(1)

Упражнение (04.06.2013)

Първо ще решим петите задача от К2, които не се дадоха на контролното.

Задача (1 тип)

Напишете състав. кв. ф-ла на трапеците, осигуряваща пресмятане на $\int_0^1 \sin x\,dx$ с грешка < 0.01. Обосновете се като използвате ф-лата за оценка на грешката.

Съставната ф-ла на трапеците е

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n\right] = Q_{\text{съст. тр}}(f)$$

където $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$,

За грешката при предположение, че $f(x) \in C^2[a,b]$ имаме

$$R_{\text{съст. тр}}(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi) \qquad \xi \in [a,b]$$

Откъдето получаваме оценката

$$|R_{\text{съст. тр}}(f)| \le \max_{\xi \in [a,b]} \frac{|f''(\xi)|}{12n^2}(b-a)^3$$

В нашия случай $|R_{\text{съст. тр}}(f)| \le \max_{\xi \in [0,1]} \frac{|\sin''(\xi)|}{12n^2}(1-0)^3 \le \frac{1}{12n^2}$

Искаме $\frac{1}{12n^2} < \frac{1}{100}$, $12n^2 > 100$, $n^2 > \frac{100}{12} = 8.3\dots$ Следователно

При $n = 3$ $|R_{\text{съст. тр}}(f)| < 0.01$

В конкретния случай ф-лата е:

$$Q_{\text{съст. тр}}(f) = \frac{(1-0)}{2.3}\left(f(0) + 2f\left(\tfrac{1}{3}\right) + 2f\left(\tfrac{2}{3}\right) + f(1)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\sin(0) + 2\sin\left(\tfrac{1}{3}\right) + 2\sin\left(\tfrac{2}{3}\right) + \sin(1)\right) \approx 0.455433$$

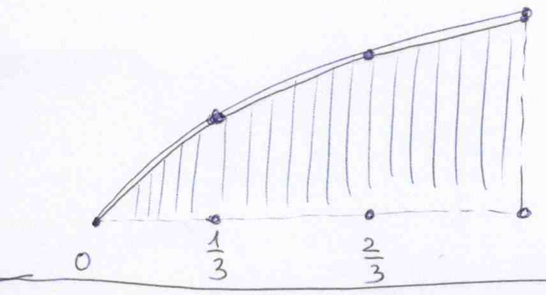
(2)

Всъщност интегралът може да се пресметне „точно".

$$\int_0^1 \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^1 = -\cos(1)+\cos(0) = 1-\cos(1) \approx 0.459698$$

и

$R_{\text{съст.тр}}(f) \approx 0.00426$



Всъщност съст. ф-ла на трапеците не е нищо друго освен пресмятане на интеграла на начупената линия интерполираща $f(x)$ в равноотдалечените точки.

Задача (2 тип) Нека $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ е квадратурната ф-ла на Гаус. Докажете, че $A_k = \dfrac{2}{(1-x_k^2)\left[L_n'(x_k)\right]^2}$,

където $L_n(x)$ е полинома на Льожандър от степен n, удовлетворяващ условието $L_n(1)=1$, $L_n(-1)=(-1)^n$.

Знаем, че възлите на ф-лата x_k $k=1,\dots n$ са нулите на $L_n(x)$

Освен това $ACT = 2n-1$ – максималната възможна.

Да разгледаме полинома $f_k(x) = \dfrac{L_n(x)}{x-x_k} \cdot L_n'(x) = \underset{\pi_{n-1}}{\underset{\Uparrow}{P_k}}\, \underset{\pi_{n-1}}{\underset{\Uparrow}{L_n'}}(x) \in \pi_{2n-2}$

P_k е $L_n(x)$ с „избит" корена x_k.

Формулата е точна за $f_k(x)$, т.е

$$\int_{-1}^{1} f_k(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f_k(x_i) = A_k f_k(x_k)$$

последното равенство е вярно понеже всички нули на $L_n(x)$ са и нули на P_k, с изключение на x_k.

$$\int_{-1}^{1} f_k(x)dx = \int_{-1}^{1} P_k\, dL_n(x) \overset{\text{по части}}{=} P_k(x)L_n(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} L_n(x) P_k'(x)dx$$

3

Последният интеграл е 0, защото L_n е ортогонален в $[-1,1]$ и тегло $\mu(x)\equiv 1$ на всички полиноми от π_{n-1}, а $P_k'(x)\in \pi_{n-2}$.

$$\int_{-1}^{1} f_k(x)\,dx = \frac{L_n(1)L_n(1)}{1-x_k} - \frac{L_n(-1)}{-1-x_k}L_n(-1) = \frac{1}{1-x_k}+\frac{1}{1+x_k} = \frac{2}{1-x_k^2}$$

$$f_k(x_k) = \left.\frac{L_n(x)}{x-x_k}\right|_{x=x_k} \cdot L_n'(x_k)$$

По Лопитал $\left.\frac{L_n(x)}{x-x_k}\right|_{x=x_k} = L_n'(x_k)$

$$f_k(x_k) = \left(L_n'(x_k)\right)^2$$

Окончателно $A_k = \dfrac{2}{(1-x_k^2)\left(L_n'(x_k)\right)^2}$

Зад Намерете гаусовата квадратура с два възела в $[-1,1]$ и тегло $\mu(x) = 1-x^2$.
Покажете, че за грешката ѝ, при предположение, че $f\in C^4[-1,1]$ е изпълнено $R_{Gauss}(f) = \frac{4}{1575} f^{IV}(\xi)$.

Кв. ф-ла има вида:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)f(x)\,dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) = Q_G(f), \ ACT = 3$$

Търсим x_1, x_2, A_1 и A_2.

Възлите x_1 и x_2 са нули на полинома $P(x) = x^2+ax+b$ ортогонален в $[-1,1]$ на π_1 при тегло $\mu(x) = 1-x^2$. За определяне на a и b използваме условията за ортогоналност с 1 и x.

(4)

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} (1-x^2)(x^2+ax+b)\,dx = 0 \\ \int_{-1}^{1} (1-x^2)(x^2+ax+b)\,x\,dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{15} + \frac{4}{3}b = 0 \\ \frac{4}{15}a = 0 \end{cases} \qquad p = x^2 - \frac{1}{5}$$

$$x_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Кв. ф-ла добива вида:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2) f(x)\,dx \approx A_1 f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + A_2 f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = Q_{Gauss}(f)$$

A_1 и A_2 определяме от условията кв. ф-ла да е интерполационна, т.е да е точна за 1 и x.

точна за $1 \Rightarrow \frac{4}{3} = \int_{-1}^{1} (1-x^2).1\,dx = A_1 + A_2$

точна за $x \Rightarrow 0 = \int_{-1}^{1} (1-x^2)x\,dx = A_1\left(\frac{-\sqrt{5}}{5}\right) + A_2\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$\Rightarrow A_1 = A_2 = \frac{2}{3}$

<u>Окончателно</u>: $Q_{Gauss}(f) = \frac{2}{3} f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \frac{2}{3} f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

Съгласно представянето за грешката $R_{Gauss}(f)$ имаме

$$R_{Gauss}(f) = \int_{-1}^{1} (1-x^2) f(x)\,dx - Q_{Gauss}(f)$$

$$= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_{-1}^{1} (1-x^2)\left(x^2 - \frac{1}{5}\right)^2 dx = \frac{4}{1575} f^{IV}(\xi) \qquad \xi \in [-1, 1]$$

Допълнителна задача: Да се построи ф-ла с най-висока АСТ от вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx a_0 f(0) + a_1 f'(0) + b f(x_1), \quad x_1 \in (0, 1]$$

(5) Условията ф-лата да е точна за $1, x, x^2$ и x^3 определят еднозначно a_0, a_1, b и x_1.
Следователно съществува единствена кв. ф-ла от търсения вид с най-висока АСТ.

точна за 1 $\Rightarrow$ $1 = a_0 + b$
точна за x $\Rightarrow$ $\frac{1}{2} = a_1 + b x_1$
точна за x^2 $\Rightarrow$ $\frac{1}{3} = b x_1^2$
точна за x^3 $\Rightarrow$ $\frac{1}{4} = b x_1^3$

Делим последните две уравнения и получаваме $x_1 = \frac{3}{4}$
Оттам $b = \frac{16}{27}$, $a_0 = \frac{11}{27}$, $a_1 = \frac{1}{18}$

Ф-лата има вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{11}{27} f(0) + \frac{1}{18} f'(0) + \frac{16}{27} f\left(\frac{3}{4}\right)$$

Проверяваме, че ф-лата не е точна за $f(x) = x^4$. Следователно АСТ$=3$

(6) Числено решаване на нелинейни у-я $f(x)=0$

Ще разглеждаме само случая, когато $f(x)$ е ф-я на една променлива и ще се интересуваме от реалните корени.

линейно у-е: $ax+b=0 \Rightarrow x_1 = -\frac{b}{a}$, ако $a \neq 0$

нелинейни у-я

Най-простото е квадратното. За него имаме ф-ла за ~~точното~~ решението

$$ax^2+bx+c=0 \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad a \neq 0$$

Но дори за алгебричните у-я

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

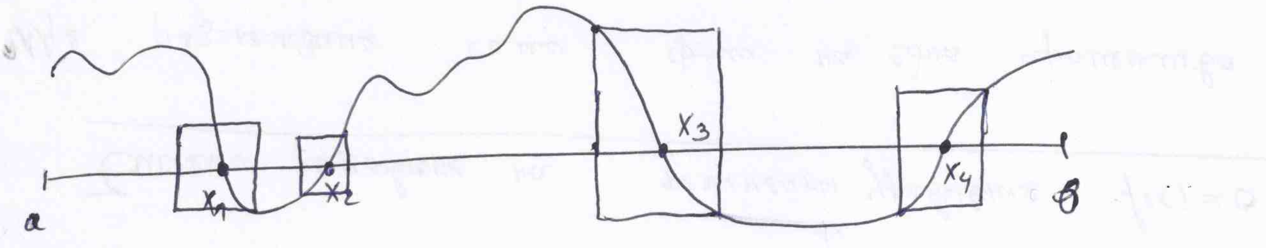
при $n \geq 5$ Абел (през 1826) е показал, че не съществува ф-ла изразяваща решението с краен брой аритметични операции и извличане на корени.

Следователно се налага да търсим методи за приближено решаване на у-то с някаква отнапред зададена точност.

Последното важи в пълна сила и за трансцендентните у-я.

Например: $x = e^{-x}$, $x = 6\sin x$.

Да отбележим, че като правило нелинейните у-я имат повече от едно решение



Решаването на нелинейното у-е $f(x)=0$ се състои в два етапа:

I етап (отделяне на корените)

Намират се интервали от дефиниционната област, във всеки от които е разположен само един корен на у-то $f(x)=0$.

Краищата на тези интервали могат да се разглеждат като приближение на отделения корен (левия край – с недостиг, десния – с излишък)

II етап (уточняване на корените)

Построява се итерационен процес, с който съответния корен се намира с отнапред зададена точност.

Първият етап решаваме най-общо като изследваме монотонността на ф-ята чрез производните ѝ.

Вторият етап ще коментираме първо с метода на свиващите изображение

Метод на свиващите изображения

Нека $f(x)=0$ е еквивалентно на $x=\varphi(x)$ в $[a,b]$

Интересуваме се от условия върху $\varphi(x)$, които гарантират (сходимост към корена ξ) на итерационния процес

$x_n=\varphi(x_{n-1})$ $n=1,2,\dots$ $x_0\in[a,b]$. Точката ξ се нарича неподвижна за φ, защото $\xi=\varphi(\xi)$.

8

Теорема: Нека:

1) $\varphi(x)$ е непрекъсната ф-я на $[a,b]$ в себе си

2) $\varphi(x)$ е свиващо в $[a,b]$

$(|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq q|x-y|$ за всяко $x,y \in [a,b],\ 0<q<1)$

Тогава:

1) Уравнението $x=\varphi(x)$ има единствен корен $\xi \in [a,b]$, който е граница на итерационния процес $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ $n=0,1,\dots$ $x_0 \in [a,b]$ (x_0 – произволно от $[a,b]$)

2) В сила е оценката

$$|x_n-\xi| \leq q^n|x_0-\xi| \leq q^n(b-a)$$

Проверката на условието, че $\varphi(x)$ е изображение на $[a,b]$ в себе си не винаги е лесно. На практика ще използваме следните две твърдения, при които условията за $\varphi(x)$ гарантират, че членовете на редицата $\{x_n\}_{n=0,1,\dots}$ не излизат от $[a,b]$.

(9)

Тв 1:

Нека $x = \varphi(x)$ има единствен корен $\xi \in [a, b]$,

$\varphi'(x) \geq 0$ в $[a,b]$ и $\varphi'(x) \leq q < 1$ в $[a,b]$.

Тогава редицата $x_n = \varphi(x_{n-1})$ $n = 1, 2, \dots$

е монотонна и сходяща към ξ при всеки избор на $x_0 \in [a,b]$

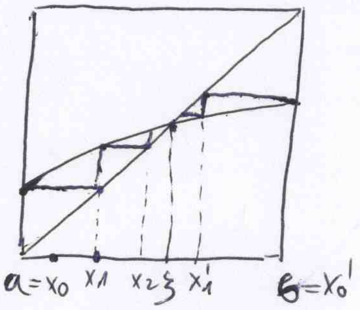
Д-во: $x_n - \xi = \varphi(x_{n-1}) - \varphi(\xi) = \underset{\substack{\vee\!| \\ 0}}{\varphi'(\theta)}(x_{n-1} - \xi)$

Следователно $x_n - \xi$ и $x_{n-1} - \xi$ са с еднакви знаци, т.е x_{n-1} е от ~~а~~ същата страна на ξ и членовете на редицата $\{x_n\}_{n=0,1,\dots}$ остават в $[a,b]$.

Освен това $|x_n - \xi| \leq q|x_{n-1} - \xi| \leq \dots$

$$\leq q^n |x_0 - \xi|$$

и следователно $x_n \to \xi$ при това монотонно.



Тв2: Нека $x = \varphi(x)$ има единствен корен $\xi \in [a, b]$, $\varphi'(x) \leq 0$ и $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ в $[a,b]$. Тогава, ако x_0 и x_1 са от $[a,b]$, всички членове на редицата $x_n = \varphi(x_{n-1})$ са от $[a,b]$ и $x_n \to \xi$

В този случай редицата е осцилираща $((x_n - \xi)(x_{n+1} - \xi) < 0)$

Д-во: Аналогично на Тв1. Единствената „опасност" е $x_1 \notin [a,b]$, понеже x_1 „минава" от другата страна на ξ. Но по условие това не става.

(незадължителна задача)

Задача (Държавен изпит за спец. ПМ)

Дадена е ф-ята $f(x) = x - 6\sin x$

а) Да се докаже, че у-то $f(x)=0$ има единствен ~~корен~~ положителен корен ξ и да се намери интервал с дължина $\frac{\pi}{4}$, който го съдържа.

б) Да се докаже, че ит. процес

$x_0 = \pi$

$x_{n+1} = \frac{\pi}{2} + \arccos\frac{x_n}{6}$ е сходящ към ξ и

да се намери оценка от вида

$|x_n - \xi| < Cq^n \qquad C>0, \ 0<q<1$

$f(x) = x - 6\sin x$

$f'(x) = 1 - 6\cos x$

Нека $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ е такава, че $\cos x_0 = \frac{1}{6}$, т.е $x_0 = \arccos\frac{1}{6}$

За $x \in (0, x_0)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ намалява в $[0, x_0]$

за $x \in (x_0, \pi)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ расте в $[x_0, \pi]$

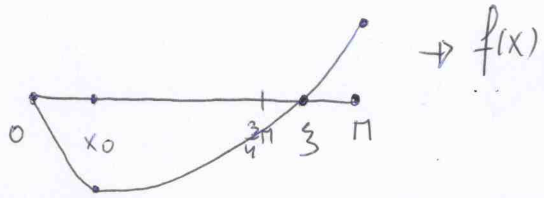
$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{3}{4}\pi - 6\frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \\ f(\pi) = \pi > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ има единствен положителен корен } \xi \text{ и } \xi \in \left[\tfrac{3}{4}\pi, \pi\right]$$

Ще покажем, че $f(x)$ няма други полож. корени

За $x \in [\pi, 2\pi]$ $\sin x \leq 0$ и $f(x) \geq \pi$

за $x \in (2\pi, \infty)$ $f(x) > 2\pi - 6 > 0$

Ясно е, че $x - 6\sin x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2} + \arccos\frac{x}{6}$ са еквивалентни в $[\frac{3}{4}\pi, \pi]$



(11)

$x - 6\sin x = 0$, $\sin x = \frac{x}{6}$, $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{x}{6}$

$x - \frac{\pi}{2} = \arccos\frac{x}{6}$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + \arccos\frac{x}{6}$

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2} + \arccos\frac{x}{6}$$

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{6}\right)^2}} \cdot \frac{1}{6} < 0 \quad \text{в} \quad \left[\tfrac{3}{4}\pi, \pi\right]$$

За $x \in \left[\frac{3}{4}\pi, \pi\right]$ $\quad |\varphi'(x)| \le \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2}} \cdot \frac{1}{6} < \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Освен това $\quad x_1 = \frac{\pi}{2} + \arccos\frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{2} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4}\pi$

Последното гарантира, че всички членове на редицата са в $\left[\frac{3}{4}\pi, \pi\right]$

Следователно тя е сходяща и $|x_n - \xi| \le q^n |x_0 - \xi| \le \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$