Упражнение 12. Доверителни интервали. Проверка на хипотези.

Доверителни интервали

Доверителните интервали са интервални оценки за неизвестен параметър на разглежданата популация. Вместо да се оценява параметъра само с една стойност както е при точковите оценки се пресмята интервал който е много вероятно да включва в себе си истинската неизвестна стойност на параметъра. До колко сме сигурни в твърдението, че интервалът включва истинската фиксирана стойност на параметъра се определя от т.нар. ниво на доверие $\gamma = 1 - \alpha$. Естествено, че колкото по-голямо ниво на доверие изберем, толкова по-широк, съответно по-неточен доверителен интервал ще получим.
Нека да предположим, че имаме извадка $X_1, \dots, X_n$ над сл.в. $X \sim F(x|\theta)$. Доверителен интервал за парамерътра θ с ниво на доверие $1 - \alpha$ ще наричаме случаен интевал $(l(X_1, \dots, X_n), u(X_1, \dots, X_n))$, зависещ от извадката, за който

$$P_\theta(l < \theta < u) = 1 - \alpha.$$

Зад. 1. *Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими наблюдения над. сл.в. $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, където σ^2 е известно. Да се построи доверителен интервал за θ с ниво на доверие $\gamma = 1 - \alpha = 0.95$.*

Решение:
От свойствата на нормалното разпределение имаме, че

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta \right) \sim N(0,1)$$

Сега е възможно да намерим число z, такова че сл.в. $\hat{\theta}$ да е в интервала $(-z, z)$ с вероятност 0.95, т.е. $P(-z < \hat{\theta} < z) = 0.95$. Тъй като нормалното разпределение е симетрично ще имаме, че $P(\hat{\theta} > z) = 1 - 0.95/2 = 0.025$.
Тогава числото z е $q_{0.975}$ квантил на стандартното нормално разпределение, който е равен на 1.96. Следователно

$$P(-1.96 < \hat{\theta} < 1.96) = 0.95$$

$$P(-1.96 < \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta \right) < 1.96) = 0.95$$

$$P(\bar{X}_n - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{X}_n + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0.95$$

Така получихме доверителният интервал $\theta \in (\bar{X}_n - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Зад. 2. *Нека* $X_1, \ldots, X_n$ *са независими наблюдения над. сл.в.* $X \sim N(\mu, \theta)$, $\theta > 0$, *където* μ *е известно. Да се построи доверителен интервал за* θ *с ниво на доверие* $\gamma = 1 - \alpha$.

Решение:
Разглеждаме статистиката

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\theta}.$$

Тази случайна величина е сума от n стандартни нормални сл.в. и следователно $\hat{\theta} \sim \chi^2(n)$. Тогава можем да намерим a_1 и a_2, такива че

$$P(a_1 < \hat{\theta} < a_2) = \gamma.$$

Ясно е, че $a_1 = \chi^2_{\alpha/2}(n)$ и $a_2 = \chi^2_{1-\alpha/2}(n)$ където с $\chi^2_\alpha(n)$ е означен α квантилът на $\chi^2(n)$ разпределение. При конкретно n и γ можем от таблицата с квантилите на $\chi^2(n)$ разпределение да вземем конкретни стойности. Тук ще работим в общия случай. Така получаваме

$$\chi^2_{\alpha/2}(n) < \hat{\theta} < \chi^2_{1-\alpha/2}(n)$$

или

$$\chi^2_{\alpha/2}(n) < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\theta} < \chi^2_{1-\alpha/2}(n).$$

Следователно доверителният интервал има вида

$$\theta \in \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)} \right).$$

Зад. 3. *Направени са следните измервания на стойността на случайната величина* $\xi : 2.96, 3.03, 3.02, 2.98, 3.06$. *Да се построят доверителни интервали за очакването и дисперсията на* ξ *ако се знае, че тя е нормално разпределена.*

Решение:
Нека $X_1, \ldots, X_n$ са независими наблюдения над сл.в. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ и да означим $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ и $s_n^2 = \frac{1}{n-1}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$. Тогава статистиката

$$T_1 = \frac{\bar{X}_n - \mu}{s_n/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

където $t(n-1)$ е разпределение на Стюдънт с $n-1$ степени на свобода. Тъй като t разпределението е симетрично, то доверителен интервал за математическото очакване μ ще е

$$\Delta_\gamma = \left[\bar{X}_n - t_{(1-\gamma)/2}(n-1)\frac{s_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{(1-\gamma)/2}(n-1)\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right]$$

където $t_{(1-\gamma)/2}(n-1)$ е $(1-\gamma)/2$ квантил на t-разпределнието с $(n-1)$ степени на свобода.

Имаме $X = (2.96, 3.03, 3.02, 2.98, 3.06)$. Пресмятаме

$$\bar{X} = \frac{2.96 + 3.03 + 3.02 + 2.98 + 3.06}{5} = \frac{15.05}{5} = 3.01.$$

$$s_n^2 = \frac{(2.96-3.01)^2 + (3.03-3.01)^2 + (3.02-3.01)^2 + (2.98-3.01)^2 + (3.06-3.01)^2}{4}$$

$$= \frac{0.0025 + 0.0004 + 0.0001 + 0.0009 + 0.0025}{4} = \frac{0.0064}{4} = 0.0016.$$

Следователно $s_n = 0.04$. От тук $\frac{s_n}{\sqrt{n}} = \frac{0.04}{\sqrt{5}} = 0.017888544$. Сега доверителният интервал е

$$\Delta_\gamma = [3.01 - t_{(1-\gamma)/2}(4) \times 0.017888544, 3.01 + t_{(1-\gamma)/2}(4) \times 0.017888544].$$

От друга страна статистиката

$$T_2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1).$$

Тогава доверителният интервал за дисперсията при неизвестно средно се дава с

$$\left[\frac{(n-1)s_n^2}{\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s_n^2}{\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1)} \right],$$

където $\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)$ е $(1-\gamma)/2$ квантил на хи-квадрат разпределение с $n-1$ степени на свобода, и $\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1)$ е $(1+\gamma)/2$ квантилът на същото разпределение. Като вземем в предвид, че $n = 5$, $s_n = 0.04$ намираме

$$\left[\frac{0.0064}{\chi^2_{(1-\gamma)/2}(4)}, \frac{0.0064}{\chi^2_{(1+\gamma)/2}(4)} \right].$$

Зад. 4. *Да се построи доверителен интервал за неизвестния параметър p при n независими наблюдения над случайната величина $\xi \sim Bi(1, p)$. Да се намери асимптотичен доверителен интервал с ниво на доверие $\gamma = 1 - \alpha = 0.98$.*

Решение:
Нека да имаме n наблюдения над сл. величина $Bi(1, p)$ или с други думи $P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = q = 1 - p$. Както знаем сумата X_n на n независими бернулиеви сл. величини дава сл. величина с биномно разпределение $Bi(n, p)$. Тогава сл. величина $\bar{p}_n = \frac{1}{n} X_n$, която е неизместена и състоятелна оценка за

p, приема стойности в интервала $[0,1]$. Нека да означим нейната функция на разпределение с $F(x,p)$. Имаме

$$F(x,p) = P(\frac{1}{n}X_n \leq x) = P(X_n \leq nx) = \sum_{k/n \leq x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

за $x \in [0,1]$. Нека да определим сега интервала $[p_{(1-\gamma)/2}(x), p_{(1+\gamma)/2}(x)]$ като решим спрямо p неравенствата

$$F(x,p) \leq (1-\gamma)/2, \quad F(x,p) \geq (1+\gamma)/2$$

Тогава интервалът $[p_{(1-\gamma)/2}(\bar{p}_n), p_{(1+\gamma)/2}(\bar{p}_n)]$ е доверителен интервал за p.

Всъщност при всяко фиксирано x и n стойностите $p_{(1-\gamma)/2}(x)$ и $p_{(1+\gamma)/2}(x)$ се определят с таблици. По-често на практика се използва съответната нормална апроксимация за $\bar{p}_n$. Доверителен интервал с асимптотично ниво на доверие γ е интервалът

$$\left[\bar{p}_n - \frac{z_{(1+\gamma)/2}}{\sqrt{nI(\bar{p}_n)}}, \bar{p}_n + \frac{z_{(1+\gamma)/2}}{\sqrt{nI(\bar{p}_n)}}\right],$$

където $I(.)$ е информационното количество на Фишер, а $z_{(1+\gamma)/2}$ е $(1+\gamma)/2$ квантилът на стандартното нормално разпределение, т.е. $\Phi(z_{(1+\gamma)/2}) = (1+\gamma)/2$.

Ако X е сл. величина с плътност $f(x,\theta)$ то информационното количество на Фишер се дефинира с

$$I(\theta) = E_\theta \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X,\theta) \right]^2 \right\}.$$

В нашия случай имаме $f(x,p) = p$ при $x = 1$ и $f(x,p) = 1-p$ при $x = 0$. Тогава

$$\log f(x,p) = \log p, \quad x = 1, \quad \log f(x,p) = \log(1-p), \quad x = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \log f(x,p) = \frac{1}{p}, \quad x = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \log f(x,p) = -\frac{1}{1-p}, \quad x = 0$$

Тогава

$$I(p) = p\frac{1}{p^2} + (1-p)\frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p(1-p)}.$$

Следователно доверителният интервал с асимптотично ниво на доверие γ е

$$\left[\bar{p}_n - z_{(1+\gamma)/2}\sqrt{\frac{\bar{p}_n(1-\bar{p}_n)}{n}}, \bar{p}_n + z_{(1+\gamma)/2}\sqrt{\frac{\bar{p}_n(1-\bar{p}_n)}{n}}\right].$$

Сега за $\gamma = 0.98$ имаме $(1+\gamma)/2 = 0.99$. От таблицата на нормалното разпределение имаме $z_{0.98} = 2.325$.

Проверка на хипотези

Нека да имаме проста случайна извадка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от сл. в. X. Както и до сега можем да считаме, че имаме n независими сл. величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ еднакво разпределени с X.

Налице са две предположения (хипотези) за плътността на сл. величина X. Основната хипотеза H_0 : *плътността е $f_0(x)$, което е еквивалентно на това, че функцията на правдоподобие (плътността на сл. вектор $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$) е*

$$L_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_0(x_1)f_0(x_2)\ldots f_0(x_n)$$

срещу алтернативата

H_1 : *плътността е $f_1(x)$, което е еквивалентно на това, че функцията на правдоподобие (плътността на сл. вектор $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$) е*

$$L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1)f_1(x_2)\ldots f_1(x_n).$$

За да решим, коя от двете хипотези да приемем и коя да отхвърлим нека да предположим, че сме намерили област $W \subset \mathbf{R}^n$, такава че

(1) $$P((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W|H_0) \leq \alpha,$$

където α е избрано малко $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01, 0.025$.

Областта W наричаме критерий или критична област. Поради това, че вероятността случайната точка $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ да принадлежи на W е избрана достатъчно малка, ние ще отхвърлим хипотезата H_0, ако точката $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W$ и ще приемем хипотезата H_0, ако $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \backslash W$. Числото α се нарича ниво на съгласие или вероятност за грешка от първи род. Грешката от първи род ще направим, ако отхвърлим хипотезата H_0 при условие, че тя е вярна. Числото $1 - \alpha$ се нарича ниво на доверие.

Определяме още и вероятностите

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W|H_1) = 1 - \beta$$

и

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in \mathbf{R}^n \setminus W|H_1) = \beta$$

Числото $1 - \beta$ се нарича мощност на критерия W, а числото β се нарича вероятност за грешка от втори род. Грешка от втори род правим, когато приемаме хипотезата H_0 при условие,че тя не е вярна.

Нека да предположим, че имаме много критерии $W_i, i \in I$ с едно и също ниво на съгласие α. Естестено е от тези критерии да изберем този, W^*, който е най-мощен (респ., който дава най-малка грешка от втори род), т.е.

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W^*|H_1) = \max_{i \in I} P(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W_i|H_1).$$

Такава критична област наричаме, оптимална критична област (о.к.о).

Един начин за намиране на оптимална критична област ни дава лемата на Нейман-Пирсън. Процедурата е следната.

1. Определяне на вида на критичната област.

За целата решаваме неравенството

$$L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq K.L_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

където K е неопределена за сега константа. Множеството от решенията W_K, което естествено ще зависи от K, дава критичната област.

2. Определяне на оптималната критична област.

Да определим една критична област (едно K) от условието

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W_K|H_0) \leq \alpha.$$

Така намерената критична област W^* е оптимална и я използваме за проверка на H_0 срещу H_1.

Мощността на критичната област се определя от

$$1 - \beta = P(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W^*|H_1).$$

Задачи

Зад. 1. *Нека* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *са независими наблюдения над сл.в.* X. *Проверява се хипотезата* $H_0 : X \sim N(0,1)$ *срещу алтернативата* $H_1 : X \sim N(1,1)$ *с ниво на съгласие* $\alpha = 0.05$. *Да се определи о.к.о., да се пресметне мощността на критерия при* $n = 9$, *да се намери най-малкото* $n \geq 1$ *за което мощността на критерия е по-голяма от* 0.99.

Решение:
При условията на задачата имаме:
H_0: $f_0(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$ или $L_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\sqrt{2\pi})^{-n}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2}$
срещу
H_1: $f_1(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$ или $L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\sqrt{2\pi})^{-n}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-1)^2}$.
Решаваме неравенството

$$L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq K L_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$\Leftrightarrow$

$$(\sqrt{2\pi})^{-n}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-1)^2} \geq K(\sqrt{2\pi})^{-n}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$\Leftrightarrow$

$$e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-1)^2} \geq K e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$\Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-1)^2 \geq \log K - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2$$

$\Leftrightarrow$

$$-\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i + 1) \geq 2\log K - \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^n (2x_i - 1) \geq 2\log K$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq \log K + n/2.$$

Така видът на критичната област е

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq C.$$

Да определим сега константата C така, че

$$P(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq C|H_0) = 0.05.$$

При условие, че е изпълнена H_0 сумата $\sum_{i=1}^{n} X_i$ има нормално разпределение със средно 0 и дисперсия n. Следователно

$$P(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq C|H_0) = P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 0}{\sqrt{n}} \geq C/\sqrt{n}|H_0) = P(N(0,1) \geq C/\sqrt{n}) = 0.05.$$

Определяме от таблицата на стандартното нормално разпределение квантилът $z_{0.95} = 1.645$. Така $C/\sqrt{n} = 1.645$ следователно $C = 1.645\sqrt{n}$.

Нека $n = 9$, тогава $C = 1.645 \times 3 = 4.935$. Да определим мощността на критерия от уравнението

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 4.935|H_1\right) = 1 - \beta.$$

Поради това, че когато е изпълнена H_1 сумата $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n,n)$ имаме при $n = 9$

$$1 - \beta = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 4.935|H_1\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 9}{3} \geq \frac{4.935 - 9}{3}\right)$$

$$= P\left(N(0,1) \geq \frac{4.935 - 9}{3}\right) = P\left(N(0,1) \geq -1.355\right) = P\left(N(0,1) \leq 1.355\right) = 0.9123$$

е мощността на критерия.

Да решим обратната задача, търсим n така че

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 1.645\sqrt{n}|H_1\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \geq \frac{1.645\sqrt{n} - n}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$P(N(0,1) \geq 1.645 - \sqrt{n}) \geq 0.99.$$

От таблицата на стандартното нормално разпределение намираме $z_{0.01} = -2.325$. Така за да е вероятността по-голяма от 0.99, то величината $1.645 - \sqrt{n}$ в дясно трябва да е не по-голяма от този квантил $z_{0.01}$, т.е.

$$1.645 - \sqrt{n} \leq -2.325$$

Следователно

$$\sqrt{n} \geq 3.97 \Leftrightarrow n \ \geq 16.$$

Така мощността на критерия ще е поне 0.99 при не по-малко от 16 наблюдения.

Зад. 2. *Нека* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *са независими наблюдения над сл.в.* $X \sim Po(\lambda)$. *Проверява се хипотезата* $H_0 : \lambda = 0.1$ *срещу алтернативата* $H_0 : \lambda = 0.4$ *с ниво на съгласие* $\alpha = 0.03$. *Да се определи оптимална критична област. Да се намери най-малкото* $n \geq 1$ *за което мощността на критерия е не по-малка от* 0.95. *Ако* $n = 100$ *и* $\bar{X}_n = 0.17$ *може ли да се отхвърли хипотезата* H_0.

Решение:
При условията на задачата имаме
H_0: $f_0(x) = P(X = x|H_0) = \frac{(0.1)^x}{x!}e^{-0.1}, x = 0, 1, 2, \ldots$ или

$$L_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{(0.1)^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1!x_2!\ldots x_n!}e^{-0.1n}$$

срещу

H_1:$f_1(x) = P(X = x|H_1) = \frac{(0.4)^x}{x!}e^{-0.4}, x = 0, 1, 2, \ldots$ или

$$L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{(0.4)^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1!x_2!\ldots x_n!}e^{-0.4n}$$

Решаваме неравенството

$$\frac{(0.4)^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1!x_2!\ldots x_n!}e^{-0.4n} \geq K\frac{(0.1)^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1!x_2!\ldots x_n!}e^{-0.1n}$$

$\Leftrightarrow$

$$(0.4)^{\sum_{i=1}^n x_i}e^{-0.4n} \geq K \times (0.1)^{\sum_{i=1}^n x_i}e^{-0.1n}$$

$\Leftrightarrow$

$$\log 0.4 \times (\sum_{i=1}^n x_i) - 0.4n \geq \log K + \log 0.1 \times (\sum_{i=1}^n x_i) - 0.1n$$

$$\log\frac{0.4}{0.1} \times (\sum_{i=1}^n x_i) \geq \log K + 0.3n$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq \frac{\log K + 0.3n}{\log 4}.$$

Така видът на критичната област е

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq C.$$

Да определим сега константата C така, че

$$P(\sum_{i=1}^n X_i \geq C|H_0) = 0.03.$$

При условие, че е изпълнена H_0 сумата $\sum_{i=1}^n X_i$ има Поасоново разпределение с параметър $0.1n$. Следователно

$$P(\sum_{i=1}^n X_i \geq C|H_0) = \sum_{x \geq C} \frac{(0.1n)^x}{x!} e^{-0.1n},$$

от където ще определим константата C в зависимост от n.

Решаването на това неравенство и при известно n не е лесно. Затова ще използваме нормалното приближение. Така при условие, че е вярна H_0 сумата $\sum_{i=1}^n X_i$ е приблизително нормално разпределена $N(0.1n, 0.1n)$ тогава

$$P(\sum_{i=1}^n X_i \geq C|H_0) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - 0.1n}{\sqrt{0.1n}} \geq \frac{C - 0.1n}{\sqrt{0.1n}}\right)$$

$$\approx P\left(N(0,1) \geq \frac{C - 0.1n}{\sqrt{0.1n}}\right) = 0.03$$

От таблицата на стандартното нормално разпределение имаме $z_{0.97} = 1.885$. Така получаваме

$$\frac{C - 0.1n}{\sqrt{0.1n}} = 1.885$$

или

$$C = 0.1n + 1.885\sqrt{0.1n}.$$

Поради това, че когато е изпълнена H_1 сумата $\sum_{i=1}^n X_i$ е Поасоново разпределена с параметър $0.4n$, то за мощността имаме

$$1 - \beta = P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq C|H_1\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - 0.4n}{\sqrt{0.4n}} \geq \frac{C - 0.4n}{\sqrt{0.4n}}\right)$$

$$\approx P\left(N(0,1) \geq \frac{C - 0.4n}{\sqrt{0.4n}}\right) \geq 0.95.$$

Като намерим, че $z_{0.05} = -1.645$, то получаваме

$$\frac{C - 0.4n}{\sqrt{0.4n}} \leq -1.645.$$

Като вземем в предвид, че $C = 0.1n + 1.885\sqrt{0.1n}$, получаваме

$$\frac{0.1n + 1.885\sqrt{0.1n} - 0.4n}{\sqrt{0.4n}} \leq -1.645.$$

или

$$0.3\sqrt{n} \geq 1.885 \times \sqrt{0.1} + 1.645 \times \sqrt{0.4} = 1.636$$

$$\sqrt{n} \geq 1.636/0.3 = 16.36/3 = 5.45 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 29.70.$$

Така мощността на критерия ще е поне 0.95 при $n \geq 30$ наблюдения.
При $n = 100$ константата

$$C = 0.1 \times 100 + 1.885\sqrt{10} = 10 + 5.96 = 15.96.$$

От това, че $\bar{X}_n = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i = 0.17$ намираме, че $\sum_{i=1}^{100} x_i = 17 > 15.96$, следователно наблюдението принадлежи на критичната област и H_0 трябва да се отхвърли.

Зад. 3. *Извадка с обем n от една партида изделия съдържа X на брой дефектни. При ниво на съгласие $\alpha = 0.04$ да се провери хипотезата партидата съдържа 10% брак срещу алтернативата партидата съдържа 5% брак. Да се използва нормално приближение за определяне на о.к.о. да се намери най малкото n за което мощността на критерия е по голяма от 0.95.*

Решение:

Имаме едно наблюдение над биномно разпределена сл. величина $X \sim Bi(n, p)$, където p е неизвестно. Ще проверим

$H_0 : f_0(x) = \binom{n}{x} 0.1^x 0.9^{n-x}, x = 0, 1, 2, \ldots, n,\ L_0(x) = f_0(x),$

срещу

$H_1 : f_1(x) = \binom{n}{x} 0.05^x 0.95^{n-x}, x = 0, 1, 2, \ldots, n,\ L_1(x) = f_1(x).$

За определяне на оптималната критична област решаваме неравенството:

$$\binom{n}{x} 0.05^x 0.95^{n-x} \geq K \binom{n}{x} 0.1^x 0.9^{n-x}$$

$$0.05^x 0.95^{n-x} \geq K 0.1^x 0.9^{n-x}$$

$$x \log 0.05 + (n - x) \log 0.95 \geq \log K + x \log 0.1 + (n - x) \log 0.9$$

$$x(\log 0.05 - \log 0.95 - \log 0.1 + \log 0.9) \geq \log K + n(\log 0.9 - \log 0.95)$$

$$x \log \frac{0.05 \times 0.9}{0.1 \times 0.95} \geq \log K + n \log \frac{0.9}{0.95}$$

$$x \log \frac{0.045}{0.095} \geq \log K + n \log \log \frac{0.9}{0.95}$$

$$x \leq (\log K + n \log \log \frac{0.9}{0.95}) / \log \frac{0.045}{0.095}.$$

Така критичната област има вида $x \leq C$.

При изпълнена хипотеза H_0 намираме

$$P(X \leq C | H_0) = \sum_{x \leq C} \binom{n}{x} 0.1^x 0.9^{n-x} \leq 0.04.$$

Това неравенство трябва да решим относно C. Ако n е известно може да се използува таблица за биномното разпределение или програма (напр. функция в EXCEL).

Друг начин е, както и в предната задача, да използуваме нормално приближение за биномното разпределение. Имаме, че $\frac{X-np}{\sqrt{npq}} = \frac{X-0.1n}{\sqrt{0.1 \times 0.9 \times n}}$ е разпределено приблизително нормално $N(0, 1)$ Така

$$P\left(X \leq C | H_0\right) = P\left(\frac{X - 0.1n}{\sqrt{0.1 \times 0.9 \times n}} \leq \frac{C - 0.1n}{\sqrt{0.1 \times 0.9 \times n}}\right) \leq 0.04$$

Намираме
$$P\left(N(0,1) \le \frac{C-0.1n}{\sqrt{0.1\times 0.9\times n}}\right) \le 0.04.$$
От таблицата на стандартното нормално разпределение намираме $z_{0.04} = -1.75$. Сега от неравенството
$$\frac{C-0.1n}{\sqrt{0.1\times 0.9\times n}} \le -1.75$$
получаваме
$$C - 0.1n = -1.75 \times 0.3\sqrt{n}$$
$$C = 0.1n - 0.525\sqrt{n}.$$

За да намерим мощността на критерия, ще използваме нормално приближение при условие, че е вярна H_1. Имаме

$$P(X \le C|H_1) = P\left(\frac{X-0.05n}{\sqrt{0.05\times 0.95\times n}} \le \frac{C-0.05n}{\sqrt{0.0475\times n}}\right)$$

$$\approx P\left(N(0,1) \le \frac{C-0.05n}{\sqrt{0.0475\times n}}\right) \ge 0.95.$$
От таблицата намираме $z_{0.95} = 1.645$. Тогава трябва

$$\frac{C-0.05n}{\sqrt{0.0475\times n}} \ge 1.645.$$

Като използваме, че $C = 0.1n - 0.525\sqrt{n}$, намираме

$$0.1n - 0.525\sqrt{n} - 0.05n \ge 1.645\sqrt{0.0475\times n}$$

$$0.05n \ge 0.525\sqrt{n} + 0.358\sqrt{n} = 0.883\sqrt{n}$$
$$\sqrt{n} \ge 17.66$$

Следователно при $n \ge 312$ мощността на критерия ще е поне 0.95.

Зад. 4. *Нека $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са независими наблюдения над сл.в. X с плътност $f_X(x) = \frac{x^2 e^{-x/\theta}}{2\theta^3}$ за $x > 0, \theta > 0$. Да се провери хипотезата $H_0 : \theta = 1$ срещу алтернативата $H_1 : \theta > 1$ с ниво на съгласие $\alpha = 0.03$. Ако $n = 27$ и $\bar{X}_{27} = 4.21$ трябва ли да се отхвърли H_0.*

Решение:
Имаме

$$H_0 : \theta = 1 \Leftrightarrow f_0(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{2}, x > 0$$

$$L_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2 e^{-\sum_{i=1}^n x_i}}{2^n}.$$

срещу

$$H_1 : \theta > 1 \Leftrightarrow f_1(x) = \frac{x^2 e^{-x/\theta}}{2\theta^3}, x > 0$$

$$L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2 e^{-\sum_{i=1}^n x_i}/\theta}{2^n \theta^{3n}}.$$

Определяме вида на оптималната критична област от неравенството

$$\frac{x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2 e^{-\sum_{i=1}^n x_i}/\theta}{2^n \theta^{3n}} \geq K \frac{x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2 e^{-\sum_{i=1}^n x_i}}{2^n}.$$

$$\frac{e^{-\sum_{i=1}^n x_i}/\theta}{2^n \theta^{3n}} \geq K \frac{e^{-\sum_{i=1}^n x_i}}{2^n}$$

$$-\sum_{i=1}^n x_i/\theta - \log(2^n \theta^{3n}) \geq \log K - \sum_{i=1}^n x_i - \log 2^n$$

$$-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i - 3n \log \theta \geq \log K - \sum_{i=1}^n x_i$$

$$(1 - \frac{1}{\theta}) \sum_{i=1}^n x_i \geq \log K + 3n \log \theta$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq C.$$

Да определим C така, че

$$P(\sum_{i=1}^n X_i \geq C | H_0) = 0.03.$$

Като вземем в предвид, че сумата на н.е.р. сл. в. с $\Gamma(k, \theta)$ е $\Gamma(nk, \theta)$, то за плътността на $\sum_{i=1}^n X_i$ имаме при H_0, $k = 3, \theta = 1$, т.е.

$$\frac{x^{3n-1}}{\Gamma(3n)} e^{-x}, x > 0.$$

Следователно трябва да намерим C така, че

$$P(\sum_{i=1}^n X_i \geq C | H_0) = \frac{1}{\Gamma(3n)} \int_C^\infty x^{3n-1} e^{-x} dx = 0.03$$

При дадено n, това може да се направи от таблица за стойностите на Гама функцията или с програма. Друг начин е да се използува нормално приближение. Знаем, че $EX_i = k\theta = 3.1 = 3$ и $DX_i = k\theta^2 = 3.1^2 = 3$. Тогава

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq C | H_0\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - 3n}{\sqrt{3n}} \geq \frac{C - 3n}{\sqrt{3n}}\right)$$

$$\approx P(N(0,1) \geq \frac{C - 3n}{\sqrt{3n}}) = 0.03$$

Намираме $z_{0.97} = 1.885$. Следователно

$$\frac{C - 3n}{\sqrt{3n}} \geq 1.885$$

$$C \geq 3n + 1.885 \times \sqrt{3n}$$

.

Нека вземем $n = 27$. Тогава

$$\frac{1}{\Gamma(81)} \int_C^\infty x^{80} e^{-x} dx = 0.03$$

Решението на това уравнение с вградената функция на $EXCEL$ е 64.94. Поради това, че $\bar{X}_{27} = 4.21$, то $\sum_{i=1}^{27} x_i = 27 \times 4.21 = 113.67 > 64.94$. Следователно, трябва да отхвърлим хипотезата H_0. Ако използуваме получената с нормално приближение константа, при $n = 27$,

$$C = 3.27 + 1.885\sqrt{81} = 81 + 1.885 \times 9 = 81 + 16.965 = 97.965$$

виждаме, че пак трябва да отхвърлим хипотезата H_0.