07.V.2014 г. ~~Комплексен анализ - упражнение~~

~~4МА~~ - упражнение ~~2~~ ри час

I 4МА

Задача: Покажете, че ако $f \in C_{[-a,a]}$ ($[-a,a]$ симетричен интервал) е четна (нечетна), то ПНДРП за $f(x)$ в $[-a,a]$ от $n$-та степен е също четен (нечетен).

Нека $f(x)$ е четна и $P_n(x)$ е ПНДРП от $n$-та степен.
Да разгледаме полинома $Q_n(x) \overset{\text{деф.}}{=} P_n(-x) \in \Pi_n$
за $\forall x \in [-a,a]$ $|f(x)-Q_n(x)| = |f(-x)-P_n(-x)| \leq E_n(f)$
Следователно $Q_n(x)$ също е ПНДРП. От единствеността $Q_n(x)=P_n(x)$, т.е. $P_n(-x)=P_n(x)$

Задача: Намерете ПНДРП от <u>n-1</u> степен за $f(x)=x^n$ в $[-1,1]$.

Нека ПНДРП е $P_{n-1}(x)$. Търсим $P_{n-1}(x) \in \Pi_{n-1}$, за който разликата $x^n - P_{n-1}$ приема в $[-1,1]$ най-голямата си по модул стойност в $n-1+2=n+1$ точки на алтернанс.
С други думи, търсим полином от $\Pi_n$ с коеф. 1 пред $x^n$, който приема най-голямата ~~от~~ стойност по една стойност в $[-1,1]$ в $n+1$ точки от $[-1,1]$ с алтернативно сменящи се знаци.
Всеки такъв полином, това е $\frac{T_n}{2^{n-1}}$ $x^n - P_{n-1} = \frac{T_n}{2^{n-1}}$

$$P_{n-1} = \boxed{x^n - \frac{T_n}{2^{n-1}}}$$

То нека $T_n$ е четен или нечетен, то $P_{n-1}$ ще бъде ПНДРП и от $n$-четен.

$T_0 = 1$ $T_1 = x$

$T_{n+1} = 2x.T_n - T_{n-1}$

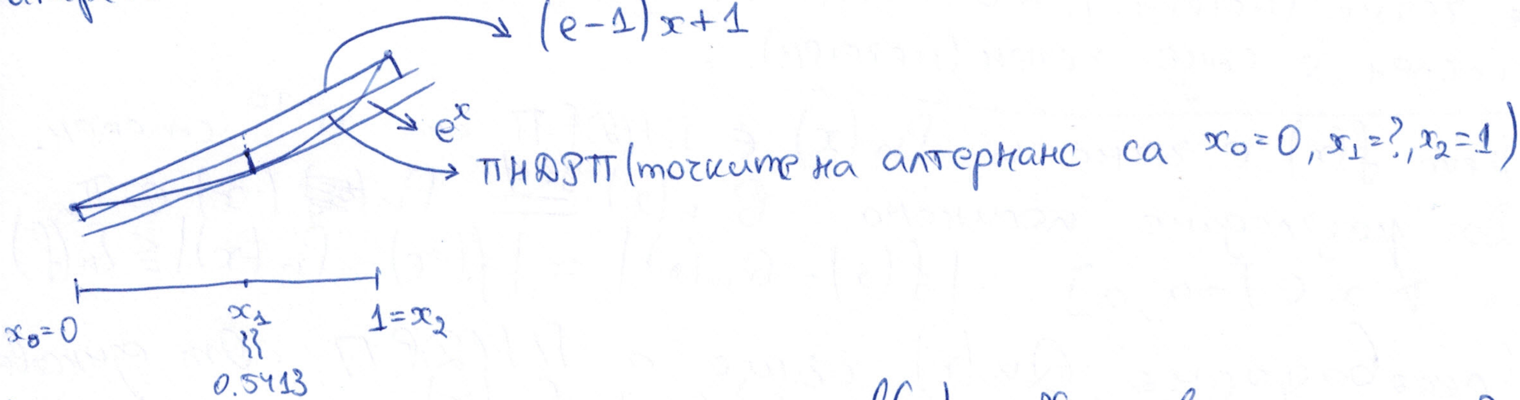
$T_2 = 2x^2 - 1$

$T_3 = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x$

$T_4 = 2x(4x^3-3x) - (2x^2-1) = \boxed{8x^4 - 8x^2 + 1}$

ПНДРП (Полином с най-добро равномерно приближение) от 2-степен и 3-степен за $x^4$ е $x^4 - \frac{1}{8}(8x^4 - 8x^2 - 1) = x^2 - \frac{1}{8}$

Намерете ПНДРП от 1-степен за $f(x) = e^x$ в $[0, 1]$




1) Интерполационният полином за $f(x) = e^x$ с възли 0 и 1 е $P_I$

$P_I = (e-1)x + 1$
$P_I(0) = 1$
$P_I(1) = e$

Търсим $x_1$ в $(0,1)$ за което

$((e-1)x + 1)' = (e^x)'$ $\quad m = e - 1$

$e - 1 = e^x \quad x_1 = \ln(e-1) \approx 0.5413$

Разликата $P_I(x) - e^x$ в $x_1 = m.\ln m + 1 - m$

ПНДРП е $P_I - \frac{1}{2}(m \ln m + 1 - m) = mx + 1 - \frac{1}{2}(m \ln m + 1 - m) =$

$= \boxed{mx + \frac{e - m\ln m}{2}}$ → това е ПНДРП $\quad m = e - 1$

Покажете, че за най-доброто равномерно приближение е изпълнено

$E_n(f) \le \|f - P\|$

$E_n(f) \le \|f$ произвол

1) $E_n(f) \le \|f\|$ - норма на $f$

2) $E_n(\lambda f) = |\lambda| . E_n(f)$

3) $E_n(f+g) \le E_n(f) + E_n(g)$

4) Ако $g \in \pi_n$ $E_n(f+g) = E_n(f)$

1) $E_n(f) \le \|f - P\|$ ← произволен

$E_n(f) \le \|f - 0\| = \|f\|$ ← нулев полином

2) Нека $P$ е ПНДРП от n-та степен за $f(x)$, тогава разликата $f - P$ и разликата $\lambda f - \lambda P$ имат едно и също поведение. Следователно $\lambda P$ е ПНДРП за $\lambda f$ и $E_n(\lambda f) =$
$= \|\lambda f - \lambda P\| = |\lambda| \, \|f P\| = |\lambda| E_n(f)$

3) Нека P и Q са съответно ПНДРП за f и g, тогава

$$E(f+g) \le \|f+g-\underbrace{(P+Q)}_{\in \pi_n}\| \le \|f-P\| + \|g-Q\| = E_n(f)+E_n(g)$$

4) Нека P е ПНДРП за $f(x)$, тогава разликата $f-P$ и разликата $f+g-(p+g)$ е една и съща. Следователно ПНДРП за $f+g$ е $p+g$ $\quad E_n(f+g) = \|f+g-(p+g)\| = \|f-p\| = E_n(f)$