# Упражнение 4. Геометрична вероятност

## Основни формули.

*Да предположим, че пространството от елементарните изходи при провеждане на даден опит са точките от*

*-интервал от реалната права $I$ с дължина $l(I)$;*

*- област от равнината $D$ с лице $S(D)$;*

*- или област в пространството $G$ с обем $V(G)$.*

*Предполагаме, че всички изходи са еднакво възможни.*

*Събитие A ще е*

*- подинтервал $A \subset I$;*

*- подобласт $A \subset D$ в равнината или $A \subset G$ в пространството.*

*Вероятността за сбъдване на събитието A ще дефинираме като*

$P(A) = \frac{l(A)}{l(I)}$, $P(A) = \frac{S(A)}{S(D)}$ , $P(A) = \frac{V(A)}{V(I)}$.

Зад. 1. *Нека $AB$ е телефонна линия с дължина 1, в точка $C$ попадаща по случаен начин върху $AB$ се е получило прекъсване. Каква е вероятността $C$ да е отдалечена от $A$ на разстояние по-голямо от $k$.*

Решение:

Нека считаме че на отсечката $AB$ е избрана точка $K$, такава, че $AK = k$, съответно $KB = 1 - k$. Събитието $A = \{$точка С е на разстояние по-голямо от $k$ от $A\}$ се сбъдва, ако $C$ попадне в отсечката $KB$. Така вероятността $P(A) = \frac{l(KB)}{l(AB)} = 1 - k$.

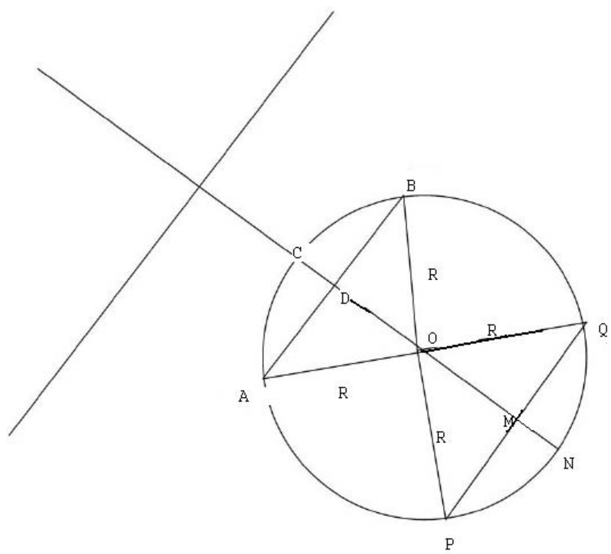
Зад. 2. *В окръжност с радиус $R$ е прекаран даден диаметър. След това по случаен начин е прекарана хорда, перпендиклулярна на този диаметър. Всяка една точка от този диаметър е еднакво вероятна да бъде пресечна с хордата. Да се определи вероятността хордата да бъде по-къса от $R$.*

Решение:

Поради това, че хордата е перпендикулярна на фиксиран диаметър, то нейното положение спрямо окръжността ще се определя еднозначно от положението на средата на хордата върху диаметъра. Нека $AB$ и $PQ$ са равни на $R$, т.е. триъгълниците $OAB$ и $OPQ$ са равнострани.

Тогава дължината на хордата ще бъде по-малка от $R$, ако средата и се намира в една от двете отсечки $CD$ или $MN$, както е показано на чертежа. Поради това, че средата на хордата еднакво възможно заема коя да е точка от този диаметър, то вероятността

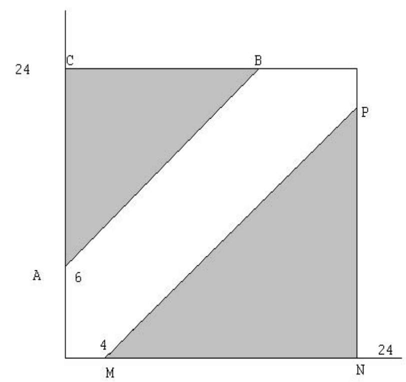
$P\{$хордата да е по къса от $R\} = \frac{l(MN)+l(CD)}{2R} = \frac{2(R-R\sqrt{3}/2)}{2R} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.



Зад. 3. *Два парахода трябва да бъдат разтоварени на един и същи пристан. Всеки един от тях, независимо от другия, може да пристигне в кой да е момент на даден ден (24ч.). Каква е вероятността параходите да не се изчакват, ако за разтоварването на първия са необходими 6ч., а за втория 4ч.*

Решение:

Нека да разгледаме квардат с дължина на страната 24 разположен в началото на координатната система. Нека по оста $Ox$ нанасяме момента $x \in [0, 24]$ на пристигане на първия кораб, а по оста $Oy$ нанасяме момента на пристигане $y$ втория кораб. Така двата момента на пристигане съответстват на точка с координати $(x, y)$. За да се избегне чакането трябва да е изпълнена една от следните системи неравенства: $x \geq 0$, $y > x + 6$ или $y \geq 0$ $x > y + 4$. Първата система се удовлетворява от точките в $\triangle ABC$, който е над правата $y = x + 6$, а втората от точките в $\triangle MNP$, който е под правата $y = x - 4$. Тогава вероятността да не се чака е $\frac{S(ABC)+S(MNP)}{S(\text{ квадрата })} = \frac{(18\times18)/2+(20\times20)/2}{24^2} = 362/576$.




Зад. 4. *Автобусите от линия A се движат на интервали от шест минути, а от линия B на четири минути, независимо от автобусите от линия A. Да се пресметне вероятността:*

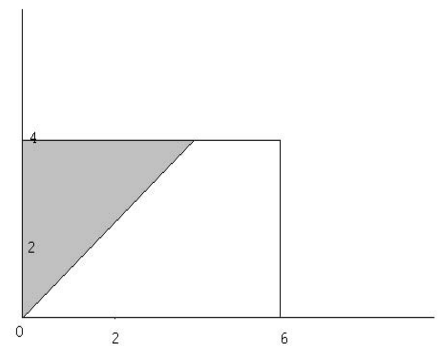
*а) автобус A да дойде преди B;*

*б) пътник, дошъл в случаен момент на спирката, да чака не повече от две минути.*

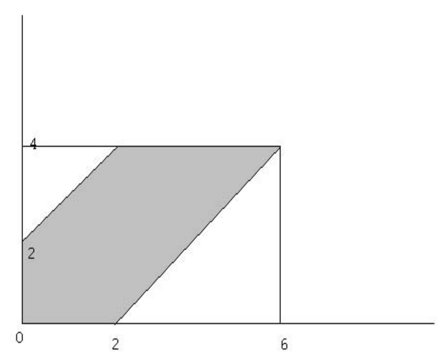
Решение:

Да разгледаме правоъгълник със страни 6 и 4 разположен в началото на координатната система $Oxy$. Всяка точка $x \in (0, 6]$ е възможен момент

за пристигане на автобус от линия $A$ (които идват през 6 минути.) Всяка точка $y \in (0, 4]$ е възможен момент за пристигане на автобус от линия $B$ (които идват през 4 минути.) Събитието $A$ идва преди $B$ се състои от онези точки на правоъгълника, за които $x < y$. Това е триъгълникът над правата $y = x$, който е показан на чертежа. Така вероятността на събитието $A$ идва преди $B$ е равна на
$S(\text{триъгълника})/S(\text{правоъгълника}) = (4.4/2)/(6.4) = 8/24 = 1/3$.



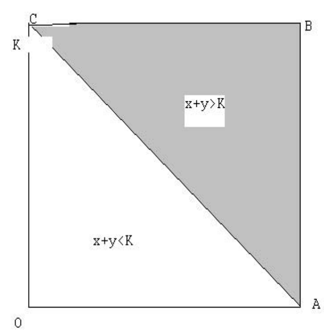

Събитието $A = \{$пътник дошъл в случаен момент от време да чака по малко от 2 минути$\}$ се състои от точките $(x, y)$ за които $|x - y| < 2$. Това неравенство е еквивалентно на системата $y > x - 2$ и $y < x + 2$. Първото неравенство се удовлетворява от точките над правата $y = x - 2$, а второто от точките под правата $y = x + 2$. Така областа е, както е показано на чертежа и за вероятността намираме $1 - \frac{(2.2)/2 + (4.4)/2}{4.6} = 1 - \frac{10}{24} = 14/24 = 7/12$.



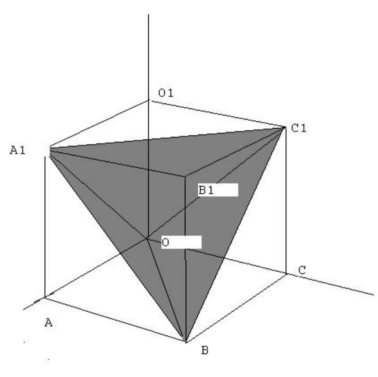
Зад. 5. *Дадена е отсечка с дължина $K$. По случаен начин се избират две други отсечки с дължина по-малка от $K$. Каква е вероятността от трите отсечки да може да се построи триъгълник.*

Решение:

Нека да разгледаме квадрат със страна $K$ разположен в първи квадрант на координатната система $Oxy$, както е показано на чертежа. Нека дължината на едната отсечка е $x, 0 \leq x \leq K$, а на другата $y, 0 \leq y \leq K$. Така на всеки избор на двете отсечки отговаря точка от квадрата. Всички избори считаме равновъзможни. За да може да се образува триъгълник от отсечките с дължини $x$, $y$ и $K$, трябва да са удовлетворени неравенствата на триъгълника: $x + y > K$, $x + K > y$, $y + K > x$. Последните две неравенства ще са винаги изпълнени ако $x > 0$ и $y > 0$. Първото неравенство ще е удовлетворено от точките на триъгълника $ABC$ над правата $x+y = K$. Тогава вероятността да се образува триъгълник от отсечките $x$, $y$ и $K$е $S(ABC)/S(OABC) = 1/2$.



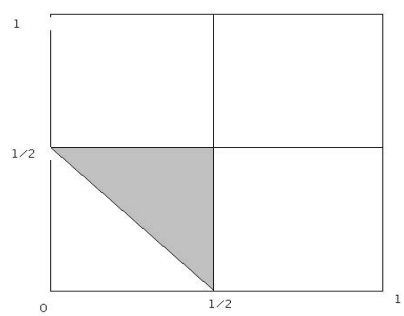
Зад. 6. *Каква е вероятността от три избрани по случаен начин отсечки с дължина по- малка от K да може да се построи триъгълник.*
Решение:
Нека разгледаме куб $OABCO_1A_1B_1C_1$ с ръб $K$ разположен в първи октант на тримерна ортогонална координатна система, и нека дължините на трите отсечки, които избираме са $x, 0 < x \leq K$, $y, 0 < y \leq K$, $z, 0 < z \leq K$. Тогава всеки избор на три отсечки отговаря на точка от куба с координати $(x, y, z)$. За да се образува триъгълник, трябва да са в сила неравенствата $z < x+y, x < y+z, y < x+z$. Ако построим равнините $OA_1C_1 : z = x + y$, $OBC_1 : y = x + z$, $OBA_1 : x = y + z$, те отрязват по една пирамида от куба и остава тяло съставено от две пирамиди $OBC_1A_1$ и $B_1BA_1C_1$. За всяка точка от това тяло са в сила и трите неравенства. Следователно вероятността за образуване на триъгълник е равна на обема на тялото, който е $\frac{1}{3}S_{A_1BC_1} \times OB_1$ разделен с обема на целия куб $K^3$. Страната на триъгълника $A_1BC_1$ е $K\sqrt{2}$, височината му е $K\sqrt{2}\sqrt{3}/2 = K\sqrt{6}/2$. Тогава лицето му е $S_{A_1BC_1} = K\sqrt{2} \times K\sqrt{6}/4 = K^2\sqrt{3}/2$. Диагоналът $OB_1 = K\sqrt{3}$. Така обемът на тялото е $\frac{1}{3}S_{A_1BC_1} \times OB_1 = \frac{1}{3} \times K^2\sqrt{3}/2 \times K\sqrt{3} = K^3/2$ и вероятността е $1/2$.



Зад. 7. *Върху дадена отсечка по случаен начин попадат две точки. Каква е вероятността от трите получени отсечки да може да се построи триъгълник.*

Решение:

Нека отсечката е $OL$ с дължина $l$. Нека точките да са $M$ и $N$ такива, че $OM = x$, $MN = y$. За да се образува триъгълник от отсечките $OM = x$, $MN = y$ и $NL = l - x - y$ трябва да са изпълнени неравенствата. $0 < x < y + l - x - y$, $0 < y < x + l - x - y$, $x + y > 1 - x - y > 0$, които се преобразуват в следните неравенства $0 < x < l/2$, $0 < y < l/2$, $x+y > l/2$. Да разгледаме квадрат със страна $l$ разположен в началото на координатната система. Всеки избор на точки $M$ и $N$ отговаря на точка с координати $(x, y)$ от квадрата. Трите неравенства ще са изпълнени в триъгълника заграден от правите $x = l/2$, $y = l/2$, $x + y = l/2$. Вероятността, която търсим е равна на лицето на триъгълника разделено с лицето на квадрата $l^2$. Лицето на триъгълника е $l^2/8$. Следователно вероятността е $1/8$.

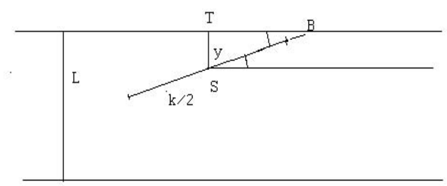



Зад. 8. *В равнина са прекарани успоредни линии на разстояние $L$. Върху равнината се хвърля игла с дължина $k(k < L)$. Каква е вероятността иглата да застъпва някоя от линиите.*

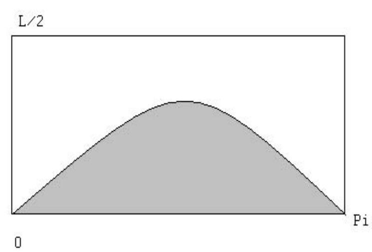
Решение:

Положението на иглата се определя от средата ѝ и от ъгъла, който сключва иглата с направлението на успоредните прави. Ясно е, че винаги ще има права, до която средата на иглата е на разстояние $0 \leq y \leq L/2$. Ако измерваме ъгълът $\theta$ спрямо положителната посока на абсцисната ос той ще приема стойноси в интервала $[0, \pi]$. Тогава както се вижда на чертежа иглата ще пресича, най-близката линия, ако хипотенузата на

$\triangle SBT$е по-малка от $k/2$. Тази хипотенуза изразена чрез $y$ и $\theta$ е равна на $y/\sin\theta$.




Така в правоъгълника $[0,\pi]\times[0,L/2]$ за $y$ и $\theta$ благоприятните точки са ония, за които $y/\sin\theta \le k/2$, т.е. под графиката на функцията $y = \frac{k}{2}\sin\theta$. Лицето на тази криволинейна фигура е $\int_0^\pi \frac{k}{2}\sin\theta d\theta = k$. Лицето на правоъгълника е $S = (L/2)\pi$. Търсената вероятност е $2k/\pi L$.




Зад. 9. *Каква е вероятността сумата на две случайно избрани, положителни числа, всяко от които е по-малко от едно, да бъде по-малка от едно, а произведението им по- малко от 2/9.*

Решение:

Поради това, че числата се избират случайно и независимо едно от друго, всеки избор отговаря на точка $(x,y)$ от единичния квадрат. Нека $A = \{$сумата на числата е по-малка от 1$\}$ съответства на точките от триъгълника под правата $x+y=1$. Събитието $B = \{$произведението на числата е по-малко от 2/9$\}$ съответства на точките под хиперболата $y =$

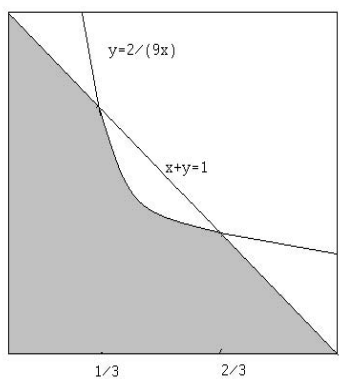
$2/(9x)$. Интересува ни вероятността на събитието $AB$, което съответства на точките от защрихованата област показана на чертежа. Пресмятаме интегралът

$$\int_{1/3}^{2/3}(1-x-\frac{2}{9x})dx = x-\frac{x^2}{2}-\frac{2}{9}\ln x|_{1/3}^{2/3} = \frac{1}{3}-\frac{1}{2}(\frac{4}{9}-\frac{1}{9})-\frac{2}{9}(\ln(2/3)-\ln(1/3))$$

$$= \frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{2}{9}\ln 2 = \frac{1}{6}-\frac{\ln 4}{9} = \frac{3-\ln 16}{18}.$$

Сега лицето на защрихованата фигура, и вероятността, която търсим, е

$$S = \frac{1}{2}-\frac{3-\ln 16}{18} = \frac{6+\ln 16}{18}.$$

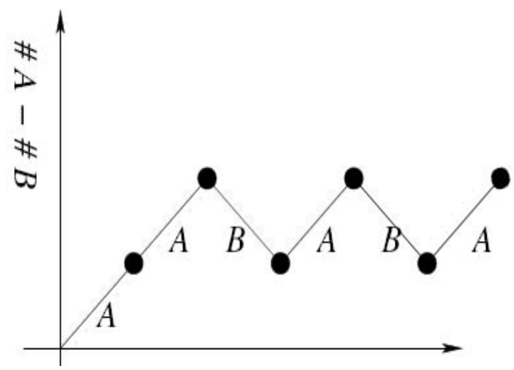



Зад. 10. *На избори се явяват двама кандидати. За първият са пуснати $n$ гласа, а за вторият $k(n > k)$. Каква е вероятността през цялото време докато се броят резултатите, броят бюлетини за първият кандидат да е по-голям от броят на бюлетините за втория.*

Решение:

Нека означим двамата кандидати с А и Б и нека гласовете за А са $n$ и за Б са $k$, $n > k$. Нека в началото $S(0) = 0$ и при всяко пускане на бюлетина $i = 1, 2, \ldots, n+k$ (бюлетините са общо $n+k$) $S(i) = S(i-1)+1$ ако е пусната бюлетина за А, и $S(i) = S(i-1)-1$ ако е пусната бюлетина за Б. Графиката на тази функция е начупена линия която излиза от $(0,0)$ и стига в $(n+k, n-k)$. За да определим вероятността във всеки момент А да е бил преди Б, трябва да намерим общият брой на всички такива начупени линии който е $\binom{n+k}{k}$, защото отговаря на това да се изберат $k$ момента за пускане ма бюлетините за Б, измежду моментите от 1 до $n+k$.

От друга страна благоприятните траектории са онези, които са изцяло над абцисната ос. На фигурата е показана една такава траектория при $n = 4$ и $k = 2$.




Ясно е че всяка такава траектория започва с гласуване за А. т.е. минава през точката $(1, 1)$. Ясно е също, че всички траектории, които излизат от $(1, 1)$ и стигат до $(n + k, n - k)$ са $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$. Тези траектории са два типа: такива които остават винаги над правата $y = 1$ и такива, които допират или пресичат абсцисната ос поне един път.

Нека на всяка траектория, която излиза от (1,1) и пресича или допира абцисната ос съпоставим траекторията която излиза от (1,-1) и до точката на първо допиране (или пресичане) на оста $Ox$ е симетрична на дадената, а след това съвпада с нея. Това съответствие е взаимно еднозначно. Следователно броят на траекториите, които излизат от точката (1,1) и стигат до $(n+k, n-k)$ и допират или пресичат поне един път абсцисната ос е равен на броя на всичките траектории, които излизат от (1,-1) и стигат в $(n+k, n-k)$. Последите от своя страна са колкото траеториите от (0,0) в $(n + k - 1, n - k + 1)$ (като транслираме наляво и нагоре с по една единица). Но този брой е $\binom{n+k-1}{n}$.

Така траекториите, които не допират или пресичат абцисната ос е

$$\binom{n+k-1}{n-1} - \binom{n+k-1}{n} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} - \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

$$= \frac{(n+k)!}{n!k!}\left(\frac{n}{n+k} - \frac{k}{n+k}\right) = \frac{n-k}{n+k}\binom{n+k}{n}.$$

Тогава търсената вероятност ще бъде $\frac{n-k}{n+k}$.