ЛЕКЦИЯ 3

Аналитична механика

Съдържание

1. Криволинейни координати на точка.

- обобщени координати (q_1, q_2, q_3)

  всяка тройка числа, еднозначно определящи положението на точка в тримерното пространство

  $$\mathbf{r} = \mathbf{r}(M) = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3) \qquad (1)$$

- координатна линия

  изменение само на едно от числата, докато другите две са фиксирани

  линия (q_1) $\quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_{20}, q_{30})$

  линия (q_2) $\quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q_{10}, q_2, q_{30})$

  линия (q_3) $\quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q_{10}, q_{20}, q_3)$

- координатни оси

  допирателните към координатните линии в дадена точка с посока, съответстваща на нарастването на съответните координати единични вектори по координатните оси $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$

- координатни повърхнини

изменение само на две координати, докато третата е фиксирана

повърхнина $(q_1 q_2)$ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_{30})$
повърхнина $(q_2 q_3)$ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_{10}, q_2, q_3)$
повърхнина $(q_3 q_1)$ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_{20}, q_3)$

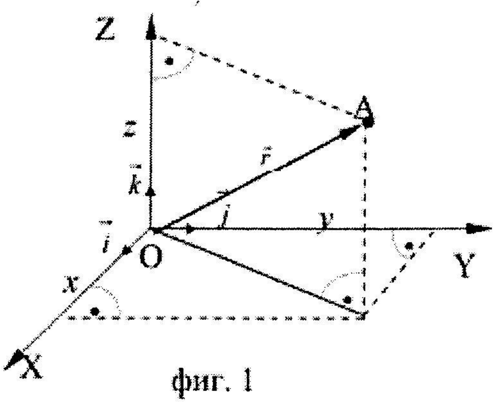
- координатни равнини

допирателните равнини към координатните повърхнини в дадена точка

2. Координатни системи.

- Декартова

$$(q_1, q_2, q_3) = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$$



фиг. 1

- цилиндрична

$$(q_1, q_2, q_3) = (\rho, \varphi, z) \quad \rho \geq 0, \quad \varphi \in [\,0, 2\pi]$$

- сферична

$$(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \varphi) \quad r \ge 0, \quad \theta \in [\,0, \pi] \quad \varphi \in [\,0, 2\pi]$$

- коефициенти на Ламе

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2} = H_i \quad (i = 1,2,3)$$

Единични вектори по координатните оси

$$\mathbf{k}_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}, \frac{\partial x_2}{\partial q_i}, \frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right) \quad (i = 1,2,3)$$

- направляващи (директорни) косинуси на ъглите между единичните вектори на криволинейните оси $[q_i]$ и осите на Декартова координатна система $[x_j]$

$$\cos(\mathbf{k}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{k}_i \mathbf{e}_j = \frac{1}{H_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\mathbf{e}_j = \frac{1}{H_i}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad , \quad (i, j = 1,2,3)$$

- таблица на директорните косинуси на ъглите между криволинейните оси $[q_i]$ и осите на Декартова координатна система $[x_j]$

	$[q_1]$	$[q_2]$	$[q_3]$
$[x_1]$	$\frac{1}{H_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_1}$	$\frac{1}{H_2}\frac{\partial x_1}{\partial q_2}$	$\frac{1}{H_3}\frac{\partial x_1}{\partial q_3}$
$[x_2]$	$\frac{1}{H_1}\frac{\partial x_2}{\partial q_1}$	$\frac{1}{H_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_2}$	$\frac{1}{H_3}\frac{\partial x_2}{\partial q_3}$
$[x_3]$	$\frac{1}{H_1}\frac{\partial x_3}{\partial q_1}$	$\frac{1}{H_2}\frac{\partial x_3}{\partial q_2}$	$\frac{1}{H_3}\frac{\partial x_3}{\partial q_3}$

- ортогонална криволинейна координатна система

$$\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j = 0 \quad (i \ne j) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial q_i}\frac{\partial x_1}{\partial q_j} + \frac{\partial x_2}{\partial q_i}\frac{\partial x_2}{\partial q_j} + \frac{\partial x_3}{\partial q_i}\frac{\partial x_3}{\partial q_j} = 0$$

- диференциал на дъга от поизволна крива в криволинейна координатна система

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3$$

$$(ds)^2 = |dr|^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3 \right)^2$$

При фиксиране на две от координатите и изменение само на една

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2, \quad ds_3 = H_3 dq_3,$$

$ds_i = H_i dq_i$ - диференциал на дъгите по отделните координатни линии

Примери:

- цилиндрична система: $ds_1 = d\rho, \quad ds_2 = \rho d\varphi, \quad ds_3 = dz$
  $H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad H_z = 1$

- сферична система: $ds_1 = dr, \quad ds_2 = rd\theta, \quad ds_3 = \sin\theta \, d\varphi$
  $H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r\sin\theta$

3. Скорост и ускорение на точка в ортогонални криволинейни координати.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3 \qquad (2)$$

обощени скорости $\quad \dot{q}_i \quad (i = 1,2,3)$

от (2) $\quad\Rightarrow\quad \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$

за пълната производна по времето на $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1 \partial q_i}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_2 \partial q_i}\dot{q}_2 + \frac{\partial\ \mathbf{r}}{\partial q_3 \partial q_i}\dot{q}_3 \qquad (3)$$

От (2) за частната производна на скоростта по обобщената координата (q_i)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_3}\dot{q}_3 \qquad (4)$$

От (3) и (4) $\quad\Rightarrow\quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right) = \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} \qquad (5)$

проекции на ускорението по координатните оси (q_i)

с единични вектори $\quad \mathbf{k}_i = \dfrac{1}{H_i}\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \qquad (i = 1,2,3)$

$$w_{q_i} = \mathbf{w}\,\mathbf{k}_i = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right) - \mathbf{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right)\right] \quad ,(i = 1,2,3) \quad (6)$$

Но $\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$, т.е.

$$w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \mathbf{v}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i}\right)\right] = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)\right], (i = 1,2,3) \qquad (7)$$

за проекциите на ускорението по координатните оси (q_i) е необходимо определянето на квадрата на скоростта

4. Скорост и ускорение на точка в сферични координати.

$(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \varphi) \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, \pi] \quad \varphi \in [0, 2\pi]$

- координатни линии

  линия (q_1): (r)-лъч с начало началото на координатната система

  линия (q_2) (θ) - окръжност с радиус r_0

  линия (q_3) (φ) - окръжност с радиус $r_0 \sin\theta_0$

- координатни оси

  допирателните към координатните линии в дадена точка с посока, съответстваща на нарастването на съответните координати

  ос (q_1): съвпада с координатната линиа (r)

  ос (q_2): допирателна към окръжността (θ) в разглежданата точка М

  ос (q_3) допирателна към окръжността (φ) в разглежданата точка М

- координатни повърхнини

  изменение само на две координати, докато третата е фиксирана

  повърхнина $(q_1 q_2)$ $\varphi = const$-равнина през оста Oz и точка М

  повърхнина $(q_2 q_3)$ $r = const$ - сфера с център О и радиус r

  повърхнина $(q_3 q_1)$ $\theta = const$ - конична повърхнина с ос Oz и ъгъл на образуващата θ

- координатни равнини

  допирателните равнини към координатните повърхнини в точка М

- връзка между Декартовите координати и сферичните

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad z = r\cos\theta \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{r}\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\dot{\theta}\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi\dot{\varphi} \\
\dot{y} &= \dot{r}\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\dot{\theta}\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi} \\
\dot{z} &= \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta}
\end{aligned} \tag{9}$$

коефициенти на Ламе

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \left(\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\right)^{1/2} = 1$$

$$H_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = \left(r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\right)^{1/2} = r$$

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \left(r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\right)^{1/2} = r\sin\theta$$

компоненти на скоростта: $v_{q_i} = H_i\dot{q}_i \Rightarrow v_r = \dot{r}$, $v_\theta = r\dot{\theta}$, $v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi}$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2$$

компоненти на ускорението:

$$w_r = \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)\right] = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2$$

$$w_\theta = \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)\right] = \frac{1}{r}\left(\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) - r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right) = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - \frac{1}{2}r\dot{\varphi}^2\sin 2\theta$$

$$w_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)\right] = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}r^2\sin^2\theta\right)\right) = \ddot{\varphi}r\sin\theta + 2\dot{\varphi}\dot{r}\sin\theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}r\cos\theta$$

5. Движение на точка по окръжност.

свеждане към движение по координатна линия на сферична система

при $r = R = const$, $\theta = \dfrac{\pi}{2} = const$

компоненти на скоростта: $v_r = \dot{r} = \dot{R} = 0$, $v_\theta = R\dot{\theta} = 0$,

$v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi} = R\dot{\varphi} = R\omega = v$

компоненти на ускорението:

$$w_r = r\sin^2\frac{\pi}{2}\dot{\varphi}^2 = -R\omega^2$$ (посока на оста - противоположна)

$$w_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - \frac{1}{2}r\dot{\varphi}^2\sin 2\theta = 0$$

$$w_\varphi == \ddot{\varphi}r\sin\theta + 2\dot{\varphi}\dot{r}\sin\theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}r\cos\theta = \ddot{\varphi}R = \dot{\omega}R = \varepsilon R$$

големина на ускорението: $w = \sqrt{w_r^2 + w_\varphi^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

сравнение с разлагането по осите на естествения триедър $\mathbf{w} = \varepsilon R\boldsymbol{\tau} + R\omega^2\mathbf{n}$

6. Хармонично движение.

Точка М се движи по окръжност с постоянна ъглова скорост ω. Движението на нейната проекция върху един от диаметрите на окръжността – *хармонично движение* .

Закон за движението (ос x – избрана по диаметъра, движението - праволинейно)

$$x = A\sin(\omega t + \alpha)$$

t - време, A - амплитуда (радиусът на окръжността),

ω - кръгова честота, α - начална фаза, T - период на движението: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$x(t+T) = x(t) \Rightarrow A\sin(\omega(t+T)+\alpha) = A\sin(\omega t + \alpha)$, $\omega(t+T)+\alpha = \omega t + \alpha + 2\pi$

$\nu = \dfrac{1}{T}$ - честота

Точката описва отсечка с дължина 2A (размах на движението), в средата на която е координатното начало O.

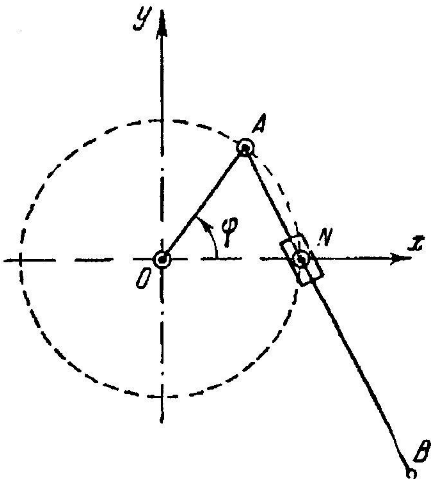
Скорост: $\dot{x} = v = A\omega\cos(\omega t + \alpha) = A\omega\sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2})$

Ускорение: $\ddot{x} = w = -A\omega^2\sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x$

Пример 1.

Механизъм с радиус ОА= r на окръжността, около която се върти точка А с ъгъл, изменящ се по закона kt; АВ=l, N – неподвижна точка.

Да се определи уравнението на движение на точка В, тангенциалното, нормалното и пълното ускорение, радиусът на кривината. Да се определят тези величини при ъгли 0 и 180 градуса.



Координати на точка В: $x = r\cos kt + l\sin\frac{kt}{2}$; $y = r\sin kt - l\cos\frac{kt}{2}$

Проекции на скоростта: $v_x = \dot{x} = -rk\sin kt + l\frac{k}{2}\cos\frac{kt}{2}$; $v_y = \dot{y} = rk\cos kt + l\frac{k}{2}\sin\frac{kt}{2}$

Големинана скоростта: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = k\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4} - rl\sin\frac{kt}{2}}$

Тангенциално ускорение: $w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \dfrac{-k^2 rl\cos\frac{kt}{2}}{4\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4} - rl\sin\frac{kt}{2}}}$

Проекции на ускорението по неподвижните оси на координатната система:

$$w_x = \ddot{x} = -rk^2\cos kt - l\frac{k^2}{4}\sin\frac{kt}{2}; \qquad w_y = \ddot{y} = -rk^2\sin kt + l\frac{k^2}{4}\cos\frac{kt}{2}$$

Големина на пълното ускорение на точка В: $w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = k^2\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{16} - \frac{rl}{2}\sin\frac{kt}{2}}$

Нормално ускорение: $w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = k^2 \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{16} - \frac{rl}{2}\sin\frac{kt}{2} - \frac{r^2 l^2 \cos^2\frac{kt}{2}}{16(r^2 + \frac{l^2}{4} - rl\sin\frac{kt}{2})}}$

но от $w_n = \frac{v^2}{\rho}$ за радиуса на кривината следва:

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{(4r^2 + l^2 - 4rl\sin\frac{kt}{2})}{\sqrt{64r^2 + 16r^2 l^2 + l^4 - 96r^3 l\sin\frac{kt}{2} - 12rl^3\sin\frac{kt}{2} + 36r^2 l^2 \sin^2\frac{kt}{2}}}$$

В начално положение – при t=0, т.е. при начален ъгъл нула: $x_0 = r$; $y_0 = -l$

големина на скоростта: $v_0 = k\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}$

големина на тангециалното ускорение: $w_{\tau 0} = \frac{-k^2 rl}{4\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$

големина на нормалното ускорение: $w_{n0} = k^2 \frac{8r^2 + l^2}{4\sqrt{4r^2 + l^2}}$

големина на пълното ускорение: $w_0 = k^2\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{16}}$

радиус на кривината: при $\varphi_0 = 0 \Rightarrow \rho_0 = \frac{(4r^2 + l^2)^{3/2}}{8r^2 + l^2}$

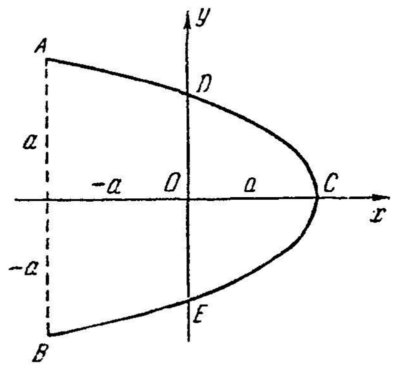
При $\varphi_1 = \pi$ съответните величини са: $x_1 = -r + l$; $y_1 = 0$; $v_1 = k(r - l/2)$;

$$w_{\tau 1} = 0 ; \qquad w_1 = w_{n1} = k^2(r - l/4) ; \qquad \rho_1 = \frac{(2r - l)^2}{4r - l}$$

Пример 2. Точка се движи съгласно уравненията $x = -a\cos 2\omega t$; $y = -a\cos\omega t$
Да се определят траекторията, скоростта и ускорението на точката, както и съответните им стойности в точките с координати: A(-a,a), B(-a,a) и C(a,0).

Записване чрез единичен ъгъл: $x = -a(\sin^2\omega t - \cos^2\omega t) = a(1 - 2\cos^2\omega t)$. След

изразяване на $\cos\omega t = -\dfrac{y}{a}$ и изключване на времето: $x = a(1 - 2\dfrac{y^2}{a^2})$, т.е. $y^2 = \dfrac{a^2}{2}(1 - \dfrac{x}{a})$



проекции на скоростта: $v_x = \dot{x} = 2a\omega\sin 2\omega t$; $v_y = \dot{y} = a\omega\sin\omega t$

проекции на ускорението: $w_x = \ddot{x} = 4a\omega^2\cos 2\omega t = -4\omega^2 x$; $w_y = \ddot{y} = a\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 y$

За точките с координати: A(-a,a) - $\cos 2\omega t = 1$, $\cos\omega t = -1$

B(-a,a) - $\cos 2\omega t = 1$, $\cos\omega t = 1$

C(a,0) - $\cos 2\omega t = -1$, $\cos\omega t = 0$

След заместване в изразите за проекциите на скоростта и ускорението се стига до определяне на стойностите им за всяка точка A, B и C.