1

Упражнение (11.06.2013)

Задача. Покажете, че уравнението $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ има единствен корен $\xi \in [1,2]$. Покажете, че $f(x) = 0$ е еквивалентно в $[1,2]$ на а) $x = \varphi(x)$, $\varphi(x) = x^3 - 1$ б) $x = \varphi(x)$, $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+1}$

Кое $\varphi(x)$ задава сходящ към ξ итерационен процес $x_n = \varphi(x_{n-1})$ $n = 1, 2, \dots$ $x_0 \in [1,2]$?

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 1 > 0 \text{ в } [1,2] \\ f(1) &= 1-1-1 < 0 \\ f(2) &= 8-2-1 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &f(x) \text{ расте в } [1,2] \\ &f(1) < 0 \\ &f(2) > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{има единствен корен } \xi \in [1,2]$$

Ясно е, че у-та а) $x = x^3 - 1$ и б) $x = \sqrt[3]{x+1}$ са еквивалентни на $f(x) = 0$

<u>В случая а)</u> $\varphi(x) = x^3 - 1$, $\varphi'(x) = 3x^2 \geq 3$ $x \in [1,2]$. Следователно $\varphi(x)$ не е свиващо и методът на свиващите изображения не е приложим.

<u>В случая б)</u> $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+1}$ $\varphi'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$. Следователно

$0 < \varphi'(x) \leq \dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}} < \dfrac{1}{3}$ за $x \in [1,2] \Rightarrow \varphi(x)$ е свиващо в $[1,2]$ с $q = \dfrac{1}{3}$

Положителността на $\varphi'(x)$ гарантира, че всички членове на редицата са в $[1,2]$ и тя клони монотонно към ξ. В сила е оценката

$$|x_n - \xi| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n (2-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Имаме сходимост със скорост на геометрична прогресия с $q = \dfrac{1}{3}$.

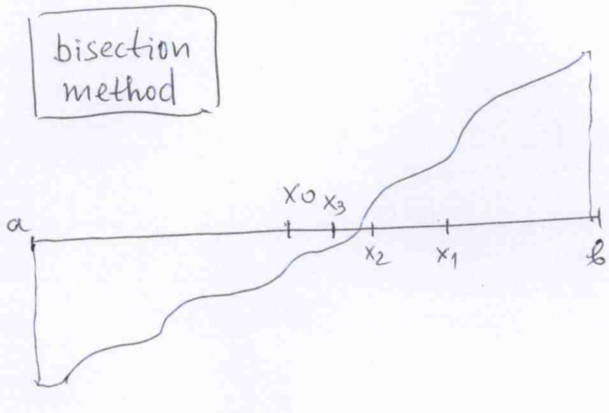
②

В методите до края ще налагаме условията за сходимост ~~на методите~~ направо върху $f(x)$.

Да дадем най-простия метод за уточняване на корена $\xi \in [a,b]$ на у-то $f(x)=0$. Може би трябваше да го направим по-рано.

Метод на разполовяването (bisection method)

Да предположим, че сме отделили корена ξ в интервала $[a,b]$. и $f'(x)>0$ или $f'(x)<0$ в $[a,b]$ и $f(a)f(b)<0$.
Делим интервала $[a,b]$ на половина и вземаме $x_0=\frac{a+b}{2}$
Според знака на $f(x_0)$ определяме в кой интервал се намира ξ. След това делим следващия интервал на половина и т.н.
Ясно е, че имаме сходимост със скорост на геометрична прогресия

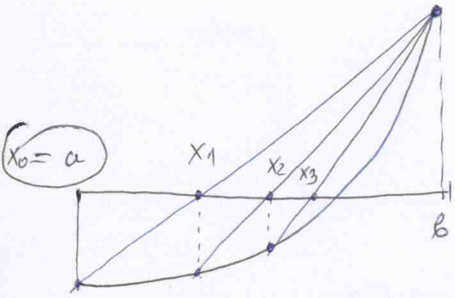


В следващите три метода (Хорди, Секущи, Нютон) ще предполагаме, че $f(x)$ е два пъти диференцируема в $[a,b]$, f' и f'' имат постоянни знаци и $f(a)f(b)<0$.
Горните условия гарантират сходимост на методите при подходящи начални приближения от $[a,b]$. Ние ще дадем тези начални приближения.

3

Метод на Хордите

$\boxed{f' > 0 \quad f'' > 0}$

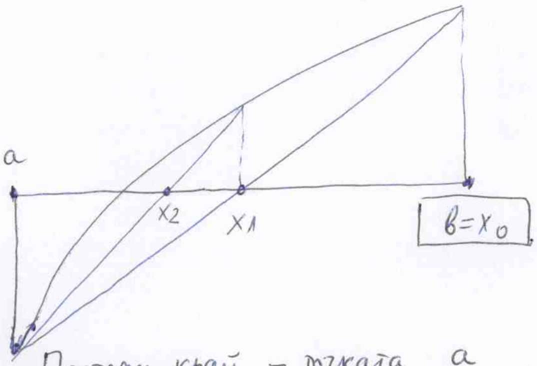


Постоанен край на Хордата точката в.

ф-ла:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

$\boxed{f' > 0 \quad f'' < 0}$

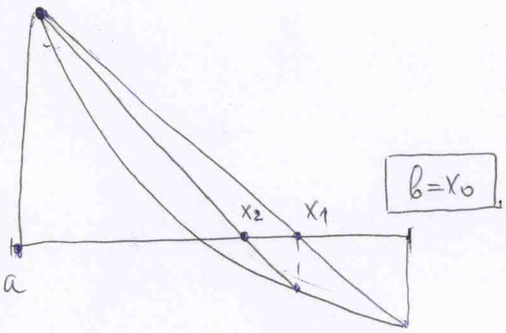


Постоян край – точката а

ф-ла:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(a - x_n)}{f(a) - f(x_n)}$$

$\boxed{f' < 0 \quad f'' > 0}$

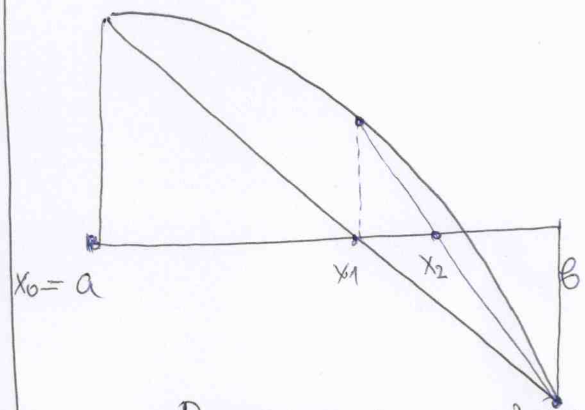


Постоянен край на Хордата – точката а

ф-ла:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(a - x_n)}{f(a) - f(x_n)}$$

$\boxed{f' < 0 \quad f'' < 0}$



Постоян край на хордата – точката в

ф-ла:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \cdot (b - x_n)$$

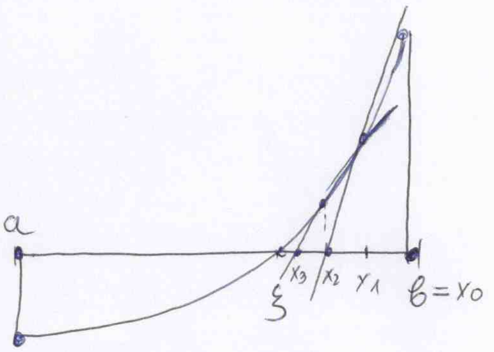
За постоянен край избираме този, за който $f(x)f''(x) > 0$, а за начално приближение другия край, този за който $f(x)f''(x) < 0$

4

Метод на Секущите $\left(f(x_i) f''(x_i) > 0 \right)$

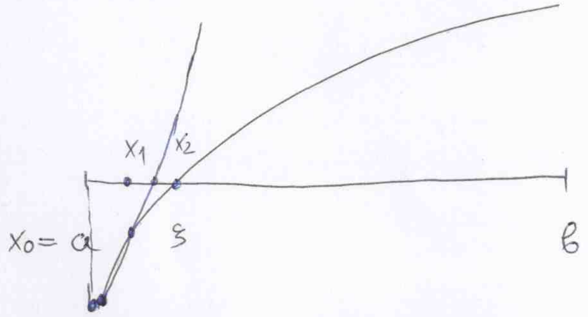
формула: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)\,(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$

$\boxed{f' > 0 \quad f'' > 0}$



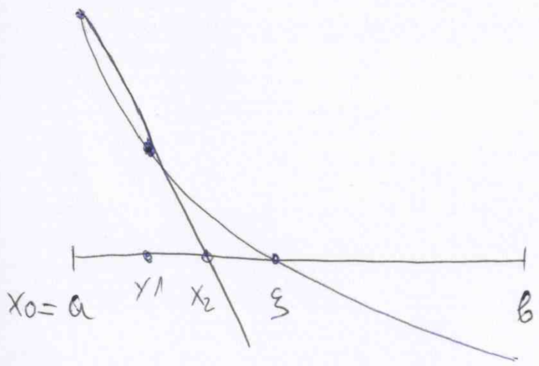
Избиране $в = x_0 > x_1 > \xi$

$\boxed{f' > 0 \quad f'' < 0}$



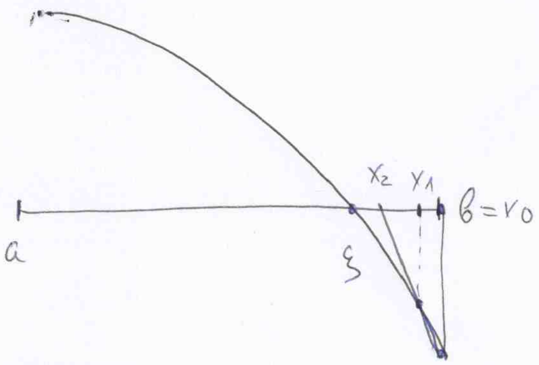
Избиране $a = x_0 < x_1 < \xi$

$\boxed{f' < 0 \quad f'' > 0}$



Избиране $x_0 = a < x_1 < \xi$

$\boxed{f' < 0 \quad f'' < 0}$



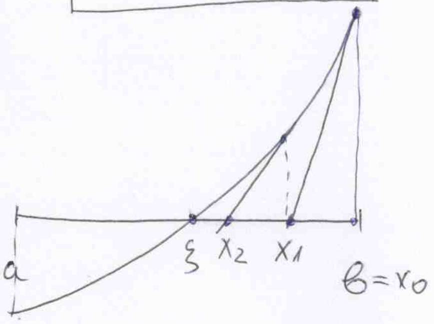
Избиране $в = x_0 > x_1 > \xi$

5

Метод на Нютон $\left(f(x_0)\, f''(x_0) > 0 \right)$

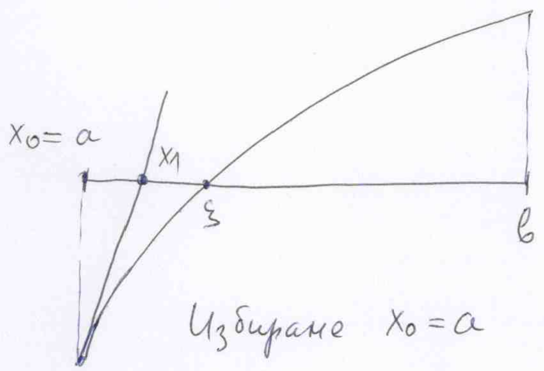
ф-ла $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$\boxed{f' > 0 \quad f'' > 0}$



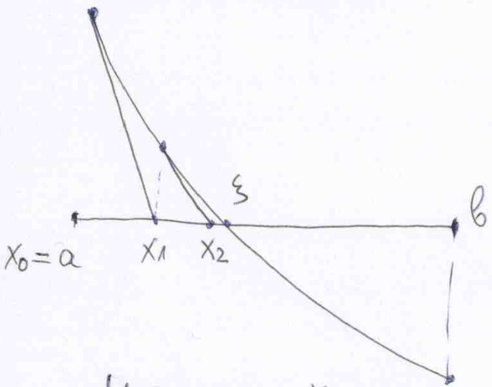
Избираме $x_0 = в$

$\boxed{f' > 0 \quad f'' < 0}$



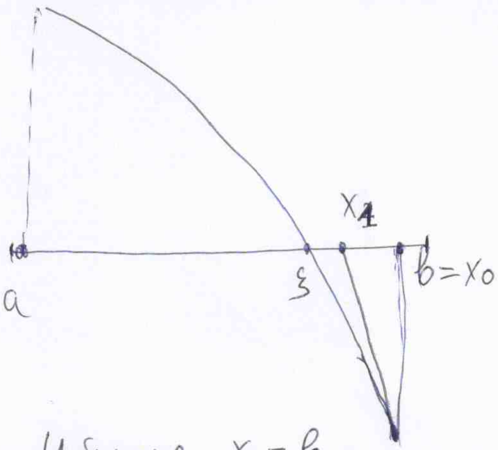
Избираме $x_0 = a$

$\boxed{f' < 0 \quad f'' > 0}$



Избираме $x_0 = a$

$\boxed{f' < 0 \quad f'' < 0}$



Избираме $x_0 = в$

6

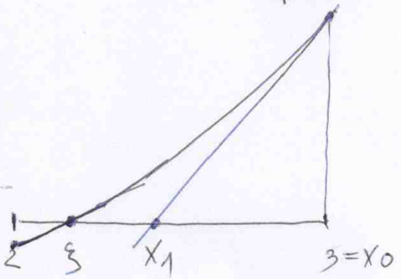
Дадено е у-то $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$

Покажете, че $f(x)$ има единствен корен ξ в интервала $[2,3]$. Дайте подходящо начално приближение x_0 и покажете, че методът на Нютон е сходящ към ξ. Направете една итерация

$$\left.\begin{aligned} &f'(x) = 3x^2 - 2 > 0 \text{ за } x \in [2,3] \\ &f(x) \text{ расте в } [2,3] \\ &f(2) = 8 - 4 - 5 = -1 < 0 \\ &f(3) = 27 - 6 - 5 = 16 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ има единствен корен } \xi \in [2,3]$$

Понеже $f''(x) = 6x > 0$ в $[2,3]$, ако изберем $x_0 = 3$, методът на Нютон ще е сходящ към ξ.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{16}{25} = 2\frac{9}{25} = \boxed{2.36}$$



За да покажем колко бързо е сходящ методът на Нютон ще дадем резултатите от изчисленията с компютър

$x_0 = 3$
$x_1 = 2.36$
$x_2 = 2.12719678015882$
$x_3 = 2.09513603693363$
$x_4 = 2.09455167382427$
$x_5 = 2.09455148154235$
$x_6 = 2.09455148154233$
$x_7 = x_6$

При „достатъчно добро" начално приближение методът на Нютон има ред на сходимост 2. Например, ако x_0 приближава ξ с точност 0.01, x_1 ще приближава с точност $(0.01)^2 = 0.0001$, а x_2 с точност 0.00000001

Но дори и x_0 да не е „достатъчно добро" след няколко итерации (при гарантирана сходимост) приближението ще попадне в област където скоростта ще стане 2. Методът на Нютон има фундаментално значение за решаването на нелинейни задачи, стига $f'(x)$ да се пресмята лесно.