Упражнение 2. Условна вероятност.

Зад. 1. *При игра на тото 6 от 49 да се пресметнат вероятностите за печалба на шестица, петица, четворка и тройка.*

Решение:
а) Ако ние сме задраскали 6 числа, за да се падне 6-ца трябва да бъдат изтеглени точно те, така че броя на благоприятните изходи е $\binom{6}{6} = 1$, а броят на възможните изходи е $\binom{49}{6}$. Вероятността е $\binom{6}{6}/\binom{49}{6} = 1/13983816$.

б) За да се падне 5-ца трябва да бъдат изтеглени 5 от нашите 6 числа и 1 от останалите 43. Така броят на благоприятните изходи е $\binom{6}{5}.\binom{43}{1} = 6.43 = 258$. Вероятността е

$$\binom{6}{5}.\binom{43}{1}/\binom{49}{6} = 258/13983816.$$

г) За да се падне 4-ка трябва да бъдат изтеглени 4 от нашите 6 числа и 2 от останалите 43. Така броят на благоприятните изходи е $\binom{6}{4}.\binom{43}{2} = 15.903 = 13545$. Вероятността е

$$\binom{6}{4}.\binom{43}{2}/\binom{49}{6} = 13545/13983816.$$

д) За да се падне 3-ка трябва да бъдат изтеглени 3 от нашите 6 числа и 3 от останалите 43. Така броят на благоприятните изходи е $\binom{6}{3}.\binom{43}{3} = 20.12341 = 246820$. Вероятността е

$$\binom{6}{3}.\binom{43}{3}/\binom{49}{6} = 246820/13983816.$$

Зад. 2. *Във влак с три вагона по случаен начин се качват седем пътника. Каква е вероятността в първият вагон да се качат четирима.*

Решение:
Трябва да се разпределят 7 неразличими частици в 3 кутии. Ясно е, че във всяка кутия може да има повече от една частица. Това може да стане по $\binom{9}{2} = 36$ начина, което е броят на всички възможни разпределения. Ако в първата кутия има 4 частици, броя на разпределенията на останалите 3 частици

в 2 кутии е $\binom{4}{1} = 4$, което е броя на благоприятните. Така вероятността е $\binom{4}{1} / \binom{9}{2} = 4/36 = 1/9$

Зад. 3. *Група от n човека се нарежда в редица по случаен начин. Каква е вероятността между две фиксирани лица да има точно r човека.*

Решение:
Общият брой подредби на n човека в редица е $n!$. Предполага се че $n \geq r + 2$. Двете фиксирани лица могат да заемат следните позиции 1 и $r + 2$, 2 и $r + 3$ и т.н. до k и $r + k + 2$ за което $r + k + 2 = n$, т.е. $k = n - r - 2$. При всяка от тези позиции двамата могат да се подредят един спрямо друг по 2! начина, а останалите $n - 2$ма по $(n - 2)!$ начина. Така броят на благоприятните подредби е $(n - r - 2).2!.(n - 2)!$ и вероятността е $[(n - r - 2).2!.(n - 2)!]/n! = 2(n - r - 2)/(n(n - 1))$.

Зад. 4. *Група от n човека се нарежда около кръгла маса. Каква е вероятността две фиксирани лица да се окажат едно до друго.*

Решение:
Нека срежем масата между две от местата и я изправим. Общият брой наредби е $n!$ Имаме два начина да се сбъдне исканото събитие: 1) двамата са един до друг в редицата. Броят на тези наредби е $2!(n - 1)!$, защото на двамата можем да гледаме като на едно цяло и тогава те могат да се пермутират с останалите $n - 2$ ма по $(n - 1)!$начина (и по 2! начина между тях двамата.)

2) Двамата души са в двата края на срязаната маса (2! начина) и другите $n - 2$ се пермутират на останалитев места по $(n - 2)!$ начина.

Така вероятността е $[2(n - 1)! + 2(n - 2)!]/n! = 2/(n - 1)$.

Зад 5. *От урна, която съдържа топки с номера $1, 2, \ldots, n$ последователно k пъти се вади една топка. Да се пресметне вероятността номерата на извадените топки, записани по реда на изваждането, да образуват растяща редица ако:*
а) извадката е без връщане;
б) извадката е с връщане.

Решение:

а) Нека да имаме ненаредена извадка без връщане на k от n елемента. Броят на тези подмножесва е $\binom{n}{k}$. На всяко такова подмножество съответства една растяща редица и $k!$ подредени редици. Така броят на благоприятните изходи е

$$M = \binom{n}{k} \times 1,$$

докато броят на всички подредени редици е

$$N = \binom{n}{k} \times k! = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Така вероятността

$$P(A) = M/N = \frac{\binom{n}{k}}{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)} = 1/k!$$

б) Ако наредената извадката е с връщане, то общият брой редици е $N = n^k$ (по n възможности имаме за всяка от позициите, които са k на брой.) За да се получи растяща редица трябва всички изтеглени числа да са различни. Броят на подмножествата с различни елементи е $\binom{n}{k}$, и както видяхме в предния случай на всяко такова подмножество отговаря една растяща редица. Така благоприятните са $M = \binom{n}{k} \times 1$ и вероятността е

$$P(A) = M/N = \binom{n}{k}/n^k.$$

Условна вероятност. Събиране на вероятности. Независими и несъвместими събития.

Пример Нека да хвърлим два пъти правилен зар. Пространството от елементарните събития е

$$\begin{array}{c}(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6)\\(2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6)\\(3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6)\\(4,1)(4,2)(4,3)(4,4)(4,5)(4,6)\\(5,1)(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)(5,6)\\(6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6)\end{array}$$

Всички елементарни изходи са еднакво възможни. Да дефинираме събитията

$A = \{$ числото от първото хвърляне е по-малко или равно от това при второто $\}$

$B = \{$ сумата от двете числа е равна на 4 $\} = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

По формулата за класическата вероятност можем да пресметнем, че вероятността на B е $3/36$.

Да предположим, че на нас ни е казано, че числото, което се е паднало при първото хвърляне е по-малко или равно от това, което се е паднало при второто. С други думи на нас ни е казано, че се е сбъднало събитието A. Как да пресметнем сега вероятността на събитието B, като имаме тази допълнителна информация? Естествено е, че сега ние ще преброим като възможни само изходите, които съставляват събитието A

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
		(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
			(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
				(5, 5)	(5, 6)
					(6, 6),

а благоприятните за B ще са (1,3) и (2,2). Не е трудно да се види, че $\{(1,3),(2,2)\} = A\bigcap B$.

Сега вероятността на B, като знаем, че се е сбъднало A е равна на $2/21$.

Дефиниция *Вероятността на събитието B, ако е известно, че се е сбъднало събитието A, се означава с $P(B|A)$, и се определя по формулата*

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)},$$

когато $P(A) > 0$.

Формулата може да се запише в следния еквивалентен вид, който се обобщава за повече от две събития

$$P(B\cap A) = P(B|A)P(A).$$

Тази вероятност се нарича условна вероятност за сбъдване на събитието B при условие, че се е сбъднало събитието A. При $P(A) = 0$ условната вероятност $P(B|A)$ не е определена.

За примера отгоре имаме
$P(B|A) = 2/21$, $P(A\bigcap B) = 2/36$, $P(A) = 21/36$. Така
$P(B|A)P(A) = (2/21) * (21/36) = P(A\bigcap B) = 2/36$.

Обобщение *Условната вероятност се обобщава за повече от две събития така:*

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1|A_2A_3\ldots A_n)P(A_2|A_3\ldots A_n)\ldots P(A_{n-1}|A_n)P(A_n)$$

Дефиниция *Две събития се наричат независими, ако $P(A\bigcap B) = P(A).P(B)$*

Дефиниция *Събитията $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се наричат независими (или независими в съвкупност), ако за всеки набор от числа $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $k = 2, 3, ..., n$ е изпълнено $P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k})$.*

От тази дефиниция веднага се вижда, че ако A и B са независими то за условната вероятност

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B),$$

когато $P(A) > 0$. Това е и очакваната ситуация. След като сбъдването на B не зависи от сбъдването на A е логично да имаме, че $P(B|A) = P(B)$.
Дефиниция *Събитията A и B се наричат несъвместими, когато не могат да се сбъднат едновременно, т.е. $A\bigcap B = \emptyset$.*
При хвърлянето на два зара събитията
$A = \{$**сумата от точките е четно число**$\}$ **и**
$B = \{$**сумата от точките е нечетно число**$\}$ **са несъвместими събития.**

Събиране на вероятности Ако събитията A и B са несъвместими, то $P(A\bigcup B) = P(A) + P(B)$. Това е вярно и за повече от две събития, всеки две от които са несъвместими.

Формула за включване и изключване *За кои да са две събития A и B е в сила формулата*

$$P(A\bigcup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

която при несъвместими събития $AB = \emptyset$ става $P(A\bigcup B) = P(A) + P(B)$.

Формула за включване и изключване за повече от 2 събития *Нека A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ са събития. В сила е следната формула*

$$P(A_1\bigcup A_2\bigcup\ldots\bigcup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} P(A_iA_j) +$$

$$\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} P(A_iA_jA_k) + \ldots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n).$$

Зад. 6. *Вероятността стрелец да улучи мишена е $2/3$, ако улучи той получава право на втори изстрел. Вероятността за улучване на двете мишени е $1/2$. Каква е вероятността за улучване на втората мишена, ако стрелеца е получил право да стреля втори път.*

Решение:
Да означим с $A = \{$Улучил първата мишена$\}$ и $B = \{$Улучил втората мишена$\}$. Имаме $P(AB) = 1/2$, $P(A) = 2/3$. Търсим $P(B|A) = P(AB)/P(A) = (1/2) : (2/3) = 3/4$.

Зад. 7. *Да се определи вероятността, случайно избрано цяло положително число, да не се дели: а) нито на две, нито на три; б) на две или на три.*

Решение:
Нека A е събитието, че изтегленото число се дели на 2, а B е събитието, че изтегленото число се дели на 3. Тогава AB е събитието че изтегленото число се дели и на 2 и на 3, т.е. се дели на 6. Имаме $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$, $P(AB) = 1/6$. По формулата за включване и изключване $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, намираме $P(A \bigcup B) = 1/2 + 1/3 - 1/6 = 2/3$ е вероятността избраното число да се дели поне на едно от 2 или 3. Тогава $P(\overline{A \bigcup B}) = 1/3$ е вероятността числото да не се дели нито на 2 нито на 3. По-нататък трябва да намерим $P(\bar{A} \bigcup \bar{B}) = P(\overline{A \bigcap B}) = 1 - P(AB) = 1 - 1/6 = 5/6$.

Зад. 8. *В урна има n номерирани топки. Последователно се изважда по една топка, номера и се записва, след което тя се връща обратно в урната. Правят се k изваждания. Да се определи вероятността да няма повтарящи се топки.*

Решение:
Броят на възможните редици е n^k, от тях без повтарящи се елементи са $n(n-1)\dots(n-k+1)$ и вероятността е $n(n-1)\dots(n-k+1)/n^k$.

За тази задача не виждам по-добро решение, както и за следващата и ако искаш ги прескочи или ги дай горе при другите задачи за подредби.

Зад. 9. *По случаен начин около маса сядат n жени и n мъже. Каква е вероятността две лица от еднакъв пол да не са едно до друго.*

Решение:
Нека считаме, че местата са номерирани с номера от 1 до $2n$. Общо $2n$-те човека могат да заемат $2n$ места по $(2n)!$ начина. За да няма седнали мъж и жена един до друг нека считаме, че мъжете са седнали на местата с четни номера което може да стане по $n!$ начина и при всеки от тези начини жените могат да заемат

местата с нечетни номера по $n!$ начина. Така получаваме $(n!)^2$ подредби. Като преброим, че може обратно жените да са на местата с четни номера, а мъжете на тези с нечетни получаваме, че общият брой подредби е $2(n!)^2$. Вероятността е $2(n!)^2/(2n)!$.

Зад. 10. *Двама играчи последователно хвърлят монета, играта печели този, който първи хвърли герб. Да се намери вероятността за спечелване на играта за всеки от двамата играчи.*

Решение:
Играта продължава докато единият спечели. Тогава в този експеримент елементарните изходи са безброй много:

$\omega_1 =$Г

$\omega_2 =$ЛГ

$\omega_3 =$ЛЛГ

$\omega_4 =$ЛЛЛГ

....

$\omega_n = \underbrace{\text{Л...Л}}$Г

....

Поради това, че монетата е правилна, при всяко хвърляне вероятността да се падне Л или Г са равни по на 1/2. Отделните хвърляния са независими и тогава намираме

$P(\omega_1) = \frac{1}{2}$

$P(\omega_2) = \frac{1}{2^2}$

$P(\omega_3) = \frac{1}{2^3}$

$P(\omega_4) = \frac{1}{2^4}$

....

$P(\omega_n) = \frac{1}{2^n}$

....

Събитието $A = \{$Първият печели$\} = \{\omega_1, \omega_3, \ldots, \omega_{2k-1}, \ldots\}$. Така $P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2k-1}} + \ldots = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-1/4} = \frac{2}{3}$.

Събитието $B = \{$Вторият печели$\} = \{\omega_2, \omega_4, \ldots, \omega_{2k}, \ldots\}$. Така $P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{2k}} + \ldots = \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{1-1/4} = \frac{1}{3}$.

Следващата задача е обобщение на предната, само заради не еднаквите вероятности, иначе се ползуват пак несъвместимост и независимост.

Зад. 11. *Двама играчи последователно стрелят по мишена. Първият улучва с вероятност* 0.2, *а вторият* - 0.3. *Играта завършва след първото улучване на мишената. Каква е вероятността първият стрелец да направи повече изстрели от втория.*

Решение:

Тук елементарните изходи са също безброй много. Да означим с A и B съответно, първият улучва и вторият улучва, при един отделен изстрел. Тогава $\bar{A}$ и $\bar{B}$ означават съответно, първият не уцелва и вторият не уцелва. Всички изходи са:

$\omega_1 = A$

$\omega_2 = \bar{A}B$

$\omega_3 = \bar{A}\bar{B}A = \bar{A}^1\bar{B}^1A$

$\omega_4 = \bar{A}\bar{B}\bar{A}B = \bar{A}^2\bar{B}^1B$

$\omega_5 = \bar{A}\bar{B}\bar{A}\bar{B}A = \bar{A}^2\bar{B}^2A$

$\omega_6 = \bar{A}\bar{B}\bar{A}\bar{B}\bar{A}B = \bar{A}^3\bar{B}^2B$

....

$\omega_{2n-1} = \bar{A}^{n-1}\bar{B}^{n-1}A$

$\omega_{2n} = \bar{A}^n\bar{B}^{n-1}B$

....

Вроятностите са $P(A) = 0.2, P(B) = 0.3, P(\bar{A}) = 0.8, P(\bar{B}) = 0.7$ Отделните хвърляния са независими и тогава намираме

$P(\omega_1) = 0.2$

$P(\omega_2) = 0.8 \times 0.3$

$P(\omega_3) = 0.8 \times 0.7 \times 0.2$

$P(\omega_4) = 0.8^2 \times 0.7 \times 0.3$

$P(\omega_5) = 0.8^2 \times 0.7^2 \times 0.2$

$P(\omega_6) = 0.8^3 \times 0.7^2 \times 0.3$

....

$P(\omega_{2n-1}) = 0.8^{n-1} \times 0.7^{n-1} \times 0.2$

$P(\omega_{2n}) = 0.8^n \times 0.7^{n-1} \times 0.3$

....

Събитието $C = \{$Първият улучва$\} = \{\omega_1, \omega_3, \dots, \omega_{2k-1}, \dots\}$.

Така $P(C) = 0.2 + 0.2 \times (0.8 \times 0.7) + 0.2 \times (0.8 \times 0.7)^2 + \dots + 0.2 \times (0.8 \times 0.7)^n + \dots$
$= 0.2\frac{1}{1-(0.8\times 0.7)} = \frac{0.2}{0.44} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}$.

Събитието $D = \{$Вторият улучва $\} = \{\omega_2, \omega_4, \dots, \omega_{2k}, \dots\}$.

Така $P(D) = 0.8 \times 0.3 + (0.8 \times 0.3) \times (0.8 \times 0.7) + (0.8 \times 0.3) \times (0.8 \times 0.7)^2 + \dots + (0.8 \times 0.3) \times (0.8 \times 0.7)^n + \dots$
$= 0.8 \times 0.3\frac{1}{1-(0.8\times 0.7)} = \frac{0.24}{0.44} = \frac{6}{11}$.

Зад. 12. *А получава информация и я предава на Б, той я предава на В, той пък на Г. Г съобщава получената информация. Известно е, че всеки от тях казва истина само в един от три случая. В останалите два казва точно обратната информация. Каква е вероятността първият А да не е излъгал, ако е известно, че последният Г е съобщил истината.*

Решение:
Считаме, че постъпилата при A информация е истина T и тя се предава до края по един от следните начини, които са елементарните изходи на опита.

вход		А→	Б→	В→	Г→	изход	P
T	$\omega_1 =$	T	T	T	T	T	$(1/3)^4$
T	$\omega_2 =$	F	T	T	T	F	$(2/3)(1/3)^3$
T	$\omega_3 =$	T	F	T	T	F	$(2/3)(1/3)^3$
T	$\omega_4 =$	T	T	F	T	F	$(2/3)(1/3)^3$
T	$\omega_5 =$	T	T	T	F	F	$(2/3)(1/3)^3$
T	$\omega_6 =$	T	T	F	F	T	$(2/3)^2(1/3)^2$
T	$\omega_7 =$	T	F	T	F	T	$(2/3)^2(1/3)^2$
T	$\omega_8 =$	F	T	T	F	T	$(2/3)^2(1/3)^2$
T	$\omega_9 =$	F	T	F	T	T	$(2/3)^2(1/3)^2$
T	$\omega_{10} =$	T	F	F	T	T	$(2/3)^2(1/3)^2$
T	$\omega_{11} =$	F	F	T	T	T	$(2/3)^2(1/3)^2$
T	$\omega_{12} =$	F	F	F	T	F	$(2/3)^3(1/3)$
T	$\omega_{13} =$	F	F	T	F	F	$(2/3)^3(1/3)$
T	$\omega_{14} =$	F	T	F	F	F	$(2/3)^3(1/3)$
T	$\omega_{15} =$	T	F	F	F	F	$(2/3)^3(1/3)$
T	$\omega_{16} =$	F	F	F	F	T	$(2/3)^4$

Нека A е събитието, че А е предал вярна информация. Интересуваме се от вероятността

$$P(A|D) = P(A \bigcap D)/P(D)$$

.

Събитието $D = \{\Gamma \text{ е съобщил вярната информация}\}$ е
$= \{\omega_1, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}, \omega_{11}\}$

Следователно $P(D) = (1/3)^4 + 6(2/3)^2(1/3)^2 + (2/3)^4 = \frac{1+24+16}{81} = \frac{41}{81}$.

От друга страна $A \bigcap D = \{\omega_1, \omega_6, \omega_7, \omega_{10}\}$.

Така $P(A \bigcap D) = (1/3)^4 + 2(2/3)^2(1/3)^2 + (2/3)^2(1/3)^2 = \frac{13}{81}$

Сега $P(A|D) = P(AD)/P(D) = \frac{13}{81}.\frac{81}{41} = \frac{13}{41}$.

Зад 13. *Секретарка написала n писма, сложила ги в пликове и ги запечатала. Забравила кое писмо в кой плик е, но въпреки това написала отгоре n различни адреса и изпратила писмата. Да се определи вероятността:*
а) всеки да получи своето писмо;
б) точно $n-1$ човека да получат своето писмо;
в) нито едно лице да не получи своето писмо.

Решение:
а) За да получи всеки своето писмо трябва адресите да са разположени по единственият правилен начин, при който всеки адрес отговаря на писмото, което е в плика. Броят на възможните располагания е $n!$. Така вероятността е $1/n!$.

б) Вероятността точно един да не получи своето писмо, а останалите $n-1$ да ги получат е равна на 0, защото ако на писмото за А е сложен адресът на Б, то и адресът на А не си е на мястото, така че стават поне 2 грешни.

в) Никой да не получи своето писмо. Нека $A_i, i=1,2,\ldots,n$ е събитието, че $i-$тия човек да получи писмото, което е за него. Тогава $P(A_i)=(n-1)!/n!$. Това важи за всеки от $\binom{n}{1}$ души.

Вероятността на събитието A_iA_j, че $i-$тия и $j-$тия ще получат техните писма е $(n-2)!/n!$ и това важи за всички $\binom{n}{2}$ двойки и т.н., вероятността всички да получат своите писма е $1/n!$.

Сега, като вземем в предвид, че вероятностите на всички отделни събития A_i са равни по между си, вероятностите на всички събития A_iA_j са равни по между си и т.н., по формулата за включване и изключване

Формула за включване и изключване за повече от 2 събития *Нека $A_i,\ i=1,2,\ldots,n$ са сбъбития. В сила е следната формула*

$$P(A_1\bigcup A_2\bigcup\ldots\bigcup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}P(A_iA_j)+$$
$$\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}P(A_iA_jA_k)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n).$$

намираме

$$P(A_1\bigcup A_2\bigcup\ldots\bigcup A_n)=\binom{n}{1}\frac{(n-1)!}{n!}-\binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}$$

вероятността поне един да получи писмото си. Вероятността на събитието никой да не получи своето писмо е

$$P(\overline{A_1\bigcup A_2\bigcup\ldots\bigcup A_n})=1-P(\overline{A_1\bigcup A_2\bigcup\ldots\bigcup A_n})$$
$$=1-\binom{n}{1}\frac{(n-1)!}{n!}-\binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$
$$=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}$$

Зад. 14. *Вероятността, че в резултат на четири независими опита събитието A ще настъпи поне веднъж е равна на една втора. Да се определи вероятността за настъпване на A при един опит, ако вероятността за всеки опит е една и съща.*

Решение:
Щом вероятността да настъпи поне един път A от 4 опита е $1/2$, то вероятността да не настъпи нито един път е също $1/2$. Така поради независимостта ще имаме $P(\bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A}) = 1/2 = P(\bar{A})^4$. Следователно вероятността да не се случи A в отделен опит е $P(\bar{A}) = 1/\sqrt[4]{2}$. Вероятността $P(A) = 1 - 1/\sqrt[4]{2}$.

Зад. 15.*Известни са вероятностите на събитията A, B и B. Да се определят $P(AB)$ и $P(B|A)$.*

Решение:
Знаем, че $AB + A\bar{B} = A$. Тогава намираме $P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)$. Следователно $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$. Също така имаме, $AB + \bar{A}B = B$. От тука $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$.

Можем да видим, че $A \bigcup B = A\bar{B} + AB + \bar{A}B$. Следователно $P(A \bigcup B) = P(A\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A}B) = P(A) - P(AB) + P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Така доказахме, че

$$P(A \bigcup B) = P(A) - P(AB) + P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Сега

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \bigcap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\overline{A \bigcup B})}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{1 - P(A \bigcup B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - P(A) - P(B) + P(AB)}{1 - P(A)}.$$