Упражнение 3. Формула за пълната вероятност. Формула на Бейс.

Дефиниция *Едно множество от събития*

$$H_1, H_2, ..., H_n$$

се нарича **пълна група от събития**, *ако са изпълнени следните две условия:*

1. $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n = \Omega$, *и*

2. $H_i \cap H_j = \emptyset$ *за всеки две* $i \neq j$.

Формула за пълната вероятност *Нека са дадени събитие* A *и пълна група събития* $H_1, H_2, ..., H_n$ *и* $P(H_i) > 0$ *за* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Тогава е в сила формулата:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$$

Формула на Бейс *Нека* H_1, H_2, . . . , H_n *образуват пълна група събития и* $P(H_i) > 0$ *за* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Тогава, ако* A *е събитие, за което* $P(A) > 0$, *то знаем че*

$$P(A|H_k)P(H_k) = P(H_k|A)P(A) = P(A \cap H_k), k = 1, \ldots, n$$

тогава

$$P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{P(A)} = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}$$

Задачи.

Зад. 1. *Дадени са две партиди изделия от 12 и 10 броя съответно във всяка има по едно дефектно. По случаен начин се избира изделие от първата партида и се прехвърля във втората, след което избираме случайно изделие от втората партида. Да се определи вероятността то да е дефектно.*

Решение:
Нека означим хипотезите
$H_1 = \{$прехвърлено е дефектно изделие$\}$,
$H_2 = \{$прехвърлено е здраво изделие$\}$.
Те образуват пълна група от събития. Нека означим събитието
$A = \{$"изтегленото от втората партида изделие е дефектно"$\}$.

Пресмятаме по формулата за класическата вероятност

$P(H_1) = 1/12 \quad P(H_2) = 11/12$.

Така при сбъдване на H_1 във втората урна ще има 2 дефектни и 9 здрави, а при сбъдване на H_2 ще имаме 1 дефектно и 10 здрави. Тогава $P(A|H_1) = 2/11$, а $P(A|H_2) = 1/11$.

По формулата за пълната вероятност имаме

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{1}{12}.\frac{2}{11} + \frac{11}{12}.\frac{1}{11} = \frac{13}{132}.$$

Зад. 2. *Дадени са n урни и във всяка от тях има по m бели и k черни топки. От първата урна се тегли една топка и се прехвърля във втората, след това от втората една топка се прехвърля в третата и т.н. Каква е вероятността от последната урна да бъде изтеглена бяла топка.*

Решение:
Нека означим хипотезите: $H_1 = \{$прехвърлена е бяла топка от 1 във 2 урна$\}$ и $H_2 = \{$прехвърлена е черна от 1 във 2$\}$.

Нека разгледаме събитията

$A = \{$от 2 е извадена бяла топка$\}$,

$B = \{$от 2 е извадена черна топка$\}$.

Пресмятаме $P(H_1) = \frac{m}{m+k}$ и $P(H_2) = \frac{k}{m+k}$,

$P(A|H_1) = \frac{m+1}{m+k+1}$ и $P(A|H_2) = \frac{m}{m+k+1}$,

$P(B|H_1) = \frac{k}{m+k+1}$ и $P(B|H_2) = \frac{k+1}{m+k+1}$.

По формулата за пълната вероятност имаме

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{m}{m+k} \times \frac{m+1}{m+k+1} + \frac{k}{m+k} \times \frac{m}{m+k+1}$$
$$= \frac{m(m+k+1)}{(m+k)(m+k+1)} = \frac{m}{m+k}.$$

$$P(B) = P(H_1)P(B|H_1) + P(H_2)P(B|H_2) = \frac{m}{m+k} \times \frac{k}{m+k+1} + \frac{k}{m+k} \times \frac{k+1}{m+k+1}$$
$$= \frac{k(m+k+1)}{(m+k)(m+k+1)} = \frac{k}{m+k}.$$

Нека сега да разгледаме следващата стъпка от опита прехвърляне от **втора** в **трета** урна и теглене от **трета**. Хипотезите са

$H_1 = \{$прехвърлена е бяла топка от 2-ра във 3-та урна$\}$ и

$H_2 = \{$прехвърлена е черна топка от 2-ра във 3-та урна$\}$.

Тогава $P(H_1) = P(A) = \frac{m}{m+k}$ и $P(H_2) = P(B) = \frac{k}{m+k}$. Които са същите като вероятностите на хипотезите в първата стъпка (от 1-ва към 2-ра).

Сега да означим

$A = \{$от 3 е извадена бяла топка$\}$,

$B = \{$от 3 е извадена черна топка$\}$.

Имаме отново

$P(A|H_1) = \frac{m+1}{m+k+1}$ и $P(A|H_2) = \frac{m}{m+k+1}$,

$P(B|H_1) = \frac{k}{m+k+1}$ и $P(B|H_2) = \frac{k+1}{m+k+1}$.

По формулата за пълната вероятност имаме

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{m}{m+k} \times \frac{m+1}{m+k+1} + \frac{k}{m+k} \times \frac{m}{m+k+1}$$
$$= \frac{m(m+k+1)}{(m+k)(m+k+1)} = \frac{m}{m+k}.$$

$$P(B) = P(H_1)P(B|H_1)+P(H_2)P(B|H_2) = \frac{m}{m+k}\times\frac{k}{m+k+1}+\frac{k}{m+k}\times\frac{k+1}{m+k+1}$$

$$= \frac{k(m+k+1)}{(m+k)(m+k+1)} = \frac{k}{m+k}.$$

и т.н. (*тук се вижда че всяка следваща стъпка е същата като предната.*)

В следващата задача разсъждението е същото, и се доказва, че ако билетите се теглят по случаен начин е все едно кой подред билет ще се изтегли.

Зад. 3. *Кутия съдържа n билета от които m са печеливши. По случаен начин n човека си теглят по един билет. Кога е най-изгодно да се изтегли билет.*

Решение:
Нека означим хипотезите:
$H_1 = \{$първият изтеглен билет печели$\}$,
$H_2 = \{$първият изтеглен билет не печели$\}$.
Нека разгледаме събитията
$A = \{$ вторият изтеглен печели$\}$,
$B = \{$вторият изтеглен не печели$\}$.
Пресмятаме $P(H_1) = \frac{m}{n}$, $P(H_2) = \frac{n-m}{n}$.
Освен това
$P(A|H_1) = \frac{m-1}{n-1}$ и $P(A|H_2) = \frac{m}{n-1}$ и
$P(B|H_1) = \frac{n-m}{n-1}$ и $P(B|H_2) = \frac{n-m-1}{n-1}$.
По формулата за пълната вероятност имаме

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{m}{n}\times\frac{m-1}{n-1}+\frac{n-m}{n}\times\frac{m}{n-1}$$

$$\frac{m^2-m+mn-m^2}{n(n-1)} = \frac{m}{n}.$$

$$P(B) = P(H_1)P(B|H_1) + P(H_2)P(B|H_2) = \frac{m}{n} \times \frac{n-m}{n-1} + \frac{n-m}{n} \times \frac{n-m-1}{n-1}$$

$$\frac{mn - m^2 + n^2 - 2nm + m^2 - n + m}{n(n-1)} = \frac{n-m}{n}.$$

Нека сега означим

$H_1 = \{$вторият изтеглен билет печели$\} = A$,

$H_2 = \{$вторият изтеглен билет не печели$\} = B$.

От тук $P(H_1) = \frac{m}{n}$, $P(H_2) = \frac{n-m}{n}$.

Да означим както преди

$A = \{$ третият изтеглен печели$\}$,

$B = \{$ третият изтеглен не печели$\}$.

Имаме отново

$P(A|H_1) = \frac{m-1}{n-1}$ и $P(A|H_2) = \frac{m}{n-1}$ и

$P(B|H_1) = \frac{n-m}{n-1}$ и $P(B|H_2) = \frac{n-m-1}{n-1}$.

По формулата за пълната вероятност имаме

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{m}{n}\frac{m-1}{n-1} + \frac{n-m}{n}\frac{m}{n-1}$$

$$\frac{m^2 - m + mn - m^2}{n(n-1)} = \frac{m}{n}.$$

$$P(B) = P(H_1)P(B|H_1) + P(H_2)P(B|H_2) = \frac{m}{n}\frac{n-m}{n-1} + \frac{n-m}{n}\frac{n-m-1}{n-1}$$

$$\frac{mn - m^2 + n^2 - 2nm + m^2 - n + m}{n(n-1)} = \frac{n-m}{n}.$$

Така изводът е, че е еднакво вероятно да се спечели, независимо от това кой подред е изтегления билет.

Зад. 4. *В кутия има 15 топки за тенис, от които 9 са нови. За първата игра по случаен начин се избират три топки, които след играта се връщат обратно в кутията. За втората игра също се избират три топки, каква е вероятността те да са нови.*

Решение:
В началото има 9 нови и 6 стари топки. Нека да означим хипотезите:
$H_i = \{$ При първо теглене са взети i нови топки$\}$
за $i = 0, 1, 2, 3$.

Те образуват пълна група събития и вероятностите им, пресметнати по формулата за класическата вероятност, са
$P(H_0) = \binom{9}{0}\binom{6}{3}/\binom{15}{3} = \frac{20}{455}$,
$P(H_1) = \binom{9}{1}\binom{6}{2}/\binom{15}{3} = \frac{135}{455}$
$P(H_2) = \binom{9}{2}\binom{6}{1}/\binom{15}{3} = \frac{216}{455}$,
$P(H_3) = \binom{9}{3}\binom{6}{0}/\binom{15}{3} = \frac{84}{455}$.
Нека означим събитието $A = \{$Втория път са взети само нови топки$\}$.
Имаме
$P(A|H_0) = \binom{9}{3}\binom{6}{0}/\binom{15}{3} = \frac{84}{455}$.
$P(A|H_1) = \binom{8}{3}\binom{7}{0}/\binom{15}{3} = \frac{56}{455}$.
$P(A|H_2) = \binom{7}{3}\binom{8}{0}/\binom{15}{3} = \frac{35}{455}$.
$P(A|H_3) = \binom{6}{3}\binom{9}{0}/\binom{15}{3} = \frac{20}{455}$.
По формулата за пълната вероятност намираме:

$$P(A) = P(H_0)P(A|H_0) + P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3)$$

$$= \frac{20}{455}\frac{84}{455} + \frac{135}{455}\frac{56}{455} + \frac{216}{455}\frac{35}{455} + \frac{84}{455}\frac{20}{455}$$

$$= \frac{18480}{207025}.$$

Зад. 5. *Дадени са 10 урни, в девет от тях има по две бели и две черни топки, а в десетата има пет бели и една черна. От случайно избрана урна се тегли топка, която се оказва бяла. Каква е вероятността тази топка да е изтеглена от десетата урна.*

Решение:
Нека да означим с H_1 събитието, че топката е взета от някоя от първите 9 урни и H_2 събитието, че е взета от 10-тата урна. Тогава $P(H_1) = 9/10$, $P(H_2) = 1/10$. Нека A е събитието, че изтеглената топка е бяла. Тогава $P(A|H_1) = 2/4 = 1/2$, $P(A|H_2) = 5/6$. По формулата за пълната вероятност имаме

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2) = \frac{9}{10}\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\frac{5}{6} = \frac{9}{20}+\frac{5}{60} = \frac{32}{60} = \frac{8}{15}.$$

По формулата на Бейс имаме

$$P(H_2|A) = P(A|H_2).P(H_2)/P(A) = \frac{1}{12}/\frac{8}{15} = \frac{15}{8.12} = \frac{5}{32}.$$

Зад. 6. *Дадени са три жетона. Първият има две бели страни, вторият две черни, а третият една бяла и една черна страна. По случаен начин се избира жетон и се хвърля върху маса. Ако горната страна на жетона е бяла, каква е вероятността другата му страна която не се вижда също да е бяла.*

Решение:
Нека да означим хипотезите:
- $H_1 = \{$хвърлен е жетона черно-черно$\}$,
- $H_2 = \{$хвърлен е жетона бяло-бяло$\}$,
- $H_3 = \{$хвърлен е жетона черно-бяло$\}$.

Нека означим събитието $A = \{$паднало се е бяло$\}$. Търсим $P(H_2|A)$.

Събитията H_i образуват пълна група. $P(H_i) = 1/3$, защото се избира жетон по случаен начин. После $P(A|H_1) = 0, P(A|H_2) = 1, P(A|H_3) = 1/2$.

По формулата за пълната вероятност имаме

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3)$$

$$= (1/3).0 + (1/3).1 + (1/3).(1/2) = 1/2.$$

По формулата на Бейс имаме

$$P(H_2|A) = P(A|H_2)P(H_2)/P(A) = (1/3)/(1/2) = 2/3.$$

Зад. 7. *Изпит се провежда по следния начин: във всеки билет има написан един въпрос с четири отговора, от които само един е верен. Студент тегли по случаен начин един билет. Предполагаме, че той знае 90% от въпросите, ако не знае верния отговор - налучква. Каква е вероятността студент, който е отговорил правилно, да не е знаел верният отговор а да е налучкал.*

Решение:

Нека да означим хипотезите:

$H_1 = \{$студентът е изтеглил билет с въпрос, на който знае отговора$\}$,

$H_2 = \{$студентът е изтеглил билет с въпрос, на който не знае отговора$\}$.

Имаме $P(H_1) = 9/10$, $P(H_2) = 1/10$.

Нека A е събитието $\{$студентът е отговорил правилно$\}$.

Тогава $P(A|H_1) = 1$, $P(A|H_2) = 1/4$.

По формулата за пълната вероятност имаме

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = (9/10).1 + (1/10).(1/4) = 37/40.$$

По формулата на Бейс имаме

$$P(H_2|A) = P(A|H_2)P(H_2)/P(A) = (1/10).(1/4)/(37/40) = 1/37.$$

Зад. 8. *Трима ловци едновременно стрелят по заек. Заекът е убит от един куршум. Каква е вероятността той да е убит от първия, втория, или третия ловец, ако те улучват с вероятност съответно 0.2, 0.4, 0.6.*

Решение:
Нека $A_i, i = 1, 2, 3$ е събитието, че $i-$тия ловец е улучил. В резултат на експеримента (тримата стреляли) имаме следните елементарни изходи:

$\omega_0 = A_1A_2A_3$ с вероятност $p_0 = 0.2 \times 0.4 \times 0.6 = 0.048$

$\omega_1 = \bar{A}_1A_2A_3$ с вероятност $p_1 = 0.8 \times 0.4 \times 0.6 = 0.192$

$\omega_2 = A_1\bar{A}_2A_3$ с вероятност $p_2 = 0.2 \times 0.6 \times 0.6 = 0.072$

$\omega_3 = A_1A_2\bar{A}_3$ с вероятност $p_3 = 0.2 \times 0.4 \times 0.4 = 0.032$

$\omega_4 = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ с вероятност $p_4 = 0.2 \times 0.6 \times 0.4 = 0.048$

$\omega_5 = \bar{A}_1A_2\bar{A}_3$ с вероятност $p_5 = 0.8 \times 0.4 \times 0.4 = 0.128$

$\omega_6 = \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ с вероятност $p_6 = 0.8 \times 0.6 \times 0.6 = 0.288$

$\omega_7 = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ с вероятност $p_7 = 0.8 \times 0.6 \times 0.4 = 0.192$

Събитието B, че заекът е убит с един изстрел е $B = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ и $P(B) = 0.048 + 0.128 + 0.288 = 0.444$.

Нека сега пресметнем

$P(A_1|B) = P(A_1B)/P(B) = P(\omega_4)/P(B) = 0.048/0.444 = 0.108$

$P(A_2|B) = P(A_2B)/P(B) = P(\omega_5)/P(B) = 0.128/0.444 = 0.288$

$P(A_3|B) = P(A_3B)/P(B) = P(\omega_6)/P(B) = 0.288/0.444 = 0.648$

Зад. 9. *Дадени са две урни. В първата има 2 бели и 3 червени топки, а във втората 1 бяла и 3 червени. От първата урна по случаен начин се вадят две топки и се прехвърлят във втората. След това две топки от втората се прехвърлят във първата. Каква е вероятността състава на урните да не се промени.*

Решение:
Нека A_1 е събитието, че от първата във втората урна са прехвърлени 2 бели топки, A_2 е събитието, че са прехвърлени бяла и червена, и A_3 е събитието, че са прехвърлени две червени топки. Нека B_1 е събитието, че са прехвърлени от втората в първата урна 2 бели, B_2 е събитието, че са прехвърлени бяла и червена и B_3 е събитието, че са прехвърлени две червени.

Елементарните изходи при проведения опит са

$$\omega_1 = A_1B_1 \text{ с } P(\omega_1) = \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}}\frac{\binom{3}{2}\binom{3}{0}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{10}\frac{1}{5} = \frac{2}{100}.$$

$$\omega_2 = A_1B_2 \text{ с } P(\omega_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}}\frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{10}\frac{6}{10} = \frac{6}{100}.$$

$$\omega_3 = A_1B_3 \text{ с } P(\omega_3) = \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}}\frac{\binom{3}{0}\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{10}\frac{1}{5} = \frac{2}{100}.$$

$$\omega_4 = A_2B_1 \text{ с } P(\omega_4) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}\frac{\binom{2}{2}\binom{4}{0}}{\binom{6}{2}} = \frac{6}{10}\frac{1}{5} = \frac{12}{100}.$$

$$\omega_5 = A_2B_2 \text{ с } P(\omega_5) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{6}{10}\frac{8}{15} = \frac{32}{100}.$$

$$\omega_6 = A_2B_3 \text{ с } P(\omega_6) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}\frac{\binom{2}{0}\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{6}{10}\frac{4}{15} = \frac{16}{100}.$$

$$\omega_7 = A_3B_1 \text{ с } P(\omega_7) = \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}\frac{\binom{1}{2}\binom{5}{0}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{10}\frac{0}{5} = 0.$$

$$\omega_8 = A_3B_2 \text{ с } P(\omega_8) = \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}\frac{\binom{1}{1}\binom{5}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{10}\frac{5}{15} = \frac{10}{100}.$$

$$\omega_9 = A_3B_3 \text{ с } P(\omega_9) = \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}\frac{\binom{1}{0}\binom{5}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{10}\frac{10}{15} = \frac{20}{100}.$$

Събитието {урните да не си променят състава} е $A = \{\omega_1, \omega_5, \omega_9\}$ и $P(A) = \frac{54}{100} = 0.54$

Зад. 10. *На изпит се явяват 100 студента, 40 момчета и 60 момичета. Момичетата взимат изпита с вероятност 0.3, а момчетата с вероятност 0.2. След изпита се избират три резултата, два от тях се оказали успешни, а един неуспешен. Каква е вероятността и трите резултата да са на момчета.*

Решение:
Нека да означим хипотезите:

$H_{03} = \{$ Избраните резултати са на 3- момичета$\}$,

$H_{12} = \{$ Избраните резултати са на 1 -момче и на 2- момичета$\}$,

$H_{21} = \{$ Избраните резултати са на 2 -момчета и на 1- момиче$\}$,

$H_{30} = \{$ Избраните резултати са на 3 -момчета$\}$.

Те образуват пълна група и при това

$P(H_{03}) = \binom{60}{3} / \binom{100}{3} = 0.21,$

$P(H_{12}) = \binom{40}{1}\binom{60}{2} / \binom{100}{3} = 0.44,$

$P(H_{21}) = \binom{40}{2}\binom{60}{1} / \binom{100}{3} = 0.29,$

$P(H_{30}) = \binom{40}{3} / \binom{100}{3} = 0.06.$

По-нататък, да означим A събитието $\{$два успешни и един неуспешен$\}$.
Имаме

$P(A|H_{03}) = \binom{3}{2}(0.3)^2(0.7) = 0.189$

$P(A|H_{12}) = (0.2)\binom{2}{1}(0.3)(0.7) + (0.8)(0.3)^2 = 0.156$

$P(A|H_{21}) = (0.3)\binom{2}{1}(0.2)(0.8) + (0.2)^2(0.7) = 0.124$

$P(A|H_{30}) = \binom{3}{2}(0.2)^2(0.8) = 0.096$

По формулата за пълната вероятност имаме

$$P(A) = P(H_{03})P(A|H_{03}) + P(H_{12})P(A|H_{12}) + P(H_{21})P(A|H_{21}) + P(H_{30})P(A|H_{30})$$

$$= 0.21 \times 0.189 + 0.44 \times 0.156 + 0.29 \times 0.124 + 0.06 \times 0.096 = 0.15.$$

Зад. 11. *В урна има n топки, всяка от които може да бъде бяла или черна. Всички предположения за първоначалния брой на белите топки са равновероятни. От урната по случаен начин с връщане се вадят две топки, първата от които се оказва бяла. Каква е вероятността втората извадена топка също да бъде бяла.*

Решение:
Нека да означим с $H_i, i = 0, 1, 2, \ldots, n$ събитието $\{$в урната има i бели топки$\}$. По условието на задачата имаме $P(H_i) = \frac{1}{n+1}$.

Нека A_1 е събитието, че е изтеглена бяла топка при първото теглене.

$P(A_1|H_i) = \frac{i}{n}$. Тогава по формулата за пълната вероятност имаме

$$P(A_1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} \times \frac{1}{n+1} = 1/2.$$

Ако A_2 е събитието при второто теглене е изтеглена бяла, то по същия начин, опитът е с връщане, и изходът от първото и второто теглене са независими, имаме $P(A_2) = \frac{1}{2}$ и от тук $P(A_1 A_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.