Упражнение 7. Двумерни сл. величини. Марковски вериги.

Ако X *и* Y *са дискретни случайни величини, то можем да дефинираме тяхното съвместно вероятностно разпределение като*

$$p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

За числата $p(x_i, y_j)$ *са в сила условията.*

$$0 \leq p(x_i, y_j) \leq 1$$
$$\sum_i p(x_i, y_j) = \sum_i P(X = x_i, Y = y_j) = P(Y = y_j)$$
$$\sum_j p(x_i, y_j) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)$$
$$\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) = \sum_i \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = 1$$

Съвкупността от числата $P(X = x_i), i = 1, 2, \dots$ *се нарича маргинално разпределение на сл.в.* X, *съответно съвкупността от числата* $P(Y = y_j), j = 1, 2, \dots$ *се нарича маргинално разпределение на сл.в.* Y.

Случайните величини X *и* Y *са независими ако*

$$P(X = x_i, Y = y_i) = P(X = x_i) \times P(Y = y_i), \forall i, j$$

Коефициент на ковариация между сл.в. X *и* Y *се нарича числото*

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

В частния случай, когато $X = Y$ *имаме*

$$Cov(X, X) = D(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Коефициент на корелация между сл.в. X *и* Y *се нарича числото*

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

Корелационният коефициент приема стойности $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

Съвкупността от числата

$$p(x_i|y_j) = P(X = x_i|Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p(x_i, y_j)}{\sum_i p(x_i, y_j)}$$

се нарича условно разпределение на сл.в. X при условие, че $Y = y_j$. Съответно

$$p(y_j|x_i) = P(Y = y_j|X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p(x_i, y_j)}{\sum_j p(x_i, y_j)}$$

се нарича условно разпределение на сл.в. Y при условие, че $X = x_i$.

Ясно е, че

$$p(x_i|y_j) = \sum_i P(X = x_i|Y = y_j) = \sum_i \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = 1$$

$$p(y_j|x_i) = \sum_j P(Y = y_j|X = x_i) = \sum_j \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = 1$$

следователно тези съвкупности от числа, наистина са разпределения.

Условно математическо очакване на X при условие, че $Y = y_j$ наричаме числото

$$E(X|Y = y_j) = \sum_i x_i p(x_i|y_j), \quad j = 1, 2, \ldots$$

Аналогично

$$E(Y|X = x_i) = \sum_j y_j p(y_j|y_i), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Можем да дефинираме сл.в. $E(X|Y)$, заемаща стойности $E(X|Y = y_j)$ с вероятности $P(Y = y_j)$, $\quad j = 1, 2, \ldots$

Зад. 1. *От числата 1, 2, 3, 4 и 5 се избират по случаен начин три числа без повторение. Нека X е случайната величина средното по големина число от избраните три, а Y е случайната величина най-малкото от избраните числа. Да се определи:*

а) съвместното разпределение на X и Y;

б) маргиналните разпределения на X и Y;

в) да се провери дали X и Y са независими;

г) ковариация и коефициент на корелация на X и Y;

д) разпределението на случайната величина $Z = X - 2Y$.

Решение:

Нека да разгледаме възможните стойности на сл. величини X и Y. Имаме за X - средното по големина от трите числа $X = 2, 3, 4$ и за Y - най-малкото от трите числа $Y = 1, 2, 3$. Да намерим съвместното разпределение на (X, Y). Имаме

$$P(X = 2, Y = 1) = P(\text{третото число е избрано измежду 3,4,5}) = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}}$$

$$P(X=2, Y=2) = 0$$

$$P(X=2, Y=3) = 0$$

$$P(X=3, Y=1) = P(\text{третото число е избрано измежду 4,5}) = \frac{\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}}$$

$$P(X=3, Y=2) = P(\text{третото число е избрано измежду 4,5}) = \frac{\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}}$$

$$P(X=3, Y=3) = 0$$

$$P(X=4, Y=1) = P(\text{третото число е 5}) = \frac{\binom{1}{1}}{\binom{5}{3}}$$

$$P(X=4, Y=2) = P(\text{третото число е 5}) = \frac{\binom{1}{1}}{\binom{5}{3}}$$

$$P(X=4, Y=3) = P(\text{третото число е 5}) = \frac{\binom{1}{1}}{\binom{5}{3}}$$

Така за вектора (X, Y) имаме

$X \setminus Y$	1	2	3
2	0.3	0.0	0.0
3	0.2	0.2	0.0
4	0.1	0.1	0.1

Частните разпределения намираме като сумираме вероятностите по редове за X и по колони за Y.

Така получаваме

X	2	3	4
p	0.3	0.4	0.3

Y	1	2	3
p	0.6	0.3	0.1

За да са независими сл. величини трябва за всяко $i = 2, 3, 4$ и за всяко $j = 1, 2, 3$ да е изпълнено

$$P(X=i) \times P(Y=j) = P(X=i, Y=j)$$

Имаме

$$P(X=2) \times P(Y=1) = 0.18 \neq P(X=2, Y=1) = 0.3$$

Следователно двете сл. величини не са независими.

Намираме

$$EX = 0.3 \times 2 + 0.4 \times 3 + 0.3 \times 4 = 0.6 + 1.2 + 1.2 = 3$$

$$EX^2 = 0.3 \times 4 + 0.4 \times 9 + 0.3 \times 16 = 1.2 + 3.6 + 4.8 = 9.6$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 9.6 - 3^2 = 0.6$$

Намираме

$$EY = 0.6 \times 1 + 0.3 \times 2 + 0.1 \times 3 = 0.6 + 0.6 + 0.3 = 1.5$$

$$EY^2 = 0.6 \times 1 + 0.3 \times 4 + 0.1 \times 9 = 0.6 + 1.2 + 0.9 = 2.7$$

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = 2.7 - 1.5^2 = 0.45$$

Намираме

$$E(X \times Y)$$
$$= 0.3 \times 2 \times 1 + 0.2 \times 3 \times 1 + 0.2 \times 3 \times 2 + 0.1 \times 4 \times 1 + 0.1 \times 4 \times 2 + 0.1 \times 4 \times 3$$
$$= 0.6 + 0.6 + 1.2 + 0.4 + 0.8 + 1.2 = 4.8$$

$$Cov(X,Y) = E(X \times Y) - (EX) \times (EY) = 4.8 - 3 \times 1.5 = 0.3$$

$$r_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{0.3}{\sqrt{0.6}\sqrt{0.45}} = 0.57735.$$

Сл. величина $Z = X - 2Y$ приема следните стойности със съответните вероятности

$Z = X - 2Y$	1	2	3
2	0/0.3	-2/0.0	-4/0.0
3	1/0.2	-1/0.2	-3/0.0
4	2/0.1	0/0.1	-2/0.1

От тази таблица определяме разпределението на Z

Z	-2	-1	0	1	2
p	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

Зад. 2. *Случайните величини X и Y имат следното съвместно разпределение:*

$X \setminus Y$	*-1*	*0*	*4*
2	*2/10*	*1/10*	*1/10*
5	*1/10*	*3/10*	*2/10*

Да се намерят:
а) условните разпределения на X и Y;
б) разпределението на $E(X|Y), E(X|Y)$.

Решение:
Намираме

$X \setminus Y$	-1	0	4	p_X			-1	0	4		
2	0.2	0.1	0.1	0.4		$p_{Y\|X=2}$	$1/2$	$1/4$	$1/4$	$E(Y\|X=2)$	$1/2$
5	0.1	0.3	0.2	0.6		$p_{Y\|X=5}$	$1/6$	$1/2$	$1/3$	$E(Y\|X=5)$	$11/6$
p_Y	0.3	0.4	0.3								
	$p_{X\|Y=-1}$	$p_{X\|Y=0}$	$p_{X\|Y=4}$								
2	$2/3$	$1/4$	$1/3$								
5	$1/3$	$3/4$	$2/3$								
	$E(X\|Y=-1)$	$E(X\|Y=0)$	$E(X\|Y=4)$								
	$9/3$	$17/4$	$12/3$								

Сега за разпределенията на сл. величини $E(X|Y)$ и $E(Y|X)$ имаме съответно

$E(X\|Y)$	$9/3$	$17/4$	$12/3$
$p = p_Y$	0.3	0.4	0.3

$E(Y\|X)$	$1/2$	$11/6$
$p = p_X$	0.4	0.6

Зад. 3. *Четири топки са разпределени случайно в девет кутии, от които две са бели три зелени и четири червени. Да се пресметнат вероятностите на събитията:*
а) в белите кутии има една топка, а в зелените две;
б) в белите кутии има две топки;
в) в белите кутии попадат повече топки отколкото в останалите.

Решение:
Може да се разгледат два случая: 1. случай, когато в една кутия има най-много 1 топка, което съответства на избор без връщане. 2. случай, когато в една кутия може да има произволен брой топки, което съответства на избор с връщане.

Да разгледаме 1 случай.

а) Търсим вероятността за избор без връщане на 1 бяла, две зелени и една червена. Имаме

$$P = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{9}{4}} = \frac{2.3.4}{126} = \frac{4}{21}$$

б) Търсим вероятността за избор на 2 бели и две небели кутии. Имаме

$$P = \frac{\binom{2}{2}\binom{7}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{21}{126} = \frac{1}{6}.$$

в) При този начин на избор търсената вероятност е равна на 0, защото можем да изберем най-много 2 бели и другите две ще са с друг цвят.

Да разгледаме 2 случай.

а) Търсим вероятността за избор с връщане на 1 бяла, две зелени и една червена. Поради независимостта на избора на четирите кутии имаме

$$P = \frac{2}{9}\left(\frac{3}{9}\right)^2\frac{4}{9} = \frac{72}{81^2}$$

б) Търсим вероятността за избор на 2 бели и две небели кутии. Ако изборът на бяла кутия считаме за "Успех", имаме серия от 4 бернулиеви опита с $p = 2/9$ и $q = 7/9$. Тогава

$$P(\text{ 2 бели }) = b(4,2,2/9) = \binom{4}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{6\times 196}{81^2}$$

в) Като използуваме разсъжденията от предната точка б) търсим вероятността

$$P(\text{ поне 3 бели }) = b(4,3,2/9) + b(4,4,2/9)$$

$$= \binom{4}{3}\left(\frac{2}{9}\right)^3\frac{7}{9} + \binom{4}{4}\left(\frac{2}{9}\right)^4 = \frac{4.8.7+16}{81^2} = \frac{240}{81^2}.$$

Марковски вериги

Определения.

Една редица от сл. величини $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, определени на едно и също вероятностно пространство, всяка от които приема не повече от изброимо много стойности, се нарича *марковска верига,* ако за всяко n за всеки набор от индекси $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_n$ за които

$$P(X_0 = x_{i_0}, X_1 = x_{i_1}, \ldots, X_{n-1} = x_{i_{n-1}}) > 0$$

да е изпълнено

$$P(X_n = x_{i_n} | X_{n-1} = x_{i_{n-1}}, X_{n-2} = X_{i_{n-2}}, X_0 = x_{i_0}) = P(X_n = x_{i_n} | X_{n-1} = x_{i_{n-1}}).$$

Случайната величина X_n се интерпретира като състояние на Марковската верига в момент n. В много случаи е удобно значенията на сл. в. $X_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ да се отъждествяват с подмножество на множеството на естествените числа.

- Марковската верига се нарича *хомогенна,* ако вероятностите $P(X_n = x_j | X_{n-1} = x_i) = p_{ij}$ не зависят от n.

- Матрицата $P = (p_{ij})$ (крайна или безкрайна) се нарича *матрица на преходните вероятности за една стъпка.*

- Матрицата P е стохастична, т.е. за всеки i и j, $p_{ij} \geq 0$ и сумите по редове $\sum_j p_{ij} = 1$.

- Матрицата $P^{(n)}$ с елементи $p_{ij}(n) = P(X_n = x_j | X_0 = x_i)$ се нарича *матрица на преходните вероятности за n стъпки.*

В сила е следното равенство $P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}$, известно като *уравнение на Колмогоров-Чепмен.*

Вярно е че $P^{(n)} = P^n$, което е $n-$тата степен на матрицата на преходните вероятности за 1 стъпка.

Класификация на състоянията. Казва се че *състоянието x_j е достижимо от състоянието x_i*, ако съществува n такова, че $p_{ij}(n) > 0$.

- Състоянията *x_i и x_j са свързани,* ако всяко от тях е достижимо от другото.

- Състоянието x_i се нарича *несъществено,* ако има състояние x_j такова, че x_j е достижимо от x_i, но x_i не е достижимо от x_j. (Ако от него може да се отиде в друго, но не може да се върне обратно)

- В противен случай състоянието се нарича *съществено.*

(Съществено е ако е свързано със всички състояния достижими от него.)

Множеството от всички съществени състояния се разбива на класове свързани състояния така, че всеки две състояния от един клас са достижими едно от друго, а за всеки две състояния от различни класове, $p_{ij}(n) = 0$ и $p_{ji}(n) = 0$ за всяко $n > 0$.

- Ако веригата се състои от един клас свързани състояния тя се нарича *неразложима.*

- Състоянието x_i се нарича *възвратно,* ако $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$. В противен случай се нарича невъзвратно.

- Състоянието x_i се нарича *периодично с период* d, ако НОД на ония n, за които $p_{ii}(n) > 0$ е равен на d. С други думи, излизайки от това състояние, има положителна вероятност за връщане в него само за брой стъпки кратен на d.

- Състоянието x_i се нарича *ергодично*, ако то е *непериодично и възвратно.*

- Ако всички състояния на една марковска верига са *ергодични*, то тя се нарича *ергодична.*

Ясно е, че ако всички състояния са възвратни, то веригата е неразложима. Поради това *всяка неразложима и апериодична марковска верига е ергодична.*

- Вероятностното разпределение π_j се нарича *стационарно разпределние на Марковската верига*, ако за всяко n е изпълнено

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}(n), \quad j = 1, 2, \ldots .$$

За крайните марковски вериги (с краен брой състояния) е удобно да се представят преходите с ориентиран граф, в който със стрелки са свързани онези състояния, на които в матрицата на преходните вероятности за една стъпка съответства положителна вероятност.

Зад 5. *Да се класифицират състоянията на марковската верига зададена със следната матрица на преходите:*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Решение:

От графа се вижда, че състоянията (2), (6) и (7) са несъществени.
- За (2) имаме, че от (2) е достижимо (3), но (2) не е достижимо от (3);
- За (6) имаме, че от (6) е достижимо (2), но (6) не е достижимо от (2);
- За (7) имаме, че от (7) е достижимо (2), но (7) не е достижимо от (2).

Съществените състояния (1), (3), (4), (5), (8), (9) образуват три класа свързани състояния

$C_1 = \{(1),(4),(9)\}$, който е непериодичен.

$C_2 = \{(3),(8)\}$, който е периодичен с период 2.

$C_3 = \{(5)\}$, (5) се нарича също *поглъщащо състояние.*

Зад. 6. *Да се класифицират състоянията, да се определи стационарното разпределение и да се провери дали е ергодична веригата на Марков зададена със следната матрица на преходите:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

а) От графа се вижда, че състоянията образуват един клас свързани състояния, т.е. веригата е неразложима. Веригата е непериодична, защото от едно състояние може да се иде върне в същото както за 2 така и за 3 стъпки и НОД(2,3)=1.

За да намерим стационарното разпределение решаваме системата:

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \times \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{array}{ccccccc} & & \pi_2/2 & + & \pi_3/2 & = & \pi_1 \\ \pi_1/2 & & & + & \pi_3/2 & = & \pi_2 \\ \pi_1/2 & + & \pi_2/2 & & & = & \pi_3 \end{array}$$

При това имаме още и уравнението $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ и $\pi_j \geq 0$,

Като извадим от 1-то уравнение второто намираме $-\pi_1/2 + \pi_2/2 = \pi_1 - \pi_2$ или $\pi_1 = \pi_2$. Аналогично, от второто и третото $\pi_2 = \pi_3$. От нормиращото уравнение намираме $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1/3$.

б) Веригата е неразложима (състои се от един клас свързани състояния) и е периодична с период 2. Стационарното разпределение е решение на системата $\pi_2 = \pi_1, \pi_1 = \pi_2, \pi_1 + \pi_2 = 1, \pi_1 \geq 0, \pi_2 \geq 0$. От тази система намраме $\pi_1 = \pi_2 = 1/2$.

в) Веригата е неразложима, и е периодична. Вижда се, че от едно състояние веригата се връща в същото само за брой стъпки кратен на 3.

За стационарното разпределение решаваме системата уравнения

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & \pi_3/2 & & = & \pi_1 \\ & & & & \pi_3/2 & & = & \pi_2 \\ & & & & & \pi_4 & = & \pi_3 \\ \pi_1 & + & \pi_2 & & & & = & \pi_4 \\ \pi_1 & + & \pi_2 & + & \pi_3 & + \ \pi_4 & = & 1 \end{array}$$

От първите три уравнения заместваме в последното и намираме

$$\pi_3/2 + \pi_3/2 + \pi_3 + \pi_3 = 1$$

От тука $\pi_3 = 1/3$. И така $\pi_1 = \pi_2 = 1/6, \pi_3 = \pi_4 = 1/3$.

г) Състоянията (2) и (3) са несъществени, защото:

от (2) е достижимо (1), но от (1) не е достижимо (2);

от (3) е достижимо (4), но от (4) не е достижимо (3).

Съществените състояния са (1) и (4), които образуват два класа. Всяко от тези две състояния е поглъщащо.

За стационарното разпределение решаваме системата

$$\begin{array}{cccccccc} \pi_1 & + & \pi_2/2 & & & & = & \pi_1 \\ & & & & \pi_3/2 & & = & \pi_2 \\ & & \pi_2/2 & & & & = & \pi_3 \\ & & & & \pi_3/2 & + \ \pi_4 & = & \pi_4 \\ \pi_1 & + & \pi_2 & + & \pi_3 & + \ \pi_4 & = & 1 \end{array}$$

От първото уравнение следва, че $\pi_2 = 0$, а от последното следва, че $\pi_3 = 0$. Така остава $\pi_1 + \pi_2 = 1$, т.е. всяко разпределение $(\pi, 0, 0, 1 - \pi)$ за $\pi \in [0, 1]$ ще е стационарно.