$\boxed{\text{Зад 1}}$

Да разгледаме ф-ята $f(t) = (x-t)^{n+1}$ x – фиксирано

От формулата за остатъка при интерполиране

$$f(t) - L_n(f;t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(t)$$

$$(x-t)^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} (x-x_k)^{n+1} l_{kn}(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(t)$$

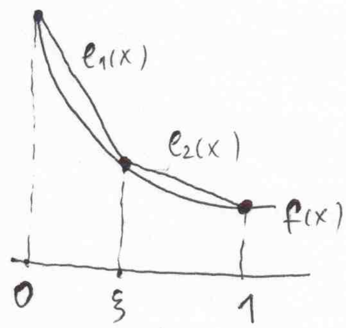
Като положим $t = x$ и вземем предвид, че $f^{(n+1)}(\xi) = (-1)^{n+1}.(n+1)!$

получаваме

$$-\sum_{k=0}^{n} (x-x_k)^{n+1} l_{kn}(x) = \frac{\cancel{(n+1)!}\,(-1)^{n+1}}{\cancel{(n+1)!}}\,\omega(x)$$

Или $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (x-x_k)^{n+1} l_{kn}(x) = (-1)^{n}\,\omega(x)$

Зад 2



$$P_\xi(x) = \begin{cases} l_1(x) & x \in [0, \xi] \\ l_2(x) & x \in [\xi, 1] \end{cases}$$

$$\max_{x\in[0,\xi]} |f(x) - l_1(x)| \le \max_{y\in[0,\xi]} \frac{|f''(y)|}{2!} \max_{x\in[0,\xi]} |x(x-\xi)|$$

$$\le \frac{\xi^2}{2} \cdot \frac{\xi^2}{4} = \frac{\xi^4}{8}$$

$$\max_{x\in[\xi,1]} |f(x) - l_2(x)| \le \max_{y_2\in[\xi,1]} \frac{|f''(y_2)|}{2!} \max_{x\in[\xi,1]} |(x-\xi)(x-1)|$$

$$\le \frac{1}{2} \frac{(1-\xi)^2}{4} = \frac{(1-\xi)^2}{8}$$

$$\max_{[0,1]} |f(x) - P_\xi(x)| \le \max \left\{ \frac{\xi^4}{8}, \frac{(1-\xi)^2}{8} \right\}$$

$$\frac{\xi^4}{8} \le 0.02, \quad \frac{\xi^4}{8} \le \frac{2}{100}, \quad \xi^4 \le \frac{16}{100}, \quad \xi \le \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\frac{(1-\xi)^2}{8} \le \frac{2}{100}, \quad (1-\xi)^2 \le \frac{16}{100} \quad 1-\xi \le \frac{4}{10}, \quad \xi \ge \frac{3}{5}$$

Следователно при $\xi \in \left[\frac{3}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right]$ $\max_{x\in[0,1]} |f(x) - P_\xi(x)| \le 0.02$

$\boxed{\text{Зад 3}}$

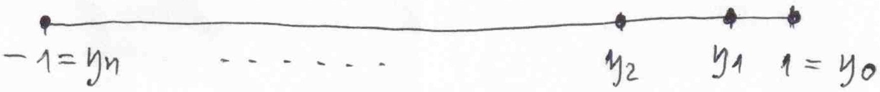
Да напишем формулата на Лагранж за $P(x)$ с възли екстремалните точки на $T_n(x)$ $y_k = \cos\frac{k\pi}{n}$ $k=0,..,n$

Нека $\ell_{kn}(x)$ са съответните базисни полиноми.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} P(y_k)\ell_{kn}(x)$$

$$\text{за } \forall x \quad |P(x)| \le \sum_{k=0}^{n} \underbrace{|P(y_k)|}_{\le 1}|\ell_{kn}(x)| \le \sum_{k=0}^{n} |\ell_{kn}(x)|$$

$$\ell_{kn}(x) = \frac{(x-y_0)\ldots(x-y_{k-1})(x-y_{k+1})\ldots(x-y_n)}{\underset{>0}{(y_k-y_0)}\ldots\underset{>0}{(y_k-y_{k-1})}\,\underset{<0}{(y_k-y_{k+1})}\ldots\underset{<0}{(y_k-y_n)}}$$



В знаменателя на $\ell_{kn}(x)$ има k отрицателни множителя

За $x \geqq 1$ всички множители в числителя на $\ell_{kn}(x)$ са ≥ 0

За $x \geqq 1$ $\quad |\ell_{kn}(x)| = (-1)^k \ell_{kn}(x)$

За $x \le -1$ всички $\underline{n}$ на брой множители в числителя на $\ell_{kn}(x)$ са ≤ 0

За $x \le -1$ $\quad |\ell_{kn}(x)| = (-1)^{k+n}\ell_{kn}(x)$

$$\text{За } x \ge 1 \quad |P(x)| \le \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \ell_{kn}(x) = \sum_{k=0}^{n} T_n(y_k)\ell_{kn}(x) = T_n(x) = |T_n(x)|$$

$$\text{за } x \le -1 \quad |P(x)| \le (-1)^n T_n(x) = |T_n(x)|$$

Зад 4

$$f(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n)$$

Нека $x_0 = -1$. Заедно с $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ имаме $\underline{n+1}$ различни точки

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

$$(1) \quad \omega(x) = f(x)(x+1)$$

Диференцираме (1)

$$(2) \quad \omega'(x) = f'(x)(x+1) + f(x)$$

Полагаме $x = x_k \quad k=1,\dots n$ в (2) и получаваме

$$\omega'(x_k) = f'(x_k)(1+x_k) \quad k=1,\dots n$$

Въвеждаме ф-ята

$$g(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = x^n\left(\frac{1}{x}-x_1\right)\dots\left(\frac{1}{x}-x_n\right)$$

$$= (1-x_1x)\dots(1-x_nx)$$

$$= (-1)^n x_1x_2\dots x_n \cdot x^n + \underset{\pi_{n-1}}{\underset{\cap}{P_{n-1}}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^n f(1/x_k)}{f'(x_k)(1+x_k)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} + \frac{g(-1)}{\omega'(-1)} - \frac{g(-1)}{\omega'(-1)}$$

$$= g[x_0,\dots,x_n] - \frac{g(-1)}{\omega'(-1)}$$

$$= (-1)^n x_1x_2\dots x_n - \frac{(1+x_1)\dots(1+x_n)}{(-1-x_1)\dots(-1-x_n)}$$

$$= (-1)^n x_1x_2\dots x_n + (-1)^{n+1}$$

$$= (-1)^{n+1}(1-x_1x_2\dots x_n)$$

Зад 5

$$\omega_k(x) = (x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)$$

(1) $\omega_k(x).(x-x_k) = \omega(x)$

Диференцираме (1)

(2) $\omega_k'(x)(x-x_k) + \omega_k(x) = \omega'(x)$

При $x = x_k$ получаваме

(3) $\omega_k(x_k) = \omega'(x_k)$

Диференцираме (2)

$$\omega_k''(x)(x-x_k) + 2\omega_k'(x) = \omega''(x)$$

При $x = x_k$ получаваме

(4) $2\omega_k'(x_k) = \omega''(x_k)$

$$\varphi_k(x) = \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right)\frac{\omega_k^2(x)}{\omega'^2(x_k)}$$

$$\varphi_k'(x) = -\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\cdot\frac{\omega_k^2(x)}{\omega'^2(x_k)} + \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right)\frac{2\omega_k(x)\omega_k'(x)}{\omega'^2(x_k)}$$

При $x = x_k$ получаваме

$$\varphi_k'(x_k) = -\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\frac{\omega_k^2(x_k)}{\omega'^2(x_k)} + 2\frac{\omega_k(x_k)\omega_k'(x_k)}{\omega'^2(x_k)}$$

Като използваме (3) и (4) изразяваме всичко с ω

$$\varphi_k'(x_k) = -\frac{\omega''(x_k)\omega'^2(x_k)}{\omega'(x_k)\omega'^2(x_k)} + \frac{\omega''(x_k)\omega'(x_k)}{\omega'^2(x_k)} = 0$$

Зад. 6

Да допуснем, че

(1) $f(x) = a_0 + a_1 e^{2x} + a_2 e^{5x^2}$ има 3 различни нули в $(-\infty, +\infty)$

Трябва да покажем, че $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

По Теоремата на Рол

$f'(x) = 2a_1 e^{2x} + a_2 e^{5x^2} . 10x$ ще има 2 различни нули

(2) $g(x) = e^{-2x} f'(x) = 2a_1 + 10a_2 x e^{5x^2-2x}$ има 2 различни нули

По Теоремата на Рол

$g'(x) = 10a_2 \left(e^{5x^2-2x} + x(10x-2) e^{5x^2-2x} \right)$ има нула

(3) $g'(x) = 10a_2 \underset{\underset{0}{\vee}}{e^{5x^2-2x}} \underset{\underset{0}{\vee}}{(10x^2-2x+1)}$ има нула

От (3) получаваме, че $a_2 = 0$. Последователно от (2) и (1) получаваме, че $a_1 = 0$ и $a_0 = 0$.