Проверете, че условията за интегруемост от зад. 6.3 а) са изпълнени тук при произволна хармонична функция u.

6.9. Докажете, че ако $F \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ и $dF = \frac{dx}{P} - \frac{dy}{Q}$, то при всеки избор на диференцуемата функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, като положим $u(x,y) = \varphi(F(x,y))$, ще имаме $Pu'_x + Qu'_y = 0$. Функциите P и Q са дефинирани в $\mathbb{R}^2$ и не се анулират.

Решение. $u'_x = \varphi'.F'_x = \frac{\varphi'}{P}$, $u'_y = \varphi'.F'_y = \frac{-\varphi'}{Q}$, $Pu'_x + Qu'_y = \varphi' - \varphi' = 0$. Намерете решения на уравнението $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (вж. зад. 9.7 в)).

6.10. Ако $P'_y \neq Q'_x$, то $P dx + Q dy$ не е диференциал на някоя функция (зад. 6.3). Можем да потърсим „интегриращ множител" $\mu(x,y)$, с оглед $\mu P\,dx + \mu Q\,dy$ евентуално да бъде диференциал на функция, като приравним $(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$:

а) Ако f и g са непрекъснати в $\mathbb{R}$ функции, потърсете интегриращ множител за $(f(x).y + g(x))\,dx - dy$ от вида $\mu = \mu(x)$;

б) За някой от множителите μ, получени в а), намерете всички функции $\Phi(x,y)$, за които $d\Phi = \mu(fy+g)\,dx - \mu\,dy$ в $\mathbb{R}^2$;

в) Изведете формула за решаване на линейното уравнение $y' = fy + g$ $(y = y(x))$.

Решение. а) Тук $P = fy + g$, $Q = -1$. От $(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$ имаме $\mu' + f\mu = 0$. Функцията $\mu(x) = e^{-\int f(x)\,dx}$ удовлетворява полученото равенство. (Този вид на μ бихме получили, ако отделим променливите както в зад. 4.5, ч. I, гл. 3.);

б) Да фиксираме интегриращия множител μ, като вземем една от примитивните на f: $\mu = e^{-F}$, $F' = f$. Нека $d\Phi = \mu(fy+g)\,dx - \mu\,dy$. От $\Phi'_y = -\mu$ получаваме $\Phi = -\mu(x)y + G(x)$, а от $\Phi'_x = \mu(fy+g)$ следва

$$G' = ge^{-F}, \quad G = \int g(x)e^{-F(x)}\,dx.$$

Обратно, при всеки избор на примитивната G получената функция Φ има нужния диференциал;

в) Ако $y(x)$ е функция от $C^1(\mathbb{R})$, за която $y' = fy+g$, то $\Phi(x, y(x))$ е константа, защото $\Phi'_x + \Phi'_y y' = \mu(fy+g) - \mu(fy+g) = 0$. Щом $-\mu y + G = C_1$, то $y = e^F(G + C)$. Проверка ни убеждава, че тези функции наистина удовлетворяват уравнението $y' = fy + g$.

§ 7. Формула на Тейлър

Нека U е отворено множество в $\mathbb{R}^m$, a и x са точки от U, като съединителната им отсечка се съдържа в U. Тогава, ако $f \in C^{n+1}(U)$, може да се намери число $\theta \in (0,1)$, за което е в сила формулата на Тейлър:

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a)(x-a) + \frac{1}{2!}d^2 f(a)(x-a) + \cdots$$

$$+\frac{1}{n!}d^n f(a)(x-a) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(a+\theta(x-a))(x-a)$$

или

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}d^k f(a)(h) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(a+\theta h)(h), \quad h = x-a.$$

Често означаваме $a+\theta(x-a)$ с една буква, например ξ. Това е вътрешна точка от съединителната отсечка на a и x. Ако $f \in C^\infty(U)$ и $d^{n+1}f(\xi)(x-a) \to 0$ при $n \to \infty$, то $f(x) = f(a) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}d^n f(a)(x-a)$ — ред на Тейлър. При $n=0$ имаме формулата за крайните нараствания:

$$f(x) = f(a) + df(\xi)(x-a).$$

Например, ако $m=2$, $f(x,y) = f(a,b) + f'_x(\xi,\eta)(x-a) + f'_y(\xi,\eta)(y-b)$. Тук ξ е между a и x, η — между b и y. Формулата на Тейлър–Пеано има сходен вид:

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(a)(x-a) + o(\|x-a\|^n) \quad (x \to a),$$

но съвсем различен смисъл — това е твърдение, че една граница при $x \to a$ е нула; тук не могат да се дават конкретни стойности на x. Вярно е, че при $n=1$ получаваме формулата, с която въведохме понятието диференцуемост на f в точката a, и във връзка с тази дефиниция дадохме в зад. 6.5–6.7 конкретни стойности на променливите. Направихме това във връзка с формулата, но не и в самата формула. Вместо $\frac{1}{k!}d^k f(a)(x-a)$ можем да пишем $\frac{1}{k!}\left((x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_m-a_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f(a)$.

7.1. Развийте по формулата на Тейлър–Пеано функциите:

а) $(1+x)^a(1+y)^b$ в $(0,0)$ до $o(r)$;

б) $\dfrac{(1+x)^2}{\sqrt[3]{(1-y)\sqrt[4]{(1+z)^3}}}$ в $(0,0)$ до $o(r)$;

в) $\sqrt{x^3+y^3}$ в $(1,2)$ до $o(r)$; г) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ в $(2,3)$ до $o(r)$;

д) x^y в $(1,1)$ до $o(r^2)$; е) $\dfrac{\cos x}{\cos y}$ в $(0,0)$ до $o(r^2)$;

ж) $\cos x\cos y\cos z - \cos(x+y+z)$ в $(0,0,0)$ до $o(r^2)$;

з) $\operatorname{arctg}\dfrac{1+x+y}{1-x+y}$ в $(0,0)$ до $o(r^2)$.

Тук $r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ за точката (a,b), $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ за точката $(0,0,0)$;

и) Развийте в ред на Тейлър $\dfrac{x}{y}$ в $(1,1)$, т. е. по степените на $x-1$ и $y-1$.

Решение. г) $df = d\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$

$= \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$.

Едновременно намерихме f'_x и f'_y. При $(x,y) \to (2,3)$ имаме

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + f'_x(2,3).(x-2) + f'_y(2,3)(y-3) + o(r).$$

Тук $r = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$. Така

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} - \frac{3}{13}(x-2) + \frac{2}{13}(y-3) + o(r);$$

и) $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{1+(y-1)} = 1-(y-1)+(y-1)^2 - \ldots$, защото това е сума на безкрайна геометрична прогресия, редът е сходящ при $|y-1| < 1$, т. е. при $0 < y < 2$. Умножаваме с $x = 1+(x-1)$: $\dfrac{x}{y} = 1 + dx - dy - dxdy + (dy)^2 + dx(dy)^2 - (dy)^3 + \cdots$, като положихме $dx = x-1$, $dy = y-1$; $x \in \mathbb{R}$, $y \in (0,2)$.

7.2. Нека изведем формулата на Тейлър–Пеано за функции на две променливи от нейния едномерен вариант, като разнием първо $f(x,y) = f(0,y) + xf'_x(0,y) + o(x)(x \to 0)$, а после $f(0,y) = f(0,0) + yf'_y(0,0) + o(y)$ и $f'_x(0,y) = f'_x(0,0) + o(1)$ при $y \to 0$ (вземе $n=1$). След заместване получаваме $f(x,y) = f(0,0) + xf'_x(0,0) + yf'_y(0,0) + o(\sqrt{x^2+y^2})$ при $(x,y) \to (0,0)$. Тук $x.o(1) = o(x)$, $o(x)$ и

$o(y)$ са $o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, защото

$$\frac{A}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{A}{x}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqq 1,$$

аналогично за $A = o(y)$. Законни ли са тези разсъждения?

Решение. Пишем равенството $f(x,y) = f(0,y) + xf'_x(0,y) + o(x)$ $(x \to 0)$ за фиксирано y, а после го прилагаме при $(x,y) \to (0,0)$. Че това не е законно дори при $n = 0$, ни убеждава функцията от зад. 1.8. За нея $f(x,y) = f(0,y) + o(1)$ $(x \to 0)$ и $f(0,y) = f(0,0) + o(1)$ $(y \to 0)$, но не е вярно, че $f(x,y) = f(0,0) + o(1)$ при $(x,y) \to (0,0)$, защото например $f(x,x) = \frac{1}{2}$, ако $x \neq 0$. Въпреки това за много от примерите на зад. 7.1 е удобно (и възможно) да приложим тъкмо едномерната формула. За случая 1 б):

$$\frac{(1+x)^2}{\sqrt[3]{(1-y)\sqrt[4]{(1+z)^3}}} = [1+2x+o(x)]\left[1+\frac{y}{3}+o(y)\right]\left[1-\frac{z}{4}+o(z)\right]$$

$$= 1 + 2x + \frac{y}{3} - \frac{z}{4} + o\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

при $(x,y,z) \to (0,0,0)$. Действията са законни, защото функциите, обозначени тук с $o(x)$, $o(y)$ и $o(z)$, зависят съответно само от x, от y и от z. Разкрийте скобите и обмислете всички детайли.

7.3. Докажете, че при $(h,k) \to (0,0)$ и $r = \sqrt{h^2+k^2}$:

а) $f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b) = hkf''_{xy}(a,b) + o(r^2)$;

б) $f(a+h,b+k) - f(a+h,b-h) - f(a-h,b+k) + f(a-h,b-k)$
$$= 4hkf''_{xy}(a,b) + o(r^3);$$

в) $f(a+h,b+k) - 2f(a,b+k) + f(a-h,b+k) + f(a+h,b)$
$$+ f(a-h,b) - 2f(a,b) = 2h^2 f''_{xx}(a,b) + o(r^2);$$

г) $f(a+h,b) + f(a,b+h) + f(a-h,b) + f(a,b-h) - 4f(a,b)$
$$= h^2(f''_{xx}(a,b) + f''_{yy}(a,b)) + \frac{h^4}{12}(f^{\mathrm{IV}}_{x^4}(a,b) + f^{\mathrm{IV}}_{y^4}(a,b)) + o(h^5);$$

д) $f(a+h,b+h) + f(a+h,b-h) + f(a-h,b-h) + f(a-h,b+h)$
$$+4[f(a+h,b) + f(a,b+h) + f(a-h,b) + f(a,b-h)] - 20f(a,b)$$
$$= 12h^2(f''_{xx}(a,b) + f''_{yy}(a,b)) + o(h^3);$$

е) $f(a,b+k) + f(a,b-k) - \lambda^2 f(a+h,b) - \lambda^2 f(a-h,b)$
$$-2(1-\lambda^2)f(a,b) = k^2[f''_{yy}(a,b) - f''_{xx}(a,b)] + o(r^3),$$

$\lambda = \frac{k}{h}$, $\quad h \neq 0$, $\quad |\lambda| < 1$;

ж) $f(a,b+k) - \lambda f(a+h,b) - \lambda f(a-h,b) - (1-2\lambda)f(a,b)$
$$= k[f'_y(a,b) - f''_{xx}(a,b)] + o(h^3), \text{ ако } \lambda = \frac{k}{h^2},\ h \neq 0,\ |\lambda| < \frac{1}{2};$$

з) $(2\lambda+1)f(a,b+k) + (2\lambda-1)f(a,b-k) - 2\lambda f(a+h,b)$
$$-2\lambda f(a-h,b) = 2k.[f'_y(a,b) - f''_{xx}(a,b)] + o(h^3),$$

$\lambda = \frac{k}{h^2}$, $\quad h \neq 0$, $\quad |\lambda| \leqq A$;

и) $f(a,b+k) - f(a,b-k) - 2\lambda f(a+h,b) - 2\lambda f(a-h,b) + 4\lambda f(a,b)$
$$= 2k[f'_y(a,b) - f''_{xx}(a,b)] + o(h^3), \ \ \lambda = \frac{k}{h^2},\ h \neq 0,\ |\lambda| \leqq A.$$

В а) и в) $f \in C^3(U)$, в г) $f \in C^5(U)$, а в останалите случаи $f \in C^4(U)$, като U е някоя околност на точката (a,b).

Решение. а) $f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)$
$$= \left[f + hf'_x + kf'_y + \frac{h^2}{2}f''_{xx} + \frac{2hk}{2}f''_{xy} + \frac{k^2}{2}f''_{yy} + o(r^2)\right]$$
$$- \left[f + hf'_x + \frac{h^2}{2}f''_{xx} + o(r^2)\right] - \left[f + kf'_y + \frac{k^2}{2}f''_{yy} + o(r^2)\right] + f$$
$$= hkf''_{xy} + o(r^2).$$

Функцията f и производните ѝ се вземат в точката (a,b).

7.4. Нека U е околност на точката $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, V — околност на a, $f \in C^\infty(U)$, $y \in C^\infty(V)$, $y(a) = b$, $(x, y(x)) \in U$ за всяко $x \in V$. Ако $y'(x) = f(x, y(x))$ във V, докажете, че при $h \to 0$:

а) $y(a+h) = y(a) + hf(a,b) + o(h)$ (метод на Ойлер);

б) $y(a+h) = y(a) + hf(a+h, y(a+h)) + o(h)$;

в) $y(a+h) = y(a) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + o(h^4)$, като

$k_1 = f(a,b), \quad k_2 = f\left(a + \frac{h}{2}, b + \frac{h}{2}k_1\right), \quad k_3 = f\left(a + \frac{h}{2}, b + \frac{h}{2}k_2\right),$

$k_4 = f(a+h, b+hk_3)$ (метод на Рунге–Кута);

Намерете константите:

г) $y(a+h) = y(a) + h[Af(a,b) + Bf(a+Ch, b+Dhf(a,b))] + o(h^2)$;

д) $y(a+h) = Ay(a) + By(a-h) + hCf(a,b) + o(h^2)$;

е) $y(a+h) = Ay(a) + h[Bf(a,b) + Cf(a-h, y(a-h))] + o(h^2)$;

ж) $y(a+h) = Ay(a) + By(a-h) + Cy(a-2h)$
$\quad + h[Df(a,b) + Ef(a-h, y(a-h))] + o(h^4)$;

з) $y(a+h) = Ay(a) + By(a-h) + h[Cf(a,b) + Df(a-h, y(a-h))$
$\quad + Ef(a-2h, y(a-2h))] + o(h^4)$;

и) $y(a+h) = Ay(a) + h[Bf(a+h, y(a+h)) + Cf(a,b)] + o(h^2)$;

й) $y(a+h) = Ay(a) + By(a-h) + h[Cf(a+h, y(a+h)) + Df(a,b)$
$\quad + Ef(a-h, y(a-h))] + o(h^4)$.

Решение. Развиваме двете страни на всяко равенство около точката a, т. е. прилагаме все формулата на Тейлър–Пеано за случая на една променлива. При диференцирането срещаме съставни функции и вземаме предвид, че $y' = f(x,y)$.

а) $y(a+h) = y(a) + hy'(a) + o(h) = y(a) + hf(a,b) + o(h)$. По този метод на Ойлер при дадени f, a и b можем стъпка по стъпка да възстановим приблизително функцията $y(x)$. (Като носим цялата отговорност за това, че във връзка с асимптотично равенство даваме конкретни стойности на променливата. Остава нерешен и въпросът за съществуване на функцията $y(x)$.);

б) $y(a+h) - y(a) - hf(a+h, y(a+h)) = y(a) + hf(a,b) + o(h) - y(a) - h[f(a,b) + o(1)] = o(h)$. Във връзка с тази формула можем да коригираме прогнозата от а), като отдясно в б) вместо $y(a+h)$ поставим израза от а) $y_0(a+h) = y(a) + hf(a,b)$ и от б) намерим $y_1(a+h) = y(a) + hf(a+h, y_0(a+h))$. Може да коригираме и $y_1(a+h)$ по същия начин (чрез б)) и т. н., а после да преминем към следващата стъпка. Изтълкувайте геометрично тези две, а и други формули;

в) Решете задачата самостоятелно. Проверете още, че ако f зависи само от x, това по същество е формулата на Симпсън от зад. 12.10 б), ч. I, гл. 3.

7.5. Нека в зад. 7.4 вместо $y' = f$ да имаме $y''(x) = f(x, y(x))$. Докажете, че при $h \to 0$:

а) $y(a+h) = 2y(a-h) - y(a-3h) + \frac{4h^2}{3}[f(a,b) + f(a-h, y(a-h))$
$\quad + f(a-2h, y(a-2h))] + o(h^4)$;

б) $y(a+h) = 2y(a) - y(a-h) + \frac{h^2}{12}[f(a+h, y(a+h)) + 10f(a,b)$
$\quad + f(a-h, y(a-h))] + o(h^4)$.

7.6. Нека K е квадрата $0 \leqq x, y \leqq 1$; $f \in C^1(K)$, $|f'_x| + |f'_y| \leqq 1$, $f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1) = 0$. Докажете, че $|f| \leqq \frac{3}{4}$ в K.

Решение. $f = f(x,y) = \frac{1}{4}[f - f(0,0) + f - f(0,1) + f - f(1,0) + f - f(1,1)]$.

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |xf'_x(\xi_1,\eta_1) + yf'_y(\xi_1,\eta_1)|$$
$$\leqq x|f'_x(\xi_1,\eta_1)| + y|f'_y(\xi_1,\eta_1)| \leqq \max(x,y),$$

щом $|f'_x| + |f'_y| \leqq 1$. Прилагаме още три пъти формулата за крайните нараствания и получаваме

$$|f(x,y)| \leqq \frac{1}{4}[\max(x,y) + \max(x, 1-y) + \max(y, 1-x)$$
$$+ \max(1-x, 1-y)] = \frac{1}{4}g(x,y).$$

Този израз остава същият, ако разменим x и y, или x и $1-x$ или y и $1-y$. Следователно можем да считаме, че $x \geqq y \geqq \frac{1}{2}$. Тогава $g(x,y) = x + x + y + 1 - y = 2x + 1 \leqq 3$.

7.7. а) Нека $f \in C^2([a,b])$ и $|f''| \leqq M_2$. Да разделим интервала $[a,b]$ на n равни части с точките $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$ и да вземем средите

11

на всяка от частите $p_i = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$. Докажете, че

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(p_i)\right| \leqq \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2};$$

б) Нека K е правоъгълникът $a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d$ и $f \in C^2(K)$. В частност f е непрекъсната в K. Ако знаем, че оттук следва непрекъснатост в $[a,b]$ на функцията $x \mapsto \int_c^d f(x,y)\,dy$ (гл. 5), то можем да образуваме повторния интеграл $\int_a^b(\int_c^d f(x,y)\,dy)\,dx$. Разделяме и $[c,d]$ с точките $y_j = c + \dfrac{d-c}{n}j$ и въвеждаме средите $q_j = \dfrac{y_{j-1}+y_j}{2}$. Докажете, че

$$\delta = \left|\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx - \frac{(b-a)(d-c)}{n^2}\sum_{i,j=1}^n f(p_i,q_j)\right|$$

$$\leqq \frac{M_2}{12n^2}(b-a)(d-c)[(b-a)^2+(d-c)^2],$$

като M_2 е горна граница в K за абсолютните стойности на вторите производни на f.

Решение. б)

$$\delta = \left|\sum_{i,j=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{y_{j-1}}^{y_j}[f(x,y)-f(p_i,q_j)]\,dy\right)dx\right|,$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{y_{j-1}}^{y_j}[f(x,y)-f(p_i,q_j)]\,dy\right)dx$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{-k}^{k}[f(x,t+q_j)-f(p_i,q_j)]\,dt\right)dx$$

$$= \int_{-h}^{h}\left(\int_{-k}^{k}[f(s+p_i,t+q_j)-f(p_i,q_j)]\,dt\right)ds$$

$$= \int_{-h}^{h}\left(\int_{-k}^{k}[\varphi(s,t)-\varphi(0,0)]\,dt\right)ds.$$

Първо положихме $y - q_j = t$, а после $x - p_i = s$, $k = \dfrac{d-c}{2n}$, $h = \dfrac{b-a}{2n}$, $\varphi(s,t) = f(s+p_i, t+q_j)$. За правоъгълника $\Delta : |s| \leqq h$, $|t| \leqq k$, $\varphi \in C^2(\Delta)$, M_2 е горна граница и за абсолютните стойности на вторите производни на φ. Пресмятаме

$$\varphi(s,t) - \varphi(0,0) = \varphi'_s(0,0)s + \varphi'_t(0,0)t + T,$$

$$2|T| = \left|\varphi''_{ss}(\theta s,\theta t)s^2 + 2\varphi''_{st}(\theta s,\theta t)st + \varphi''_{tt}(\theta s,\theta t)t^2\right|$$

$$\leqq M_2\left(s^2+2|st|+t^2\right) \leqq 2M_2\left(s^2+t^2\right),$$

защото $2|st| \leqq s^2+t^2$. По-нататък:

$$\int_{-h}^{h}\left(\int_{-k}^{k}[\varphi(s,t)-\varphi(0,0)]\,dt\right)ds = \int_{-h}^{h}\left(\int_{-k}^{k}[\varphi'_s(0,0)s+\varphi'_t(0,0)t+T]\,dt\right)ds$$

$$= \int_{-h}^{h}\left(2k\varphi'_s(0,0)s + \int_{-k}^{k}T\,dt\right)ds = \int_{-h}^{h}\left(\int_{-k}^{k}T\,dt\right)ds,$$

$$\left|\int_{-h}^{h}\left(\int_{-k}^{k}T\,dt\right)ds\right| \leqq \int_{-h}^{h}\left(\int_{-k}^{k}M_2(s^2+t^2)\,dt\right)ds = M_2\int_{-h}^{h}\left(2ks^2+\frac{2k^3}{3}\right)ds$$

$$= M_2\left(2k\frac{2h^3}{3}+2h\frac{2k^3}{3}\right) = \frac{4M_2}{3}hk(h^2+k^2).$$

Тогава

$$\delta \leqq \frac{4M_2}{3}\frac{(b-a)(d-c)}{16n^4}\left[(b-a)^2+(d-c)^2\right]\sum_{i,j=1}^n 1,$$

но $\sum_{i,j=1}^n 1 = n^2$. Какви оценки ще получим, ако вземем вместо p_i и q_j точките x_i и y_j?

§ 8. Изследване на критични точки

Нека функцията f е дефинирана в околност U на точката $a \in \mathbb{R}^m$ и е диференцуема в a. Ако $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$ за $i = 1, \dots, m$, a се нарича *критична (стационарна) точка* на f. Ако още $f \in C^2(U)$ и квадратичната форма

$$d^2 f(a) : \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mapsto \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \lambda_i \lambda_j$$

е положително дефинитна (т. е. $d^2 f(a)(\lambda) > 0$ при $\lambda \neq 0$), то f има в точката a строг *локален минимум*, а ако е отрицателно дефинитна (т. е. $d^2 f(a)(\lambda) < 0$ при $\lambda \neq 0$), то f има в точката a строг *локален максимум*. Ако $d^2 f(a)(\lambda)$ приема и положителни, и отрицателни стойности, то f няма локален екстремум в a. Според критерия на Силвестър формата $d^2 f(a)$ е положително дефинитна тогава и само тогава, когато са положителни детерминантите

$$\Delta_k = \det \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{k},$$

и отрицателно дефинитна, само ако $(-1)^k \Delta_k > 0$ за $k = 1, 2, \dots, m$. При $m = 2$ тези условия приемат вида: Ако

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} (a, b) < 0,$$

f няма локален екстремум в точката (a, b), тя се нарича *седловидна точка* на f. Ако $\Delta_2 > 0$, то f има в (a, b) *строг локален минимум* при $f''_{xx}(a, b) > 0$ и *строг локален максимум* при $f''_{xx}(a, b) < 0$. Простият пример $f = x^2 + y^2$ може да ни припомни точните формулировки.

8.1. Намерете критичните точки и определете вида им:

а) $x^3 + y^3 - 3xy$; б) $x^4 + y^4 - x^2 - y^2$;

в) $x^2 + xy + y^2$; г) $x^2 + xy + y^4$;

д) $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$; е) $xy + yz + zx$;

ж) $x^4 + y^4 - (x + y)^2$; з) $x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$;

и) $x^3 + y^3 - (x + y)^2$; й) $(y - x^2)(2y - x^2)$;

к) $x^3 - y^3 - 3x + 3y$; л) $x^4 + y^4 - 2x^2$;

м) $x^2 y^3 (6 - x - y)$; н) $xy^2 z^3 (7 - x - 2y - 3z)$;

о) $e^{x^2 - y}(5 - 2x + y)$; п) $\frac{e^y}{\sqrt{x}}(1 - x^2 - y^2)$;

р) $xy \ln(x^2 + y^2)$; с) $x + y + 4 \sin x \sin y$;

т) $x - y - \sin x - \sin y$; у) $\int\limits_{\ln x}^{\ln y} (e^{t^2} - e^t)\, dt$;

ф) $x^2 y + xy^2 - 3axy$; х) $xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ $(a, b > 0)$;

ц) $x(y + 1)\sqrt{1 - x^2 - y^2}$; ч) $(1 + e^y) \cos x - ye^y$;

ш) $(5x + 7y - 25)e^{-(x^2 + xy + y^2)}$; щ) $(8x^2 - 6xy + 3y^2)e^{2x + 3y}$;

ъ) $xy + \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Решение. а) От системата $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ имаме $y = x^2$, $x = y^2$. Тогава $x = x^4$, $x(x^3 - 1) = 0$, $x = 0$ или $x = 1$, $y = x^2 = 0$ или 1. Намерихме две критични точки: $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 9(4xy - 1),$$

$$\Delta(0, 0) = -9 < 0, \quad \Delta(1, 1) = 9.3 > 0.$$

Точката $(0, 0)$ е седловидна, а в $(1, 1)$ функцията f има локален минимум, защото $f''_{xx}(1, 1) = 6 > 0$;

б) Трябва $2x(2x^2 - 1) = 0$, $2y(2y^2 - 1) = 0$, т. е. x и y независимо едно от друго могат да приемат стойностите $0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Получаваме общо $3.3 = 9$ точки. $\Delta = 4(6x^2 - 1)(6y^2 - 1)$, $f''_{xx} = 2(6x^2 - 1)$. Пресмятаме: $\Delta(0, 0) = 4 > 0$, $f''_{xx}(0, 0) = -2 < 0$, следователно в $(0, 0)$ имаме локален максимум; $\Delta\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \Delta\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -8 < 0$ — това са четири седловидни точки; $\Delta\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) = 16 > 0$ $(\varepsilon = \pm 1, \eta = \pm 1)$ и $f''_{xx}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) = 4 > 0$ — в тези четири точки f има локален минимум. Опитайте се да нарисувате графиката на f. Направете си една хартиена солница;

д) $Ax + By = 0$, $Bx + Cy = 0$, $\Delta = 4(AC - B^2)$. Ако $\Delta \neq 0$, системата има едно решение $(0, 0)$ — това е седловидна точка, ако

$\Delta < 0$; точка на локален максимум, ако $\Delta > 0$ и $A < 0$; точка на локален минимум, ако $\Delta > 0$ и $A > 0$. При $\Delta = 0$, ако $A \neq 0$, $C = \frac{B^2}{A}$, $f = \frac{1}{A}(Ax+By)^2$. Във всяка точка от правата $Ax+By=0$ функцията f има нестрог минимум при $A > 0$ и нестрог максимум при $A < 0$. Ако и $A = 0$, то $B = 0$ и $f = Cy^2$ има в точките $y = 0$ нестрог минимум при $C > 0$ и нестрог максимум при $C < 0$. Ако още $C = 0$, то $f \equiv 0$;

е) Една критична точка — $(0,0,0)$. Тук $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -1$, $\Delta_3 = 2$ и правилото е неприложимо. Щом $\Delta_2 < 0$, да фиксираме $z = 0$: $f(x,y,0) = xy$ — за тази функция $\Delta = \Delta_2 < 0$ при $x = y = 0$, следователно xy няма локален екстремум в $(0,0)$. (Това е ясно и без пресмятане: във всяка околност на $(0,0)$ функцията xy приема и положителни, и отрицателни стойности.) Следователно f няма локален екстремум в $(0,0,0)$;

ж) В $(1,1)$ и $(-1,-1)$ имаме локален минимум. Критична е и $(0,0)$, но $\Delta(0,0) = 0$. Да разгледаме f върху правата $y = tx$: $f(x,tx) = x^2[x^2(1+t^4)-(1+t)^2] < 0$ за достатъчно малки $x \neq 0$, ако е фиксирано $t \neq -1$. Но ако $t = -1, f(x,tx) > 0$ за $x \neq 0$. Следователно f няма екстремум в $(0,0)$. Все пак помним примера от зад. 2.16;

и) Функцията има локален минимум в $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ (докажете), а в $(0,0)$ няма локален екстремум, защото във всяка околност на тази точка приема стойности с различни знаци. Ще установим това по три начина.

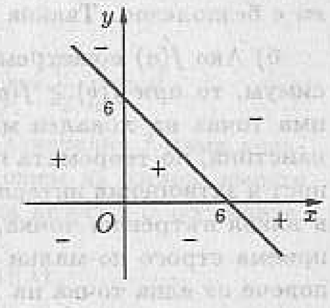
Първи начин: Да превърнем правата $x + y = 0$ в права $u = 0$, например като положим $u = x + y$, $v = x - y$. Тогава $f(x,y) = \frac{u}{4}(u^2 + 3v^2 - 4u)$ има знака на u, ако $v \neq 0$ е фиксирано, а u е достатъчно малко.

Втори начин: $\varphi(x) = f(x,tx) = x^2[x(1+t^3) - (1+t^2)]$ при $x_t = \frac{t+1}{t^2-t+1}$ се анулира, като сменя знака си ($t \neq -1$ е фиксирано). При $t \to -1$ имаме $(x_t, tx_t) \to (0,0)$.

Трети начин: Ако $(0,0)$ е точка на локален екстремум, то има околност U на тази точка, в която стойността $f(0,0) = 0$ е екстремална. Но тогава при $(x,-x) \in U$ и стойностите $f(x,-x) = 0$ са екстремални в U и следователно системата $f'_x = 0, f'_y = 0$ има безброй много, а не две решения.

Начертайте кривата $f = x^3+y^3-(x+y)^2 = 0$. Тя съдържа правата $x+y=0$ и разделя равнината на три области. Определете знака на f във всяка от областите;

м) В точката $(2,3)$ имаме локален максимум. Критични са още точките от координатните оси, за тях $\Delta = 0$ и $f = 0$. f се анулира и върху правата $x + y = 6$. Тази права и осите делят равнината на няколко части. Лесно е да съобразим знака на f във всяка от частите (фиг. 2). Виждаме, че в точките $(x,0)$ и $(0,6)$ функцията f няма екстремум, в точките $(0,y)$ с $y > 6$ или $y < 0$ тя има нестрог локален максимум, а при $0 < y < 6$ — нестрог локален минимум.



Фиг. 2

8.2. Намерете локалните екстремуми на функциите:

а) $x^3 + y^3 + z^3$ при условие $x + y + z = 3$;

б) xy^2z^3 при условие $x + y + z = 6$.

Решение. а) Изразяваме $z = 3 - x - y$ и разглеждаме $\varphi(x,y) = x^3 + y^3 + (3-x-y)^3$. Тази функция има четири критични точки: в $(3,3)$, $(-3,3)$ и $(3,-3)$ тя няма екстремум, а в $(1,1)$ има локален минимум. Следователно функцията $f = x^3 + y^3 + z^3$, разгледана върху равнината $x + y + z = 1$, има в точката $(1,1,1)$ локален максимум (и няма други екстремуми);

б) Като заместим $x = 6 - y - z$, получаваме зад. 8.1 м).

8.3. Нека $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\varphi'' > 0$. Намерете локалните екстремуми на функцията $f(x,y) = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(-x-y)$.

8.4. а) Докажете, че в полуравнината $y < 1$ функцията $f = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$ има само една критична точка, тя е точка на строг локален максимум, но в нея f не приема най-голяма стойност;

б) Докажете, че ако една функция е дефинирана и непрекъсната в някой интервал и има локален екстремум в единствена точка от вътрешността му, това е строг абсолютен екстремум.

Решение. а) f има седловидна точка $(2,2)$, за която $y \not< 1$, и локален максимум в $(0,0)$. Но $f(5,0) = 25 > 0 = f(0,0)$. Следователно при търсене на най-голяма или най-малка стойност (за функции на няколко променливи) изследването на критичните точки е безполезно. Такива задачи вижте в §2 и §11;

б) Ако $f(a)$ е екстремалната стойност, например локален максимум, то при $f(b) \geqq f(a)$ за някоя точка $b \neq a$, между a и b ще има точка на локален минимум за f, което е противоречие. И наистина, по теоремата на Вайерщрас f достига най-малка стойност в затворения интервал с краища a и b и това трябва да стане в някоя вътрешна точка, тъй като в съседство с a функцията f приема строго по-малки от $f(a)$ стойности. (Иначе бихме имали повече от една точка на локален максимум.)

8.5. Нека U е една околност на точката $a \in \mathbb{R}^m$ и $f \in C^\infty(U)$. В редицата $df(a)$, $d^2f(a), \dots$ нека първият ненулев диференциал е $d^n f(a)$:

а) Докажете, че правилото, изказано в увода към този параграф относно $d^2 f(a)$, е валидно и за $d^n f(a)$ (без критерия на Силвестър);

б) Докажете, че f няма локален екстремум в a при нечетно n.

Решение. а) Функцията $s \mapsto d^n f(a)(s)$, разгледана върху единичната сфера $S^{m-1} : \|s\| = 1$, достига най-малка стойност μ в някоя точка s_1 и най-голяма стойност M в някоя точка s_2. Ако $d^n f(a)$ е положително дефинитна, то $0 < \mu \leqq M$; ако е отрицателно дефинитна, $\mu \leqq M < 0$; ако приема стойности с различен знак, то $\mu < 0 < M$. За $\mu > 0$ от

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{n!} d^n f(a)(x-a) + o(\|x-a\|^n) \quad (x \to a)$$

имаме при $x \neq a$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{\|x-a\|^n} = \frac{1}{n!} d^n f(a)\left(\frac{x-a}{\|x-a\|}\right) + o(1) \geqq \frac{\mu}{n!} + o(1) > \frac{1}{2}\frac{\mu}{n!} > 0$$

за достатъчно малко $\|x-a\|$, т. е. f има строг локален минимум в a. Аналогично разглеждаме случая $M < 0$. Ако $\mu < 0 < M$, нека τ е положително число, за което $a + \tau s_1 \in U$, $a + \tau S_2 \in U$ и нека $0 < t < \tau$. Тогава

$$f(a+ts_1) - f(a) = \frac{1}{n!} d^n f(a)(ts_1) + o(t^n) = \frac{t^n}{n!}\mu + o(t^n)$$

$$= t^n\left(\frac{\mu}{n!} + o(1)\right) < \frac{t^n}{2}\frac{\mu}{n!} < 0,$$

$$f(a+ts_2) - f(a) = t^n\left(\frac{M}{n!} + o(1)\right) > \frac{t^n}{2}\frac{M}{n!} > 0$$

за достатъчно малки стойности на t. Следователно f няма локален екстремум в a. Ако е необходимо, можем да вземем вместо U по малка изпъкнала околност на a (за да лежат в U отсечките, съединяващи a с $a + \tau s_1$ и $a + \tau s_2$);

б) При нечетно n: $d^n f(a)(-\lambda) = -d^n f(a)(\lambda)$.

8.6. Ако $F_k(x,y)$ е хомогенен полином от степен k и $F = F_0 + F_1 + \dots + F_n$, докажете, че $d^k F(0)(x,y) = k! F_k(x,y)$.

8.7. Нека U е околност на точката $a \in \mathbb{R}^m$ и $f \in C^2(U)$. Докажете, че ако $d^2 f(a)$ е положително дефинитна квадратична форма, то в достатъчно малка изпъкнала околност G на a функцията f е изпъкнала, т. е. от $x, y \in G$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geqq 0$ следва $f(\alpha x + \beta y) \leqq \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Решение. Полагаме $\varphi(t) = f(tx + (1-t)y)$, $0 \leqq t \leqq 1$,

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot (x_i - y_i),$$

$$\varphi''(t) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - y_i)(x_j - y_j) = d^2 f(tx + (1-t)y)(x-y) \geqq 0,$$

следователно φ е изпъкнала в $[0,1]$ и $\varphi(\alpha) = \varphi(1.\alpha + 0.\beta) \leqq \alpha\varphi(1) + \beta\varphi(0)$. Избрахме околността G толкова малка, че $d^2 f$ да остане положително дефинитна в точките от G. Това може да се направи, защото детерминантите Δ_k (от критерия на Силвестър) са непрекъснати функции и локално запазват знака си.

§ 9. Смяна на независимите променливи

Нека U е отворено множество в $\mathbb{R}^m$, функцията $f : U \to \mathbb{R}^m$ е обратима (от $x \neq y$ следва $f(x) \neq f(y)$) и $f(U) = V$. От теоремата за обратната функция имаме, че ако $f \in C^p(U,V)$ (т. е. компонентите на $f = (f_1, \dots, f_m)$ са от $C^p(U)$), $p \geqq 1$ и $\det f' = \dfrac{D(f_1,\dots,f_m)}{D(x_1,\dots,x_m)}$ не се анулира в U, то V е отворено, компонентите на обратната функция $f^{-1} = g = (g_1,\dots,g_m) : V \to U$ са от $C^p(V)$ и $g'(y) = f'^{-1}(g(y))$. Казваме, че f изобразява дифеоморфно U върху V, f е *дифеоморфизъм* от клас C^p. Ако $F(y_1,\dots,y_m) : V \to \mathbb{R}$, можем да разгледаме функцията $G(x) = F(f(x)) : U \to \mathbb{R}$. Положили сме $y = f(x)$, т. е. $y_i = f_i(x_1,\dots,x_m)$. От променливи $y_1,\dots,y_m$ минахме към променливи $x_1,\dots,x_m$. Обратно, от $G(x)$ можем да се върнем към $F(y) = G(g(y))$.

9.1. а) Решете квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, като положите $x = t + \alpha$ и анулирате с избор на α коефициента пред t;

б) В хомогенното уравнение $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ положете $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ и отделете променливите (вж. зад. 4.5, ч. I, гл. 3). Независимата променлива x остана, а сменихме „зависимата променлива“ y.

9.2. В уравненията:

а) $x^2y'' + xy' + y = 0$; б) $(1-x^2)y'' - xy' + a^2y = 0$;

в) $(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0$;

г) $y'' + \operatorname{th} x . y' + \dfrac{1}{4}(1 - \operatorname{th}^2 x)y = 0$,

направете съответната смяна на променливите:

а) $x = e^t$; б) $x = \cos t$ за $|x| < 1$, $x = \operatorname{ch} t$ за $x > 1$;

в) $x = \operatorname{tg} t$; г) $e^x = \operatorname{tg} t$;

д) Докажете, че смяната $ax+b = e^t$ трансформира уравнението на Ойлер

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x)$$

в уравнение с постоянни коефициенти пред неизвестната функция y и производните ѝ.

Р е ш е н и е. а) Нека $y : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ и y'' съществува. При $x = e^t \in (0, \infty)$ да положим $u(t) = y(x)$, т. е. $u(t) = y(e^t)$. Тогава $\ddot{u}(t)$ съществува за всяко t.

От $y(x) = u(\ln x)$:

$$y' = \frac{\dot{u}}{x}, \quad y'' = \frac{\ddot{u}\frac{1}{x} \cdot x - \dot{u}}{x^2} = \frac{\ddot{u} - \dot{u}}{x^2},$$

$$x^2y'' + xy' + y = (\ddot{u} - \dot{u}) + \dot{u} + u = \ddot{u}(\ln x) + u(\ln x)$$

за всяко $x > 0$. Тогава $\ddot{u}(t) + u(t) = 0$ за всяко реално t. Новото уравнение е $\ddot{u} + u = 0$. Задачата е решена. От зад. 7.5, ч. I, гл. 3, знаем, че от $\ddot{u} + u = 0$ в $\mathbb{R}$ следва $u(t) = A\cos t + B\sin t$. Следователно, ако y удовлетворява а), то $y(x) = A\cos\ln x + B\sin\ln x$ (A и B — константи). Обратно, с проверка се убеждаваме, че тези функции са решения. Необходима ли е проверката?

б) $(\operatorname{ch} t)' = \operatorname{sh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} > 0$ при $t > 0$, следователно $x = \operatorname{ch} t$ расте в $(0, \infty)$ и има обратна $t(x)$. Намираме $t'(x)$ като производна на обратна функция:

$$x = \operatorname{ch} t(x),\ 1 = \operatorname{sh} t(x) . t'_x,\ t'_x = \frac{1}{\operatorname{sh} t} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\ (t > 0).$$

Сега полагаме $u(t) = y(x) = y(\operatorname{ch} t)$, $y(x) = u(t(x))$, $y' = \dot{u}t'_x$ и пр. (за случая $x > 1$).

9.3. Опростете уравнението $Az'_x + Bz'_y + Cz = 0$ чрез смяна от вида: $u = \alpha x + \beta y$, $v = \gamma y$ (A, B, C — константи).

Р е ш е н и е. При $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$ от $u = \alpha x + \beta y, v = \gamma y$ следва $x = \dfrac{\gamma u - \beta v}{\alpha\gamma}, y = \dfrac{v}{\gamma}$ и обратно. Ако $z(x,y)$ е от $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, да положим $w(u,v) = z\left(\dfrac{\gamma u - \beta v}{\alpha\gamma}, \dfrac{v}{\gamma}\right)$. Тогава $w \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ и

$$z(x,y) = w(\alpha x + \beta y, \gamma y), \quad z'_x = \alpha w'_u, \quad z'_y = \beta w'_u + \gamma w'_v,$$

$$Az'_x + Bz'_y + Cz = (\alpha A + \beta B)w'_u + \gamma B w'_v + Cw.$$

Ако $B \neq 0$, $C \neq 0$, ще вземем $\alpha = \beta$, $\beta = -A$, $\gamma = -\frac{C}{B}$. Получава се $C.(w - w'_v)$. Новото уравнение е $w'_v = w$. (Ако $C = 0$, $B \neq 0$, полагането $\gamma = 1$ води до $w'_v = 0$; ако $B = 0$, уравнението е просто: $Az'_x + Cz = 0$.) Задачата е решена. Ако $z(x,y)$ от $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ удовлетворява уравнението $(B, C \neq 0)$, то $w'_v(\alpha x + \beta y, \gamma y) = w(\alpha x + \beta y, \gamma y)$, следователно $w'_v(u,v) = w(u,v)$ в $\mathbb{R}^2$. Фиксираме u. За функцията $f(v) = w(u,v)$ имаме $f' = f$, следователно $f(v) = D.e^v$ (зад. 7.5 д), ч. I, гл. 3). D е константа относно v, но може да зависи от u. Така

$$w(u,v) = \varphi(u)e^v, \quad z(x,y) = \varphi(Bx - Ay)e^{-\frac{C}{B}y}.$$

От представянето $\varphi(u) = e^{-v}w(u.v)$ виждаме, че $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$. Обратно, с проверка се убеждаваме, че за $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ функцията $z(x,y) = \varphi(Bx - Ay)e^{-\frac{C}{B}y}$ удовлетворява уравнението. Даже и ако $C = 0$, и ако не искаме непрекъснатост на φ'. Необходима ли беше проверката? Случаите $C = 0$ или $B = 0$ изучете самостоятелно.

9.4. Опростете уравнението на Ойлер $Az''_{xx} + Bz''_{xy} + Cz''_{yy} = 0$ чрез смяна от вида $u = x + \lambda y$, $v = x + \mu y$.

Р е ш е н и е. При $\lambda \neq \mu$ трансформацията е обратима, защото е линейна и с детерминанта $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \mu \end{vmatrix} = \mu - \lambda \neq 0$. Това е и якобиана $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$. Можем да решим и непосредствено тези уравнения относно x и y: $x = \dfrac{\mu u - \lambda v}{\mu - \lambda}$, $y = \dfrac{v - u}{\mu - \lambda}$. Нека $z(x,y)$ е от $C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$. Функцията $w(u,v) = z\left(\dfrac{\mu u - \lambda v}{\mu - \lambda}, \dfrac{v - u}{\mu - \lambda}\right)$ е също от $C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ и $z(x,y) = w(x+\lambda y, x+\mu y)$. Тогава $z'_x = w'_u + w'_v$, $z'_y = \lambda w'_u + \mu w'_v$. Производните на w се вземат в точката $(x+\lambda y, x+\mu y)$, което си припомняме, връщайки поглед към изходното равенство $z(x,y) = w(x+\lambda y, x+\mu y)$. По нататък:

$$z''_{xx} = (w''_{uu} + w''_{uv}) + (w''_{vu} + w''_{vv}) = w''_{uu} + 2w''_{uv} + w''_{vv},$$

$$z''_{xy} = (\lambda w''_{uu} + \mu w''_{uv}) + (\lambda w''_{vu} + \mu w''_{vv})$$
$$= \lambda w''_{uu} + (\lambda + \mu)w''_{uv} + \mu w''_{vv}),$$

$$z''_{yy} = \lambda(\lambda w''_{uu} + \mu w''_{uv}) + \mu(\lambda w''_{vu} + \mu w''_{vv}) = \lambda^2 w''_{uu} + 2\lambda\mu w''_{uv} + \mu^2 w''_{vv};$$

$$Az''_{xx} + Bz''_{xy} + Cz''_{yy}$$
$$= (A+B\lambda+C\lambda^2)w''_{uu} + (2A+(\lambda+\mu)B+2\lambda\mu C)w''_{uv} + (A+B\mu+C\mu^2)w''_{vv}.$$

Ако квадратното уравнение $\varphi(t) = A + Bt + Ct^2 = 0$ има два реални корена ($C \neq 0$, $B^2 - 4AC > 0$), ще ги вземем за λ и μ. Тогава новото уравнение е $w''_{uv} = 0$, защото

$$2A + (\lambda + \mu) + 2\lambda\mu C = 2A - \frac{B}{C}B + \frac{2A}{C}C = \frac{4AC - B^2}{C} \neq 0$$

(от формулите на Виет: $\lambda + \mu = -\dfrac{B}{C}$, $\lambda\mu = \dfrac{A}{C}$). Оттук първо $w'_u = f_1(u)$ — функция от $C^1(\mathbb{R})$, после $w = \int f_1(u)\,du + g(v) = f(u) + g(v)$. Тук $f \in C^2(\mathbb{R})$, тогава и $g \in C^2(\mathbb{R})$. Имаме $z(x,y) = f(x + \lambda y) + g(x + \mu y)$. Проверете. Не е необходима непрекъснатост на f'' и g''. Искаме z (а следователно и w) да има непрекъснати втори производни, за да можем да прилагаме формулата за диференциране на съставни функции до вторите производни. Изведете формулата от зад. 1.19. В зад. 1.20 г) и д) намерете h, а после g и v. Ако $C = 0$, но $A \neq 0$, разменяме ролите на x и y. Проверете, че ако $B^2 - 4AC = 0$ и λ е двойният корен на $\varphi(t) = 0$, а $\mu \neq \lambda$ е произволно, се стига до $w''_{vv} = 0$ (при $C \neq 0$; ако $C = 0$, то и $B = 0$, $Az''_{xx} = 0$). Ако $B^2 - 4AC < 0$, намерете λ и μ, за които $\lambda \neq \mu$, $\varphi(\lambda) = \varphi(\mu)$ и коефициентът пред w''_{uv} е нула. Тогава новото уравнение ще бъде $w''_{uu} + w''_{vv} = 0$. Задачите за квадратни тричлени не са така лесни! Никъде не използвахме явното изразяване на x и y чрез u и v. Достатъчно бе да знаем (при въвеждането на w), че $x(u,v)$ и $y(u,v)$ са от $C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$, а това е така, защото $u = x + \lambda y$ и $v = x + \mu y$ са даже от $C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$.

9.5. Напишете в полярни координати изразите:

а) $z'^2_x + z'^2_y$;

б) $\Delta z = z''_{xx} + z''_{yy}$ (о п е р а т о р н а Л а п л а с).

Р е ш е н и е. а) Връзката между полярни и декартови координати е: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$ (зад. 4.9). Трансформацията е обратима при $r > 0$ и да речем $0 \leqq \varphi < 2\pi$. Тя изобразява дифеоморфно отвореното множество $U : r > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi$, върху отвореното множество $V : y \neq 0$, ако $x \geqq 0$. (Може

$-\pi<\varphi<\pi$; $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}$.) Обратната трансформация е $r=r(x,y)$, $\varphi=\varphi(x,y)$. Разглеждаме равенствата $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ като тъждества между функции на x и y. Първо диференцираме по x:

$$1=r'_x\cos\varphi-r\sin\varphi.\varphi'_x,\quad 0=r'_x\sin\varphi+r\cos\varphi.\varphi'_x.$$

От тази система намираме

$$r'_x=\cos\varphi,\quad \varphi'_x=-\frac{\sin\varphi}{r}.$$

После диференцираме по y и намираме

$$r'_y=\sin\varphi,\quad \varphi'_y=\frac{\cos\varphi}{r}.$$

Нека $z\in C^1(V)$ и $w(r,\varphi)=z(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$. Тогава $w\in C^1(U)$ и $z(x,y)=w(r(x,y),\varphi(x,y))$. Пресмятаме

$$z'_x=w'_rr'_x+w'_\varphi\varphi'_x=\cos\varphi.w'_r-\frac{\sin\varphi}{r}w'_\varphi,\quad z'_y=\sin\varphi.w'_r+\frac{\cos\varphi}{r}w'_\varphi;$$

$$z'^2_x+z'^2_y=w'^2_r+\frac{1}{r^2}w'^2_\varphi.$$

Може и по друг начин — от $w(r,\varphi)=z(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$:

$$w'_r=z'_x\cos\varphi+z'_y\sin\varphi,\quad w'_\varphi=-z'_xr\sin\varphi+z'_yr\cos\varphi;$$

решаваме тази система и изразяваме z'_x и z'_y чрез w'_r и w'_φ.

Трети начин — от $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$:

$$dx=\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi,\quad dy=\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi;$$

$$dw=w'_r\,dr+w'_\varphi\,d\varphi=z'_x\,dx+z'_y\,dy$$

$$=(z'_x\cos\varphi+z'_y\sin\varphi)\,dr+(-z'_xr\sin\varphi+z'_yr\cos\varphi)\,d\varphi;$$

приравняваме коефициентите пред dr и $d\varphi$, а после решаваме системата относно z'_x и z'_y.

Четвърти начин — решаваме системата

$$dx=\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi,\quad dy=\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi$$

относно dr и $d\varphi$:

$$dr=\cos\varphi\,dx+\sin\varphi\,dy,\quad d\varphi=-\frac{\sin\varphi}{r}\,dx+\frac{\cos\varphi}{r}\,dy;$$

тогава

$$dz=z'_x\,dx+z'_y\,dy=dw=w'_r\,dr+w'_\varphi\,d\varphi$$

$$=\left(w'_r\cos\varphi-w'_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}\right)dx+\left(w'_r\sin\varphi+w'_\varphi\frac{\cos\varphi}{r}\right)dy;$$

приравняваме коефициентите пред dx и dy.

При първия и четвъртия начин си мислим всичко изразено в крайна сметка чрез x и y, а при втория и третия — чрез r и φ.

9.6. Напишете в сферични координати:

а) $u'^2_x+u'^2_y+u'^2_z$; б) $\Delta u=u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}$.

Решение. Връзката между сферични и декартови координати е

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta,$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta\quad\text{(зад. 4.9)}.$$

Трансформацията е обратима при $r>0$ и да речем $0\leqq\theta\leqq\pi$, $0\leqq\varphi<2\pi$. Тя изобразява дифеоморфно отвореното множество $U:r>0, 0<\theta<\pi, 0<\varphi<2\pi$ (или $-\pi<\varphi<\pi$, или $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}$) върху отвореното множество $V=\mathbb{R}^3\setminus\Big[\{$ оста $z\}\cup\{$ неотрицателната част на оста $x\}\Big]$. Обратната трансформация е $r=r(x,y,z)$, $\theta=\theta(x,y,z)$, $\varphi=\varphi(x,y,z)$. Производните намираме както в зад. 9.5. Можем да решаваме непосредствено или да сведем сферичната смяна към две цилиндрични (по същество — полярни) както в зад. 4.9. Продължете самостоятелно.

9.7. В следните изрази и уравнения направете смяна на променливите с помощта на съответните трансформачни формули:

а) $z'_x-z'_y=f(x+y):u=x,\ v=x+y$;

б) $yz'_x-xz'_y=0:u=x,\ v=x^2+y^2$;

в) $xz'_x+yz'_y=0:x=u, y=uv$;

г) $xz'_x+yz'_y=z:x=u, y=uv$;

д) $(x+y)z'_x=(x-y)z'_y:u=\ln\sqrt{x^2+y^2},\ v=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$;

е) $z_x'^2 + z_y'^2 : x = uv, y = \dfrac{u^2 - v^2}{2}$;

ж) $z_{tt}'' = a^2 z_{xx}'' : u = x - at, v = x + at \quad (a \neq 0)$;

з) $z_{xx}'' - z_{tt}'' = \sin z : u = \dfrac{x+t}{2}, v = \dfrac{x-t}{2}$;

и) $x^2 z_{xx}'' + 2xyz_{xy}'' + y^2 z_{yy}'' = 0 : x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$;

й) $x^2 z_{xx}'' + 2x(y-1)z_{xy}'' + (y-1)^2 z_{yy}'' = 0 : u = \dfrac{xy}{y-1}, v = \dfrac{x^2}{(y-1)^2}$;

к) $(1+x^2)z_{xx}'' + (1+y^2)z_{yy}'' + xz_x' + yz_y' = 0$:
$u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}),\ v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$;

л) $z_{xx}'' - yz_{yy}'' = \dfrac{1}{2} z_y' : u = x - 2\sqrt{y}, v = x + 2\sqrt{y}$;

м) $p_{xx}'' + p_{yy}'' + p_{zz}'' + p_{xy}'' + p_{yz}'' + p_{zx}'' = 0$:
$u = -x + y + z,\ v = x - y + z,\ w = x + y - z$;

н) $xp_x' + yp_y' + zp_z' : x^2 = vw, y^2 = uw, z^2 = uv$;

о) $x^2 p_{xx}'' + y^2 p_{yy}'' + z^2 p_{zz}'' + xyp_{xy}'' + yzp_{yz}'' + zxp_{zx}'' = 0$:
$x = vw,\ y = uw,\ z = uv$;

п) $x^2 p_{xx}'' + y^2 p_{yy}'' + z^2 p_{zz}'' + 2xyp_{xy}'' + 2yzp_{yz}'' + 2zxp_{zx}'' = 0$:
$u = \dfrac{y}{x},\ v = \dfrac{z}{x},\ w = y - z$;

р) $yz_{xx}'' + (x+y)z_{xy}'' + xz_{yy}'' = 0 : u = y - x, v = y^2 - x^2$;

с) $p_x' + p_y' + p_z' = 0 : u = x, v = y - x, w = z - x$.

Решение. а) От $z(x,y) = w(u,v) = w(x, x+y)$ имаме $z_x' = w_u' + w_v'$, $z_y' = w_y'$, $z_x' - z_y' = w_u' = f(v)$ и новият вид на уравнението е $w_u' = f(v)$. Задачата е решена. Нека изучим по-прецизно връзката между уравненията (А) : $z_x' - z_y' = f(x+y)$ и (Б) : $w_u' = f(v)$. Трансформацията $u = x$, $v = x + y$ дифеоморфно изобразява $\mathbb{R}^2$ върху $\mathbb{R}^2$, защото е линейна и има детерминанта $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Ако $z \in C^1(\mathbb{R}^2)$ и удовлетворява (А), то, като положим $w(u,v) = z(x,y) = z(u, v-u)$, и w ще бъде от $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ и както се убедихме, ще удовлетворява (Б). Искаме z (а следователно и w) да бъде от $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ (или $C^1(U)$, U — отворено), за да е валидна формулата за диференциране на съставни функции. Обратно, ако w е решение на (Б) от $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, то $z(x,y) = w(x, x+y)$ ще е решение на (А) от $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$. По уравнението $w_u' = f(v)$ има в $\mathbb{R}^2$ решения $w = uf(v) + g(v)$ при произволна функция g, каквато и да е дадената функция f (f и g са дефинирани в $\mathbb{R}$). В същото време $z(x,y) = w(x, x+y) = xf(x+y) + g(x+y)$ е решение на (А), само ако f' и g' съществуват, защото $g(y) = z(0,y)$, $f(1+y) = z(1,y) - g(1+y)$.

9.8. Нека $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ е функция на две комплексни променливи x и y, има непрекъснати частни производни до втори ред и $\varphi_{xx}'' + \varphi_{yy}'' = 0$. Направете смяната $u = x + iy$, $v = x - iy$ (вж. зад. 4.7 и 4.8).

Решение.

$\varphi(x,y) = w(u,v) = w(x+iy, x-iy), \quad \varphi_x' = w_u' + w_v', \quad \varphi_y' = iw_u' - iw_v'$,

$$\varphi_{xx}'' = w_{uu}'' + 2w_{uv}'' + w_{vv}'', \quad \varphi_{yy}'' = -w_{uu}'' + w_{uv}'' + w_{vu}'' - w_{vv}'',$$

$$\varphi_{xx}'' + \varphi_{yy}'' = 4w_{uv}'' = 0$$

(тогава $\varphi(x,y)$ има вида $f(x+iy) + g(x-iy)$). Ако вместо u и v употребим означенията z и $\overline{z}$ (те са спрегнати само ако x и y са реални), символично можем да напишем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \overline{z}}.$$

9.9. В израза $Az_{xx}'' + Bz_{xy}'' + Cz_{yy}''$ да направим смяна $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. Тук z, u, v са от $C^2(U)$, U е отворено в $\mathbb{R}^2$, трансформацията $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ дифеоморфно изобразява U върху някое отворено множество V, $A(x,y)$, $B(x,y)$ и $C(x,y)$ са дефинирани в U. Полагаме $z(x,y) = w(u,v) = w(u(x,y), v(x,y))$ и т. н. Нека в резултата $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$ са съответно коефициентите пред w_{uu}'', w_{uv}'' и w_{vv}'':

а) Докажете, че $\overline{B}^2 - 4\overline{A}\,\overline{C} = (B^2 - 4AC) \cdot \left(\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}\right)^2$;

б) Ако $B^2 - 4AC = 0$ и $\overline{A}$ или $\overline{C} = 0$, то $\overline{B} = 0$;

в) Ако $t = \alpha(x, y)$ анулира тъждествено в U израза $At^2 + Bt + C$ и $u'_x = \alpha u'_y$, то $\overline{A} = 0$. Ако $v'_x = \alpha v'_y$, то $\overline{B} = 0$.

§ 10. Неявни функции

Нека a е точка от $\mathbb{R}^m$, b — от $\mathbb{R}^n$, а U е околност на точката $(a, b) \in \mathbb{R}^{m+n}$. Ако $F \in C^p(U, \mathbb{R}^n)$, $p \geqq 1$, $F(a, b) = 0$ и $\det F'_y(a, b) \neq 0$, то има такава околност V на (a, b), че във V уравнението $F(x, y) = 0$ определя множество от точки, което е графика на функция f, дефинирана в околност W на a, $f \in C^p(W, \mathbb{R}^n)$. С други думи, има околност V на (a, b), околност W на a и функция $f \in C^p(W, \mathbb{R}^n)$, така че $(x, y) \in V$ и $F(x, y) = 0$ е еквивалентно на $x \in W$ и $y = f(x)$. Ясно е, че тогава $f(a) = b$ и $F(x, f(x)) = 0$ при $x \in W$. Ако $F = (F_1, \ldots, F_n)$ и $(x, y) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, то $\det F'_y$ е якобиана

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)} = \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right).$$

10.1. а) Да разгледаме функциите $y(x)$, дефинирани в $\mathbb{R}$ и удовлетворяващи уравнението $x^2 = y^2$. Колко такива функции има? Колко от тях са непрекъснати и колко — диференцуеми?

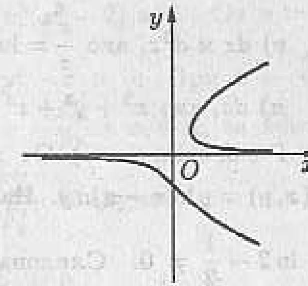
б) При фиксирано x колко решения y има уравнението $y^3 - 3xy + 1 = 0$? Колко непрекъснати функции $y(x)$ с максимална дефиниционна област удовлетворяват това уравнение?

Решение. б) Фиксираме x и разглеждаме

$$\varphi(y) = F(x, y) = y^3 - 3xy + 1; \quad \varphi'(y) = F'_y(x, y) = 3y^2 - 3x.$$

При $x \leqq 0$ функцията φ расте строго от $-\infty$ до $+\infty$ и се анулира в единствена точка $y_1(x)$. При $x > 0$ тя расте в $(-\infty, -\sqrt{x}]$ от $-\infty$ до $\varphi(-\sqrt{x}) > 0$, като се анулира в единствена точка $y_1(x)$, намалява в $[-\sqrt{x}, \sqrt{x}]$ до $\varphi(\sqrt{x})$ и отново расте до $+\infty$ в $[\sqrt{x}, \infty)$. Освен в $y_1(x)$ функцията φ не се анулира, ако $\varphi(\sqrt{x}) = 1 - 2x\sqrt{x} > 0$, т. е. при $x < \alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, анулира се още в една точка $y_2(\alpha) = y_3(\alpha)$ при $x = \alpha$ и се анулира в още две точки $y_2(x) < y_3(x)$, ако $\varphi(\sqrt{x}) < 0$, т. е. при $x > \alpha$. Функцията y_1 е дефинирана в $\mathbb{R}$, а y_2 и y_3 — в $[\alpha, \infty)$. Имаме: $y_1(x) < y_2(x) < y_3(x)$ при $x > \alpha$, $y_1(\alpha) < y_2(\alpha) = y_3(\alpha)$. Нека $L = \{(x, y) : F(x, y) = 0\}$. Ако едновременно $F = 0$ и $F'_y = 0$,

то $x = y^2$, $y = \beta = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Следователно във всяка точка на L, освен в точката (α, β), можем да приложим теоремата за неявната функция, решавайки относно y (тъй като $F'_y \neq 0$). Нека $a \neq \alpha$. Има такава околност V_i на точката $(a, y_i(a))$, че $V_i \cap L$ е графика на функция $f_i(x)$, дефинирана в околност w_i на a ($i = 1$ при $a < \alpha$, $i = 1, 2, 3$ при $a > \alpha$). $f_i \in C^\infty(W_i)$, защото $F \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$. След евентуално намаляване на W_i считаме, че $\alpha \notin W_i$. При $a < \alpha$ явно $f_1 = y_1$ в W_1. Нека $a > \alpha$. Щом f_i са непрекъснати в a, то за всяко $\varepsilon > 0$ има такава околност W на a, че $|f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$ при $x \in W$, $i = 1, 2, 3$ ($W \subset W_i$). При достатъчно малко ε това гарантира, че в W имаме $f_1 < f_2 < f_3$ и следователно $f_i = y_i$. Така функциите y_i се оказват безкрайно гладки в (α, ∞), а y_1 — и в $(-\infty, \alpha)$. При $a = \alpha$ е възможно $i = 1$ и разполагаме с решението $f_1 \in C^\infty(W_1)$, защото $F'_y \neq 0$ в точката $(\alpha, y_1(\alpha))$. При $x \leqq \alpha$ и $x \in W$ явно $f_1(x) = y_1(x)$. В точката (α, β) имаме $F'_y = 0$, но $F'_x = -3y \neq 0$ и следователно можем да приложим теоремата за неявната функция, решавайки относно x. В някоя околност V на (α, β) множеството $L \cap V$ е графика на функция $g(y)$, дефинирана в околност W на β и $g \in C^\infty(W)$. В случая функцията g е явна: $x = g(y) = \frac{y^3 + 1}{3y}$ $(y \neq 0)$. Като следите решението, имайте пред очи нарисуваното L, т. е. графиката на $x = \frac{y^3 + 1}{3y}$ (фиг. 3). Постройте тази графика самостоятелно. Има такова $\Delta > 0$, че в $[\alpha - \Delta, \alpha + \Delta]$ функцията $f_1 < \frac{\beta + y_1(\alpha)}{2}$.



Фиг. 3

Нека $\varepsilon > 0$ и е толкова малко, че $\varepsilon < \frac{\beta - y_1(\alpha)}{2}$, $[\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon] \subset W$ и при $|y - \beta| \leqq \varepsilon$ е изпълнено $|g(y) - \alpha| < \Delta$. При $y \neq \beta$ и $|y - \beta| \leqq \varepsilon$: $g(y) > \alpha$. Ако δ е положително и е по-малко от Δ, $g(\beta + \varepsilon) - \alpha$ и $g(\beta - \varepsilon) - \varepsilon$, то при $\alpha < x < \alpha + \delta$ има $\eta_2 \in (\beta - \varepsilon, \beta)$ и $\eta_3 \in (\beta, \beta + \varepsilon)$, така че $g(\eta_i) = x$. Тогава $f_1(x) < \eta_2 < \eta_3$ са три решения относно y на уравнението

$F(x,y)=0$, следователно $f_1(x)=y_1(x)$, $\eta_i=y_i(x)$, т. е. $|y_i(x)-\beta|<\varepsilon$, $i=2,3$. Оттук $y_1\in C^\infty(\mathbb{R})$, а y_2 и y_3 са непрекъснати в α. В конкретния случай можем да постъпим и така: $\dfrac{y^3+1}{3y}$ расте в $[\beta,\infty)$, като има непрекъсната обратна $y_3(x)$, и намалява в $(0,\beta]$, като има непрекъсната обратна $y_2(x)$ $(y_1<0)$, защото всяка строго монотонна в някой интервал функция има в него непрекъсната обратна.

За уравнението $y\left(x-\dfrac{1}{y^2}\right)\left[x^2+(y-1)^2\right]=0$ е почти очевидно, че при $x<0$ има едно, при $x=0$ — две, а при $x>0$ — три решения относно y, но ако въведем по същия начин y_1, y_2 и y_3, те ще имат прекъсване в точката $x=0$.

10.2. Намерете:

а) y', ако $x^y=y^x$ и $y\neq x$;

б) z'_x и z'_y, ако $z=x+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{z-x}$;

в) y' и y'', ако $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

г) dz и d^2z, ако $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}+1$;

д) dz, ако $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

Р е ш е н и е. а) От $x^y=y^x$, $x,y>0$: $y\ln x=x\ln y$. Нека $F(x,y)=y\ln x-x\ln y$. Например $F(2,4)=0$. $F'_y=\ln x-\dfrac{x}{y}$, $F'_y(2,4)=\ln 2-\dfrac{1}{2}\neq 0$. Следователно уравнението $F=0$ има решение $y(x)$, дефинирано в някоя околност U на точката 2, $y\in C^\infty(U)$. За това решение, а и за всички други решения, чието съществуване бихме установили във връзка с точките (a,b), за които $F(a,b)=0$, $F'_y(a,b)\neq 0$, можем да напишем: $y'\ln x+\dfrac{y}{x}-\ln y-\dfrac{x}{y}y'=0$ (защото $y(x)\ln x-x\ln y(x)\equiv 0$ в някой интервал). По-нататък

$$\left(\ln x-\frac{x}{y}\right)y'=\ln y-\frac{y}{x},\qquad y'=\frac{xy\ln y-y^2}{xy\ln x-x^2}.$$

Знаменателят е различен от нула в достатъчно малка околност на a, защото $F'_y(a,y(a))\neq 0$. Всъщност имаме

$$F'_x+F'_y.y'=0,\quad y'=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Извършете пресмятането за $F=x^y-y^x$.

10.3. Разгледайте въпроса за локалните екстремуми на гладките функции $y(x)$, $F(x,y(x))=0$, чието съществуване ни осигурява теоремата за неявната функция във връзка с точките (a,b), за които $F(a,b)=0$, $F'_y(a,b)\neq 0$ и $y'=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$:

а) $x^3+y^3-3xy=0$; б) $x^2+xy+y^2=3$;

в) $y^4-4xy+x^4=0$; г) $x^3-3xy+y^3=0$;

д) $z^3-xyz+y^2+4x^2=16$, $z=z(x,y)$;

е) $e^z+xyz-x^2y^2=0$, $z=z(x,y)$.

Р е ш е н и е. а) Има такива точки, например $(a,b)=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$. $y'=\dfrac{y-x^2}{y^2-x}=0$, $y=x^2$, $x^3+x^6-3x^3=x^3(x^3-2)=0$. От $x=0$ следва $y=0$, но тогава знаменателят $y^2-x=0$. При $x=\sqrt[3]{2}$ имаме $y=\sqrt[3]{4}$, $F'_y(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})\neq 0$. От $y'=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$ в точки, за които $y'=0$ (т. е. $F'_x=0$), получаваме $y''=-\dfrac{F''_{xx}}{F'_y}$. В случая

$$y''\left(\sqrt[3]{2}\right)=\frac{-2x}{y^2-x}\bigg|_{x=\sqrt[3]{2}}<0,$$

следователно y има локален максимум при $x=\sqrt[3]{2}$. (Ако y е дефинирана в околност на тази точка.)

10.4. Докажете, че ако:

а) $x^2+y^2=1$; б) $x^2y^2+x^2+y^2=1$;

в) $1+xy=a(x-y)$,

то съответно:

а) $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$; б) $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0$;

в) $\dfrac{dx}{1+x^2}=\dfrac{dy}{1+y^2}$;

г) Ако $z^3-2xz+y=0$ и $z(1,1)=1$, то развийте z около точката $(1,1)$ по формулата на Тейлър-Пеано до $o(r^2)$;

д) Решете уравнението $51x^3-x^2-48x+2=0$.

Решение. д) Уравнението $x^3-x=0$ има решения $x_0=0;\ 1;\ -1$. Въобще, ако $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$, $x=x(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, то

$$(3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\,dx+x^3\,d\alpha+x^2\,d\beta+x\,d\gamma+d\delta=0,$$

$$dx=-\frac{x^3\,d\alpha+x^2\,d\beta+x\,d\gamma+d\delta}{3\alpha x^2+2\beta x+\gamma}.$$

В случая $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=-1$, $\delta=0$. За

$$1{,}02x^3-0{,}02x^2-0{,}96x+0{,}04=0$$

имаме $d\alpha=0{,}02$; $d\beta=-0{,}02$; $d\gamma=d\delta=0{,}04$. При $x_0=0;\ 1;\ -1$ съответно $dx=0{,}04;\ -0{,}04;\ 0{,}02$; $x\approx x_0+dx=0{,}04;\ 0{,}96;\ -0{,}98$.

10.5. Нека функцията f е дефинирана в $\mathbb{R}^2$, съществуват и са непрекъснати f'_x, f'_y, f''_{yx} и f''_{yy}, за всяко x функцията $y\mapsto f(x,y)$ достига най-малка стойност в точката $y(x)$, а $f'_y(x,y)=0$ само при $y=y(x)$, и нека в точката (a,b) се достига $\max\limits_x(\min\limits_y f(x,y))$. Докажете, че ако $f''_{yy}(a,b)\neq 0$, то f'_x и f'_y се анулират в (a,b).

Решение. Щом $f''_{yy}(a,b)\neq 0$, то решението $y(x)$ на уравнението $f'_y(x,y)=0$ е от $C^1(U)$ при достатъчно малка околност U на a. Функцията $f(x,y(x))$ има максимум при $x=a$, следователно $f'_x+f'_yy'=f'_x(x,y(x))=0$ при $x=a$. $(y(a)=b)$

10.6. Нека $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$:

а) Пресметнете y' и y'' и разгледайте въпроса за локалните екстремуми на $y(x)$;

б) Докажете, че $\dfrac{d^3}{dx^3}\left((y'')^{-\frac{2}{3}}\right)=0$.

Решения $y(x)$ може да няма, например $x^2+y^2+1=0$.

10.7. Нека $F\in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ и в точката (x_0,y_0,z_0) имаме $F=0$, а F'_x, F'_y и F'_z са различни от нула. Тогава в достатъчно малка околност на (x_0,y_0,z_0) уравнението $F=0$ определя графики на функции $x(y,z)$, $y(x,z)$, $z(x,y)$. Докажете:

а) $\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x}=1$; б) $\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$.

10.8. Формулирайте достатъчни условия, при които дадените уравнения определят локално неявна функция $z(x,y)$ заедно с необходимите производни и докажете тъждествата:

а) $z=f(y-x\varphi(z)):z'_x+\varphi(z)z'_y=0, z(0,y)=f(y)$ (формула на Риман);

б) $h(z,y-xz)=0:z'_x+zz'_y=0$;

в) $x-az=f(y-bz):az'_x+bz'_y=1$;

г) $z=xf\left(\dfrac{z}{y}\right):xz'_x+yz'_y=z$;

д) $h\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0:xz'_x+yz'_y=z-xy$;

е) $ax+by+cz=f(x^2+y^2+z^2):(cy-bz)z'_x+(az-cx)z'_y=bx-ay$;

ж) $z=h(xy,az):x^2z''_{xx}=y^2z''_{yy}$;

з) $ax+z=f(by+z):z''_{xx}z''_{yy}=z''^2_{yy}$;

и) $x+z=f(y+z):\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n z}{\partial x^k\partial y^{n-k}}=0\quad(n>1)$;

й) $x-y=f(z^2e^{x+y}):\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n z}{\partial x^k\partial y^{n-k}}=(-1)^nz$;

к) $z-y=f(x+z)+g(x):(1+z'_x)z'''_{yyy}=z'_yz'''_{xyy}$;

л) $h\left(x^2-4z,\dfrac{(x+y)^2}{x}\right)=0:2xz''_{xy}+(y-x)z''_{yy}+z'_y=0$;

м) $y=xf(z)+g(z):(z'_y)^2z''_{xx}-2z'_xz'_yz''_{xy}+(z'_x)^2z''_{yy}=0$;

н) $f(z-x)=zg(y):z(z'_x-1)z''_{xy}=zz'_yz''_{xx}+z'_xz'_y(z'_x-1)$.

Р е ш е н и е. а) $F(x,y,z) = z - f(y - x\varphi(z))$, $F'_z = 1 + xf'\varphi'$. Нека f и φ са функции например от $C^1(\mathbb{R})$ и нека има точка (x_0, y_0, z_0), за която $z_0 = f(y_0 - x_0\varphi(z_0))$ (т. е. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$) и

$$1 + x_0 f'(y_0 - x_0\varphi(z_0)).\varphi'(z_0) \neq 0 \quad (\text{т. е. } F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0).$$

Тогава за достатъчно малка околност U на точката (x_0, y_0) има функция $z(x,y)$ от $C^1(U)$, която удовлетворява уравнението $F = 0$, $z(x_0, y_0) = z_0$ и $1 + xf'\varphi' \neq 0$ в U. Диференцираме тъждеството $z = f(y - x\varphi(z))$ по x и по y:

$$z'_x = f'.(-\varphi - x\varphi' z'_x), \quad z'_x = \frac{-\varphi f'}{1 + x\varphi' f'} \cdot z'_y = f'.(1 - x\varphi' z'_y),$$

$$z'_y = \frac{f'}{1 + x\varphi' f'}.$$

Наистина в U имаме $z'_x + \varphi(z) z'_y = 0$. Очевидно $z(0, y) = f(y)$, ако точката $(0, y) \in U$;

ж) За достатъчните условия вижте отговора. От $z = h(xy, az)$ имаме $z'_x = h'_1 y + h'_2 a z'_x$, $z'_y = h'_1 x + h'_2 a z'_y$. Оттук намираме z'_x и z'_y. Диференцираме равенствата още веднъж, за да намерим z''_{xx} и z''_{yy}. При диференцирането винаги имаме пред очи изходното уравнение $z = h(xy, az)$, за да си напомним, че h и производните ѝ се вземат в точката (xy, az). Помним още, че z е функция на x и y. (Или пишем подробно: $h'_1(xy, az)$, $h'_2(xy, az)$ и пр., но това затруднява при дълги сметки.)

$$z''_{xx} = y(h''_{11} y + h''_{12} a z'_x) + a z'_x (h''_{21} y + h''_{22} a z'_x) + h'_2 a z''_{xx}.$$

Като заместим z'_x с неговото равно, намираме z''_{xx}, а после аналогично и z''_{yy}. Може да диференцираме и изразите за z'_x и z'_y. Но по-добре е, след като намерим $z'_x = \dfrac{yh'_1}{1 - ah'_2}$, $z'_y = \dfrac{xh'_1}{1 - ah'_2}$, да потърсим връзка между тях. Очевидно $xz'_x = yz'_y$. Тук производните на h не участват. Диференцираме първо по x, после по y: $z'_x + xz''_{xx} = yz''_{yx}$, $xz''_{xy} = z'_y + yz''_{yy}$. Умножаваме първото равенство с x, второто — с y и събираме. Тъждеството е доказано. Още отначало можем да съобразим, че z зависи само от xy, $z = f(xy)$ (при същите достатъчни условия), $f \in C^2(U)$, U — достатъчно

малка околност на точката (x_0, y_0). Това представяне облекчава диференцирането;

и) $1 + z'_x = f' z'_x$, $\quad z'_y = f'(1 + z'_y)$, $\quad z'_x = \dfrac{1}{f' - 1}$, $\quad z'_y = \dfrac{-f'}{f' - 1}$.

Намираме проста връзка: $z'_x + z'_y = -1$, т. е. $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right) z = -1$.

Сега най-добре да напишем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^n z = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n z}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = 0 \qquad (n > 1).$$

Обмислете как ще докажете прецизно това равенство.

10.9. Съставете примери като тези от зад. 10.8 за уравненията:

а) $xz = f(yz)$; $\qquad$ б) $z = f(x^2 + y^2 - e^z)$;

в) $xy + z = f(ax + by + z)$; $\quad$ г) $ax^2 + z = f(by^2 + z)$;

д) $h(x - yz, y + z) = 0$.

Или просто докажете тъждествата, поместени като възможни отговори. Формулирайте достатъчни условия.

Р е ш е н и е. а) $z'_x = \dfrac{z}{yf' - x}$, $z'_y = \dfrac{-zf'}{yf' - x}$. Стремим се да елиминираме f'. Наистина: $xz'_x + yz'_y = -z$. Задачата е съставена, но като отговор е поместено друго тъждество. За да го получим, диференцираме нашето спрямо x и спрямо y, а после събираме. Достатъчно е f да бъде от $C^2(\mathbb{R})$, да има точка (x_0, y_0, z_0): $x_0 z_0 = f(y_0 z_0)$ и $y_0 f'(y_0 z_0) \neq x_0$. Тогава за някоя околност U на (x_0, y_0) ще има решение $z(x, y)$ от $C^2(U)$ и $yf'(yz) \neq x$ в U.

10.10. а) $x = t + \dfrac{1}{t}$, $y = t^2 + \dfrac{1}{t^2}$, $z = t^3 + \dfrac{1}{t^3}$, $y = y(x)$, $z = z(x)$. Намерете y'' и z'';

б) $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$, $z(x, y)$. Намерете dz;

в) $x + y + z + u = a$, $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b^2$, $x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = c^3$, $y = y(x)$, $z = z(x)$, $u = u(x)$. Намерете първите производни на y, z, u;

г) От формулите на Виет: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, намерете производните на x_1 и x_2 относно a, b и c. Разгледайте и уравнение от трета степен.

Решение. б) $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = 2(v-u)$, следователно, ако $u_0 \neq v_0$, трансформацията $(u,v) \mapsto (u+v, u^2+v^2)$ изобразява дифеоморфно някоя околност U на (u_0, v_0) върху околност V на $(x_0, y_0) = (u_0 + v_0, u_0^2 + v_0^2)$ (вж. §9). При това $2y_0 - x_0^2 = (u_0 - v_0)^2 > 0$. Имаме $u \neq v$ в U и $2y > x^2$ във V. Обратната трансформация има компоненти $u(x,y)$ и $v(x,y)$ от $C^\infty(V)$. $z(x,y) = u^3(x,y) + v^3(x,y)$ е също от $C^\infty(V)$. От $dx = du + dv$ и $dy = 2u\,du + 2v\,dv$ изразяваме du и dv, а после

$$dz = 3u^2\,du + 3v^2\,dv = -3uv\,dx + \frac{3}{2}(u+v)\,dy = -\frac{3}{2}(x^2-y^2)\,dx + \frac{3}{2}x\,dy.$$

10.11. Ако $a, b \in \mathbb{R}^m$, U е околност на точката $(a,b) \in \mathbb{R}^{2m}$, функциите $F_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)$ са от $C^1(U)$ $(i = 1, \dots, m)$, $F_i(a,b) = 0$, $\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}(a,b) \neq 0$, то знаем, че за някоя околност V на a има m функции $y_i(x_1, \dots, x_m)$ от $C^1(V)$, които са решения на системата $F_i = 0$, $y_i(a) = b_i$. Докажете, че във V:

$$\frac{D(y_1, \dots, y_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} = (-1)^m \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} \bigg/ \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}.$$

10.12. Ако $uv - xy = 5$, $xu + yv = 0$, пресметнете $u''_{xx}(1,-1)$ и $v''_{xy}(1,-1)$.

Решение. $F(x,y,u,v) = uv - xy - 5$ и $G(x,y,u,v) = xu + yv$ са от $C^\infty\left(\mathbb{R}^4\right)$. При $x = 1$, $y = -1$ системата е $uv = 4$, $u - v = 0$ и има две решения: $(u,v) = (2,2)$ или $(-2,2)$. В точките $(1,-1,\pm 2,\pm 2)$ имаме

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)} = yv - xu \neq 0.$$

Следователно за някоя околност U на $(1,-1)$ системата има решения $u(x,y)$ и $v(x,y)$ от $C^\infty(U)$ и $\frac{D(F,G)}{D(u,v)} \neq 0$ в U. Това е изпълнено при $(x,y) = (1,-1)$ както за $(u,v) = (2,2)$, така и за $(u,v) = (-2,-2)$. Ако (u,v) решава първата задача, то $(-u,-v)$ решава втората. Заместени, функциите u и v превръщат уравненията в тъждества, които диференцираме по x и по y. По x: $u'_x v + uv'_x - y = 0$, $u + xu'_x + yv'_x = 0$. Умножаваме първото уравнение с y, второто с $-u$ (защото коефициентите пред v'_x са u в първото уравнение и y във второто) и събираме: $u'_x = \frac{y^2 + u^2}{yv - xu}$. После умножаваме първото с x, второто с $-v$ и събираме: $v'_x = -\frac{xy + uv}{yv - xu}$. Аналогично от $u'_y v + uv'_y - x = 0$, $xu'_y + v + yv'_y = 0$ намираме $u'_y = \frac{xy + uv}{yv - xu}$, $v'_y = -\frac{x^2 + v^2}{yv - xu}$. В точката $(1,-1,2,2)$: $u'_x = -\frac{5}{4}$, $v'_x = \frac{3}{4}$, $u'_y = -\frac{3}{4}$, $v'_y = \frac{5}{4}$. Диференцираме още веднъж по x и по y първите две равенства. По x:

$$u''_{xx}v + u'_x v'_x + u'_x v'_x + uv''_{xx} = 0, \quad u'_x + u'_x + xu''_{xx} + yv''_{xx} = 0.$$

В точката $(1,-1,2,2)$: $2u''_{xx} + 2v''_{xx} = \frac{15}{8}$, $u''_{xx} - v''_{xx} = \frac{5}{2}$. Оттук $u''_{xx}(1,-1) = \frac{55}{32}$. А сега по y:

$$u''_{xy}v + u'_x v'_y + u'_y v'_x + uv''_{xy} - 1 = 0, \quad u'_y + xu''_{xy} + v'_x + yv''_{xy} = 0.$$

В точката $(1,-1,2,2)$: $2u''_{xy} + 2v''_{xy} = \frac{25}{8}$, $u''_{xy} - v''_{xy} = 0$, следователно $v''_{xy}(1,-1) = \frac{25}{32}$. Какви са отговорите за точката $(1,-1,-2,-2)$? Намерете явния вид на функциите u и v, като решите системата.

10.13. Формулирайте достатъчни условия, при които дадените системи локално определят неявни функции $z(x,y)$ и $u(x,y)$ заедно с необходимите производни, и докажете тъждествата:

а) $zf'(u) = (y - f(u))^2$, $(x+u)f'(u) = y - f(u)$: $z'_x z'_y = z$;

б) $y = xz + f(z)$, $u = g(z)$: $u''_{xx} + 2zu''_{xy} + z^2 u''_{yy} = 0$.

10.14. Както в зад. 10.13 разгледайте системата $F(x,y,z,u) = 0$, $F'_u(x,y,z,u) = 0$ и докажете посоченото тъждество:

а) $F = x\cos u + y\sin u + \ln z - f(u) : z_x'^2 + z_y'^2 = z^2$;

б) $F = (z - f(u))^2 - x^2(y^2 - u^2) : z_x'.z_y' = xy$;

в) $F = xu + yf(u) + g(u) - z : z_{xx}''.z_{yy}'' = z_{xy}''^2$;

г) $F = h(xu, yz) - xz : xz_{xx}'' + yz_{xy}'' + 2z_x' = 0$;

д) $F = h(xz + y, x + u) - z - u : (x + z)z_{yy}'' + z_y'^2 = z_{xy}''$;

е) $F = xy - z + h(u, xy + z) : xz_{xx}'' + yz_{yy}'' - (x + y)z_{xy}'' + z_x' + z_y' = 0$.

Решение. в) За достатъчни условия вижте отговора. Системата е: $z = xu + yf(u) + g(u)$, $x + yf'(u) + g'(u) = 0$. Като заместим решенията $z(x, y)$ и $u(x, y)$, получаваме тъждества. Тогава

$$dz = u\,dx + f(u)\,dy + (x + yf'(u) + g'(u))\,du = u\,dx + f(u)\,dy,$$
$$d^2z = (dx + f'(u)\,dy)\,du.$$

От второто уравнение:

$$dx + f'(u)\,dy + (yf''(u) + g''(u))\,du = 0,$$
$$du = -\frac{dx + f'\,dy}{yf'' + g''}, \quad d^2z = -\frac{(dx + f'\,dy)^2}{yf'' + g''}.$$

Но това е $z_{xx}''(dx)^2 + 2z_{xy}''\,dxdy + z_{yy}''(dy)^2$. Оттук намираме вторите производни на z и решаваме задачата. Защо в отговора са поискани трети производни на f и g?

10.15. Нека φ и f са функции от $C^\infty(\mathbb{R})$. Тогава за някоя околност U на точката $(0, \alpha_0)$ има в $C^\infty(U)$ решение $y(x, \alpha)$ на уравнението $y = \alpha + x\varphi(y)$ и $x\varphi' \neq 1$ в U:

а) Ако $u(x, \alpha) = f(y(x, \alpha))$, докажете, че $\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n} = \dfrac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}}(\varphi^n(y).u_\alpha')$;

б) Нека $(0, \alpha) \in U$. Ако функцията $u(x, \alpha)$ се развива в ред на Маклорен по x, то това е редът на Лагранж

$$f(y(x, \alpha)) = f(\alpha) + \frac{x}{1!}\varphi(\alpha)f'(\alpha) + \frac{x^2}{2!}\frac{d}{d\alpha}[\varphi^2(\alpha)f'(\alpha)]$$
$$+\frac{x^3}{3!}\frac{d^2}{d\alpha^2}[\varphi^3(\alpha)f'(\alpha)] + \cdots$$

Решение. $F(x, \alpha, y) = y - \alpha - x\varphi(y)$, $F_y' = 1 - x\varphi'(y)$, $F(0, \alpha_0, \alpha_0) = 0$, $F_y'(0, \alpha_0, \alpha_0) = 1 \neq 0$. В точката $(0, \alpha_0, \alpha_0)$ е приложима теоремата за неявната функция, ако решаваме относно y.

а) $y_x' = \varphi + x\varphi'y_x'$, $y_\alpha' = 1 + x\varphi'y_\alpha'$. Оттук $y_x' = \varphi y_\alpha'$ и $u_x' = \varphi u_\alpha'$. При $n = 1$ равенството е доказано. Ако е вярно за n, то можем да напишем

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\alpha^{n-1}}(\varphi^n.u_\alpha') = \frac{\partial^{n-1}}{\partial\alpha^{n-1}}(\varphi^n u_\alpha')_x' = \frac{\partial^{n-1}}{\partial\alpha^{n-1}}(\varphi^n u_\alpha')_x'$$
$$= \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}(\varphi^n u_x') = \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}(\varphi^{n+1}u_\alpha')$$

и равенството се оказва вярно за $n+1$. Послужихме си с резултата от зад. 3.5 в);

б) В реда

$$u(x, \alpha) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}\frac{\partial^n u(0, \alpha)}{\partial x^n}$$

заместваме

$$\frac{\partial^n u(0, \alpha)}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial\alpha^{n-1}}[\varphi^n(y(0, \alpha)).f'(y(0, \alpha)).y_\alpha'(0, \alpha)]$$
$$= \frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}}[\varphi^n(\alpha)f'(\alpha)],$$

защото $y(0, \alpha) = \alpha$, $u_\alpha' = f'y_\alpha'$, $y_\alpha'(0, \alpha) = 1$.

10.16. Нека функциите $a_1, \ldots, a_m, a$ и $v(x_1, \ldots, x_m, u)$ са от $C^1\left(\mathbb{R}^{m+1}\right)$ и в точката $P = (Q, u_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ $(Q \in \mathbb{R}^m)$ имаме $v = 0$, $v_u' \neq 0$. Тогава за някоя околност U на Q има в $C^1(U)$ решение $u(x_1, \ldots, x_m)$ на уравнението $v(x_1, \ldots, x_m, u) = 0$. Докажете, че ако $\sum\limits_{i=1}^m a_i\dfrac{\partial v}{\partial x_i} + a\dfrac{\partial v}{\partial u} = 0$, то $\sum\limits_{i=1}^m a_i\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = a$ в U.

10.17. Нека $f(x, y, z)$ е функция от $C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$, а $z(x, y)$ — от $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, като $z_x'f_y' - z_y'f_x' = 0$ в $\mathbb{R}^2$, а в някоя точка (x_0, y_0, z_0) е в сила $f_x' + f_z'.z_x'(x_0, y_0) \neq 0$:

а) Като си припомните теорията на функционалната зависимост, докажете, че в достатъчно малка околност на (x_0, y_0) имаме $z(x, y) = g(f(x, y, z(x, y)))$, като g е дефинирана в някоя околност на $f(x_0, y_0, z_0)$ и g' е непрекъсната;

б) Формулирайте достатъчни условия, при които в някоя околност U на (x_0, y_0) уравнението $z = g(f(x,y,z))$ има решение $z \in C^1(U)$ и проверете, че $z'_x f'_y = z'_y f'_x$.

Р е ш е н и е. а) Ако положим $\varphi(x,y) = f(x,y,z(x,y))$, то

$$\frac{D(z,\varphi)}{D(x,y)} = z'_x(f'_y + f'_z z'_y) - z'_y(f'_x + f'_z z'_x) = z'_x f'_y - z'_y f'_x = 0,$$

а $\varphi'_x(x_0,y_0) \neq 0$. Следователно в някоя околност на (x_0, y_0) функцията z се изразява чрез φ. Решете уравненията от 10.8 а) и б).

10.18. Докажете, че ако $u(x,y)$ и $v(x,u)$ от $C^1(\mathbb{R}^2)$ удовлетворяват условията на Коши–Риман $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$ и якобианът в някоя точка (x_0, y_0) се анулира, то цялата матрица на Якоби е нулева, а ако не се анулира, то компонентите на обратното изображение (защото тогава трансформацията $(x,y) \mapsto (u,v)$ е обратима в достатъчно малка околност на (x_0, y_0)) също удовлетворяват условията на Коши–Риман.

10.19. а) Нека U е една околност на точката (u_0, v_0), f и $g \in C^p(U)$, $p \geqq 1$, $\tau = (f,g)$, $\tau(u_0,v_0) = (x_0,y_0)$. Нека още $\Gamma \subset \tau(U)$ и е графика на функция $y(x)$ от $C^p(G)$, G с околност на x_0, $y(x_0) = y_0$. Формулирайте достатъчни условия, при които има такава околност Q на (u_0,v_0), че $\tau^{-1}(\Gamma) \cap Q$ е графика на функция $v(u)$ от $C^p(H)$, H е околност на u_0, $v(u_0) = v_0$. Формулирайте и допълнително условие за τ, при което $u \mapsto f(u, v(u))$ се оказва дифеоморфно в достатъчно малка околност H_1 на u_0;

б) Разгледайте същия въпрос, ако $\tau = (f,g,h)$, $U \subset \mathbb{R}^3$, $\tau(u_0,v_0,w_0) = (x_0,y_0,z_0)$, $\Gamma \subset \tau(U)$ е графика на функция $z(x,y)$, $z(x_0,y_0) = z_0$. Иска се локално $\tau^{-1}(\Gamma)$ да излезе графика на функция $w(u,v)$. Допълнително $(u,v) \mapsto (f(u,v,w(u,v)),\ g(u,v,w(u,v)))$ да се окаже дифеоморфно в достатъчно малка околност H_1 на (u_0,v_0).

Р е ш е н и е. а) $\tau^{-1}(\Gamma) = \{(u,v) \in U : f(u,v) \in G,\ g(u,v) = y(f(u,v))\}$. Ако поискаме в точката (u_0, v_0) да бъде $\delta = g'_v - y'(f)f'_v \neq 0$, то за достатъчно малка околност Q на (u_0,v_0) множеството $\tau^{-1}(\Gamma) \cap Q$ е графика на функция $v(u)$ от $C^p(H)$, H е околност на u_0, $v(u_0) = v_0$. Ако още поискаме $\Delta = \dfrac{D(f,g)}{D(u,v)}(u_0,v_0) \neq 0$ (тогава τ е дифеоморфно в малка околност на (u_0,v_0)), то в точката u_0 първо от $g = y(f)$ получаваме

$$g'_u + g'_v.v' = y'(f)(f'_u + f'_v v'), \quad v' = \frac{y' f'_u - g'_u}{g'_v - y' f'_v},$$

а после $d = f'_u + f'_v.v' = \dfrac{\Delta}{\delta} \neq 0$;

б) Сега уравнението $h(u,v,w) = z(f(u,v,w), g(u,v,w))$ трябва локално да има решение $w(u,v)$. Достатъчно е в (u_0,v_0,w_0) да бъде $\delta = h'_w - z'_x(f,g)f'_w - z'_y(f,g)g'_w \neq 0$. Ако още поискаме $\Delta = \dfrac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}(u_0,v_0,w_0) \neq 0$, то в точката (u_0,v_0):

$$d = \begin{vmatrix} f'_u + f'_w w'_u & f'_v + f'_w w'_v \\ g'_u + g'_w w'_u & g'_v + g'_w w'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 \\ -w'_u & -w'_v & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ -w'_u & -w'_v & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u - f'_u z'_x - g'_u z'_y & h'_v - f'_v z'_x - g'_v z'_y & h'_w - f'_w z'_x - g'_w z'_y \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{\delta} \neq 0.$$

Тук заместихме $w'_u = \frac{1}{\delta}(-h'_u + f'_u z'_x + g'_u z'_y)$, $w'_v = \frac{1}{\delta}(-h'_v + f'_v z'_x + g'_v z'_y)$, което имаме от системата:

$$\left| \begin{aligned} h'_u + h'_w.w'_u &= z'_x.(f'_u + f'_w w'_u) + z'_y(g'_u + g'_w w'_u) \\ h'_v + h'_w.w'_v &= z'_x.(f'_v + f'_w w'_v) + z'_y(g'_v + g'_w w'_v), \end{aligned} \right.$$

получена с диференциране от $h = z(f,g)$.

10.20. Ако $f \in C^2(\mathbb{R}^m)$ и детерминантата на Хесе $\det\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ е различна от нула в някоя точка P, докажете, че:

а) Изображението $(x_1,\dots,x_m) \mapsto \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right)$ е дифеоморфно в достатъчно малка околност на P;

б) Ако $x_i(t_1,\dots,t_m)$ са компонентите на обратния дифеоморфизъм и положим $f^*(t_1,\dots,t_m) = \sum_{i=1}^{m} t_i x - f(x_1,\dots,x_m)$, то $(f^*)^* = f$ (т р а н с ф о р м а ц и я н а Л е ж а н д ъ р).

10.21. а) За неособена точка на кривата $F(x,y) = 0$ ($F \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{grad} F(x_0,y_0) \neq 0$) напишете уравнения на допирателната и нормалата. Формулирайте необходимо условие точката да бъде инфлексна. От зад. 2.14, ч. I, гл. 3, изведете формули за кривината k;

б) Решете същите въпроси за крива, зададена параметрично: $x(t)$, $y(t)$, в точка t_0, за която $\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0) > 0$. Освен това изразете координатите на центъра на кривина;

в) Дайте пример за крива $x, y \in C^\infty(\mathbb{R})$, чийто геометричен образ се състои от интервалите $[0,1)$ на осите x и y;

г) Разгледайте и крива, зададена в полярни координати.

Р е ш е н и е. а) Ако $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$, то в някоя околност на (x_0,y_0) кривата е графика на функция $f(x)$ от $C^2(U)$, U е околност на x_0, $f(x_0) = y_0$. Допирателната към тази графика при $x = x_0$ има уравнение $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$. От $F'_x + F'_y f' = 0$ получаваме $f'(x_0) = -\dfrac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$ и уравнението добива вида

$$F'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0,y_0)(y - y_0) = 0.$$

Така е и ако $F'_y(x_0,y_0) = 0$. Тогава нормалата ще има уравнение $F'_y(x - x_0) - F'_x(y - y_0) = 0$ и т. н. Решете зад. 3.4, ч. I, гл. 3;

б) Ако $\dot{x}(t_0) \neq 0$, то в достатъчно малка околност на t_0 функцията $x(t)$ има обратна $t(x)$, $y = y(t(x)) = f(x)$ и т. н. Така намираме допирателна и нормала за тази част от кривата, която получаваме, ако t е в достатъчно малка околност на t_0. Точката (x_0,y_0)=$(x(t_0), y(t_0))$ може да се получи и за други стойности на t;

г) Това е частен случай на б), $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$. Условието $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$ тук е $r^2 + \dot{r}^2 > 0$.

10.22. Напишете уравнения на допирателната и нормалата към повърхнината $F(x,y,z) = 0$ в неособена точка (x_0,y_0,z_0): $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $\operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. Напишете уравнения на допирателната в (x_0,y_0,z_0) към:

а) Елипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

б) Хиперболоидите $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ и $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

в) Елиптичния параболоид $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$;

г) Хиперболичния параболоид $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z$;

д) Конуса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.

(a, b, c, p, $q > 0$)

10.23. За кривата $F(x,y,z) = 0, G(x,y,z) = 0$ напишете уравнения на тангентата и нормалната равнина в неособена точка (x_0,y_0,z_0), като F и G са от $C^1(\mathbb{R}^3)$. Една точка е неособена, ако в нея

$$A = \frac{D(F,G)}{D(y,z)}, \quad B = \frac{D(F,G)}{D(z,x)}, \quad C = \frac{D(F,G)}{D(x,y)}$$

не се анулират едновременно.

10.24. За повърхнината $x = f(u,v), y = g(u,v), z = h(u,v)$ напишете уравнения на допирателната и нормалата при $(u,v) = (u_0,v_0)$, ако

$$A = \frac{D(g,h)}{D(u,v)}, \quad B = \frac{D(h,f)}{D(u,v)}, \quad C = \frac{D(f,g)}{D(u,v)}$$

не се анулират едновременно, $f, g, h \in C^1(\mathbb{R}^2)$. (И тук е уместна забележката, направена при решаването на зад. 10.21 б).)

10.25. Докажете, че ако $f \in C^1(\mathbb{R}^m)$, $a \in \mathbb{R}^m$ и $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$, то $\operatorname{grad} f(a)$ е перпендикулярен на хоризонталата $f(x_1,\ldots,x_m) = f(a)$.

10.26. Напишете уравнение на допирателната към точка от:

а) Винтовата линия $x = a\cos t, y = a\sin t, z = ct$;

б) Винтовата повърхнина $x = u\cos v, y = u\sin v, z = cv$;

в) Кривата на Вивиани $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ay$;

г) Повърхнината $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$;

д) Хиперболата $x^2 + y^2 = z^2, x + y + z = 2$ (в точката (0,1,1)).

10.27. Нека $F(x,y,\alpha)=0$ е фамилия от криви в равнината xy, $F\in C^2\left(\mathbb{R}^3\right)$. Ако в точката $P=(x_0,y_0,\alpha_0)$ имаме $F=0$, $F'_\alpha=0$, $F''_{\alpha\alpha}\neq 0$, то уравнението $F'_\alpha(x,y,\alpha)=0$ определя функция $\alpha(x,y)$ (в достатъчно малка околност на (x_0,y_0)) и кривата $F(x,y,\alpha(x,y))$ се нарича *дискриминантна* за фамилията. (В зад. 10.14 имахме дискриминантни повърхнини.) Ако още

$$\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{\alpha x} & F''_{\alpha y}\end{vmatrix}(P)\neq 0,$$

знаем, че дискриминантната крива е обвивка на фамилията и има параметрично представяне $x(\alpha),y(\alpha)$. Намерете дискриминантните криви и проверете дали са обвивки:

а) $y=\alpha x+\dfrac{1}{4\alpha}$; б) $y=(x-\alpha)^2$;

в) $y=(x-\alpha)^3$; г) $y^2=(x-\alpha)^3$;

д) $y^3=(x-\alpha)^2$; е) $(1-x)(y-\alpha)^2=x^2(1+x)$;

ж) $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{(1-\alpha)^2}=1,\ 0<\alpha<1$; з) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=1$;

и) Окръжности през (0,0) с центрове върху параболата $y^2=2x$;

й) Отсечки с дължина единица, единият край на които е върху оста x, а другият — върху оста y;

к) Разгледайте отново обвивката от зад.2.10;

л) Еволюта е кривата, която описва центърът на кривина (зад. 2.14, ч. I, гл. 3). Докажете, че ако функцията f има непрекъсната трета производна в някоя околност на точката x_0, $f'(x_0)\neq 0, f''(x_0)\neq 0$ и $k'(x_0)\neq 0$ (k е кривината), то еволютата е обвивка за фамилията нормали, когато x се мени в достатъчно малка околност на x_0.

§ 11. Условни екстремуми

Нека U е някоя околност на точката $P\in\mathbb{R}^{m+n}$, функциите $f,\varphi_1,\dots,\varphi_n$ са дефинирани в U и $\varphi_i(P)=0, i=1,\dots,n$. Казваме, че f има *локален максимум* в P при условия $\varphi_i=0$, ако съществува такава околност V на P, че щом $Q\in V$ и $\varphi_i(Q)=0$, то $f(Q)\leqq f(P)$. Аналогично дефинираме понятието условен *локален минимум*. Може да се окаже, че около P няма точки, в които $\varphi_i=0$.

Ако f и φ_i са от $C^1(U)$ и в точката P $\det\left(\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_{m+j}}\right), i,j=1,\dots,n$ е различна от нула, то локално можем да решим системата $\varphi_i=0$ относно x_{m+j}, да заместим x_{m+j} с решенията $x_{m+j}=x_{m+j}(x_1,\dots,x_m)$ и да потърсим (безусловни) екстремуми на получената от f функция на $x_1,\dots,x_m$. Те ще бъдат екстремуми на f при условията $\varphi_i=0$. В §2 разгледахме примери, в които това заместване може да стане явно, а тук ще третираме функциите x_{m+j} като неявни. Освен това разполагаме и с метода на Лагранж: Ако f и $\varphi_i\in C^1(U)$, матрицата $\left(\dfrac{\partial\varphi_i(P)}{\partial x_j}\right), i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m+n$, е от ранг n (т. е. има ненулев минор от n-ти ред) и f има локален екстремум в точката P при условия $\varphi_i=0$, то съществуват n константи $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ (множители на Лагранж), за които първите производни на $F=f+\lambda_1\varphi_1+\dots+\lambda_n\varphi_n$ се анулират в P. Обратно, ако това условие е изпълнено, f и φ_i са от $C^2(U)$, и в точката P квадратичната форма d^2F е положително дефинитна при линейните условия

$$\sum_{j=1}^{m+n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\,dx_j=0\quad(i=1,\dots,n),$$

то f има в P условен минимум, а ако е отрицателно дефинитна, то f има в P условен максимум.

11.1. а) Нека функциите f и φ са дефинирани в $\mathbb{R}^2$, $\varphi(a,b)=0$, и $\lambda\in\mathbb{R}$. Докажете, че ако $F=f+\lambda\varphi$ има в точката (a,b) локален екстремум, то f има в тази точка локален екстремум при условие $\varphi=0$;

б) $f=xy$ при условие $\varphi=y-x=0$ има в $(0,0)$ минимум, но $F=xy-\lambda(y-x)$ няма екстремум в $(0,0)$.

Р е ш е н и е. а) Нека F има локален максимум в (a,b).

$$f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)\leqq f(a,b)+\lambda\varphi(a,b)=f(a,b),$$

следователно от $\varphi(x,y)=0$ следва $f(x,y)\leqq f(a,b)$.

11.2. Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията (те съществуват според теоремата на Вайерщрас):

а) xy върху елипсата $(x-1)^2+y^2=1$;

б) $\sqrt{2-2x^2-y^2}$ върху елипсата $2(x-1)^2+(y-1)^2=1$;

в) $2x+2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ в множеството $\frac{1}{2}\leqq x^2+y^2\leqq 1$, $0\leqq x\leqq y$;

г) $x^2+2y^2+2z^2$, ако $1\leqq x^2+y^2+z^2\leqq 2$;

д) $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j$ върху сферата $\sum_{i=1}^{m} x_i^2=1$ $(a_{ij}=a_{ji})$;

е) xyz върху сферата $x^2+y^2+z^2=1$;

ж) xyz върху окръжността $x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=0$;

з) $xy+yz$ върху елипсата $x^2+y^2=2, y+z=2$;

и) $x^2+y^2+z^2$ върху елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, lx+my+nz=0$;

й) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ върху окръжността $x^2+y^2+z^2=1$, $lx+my+nz=0$;

к) $(x-z)(v-t)+(z-u)(y-t)$ при условия $x^2+y^2-4x-2y+2\leqq 0, z^2+t^2-4z-2t+2\leqq 0, u^2+v^2-4u-2v+2\leqq 0$.

Р е ш е н и е. б) Изследваме $f=2-2x^2-y^2$ при условия $\varphi=2(x-1)^2+(y-1)^2-1=0$ и $2x^2+y^2\leqq 2$. Първо нека $2x^2+y^2<2$. Матрицата $(\varphi'_x,\varphi'_y)=(4(x-1),2(y-1))$ има ранг 1, ако $(x,y)\neq(1,1)$, а в тази точка $\varphi\neq 0$. Образуваме $F=f+\lambda\varphi$. Системата $F'_x=0$, $F'_y=0$ е: $x(\lambda-1)=\lambda, y(\lambda-1)=\lambda$. От $\lambda=1$ следва $\lambda=0$, затова $\lambda\neq 1$, $x=y$. От $\varphi=0$ получаваме $x=y=1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ограничението $2x^2+y^2<2$ се удовлетворява само от точката $(1-\frac{1}{\sqrt{3}},1-\frac{1}{\sqrt{3}})$, в нея $\sqrt{f}=\sqrt{2\sqrt{3}-2}$. Ако екстремалната стойност се достига при $2x^2+y^2<2$, тя е намерената. При $2x^2+y^2=2$ имаме $f=0$. Така $\sqrt{f}_{\min}=0, \sqrt{f}_{\max}=\sqrt{2\sqrt{3}-2}$. Откъде следва, че непременно има точка, за която $2x^2+y^2=2$ и $\varphi=0$?

г) $f=2(x^2+y^2+z^2)-x^2$. Задачата се решава непосредствено;

д) $f=\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j, \varphi=\sum_{i=1}^{m} x_i^2-1$. Матрицата

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}\right)=(2x_1,\dots,2x_m)$$

има ранг 1, ако $(x_1,\dots,x_m)\neq(0,0,\dots,0)$, а в тази точка $\varphi\neq 0$. Образуваме $F=f-\lambda\varphi$.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1}=(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=0,\dots,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_m}=a_{m1}x_1+\dots+(a_{mm}-\lambda)x_m=0.$$

Системата има детерминанта

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm}-\lambda \end{vmatrix},$$

$\Delta=0$, защото системата има нетривиално решение: f достига най-голяма и най-малка стойност върху сферата. Умножаваме равенствата съответно с $x_1, x_2,\dots,x_m$ и събираме: $f-\lambda\sum_{i=1}^{m}x_i^2=0$, следователно $f=\lambda$ в точка на условен екстремум. Така $f_{\min}$ е най-малкият реален корен λ на уравнението $\Delta=0$, а $f_{\max}$ — най-големият;

з) $F=xy+yz+\lambda(x^2+y^2-2)+\mu(y+z-2)$.

11.3. Намерете точките на условен локален екстремум и определете вида им:

а) xy при условие $x^3+y^3=3xy$;

б) xyz при $xy+yz+zx=a>0$;

в) xyz при $x+y+z=5$, $xy+yz+zx=8$;

г) $x-y$, ако $\operatorname{tg}x=3\operatorname{tg}y$;

д) $\sum_{i=1}^{m}a_ix_i$ при условие $\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i}{x_i}=c$ $(a_i,b_i,c>0)$.

Р е ш е н и е. а) $f=xy$, $\varphi=x^3+y^3-3xy$, $\varphi'_y=3y^2-3x$. Ако $y_0^2\neq x_0$ и $\varphi(x_0,y_0)=0$, уравнението $\varphi=0$ може локално да се реши: $y = y(x)$, $y(x_0) = y_0$. Диференцираме тъждеството $x^3 + y^3(x) - 3xy(x) = 0$: $3x^2 + 3y^2.y' - 3y - 3xy' = 0$, $y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$. Ако $f(x, y(x)) = x.y(x)$ има локален екстремум в точката x_0, то производната се анулира, т. е. $y + xy' = y - x\frac{x^2-y}{y^2-x} = 0$, $y^3 - xy = x^3 - xy$, $x = y$. От $\varphi = 0$ получаваме $x = y = \frac{3}{2}$ или 0. $y_0^2 \neq x_0$ само за точката $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. За да обхванем и точки с $y^2 = x$, разглеждаме φ'_x и решаваме $\varphi = 0$ относно x (при $x_0^2 \neq y_0$). Получаваме същата точка. Едновременно $y^2 = x$, $x^2 = y$ и $\varphi = 0$ само за $(0,0)$. Да изследваме първо $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$: $y'\left(\frac{3}{2}\right) = -1$. Диференцираме равенството, от което получихме y', още веднъж:

$$2x + 2y.y'^2 + y^2y'' - y' - y' - xy'' = 3 + 3 + 2 + \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\right) y''\left(\frac{3}{2}\right) = 0,$$

$y''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{32}{3} < 0$; това е точка на условен максимум. Като положите $y = tx$, се убедете, че произволно близо до $(0,0)$ функцията f приема стойности с различни знаци (върху кривата $\varphi = 0$) и следователно няма условен екстремум в тази точка. Задачата е решена. Да приложим и метода на Лагранж: Матрицата $(\varphi'_x, \varphi'_y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$ има ранг 0, ако $x = y^2$, $y = x^2$, следователно $x = y = 0$ или 1, $\varphi(1,1) \neq 0$, но $\varphi(0,0) = 0$. Към точката $(0,0)$ методът не е приложим. Нека $(x,y) \neq (0,0)$, $F = f + \lambda\varphi$, $F'_x = y + 3\lambda x^2 - 3\lambda y = 0$, $F'_y = x + 3\lambda y^2 - 3\lambda x = 0$, тогава $xF'_x - yF'_y = 3\lambda(x^3 - y^3) = 0$. Ако $\lambda = 0$, $(x,y) = (0,0)$, следователно $\lambda \neq 0$, $x = y$, $\varphi(x,x) = x^2(2x-3) = 0$. Отново получихме точката $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

$$dF = y\,dx + x\,dy + \lambda(3x^2\,dx + 3y^2\,dy - 3y\,dx - 3x\,dy),$$
$$d^2F = 2(1-3\lambda)\,dx\,dy + 6\lambda x(dx)^2 + 6\lambda y(dy)^2.$$

В точката $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$:

$$d\varphi = 3(x^2 - y)\,dx + 3(y^2 - x)\,dy = \frac{9}{4}(dx + dy) = 0, \quad dy = -dx,$$

тогава

$$d^2F = (-2(1-3\lambda) + 9\lambda + 9\lambda)(dx)^2 = (-2 + 24\lambda).(dx)^2.$$

Налага се да намерим λ. От $F'_x\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 0$ получаваме $\lambda = -\frac{2}{3}$, $-2 + 24\lambda < 0$ и d^2F е отрицателно дефинитна (в точката $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ и при условие $d\varphi = 0$). Следователно в $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ функцията f има условен максимум. Можехме да постъпим и така: От $d\varphi = 0$ изразяваме $dy = -\frac{x^2-y}{y^2-x}dx$, тогава

$$df = d(xy) = y\,dx + x\,dy = \left(y - x\frac{x^2-y}{y^2-x}\right)dx \quad (y^2 \neq x).$$

В точка на екстремум трябва $df = 0$ (при $d\varphi = 0$), оттук $x = y$ и т. н. Какъв смисъл има това пресмятане? Конкретната задача се решава и ако параметризираме кривата $\varphi = 0$ с полагането $y = tx$, тогава

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}, \quad f = xy = \frac{9t^3}{(1+t^3)^2}.$$

Впрочем, като познаваме декартовия лист $\varphi = 0$ (зад. 14.3 а), ч. I, гл. 3) и хоризонталите на функцията $f = xy$, отговорът е очевиден.

11.4. Изяснете въпроса за най-малка и най-голяма стойност:

а) xy^2z^3 при $x + 2y + 3z = 6, x, y, z > 0$;

б) $\sum_{i=1}^{m} x_i^2$ при $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = 1$.

Решение. а) Ако $x, y, z \geqq 0, x + 2y + 3z = 6$, то по теоремата на Вайерщрас $f = xy^2z^3$ достига най-малка и най-голяма стойност. Най-малката е $f = 0$ при $x = 0, y = 0$ или $z = 0$. Тя отпада, щом $x, y, z > 0$ и f приема произволно малки положителни стойности. За да намерим най-голямата, полагаме $g = \ln f$.

11.5. Върху повърхнината $2z^3 = 3(1-x^2)(1-y^2)$ намерете точка с минимално разстояние до началото (вж. зад. 2.3 б)).

11.6. Върху сферата $x^2+y^2+z^2=1$ намерете точка с минимална сума от квадратите на разстоянията ѝ до n дадени точки.

11.7. а) Да се намери разстоянието между правите $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ и $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$;

б) В $\mathbb{R}^4$ да се намери разстоянието между правата $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=\frac{t}{4}$ и двумерната равнина $x-y+z-t=1$, $x+y+z+t=1$;

в) Да се намери най-малкото разстояние между точка от елипсата $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ и точка от правата $2x+y=5$.

11.8. Нека K и L са съответно кривите $\varphi(x,y)=0$ и $\psi(x,y)=0$. Докажете, че ако за $P\in K$ и $Q\in L$ се достига най-малко разстояние между точка от K и точка от L, ако P и Q са неособени съответно за K и L, и $P\neq Q$, то правата PQ е перпендикулярна на K и L ($\varphi,\ \psi\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, $\operatorname{grad}\varphi(P)\neq 0$, $\operatorname{grad}\psi(Q)\neq 0$).

Р е ш е н и е. Разглеждаме $f=(x-u)^2+(y-v)^2$ при условия $\varphi(x,y)=0$, $\psi(u,v)=0$. Матрицата

$$\begin{pmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi'_u & \psi'_v \end{pmatrix}$$

има ранг 2. Образуваме $F=f+\lambda\varphi+\mu\psi$. От $F'_x,\ F'_y,\ F'_u,\ F'_v=0$ получаваме $(u-x)\varphi'_y-(v-y)\varphi'_x=0$, т. е. (u,v) лежи на нормалата към $\varphi=0$ в точката (x,y), и $(x-u)\psi'_v-(y-v)\psi'_u=0$, т. е. (x,y) лежи на нормалата към $\psi=0$ в точката (u,v).

11.9. Ако $A=\det(a_{ij})$, докажете неравенството на Адамар

$$A^2\leqq\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right).$$

Р е ш е н и е. Разглеждаме функцията $A=f(a_{11},\dots,a_{nn})$ при условия $\varphi_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2-p_i=0$, $p_i>0$ (ако някое $p_i=0$, неравенството е вярно). Според теоремата на Вайерщрас f достига най-малка и най-голяма стойност при тези условия. Матрицата $\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial a_{kj}}\right)$ има n реда и n^2 стълба. Ако $A\neq 0$, всеки стълб съдържа най-много един, а всеки ред поне един ненулев елемент. Следователно не е възможна линейна зависимост между редовете на матрицата и рангът ѝ е n. Образуваме $F=f+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i$. В точка на екстремум или $A=0$, или $A\neq 0$ и $\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}=A_{ij}+2\lambda_i a_{ij}=0$ (A_{ij} е адюнгираното количество на a_{ij}, вж. зад. 1.2 в)). Умножаваме с a_{ij} и събираме:

$$\sum_{j=1}^{n}A_{ij}a_{ij}+2\lambda_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=A+2\lambda_i p_i=0,$$

следователно $\lambda_i\neq 0$. Умножаваме с a_{kj} и събираме ($k\neq i$):

$$\sum_{j=1}^{n}A_{ij}a_{kj}+2\lambda_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{kj}=2\lambda_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{kj}=0.$$

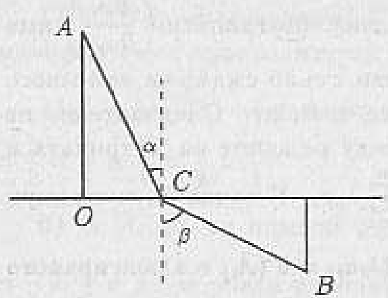
Следователно

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{kj}=\begin{cases} p_i, & k=i\\ 0, & k\neq i,\end{cases}$$

т. е. матрицата $\frac{a_{ij}}{\sqrt{p_i}}$ е ортогонална и има детерминанта 1 или -1. Тогава $A=\pm\sqrt{p_1\dots p_n}$ — едното е най-голямата, а другото най-малката стойност. Неравенството е доказано. Геометрически то означава, че обемът на паралелепипед в $\mathbb{R}^n$, построен върху n вектора с общо начало, не надминава произведението от дължините на векторите.

11.10. Две оптически среди са разделени с равнина. Светлинен лъч има скорост v_1 в едната и v_2 в другата среда. Изведете закона за пречупване на светлината чрез принципа на Ферма, според който тя минава от точка A до точка B за минимално време.

Р е ш е н и е. (фиг. 4) Нека $A(0,a)$, $B(p,-b)$, $a,b,p>0$. Неизвестни са ъглите α и β. Времето, за което лъчът от A достига в



Фиг. 4

B, е $T = \dfrac{a}{v_1 \cos\alpha} + \dfrac{b}{v_2 \cos\beta}$. При това $a \operatorname{tg}\alpha + b \operatorname{tg}\beta = p$. Условието е $\varphi = a \operatorname{tg}\alpha + b \operatorname{tg}\beta - p = 0$. Матрицата

$$(\varphi'_\alpha, \varphi'_\beta) = \left(\frac{a}{\cos^2\alpha}, \frac{b}{\cos^2\beta}\right)$$

има ранг 1. Образуваме $F = T + \lambda\varphi$. От $F'_\alpha = 0$, $F'_\beta = 0$ получаваме

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2} (= -\lambda).$$

Това е законът за пречупването.

$$dF = \left(\frac{a}{v_1}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\lambda a}{\cos^2\alpha}\right) d\alpha + \left(\frac{b}{v_2}\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta} + \frac{\lambda b}{\cos^2\beta}\right)(d\beta)^2,$$

$$d^2F = \left(\frac{a}{v_1\cos\alpha} + \frac{2a\sin\alpha}{\cos^3\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{v_1} + \lambda\right)\right)(d\alpha)^2$$

$$+\left(\frac{b}{v_2\cos\beta} + \frac{2b\sin\beta}{\cos^3\beta}\left(\frac{\sin\beta}{v_2} + \lambda\right)\right)(d\beta)^2 = \frac{a(d\alpha)^2}{v_1\cos\alpha} + \frac{b(d\beta)^2}{v_2\cos\beta}.$$

Формата е положително дефинитна, имаме условен минимум.

11.11. Върху прав кръгов цилиндър е поставен прав кръгов конус, като горната основа на цилиндъра е долна основа на конуса. При дадена пълна повърхнина на полученото тяло направете обема максимален.

§ 12. Изследване на криви

Към методите, разгледани в §13–§15, ч. I, гл. 3, тук ще прибавим още един — този, с помощта на който решихме зад. 10.1 б). Разбира се в конкретен случай имаме право да приложим всеки подходящ метод. Един полином $F(x,y)$ може да се представи във вида $F = F_n + F_{n-1} + \cdots + F_0$, където F_k е хомогенен полином от степен k. Просто сме обединили членовете от една и съща степен. Ще използваме за краткост тези означения.

12.1. Нека $F(x,y) = \sum\limits_{0 \leqq i+j \leqq n} a_{ij}x^iy^j$. Да образуваме

$$F(x, ax+b) = \sum a_{ij}x^i(ax+b)^j$$

$$= A(a)x^n + [B(a)b + C(a)]x^{n-1} + o(x^{n-1}) \quad (x \to \infty):$$

а) Докажете, че ако $A(a) = 0$, $B(a) \neq 0$ и изберем $b = -\dfrac{C(a)}{B(a)}$, то за всяко положително число ε може да се намери такова p, че щом $x > p$, има поне едно $y_\varepsilon(x)$, за което $F(x, y_\varepsilon(x)) = 0$ и $|y_\varepsilon(x) - ax - b| < \varepsilon$;

б) Нека $F = F_n + F_{n-1} + \cdots + F_0$, $A(a) = F_n(1,a)$. Докажете, че ако a е прост корен на уравнението $A(a) = F_n(1,a) = 0$, то

$$B(a) \neq 0 \qquad \text{и} \qquad b = -\frac{C(a)}{B(a)} = -\frac{F_{n-1}(1,a)}{\dfrac{\partial}{\partial a}F_n(1,a)};$$

в) Обратно, ако за някоя функция $y(x)$, дефинирана в интервала (p, ∞), имаме $F(x, y(x)) = 0$ и $y(x) = ax + b + o(x)$ $(x \to \infty)$, докажете, че $A(a) = 0$ и $B(a).b + C(a) = 0$.

Р е ш е н и е. а) $F(x, ax + b \pm \varepsilon) = [B(a).(b \pm \varepsilon) + C(a)]x^{n-1} + o(x^{n-1}) = \pm\varepsilon B(a)x^{n-1} + o(x^{n-1}) = x^{n-1}(\pm\varepsilon B(a) + o(1)) \quad (x \to \infty)$. Нека $\varepsilon > 0$. Има p, за което при $x > p$ стойностите $F(x, ax + b \pm \varepsilon)$ имат различни знаци. Тогава уравнението $F(x,y) = 0$ има поне едно решение $y_\varepsilon(x)$ между $ax+b-\varepsilon$ и $ax+b+\varepsilon$, т. е. $|y_\varepsilon(x) - ax - b| < \varepsilon$. В този смисъл правата $y = ax + b$ е асимптота на кривата $F = 0$ при $x \to \infty$. Формулирайте и докажете твърдението при $x \to -\infty$.

12.2. Нека $F(x,y)$ е полином и $F = F_p + F_{p+1} + \cdots + F_n$. Докажете, че ако $F_p(1,t)$ се анулира при $t = t_0$, като сменя знака си, то за всяко положително ε може да се намери такова $\delta > 0$, че щом $|x| < \delta$ и $x \neq 0$, има поне едно $y_\varepsilon(x)$, за което $F(x, y_\varepsilon(x)) = 0$ и $t_0 - \varepsilon < \dfrac{y_\varepsilon(x)}{x} < t_0 + \varepsilon$.

Р е ш е н и е. $F(x, tx) = F_p(x, tx) + F_{p+1}(x, tx) + \cdots + F_n(x, tx)$

$$= x^p[F_p(1,t) + xF_{p+1}(1,t) + \cdots + x^{n-p}F_n(1,t)],$$

$$F(x, (t \pm \varepsilon)x) = x^p[F_p(1, t_0 \pm \varepsilon) + o(1)] \quad (x \to 0).$$

Нека $\varepsilon > 0$. Има δ, за което щом $|x| < \delta$ и $x \neq 0$, стойностите $F(x,(t_0 \pm \varepsilon)x)$ имат различни знаци. Тогава уравнението $F(x,y) = 0$ има поне едно решение $y_\varepsilon(x)$ между $(t_0+\varepsilon)x$ и $(t_0-\varepsilon)x$.

12.3. Нека $F(x,y)$ е полином и $F = F_p + F_{p+1} + \ldots + F_n$:

а) Докажете, че ако F_p има в $(0,0)$ строг екстремум, точката $(0,0)$ е изолирана за кривата $F = 0$;

б) Ако F_n има в $(0,0)$ строг екстремум, то кривата $F = 0$ е ограничена;

в) Нека $p \geqq 1$. Често около точката $(0,0)$ кривите $F = 0$ и $F_p = 0$ „си приличат". Убедете се, че това не е така за $F = y^2 + x^4 - y^6$ или $F = x^2y + y^5$.

Р е ш е н и е. а) $p \geqq 2$ и $F_p \neq 0$ при $(x,y) \neq (0,0)$.

$$F = F_p\left(1 + \frac{F_{p+1}}{F_p} + \cdots + \frac{F_n}{F_p}\right).$$

Ако $k > p$, то $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{F_k(x,y)}{F_p(x,y)} = 0$, защото

$$\frac{F_k(x,y)}{F_p(x,y)} = r^{k-p}\frac{F_k\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r}\right)}{F_p\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r}\right)}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

$\dfrac{F_k}{F_p}$ е непрекъсната, а следователно и ограничена функция върху единичната окръжност. Така в достатъчно малка околност на началото, ако $(x,y) \neq (0,0)$, стойностите $F(x,y)$ и $F_p(x,y)$ имат един и същ знак. Тогава и F има в $(0,0)$ строг локален екстремум.

12.4. Нека $F(x,y) = \varphi(x)y^n + \varphi_1(x)y^{n-1} + \cdots + \varphi_n(x)$, функциите $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ са дефинирани в някоя околност U на точката x_0 и са непрекъснати в тази точка:

а) Нека $\varphi(x_0) = 0$, но в никоя околност на x_0 φ не се анулира тъждествено. Нека още за всяко $x \in U$ уравнението $F(x,y) = 0$ има само реални решения относно y или е тъждество. Докажете, че над всяка околност $V \subset U$ на x_0 кривата $\Gamma : F(x,y) = 0$ е неограничена;

б) Нека $\varphi(x_0) \neq 0$. Докажете, че над някоя околност на x_0 кривата $F = 0$ е ограничена.

Р е ш е н и е. а) Да допуснем, че над някоя околност $V \subset U$ на x_0 кривата Γ е ограничена. Нека $x \in V$ и $\varphi(x) \neq 0$. Уравнението

$y^n + \dfrac{\varphi_1}{\varphi}y^{n-1} + \cdots + \dfrac{\varphi_n}{\varphi} = 0$ има n реални решения относно y, ако отчитаме кратността на корените. (Прилагаме $n-1$ пъти теоремата на Гаус (зад. 3.10), като всеки път при корен α делим с $y - \alpha$. По условие корените са само реални.) Щом Γ е ограничена над V, от формулите на Виет имаме, че и коефициентите $\dfrac{\varphi_i}{\varphi}$ са ограничени при $x \in V$, $\varphi(x) \neq 0$, т. е. $\left|\dfrac{\varphi_i}{\varphi}\right| \leqq A$, $|\varphi_i(x)| \leqq A|\varphi(x)|$. Нека $x \to x_0$ $(x \in V,\ \varphi(x) \neq 0)$. Получаваме $|\varphi_i(x_0)| \leqq A.|\varphi(x_0)| = 0$, следователно $\varphi_i(x_0) = 0$. Цялата права $x = x_0$ се съдържа в Γ, което е противоречие. (Допуснахме, че Γ е ограничена над V.) Разгледайте $F = x^2y^3 + y$. Тук $\varphi = x^2$, $\varphi(0) = 0$, но Γ е ограничена над всеки интервал.

12.5. Начертайте кривите:

а) $(x^2 - y^2)(x - y) = 1$; **б)** $(x - y)xy + x + y = 0$;
в) $x^4 + y^4 - 4xy = 0$; **г)** $x^4 + y^4 + x^2 - y^2 = 0$;
д) $2x^3 + 3y^2 - 3x^2y = 0$; **е)** $y^2 = 2x^2y + x^5$;
ж) $x^4 - 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0$; **з)** $x^3 + y^3 + x^2 + y^2 = 2$;
и) $x^3 + y^3 = x^2 + xy + y^2$; **й)** $x^4 - y^4 + 2xy = 1$;
к) $x^3 + y^3 + 1 = 3x + 3y$; **л)** $(x^2 - y^2)^2 = 2x$;
м) $(x^2 - y^2)^2 = x^2 + y^2$.

Р е ш е н и е. а) $F = (x+y)(x-y)^2 - 1 = x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 - 1$.

А. Кривата е симетрична относно правата $y = x$, защото $f(x,y) = f(y,x)$. Тя пресича координатните оси в точките $(1,0)$ и $(0,1)$, а не пресича правата $y = x$. Пресмятаме

$$F(x, ax+b) = (1 - a - a^2 + a^3)x^3 + (-b - 2ab + 3a^2b)x^2 + o(x^2)$$

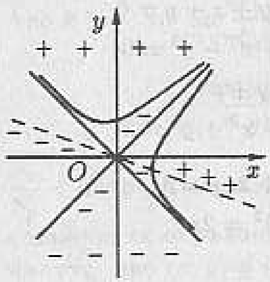
$(x \to \pm\infty)$. Уравнението $1 - a - a^2 + a^3 = (1+a)(1-a)^2 = 0$ има корени $a = \pm 1$. При $a = -1$: $-b - 2ab + 3a^2b = 4b = 0$. Правата $y = -x$ е асимптота при $x \to \infty$ и при $x \to -\infty$ (зад. 12.1 а)). При $a = 1$: $-b - 2ab + 3a^2b = -3b + 3b = 0.b = 0$. Правилото от зад. 12.1 а) е неприложимо. (Разгледайте примерите $y^3 - x = 0$ и $y^3 - xy = 0$. Като положим $y = ax + b$, получаваме $a = 0$ и коефициентът пред b се анулира. В първия случай нямаме асимптота, а във втория правата $y=0$ е асимптота.) Можем и както в зад. 12.1 б) да образуваме $F_3(1,a)=(1+a)(1-a)^2=0, a=1$ е двоен корен и правилото е неприложимо, $a=-1$ е прост корен, следователно

$$\left.\frac{\partial F_3(1,a)}{\partial a}\right|_{a=-1} \neq 0.$$

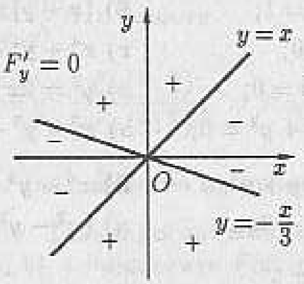
Няма да пресмятаме този израз, защото $F_2=0$ и $b=0$. Ще установим, че правата $y=x$ е също асимптота. Нека $\varepsilon>0$.

$$F(x,x)=-1<0, \quad F(x,x\pm\varepsilon)=\varepsilon^2(2x\pm\varepsilon)-1>0,$$

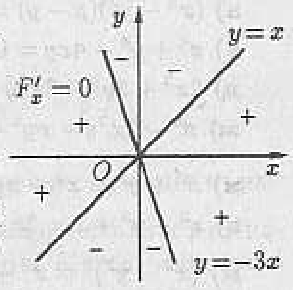
ако x е достатъчно голямо. Тогава уравнението $F(x,y)=0$ има поне едно решение $y_1(x)$ между $x-\varepsilon$ и x, и поне едно решение $y_2(x)$ между x и $x+\varepsilon$. В този смисъл $y=x$ е асимптота при $x\to\infty$. Но не при $x\to-\infty$. Кривата въобще няма точки в полуравнината $x+y\leqq 0$, щом $(x+y)(x-y)^2=1$. Да нахвърлим фиг. 5;



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Б. $F'_y=(x-y)^2-(x+y).2(x-y)=(y-x)(3y+x)$. Линията $F'_y=0$ се състои от две прави (фиг. 6). Те разделят равнината на четири части. Лесно съобразяваме какъв е знака на F'_y във всяка от частите. При фиксирано x да изучим функцията $y\mapsto F(x,y)$. Нека $x>0$. Функцията $y\mapsto F(x,y)$ расте при $y\leqq -\frac{x}{3}$, намалява при $-\frac{x}{3}\leqq y\leqq x$ и расте при $y\geqq x$.

$F(x,x)=-1<0$, $F\left(x,-\frac{x}{3}\right)=\frac{32}{27}x^3-1$ — анулира се при $x=x_0=\frac{3}{2.\sqrt[3]{4}}$, отдясно е положителна, отляво е отрицателна.

Виждаме, че ако $0<x<x_0$, уравнението $F(x,y)=0$ има единствено решение y и $y>x$. Тъй като $F(x,y)\to-\infty$ при $y\to-\infty$ и $F(x,y)\to\infty$ при $y\to\infty$, то за $x>x_0$ получаваме три решения: $y_1<-\frac{x}{3}$, $-\frac{x}{3}<y_2<x$, $x<y_3$. Можем да уточним разположението на (x,y_1) спрямо асимптотата $y=-x$: $F(x,-x)=-1<0$. Следователно $y_1>-x$. При $x=x_0$ имаме две решения, а за $x<0$ получаваме единствено решение $y>-\frac{x}{3}$ и даже $y>-x$. Всъщност правим тези изследвания наум (освен пресмятанията за $F\left(x,-\frac{x}{3}\right)$, $F(x,-x)$ и др. п.), като наблюдаваме фиг. 6 (оттам разбираме кога функцията $y\mapsto F(x,y)$ расте и кога намалява) и нанасяме на фиг. 5 знака на F върху характерните линии ($F'_y=0$, а в случая и асимптотата $y=-x$). Над асимптотите $y=x$ и $y=-x$ се оформя един клон, който е графика на функция $y_3(x)$ от $C^\infty(\mathbb{R})$ (защото там $F'_y\neq 0$). Виждаме и две графики на функции $y_1(x)<y_2(x)$ от $C^\infty(x_0,\infty)$, които се съединяват при $x=x_0$, защото в точката $\left(x_0,-\frac{x_0}{3}\right)$ имаме $F'_x=(x-y)(3x+y)\neq 0$ (вж. зад. 10.1 б)). Около тази точка кривата е графика на гладка функция $x(y)$ и в нея тя има вертикална допирателна (тъй като $x'(y)=-\frac{F'_y}{F'_x}=0$ при $y=-\frac{x_0}{3}$). За споменатите три клона $y'=-\frac{F'_x}{F'_y}$. Като изучим знака и на F'_x (за тази цел чертаем фиг. 7), ще разберем със сигурност, че y_1 намалява, а y_2 расте. Поради симетрията знаем, че y_3 достига минимум в точката $\left(-\frac{x_0}{3},x_0\right)$. Бихме я намерили като пресечна точка на кривата $F=0$ и правата $y=-3x$. Функцията $y_1(x)$ намалява в $\left(-\infty,-\frac{x_0}{3}\right)$ и расте в $\left(-\frac{x_0}{3},\infty\right)$. Чертежът от А. се потвърждава. Намерихме двете характерни точки $\left(x_0,-\frac{x_0}{3}\right)$, $\left(-\frac{x_0}{3},x_0\right)$. Вместо $y\mapsto F(x,y)$ можем да изследваме функцията $x\mapsto F(x,y)$. Непременно правим това, ако F'_y е по трудна за изследване от F'_x. В А. не потърсихме вертикална асимптота. Сега е ясно, че такава няма.

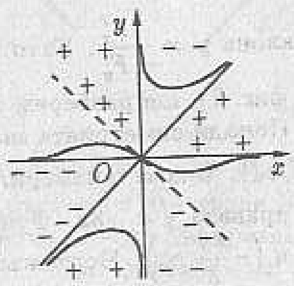
б) $F=(x-y)xy+x+y$.

А. Кривата е симетрична относно началото, защото $F(-x,-y) = -F(x,y)$. Тя пресича координатните оси само в точката $(0,0)$. За да потърсим вертикал-
Намираме асимптотите $y=0$ и $y=x$. ни асимптоти $x=b$, разменяме ролите на x и y, т. е. пресмятаме $F(b,y) = 0.y^3 - by^2 + o(y^2)$ $(y \to \pm\infty)$, $b=0$. Правата $x=0$ е асимптота. (Няма смисъл да образуваме $F(ay+b,y)$ — бихме намерили отново асимптотата $y=x$.) Сумата от младшите членове е $F_1 = x+y$, $F_1(1,t) = 1+t$ и се анулира при $t=-1$, като сменя знака си. В точката $(0,0)$ правата $y=-x$ е допирателна (в смисъла от зад. 12.2);

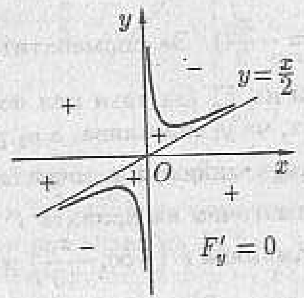
Б. $F'_y = x^2 - 2xy + 1$, $F'_x = 2xy - y^2 + 1$, $F'_y(0,0) = 1 \neq 0$, следователно около точката $(0,0)$ кривата е графика на функция $y(x)$,

$y'(0) = -\dfrac{F'_x(0,0)}{F'_y(0,0)} = -1$. Наистина правата $y=-x$ е допирателна. На фиг. 8 нанасяме знака на F върху асимптотите и допирателната $y=-x$.

$F(x,0) = x$, $F(0,y) = y$, $F(x,x) = 2x$, $F(x,-x) = -2x^3$. Освен това $\lim\limits_{y\to\pm\infty} F(x,y) = -\infty$ при $x>0$ и $+\infty$ при $x<0$. Нахвърляме и самата крива. Според чертежа при $x \neq 0$ уравнението $F(x,y) = 0$ има две решения за y. Това обаче не следва от информацията, отразена на фиг. 8. От нея следва само, че имаме



Фиг. 8



Фиг. 9

поне две решения. Не сме намерили интервалите на монотонност за функцията $y \mapsto F(x,y)$. При $x \neq 0$ уравнението е квадратно относно y и има не повече от две решения. Все пак да разгледаме хиперболата $F'_y = 0$ (фиг. 9 — графика на функцията $y = \dfrac{x^2+1}{2x}$).

Не е ясен знакът на F в точките от тази линия. Бихме оставили нещата в този вид, който те имат на фиг. 8. Впрочем да потърсим пресечните точки на линиите $F=0$ и $F'_y = 0$: от $x^2 = 2xy - 1$ получаваме

$$F = x^2y - xy^2 + x + y = (2xy-1)y - xy^2 + x + y = xy^2 + x = x(y^2+1) = 0,$$
$$x = 0,$$

но това е противоречие. Двете линии нямат общи точки. Върху горната част на хиперболата F има знака на $F(1,1) = 2$, а върху долната — на $F(-1,-1) = -2$. Продължете самостоятелно както в а) и обосновете отново фиг. 8. Намерете интервалите на монотонност за неявните функции $y(x)$, определени от уравнението $F=0$;

в) $F = x^4 + y^4 - 4xy$, $F_4 = x^4 + y^4$. Според зад. 12.3 б) кривата е ограничена. Тя е симетрична относно правата $y=x$, защото $F(x,y) = F(y,x)$, и относно началото, защото $F(-x,-y) = F(x,y)$. Тогава е симетрична и относно правата $y=-x$.

$F_2 = -4xy$, $F_2(1,t) = -4t$, анулира се при $t=0$, като сменя знака си. Правата $y=0$ е допирателна в смисъла от зад. 12.2. За да изясним въпроса за вертикална допирателна в $(0,0)$, разменяме ролите на x и y, т. е. образуваме $F_2(t,1) = -4t$. И правата $x=0$ е допирателна в смисъла от зад. 12.2. Асимптоти няма (кривата е ограничена). Продължете самостоятелно;

д) $F_2 = 3y^2$, $F_2(1,t) = 3t^2$. Анулира се при $t=0$, но не сменя знака си. Правилото от зад. 12.2 е неприложимо. Нека $\varepsilon > 0$. $F(x, \pm\varepsilon x) = x^2(3\varepsilon^2 + 2x \mp 3\varepsilon x) > 0$, ако $x \neq 0$ е достатъчно малко. Но $F(x,0) = 2x^3 < 0$ при $x<0$. Следователно за достатъчно малки отрицателни x уравнението $F(x,y) = 0$ има поне едно решение $y_1(x)$ между $-\varepsilon x$ и 0 и поне едно решение $y_2(x)$ между 0 и εx. В този смисъл правата $y=0$ е допирателна към кривата в точката $(0,0)$. Изследвайте самостоятелно тази крива;

и) $F_2 = x^2 + xy + y^2$ има строг минимум в $(0,0)$, следователно точката $(0,0)$ е изолирана (зад. 12.3 а)). И т. н.

12.6. С метода на сеченията изследвайте графиките на функциите:

а) x^2y^2; б) Седлото $x^2 - y^2$; в) $x^3 - y^2$;
г) Седлото xy; д) Маймунското седло $x^3 - 3xy^2$; е) x^y.

14

§ 13. Обща смяна на променливите

В примерите на § 9 имахме смяна на независимите променливи. Тук ще разгледаме общата задача за смяна на променливите. Условия, достатъчни за да бъдат законни пресмятанията, ни дава зад. 10.19.

13.1. В следните изрази и уравнения направете смяна на променливите с помощта на съответните трансформачни формули:

а) $(1+x^2)^2y''=y$: $x=\operatorname{tg}t$, $y=\dfrac{u}{\cos t}$; $u(t)$;

б) $(1-x^2)^2y''+y=0$: $x=\operatorname{th}t$, $y=\dfrac{u}{\operatorname{ch}t}$; $u(t)$;

в) $y''+p(x)y'+q(x)y=0$: $x=x$, $y=ue^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt}$; $u(x)$;

г) $y''+(e^y-x)y'^3=0$: $x=u$, $y=t$; $u(t)$;

д) $y'y'''-3(y'')^2=0$: $x=u$, $y=t$; $u(t)$;

е) Уравнението на Стокс $y''=\dfrac{y}{(x-a)^2(x-b)^2}$: $t=\ln\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|$, $u=\dfrac{y}{x-b}$; $u(t)$;

ж) Шварциан $S(y)=\dfrac{y'''}{y'}-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y''}{y'}\right)^2$: $x=u$, $y=t$; $u(t)$;

з) Докажете: $S\left(\dfrac{ay+b}{cy+d}\right)=S(y)$ $(ad-bc\neq 0)$;

и) $k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ в полярни координати: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$; $r(\varphi)$;

й) $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$ в полярни координати;

к) $x^4y''+xyy'-2y^2=0$: $x=e^t$, $y=ue^{2t}$; $u(t)$;

л) $y''+(x+y)(1+y')^3=0$: $x=u+t$, $y=u-t$; $u(t)$;

м) Системата $\dot{x}=y+ax(x^2+y^2)$, $\dot{y}=-x+ay(x^2+y^2)$ в полярни координати (тук x, y, r и φ са функции на t).

Решение. а) При $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$, $u\in\mathbb{R}$ трансформацията е обратима.

$$\frac{D(x,y)}{D(t,u)}=\frac{1}{\cos^3 t}\neq 0,\quad \delta=\frac{1}{\cos t}\neq 0 \quad (\text{от зад. } 10.19\ \text{а}).$$

Тази проверка тук е излишна, защото явно $t=\operatorname{arctg}x$ и, като положим $u(t)=y(\operatorname{tg}t).\cos t$, имаме

$$y(x)=\frac{u(\operatorname{arctg}x)}{\cos(\operatorname{arctg}x)}=\sqrt{1+x^2}.u(\operatorname{arctg}x).$$

Ако $y(x)$ е дефинирана в $\mathbb{R}$ и y'' съществува, то $u(t)$ е дефинирана в $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ и u'' съществува (и обратно).

$$y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}u+\sqrt{1+x^2}.u'\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{xu+u'}{\sqrt{1+x^2}},\quad y''=\frac{u''+u}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

уравнението е $u''=0$. Можем да не решаваме явно относно t. Знаем, че $x=\operatorname{tg}t$ е обратима функция в $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, нека $t(x)$ е обратната функция. От $1=\dfrac{1}{\cos^2 t}\cdot t'_x$ намираме $t'_x=\cos^2 t$. Тогава от

$$y=\frac{u}{\cos t}:\quad y'=\frac{u't'_x\cos t+u\sin t.t'_x}{\cos^2 t}=u'\cos t+u\sin t,$$

$$y''=u''t'_x\cos t-u'\sin t.t'_x+u't'_x\sin t+u\cos t.t'_x=(u''+u)\cos^3 t.$$

Освен това $(1+x^2)^2=(1+\operatorname{tg}^2 t)^2=\dfrac{1}{\cos^4 t}$. Новото уравнение е $u''=0$. За да не забравяме, че y зависи непосредствено от x, а u — от t, можем, докато смятаме, да пишем y'_x, u'_t, въпреки че това са функции на една променлива;

г) Трансформацията $x=u$, $y=t$ е обратима, $\dfrac{D(x,y)}{D(t,u)}=-1\neq 0$, $\delta=-y'(x)\neq 0$. Смяната извършваме, ако $y'(x)\neq 0$. Продължете самостоятелно;

з) Сведете към $S(ay+b)=S(y)$ и $S\left(\dfrac{1}{y}\right)=S(y)$;

и) Трансформацията е обратима например при $r>0$ и $-\pi<\varphi\leqq\pi$,

$$\Delta=\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=r>0,$$

$$\delta = \sin\varphi - \cos\varphi . y' = \frac{1}{r}(y - xy') \neq 0, \quad \text{т. е.} \quad y - xy' \neq 0.$$

Геометрически това условие означава, че допирателната към графиката на $y(x)$ в точката $(x, y(x))$ не минава през началото. (Тази допирателна има уравнение $\eta = y(x) + y'(x)(\xi - x)$.) И така, от равенството $y = y(x)$, т. е. $r\sin\varphi = y(r\cos\varphi)$, получаваме локално $r = r(\varphi)$ (защото $\delta \neq 0$), а от $x = r(\varphi)\cos\varphi$ получаваме $\varphi = \varphi(x)$ (тъй като и $d = \dfrac{\Delta}{\delta} \neq 0$). Диференцираме по x:

$$1 = \dot r\cos\varphi.\varphi'_x - r\sin\varphi.\varphi'_x, \quad \varphi'_x = \frac{1}{\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi}.$$

От $y = r\sin\varphi$:

$$y' = \dot r\sin\varphi.\varphi'_x + r\cos\varphi.\varphi'_x = \frac{\dot r\sin\varphi + r\cos\varphi}{\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi}.$$

Знаменателят е различен от нула, защото това е $d = \dfrac{\Delta}{\delta}$. Пресмятаме

$$y'' = \frac{1}{(\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi)^2}\big[(\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi)(\ddot r\sin\varphi + \dot r\cos\varphi + \dot r\cos\varphi - r\sin\varphi)$$

$$-(\dot r\sin\varphi + r\cos\varphi)(\ddot r\cos\varphi - \dot r\sin\varphi - \dot r\sin\varphi - r\cos\varphi)\big].\varphi'_x.$$

(Изнесохме φ'_x пред скоби.)

$$y'' = \frac{r^2 + 2\dot r^2 - r\ddot r}{(\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi)^3}.$$

Оттук намираме k. Равенствата разгледахме като тъждества относно x. Нека сега ги разгледаме като тъждества относно $\varphi(x = r(\varphi)\cos\varphi)$. От $y = y(x)$ имаме

$$r\sin\varphi = y(r\cos\varphi), \quad \dot r\sin\varphi + r\cos\varphi = y'.(\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi),$$

$$y' = \frac{\dot r\sin\varphi + r\cos\varphi}{\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi}.$$

Тук y' се взема в точката $r\cos\varphi$. И т. н.

Въобще, когато трансформачните формули са $x = f(t,u)$, $y = g(t,u)$, $u(t)$, при условие че $\delta \neq 0$ и $\Delta \neq 0$ (зад. 10.19 а)), първо разглеждаме неявната функция $u(t)$, определена локално от

$y = y(x)$, т. е. $g(t,u) = y(f(t,u))$ (при изходна функция $y(x)$), а после обратната функция $t(x)$, определена локално от $x = f(t, u(t))$. В пресмятането третираме всички равенства като тъждества относно x. Или като тъждества относно t. Задачите $x = f$, $y = g$; $u(t)$ и $x = f$, $y = g$; $t(u)$ са различни. Трансформачните формули може да бъдат решени относно t и u: $t = f(x,y)$, $u = g(x,y)$, или да бъдат: $f(x,y,t,u) = 0$, $g(x,y,t,u) = 0$. В § 9 те имаха вида $x = f(t)$ (или $t = f(x)$), $y = u$; $u(t)$.

13.2. В следните изрази и уравнения направете смяна на променливите с помощта на съответните трансформачни формули:

а) $az'_x + bz'_y = 1 \quad (a \neq 0): \quad x = u, y = v + bw, z = w; \quad w(u,v)$;

б) $x^2 z'_x + y^2 z'_y = z^2$: $u = x$, $v = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}$, $w = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{x}$; $w(u,v)$;

в) $yz'_x - xz'_y = (y - x)z$: $u = x^2 + y^2$, $v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, $w = \ln z - x - y$; $w(u,v)$;

г) $(xy - z)z'_x + (1 - y^2)z'_y = x + yz$: $u = yz - x$, $v = xz - y$, $w = xy - z$; $w(u,v)$;

д) $xp'_x + yp'_y + zp'_z = p + \dfrac{xy}{z}$: $\xi = \dfrac{x}{z}$, $\eta = \dfrac{y}{z}$, $\zeta = z$, $q = \dfrac{p}{z}$; $q(\xi,\eta,\zeta)$;

е) $z'_x + f(z)z'_y = 0$: $x = u$, $y = w$, $z = v$; $w(u,v)$;

ж) $z'_x + f(z)z'_y = 0$: $u = x$, $v = y - xf(z)$, $w = z$; $w(u,v)$;

з) Докажете, че уравнението $z''_{xx}z''_{yy} - z''^2_{xy} = 0$ остава същото при всеки избор на една зависима и две независими от променливите x, y и z;

и) $z''_{xx} = z'_y$: $u = \dfrac{x}{y}$, $v = -\dfrac{1}{y}$, $w = \sqrt{y}e^{\frac{x^2}{4y}}z$; $w(u,v)$;

й) $yz''_{yy} + 2z'_y = \dfrac{2}{x}$: $u = \dfrac{x}{y}$, $v = x$, $w = xz - y$; $w(u,v)$;

к) $z'^2_y z''_{xx} - 2z'_x z'_y z''_{xy} + z'^2_x z''_{yy} = 0$: $x = w$, $y = u$, $z = v$; $w(u,v)$;

л) $z.(z''_{xx} + z''_{yy}) = z'^2_x + z'^2_y$: $u = x$, $v = y$, $w = z^2$; $w(u,v)$;

м) $(1 - x^2)z''_{xx} + (1 - y^2)z''_{yy} = xz'_x + yz'_y$: $x = \sin u$, $y = \sin v$, $z = e^w$; $w(u,v)$;

н) Докажете, че изразите $z_x'^2 + z_y'^2$ и $z''_{xx} + z''_{yy}$ са инвариантни относно ортогонална смяна на координатната система в $\mathbb{R}^3$;

о) $z'_x z''_{yy} - z'_y z''_{xy} = 0$: $x = w$, $y = u$, $z = v$; $w(u, v)$;

п) $yz'_x - xz'_y = 0$ в сферични координати: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$; $r(\theta,\varphi)$.

Решение. а) От $z = z(x,y)$, т. е. $w = z(u, v + bw)$, локално се определя функция $w(u,v)$, а от системата $x = u$, $y = v + bw(u,v)$ — функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$. Всъщност $u(x,y) = x$, $z(x,y) = w(u(x,y), v(x,y)) = w(x, v(x,y))$, $z'_x = w'_u + w'_v.v'_x$, $z'_y = w'_v.v'_y$. За да намерим v'_x и v'_y, диференцираме равенствата, които определят функциите $u(x,y) = x$ и $v(x,y)$, първо по x:

$$1 = u'_x, \quad 0 = v'_x + b(w'_u + w'_v.v'_x), \quad v'_x = \frac{-bw'_u}{1 + bw'_v},$$

а после по y:

$$0 = u'_y, \quad 1 = v'_y + bw'_v.v'_y, \quad v'_y = \frac{1}{1 + bw'_v}.$$

Намираме z'_x, z'_y и решаваме задачата. Възприехме равенствата като тъждества относно x и y. Бихме могли да ги разглеждаме и като тъждества относно u и v. Производните z'_x и z'_y можем да намерим едновременно, ако работим с диференциали: $dz = z'_x\,dx + z'_y\,dy$, но в същото време $dz = dw = w'_u\,du + w'_v\,dv$. От $x = u$, $y = v + bw$ имаме

$$dx = du, \quad dy = dv + b(w'_u\,du + w'_v\,dv) = bw'_u\,du + (1 + bw'_v)dv,$$

$$dv = \frac{dy - bw'_u\,dx}{1 + bw'_v}.$$

Тогава

$$dz = \frac{w'_u\,dx + w'_v\,dy}{1 + bw'_v}$$

и z'_x и z'_y са намерени. Изразихме всички диференциали чрез dx и dy. Можехме да ги изразим и чрез du и dv. Достатъчните условия от зад. 10.19 б) изискват:

$$\Delta = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = 1 \neq 0, \delta = 1 - bz'_y \neq 0.$$

Знаменателят $1 + bw'_v$ е $d = \dfrac{\Delta}{\delta} \neq 0$;

з) Нека например $x = w$, $y = u$, $z = v$; $w(u,v)$. Имаме $z(x,y) = z(w(u,v), u) = v$. Тогава $z'_x.w'_u + z'_y = 0$, $z'_x.w'_v = 1$. Диференцирахме по u и по v. Следователно $z'_x = \dfrac{1}{w'_v}$, $z'_y = \dfrac{-w'_u}{w'_v}$, като z'_x и z'_y се вземат (както и z) в точката $x = w(u,v)$, $y = u$. Диференцираме по u и по v още веднъж:

$$z''_{xx}w'_u + z''_{xy} = \frac{-1}{w_v'^2}w''_{vu}, \quad z''_{xx}w'_v = \frac{-1}{w_v'^2}w''_{vv},$$

$$z''_{yx}w'_u + z''_{yy} = \frac{-w''_{uu}w'_v + w'_u w''_{vu}}{w_v'^2}.$$

Оттук намираме вторите производни на z и получаваме

$$z''_{xx}z''_{yy} - z''^2_{xy} = \frac{w''_{uu}w''_{vv} - w''^2_{uv}}{(w'_v)^4}.$$

Разгледахме равенствата като тъждества относно u и v. Нека сега ги възприемем като тъждества относно x и y: $z(x,y) = v(x,y)$, $z'_x = v'_x$, $z'_y = v'_y$. От $x = w(u(x,y), v(x,y)) = w(y, v(x,y))$ имаме $1 = w'_v v'_x$, $0 = w'_u + w'_v v'_y$. Диференцирахме по x и по y. Така $z'_x = v'_x = \dfrac{1}{w'_v}$, $z'_y = v'_y = -\dfrac{w'_u}{w'_v}$. И т. н. Сега z'_x и z'_y се вземат (както и z) в точката (x,y). Имаме $\Delta = \dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = -1 \neq 0$. Достатъчните условия от зад. 10.19 б) изискват още $\delta = z'_x \neq 0$. Знаменателят w'_v е $d = \dfrac{\Delta}{\delta} \neq 0$;

п) Трансформацията е обратима например при $r > 0$, $0 < \theta < \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}$. Искаме $\theta \neq 0, \pi$ (зад. 4.9 в)), за да бъде

$$\Delta = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta \neq 0.$$

Достатъчните условия от зад. 10.19 б) изискват още

$$\delta = \cos\theta - r'_x\sin\theta\cos\varphi - z'_y\sin\theta\sin\varphi = \frac{1}{r}(z - xz'_x - yz'_y) \neq 0.$$

Геометрически това условие означава, че допирателната равнина към графиката на $z(x,y)$ в точката $(x,y,z(x,y))$ не минава през началото. Разглеждаме равенствата като тъждества относно θ и φ:

$$z'_x x'_\theta + z'_y y'_\theta = r'_\theta \cos\theta - r\sin\theta, \quad z'_x x'_\varphi + z'_y y'_\varphi = r'_\varphi \cos\theta.$$

Производните на x и y относно θ и φ намираме непосредствено. Решаваме системата относно z'_x и z'_y и след търпеливо пресмятане получаваме новото уравнение $r'_\varphi = 0$. Разгледайте равенствата и като тъждества относно x и y, а θ и φ — като функции на x и y.

Въобще, когато трансформачните формули са $x = f(u,v,w)$, $y = g(u,v,w)$, $z = h(u,v,w)$; $w(u,v)$, при условие, че $\Delta \neq 0$ и $\delta \neq 0$ (зад. 10.19 б)), първо разглеждаме неявната функция $w(u,v)$, определена локално от $z = z(x,y)$, т. е. $h = z(f,g)$ (при изходна функция $z(x,y)$), а после функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$, определени локално от системата $x = f(u,v,w(u,v))$, $y = g(u,v,w(u,v))$. В пресмятането третираме всички равенства като тъждества относно x и y. Или като тъждества относно u и v. Трансформачните формули може да бъдат решени относно u, v и w. В § 9 те имаха вида $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$, $z = w$; $w(u,v)$.

13.3. а) Ако $t = y'$, $u = xy' - y$; $u(t)$, то пресметнете u', u'', u'''.

б) В уравнението

$$f(z'_x, z'_y)z''_{xx} + 2g(z'_x, z'_y)z''_{xy} + h(z'_x, z'_y)z''_{yy} = 0$$

направете смяна на променливите с помощта на трансформачните формули $p = z'_x, q = z'_y$, $w = xz'_x + yz'_y - z$; $w(p,q)$ (т р а н с ф о р м а ц и я н а Л е ж а н д ъ р, срв. зад. 10.20).

§ 14. Задачи за числено пресмятане

Тук предлагаме задачи за числено експериментиране с джобен калкулатор или компютър.

14.1. Решете системата $x^y = 2$, $y^x = 3$. Освен метода на Нютон от зад. 4.6 приложете за сравнение и опростения метод на Нютон, при който производните на f и g се вземат все в началната точка (x_0, y_0), но самите функции f и g се пресмятат в поредната точка (x_n, y_n). Опитайте и с итеративния метод на Зайдел: $x_1 = f(x_0, y_0)$, $y_1 = g(x_1, y_0)$, $x_2 = f(x_1, y_1)$, $y_2 = g(x_2, y_1)$ и т. н. Дадената система се свежда и към едно уравнение: $x^{\sqrt[x]{3}} = 2$.

14.2. Намерете в $\mathbb{C}$ решение на уравнението $e^z = z$ с най-малка положителна имагинерна част.

Р е ш е н и е. Нека $z = x + iy$; $e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = x + iy = z$; $e^x \cos y = x$, $e^x \sin y = y$. Решете тази система. Тя може да се сведе и до уравнение с едно неизвестно:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} y, \quad e^x = \frac{y}{\sin y}, \quad x = \ln\frac{y}{\sin y}, \quad y = \ln\frac{y}{\sin y}\cdot \operatorname{tg} y.$$

Решете това уравнение и отново намерете z (y е първото положително решение).

14.3. Намерете такова число a, че за $y = e^x - 1 - x - ax^2$ да имаме

$$\max_{0 \le x \le 1} y(x) = -\min_{0 \le x \le 1} y(x).$$

Р е ш е н и е. Като изследваме функциите y, y' и y'', получаваме, че трябва $2a > 1$, а също така да има точка $b \in (0,1)$, в която y' се анулира,

$$\min_{0 \le x \le 1} y(x) = y(b), \quad \max_{0 \le x \le 1} y(x) = y(1) = e - 2 - a.$$

От $y'(b) = e^b - 1 - 2ab = 0$ имаме

$$y(b) = e^b - 1 - b - ab^2 = 1 + 2ab - 1 - b - ab^2 = 2ab - b - ab^2.$$

Получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} ab^2 - 2ab + a + b - (e-2) = 0 \\ e^b - 2ab - 1 = 0. \end{array} \right.$$

Решете я, като вземете за първо приближение например точката $(1,1)$. Решете подобна задача за $y = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} - ax^3$ в $[0,1]$.

14.4. а) Пресметнете най-малката стойност на функцията $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y}$, $x > 0$, $y > 0$, като започнете например от точката $(x_0, y_0) = (1,1)$ и въз основа на зад. 4.4 положите (x_{n+1}, y_{n+1})

$= (x_n, y_n) - \lambda_n \operatorname{grad} f(x_n, y_n)$ (метод на градиентното спускане). Стъпките λ_n избирайте еднакви, докато $f(x_{n+1}, y_{n+1}) > f(x_n, y_n)$, в противен случай намалете λ_n. Може да изберете λ_n така, че да се минимизира $f(x_n - \lambda f'_x(x_n, y_n), y_n - \lambda f'_y(x_n, y_n))$ (метод на най-бързото спускане, Коши). За сравнение опитайте и метода на покоординатното спускане, като при всеки ход променяте само една координата. Например

$$\min_x f(x, y_0) = f(x_1, y_0), \quad \min_y f(x_1, y) = f(x_1, y_1) \quad \text{и т. н.};$$

б) пресметнете $\min(e^{x-y} + x^2 + y^2)$;

в) пресметнете най-малката стойност на функцията от зад. 2.4 б), като започнете от точката $(-1, 1)$;

г) решете системата $xy = 2$, $y = x$, като минимизирате функцията $(y - x)^2 + (xy - 2)^2$;

д) решете както в г) системата от зад. 14.1.

14.5. а) Да разгледаме повторния интеграл

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^y \, dy \right) dx.$$

Функцията x^y не е дефинирана в точката $(0,0)$, но нека ѝ дадем произволна стойност в тази точка. Функцията $x \mapsto \int_0^1 x^y \, dy$ е дефинирана и непрекъсната в $[0,1]$, защото

$$\int_0^1 x^y \, dy = \left. \frac{x^y}{\ln x} \right|_{y=0}^{y=1} = \frac{x-1}{\ln x}$$

при $x > 0$, а при $x = 0$ има стойност 0. Следователно I съществува. Въпреки че x^y има прекъсване в $(0,0)$, нека приложим схемата от зад. 7.7 б). Най-грубо, при $n = 1$ получаваме $I \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7} \approx 0,7$. Вземете $n = 2, 5, 10, 20$ и сравнете резултатите;

б) Пресметнете $\int_0^1 \left(\int_0^1 e^{xy} \, dy \right) dx$;

в) Пресметнете числото на Каталан

$$G = \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{dy}{y(1+x^2)} \right) dx,$$

като разгледате в квадрата $[0,1] \times [0,1]$ функцията $f(x,y) = \frac{1}{y(1+x^2)}$ при $x \leqq y \leqq 1$ и $f(x,y) = 0$ при $0 \leqq y < x$. Тя не е непрекъсната, но въпреки това приложете схемата от зад. 7.7 б).

14.6. Приложете формулата от зад. 7.4 в) при $h = 1$ (въпреки че там $h \to 0$), за да получите приблизително $y(1)$, ако $y(0) = 0$ и:

а) $y' = xy + 1$; б) $y' = x^2 + y^2$.

Въпросът за съществуване на решение не разглеждаме.

Решение. а) $a = 0$, $b = y(0) = 0$, $h = 1$, $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{5}{4}$, $k_3 = 1 + \frac{5}{16}$, $k_4 = 2 + \frac{5}{16}$, $y(1) \approx 1,40625 \approx 1,41$. Ако напишем $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, заместим в уравнението и приравним коефициентите, ще получим

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!!}$$

(взели сме предвид, че $y(0) = 0$). Тогава

$$y(1) \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{105} \approx 1,41.$$

Всъщност има ли решение това уравнение (заедно с условието $y(0) = 0$)?

14.7. (метод на Т. Кейн) Нека в интервала Δ уравнението $f(x) = f(a)(1 - t)$ има единствен корен $x = x(t)$ за всяко $t \in [0,1]$. Тогава $x(0) = a$, а $x(1)$ е решение на уравнението $f(x) = 0$. Освен това $f'(x)\dot{x} = -f(a)$ (диференцирахме по t). Решете уравненията:

а) $x^2 = 2$; б) $x^x = 2$.

Решение. а) $f(x) = x^2 - 2$. Нека $\Delta = (0, \infty)$ и да вземем като първо приближение $a = 1$. Тогава $\dot{x} = \frac{1}{2x}$, $x(0) = 1$. Прилагаме формулата от зад. 7.4 в) при $h = 1$ (въпреки че там $h \to 0$):

$$k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{2}{5}, \quad k_3 = \frac{5}{12}, \quad k_4 = \frac{6}{17}.$$

Така

$$\sqrt{2} = x(1) \approx 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{17}\right) \approx 1,414.$$

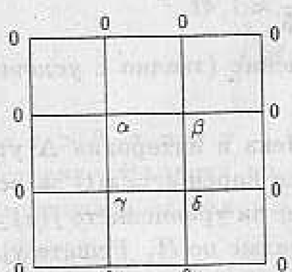
14.8. Нека функцията $f(x,y)$ удовлетворява в $D : 0 \leqq x \leqq 3$, $0 \leqq y \leqq 3$ уравнението $\Delta f(x,y) = x^2 y$, като $f = 0$ по контура на D. Без да разглеждаме въпроса за съществуване на f, нека във връзка със зад. 7.3 г) да изразим приблизително

$h^2 \Delta f(a,b) \approx f(a+h,b) + f(a,b+h) + f(a-h,b) + f(a,b-h) - 4f(a,b)$.

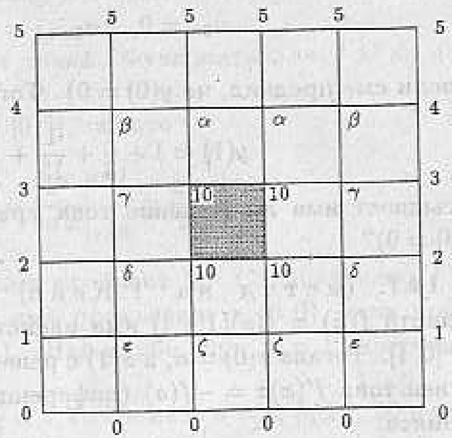
Оттук

$$(1) \qquad f(a,b) \approx \frac{1}{4}\Big[f(a+h,b) + f(a,b+h) + f(a-h,b) + f(a,b-h)\Big] - \frac{h^2}{4}a^2 b.$$

Положете $h = 1$ (въпреки че в зад. 7.3 $h \to 0$), за да получите от (1) приближения за стойностите на f в точките с целочислени координати (фиг. 10).



Фиг. 10



Фиг. 11

Решение. От (1) получаваме системата:

$$4\alpha + 2 = \beta + \gamma, \quad 4\beta + 8 = \alpha + \delta, \quad 4\gamma + 1 = \alpha + \delta, \quad 4\delta + 4 = \beta + \gamma.$$

Оттук $\alpha = -\frac{3}{2}$, $\beta = -\frac{23}{8}$, $\gamma = -\frac{9}{8}$, $\delta = -2$ ($f(1,2) \approx \alpha$ и т. н.). Положете още $h = \frac{1}{2}$ и разгледайте точките с полуцели координати.

14.9. Нека $K : 0 \leqq x, y \leqq 5$, $K_1 : 2 < x, y < 3$ и функцията $f(x,y)$ удовлетворява в $D = K \setminus K_1$ уравнението на Лаплас $\Delta f = 0$, като са дадени стойностите на f по контура на D: $f(x,5) = 5$, $f(x,0) = 0$, $f(0,y) = f(5,y) = y$, $f = 10$ по контура на K_1 (фиг. 11). Както в зад. 14.8 положете $h = 1$ във формулата

$$(2) \qquad f(a,b) \approx \frac{1}{4}[f(a+h,b) + f(a,b+h) + f(a-h,b) + f(a,b-h)].$$

Решение. Получаваме системата

$$4\alpha = \alpha + \beta + 15, \quad 4\beta = \alpha + \gamma + 9, \quad 4\gamma = \beta + \delta + 13,$$
$$4\delta = \gamma + \varepsilon + 12, \quad 4\varepsilon = \delta + \zeta + 1, \quad 4\zeta = \varepsilon + \zeta + 10.$$

Оттук $\alpha \approx 6,8$, $\beta \approx 5,4$, $\gamma \approx 5,9$, $\delta \approx 5,1$, $\varepsilon \approx 2,6$, $\zeta \approx 4,2$. Можем да постъпим и така: на всяка точка с целочислени координати, вътрешна за D, приписваме стойност τ — средната стойност на f по контура на D (или за тези контурни точки, които са на същата хоризонтала или вертикала). После преизчисляваме тези стойности по (2), докато процесът се стабилизира. (метод на Либман) Положете още $h = \frac{1}{2}$ и разгледайте точките с полуцели координати.

14.10. Нека функцията $f(x,y)$ удовлетворява в D: $0 \leqq x \leqq 4$, $y \geqq 0$, уравнението $f'_y = f''_{xx}$, като $f(0,y) = 2$, $f(4,y) = 6$, $f(x,0) = 2|x-1|$. Във връзка със зад. 7.3 ж) положете $h = 1$, $k = \frac{1}{5}$ (въпреки че там $(h,k) \to (0,0)$) и по формулата

$$f\left(a, b + \frac{1}{5}\right) \approx \frac{f(a+1,b) + f(a-1,b)}{5} + \frac{3}{5}f(a,b)$$

пресметнете приблизително стойностите на $f(x,y)$ при цели x и $y = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \ldots$ Има ли стабилизиране при $y \to \infty$? Положете още

$k = \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}$.

14.11. Нека функцията $f(x,y)$ удовлетворява в D: $0 \leqq x \leqq 4$, $y \geqq 0$ уравнението $f''_{yy} = f''_{xx}$, като $f(0,y) = 2$, $f(4,y) = 6$, $f(x,0) = 2|x-1|$, $f'_y(x,0) = x(4-x)$. Във връзка със зад. 7.3 е) положете $h = 1$ (въпреки че там $h \to 0$) и пресметнете приблизително стойностите на $f(x,1)$ при $x = 1, 2, 3$, като вземете $k = \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$. Как започват пресмятанията?

Решение. От $f'_y(x,0) \approx \frac{f(x,k) - f(x,0)}{k}$ имаме $f(x,k) \approx f(x,0) + kf'_y(x,0)$. Продължете самостоятелно.

Разбира се в зад. 14.8 — 14.11 (и не само там) нямаме гаранция за качеството на приближенията. Читателят си дава сметка, че за всеки две числа A и B можем да напишем $A \approx B$. Като основа за приблизителни пресмятания (при малки h и k) формулата от зад. 7.3 е) е ефикасна при $|\lambda| < 1$, тази от зад. 7.3 ж) — при $|\lambda| < \frac{1}{2}$, формулата от зад. 7.3 з) е винаги подходяща, а от зад. 7.3 и) — винаги неподходяща.

Глава 5

Интеграли, зависещи от параметър

§ 1. Елементарна теория

Теорема 1 (граничен преход под знака на интеграла). Ако функцията $f(x, y)$ при фиксирано $y \in (c, d)$ е интегруема по $x \in [a, b]$ и при $y \to y_0 \in (c, d)$ клони равномерно относно x към гранична функция $g(x)$, то

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx$$

(y_0 е число или някой от символите $\pm\infty$).

Теорема 2. Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната като функция на две променливи в правоъгълника $\prod = \{a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$, то:

1. Интегралът $J(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$ е непрекъсната функция на параметъра $y \in [c, d]$ (непрекъснатост на интеграл, зависещ от параметър).

2. Функцията $J(y)$ е интегруема в интервала $[c, d]$ и е в сила равенството

$$\int_a^b J(y)\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

(интегриране под знака на интеграла).

3. Ако предположим освен това, че в $\prod$ съществува непрекъсната частна производна $f'_y(x, y)$, тогава интегралът $J(y)$ е диференцуема функция на параметъра $y \in [c, d]$ и е в сила формулата на Лайбниц

$$J'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)\, dx$$

(диференциране под знака на интеграла).

Теорема 3. Нека интеграционните граници a и b са функции на y: $a = a(y)$, $b = b(y)$, $y \in [c, d]$, $\alpha \leqq a(y) \leqq \beta$, $\alpha \leqq b(y) \leqq \beta$, функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в правоъгълника $\prod = \{\alpha \leqq x \leqq \beta,\ c \leqq y \leqq d\}$ и $a(y)$ и $b(y)$ са непрекъснати функции по $y \in [c, d]$. Тогава

1') Функцията $J(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx$ е непрекъсната в интервала $[c, d]$:

$$\lim_{y \to y_0} J(y) = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0)\,dx$$

(непрекъснатост на интеграл по параметър).

3') Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната заедно с производната си $f'_y(x, y)$ в правоъгълника $\prod$, а функциите $a(y)$ и $b(y)$ са диференцуеми в $[c, d]$, то интегралът $J(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx$ е диференцуем по параметъра $y \in [c, d]$ и е в сила равенството

$$J'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)\,dx + f(b(y), y).b'(y) - f(a(y), y).a'(y)$$

(диференциране на интеграл, зависещ от параметър).

1.1. Намерете:

а) $\lim\limits_{a \to 0} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + a^2}\,dx$; б) $\lim\limits_{a \to 0} \int\limits_{a}^{1+a} \dfrac{dx}{1 + x^2 + a^2}$.

Решение. Тъй като функциите $\sqrt{x^2 + a^2}$, a, $1+a$, $\dfrac{1}{1 + x^2 + a^2}$ са непрекъснати, то:

а) $\lim\limits_{a \to 0} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \int\limits_{-1}^{1} |x|\,dx = 1$;

б) $\lim\limits_{a \to 0} \int\limits_{a}^{1+a} \dfrac{dx}{1 + x^2 + a^2} = \int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{1 + x^2} = \dfrac{\pi}{4}$.

1.2. Намерете:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$; б) $\lim\limits_{a \to \infty} \int\limits_{1}^{2} \dfrac{\ln(x + |a|)}{\ln(x^2 + a^2)}\,dx$.

Решение. Подинтегралните функции са непрекъснати по x за фиксирани n ($n \geqq 1$) и a ($|a| > 1$). Ще докажем, че

$$\frac{1}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{1 + e^x}$$

равномерно по $x \in [0, 1]$, когато $n \longrightarrow 0$ и

$$\frac{\ln(x + |a|)}{\ln(x^2 + a^2)} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

равномерно по $x \in [1, 2]$, когато $a \longrightarrow \infty$. Наистина

$$\left|\frac{1}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} - \frac{1}{1 + e^x}\right| = \frac{\left|e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right|}{(1 + e^x)\left[1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right]} \leqq \left|e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right|.$$

Ще докажем, че при $n \longrightarrow \infty$ функцията $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ клони равномерно към e^x върху интервала $[0, 1]$. За целта полагаме $u = \dfrac{x}{n}$ в неравенството $u - \dfrac{u^2}{2} < \ln(1 + u) < u$ $(u > 0)$. Получаваме

$$x - \frac{x^2}{2n} < n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) < x,$$

откъдето

$$e^{-\left(x - \frac{x^2}{2n}\right)} > -\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > -e^x$$

или

$$e^x - e^{x - \frac{x^2}{2n}} > e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 0.$$

Тогава

$$\sup_{x \in [0,1]} \left[e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right] \leqq \sup_{x \in [0,1]} e^x \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2n}}\right) \leqq e\left(1 - e^{-\frac{1}{2n}}\right),$$

откъдето следва, че при $n \longrightarrow \infty$ функцията $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ клони към e^x равномерно в $[0, 1]$. Получаваме

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \int\limits_{0}^{1} \lim_{n \to \infty} \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1 + e^x} = \ln\frac{2e}{e + 1}.$$

15

Аналогично

$$\left|\frac{\ln(x+|a|)}{\ln(x^2+a^2)}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{\ln(x+|a|)^2-\ln(x^2+a^2)}{2\ln(x^2+a^2)}\right|$$

$$= \left|\frac{\ln\left(1+\dfrac{2x|a|}{x^2+a^2}\right)}{2\ln(x^2+a^2)}\right| \leqq \frac{x|a|}{(x^2+a^2)\ln(x^2+a^2)}$$

$$\leqq \frac{2|a|}{(1+a^2)\ln(1+a^2)} \leqq \frac{1}{\ln(1+a^2)} < \varepsilon$$

за всички $x \in [1, 2]$, когато $|a| > \sqrt{e^{\frac{1}{\varepsilon}}-1}$.

Следователно

$$\lim_{a\to\infty}\int_1^2 \frac{\ln(x+|a|)}{\ln(x^2+a^2)}\,dx = \int_1^2 \lim_{a\to\infty}\frac{\ln(x+|a|)}{\ln(x^2+a^2)} = \frac{1}{2}.$$

1.3. Докажете, че

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\,d\theta = 0.$$

1.4. Докажете, че

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^x [f(t+h)-f(t)]\,dt = f(x)-f(a),$$

ако $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[A, B]$ и $A < a < x < B$.

1.5. Докажете, че

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,dx \neq \int_0^1 \lim_{y\to 0}\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,dx.$$

Решение. Тъй като $\lim\limits_{y\to 0}\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}} = 0$, то след извършване на граничен преход получаваме нула. Ако изчислим интеграла и

след това извършим граничен преход, получаваме

$$\lim_{y\to 0}\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,dx = \lim_{y\to 0}\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,d\frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}(1-e^{-\frac{1}{y^2}}) = \frac{1}{2}.$$

Следователно граничен преход не може да бъде извършен. Тук подинтегралната функция е прекъсната в точката $(0, 0)$.

1.6. Докажете, че

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{2xy^2\,dx}{(x^2+y^2)^2} \neq \int_0^1 \lim_{y\to 0}\left[\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right]dx.$$

1.7. Нека са дадени функциите

$$f(x, y) = \frac{y-x}{(x+y)^3}, \qquad g(x, y) = \left(\frac{x^5}{y^4}-\frac{2x^3}{y^3}\right)e^{-\frac{x^2}{y}}.$$

Докажете следните равенства:

а) $\displaystyle\int_0^1\left[\int_0^1 f(x, y)\,dx\right]dy = \frac{1}{2}, \qquad \int_0^1\left[\int_0^1 f(x, y)\,dy\right]dx = -\frac{1}{2};$

б) $\displaystyle\int_0^1\left[\int_0^1 g(x, y)\,dx\right]dy = -\frac{1}{e}, \qquad \int_0^1\left[\int_0^1 g(x, y)\,dy\right]dx = -\frac{1}{e}+\frac{1}{2},$

от които се убеждаваме, че не може да бъде извършена смяна на реда на интегрирането (интегриране под знака на интеграла). Ще отбележим, че подинтегралните функции са прекъснати в точката $(0, 0)$.

1.8. Условията, наложени на функциите $f(x, y)$ във формулираните в началото на параграфа теореми, са достатъчни условия. Ще приведем пример на интеграл от прекъсната функция, който е непрекъсната функция на параметъра.

Нека $f(x, \alpha) = \operatorname{sign}(x-\alpha)$, $x \in [0, 1]$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$.

Функцията $f(x, \alpha)$ можем да запишем и така:

$$\operatorname{sign}(x-\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha \in (-\infty, 0), \quad x \in [0, 1] \\ -1 & \text{при } \alpha \in [0, 1], \quad x \in [0, \alpha) \\ 1 & \text{при } \alpha \in [0, 1], \quad x \in (\alpha, 1] \\ 0 & \text{при } \alpha \in [0, 1], \quad x = \alpha \\ -1 & \text{при } \alpha \in (1, +\infty), \quad x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Тогава

$$\int_0^1 f(x, \alpha)\, dx = 1 \quad \text{при} \quad \alpha \in (-\infty, 0),$$

$$\int_0^1 f(x, \alpha)\, dx = \int_0^\alpha f(x, \alpha)\, dx + \int_\alpha^1 f(x, \alpha)\, dx = 1 - 2\alpha \quad \text{при} \quad \alpha \in [0, 1],$$

$$\int_0^1 f(x, \alpha)\, dx = -1 \quad \text{при} \quad \alpha \in (1, +\infty).$$

Функцията

$$F(\alpha) = \int_0^1 f(x, \alpha)\, dx = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha \in (-\infty, 0) \\ 1-2\alpha & \text{при } \alpha \in [0, 1] \\ -1 & \text{при } \alpha \in (1, +\infty) \end{cases}$$

е непрекъсната по $\alpha \in (-\infty, +\infty)$.

1.9. Намерете производната на $J(\alpha) = \int_0^b \frac{dx}{\alpha^2 + x^2}$ $(\alpha > 0)$.

Решение. Подинтегралната функция има непрекъсната производна по α за $0 < \alpha_0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1$, $a \leqq x \leqq b$. Тогава

$$J'(\alpha) = -\int_0^b \frac{2\alpha\, dx}{(\alpha^2 + x^2)^2} \quad \text{за} \quad \alpha > 0.$$

Полученият резултат може да бъде използван за пресмятане на интеграли от вида $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$. Тъй като $J(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{b}{\alpha}$, то

$$J'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2} \operatorname{arctg} \frac{b}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \frac{b}{\alpha^2 + b^2}.$$

Следователно

$$\int_0^b \frac{dx}{(\alpha^2 + x^2)^2} = \frac{1}{2\alpha^3} \operatorname{arctg} \frac{b}{\alpha} + \frac{b}{2\alpha^2(\alpha^2 + b^2)}.$$

Последното равенство ни дава

$$\int \frac{dx}{(\alpha^2 + x^2)^2} = \frac{1}{2\alpha^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\alpha} + \frac{x}{2\alpha^2(\alpha^2 + x^2)} + C.$$

След повторно диференциране можем да пресметнем $\int \frac{dx}{(\alpha^2 + x^2)^3}$ и т. н.

1.10. Пресметнете

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\, dx.$$

Решение. Разглеждаме $J(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\, dx$, където $0 \leqq \alpha \leqq 1$.

При $0 \leqq \alpha \leqq 1$ и $0 \leqq x \leqq 1$ можем да диференцираме под знака на интеграла:

$$J'(\alpha) = \int_0^1 \frac{x\, dx}{(1+\alpha x)(1+x^2)}.$$

Решаваме получения интеграл:

$$J'(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2} \left[\int_0^1 \frac{-\alpha dx}{1+\alpha x} + \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} + \alpha \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right]$$

$$= \frac{1}{1+\alpha^2} \left[-\ln(1+\alpha) + \frac{1}{2} \ln 2 + \alpha \cdot \frac{\pi}{4} \right].$$

Интегрирайки по α от 0 до 1, получаваме

$$J(1) - J(0) = -\int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}\, d\alpha + \frac{1}{2} \ln 2 \int_0^1 \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{\alpha\, d\alpha}{1+\alpha^2}$$

или

$$J = -J + \frac{\pi}{8}\ln 2 + \frac{\pi}{8}\ln 2; \qquad J = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

Задачата можем да решим и ако разгледаме интеграла

$$J(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx \quad (\alpha \geqq 0).$$

1.11. Докажете, че:

а) $$\int_0^\pi \frac{\cos x\,dx}{(1+\alpha\cos x)^2} = -\frac{\pi\alpha}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad |\alpha| < 1;$$

б) $$\int_0^\pi \frac{\ln(1+t\cos x)}{\cos x}\,dx = \pi\arcsin t, \quad |t| < 1.$$

Решение. а) От равенството

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1+\alpha\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \ (|\alpha| < 1)$$

след диференциране по α получаваме

$$\int_0^\pi \frac{\cos x\,dx}{(1+\alpha\cos x)^2} = -\frac{\pi\alpha}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}};$$

б) При интегриране на първото равенство по α в граници от 0 до t за лявата страна получаваме

$$\int_0^t \left[\int_0^\pi \frac{dx}{1+\alpha\cos x}\right] d\alpha = \int_0^\pi \left[\int_0^t \frac{d\alpha}{1+\alpha\cos x}\right] dx = \int_0^\pi \frac{\ln(1+t\cos x)}{\cos x}\,dx,$$

а за дясната:

$$\int_0^t \frac{\pi\,d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \pi\arcsin t.$$

Следователно при $|t| < 1$

$$\int_0^\pi \frac{\ln(1+t\cos x)}{\cos x}\,dx = \pi\arcsin t.$$

1.12. Да означим $l(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{t}$, $x > 0$ (т. е. $l(x) = \ln x$).

Докажете, че $l(x, y) = l(x) + l(y)$.

Решение. Изчисляваме

$$l(xy) - l(x) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_x^{xy} \frac{dt}{t}.$$

Диференцираме последния интеграл по x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_x^{xy} \frac{dt}{t}\right) = \frac{1}{xy}\cdot y - \frac{1}{x}\cdot 1 = 0.$$

Следователно той не зависи от x. Полагаме $x = 1$ и получаваме неговата стойност $l(y)$. Тогава $l(xy) - l(x) = l(y)$ или $l(xy) = l(x) + l(y)$ — получихме основното свойство на логаритмичната функция.

1.13. Докажете, че $\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \ln\frac{1+b}{1+a}$, $0 < a < b$.

Решение. Да разгледаме функцията $f(x, y) = x^y$ в правоъгълника $\{[0, 1], [a, b]\}$. Интегрирането под знака на интеграла е възможно, тъй като функцията е непрекъсната в разглеждания правоъгълник. Тогава

$$\int_a^b \left[\int_0^1 x^y\,dx\right] dy = \int_0^1 \left[\int_a^b x^y\,dy\right] dx$$

или

$$\int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1}\Bigg|_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{x^y}{\ln x}\Bigg|_{y=a}^{y=b} dx, \quad \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx.$$

Следователно при $0 < a < b$ получаваме

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \ln\frac{1+b}{1+a}.$$

1.14. Пресметнете

$$J(m) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 x + m^2 \cos^2 x)\, dx \quad (m > 0).$$

Р е ш е н и е. Диференцираме под знака на интеграла:

$$J'(m) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2m \cos^2 x dx}{\sin^2 x + m^2 \cos^2 x}.$$

Полагаме $\operatorname{tg} x = t$:

$$J'(m) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2m dt}{(t^2 + m^2)(1 + t^2)}.$$

При $m \neq 1$ разлагаме подинтегралната функция на елементарни дроби:

$$\frac{1}{(t^2 + m^2)(t^2 + 1)} = \frac{-1}{(m^2 - 1)(t^2 + m^2)} + \frac{1}{(m^2 - 1)(t^2 + 1)}.$$

Тогава

$$J'(m) = \frac{2m}{m^2 - 1} \int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} - \frac{2m}{m^2 - 1} \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{\pi}{m + 1}.$$

Като интегрираме, намираме $J(m) = \pi \ln(m + 1) + C$. Това равенство е получено при $m \neq 1$. Но и лявата и дясната страна са непрекъснати функции в точката $m = 1$. Следователно равенството е в сила и при $m = 1$. Полагаме $m = 1$, тогава $J(1) = \pi \ln 2 + C$. Но $J(1) = 0$, следователно $C = -\pi \ln 2$. Окончателно $J(m) = \pi \ln \dfrac{m+1}{2}$.

1.15. Докажете, че ако $f(x)$ е непрекъсната функция в интервала $a \leqq x \leqq b$, то функцията

$$F(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^x (x - t)^{n-1} f(t) dt$$

удовлетворява условията

$$F(a) = F'(a) = \dots = F^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{и} \quad F^{(n)}(x) = f(x).$$

Р е ш е н и е. Като диференцираме функцията $F(x)$, получаваме

$$F'(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^x (n-1)(x-t)^{n-2} f(t) dt + \frac{1}{(n-1)!} (x - x)^{n-1} f(x)$$
$$= \frac{1}{(n-2)!} \int\limits_a^x (x-t)^{n-2} f(t)\, dt.$$

Оттук $F'(a) = 0$. Чрез последователно диференциране намираме

$$F''(x) = \frac{1}{(n-3)!} \int\limits_a^x (x-t)^{n-3} f(t)\, dt, \dots, F^{(n-1)}(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt.$$

От последното равенство следва, че $F^{(n)}(x) = f(x)$. Полагайки $x = a$, получаваме

$$F''(a) = F'''(a) = \dots = F^{(n-1)}(a) = 0.$$

З а б е л е ж к а. Нека $f(x)$ притежава непрекъсната производна от $(n+1)$-ви ред в околността на точката a. Да разгледаме функцията

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt,$$

представляваща интеграл, зависещ от параметъра x. Като интегрираме по части, получаваме

$$R_n(x) = -\frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a) - \frac{1}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) - \dots$$
$$-\frac{1}{1!}(x-a) f'(a) - f(a) + f(x) = -T_n(x) + f(x),$$

където с $T_n(x)$ сме означили полинома на Тейлър за функцията $f(x)$ в точката a. Следователно $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, т. е. намерихме интегрално представяне на остатъчния член във формулата на Тейлър. От това представяне чрез теоремата за средните стойности лесно се получава остатъчният член във формата на Лагранж и Коши:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int\limits_a^x (x-t)^n dt = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \text{(Л а г р а н ж)},$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n (x-a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} (1-\theta)^n f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))$$

(К о ш и),

където $\xi = a + \theta(x-a)$, $0 < \theta < 1$.

1.16. Пресметнете

$$J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2\theta)\,d\theta \quad (a > 1).$$

Р е ш е н и е. Като диференцираме под знака на интеграла, получаваме

$$J'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\,d\theta}{a^2 - \sin^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Интегрираме по a: $J(a) = \pi\ln(a + \sqrt{a^2-1}) + C$.

За определяне на константата C преобразуваме

$$J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left[a^2\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{a^2}\right)\right] d\theta = \pi\ln a + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \frac{1}{a^2}\sin^2\theta)\,d\theta.$$

Тогава

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \frac{1}{a^2}\sin^2\theta)\,d\theta - \pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a}.$$

Тъй като

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \frac{1}{a^2}\sin^2\theta)\,d\theta\right| \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\ln(1 - \frac{1}{a^2}\sin^2\theta)|\,d\theta$$

$$\leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\ln\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\right| d\theta = \frac{\pi}{2}\left|\ln\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\right|,$$

то като извършим граничен преход по $a \longrightarrow +\infty$ в последното равенство, намираме $C = -\pi\ln 2$. Следователно

$$J(a) = \pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2} \quad (a > 1).$$

1.17. Пресметнете $J(a) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx$.

Р е ш е н и е. Подинтегралната функция $f(x, a)$ и нейната производна по a:

$$f'_a(x, a) = \frac{2(a - \cos x)}{1 - 2a\cos x + a^2},$$

са непрекъснати при $||a| - 1| \geqq \varepsilon > 0$ и $0 \leqq x \leqq \pi$. Диференцираме под знака на интеграла:

$$J'(a) = 2\int_0^{\pi} \frac{a - \cos x}{1 - 2a\cos x + a^2}\,dx.$$

Получения интеграл решаваме с помощта на универсалната субституция $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$J'(a) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{a} & \text{при } |a| \geqq 1 + \varepsilon \\ 0 & \text{при } |a| \leqq 1 - \varepsilon. \end{cases}$$

След интегриране намираме

$$J(a) = \begin{cases} 2\pi\ln|a| + C_1 & \text{при } a \geqq 1 + \varepsilon \\ 2\pi\ln|a| + C_2 & \text{при } a \leqq -1 - \varepsilon \\ C_3 & \text{при } |a| \leqq 1 - \varepsilon. \end{cases}$$

Поради произволността на $\varepsilon > 0$ можем да запишем

$$J(a) = \begin{cases} 2\pi\ln|a| + C_1 & \text{при } a > 1 \\ 2\pi\ln|a| + C_2 & \text{при } a < -1 \\ C_3 & \text{при } |a| < 1. \end{cases}$$

Тъй като $J(0) = 0$, то $C_3 = 0$ и следователно $J(a) = 0$ при $|a| < 1$. При $a = \pm 1$ съответно

$$J(\pm 1) = \int_0^{\pi} \ln 2(1 \pm \cos x)\,dx = 2\pi\ln 2 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt.$$

Но

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2 \quad \text{(О й л е р)},$$

тогава $J(\pm 1) = 0$. Следователно $J(a)$ е непрекъсната отдясно в точката $a = -1$ и отляво в точката $a = 1$.

От равенството

$$J\left(\frac{1}{a}\right) = \int_0^{\pi} \ln\left(1 - \frac{2}{a}\cos x + \frac{1}{a^2}\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi} \ln\left[\frac{1}{a^2}(1 - 2a\cos x + a^2)\right] dx = -2\pi \ln|a| + J(a) \quad (a \neq 0)$$

получаваме

$$\lim_{\substack{a\to 1\\ a>1}} J(a) = \lim_{\substack{a\to 1\\ a>1}} \left[J\left(\frac{1}{a}\right) + 2\pi\ln|a|\right] = 0,$$

$$\lim_{\substack{a\to -1\\ a<-1}} J(a) = \lim_{\substack{a\to -1\\ a<-1}} \left[J\left(\frac{1}{a}\right) + 2\pi\ln|a|\right] = 0.$$

Следователно $J(a)$ е непрекъсната за всяко a. Тогава $C_1 = C_2 = 0$ и

$$J(a) = \begin{cases} 2\pi\ln|a| & \text{при } |a| > 1 \\ 0 & \text{при } |a| \leqq 1. \end{cases}$$

1.18. Пресметнете

$$J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, dx.$$

Р е ш е н и е. Нека подинтегралната функция $f(x,\, a)$ да додефинираме по непрекъснатост в точките 0 и $\frac{\pi}{2}$ по следния начин:

$$f(x,\, a) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg}(a\ \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} & \text{при } x \neq 0 \\ a & \text{при } x = 0 \\ 0 & \text{при } x = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Тогава производната

$$f'_a(x,\, a) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + a^2\operatorname{tg}^2 x} & \text{при } x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{при } x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

е непрекъсната при $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ и $a \geqq \varepsilon > 0$. Тъй като $J(-a) = -J(a)$, можем да запишем $J(a) = J(|a|).\operatorname{sign} a$ и е достатъчно да разгледаме случая $a \geqq 0$. Диференцираме под знака на интеграла:

$$J'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a^2\operatorname{tg}^2 x} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+a^2t^2)} = \frac{\pi}{2(1+a)}.$$

След интегриране получаваме $J(a) = \frac{\pi}{2}\ln(1+a) + C$. От произволността на $\varepsilon > 0$ следва, че равенството е в сила за всяко $a > 0$. От непрекъснатостта на $J(a)$, след извършване на граничен преход при $a \longrightarrow 0$ в последното равенство, намираме $J(0) = \frac{\pi}{2}\ln 1 + C$ или $C = J(0) = 0$. Следователно $J(a) = \frac{\pi}{2}\ln(1+a)$ при $a \geqq 0$ или

$$J(a) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} a.\ln(1 + |a|)$$

за всички реални a.

1.19. Пресметнете

$$J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x}\,\frac{dx}{\cos x} \quad \text{при } |a| < 1.$$

Р е ш е н и е. Да додефинираме подинтегралната функция по непрекъснатост в точката $\frac{\pi}{2}$:

$$f(x,\, a) = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos x}\cdot\ln\dfrac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x} & \text{при } x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ 2a & \text{при } x = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Производната $f'_a(x,\, a) = \dfrac{2}{1 - a^2\cos^2 x}$ е непрекъсната при $|a| \leqq 1 - \varepsilon < 1$ и $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$. Диференцираме под знака на интеграла:

$$J'(a) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - a^2\cos^2 x} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 - a^2 + t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Интегрираме двете страни на полученото равенство:

$$J(a) = \pi \arcsin a + C.$$

От произволността на $\varepsilon > 0$ следва, че равенството е в сила за $|a| < 1$. Полагаме $a = 0$ и получаваме $C = 0$. Следователно $J(a) = \pi \arcsin a$.

1.20. Пресметнете $J(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{a + \sin x}{a - \sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x}$ при $|a| > 1$.

1.21. Пресметнете $J(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a\sin x}{1 - a\sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x}$ при $|a| < 1$.

1.22. Пресметнете $J(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin x - \operatorname{arc\,tg}(a\sin x)}{\sin^3 x}\, dx$.

Решение. Да додефинираме подинтегралната функция по непрекъснатост в точката $x = 0$.

$$f(x, a) = \begin{cases} \dfrac{a\sin x - \operatorname{arc\,tg}(a\sin x)}{\sin^3 x} & \text{при } x \neq 0 \\ \dfrac{a^3}{3} & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Диференцираме под знака на интеграла:

$$J'(a) = a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2} \frac{a^2}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Интегрираме двете страни на полученото равенство:

$$J(a) = \frac{\pi}{2} \int \frac{a^2}{\sqrt{1 + a^2}}\, da = \frac{\pi}{4} a\sqrt{1 + a^2} - \frac{\pi}{4} \ln\left(a + \sqrt{1 + a^2}\right) + C.$$

Полагаме $a = 0$ и получаваме $C = 0$. Следователно

$$J(a) = \frac{\pi}{4} a\sqrt{1 + a^2} - \frac{\pi}{4} \ln\left(a + \sqrt{1 + a^2}\right).$$

1.23. Пресметнете

$$J(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos^2 x - \ln(1 + a\cos^2 x)}{\cos^4 x}\, dx, \quad a > -1.$$

Решение. Подинтегралната функция додефинираме по непрекъснатост в точката $x = \frac{\pi}{2}$ по следния начин:

$$f(x, a) = \begin{cases} \dfrac{a\cos^2 x - \ln(1 + a\cos^2 x)}{\cos^4 x} & \text{при } x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{a^2}{2} & \text{при } x = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Диференцираме под знака на интеграла:

$$J'(a) = a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a\cos^2 x} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a + 1}}.$$

Интегрираме двете страни на полученото равенство:

$$J(a) = \pi \left(\frac{1}{3}\sqrt{(1 + a)^3} - \sqrt{1 + a}\right) + C.$$

Полагаме $a = 0$ и получаваме $C = \frac{2}{3}\pi$. Следователно

$$J(a) = \frac{\pi}{3}\left[\sqrt{(1 + a)^3} - 3\sqrt{1 + a} + 2\right].$$

1.24. Пресметнете интеграла

$$J(a, b) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{a + b\sin x}{a - b\sin x} \cdot \frac{dx}{x} \quad (a > b > 0)$$

посредством интегриране под знака на интеграла.

Решение. Използваме, че

$$2ab \int\limits_0^1 \frac{dy}{a^2 - b^2 y^2 \sin^2 x} = \frac{1}{\sin x} \ln \frac{a + b\sin x}{a - b\sin x}.$$

Като интегриране в граници от 0 до $\frac{\pi}{2}$, получаваме

$$J(a,\,b) = 2ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int\limits_0^1 \frac{dy}{a^2 - b^2y^2\sin^2 x}\right]dx$$

$$= 2ab\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 - b^2y^2\sin^2 x}\right]dy = 2ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi dy}{2a\sqrt{a^2 - b^2y^2}} = \pi \arcsin\frac{b}{a}.$$

Интеграла можем да решим чрез диференциране под знака на интеграла (вж. зад. 1.19 — 1.21).

1.25. Докажете, че ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в някакъв интервал, съдържащ точката a, то функцията

$$y(x) = \frac{1}{k}\int\limits_a^x f(t)\sin k(x-t)\,dt$$

удовлетворява диференциалното уравнение $y'' + k^2y = f(x)$.

1.26. Чрез диференциране и интегриране по параметър получете нови интеграли от следните:

а) $\displaystyle\int\limits_0^1 e^{ax}dx = \frac{e^a - 1}{a}$;

б) $\displaystyle\int\limits_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2}\,dx = \frac{\pi a^2}{2}$;

в) $\displaystyle\int\limits_0^1 x^\alpha dx = \frac{2^{\alpha+1} - 1}{\alpha + 1}, \quad \alpha \neq -1$;

г) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \alpha\sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha}}, \quad |\alpha| < 1$;

д) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}$;

е) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} e^{-ax}\cos bx\,dx = -\frac{a}{a^2+b^2}\cdot\left(e^{-a\pi}\cos b\pi - 1\right)$.

1.27. Докажете равенството

$$\int\limits_a^b \frac{P_{n-1}(x)}{(x-\alpha)^n}\,dx = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}}\left[P_{n-1}(\alpha).\ln\frac{a-\alpha}{b-\alpha}\right],$$

където $P_{n-1}(x)$ е полином най-много от $(n-1)$-ва степен и $\alpha \notin [a, b]$.

1.28. Намерете $F'(\alpha)$, ако:

а) $\displaystyle F(\alpha) = \int\limits_\alpha^{\alpha^2} e^{-\alpha x^2}dx$; б) $\displaystyle F(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

в) $\displaystyle F(\alpha) = \int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin 2x}{x}\,dx$; г) $\displaystyle F(\alpha) = \int\limits_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,dx$;

д) $\displaystyle F(\alpha) = \int\limits_0^\alpha f(x+\alpha,\, x-\alpha)\,dx$;

е) $\displaystyle F(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha^2}\left[\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2 + y^2 - \alpha^2)\,dy\right]dx$.

1.29. Намерете $F''(\alpha)$, ако $\displaystyle F(\alpha) = \int\limits_0^\alpha (x+\alpha)f(x)\,dx$, където $f(x)$ е диференцуема функция.

Пресметнете интегралите:

1.30. $\displaystyle F(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\,\cos x)}{\cos x}\,dx$.

16

1.31. $F(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\alpha \sin^2 x)}{\sin^2 x}\, dx \qquad (\alpha > -1).$

1.32. $F(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\alpha \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x}\, dx \qquad (\alpha \geqq 0).$

1.33. $F(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1-\alpha^2 \cos^2 x)}{\cos^2 x}\, dx \qquad (|\alpha| \leqq 1).$

1.34. $F(\alpha) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(1+\alpha \cos x)}{\cos x}\, dx \qquad (|\alpha| < 1)$

(вж. зад. 1.11, решете сега задачата чрез диференциране под знака на интеграла).

1.35. $F(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-\alpha^2 \sin^2 x)\, dx, \quad |\alpha| \leqq 1.$

1.36. а) $\int\limits_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx;$

б) $\int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx, \quad (a,\, b > 0).$

У п ъ т в а н е. Използвайте равенството

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int\limits_a^b x^y\, dy.$$

1.37. Докажете, че следващите функции удовлетворяват диференциалното уравнение на Бесел

$$x^2 u''(x) + x u'(x) + (x^2 - n^2) u(x) = 0:$$

а) $u(x) = x^n \int\limits_0^{\pi} \cos(x\cos\theta) \sin^{2n}\theta\, d\theta;$

б) $u(x) = \int\limits_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\, d\theta.$

1.38. Докажете, че функцията $u(r) = C_1 u_1(r) + C_2 u_2(r)$ (C_1 и C_2 — произволни константи), където

$$u_1(r) = \int\limits_0^r e^{nr\cos\theta}\, d\theta,$$

$$u_2(r) = \int\limits_0^{\pi} e^{nr\cos\theta} \ln(r\sin^2\theta)\, d\theta,$$

удовлетворява диференциалното уравнение

$$u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) - n^2 u(r) = 0.$$

1.39. Намерете производните на пълните елиптични интеграли

$$E(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi, \quad F(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\ (0 < k < 1)$$

и ги изразете чрез функциите $E(k)$ и $F(k)$. Докажете, че $E(k)$ удовлетворява диференциалното уравнение

$$E''(k) + \frac{1}{k}E'(k) + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0.$$

1.40. Нека

$$J(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\alpha - x}}\, dx,$$

където $\varphi(x)$ е непрекъсната функция заедно с производната си $\varphi'(x)$ при $x \in [0,\, a]$. Докажете, че

$$J'(\alpha) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int\limits_0^{\alpha} \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha - x}}\, dx \quad \text{при} \quad \alpha \in (0,\, a).$$

У п ъ т в а н е. Положете $x = \alpha t$.

1.41. Нека $f(x)$ е два пъти диференцуема функция и $F(x)$ е диференцуема функция. *Докажете*, че функцията

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(z)dz$$

удовлетворява уравнението за трептене на струна

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и началните условия $u(x,\,0) = f(x)$, $u'_t(x,\,0) = F(x)$.

1.42. *Докажете*, че ако функцията $f(x)$ е непрекъсната върху интервала $[0, l]$ и $(x-\zeta)^2+y^2+z^2 \neq 0$ при $0 \leqq \zeta \leqq l$, то функцията

$$u(x,\,y,\,z) = \int\limits_0^l \frac{f(\zeta)d\zeta}{\sqrt{(x-\zeta)^2+y^2+z^2}}$$

удовлетворява уравнението на Лаплас

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

§ 2. Несобствени интеграли, зависещи от параметър. Равномерна сходимост

Нека функцията $f(x,y)$ е дефинирана за всички $x \geqq a$ и за всички $y \in (c,d)$ и при всяко фиксирано y е интегруема в множеството $[a, +\infty)$, т. е. за всяко $y \in (c,\,d)$ е сходящ интегралът

$$J(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,\,y)\,dx.$$

Несобственият интеграл $J(y)$ се нарича *равномерно сходящ* относно параметъра $y \in (c,d)$, ако функцията $J(A,y) = \int\limits_a^A f(x,y)\,dx$ клони равномерно относно $y \in (c,\,d)$ към граничната функция $J(y)$ при $A \to +\infty$.

Теорема 1 (критерий на Коши). За да бъде несобственият интеграл $J(y)$ равномерно сходящ в интервала $(c,\,d)$, е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon > 0$ да съществува такова $A_0 \geqq a$, че за всички A' и A'', по-големи от A_0, и за всички $y \in (c,\,d)$ да бъде изпълнено неравенството

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x,\,y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Теорема 2 (критерий на Вайерщрас). Нека за всички $y \in (c,\,d)$ и за всички $x \in [a_1, +\infty)$, $a_1 > a$, да бъде изпълнено неравенството $|f(x,y)| \leqq \varphi(x)$, където $\varphi(x)$ е интегруема в интервала $[a,\,+\infty)$ функция. Тогава интегралът $J(y)$ е сходящ абсолютно и равномерно относно y в интервала $(c,\,d)$. Функцията $\varphi(x)$ се нарича *мажоранта* за $f(x)$.

Теорема 3 (критерий на Абел). Нека интегралът $J(y)$ е сходящ равномерно в интервала $(c,\,d)$, а функцията $\varphi(x,\,y)$, $x \in [a,\,+\infty)$, $y \in (c,\,d)$, е ограничена и монотонна по x. Тогава интегралът

$$\Phi(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,\,y).\varphi(x,\,y)\,dx$$

е равномерно сходящ в интервала $(c,\,d)$.

Теорема 4 (критерий на Дирихле). Нека функцията $\varphi(x,y)$, $x \in [a,+\infty)$, $y \in (c,\,d)$, е монотонна по x и $\varphi(x,\,y) \to 0$ при $x \to +\infty$ равномерно относно $y \in (c,\,d)$. Нека примитивната $\int\limits_a^x f(t,\,y)\,dt$, $y \in (c,\,d)$, е ограничена за всяко $y \in (c,\,d)$ с константа, независеща от x и y. Тогава интегралът

$$\Phi(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,\,y)\varphi(x,\,y)\,dx$$

е равномерно сходящ в интервала $(c,\,d)$.

Теорема 5 (критерий на Дини). Нека $f(x,y)$, $x \in [a,+\infty)$, $y \in [c,d]$, е непрекъсната и неотрицателна функция в безкрайния правоъгълник $\{[a,\,+\infty),\,[c,\,d]\}$. Нека за всяко $y \in [c,\,d]$ е сходящ интегралът

$$J(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,\,y)\,dx$$

и нека той е непрекъсната функция в интервала $[c,\,d]$. Тогава интегралът $J(y)$ е равномерно сходящ относно $y \in [c,\,d]$.

В много задачи само една от функциите f и g съдържа параметъра y. В този случай критериите на Абел и Дирихле дават по два частни критерия в зависимост от това, кой от двата множителя съдържа y. Всички тези критерии се пренасят и за несобствени интеграли от неограничени функции.

Изследвайте за равномерна сходимост интегралите:

2.1. $J(y) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2}$.

Р е ш е н и е. Интегралът $J(y)$ е равномерно сходящ относно $y \in (-\infty, +\infty)$, тъй като за всяко реално y

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2} \leqq \int\limits_A^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{A} < \varepsilon \quad \text{при} \quad A > \frac{1}{\varepsilon}.$$

2.2. $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-y)^2+1}$, $y \in [a, +\infty)$.

Р е ш е н и е. В интеграла

$$J(y, A) = \int\limits_A^{+\infty} \frac{dx}{(x-y)^2+1}\,(A > 0)$$

правим смяна на променливата $x = y + t$. Получаваме

$$J(y, A) = \int\limits_{A-y}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(A-y).$$

Тъй като $\sup\limits_y J(y, A) = \frac{\pi}{2} > \varepsilon$ за всяко $\varepsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то интегралът $J(y)$ не е сходящ равномерно относно $y \in [0, +\infty)$.

2.3. $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\,dx$.

Р е ш е н и е. Интегралът $J(y)$ е сходящ при $y > 0$. Ще докажем, че при $y \geqq y_0 > 0$ той е равномерно сходящ. Наистина

$$0 \leqq \int\limits_A^{+\infty} e^{-xy}\,dx = \frac{1}{y}e^{-Ay} \leqq \frac{1}{y_0}e^{-Ay_0} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad A \to +\infty.$$

За $y \in (0, +\infty)$ разглежданият интеграл не е равномерно сходящ, тъй като

$$\int\limits_A^{+\infty} e^{-xy}\,dx = \frac{1}{y}e^{-Ay} \longrightarrow +\infty,$$

когато $y \to +0$ за всяко фиксирано $A \in [0, +\infty)$.

2.4. $J(y) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx$, $y \in (-\infty, +\infty)$.

Р е ш е н и е. Тъй като

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+y^2}\Bigg|_{x=A}^{x=+\infty},$$

то

$$\left|\int\limits_A^{+\infty} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right| = \frac{A}{A^2+y^2} < \frac{1}{A} \longrightarrow 0$$

при $A \to +\infty$ за всяко $y \in (-\infty, +\infty)$. Следователно интегралът е равномерно сходящ относно $y \in (-\infty, +\infty)$.

2.5. Докажете непосредствено, че интегралът на Дирихле $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}\,dx$ е равномерно сходящ относно y при $y \geqq y_0 > 0$ и не е равномерно сходящ при $y \geqq 0$.

Р е ш е н и е. Ще използваме, че $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}$ (вж. зад. 3.3). Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ можем да намерим такова A_0, че при $A > A_0$ да бъде изпълнено неравенството

$$\left|\int\limits_A^{+\infty} \frac{\sin z}{z}\,dz\right| < \varepsilon.$$

Фиксираме $y_0 > 0$. Тъй като

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}\,dx = \int\limits_{Ay}^{+\infty} \frac{\sin z}{z}\,dz,$$

то $\left|\int\limits_A^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}\,dx\right| < \varepsilon$ за $y \geqq y_0$ при $A > \frac{A_0}{y_0}$, защото $Ay \geqq Ay_0 > A_0$. С това доказахме равномерната сходимост на интеграла за $y \geqq y_0 > 0$. Интегралът $J(y)$ не е равномерно сходящ за $y \geqq 0$, тъй като при фиксирано A имаме

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}\,dx = \int\limits_{Ay}^{+\infty} \frac{\sin z}{z}\,dz \longrightarrow \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z}\,dz = \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad y \to 0.$$

Ако разгледаме интеграла на Дирихле за произволни реални y, лесно се съобразява, че той е равномерно сходящ във всеки интервал $[a, b]$, несъдържащ точката $y = 0$, и не е равномерно сходящ във всеки интервал $[a, b]$, съдържащ точката $y = 0$.

2.6. Докажете, че

$$J(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin xy.\cos x}{x}\,dx$$

е равномерно сходящ относно y, където y принадлежи на произволен интервал, несъдържащ точките ± 1.

У п ъ т в а н е. Преобразувайте числителя на подинтегралната функция в сбор.

2.7. Докажете, че

$$J(y) = \int\limits_0^{+\infty} x \sin x^3.\sin xy\,dx$$

е равномерно сходящ относно y, където y принадлежи на произволен краен интервал.

Р е ш е н и е. Интегрираме два пъти по части и получаваме

$$\int\limits_A^{+\infty} x \sin x^3 \sin xy dx = \left(-\frac{\cos x^3.\sin xy}{3x} + \frac{y}{3}\,\frac{\sin x^3.\cos xy}{3x^3}\right)\Bigg|_{x=A}^{x=+\infty}$$

$$-\frac{1}{3}\int\limits_A^{+\infty} \frac{\cos x^3 \sin xy}{x^2}\,dx + \frac{y}{3}\int\limits_A^{+\infty} \frac{\sin x^3.\cos xy}{x^4}\,dx + \frac{y^2}{9}\int\limits_A^{+\infty} \frac{\sin x^3.\sin xy}{x^3}\,dx.$$

От равенството следва равномерната сходимост относно y, принадлежащо на произволен краен интервал.

2.8. Докажете, че интегралите

$$F(y) = \int\limits_0^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}\,dx, \quad \Phi(y) = \int\limits_0^{+\infty} y^\alpha x^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+y)x} dx$$

са равномерно сходящи относно $y \in [0, +\infty)$ (α и β — положителни числа).

Р е ш е н и е. Нека $A \geqq 0$. За първия интеграл получаваме

$$0 \leqq \int\limits_A^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y} dx = y^\beta e^{-y} \int\limits_A^{+\infty} (xy)^\alpha e^{-xy} y\,dx$$

$$= y^\beta e^{-y} \int\limits_{Ay}^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du \leqq y^\beta e^{-y} \int\limits_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du.$$

Тъй като $\int\limits_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du < +\infty$ и $y^\beta e^{-y} \to 0$ при $y \to 0$, то следователно за всяко $\varepsilon > 0$ можем да намерим такова $y_0 > 0$, че за всяко $y \in [0,\, y_0]$ да бъде в сила неравенството

$$\int\limits_A^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y} dx < \varepsilon, \quad A \geqq 0.$$

Ако $y \geqq y_0 > 0$, то $m_\beta = \max\limits_{0 \leqq y < +\infty} y^\beta e^{-y} < +\infty$ и

$$0 \leqq \int\limits_{Ay}^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du \leqq \int\limits_{Ay_0}^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad A \to +\infty.$$

Получаваме, че за всички достатъчно големи $A \in [0, +\infty)$ и за всички $y \geqq y_0 > 0$ интеграла

$$\int\limits_A^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y} dx$$

можем да направим по-малък от ε. Обединявайки двата разгледани случая, заключаваме, че интегралът $F(y)$ е равномерно сходящ относно $y \in [0, +\infty)$. Равномерната сходимост на втория интеграл следва от неравенството

$$0 \leqq \int\limits_A^{+\infty} y^\alpha x^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+y)x} dx = \int\limits_A^{+\infty} (xy)^\alpha e^{-xy} x^{\beta+1} e^{-x} dx$$

$$\leqq m_\alpha \int\limits_A^{+\infty} x^{\beta+1} e^{-x} dx,$$

където $m_\alpha = \max\limits_{0 \leqq u < \infty} u^\alpha e^{-u}$, както и от сходимостта на интеграла $\int\limits_0^{+\infty} x^{\beta+1} e^{-x} dx \; (\beta > 0)$.

2.9. Докажете, че

$$J(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2 y} dx$$

е равномерно сходящ относно y при $y \geqq y_0 > 0$ и не е равномерно сходящ за $y > 0$.

Изследвайте за равномерна сходимост интегралите:

2.10. $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx$.

Решение. Ще използваме мажорантния критерий на Вайерщрас:

$$\left| \frac{\cos xy}{1+x^2} \right| \leqq \frac{1}{1+x^2}.$$

Тъй като интегралът $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ е сходящ, получаваме, че $J(y)$ е равномерно сходящ относно $y \in (-\infty, +\infty)$.

2.11. $J(y) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^y x}{x\sqrt{x}} dx$, $y \in [0, 10]$.

Решение. От неравенствата

$$\frac{\ln^y x}{x\sqrt{x}} \leqq \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt{x}} = \frac{\ln^{10} x}{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{x\sqrt[4]{x}} \leqq C \cdot \frac{1}{x\sqrt[4]{x}}$$

и сходимостта на интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[4]{x}}$ по критерия на Вайерщрас получаваме, че интегралът е равномерно сходящ.

2.12. $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \sin xy dx$.

Решение. От неравенството $|e^{-x} \sin xy| \leqq e^{-x}$ и сходимостта на интеграла $\int\limits_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$ получаваме равномерната сходимост на $J(y)$ относно y в произволен интервал.

2.13. $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2 y} dx, \quad y \geqq y_0 > 0$.

Решение. Мажоранта за подинтегралната функция е $e^{-y_0 x^2}$.

2.14. $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} x^\alpha \cos x \, dx$, $\alpha \geqq 0$.

Решение. Мажоранта за подинтегралната функция е $e^{-y_0 x} x^\alpha$.

2.15. $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$, $y \in [0, +\infty)$.

Решение. Ще използваме критерия на Абел. Нека

$$f(x, y) = \frac{\sin x}{x}, \quad \varphi(x, y) = e^{-xy}.$$

Интегралът $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ е сходящ по критерия на Дирихле и не зависи от y. Функцията $\varphi(x, y)$ е ограничена и монотонна — следователно $J(y)$ е равномерно сходящ относно $y \in [0, +\infty)$.

2.16. Докажете равномерната сходимост относно $y \geqq 0$ на интегралите:

$$\text{а) } J(y) = \int_a^{+\infty} e^{-xy} f(x)dx,\ a \geqq 0; \quad \text{б) } J(y) = \int_a^{+\infty} e^{-x^2 y} f(x)\,dx,\ a \geqq 0,$$

ако интегралът $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ.

Решение. Функциите e^{-xy} и e^{-x^2y} са монотонно намаляващи по x и ограничени с единица. По критерия на Абел получаваме равномерната сходимост.

2.17. Докажете, че интегралът

$$J(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx,\ 0 < \alpha < 1,$$

е равномерно сходящ относно $y \in [0, +\infty)$.

Решение. Интегралът има особеност в точките $x = 0$ и $x = \infty$. За точката $x = 0$ прилагаме критерия на Вайерщрас — мажоранта се явява функцията $\frac{1}{x^\alpha}$. Равномерната сходимост в точката $x = \infty$ следва от предишната задача, като използваме факта, че интегралът

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$$

е сходящ (по критерия на Дирихле).

2.18. Докажете, че интегралът на Дирихле

$$J(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx$$

е равномерно сходящ относно $y \in [c, d]$, $0 \notin [c, d]$.

Решение. В задача 2.5 доказахме непосредствено горното твърдение. Сега ще го докажем с помощта на критерия на Дирихле: функцията $\varphi(x, y) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, монотонно клони към

нула при $x \to +\infty$ и е равномерно сходяща относно параметъра y, т. е. не зависи от него. Примитивната

$$\int_0^x \sin ty\,dt = \frac{1 - \cos xy}{y}, \quad x \in [0, +\infty),$$

е ограничена с числото $\frac{2}{m}$ ($m = \min\{|c|, |d|\}$, $0 \notin [c, d]$) — оттук следва равномерната сходимост.

2.19. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната за $x > 0$. Ако интегралът

$$J(y) = \int_0^{+\infty} x^y f(x)dx$$

е сходящ за $y = c$ и $y = d$ $(c < d)$, докажете, че той е равномерно сходящ относно $y \in [c, d]$ (особени точки $x = 0$ и $x = +\infty$).

Решение. Първоначално да разгледаме точката $x = 0$. Интегралът $\int_0^1 x^c f(x)\,dx$ е сходящ и не зависи от y. Функцията x^{y-c} за $y \geqq c$ е монотонна по x и ограничена с единица. По критерия на Абел за $y \geqq c$ интегралът $\int_0^1 x^y f(x)\,dx = \int_0^1 x^{y-c}x^c f(x)\,dx$ е равномерно сходящ. Аналогично за $x = +\infty$ получаваме, че интегралът

$$\int_1^{+\infty} x^y f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} x^{y-d} x^d f(x)\,dx$$

е равномерно сходящ относно $y \leqq d$.

2.20. Докажете с помощта на критерия на Дини, че

$$J(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx$$

е равномерно сходящ относно $y \in [c, d]$, $0 \notin [c, d]$.

Решение (вж. зад. 2.3). Подинтегралната функция $f(x, y) = ye^{-xy}$ е непрекъсната и неотрицателна. Даденият интеграл е непрекъсната функция

$$J(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} dxy = -e^{-xy}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = 1.$$

Следователно по критерия на Дини той е равномерно сходящ относно $y \in [c, d]$.

Изследвайте за равномерна сходимост интегралите:

2.21. $J(n) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}} dx, \quad n = 1, 2, \ldots$

2.22. $J(y) = \int\limits_0^1 x^{y-1} dx.$

2.23. $J(y) = \int\limits_0^1 x^{y-1} \ln^m x \, dx$ (m — естествено число).

2.24. $J(y) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^y}$: а) при $1 < y_0 \leqq y < +\infty$; б) при $y \in (1, +\infty)$.

2.25. $J(y) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^y}, \quad y \in (0, 1).$

2.26. $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{y} e^{-x^2 y} dx, \quad y \in [0, +\infty).$

2.27. $J(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} dx$: а) при $y \in (a, b)$; б) при $y \in (-\infty, +\infty)$.

2.28. $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1 + x^y} dx, \quad y \in [0, +\infty).$

2.29. $J(y) = \int\limits_0^1 \frac{x^y}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad y \in [0, +\infty).$

§ 3. Несобствени интеграли, зависещи от параметър — непрекъснатост, диференциране и интегриране под знака на интеграла

Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана за всички $x \geqq a$ и за всички $y \in Y$, $Y \subset R^1$.

Теорема 1 (*Граничен преход под знака на интеграла*). Нека за всяко $b > a$ функцията $f(x, y)$ равномерно клони към функцията $g(x)$ при $y \to y_0$ относно $x \in [a, b]$, където y_0 е гранична точка за Y и интегралът $J(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ е равномерно сходящ относно $y \in Y$. Тогава

$$\lim_{y \to y_0} J(y) = \lim_{y \to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx = \int\limits_a^{+\infty} \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, dx = \int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx.$$

Теорема 2 (*Непрекъснатост на несобствен интеграл, зависещ от параметър*). Нека $f(x, y)$ е непрекъсната като функция на две променливи при $x \geqq a$ и $y \in [c, d]$, а интегралът $J(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ е равномерно сходящ относно $y \in [c, d]$. Тогава функцията $J(y)$ е непрекъсната в $[c, d]$.

Теорема 3 (*Граничен преход под знака на интеграла*). Нека $f(x, y)$ е непрекъсната като функция на две променливи и неотрицателна при $x \in [a, +\infty)$ и $y \in [c, d]$. Нека при $y \to y_0$ функцията $f(x, y)$, която монотонно расте за всяко x, клони по y към непрекъснатата функция $g(x)$. Тогава от сходимостта на интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx$ следва възможността за граничен преход при $y \to y_0$ под знака на интеграла $J(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$.

Теорема 4 (*Интегриране под знака на несобствения интеграл*). Нека $f(x, y)$ като функция на две променливи $x \in [a, +\infty)$ и $y \in [c, d]$ е непрекъсната и нека интегралът $J(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ е равномерно сходящ относно $y \in [c, d]$. Тогава $J(y)$ е интегруема в интервала $[c, d]$, като в сила е равенството:

$$\int\limits_c^d J(y)\, dy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx \right] dy = \int\limits_a^{+\infty} \left[\int\limits_c^d f(x, y)\, dy \right] dx.$$

Теорема 5 (*Интегриране под знака на несобствен интеграл, когато параметърът се мени в безкраен интервал*). Нека $f(x, y)$ е непрекъсната като функция на две променливи в областта $x \in [a, +\infty)$, $y \in [c, +\infty)$. Нека интегралите

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx \quad \text{и} \quad K(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)\,dy$$

са равномерно сходящи — първият относно y, принадлежащ на произволен интервал $[c, d] \subset [c, +\infty)$, а вторият относно x, принадлежащ на произволен интервал $[a, b] \subset [a, +\infty)$. Нека освен това съществува поне един от интегралите

$$\int_c^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} |f(x, y)|\,dx \right] dy, \qquad \int_a^{+\infty} \left[\int_c^{+\infty} |f(x, y)|\,dy \right] dx.$$

Тогава е в сила равенството

$$\int_c^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx \right] dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^{+\infty} f(x, y)\,dy \right] dx.$$

Теорема 6 (*Интегриране под знака на несобствен интеграл, когато параметърът се мени в безкраен интервал*). Нека $f(x, y)$ е непрекъсната като функция на две променливи и неотрицателна в областта $x \in [a, +\infty)$, $y \in [c, +\infty)$. Нека интегралите

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx \quad \text{и} \quad K(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)\,dy$$

са сходящи и непрекъснати съответно по $y \in [c, +\infty)$ и $x \in [a, +\infty)$. Тогава от сходимостта на единия от интегралите

$$\int_c^{+\infty} J(y)\,dy \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} K(x)\,dx$$

следва сходимостта на другия и равенството

$$\int_c^{+\infty} J(y)\,dy = \int_a^{+\infty} K(x)\,dx,$$

т. е.

$$\int_c^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx \right] dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^{+\infty} f(x, y)\,dy \right] dx.$$

Теорема 7 (*Диференциране под знака на несобствения интеграл*). Нека функцията $f(x,y)$ и нейната производна $f'_y(x,y)$ са непрекъснати като функции на две променливи $x \in [a, +\infty)$, $y \in [c, d]$. Нека интегралът $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ е сходящ за всяко $y \in [c, d]$, а интегралът $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx$ е равномерно сходящ относно $y \in [c, d]$. Тогава за всяко $y \in [c, d]$ функцията $J(y)$ е диференцуема (в крайните точки съществува съответно дясна и лява производна) и

$$J'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx.$$

Тези твърдения се пренасят и за несобствени интеграли от неограничени функции.

Теорема 8. Нека функцията $f(x, y)$, $y \in Y$, е интегруема в интервала $[a, b - \eta]$ за всяко $\eta > 0$ $(\eta < b - a)$ и във всеки такъв интервал при $y \to y_0$ равномерно клони относно x към граничната функция $\varphi(x)$. Ако освен това интегралът $\int_a^b f(x, y)\,dx$ е равномерно сходящ (при $x = b$) относно $y \in Y$, то в сила е равенството

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Теорема 9. Нека редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, където функциите $u_n(x)$ са положителни и непрекъснати за $x \geqq a$ (или за $a \leqq x < b$), има за тези стойности на x непрекъснатата сума $\varphi(x)$. Ако $\varphi(x)$ е интегруема в интервала $[a, +\infty)$ (или в $[a, b]$), то в този интервал редът може да бъде интегриран почленно.

3.1. Нека

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y} & \text{при } 0 \leqq x \leqq y, \quad y \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{при } x > y, \quad y \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Докажете, че

$$\lim_{y \to +\infty} \int_0^{+\infty} f(x, y)\,dx \neq \int_0^{+\infty} \lim_{y \to +\infty} f(x, y)\,dx.$$

Р е ш е н и е. Подинтегралната функция клони към нула равномерно относно $x \in [0, +\infty)$ при $y \to +\infty$. Тъй като

$$\int_0^{\infty} f(x, y)\,dx = \int_0^{y} f(x, y)\,dx + \int_y^{\infty} f(x, y)\,dx = \frac{1}{y} \cdot y + 0 = 1,$$

то $\lim\limits_{y\to\infty}\int\limits_0^\infty f(x,\,y)\,dx = 1$, но

$$\int\limits_0^\infty \lim_{y\to\infty} f(x,\,y)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} 0\,dx = 0.$$

Второто условие — равномерна сходимост на

$$J(y) = \int\limits_0^{+\infty} f(x,\,y)\,dx,$$

не е изпълнено. Наистина:

$$g(y,\,t) = \int\limits_0^t f(x,\,y)\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{y}\cdot t & \text{при } t \leqq y \\ \dfrac{1}{y}\cdot y = 1 & \text{при } t > y, \end{cases}$$

а тогава

$$|g(y,\,t) - 1| = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{y} & \text{при } t \leqq y \\ 0 & \text{при } t > y, \end{cases}$$

откъдето се вижда, че $J(y)$ не е равномерно сходящ.

3.2. Докажете, че функцията

$$F(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}dx, \quad y \in [0,\,+\infty)$$

е непрекъсната.

Р е ш е н и е. Даденият интеграл е равномерно сходящ относно y (вж. зад. 2.15). Тогава от теоремата за непрекъснатост на несобствения интеграл, зависещ от параметър, получаваме, че $F(y)$ е непрекъсната функция. В частност:

$$\lim_{y\to+0} F(y) = \lim_{y\to+0} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}dx = F(0) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \left(= \frac{\pi}{2}\right).$$

3.3. Да се пресметне $J = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}\,dx$ (и н т е г р а л н а Д и р и х л е).

Р е ш е н и е. Както знаем, даденият интеграл е сходящ. Ще приведем два начина за намиране на неговата стойност.

П ъ р в и н а ч и н. Въвеждаме помощната функция

$$F(\alpha,\,p) = \int\limits_0^p e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Прилагаме теоремата за диференциране под знака на интеграла:

$$F'_\alpha(\alpha,\,p) = -\int\limits_0^p e^{-\alpha x}\sin x\,dx = \left.\frac{e^{-\alpha x}(\alpha\sin x + \cos x)}{\alpha^2+1}\right|_0^p$$

$$= \frac{e^{-\alpha p}(\alpha\sin p + \cos p)}{\alpha^2+1} - \frac{1}{\alpha^2+1}.$$

Интегрирайки това равенство, получаваме

$$F(\alpha,\,p) = C - \int\limits_\alpha^{+\infty} \frac{e^{-tp}(t\sin p + \cos p)}{t^2+1}\,dt - \operatorname{arc\,tg}\alpha$$

(C не зависи от α). За намиране на константата C ще извършим граничен преход в предишното равенство по α, клонящо към $+\infty$. От неравенството

$$|F(\alpha,\,p)| \leqq \int\limits_0^p e^{-\alpha x}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \leqq \int\limits_0^p e^{-\alpha x}dx = \frac{1-e^{-\alpha p}}{\alpha} < \frac{1}{\alpha} \ (\alpha \neq 0)$$

получаваме, че $F(\alpha,\,p)$ клони към нула при $\alpha\to+\infty$. Тогава чрез граничен преход намираме $0 = C - \dfrac{\pi}{2}$, т. е. $C = \dfrac{\pi}{2}$ и следователно

$$F(\alpha,\,p) = \frac{\pi}{2} - \int\limits_\alpha^{+\infty} \frac{e^{-tp}(t\sin p + \cos p)}{t^2+1}\,dt - \operatorname{arc\,tg}\alpha.$$

Заместваме в горното равенство $\alpha = 0$ и използваме зад. 3.2:

$$F(0,\,p) = \frac{\pi}{2} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-tp}(t\sin p + \cos p)}{t^2+1}\,dt.$$

По дефиниция имаме $J = \lim_{p\to+\infty} F(0, p)$. От неравенството

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-tp}\frac{t\sin p+\cos p}{t^2+1}\,dt\right| \leqq \int_0^{+\infty} e^{-tp}\frac{t|\sin p|+|\cos p|}{t^2+1}\,dt$$

$$\leqq \int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{t+1}{t^2+1} \leqq 2\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \frac{2}{p}$$

следва, че

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tp}(t\sin p+\cos p)}{t^2+1}\,dt = 0.$$

Окончателно $J = \frac{\pi}{2}$. По този начин могат да бъдат пресметнати и други интеграли.

В т о р и н а ч и н. Ще пресметнем

$$J(\beta) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx.$$

За целта разглеждаме

$$J(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx \quad (\alpha \geqq 0).$$

Функцията

$$f(\alpha, \beta, x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}\dfrac{\sin\beta x}{x} & \text{при } x \neq 0 \\ \beta & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

е непрекъсната при $\alpha \geqq 0$ и $x \in [0, +\infty)$. Интегралът $\int_0^{+\infty} f(\alpha,\beta,x)\,dx$ е равномерно сходящ (вж. зад. 2.15) относно $\alpha \geqq 0$. Тогава $J(\alpha, \beta)$ е непрекъсната по $\alpha \geqq 0$ и следователно $J(+0, \beta) = J(\beta)$. Нека $\alpha > 0$. Функцията

$$f'_\beta(\alpha, \beta, x) = e^{-\alpha x}\cos\beta x \quad (x \geqq 0, -\infty < \beta < +\infty)$$

е непрекъсната, а интегралът $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx$ е равномерно сходящ относно β съгласно критерия на Вайерщрас — $|e^{-\alpha x}\cos\beta x| \leqq e^{-\alpha x}$. Следователно можем да диференцираме по β интеграла $J(\alpha, \beta)$:

$$J'_\beta(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \quad (\alpha > 0).$$

Интегрирайки по β, получаваме $J(\alpha, \beta) = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha} + C(\alpha)$. Тъй като $J(\alpha, 0) = 0$, то $C(\alpha) = 0$ и $J(\alpha, \beta) = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}$. Следователно

$$J(\beta) = J(+0, \beta) = \lim_{\alpha\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\beta.$$

В частност при $\beta = 1$ получаваме $J = J(1) = \frac{\pi}{2}$.

3.4. Чрез интегриране и диференциране под знака на несобствения интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin sx\,dx$ пресметнете интегралите

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{1-\cos xy}{x}\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} xe^{-x}\cos sx\,dx.$$

Р е ш е н и е. Даденият интеграл е равномерно сходящ (вж. зад. 2.12). Тъй като

$$\int e^{-x}\sin sx\,dx = -\frac{e^{-x}(\sin sx + s\cos sx)}{1+s^2},$$

то

$$\int_0^a e^{-x}\sin sx\,dx = \frac{s}{1+s^2} - \frac{e^{-a}(\sin sa + s\cos sa)}{1+s^2},$$

откъдето при $a \to +\infty$ получаваме

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin sx\,dx = \frac{s}{1+s^2}.$$

Интегрираме двете страни по s в граници от 0 до y:

$$\int_0^y \left[\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin sx\,dx\right] ds = \int_0^{+\infty}\left[\int_0^y e^{-x}\sin sx\,ds\right] dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{1-\cos xy}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+y^2).$$

Диференцираме дадения интеграл по s: $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}\cos sx\,dx$. Тъй като $|xe^{-x}\cos sx| \leqq xe^{-x}$, то полученият след диференцирането интеграл е равномерно сходящ и следователно

$$\frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin sx\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{d}{ds}(e^{-x}\sin sx)\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} xe^{-x}\cos sx\,dx = \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{1+s^2}\right) = \frac{1-s^2}{(1+s^2)^2}.$$

3.5. Чрез интегриране и диференциране под знака на несобствения интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+s^2}$ пресметнете интегралите

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x}\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+s^2)^2}.$$

Р е ш е н и е. Даденият интеграл е равномерно сходящ по $s\in[\alpha,\beta]$, където $1\leqq\alpha<\beta$. Това следва от неравенството

$$\frac{1}{x^2+s^2} \leqq \frac{1}{x^2+1}$$

и от сходимостта на интеграла

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

съгласно критерия на Вайерщрас. Интегрирайки по s в граници от 1 до y равенството

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+s^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{x}{s} = \frac{\pi}{2s},$$

получаваме

$$\int_1^y\left[\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+s^2}\right]ds = \int_0^{+\infty}\left[\int_1^y\frac{ds}{x^2+s^2}\right]dx = \int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x}\,dx$$

$$= \int_1^y\frac{\pi}{2s}\,ds = \frac{\pi}{2}\ln y.$$

Диференцирайки дадения интеграл, получаваме

$$\int_0^{+\infty}\frac{-2s}{(x^2+s^2)^2}\,dx.$$

Този интеграл е равномерно сходящ относно $s\in[\alpha,\beta]$, $1\leqq\alpha<\beta$, тъй като

$$\left|\frac{-2s}{(x^2+s^2)^2}\right| \leqq \frac{2\beta}{(x^2+1)^2},$$

и интегралът $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ е сходящ. Следователно

$$\int_0^{+\infty}\frac{-2s}{(x^2+s^2)^2}\,dx = -\frac{\pi}{2s^2} \quad \text{или} \quad \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+s^2)^2} = \frac{\pi}{4s^3}.$$

3.6. Пресметнете $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}}{x}\cos\lambda x\,dx \quad (\lambda>0)$.

Р е ш е н и е. Фиксираме λ и разглеждаме

$$\int_0^p e^{-sx}\cos\lambda x\,dx.$$

По правилото за интегриране под знака на интеграла (вж. § 1) получаваме:

$$\int_0^1\left[\int_0^p e^{-sx}\cos\lambda x\,dx\right]ds=\int_0^p\left[\int_0^1 e^{-sx}\cos\lambda x\,ds\right]dx$$

$$=\int_0^p \frac{e^{-sx}\cos\lambda x}{-x}\bigg|_{s=0}^{s=1}dx=\int_0^p\frac{1-e^{-x}}{x}\cos\lambda x\,dx.$$

От друга страна,

$$\int_0^1\left[\int_0^p e^{-sx}\cos\lambda x\,dx\right]ds=\int_0^1\frac{e^{-sx}}{s^2+\lambda^2}(-s\cos\lambda x+\lambda\sin\lambda x)\bigg|_{x=0}^{x=p}ds$$

$$=\int_0^1\frac{e^{-sp}(-s\cos\lambda p+\lambda\sin\lambda p)}{s^2+\lambda^2}ds-\int_0^1\frac{-s\,ds}{s^2+\lambda^2}.$$

Вторият интеграл е равен на

$$-\frac{1}{2}\ln(s^2+\lambda^2)\bigg|_{s=0}^{s=1}=-\ln\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda}.$$

Ще докажем, че при $p\to+\infty$ първият интеграл клони към нула. Подинтегралната функция се мажорира от

$$\frac{e^{-sp}}{s^2+\lambda^2}(s+\lambda)\leqq e^{-sp}\frac{\sqrt{2}+1}{2\lambda}.$$

Тогава

$$\left|\int_0^1\frac{e^{-sp}}{s^2+\lambda^2}(-s\cos\lambda p+\lambda\sin\lambda p)\,ds\right|\leqq\frac{\sqrt{2}+1}{2\lambda}\int_0^1 e^{-sp}ds$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{2\lambda}\cdot\frac{e^{-sp}}{-p}\bigg|_{s=0}^{s=1}=\frac{\sqrt{2}+1}{2\lambda}\cdot\frac{1-e^{-p}}{p}\xrightarrow[p\to\infty]{}0.$$

Следователно

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}}{x}\cos\lambda x\,dx=\ln\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda}.$$

3.7. Пресметнете $\int\limits_0^{+\infty}x^n e^{-xy}dx$.

Решение. Да разгледаме функцията $F(y)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-xy}dx$. Тя е безброй пъти диференцуема при $y>0$ и

$$F^{(n)}(y)=(-1)^n\int_0^{+\infty}x^n e^{-xy}dx,$$

но $F(y)=\dfrac{1}{y}$, и следователно

$$F^{(n)}(y)=(-1)^n\frac{n!}{y^{n+1}}.$$

Тогава

$$\int_0^{+\infty}x^n e^{-xy}dx=\frac{n!}{y^{n+1}}.$$

При $y=1$ получаваме

$$\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx=n!.$$

Следващата задача показва, че изискването за равномерна сходимост на интеграла $J(y)=\int\limits_a^{+\infty}f(x,y)\,dx$ при интегриране под знака на несобствения интеграл (за разлика от обикновения интеграл) е съществено.

3.8. Докажете, че

$$\int_0^1\left[\int_0^{+\infty}(2-xy)xy\,e^{-xy}dx\right]dy\neq\int_0^{+\infty}\left[\int_0^1(2-xy)xy\,e^{-xy}dy\right]dx.$$

Решение. Зададена е функцията $f(x,y)=(2-xy)xy\,e^{-xy}$ при $x\in[0,+\infty)$, $y\in[0,1]$. Като използваме, че t^2e^{-t} е примитивна на функцията $(2-t)t\,e^{-t}$, получаваме

$$\int_0^1\left[\int_0^{+\infty}(2-xy)xy\,e^{-xy}dx\right]dy=0,\quad\int_0^{+\infty}\left[\int_0^1(2-xy)xy\,e^{-xy}dy\right]dx=1.$$

Следващата задача показва, че допълнителното изискване в теоремата за интегриране по параметър, менящ се в безкраен интервал (в сравнение с интегриране по краен интервал), е съществено (вж. теореми 4 и 5 в началото на параграфа).

3.9. Променя ли се резултатът при промяна на реда на интегрирането под знака на несобствения интеграл

$$J(y) = \int_a^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx, \quad a \leqq y < +\infty?$$

Решение. Интегралите

$$J(y) = \int_a^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx \quad \text{и} \quad K(x) = \int_a^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy$$

са равномерно сходящи съответно относно $y \in [a, +\infty)$ и $x \in [a, +\infty)$. Непосредствените изчисления показват, че

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy\right] dx = -\frac{\pi}{4}, \qquad \int_a^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx\right] dy = \frac{\pi}{4}.$$

Но

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} \left|\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| dx\right] dy$$

$$= \int_a^{+\infty}\left[\int_a^{y} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx + \int_y^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx\right] dy$$

$$= \int_a^{+\infty}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\Bigg|_{x=a}^{x=y} - \frac{x}{x^2+y^2}\Bigg|_{x=y}^{x=\infty}\right] dy = \int_a^{+\infty}\left(\frac{1}{y} - \frac{a}{a^2+y^2}\right) dy$$

е разходящ. Същото се отнася и за

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} \left|\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| dy\right] dx.$$

3.10. Изчислете интегралите на Лаплас

$$J_1(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2}\, dx, \quad J_2(y) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy\, dx}{1+x^2}, \; y \in (-\infty, +\infty).$$

Решение. Нека $y \geqq \delta > 0$. Тогава и двата интеграла са равномерно сходящи относно $y \in [\delta, +\infty)$ съгласно критерия на Дирихле. Наистина функциите $\cos xy$ и $\sin xy$ имат ограничени примитивни, а функциите $\dfrac{1}{1+x^2}$ и $\dfrac{x}{1+x^2}$ клонят към нула при $x \to +\infty$, при това

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \leqq 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \leqq 0 \quad \text{при} \quad x \geqq 1.$$

Диференцираме $J_1(y)$:

$$J_1'(y) = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{1+x^2}\, dx = -J_2(y), \quad 0 < \delta \leqq y < +\infty.$$

За да намерим производната на $J_2(y)$, предварително преобразуваме

$$J_2(y) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{1+x^2}\, dx = \int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x(1+x^2)}\right] \sin xy\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}\, dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x(1+x^2)}\, dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} y - \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x(1+x^2)}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x(1+x^2)}\, dx \quad (y \geqq \delta > 0).$$

Сега лесно намираме

$$J_2'(y) = -\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2}\, dx = -J_1(y), \quad y \in [\delta, +\infty).$$

От равенствата $J_1'(y) = -J_2(y)$ и $J_2'(y) = -J_1(y)$ получаваме диференциалното уравнение $J_1''(y) - J_1(y) = 0$, което има решение

$$J_1(y) = c_1 e^{-y} + c_2 e^{y}, \quad y \in [\delta, +\infty),$$

c_1 и c_2 — произволни константи. Ще докажем, че $c_2 = 0$. Наистина

$$|J_1(y)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2}\, dx \right| \leqq \int_0^{+\infty} \frac{|\cos xy|}{1+x^2}\, dx \leqq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Получихме, че $J_1(y)$ е ограничена функция при $y \in [\delta, +\infty)$, а тъй като e^y е неограничена при $y \in [\delta, +\infty)$, трябва $c_2 = 0$. Следователно $J_1(y) = c_1 e^{-y}$, но тогава $J_2(y) = -J_1'(y) = c_1 e^{-y}$, $y \in [\delta, +\infty)$. От последното равенство и от произволността на $\delta > 0$ получаваме, че $J_1(y) = J_2(y) = c_1 e^{-y}$ при $y > 0$. Тъй като $J_1(y)$ е четна, а $J_2(y)$ — нечетна функция при $y \in (-\infty, +\infty)$, то можем да запишем равенствата

$$J_1(y) = c_1 e^{-|y|}, \quad J_2(y) = c_1 \operatorname{sign} y\, e^{-|y|} \quad \text{при} \quad y \neq 0.$$

За да определим константата c_1, ще използваме непрекъснатостта на $J_1(y)$ в точката нула. Тя следва от равномерната сходимост на интеграла относно $y \in (-\infty, +\infty)$. Следователно

$$J_1(0) = \lim_{y \to +0} J_1(y) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

и

$$J_1(0) = \lim_{y \to +0} c_1 e^{-y} = c_1.$$

Окончателно получаваме

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-|y|}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y . e^{-|y|}$$

(верността на тези формули за $y = 0$ се проверява непосредствено).

3.11. Изчислете интеграла на Ойлер — Поасон

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Р е ш е н и е. Да направим смяна на променливите $t = xy$, $y > 0$. Тогава

$$J = y \int_0^{+\infty} e^{-x^2 y^2} dx.$$

Умножаваме полученото равенство с e^{-y^2} и интегрираме по y от 0 до $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-y^2} J\, dy = J^2 = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} y e^{-y^2(1+x^2)} dx \right] dy.$$

Като сменим реда на интегриране, получаваме

$$J^2 = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} y e^{-y^2(1+x^2)} dy \right] dx = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y^2(1+x^2)}}{2(1+x^2)} \Bigg|_{y=0}^{y=+\infty} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Следователно

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Смяната на реда на интегриране може да бъде извършена по теорема 5, формулирана в началото на параграфа. Наистина интегралът

$$\int_0^{+\infty} y e^{-y^2(1+x^2)} dx$$

е равномерно сходящ относно y, където y принадлежи на произволен интервал $[c, d] \subset (0, +\infty)$, съгласно критерия на Вайерщрас, тъй като

$$|y\, e^{-y^2(1+x^2)}| \leqq d\, e^{-c^2(1+x^2)},$$

а интегралът

$$\int_0^{+\infty} d\, e^{-c^2(1+x^2)} dx$$

е сходящ. Аналогично интегралът

$$\int_0^{+\infty} y e^{-y^2(1+x^2)} dy$$

е равномерно сходящ относно x, принадлежащо на произволен интервал $[a, b) \subset (0, +\infty)$. Интегралът

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} y e^{-y^2(1+x^2)} dx \right] dy$$

е сходящ, тъй като е равен на J^2.

3.12. Изчислете интегралите на Френел

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx, \quad J_2 = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx.$$

Р е ш е н и е. Като извършим смяна на променливите $x^2 = y$, получаваме

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy, \quad J_2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy.$$

Интегралите

$$\int_0^{+\infty} e^{-ky} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} e^{-ky} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy \quad (k \geqq 0)$$

са равномерно сходящи относно $k \geqq 0$ (по критерия на Дирихле). Следователно

$$J_1 = \frac{1}{2} \lim_{k \to +0} \int_0^{+\infty} e^{-ky} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy, \quad J_2 = \frac{1}{2} \lim_{k \to +0} \int_0^{+\infty} e^{-ky} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy.$$

Да извършим смяна на променливите $t = x\sqrt{y}$ в интеграла на Ойлер — Поасон

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Получаваме

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{y}\, e^{-x^2 y} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2 y} dx \quad (y > 0).$$

Тогава

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \lim_{k \to +0} \int_0^{+\infty} e^{-ky} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{k \to +0} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-y(k+x^2)} \sin y \, dx \right] dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{k \to +0} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-y(k+x^2)} \sin y \, dy \right] dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{k \to +0} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + (k + x^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Аналогично

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \lim_{k \to +0} \int_0^{+\infty} e^{-ky} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{k \to +0} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-y(k+x^2)} \cos y \, dy \right] dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{k \to +0} \int_0^{+\infty} \frac{k + x^2}{1 + (k + x^2)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1 + x^4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Граничен преход под знака на интеграла може да се извърши, тъй като той е равномерно сходящ относно параметъра $k \in [0, +\infty)$ (вж. критерия на Вайерщрас). Смяна на реда на интегриране при $k > 0$ може да се осъществи по теорема 5, дадена в началото на този параграф. Следователно

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

3.13 (и н т е г р а л и н а Ф р у л а н и). Нека $f(x)$, $x\in[0,+\infty)$, е непрекъсната функция и $\int\limits_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,dx$ е сходящ за всяко $A > 0$. Докажете, че

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a},\quad a>0,\ b>0$$

(ф о р м у л а н а Ф р у л а н и).

Д о к а з а т е л с т в о. Да разгледаме функцията

$$F(x)=\int\limits_A^x\frac{f(t)}{t}\,dt,\quad A\leqq x<+\infty.$$

От условието получаваме, че съществува крайната граница $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=B$. Тогава

$$\int\limits_A^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}\,dx=\int\limits_{Aa}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt=B-F(Aa),$$

$$\int\limits_A^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}\,dx=\int\limits_{Ab}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt=B-F(Ab).$$

Следователно

$$\int\limits_A^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=F(Ab)-F(Aa)=\int\limits_{Aa}^{Ab}\frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Като приложим теоремата за средните стойности за интеграли, получаваме

$$\int\limits_{Aa}^{Ab}\frac{f(x)}{x}\,dx=f(\xi)\int\limits_{Aa}^{Ab}\frac{dx}{x}=f(\xi)\ln\frac{b}{a},$$

където $\xi=Aa+\theta A(b-a)$, $0<\theta<1$. Тъй като $f(x)$ е непрекъсната функция, то $\lim\limits_{A\to+0}f(\xi)=f(0)$ и следователно

$$\lim_{A\to+0}\int\limits_A^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

3.14. Нека $f(x)$, $x\in[0,+\infty)$, е непрекъсната функция и нека съществува крайна граница $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(+\infty)$. Докажете, че

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a},\ a>0,\ b>0$$

(ф о р м у л а н а Ф р у л а н и).

Д о к а з а т е л с т в о. От равенствата

$$\int\limits_A^B\frac{f(ax)}{x}\,dx=\int\limits_{Aa}^{Ba}\frac{f(t)}{t}\,dt\quad\text{и}\quad\int\limits_A^B\frac{f(bx)}{x}\,dx=\int\limits_{Ab}^{Bb}\frac{f(t)}{t}\,dt,\quad A>0,\ B>0,$$

като приложим теоремата за средните стойности, получаваме

$$\int\limits_A^B\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=\int\limits_{Aa}^{Ba}\frac{f(t)}{t}\,dt-\int\limits_{Ab}^{Bb}\frac{f(t)}{t}\,dt$$

$$=\int\limits_{Aa}^{Ab}\frac{f(t)}{t}\,dt-\int\limits_{Ba}^{Bb}\frac{f(t)}{t}\,dt=[f(\xi)-f(\eta)]\ln\frac{b}{a},$$

където

$\xi=A[a+\theta_1(b-a)]$, $\quad\eta=B[a+\theta_2(b-a)]$, $\quad 0<\theta_1<1$, $\quad 0<\theta_2<1$.

Извършваме граничен преход при $A\to+0$ и $B\to+\infty$ в полученото равенство:

$$\lim_{\substack{A\to+0\\B\to+\infty}}\int\limits_A^B\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}.$$

3.15. Нека е нарушена непрекъснатостта на функцията $f(x)$ в точката $x=0$, но съществуват интегралът $\int\limits_0^A\frac{f(t)}{t}\,dt$ $(0<A<+\infty)$ и крайната граница $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(+\infty)$. Докажете, че

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=f(+\infty)\ln\frac{a}{b}$$

(ф о р м у л а н а Ф р у л а н и).

18

У п ъ т в а н е. Направете смяна на променливата $x = \frac{1}{s}$.

3.16. Докажете, че

$$\int_0^1 \left[\int_1^{+\infty} (pe^{-pxy} - qe^{-qxy})\, dy \right] dx \neq \int_1^{+\infty} \left[\int_0^1 (pe^{-pxy} - qe^{-qxy})\, dx \right] dy$$

(Х а р д и).

Д о к а з а т е л с т в о. Твърдението следва непосредствено от равенството

$$\int_0^1 \left[\int_1^{+\infty} (pe^{-pxy} - qe^{-qxy})\, dy \right] dx - \int_1^{+\infty} \left[\int_0^1 (pe^{-pxy} - qe^{-qxy})\, dx \right] dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-px} - e^{-qx}}{x}\, dx = \ln\frac{q}{p} \neq 0 \quad \text{при} \quad p > 0, \quad q > 0, \quad p \neq q.$$

Тук използвахме зад. 3.13.

Пресметнете интегралите:

3.17. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2ax\, dx$ (и н т е г р а л н а Л а п л а с).

3.18. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos ax}{x}\, dx$ (множител на прекъсване на Д и р и х л е).

3.19. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$

3.20. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx\, dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$

3.21. $\int_0^{+\infty} e^{-(x^2 + \frac{a}{x^2})}\, dx,\ a > 0$ (и н т е г р а л н а Л а п л а с).

3.22. $\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}} \right) dx.$

3.23. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin^2 bx \frac{dx}{x},\ a > 0.$

3.24. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin^2 bx \frac{dx}{x^2},\ a > 0.$

3.25. $\int_0^{+\infty} xe^{-a^2x^2} \sin 2bx\, dx.$

3.26. $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2\beta x\, dx.$

3.27. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - \cos bx}{x^2}\, dx,\ a > 0,\ b > 0.$

3.28. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + a^2)}{x^2 + b^2}\, dx.$

3.29. $\int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}}\, dx,\ |a| < 1.$

3.30. $\int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx,\ |\alpha| < 1.$

3.31. $\int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x\sqrt{1 - x^2}}\, dx,\ |\alpha| < 1.$

3.32. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} \alpha x}{x(1 + \beta^2 x^2)}\, dx.$

3.33. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \alpha x \operatorname{arctg} \beta x \, dx, \ \alpha > 0, \ \beta > 0.$

3.34. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3} \ln(1+\alpha^2 x^2) \operatorname{arctg} \beta x \, dx, \ \alpha > 0, \ \beta > 0.$

3.35. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \ln(1+a^2x^2) \ln(1+b^2x^2) \, dx.$

3.36. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax + \cos bx - 2}{x^2} \, dx.$

Докажете равенствата:

3.37. $\displaystyle\int_0^{x} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \frac{\sin 2tx}{t} \, dt.$

3.38. $\displaystyle\int_0^{x} e^{t^2} dt = e^{x^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin 2xt \, dt.$

3.39. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x} \, dx = \frac{\pi}{4} \ln(1+\alpha^2) - \int_0^{\alpha} \frac{\ln x}{1+\alpha^2} \, d\alpha, \ \alpha > 0.$

3.40. $\displaystyle\left(\int_0^{x} e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^{1} \frac{e^{-x^2(u^2+1)}}{1+u^2} \, du.$

§ 4. Ойлерови интеграли

Ойлеров интеграл от първи род или *бета-функция* се нарича интегралът

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx,$$

където $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Интегралът е сходящ за всички положителни стойности на α и β.

Ойлеров интеграл от втори род или *гама-функция* се нарича интегралът

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx,$$

където $\alpha > 0$. Интегралът е сходящ за всички $\alpha > 0$.

4.1. Докажете, че функцията $\Gamma(\alpha)$ е диференцуема безброй много пъти.

Решение. След диференциране под знака на интеграла получаваме

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \ln x . e^{-x} dx.$$

Това е възможно, тъй като интегралите

$$\int_0^1 e^{-x} x^{\alpha-1} \ln x \, dx \quad \text{и} \quad \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} \ln x \, dx$$

са равномерно сходящи относно α. За първия интеграл в точката $x = 0$ имаме например мажоранта $x^{\alpha_0-1}|\ln x|$ за $\alpha \geqq \alpha_0 > 0$, а за втория в точката $x = \infty$ — мажоранта $x^A e^{-x}$ за $\alpha \leqq A < \infty$. По същия начин се получава

$$\Gamma''(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} (\ln x)^2 \, dx$$

и т. н.

4.2. Докажете, че $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ (основно функционално уравнение за гама-функция).

Решение. Като интегрираме по части $\Gamma(\alpha+1)$ за всяко $\alpha > 0$, получаваме

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha} dx = e^{-x} x^{\alpha} \Big|_{+\infty}^{0} + \alpha \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Като приложим тази формула, получаваме равенството

$$\Gamma(\alpha+n) = (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\ldots(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha).$$

Съгласно формулата следва, че изчисляването на стойностите на $\Gamma(\alpha)$ за големи α може да бъде сведено до изчисляването на гама-функцията за стойности на аргумента, по-малки от единица.

Ако в получената формула положим $\alpha = 1$ и вземем предвид, че $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$, ще получим $\Gamma(n+1) = n!$.

Следователно на $\Gamma(\alpha)$ може да се гледа като на естествено продължение в множеството на положителните числа на функцията „факториел" ($n!$), дефинирана в множеството на естествените числа n.

4.3. Докажете, че дефиницията на функцията $\Gamma(\alpha)$ може еднозначно да се продължи и за отрицателни стойности на α, които не са цели числа, по такъв начин, че да имаме $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

Р е ш е н и е. Ако $-n < \alpha < -n+1$ (n — естествено число), то $0 < \alpha + n < 1$ и полагаме

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}.$$

За така продължената функция $\Gamma(\alpha)$ е в сила основното функционално уравнение. Наистина

$$\Gamma(\alpha+1) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)(\alpha+n)}$$

$$= \frac{(\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)(\alpha+n)} = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Следователно за всички реални α с изключение на $\alpha = 0$ и $\alpha = -n$ (n — естествено число) е дефинирана функцията $\Gamma(\alpha)$, за която $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ и $\Gamma(1) = 1$.

4.4. Докажете, че функцията $\Gamma(\alpha)$ притежава следните свойства за всички положителни стойности на α:

а) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$; б) $\Gamma(\alpha) > 0$;

в) $\dfrac{d^2}{d\alpha^2}[\ln\Gamma(\alpha)] > 0$; г) $\Gamma(1) = 1$.

Тези условия се наричат условия на Б о р — М о л е р у п.

У п ъ т в а н е. За условие в) използвайте неравенството на Коши — Буняковски:

$$\int\limits_a^b [\varphi(\alpha)]^2\,d\alpha . \int\limits_a^b [\psi(\alpha)]^2\,d\alpha \geqq \left[\int\limits_a^b \varphi(\alpha)\psi(\alpha)\,d\alpha\right]^2,$$

като положите

$$a = 0, \quad b = \infty, \quad \varphi(\alpha) = \sqrt{x^{\alpha-1}e^{-x}}, \quad \psi(\alpha) = \sqrt{x^{\alpha-1}e^{-x}}\ln x.$$

Вземайки предвид, че функциите $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ са линейно независими, ще получите

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}[\ln\Gamma(\alpha)] = \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right] = \frac{\Gamma''(\alpha)\Gamma(\alpha) - [\Gamma'(\alpha)]^2}{\Gamma^2(\alpha)} > 0.$$

4.5. Докажете, че ако една функция $f(\alpha)$ е дефинирана при $\alpha > 0$, два пъти диференцуема и за всички положителни стойности на α удовлетворява условията:

а) $f(\alpha+1) = \alpha f(\alpha)$; б) $f(\alpha) > 0$;

в) $\dfrac{d^2}{d\alpha^2}[\ln f(\alpha)] > 0$; г) $f(1) = 1$,

то $f(\alpha) = \Gamma(\alpha)$.

Р е ш е н и е. Ще използваме лемата: Ако функцията $g(x)$ е два пъти диференцуема в интервала Δ и $g''(x) \geqq 0$, то функцията

$$\varphi(h) = \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \qquad (x_0 \text{ и } x_0 + h \in \Delta)$$

е монотонно растяща.

Прилагаме тази лема за функцията $\ln f(\alpha)$ и получаваме неравенствата

$$\frac{\ln f(-1+n) - \ln f(n)}{(-1+n) - n} \leqq \frac{\ln f(\alpha+n) - \ln f(n)}{(\alpha+n) - n} \leqq \frac{\ln f(1+n) - \ln f(n)}{(1+n) - n}$$

за цели, по-големи от 1 стойности на n и при $0 < \alpha \leqq 1$. От тях получаваме последователно:

$$\frac{(n-1)^\alpha (n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)} \leqq f(\alpha) \leqq \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)} \cdot \frac{\alpha+n}{n},$$

$$\frac{n}{\alpha+n} f(\alpha) \leqq \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)} \leqq f(\alpha).$$

Следователно

$$f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}$$

и $f(\alpha) = \Gamma(\alpha)$ при $0 < \alpha \leqq 1$. Разпространяваме този резултат за всички положителни стойности на α, като използваме равенствата $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ и $f(\alpha+1) = \alpha f(\alpha)$.

Представянето на функцията $\Gamma(\alpha)$ във вид на безкрайно произведение

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}, \quad \alpha > 0,$$

се нарича формула на Гаус.

4.6. Докажете равенството на Вайерщрас:

$$\Gamma(\alpha) = e^{-C\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{\alpha}{k}}}{1+\frac{\alpha}{k}},$$

където C е константата на Ойлер,

$$C = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0,57721566490\dots$$

Решение. От равенството

$$\frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)} = e^{\alpha\left(\ln n - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{e^{\frac{\alpha}{1}}}{1+\frac{\alpha}{1}} \cdot \frac{e^{\frac{\alpha}{2}}}{1+\frac{\alpha}{2}} \cdots \frac{e^{\frac{\alpha}{n}}}{1+\frac{\alpha}{n}},$$

като вземем предвид, че $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = C$, получаваме

$$\Gamma(\alpha) = e^{-C\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{\alpha}{k}}}{1+\frac{\alpha}{k}} = e^{-C\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{\alpha}{k}}}{1+\frac{\alpha}{k}}, \quad \alpha > 0.$$

Тъй като гама-функцията е дефинирана и за $\alpha < 0$, $\alpha \neq -n$, n — естествено число, то получената формула е вярна и за всички отрицателни $\alpha \neq -n$.

4.7. Докажете, че

$$\Gamma(\alpha) = \alpha^{\alpha - \frac{1}{2}} . e^{-\alpha} . e^{\frac{\theta}{12\alpha}} \sqrt{2\pi},$$

където $0 < \theta < 1$, θ зависи от α (формула на Стирлинг).

Упътване. Нека при $\alpha > 0$ положим

$$g(\alpha) = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - 1.$$

В сила е неравенството

$$0 < g(\alpha) < \frac{1}{12\alpha} - \frac{1}{12(\alpha+1)}.$$

Наистина

$$g(\alpha) = \frac{1}{3(2\alpha+1)^2} + \frac{1}{5(2\alpha+1)^4} + \frac{1}{7(2\alpha+1)^6} + \cdots$$

$$< \frac{1}{3(2\alpha+1)^2} + \frac{1}{3(2\alpha+1)^4} + \frac{1}{3(2\alpha+1)^6} + \cdots = \frac{1}{12\alpha(\alpha+1)}$$

$$= \frac{1}{12\alpha} - \frac{1}{12(\alpha+1)}.$$

Докажете, че редът $\mu(\alpha) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g(\alpha+n)$ е сходящ при $\alpha > 0$ и $0 < \mu(\alpha) < \frac{1}{12\alpha}$. След това покажете, че функцията

$$f(\alpha) = A\alpha^{\alpha - \frac{1}{2}} . e^{-\alpha} . e^{\mu(\alpha)}$$

удовлетворява условията на Бор — Молеруп при подходящ избор на константата A. Пресметнете A чрез формулата на Уолис:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{[2^n n!]^4}{[(2n)!]^2 n}.$$

Полагайки във формулата от зад. 4.7 $\alpha = n$ — естествено число, като вземем предвид, че $\Gamma(n) = (n-1)!$, получаваме формулата на Стирлинг

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n . e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0 < \theta < 1).$$

4.8. Да се докаже, че

$$\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha-1}} \Gamma(\alpha)$$

(формула на Лежандър).

Упътване. За функцията

$$f(\alpha) = \frac{2^{\alpha-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$$

проверете условията на Бор — Молеруп.

4.9. Докажете, че за всички стойности на α, които не са цели числа, е в сила равенството

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

(формула за допълнението).

Упътване. Разгледайте функцията $\varphi(\alpha)$, дефинирана с условието $\varphi(\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\alpha$ при нецели стойности на α, и с условието $\varphi(\alpha) = \pi$, когато α е цяло. Покажете, че $\varphi(\alpha+1) = \varphi(\alpha)$ и $\varphi(\alpha) > 0$. Установете, че функцията $\varphi(\alpha)$ е безброй много пъти диференцуема, включително и в целочислените точки, като вземете предвид, че при $-1 < \alpha < 1$ е валидно представянето

$$\varphi(\alpha) = \Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)\left(\pi - \frac{\pi^3\alpha^2}{3!} + \frac{\pi^5\alpha^4}{5!} - \cdots\right)$$

и като се използва периодичността на $\varphi(\alpha)$. Тогава с помощта на формулата на Лежандър се получава равенството

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)\varphi\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = C\varphi(\alpha),$$

където C е константа. Полагайки $g(\alpha) = \frac{d^2}{d\alpha^2}\ln\varphi(\alpha)$, покажете, че

$$\frac{1}{4}\left[g\left(\frac{\alpha}{2}\right) + g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right] = g(\alpha).$$

Функцията $g(\alpha)$ е периодична и непрекъсната и следователно ограничена. Нека L е точната горна граница на $g(\alpha)$. Тогава от последното равенство следва, че $|g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}L$ или $L \leq \frac{1}{2}L$, т. е. $L = 0$. Установете с помощта на този резултат, че функцията $\ln\varphi(\alpha)$ е линейна. Покажете, като използвате нейната периодичност, че тя е константа и че при всяко α имаме $\varphi(\alpha) = \pi$.

4.10. Докажете, че за всяко x е в сила равенството

$$\sin\pi x = \lim_{n\to\infty}\left[\pi x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right]$$

(формула на Ойлер).

Упътване. Използвайте, че при всяко x, което не е цяло число:

$$\sin\pi x = \frac{\pi}{-x\Gamma(x)\Gamma(-x)}, \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Формулата на Ойлер се записва още по следния начин:

$$\sin\pi x = \pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

4.11. Нека функцията $\Phi(\alpha)$ е непрекъсната за $\alpha > 0$ заедно с производната си и удовлетворява функционалните уравнения:

(I) $\qquad \Phi(\alpha+1) = \alpha\Phi(\alpha),$

(II) $\qquad \Phi(\alpha)\Phi\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha-1}}\Phi(2\alpha),$

(III) $\qquad \Phi(\alpha)\Phi(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$

Да се докаже, че тези свойства в съвкупност напълно характеризират функцията $\Phi(\alpha)$, т. е. че всяка функция, удовлетворяваща тези свойства, е тъждествена с $\Gamma(\alpha)$.

Решение. Равенството (II) е формулата на Лежандър, получена след заместване на α с 2α. Само свойствата (I) и (II) са недостатъчни за дефинирането на гама-функция, тъй като освен от $\Gamma(\alpha)$ те се удовлетворяват и от функцията

$$\Phi(\alpha) = \Gamma(\alpha)[4\sin^2\alpha\pi]^{\mu},$$

където $\mu > 0$. Недостатъчни са и свойствата (II) и (III), тъй като те се удовлетворяват и от функцията

$$\Phi(\alpha) = \Gamma(\alpha).z^{\alpha-\frac{1}{2}} \quad \text{при} \quad z > 0.$$

Накрая свойствата (I) и (III) явно оставят произволни стойностите на функцията $\Phi(\alpha)$ за $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. По друг начин стоят нещата, ако са изпълнени и трите свойства. Свойството (III) може да бъде заменено с по-слабо изискване — функцията $\Phi(\alpha)$ при $\alpha > 0$ да не се анулира, което следва от (III) за $0 < \alpha < 1$, а изпълнението на това изискване за останалите α следва от (I).

И така, нека функцията $\Phi(\alpha)$ е непрекъсната за $\alpha > 0$ заедно с производната си, не се анулира и удовлетворява равенствата (I) и (II). Ще докажем, че тогава $\Phi(\alpha) \equiv \Gamma(\alpha)$.

Полагаме $\Phi(\alpha) = M(\alpha)\Gamma(\alpha)$. Очевидно функцията $M(\alpha)$ също е непрекъсната заедно с производната си и не се анулира. Освен това, тъй като $\Phi(\alpha)$ и $\Gamma(\alpha)$ удовлетворяват равенствата (I) и (II), то $M(\alpha)$ удовлетворява равенствата

$$\text{(I}'\text{)} \qquad M(\alpha+1) = M(\alpha),$$

$$\text{(II}'\text{)} \qquad M(\alpha).M\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) = M(2\alpha).$$

От (I′) следва, че $M(\alpha)$ има крайна граница при $\alpha \to +0$. Ако нея вземем за стойност $M(0)$, то $M(\alpha)$ ще бъде непрекъсната заедно с производната си и в точката $\alpha = 0$. От (II′) при $\alpha = \frac{1}{2}$ следва, че $M\left(\frac{1}{2}\right) = 1$; следователно $M(\alpha) > 0$ за всички $\alpha \geqq 0$. Това ни дава право да разглеждаме функцията

$$L(\alpha) = \ln M(\alpha),$$

която също е непрекъсната заедно с производната си за $\alpha \geqq 0$, но удовлетворява равенствата

$$\text{(I}''\text{)} \qquad L(\alpha+1) = L(\alpha),$$

$$\text{(II}''\text{)} \qquad L(\alpha) + L\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) = L(2\alpha).$$

Накрая да въведем непрекъснатата функция

$$\Delta(\alpha) = L'(\alpha),$$

която удовлетворява равенствата

$$\text{(I}'''\text{)} \qquad \Delta(\alpha+1) = \Delta(\alpha),$$

$$\text{(II}'''\text{)} \qquad \Delta(\alpha) + \Delta\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) = 2\Delta(2\alpha).$$

От (II‴), като заменим α с $\frac{\alpha}{2}$, намираме

$$\frac{1}{2}\left\{\Delta\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \Delta\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right\} = \Delta(\alpha).$$

Тук отново заменяме α първоначално с $\frac{\alpha}{2}$, а след това с $\frac{\alpha+1}{2}$ и събираме получените равенства:

$$\frac{1}{4}\left\{\Delta\left(\frac{\alpha}{4}\right) + \Delta\left(\frac{\alpha+1}{4}\right) + \Delta\left(\frac{\alpha+2}{4}\right) + \Delta\left(\frac{\alpha+3}{4}\right)\right\} = \Delta(\alpha).$$

По метода на пълната математическа индукция лесно стигаме до равенството

$$\frac{1}{2^n}\sum_{\nu=0}^{2^n-1} \Delta\left(\frac{\alpha+\nu}{2^n}\right) = \Delta(\alpha).$$

При произволно α сумата отляво може да се разглежда като интегрална сума за интеграла $\int_0^1 \Delta(x)\,dx$, като се вземе предвид периодичността на $\Delta(\alpha)$ от (I‴). Тогава

$$\Delta(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{\nu=0}^{2^n-1} \Delta\left(\frac{\alpha+\nu}{2^n}\right) = \int_0^1 \Delta(x)\,dx = L(1) - L(0) = 0,$$

като тук използваме (I″).

Следователно $L(\alpha) = \text{const}$, а оттук и $M(\alpha) = \text{const}$. Но ние видяхме, че $M\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, така че $M(\alpha) \equiv 1$ и $\Phi(\alpha) \equiv \Gamma(\alpha)$, което трябваше да докажем.

Тук изискването за диференцуемост е съществено и не може да бъде отхвърлено. Ако например положим

$$L(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\sin(2^n\pi\alpha),$$

то $L(\alpha)$ ще бъде непрекъсната функция, удовлетворяваща (I″) и (II″), т. е. едновременно ще имаме $L(0) = 0$ и $L\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, така че $L(\alpha)$ няма да бъде константа.

4.12. Постройте графиката на гама-функция.

Р е ш е н и е. От равенствата

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1 \quad \text{и} \quad \Gamma(n+1) = n!$$

получаваме $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$. По теоремата на Рол между числата 1 и 2 трябва да лежи корен α_0 на $\Gamma'(\alpha)$. Тази производна е растяща функция, тъй като

$$\Gamma''(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(\ln x)^2 e^{-x}dx>0.$$

Следователно при $0<\alpha<\alpha_0$ производната $\Gamma'(\alpha)$ е отрицателна и функцията $\Gamma(\alpha)$ намалява, а при $\alpha_0<\alpha<+\infty$ $\Gamma'(\alpha)$ е положителна, така че $\Gamma(\alpha)$ е растяща, т. е. в точката $\alpha=\alpha_0$ имаме минимум. Изчисленията ни дават

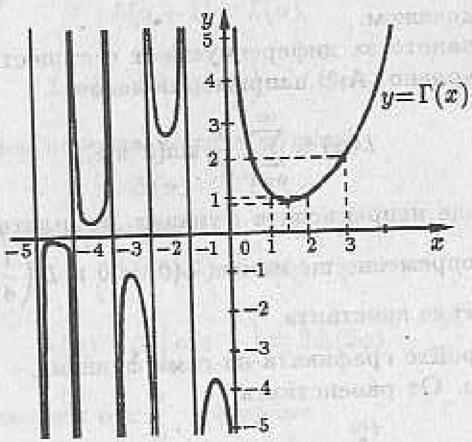
$$\alpha_0=1{,}4616\ldots,\qquad \min\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha_0)=0{,}8856\ldots$$

Ще намерим границите на $\Gamma(\alpha)$ при $\alpha\to+0$ и $\alpha\to+\infty$. От основното равенство получаваме

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$$

и следователно $\Gamma(\alpha)\xrightarrow[\alpha\to+0]{}+\infty$.

От равенството $\Gamma(n+1)=n!$, ако $\alpha>n+1$, то $\Gamma(\alpha)>n!$, т. е. $\Gamma(\alpha)\to+\infty$ при $\alpha\to+\infty$. Графиката на $\Gamma(\alpha)$ е дадена на фиг. 12.



Фиг. 12

4.13. *Докажете, че функцията* $\Gamma(\alpha)$ *е безброй пъти диференцуема във всяка точка* α *от дефиниционната си област и*

$$\frac{d^m}{d\alpha^m}[\ln\Gamma(\alpha)]=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{(\alpha+k)^m},\quad m\geq 2.$$

Решение. Ще дадем първо доказателство за $\alpha>0$. Като вземем предвид формулата на Вайерщрас (вж. зад. 4.6), получаваме

$$\ln\Gamma(\alpha)=-C\alpha-\ln\alpha+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\alpha}{k}-\ln\left(1+\frac{\alpha}{k}\right)\right]$$

$$=-C\alpha-\ln\alpha+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\alpha}{k}-\ln\left(1+\frac{\alpha}{k}\right)\right].$$

Ако формално диференцираме почленно последния ред, то за общия му член $\dfrac{\alpha}{k(\alpha+k)}$ в произволен интервал $0<\alpha<L$ е в сила оценката

$$\frac{\alpha}{k(\alpha+k)}<\frac{L}{k^2},$$

от която съгласно признака на Вайерщрас за функционални редове следва, че почленно диференцираният ред е равномерно сходящ в интервала $(0,\,L)$ (числовият ред с общ член $a_k=\dfrac{1}{k^2}$ е сходящ). Тъй като $L>0$ е произволно, то почленно диференцираният ред е сходящ равномерно за всички $\alpha>0$. Съгласно теоремата за почленно диференциране на функционални редове намираме

$$[\ln\Gamma(\alpha)]'=\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}=-C-\frac{1}{\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{\alpha+k}\right),\quad \alpha>0.$$

Ако диференцираме почленно реда в дясната страна на последната формула, получаваме реда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\alpha+k)^2}$, за чийто общ член е справедлива оценката

$$\frac{1}{(\alpha+k)^2}<\frac{1}{k^2},$$

откъдето следва, че почленно диференцираният ред е равномерно сходящ. Получаваме формулата

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}[\ln\Gamma(\alpha)] = \frac{1}{\alpha^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)^2}.$$

Повтаряйки тези разсъждения, по аналогия стигаме до формулата

$$\frac{d^m}{d\alpha^m}[\ln\Gamma(\alpha)] = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(m-1)!}{(\alpha+k)^m}, \quad m \geqq 2, \quad \alpha > 0.$$

От равенството $\Gamma(\alpha) = e^{\ln\Gamma(\alpha)}$ и последното равенство заключаваме, че $\Gamma(\alpha)$ е безброй пъти диференцуема за всяко $\alpha > 0$.

За да докажем, че $\Gamma(\alpha)$ е безброй пъти диференцуема и при всички отрицателни α, за които тя е дефинирана, ще използваме формулата

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}, \quad \alpha<0, \quad \alpha \neq -n,$$

n — естествено число (вж. зад. 4.3). Като логаритмуваме $|\Gamma(\alpha)|$, виждаме, че

$$\ln|\Gamma(\alpha)| = \ln\Gamma(\alpha+n) - \sum_{k=0}^{n-1}\ln|\alpha+k|.$$

Диференцираме $\ln|\Gamma(\alpha)|$:

$$\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\Gamma'(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+n)} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha+k}, \quad \alpha \in (-n, -n+1).$$

Като използваме вече получената формула за $[\ln\Gamma(\alpha)]'$, можем да запишем:

$$\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = -C - \frac{1}{\alpha+n} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{\alpha+n+k}\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha+k}$$

$$= -C + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{\alpha+n+k}\right) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\alpha+k}.$$

Диференцираме двете части на предишното равенство:

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}[\ln|\Gamma(\alpha)|] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n+k)^2} + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(\alpha+k)^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)^2}, \quad \alpha \in (-n, -n+1).$$

Почленното диференциране е законно, тъй като съгласно критерия на Вайерщрас редът, получен след диференциране, е равномерно сходящ.

Продължаваме диференцирането, като всеки път установяваме законността на почленното диференциране на функционалните редове. Получаваме формулата

$$\frac{d^m}{d\alpha^m}[\ln|\Gamma(\alpha)|] = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(m-1)!}{(\alpha+k)^m}, \quad -n<\alpha<-n+1, \quad m \geqq 2,$$

от която следва, че $\Gamma(\alpha)$ е безброй пъти диференцуема за всяко α от дефиниционната си област.

4.14. Пресметнете $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ (и н т е г р а л н а О й л е р — П о а с о н).

Р е ш е н и е. Полагаме $\alpha = \frac{1}{2}$ във формулата за допълнението

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

и тъй като $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, то $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Последното равенство записваме подробно:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}dz = \sqrt{\pi},$$

и правим смяна на променливите $z = x^2$. Получаваме

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4.15. Пресметнете

$$E = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Р е ш е н и е. Записваме произведението в обратен ред:

$$E = \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right),$$

и умножаваме двата израза:

$$E^2 = \prod_{\nu=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\nu}{n}\right).\Gamma\left(\frac{n-\nu}{n}\right).$$

Към всяка двойка множители прилагаме формулата за допълнението и получаваме

$$E^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin 2\frac{\pi}{n}\ldots\sin(n-1)\frac{\pi}{n}}.$$

За изчисляване на произведението от синусите разглеждаме тъждеството

$$\frac{z^n-1}{z-1} = \prod_{\nu=1}^{n-1}\left(z-\cos\frac{2\nu\pi}{n} - i\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right)$$

и в него извършваме граничен преход по $z \to 1$:

$$n = \prod_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{2\nu\pi}{n} - i\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right).$$

След приравняване на модулите имаме

$$n = \prod_{\nu=1}^{n-1}\left|1-\cos\frac{2\nu\pi}{n} - i\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right| = 2^{n-1}\prod_{\nu=1}^{n-1}\sin\frac{\nu\pi}{n}.$$

Следователно

$$\prod_{\nu=1}^{n-1}\sin\frac{\nu\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Заместваме в израза за E^2 и окончателно получаваме

$$E = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

4.16. Пресметнете $R_0 = \int_0^1 \ln\Gamma(\alpha)\,d\alpha$ (и н т е г р а л н а Р а а б е).

Р е ш е н и е. Интегралът е сходящ, тъй като

$$\ln\Gamma(\alpha) = \ln\Gamma(\alpha+1) - \ln\alpha.$$

Извършваме смяна на променливите, като заменяме α с $1-\alpha$:

$$R_0 = \int_0^1 \ln\Gamma(1-\alpha)\,d\alpha.$$

Събираме двете равенства и получаваме

$$2R_0 = \int_0^1 \ln\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\,d\alpha = \int_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\,d\alpha$$

$$= \ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin x\,dx = \ln\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx.$$

Тъй като $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$ (вж. гл. II, зад. 1.33), получаваме

$$R_0 = \int_0^1 \ln\Gamma(\alpha)\,d\alpha = \ln\sqrt{2\pi}.$$

4.17. Пресметнете $R(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+1}\ln\Gamma(\alpha)\,d\alpha$, $\alpha > 0$ (и н т е г р а л н а Р а а б е).

Р е ш е н и е.

$$R(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+1}\ln\Gamma(\alpha)\,d\alpha = \int_0^{\alpha+1}\ln\Gamma(\alpha)\,d\alpha - \int_0^{\alpha}\ln\Gamma(\alpha)\,d\alpha.$$

Диференцираме двете страни на последното равенство:

$$R'(\alpha) = \ln\Gamma(\alpha+1) - \ln\Gamma(\alpha) = \ln\alpha.$$

Интегрираме при $\alpha > 0$: $R(\alpha) = \alpha(\ln\alpha - 1) + C$. Но $R(\alpha)$ е непрекъсната функция в точката $\alpha = 0$ и като извършим граничен преход при $\alpha \to 0$ и вземем предвид зад. 4.16, получаваме $C = R_0$. Окончателно намираме формулата на Раабе:

$$R(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{\alpha+1} \ln\Gamma(\alpha)\,d\alpha = \alpha(\ln\alpha - 1) + \ln\sqrt{2\pi}.$$

4.18. Докажете, че $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Упътване. Направете смяна на променливите.

4.19. Докажете, че

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\beta - 1}{\alpha + \beta - 1} B(\alpha, \beta - 1), \quad B(\alpha, \beta) = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 1} B(\alpha - 1, \beta).$$

Решение. Нека $\beta > 1$. Интегрираме по части:

$$B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^1 (1-x)^{\beta-1}\,dx^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{\alpha}x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\Big|_0^1 + \frac{\beta-1}{\alpha}\int\limits_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-2}dx$$

$$= \frac{\beta-1}{\alpha}\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-2}dx - \frac{\beta-1}{\alpha}\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

$$= \frac{\beta-1}{\alpha}B(\alpha, \beta-1) - \frac{\beta-1}{\alpha}B(\alpha, \beta).$$

(Използвахме тъждеството $x^{\alpha} = x^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}(1-x)$.) Оттук следва и първото равенство. Тази формула може да се прилага с цел намаляване на β, докато β стане по-малко или равно на 1. Същото може да се направи и по отношение на първия аргумент — това следва от симетричността на $B(\alpha, \beta)$ (вж. зад. 4.1). С това е доказано и второто равенство.

Ако β е естествено число n, то последователно прилагайки първото равенство, получаваме

$$B(\alpha, n) = \frac{n-1}{\alpha+n-1}\cdot\frac{n-2}{\alpha+n-2}\cdots\frac{1}{\alpha+1}B(\alpha, 1).$$

Тъй като $B(\alpha, 1) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha}$, то

$$B(n, \alpha) = B(\alpha, n) = \frac{1.2\ldots(n-1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}.$$

Ако и α е естествено число m, то

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Тази формула е в сила и при $m = 1$ или $n = 1$, ако под символа $0!$ разбираме числото 1.

4.20. Докажете, че $\Gamma(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} [n^{\alpha}B(m, \alpha)]$.

Решение. В интеграла

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

полагаме $x = \ln\frac{1}{z}$ и получаваме

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{z}\right)^{\alpha-1} dz.$$

Ще използваме, че

$$\ln\frac{1}{z} = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right),$$

при това изразът $n\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)$ клони растейки към своята граница с растенето на n. Тогава

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1}\int\limits_0^1 \left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)^{\alpha-1} dz.$$

В интервала правим смяна на променливите $z = y^n$:

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\int\limits_0^1 y^{n-1}(1-y)^{\alpha-1}dy = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha}B(n, \alpha).$$

Ако приложим формулата за $B(n, \alpha)$ от зад. 4.19, получаваме формулата на Гаус за гама-функция:

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \frac{1.2\ldots(n-1)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}.$$

4.21. Докажете, че за всички $\alpha > 0$, $\beta > 0$ е в сила равенството

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{1}$$

Упътване. Покажете, че функцията

$$\varphi(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta).B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\beta)}$$

при фиксирано β удовлетворява условията на Бор — Моллеруп. Ако във формулата (1) положим $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, получаваме

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Полагаме $x = \sin^2 t$:

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{(вж. зад. 4.14).}$$

Ако използваме основното функционално уравнение за гама-функция (вж. зад. 4.2), намираме

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}+n-1\right)\left(\frac{1}{2}+n-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

4.22. Докажете, че

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,dt.$$

Упътване. Направете смяна на променливите $x = \dfrac{t}{1+t}$. Тъй като $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$, получаваме и равенството

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\beta-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,dt.$$

Следващите задачи решете с помощта на ойлеровите интеграли.

4.23. Пресметнете $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение. Полагаме $x = \sqrt{t}$ и използваме зад. 4.21:

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(3)} = \frac{\pi}{16}.$$

4.24. Пресметнете $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$.

Решение. Прилагаме резултатите, получени в зад. 4.21 и 4.22:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx = B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)}.$$

Ползвайки зад. 4.2 и 4.9, намираме

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx = \Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right) = \Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

4.25. Пресметнете $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^4 x\,dx$.

Решение. Полагаме $\sin x = \sqrt{t}\,(t > 0)$ и използваме резултатите от зад. 4.21:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{\frac{3}{2}}t^{\frac{5}{2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)}{5!}$$

$$= \frac{1}{2.5!}\cdot\frac{3!!\sqrt{\pi}}{2^2}\cdot\frac{5!!\sqrt{\pi}}{2^3} = \frac{3\pi}{512}.$$

4.26. Пресметнете $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\,dx$ (n — естествено число).

Р е ш е н и е. Полагаме $x = \sqrt{t}$ $(t > 0)$:

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} t^{n-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}.$$

4.27. Изчислете лицето S на частта от равнината, ограничена от кривата $\rho^4 = \sin^3\theta\cos\theta$.

Р е ш е н и е. Кривата се състои от две части, разположени в първи и трети квадрант. Тъй като тя е симетрична, достатъчно е да изчислим лицето само на частта, разположена в първи квадрант. Ще приложим формулата за лице в полярни координати

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2 d\theta.$$

Получаваме

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\Gamma(2)} = \frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

Пресметнете следните интеграли:

4.28. $\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx$, $p > 0$, $q > 0$, $m > 0$.

4.29. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$. **4.30.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$, $n > 1$.

4.31. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p}$, $a > 0$, $b > 0$, $n > 0$.

У п ъ т в а н е. Положете $x = \left(\frac{b}{a}t\right)^{\frac{1}{n}}$.

4.32. $J_{m,n} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x.\cos^n x\,dx$.

У п ъ т в а н е. Положете $\sin x = \sqrt{t}$.

4.33. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^n x\,dx$.

У п ъ т в а н е. Положете $\mathrm{tg}\,x = \sqrt{t}$.

4.34. $\int\limits_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}dx$.

У п ъ т в а н е. При $n > 0$ положете $x = \sqrt[n]{t}$; при $n < 0$ положете $n = -n_1$ $(n_1 > 0)$ и направете смяна на променливите $x = t^{-\frac{1}{n_1}}$.

4.35. $\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$.

У п ъ т в а н е. Положете $\ln\frac{1}{x} = t$.

4.36. Докажете, че

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}\cdot\int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} = \frac{\pi}{2n} \quad (n > 0)$$

(и н т е г р а л н а О й л е р).

У п ъ т в а н е. Използвайте зад. 4.28.

4.37. Докажете, че

$$\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\alpha+\frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-n\alpha}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(n\alpha)$$

(ф о р м у л а н а Г а у с).

§ 5. Лебегов интеграл и интеграли, зависещи от параметър

Тук ще разгледаме някои приложения на теорията на лебеговия интеграл към интеграли, зависещи от параметър. Тези приложения се явяват допълнения към теоремите, цитирани в началото на § 3.

Нека B е лебегово измеримо множество в R^m, μ_y — лебеговата мярка в R^m, а $\int\limits_B f(y)d\mu_y$ — лебегов интеграл. Ако $m = 1$, вместо $\int\limits_B f(y)\,d\mu_y$ пишем просто $\int\limits_B f(y)\,dy$.

Теорема 1 (Лебег). Ако редицата от сумируеми (интегруеми по Лебег) функции $f_n(y)$ клони почти навсякъде в множеството B към функцията $g(y)$ и ако съществува сумируема функция $\varphi(y)$, такава че

$$|f_n(y)| \leqq \varphi(y),$$

то граничната функция g е сумируема и

$$\int\limits_B g(y)\,d\mu_y = \lim_{n\to\infty} \int\limits_B f_n(y)\,d\mu_y.$$

Теорема 2 (граничен преход по параметър). Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана в множеството $A \times B$ и сумируема в множеството B, нека функцията $g(y)$ е дефинирана в множеството B, функцията $\varphi(y)$ — сумируема в множеството B, a — точка на сгъстяване на множеството A и нека са изпълнени условията:

1) $f(x, y) \xrightarrow[x\to a]{} g(y)$ почти навсякъде в множеството B;

2) При всяко $x \in A\ (x \neq a)$ неравенството $|f(x, y)| \leqq \varphi(y)$ е в сила почти навсякъде в множеството B.

Тогава функцията $g(y)$ е сумируема в множеството B и

$$\lim_{x\to a} \int\limits_B f(x, y)\,d\mu_y = \int\limits_B g(y)\,d\mu_y,$$

т. е.

$$\lim_{x\to a} \int\limits_B f(x, y)\,d\mu_y = \int\limits_B \lim_{x\to a} f(x, y)\,d\mu_y.$$

Когато $A \subset R_1$, то a може да бъде и $\pm\infty$.

5.1. Нека $F(x) = \int\limits_B f(x, y)\,d\mu_y$, където $x \in [p, q] = A$, $B \subset R^m$ и $f(x, y)$ е дефинирана в $A \times B \subset R^{m+1}$, като за всяко $x \in A$ функцията $f(x, y)$ е интегруема по Лебег, а за всяко $y \in B$ съществува $f'_x(x, y)$. Нека $g(y)$ е сумируема функция (интегруема по Лебег), такава че

$$|f'_x(x, y)| \leqq g(y).$$

Докажете, че $F(x)$ е диференцуема за $x \in (p, q)$ и

$$F'(x) = \int\limits_B f'_x(x, y)\,d\mu_y.$$

Решение. Фиксираме $x \in (p, q)$ и образуваме диференчното частно

$$\frac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x} = \int\limits_B \frac{f(x_n, y) - f(x, y)}{x_n - x}\,d\mu_y$$

$$= \int\limits_B f'_x(x_n + \theta_n(x_n - x), y)\,d\mu_y,$$

където $\theta_n \in (0, 1)$. Означаваме последната подинтегрална функция с $g_n(y)$ (x — фиксирано). От условието имаме $|g_n(y)| \leqq g(y)$. Тъй като

$$g_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} f'_x(x, y) \quad (x_n \to x),$$

от теоремата на Лебег получаваме

$$\lim_{x_n\to x} \frac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_B g_n(y)\,d\mu_y = \int\limits_B f'_x(x, y)\,d\mu_y,$$

т. е. съществува $F'(x)$ и тя е равна на $\int\limits_B f'_x(x, y)\,d\mu_y$.

5.2. Докажете, че са диференцуеми функциите:

а) $H(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin xy}{1 + y^4}\,dy, \quad x \in (-\infty, +\infty);$

б) $J(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} \cdot \frac{\sin y}{y}\,dy, \quad x \in (0, +\infty).$

Решение. б) Фиксираме точката $x_0 \in (0, +\infty)$. Разглеждаме $x \in \left[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}\right]$. Тогава производната на подинтегралната функция (равна на $e^{-xy}\sin y$) удовлетворява неравенството

$$|e^{-xy}\sin y| \leqq e^{-\frac{x_0}{2}y}.$$

Функцията $e^{-\frac{x_0}{2}y}$ е сумируема и като използваме лемата с $B = [0, +\infty]$, получаваме, че $J'(x)$ съществува и е равна на $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\sin y\,dy$ (срв. със зад. 3.4).

5.3. Нека $f(x, y)$ е непрекъсната функция в $\{[p, q], [a, +\infty)\}$, $p < q < +\infty$. Нека

$$\left|\int\limits_a^l f(x, y)\,dy\right| \leqq \varphi(x), \quad a \leqq l_0 \leqq l < +\infty, \quad x \in [p, q],$$

където $\varphi(x)$ е сумируема в $[p, q]$ функция. Докажете, че

$$\int\limits_p^q \left[\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dy\right] dx = \int\limits_a^{+\infty}\left[\int\limits_p^q f(x, y)\,dx\right] dy$$

(интегриране под знака на интеграла).

Решение. Означаваме

$$J(x) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dy, \quad K(y) = \int\limits_p^q f(x, y)\,dx.$$

От условието имаме $|J(x)| \leqq \varphi(x)$ и неравенството

$$\omega(x, l) = \left|\int\limits_l^{+\infty} f(x, y)\,dy\right| = \left|J(x) - \int\limits_a^l f(x, y)\,dy\right| \leqq 2\varphi(x).$$

Тъй като $J(x)$ е сходящ при всяко $x \in [p, q]$, то $\omega(x, l) \xrightarrow[l\to+\infty]{} 0$. От непрекъснатостта на $f(x, y)$ в крайния правоъгълник $\{[p, q], [a, l]\}$ следва

$$\int\limits_a^l K(y)\,dy = \int\limits_p^q\left[\int\limits_a^l f(x, y)\,dy\right] dx = \int\limits_p^q \left[J(x) - \int\limits_l^{+\infty} f(x, y)\,dy\right] dx$$

$$= \int\limits_p^q J(x)\,dx - \int\limits_p^q\left[\int\limits_l^{+\infty} f(x, y)\,dy\right] dx.$$

Оттук получаваме неравенството

$$\left|\int\limits_p^q J(x)\,dx - \int\limits_a^l K(y)\,dy\right| \leqq \int\limits_p^q \left|\int\limits_l^{+\infty} f(x, y)\,dy\right| dx = \int\limits_p^q \omega(x, l)\,dx.$$

Тъй като $\omega(x, l) \xrightarrow[l\to+\infty]{} 0$, $|\omega(x, l)| \leqq \varphi(x)$, $\varphi(x)$ — сумируема, то по теорема 2

$$\int\limits_p^q \omega(x, l)\,dx \xrightarrow[l\to+\infty]{} 0,$$

т. е.

$$\int\limits_a^l K(y)\,dy \xrightarrow[l\to+\infty]{} \int\limits_p^q J(x)\,dx \quad \text{или} \quad \int\limits_a^{+\infty} K(y)\,dy = \int\limits_p^q J(x)\,dx.$$

5.4. Нека $f(x, y)$ е непрекъсната в $\{[p, +\infty), [a, +\infty)\}$. Нека:

а) $\left|\int\limits_p^s f(x, y)\,dx\right| \leqq \psi(y)$,

където $\psi(y)$ е сумируема във всеки интервал $[a, l] \subset [a, +\infty)$;

б) $\left|\int\limits_a^l f(x, y)\,dy\right| \leqq \varphi(x)$,

където $\varphi(x)$ е сумируема в $[p, +\infty)$.

Докажете, че

$$\int\limits_p^{+\infty}\left[\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dy\right] dx = \int\limits_a^{+\infty}\left[\int\limits_p^{+\infty} f(x, y)\,dx\right] dy.$$

Решение. Нека

$$J(x) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dy, \quad K(y) = \int\limits_p^{+\infty} f(x, y)\,dx.$$

От условие а) от зад. 5.3 за правоъгълника $\{[a, l], [p, +\infty)\}$ (тук x и y са си разменили местата) получаваме

$$\int_a^l K(y)\,dy = \int_a^l \left[\int_p^{+\infty} f(x,\,y)\,dx\right] dy = \int_p^{+\infty}\left[\int_a^l f(x,\,y)\,dy\right] dx.$$

Аналогично на зад. 5.3

$$\left|\int_p^{+\infty} J(x)\,dx - \int_a^l K(y)\,dy\right| \leqq \int_p^{+\infty}\left|\int_l^{+\infty} f(x,\,y)\,dy\right| dx = \int_p^{+\infty} \omega(x,\,l)\,dx.$$

Но $\omega(x,\,l) \xrightarrow[l\to+\infty]{} 0$ за всяко x (следва от сходимостта на $J(x)$) и $|\omega(x,\,l)| \leqq 2\varphi(x)$ (следва от условие б)). Тогава по теорема 2

$$\int_a^l K(y)\,dy \xrightarrow[l\to+\infty]{} \int_p^{+\infty} J(x)\,dx.$$

Като използваме зад. 5.3, можем да пресметнем по друг начин и някои несобствени интеграли.

5.5. Пресметнете $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy$.

Р е ш е н и е. Ще използваме следните равенства:

$$\int_0^l e^{-xy}\sin y\,dy = \frac{1 - e^{-lx}\cos l - xe^{-lx}\sin l}{1+x^2}, \quad x>0,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin y\,dy = \frac{1}{1+x^2}, \quad x>0,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dx = \frac{1}{y}, \quad y>0.$$

Ако е допустимо интегриране под знака на несобствения интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin y\,dx,$$

то

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy = \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin y\,dx\right] dy$$

$$= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin y\,dy\right] dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

За да обосновем тези действия, достатъчно е да проверим изпълнението на условия а) и б) от зад. 5.4. Тогава

$$\left|\int_0^s e^{-xy}\sin y\,dx\right| = \left|\frac{\sin y}{y}\left(1-e^{-ys}\right)\right|.$$

Лясната страна на равенството е очевидно сумируема във всеки краен интервал $[0,\,l]$. Да проверим условие б) за всяко $l \geqq 1$:

$$\left|\int_0^l e^{-xy}\sin y\,dy\right| \leqq \frac{2}{1+x^2} + \frac{xe^{-xl}}{1+x^2} \leqq \frac{2}{1+x^2} + \frac{xe^{-x}}{1+x^2}.$$

Функцията

$$\frac{2}{1+x^2} + \frac{xe^{-x}}{1+x^2}$$

е сумируема в $[0,\,+\infty)$.

5.6. Пресметнете интеграла на Френел $J = \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$.

У п ъ т в а н е. След смяна на променливата $x^2 = t$ и използване на равенството

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\,du = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad t>0,$$

се получава

$$J = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\sin t\,du\right] dt.$$

Интегрирането под знака на вътрешния интеграл се обосновава отново с помощта на зад. 5.4. Аналогично може да бъде изчислен и $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\,dx$.