Глава 4

СРЕДНОКВАДРАТИЧНИ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Както обикновено с π_n ще означаваме съвкупността на всички алгебрични полиноми от степен, не по-висока от n.

Ако f и g са функции с интегруем квадрат в интервала $[a, b]$, $p(x) \geq 0$ е непрекъсната функция в $[a, b]$ и $\int_\beta^\alpha p(x)dx > 0$ за всеки $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, то

$$\|f - g\|_{L_2} = \left\{ \int_a^b p(x)|f(x) - g(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

се нарича *средноквадратично разстояние с тегло p между f и g*, а с $\|f\|_{L_2}$ се означава *средноквадратичната норма на f*.

С $E_n(f)_{L_2} = \inf\limits_{p \in \pi_n} \|f - p\|_{L_2}$ се означава най-доброто приближение на функцията f с полиноми от π_n относно средноквадратичното разстояние, а полиномът $Q \in \pi_n$, за който $E_n(f)_{L_2} = \|f - Q\|_{L_2}$, се нарича *полином на най-добро средноквадратично приближение за f*.

За всяка интегруема функция f и за всяко естествено n съществува в π_n единствен полином на най-добро средноквадратично приближение.

Нека са фиксирани точки $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ и положителни числа (тегла) $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. За функция f с дефиниционна област съвкупността $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ определяме

$$\|f\|_{l_2} = \left\{ \sum_{i=1}^m \gamma_i |f(x_i)|^2 \right\}^{1/2}.$$

Задачата за намиране на алгебричен полином $P \in \pi_n$, минимизиращ нормата $\|f - P\|_{l_2}$, се нарича *приближение по метода на най–малките квадрати.*

Задача 4.1. Дадена е таблицата $\{x_i, y_i\}_{i=0}^{n}$, $\quad x_0 < x_1 < \ldots < x_m$. Намерете права $p(x) = Mx + B$, за която величината

$$S(M, B) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - Mx_i - B)^2$$

да е минимална. Докажете, че задачата има винаги единствено решение.

Задача 4.2. За таблицата $\{x_m, f(x_m)\}_{m=0}^{n}$, $x_m = m/n$, намерете при ближение с полином от първа степен по метода на най–малките квадрати.

Задача 4.3. По метода на най–малките квадрати намерете полином от първа степен за таблицата :

x	0	1	2	3	4
y	1	2	1	0	4

.

Задача 4.4. По метода на най–малките квадрати намерете параболите, които приближават следните таблици:

а)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	15	-9	10	7	6

;

б)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	15	1	10	7	6

;

в)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	4	-1	1	5	6	13

.

Задача 4.5. Покажете, че ако функцията f е четна (нечетна) в интервала $[-a, a]$, то полиномът ѝ на най-добро средноквадратично приближение от произволна степен е също четен (нечетен).

Задача 4.6. По метода на най–малките квадрати намерете полином от трета степен, приближаващ функцията $\sin \pi x$, като използувате само стойностите ѝ в точките

$$x_0 = -1,\ x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = 1.$$

В следващите четири задачи (4.7—4.10) да се минимизира l_2-разстоянието между логаритмите на данните и приближението.

Задача 4.7. Намерете формула от вида $y(x) = Ae^{Mx}$ за приближаване на $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{n}$.

Задача 4.8. Намерете формула от вида $y(x) = A2^{Mx}$ за приближаване на

x	1	2	3	4	5
y	1	2	4	8	32

.

Задача 4.9. Намерете формула от вида $y(x) = Ae^{Mx} + B$ за приближаване на $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{n}$.

Задача 4.10. Намерете формула от вида $y(x) = ax^b + B$ за приближаване на $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{n}$.

Задача 4.11. По метода на най–малките квадрати намерете полином от първа степен за таблицата

x	x_0	x_1	$\dots$	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_{n-1}	y_n
p	p_0	p_1	$\dots$	p_{n-1}	p_n

,

където p_i е теглото в точката x_i.

Задача 4.12. Нека $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}x_i = b_k,\ k = 1, 2, \dots, m,\ m \geq n$, е линейна система с n неизвестни $x_1, x_2, \dots, x_n$ и m уравнения. Докажете, че системата $\dfrac{\partial s}{\partial x_p} = 0,\ p = 1, 2, \dots, n$, където $s(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{m}\left(b_k - \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}x_i\right)^2$, е еквивалентна на системата $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$ (тук с A е означена матрицата $\|a_{ik}\|,\ i = 1, 2, \dots, m,\ k = 1, 2, \dots, n$, а A^{T} е транспонираната ѝ матрица).

Задача 4.13. По метода на най–малките квадрати решете преопределената система

$$\left|\begin{array}{l} x - y = 1, \\ x + y = 1, \\ x + y = -1, \\ x - y = -1. \end{array}\right.$$

Дайте геометричен смисъл на решението.

Задача 4.14. Като използувате зад. 4.12, решете системите:

а) $\left|\begin{array}{l} x+1=1, \\ y+z=1, \\ x+z=1, \\ x-y+z=1; \end{array}\right.$ б) $\left|\begin{array}{l} x+y=3, \\ 2x-y=0,2, \\ x+3y=7, \\ 3x+y=5; \end{array}\right.$

в) $\left|\begin{array}{l} x+y+z=1, \\ x+2y+z=2, \\ x+3y+z=3, \\ x-4y+z=4, \\ x+5y+z=4. \end{array}\right.$

Задача 4.15. Дадена е таблицата $\{x_i, y_i\}_{i=0}^{n}$, $x_i = x_0 + ih$. По метода на най–малките квадрати намерете парабола, която приближава дадената таблица.

Задача 4.16. Като използувате парабола, построена по метода на най–малките квадрати за точките

$$\{x_i, y_i\}_{i=k-2}^{k+2},\ x_{k+i} = x_{k-2} + (i+2)h,\ \ i = -2, -1, \dots, 2,$$

изведете формулите

а) $y(x_{k-2}) \approx y_{k-2} + \dfrac{1}{5}\Delta^3 y_{k-2} + \dfrac{3}{35}\Delta^4 y_{k-2}$;

б) $y(x_{k-1}) \approx y_{k-1} - \dfrac{2}{5}\Delta^3 y_{k-2} - \dfrac{1}{7}\Delta^4 y_{k-2}$;

в) $y(x_k) \approx y_k - \dfrac{3}{35}(y_{k-2} - 4y_{k-1} + 6y_k - 4y_{k+1} + y_{k+2})$;

г) $y'(x_k) \approx \dfrac{1}{10h}(-2y_{k-2} - y_{k-1} + y_{k+1} + 2y_{k+2})$.

Задача 4.17. Като използувате парабола, построена по метода на най–малките квадрати по точките $\{x_i, y_i\}_{i=0}^{3}$, $x_i = x_0 + ih$, изведете формулите:

а) $y'_0 \approx \dfrac{1}{20h}(-21y_0 + 13y_1 + 17y_2 - 9y_3)$;

б) $y'_1 \approx \dfrac{1}{20h}(-11y_0 + 3y_1 + 7y_2 + y_3)$;

в) $y'_2 \approx \dfrac{1}{20h}(-11y_3 - 3y_2 - 7y_1 - y_0)$;

г) $y'_3 \approx \dfrac{1}{20h}(21y_3 - 13y_2 - 17y_1 + 9y_0)$.

Задача 4.18. Като използувате парабола, построена по метода на най–малките квадрати по точките $\{x_i, y_i\}_{i=-3}^{3}$, $x_i = x_{-3}+(i+3)h$, изведете следната приближена формула за числено диференциране:

$$y_0' \approx \frac{1}{28h}(-3y_{-3} - 2y_{-2} - y_{-1} - y_1 + 2y_2 + 3y_3).$$

Задача 4.19. Нека $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ е полиномът на най-добро средноквадратично приближение от степен n на функцията f в интервала $[0, 1]$. Покажете, че съществуват сериозни изчислителски трудности, ако коефициентите a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, при $n > 4$ се определят от линейната система $\dfrac{\partial s}{\partial a_k} = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$, където $s(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)^2 dx$.

Задача 4.20. Нека $p_k(x) = x^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i^{(k)} x^i$, $k = 0, 1, \ldots$, е редица от ортогонални полиноми относно скаларното произведение (f, g), за което $(xf, g) = (f, xg)$. Докажете, че е в сила рекурентната зависимост

$$p_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1})p_n(x) + \beta_{n+1}p_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

където $\alpha_{n+1} = (xp_n, p_n)/(p_n, p_n)$; $\quad \beta_{n+1} = -(p_n, p_{n-1})/(p_{n-1}, p_{n-1})$.

Задача 4.21. Нека $p_k(x) = x^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i^{(k)} x^i$, $k = 0, 1, \ldots$, е редица от ортогонални полиноми относно скаларното произведение (f, g). Докажете, че:

а) два съседни полинома не могат да имат обща нула;

б) ако $(f, g) = \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx, p(x) \geq 0$, то всички нули на полинома p_k, $k = 1, 2, \ldots$, са различни, реални и лежат в интервала (a, b);

в) ако $(xf, g) = (f, xg)$, то от $p_{k+1}(x_0) = 0$ следва

$$\mathrm{sgn} p_k(x_0) = -\mathrm{sgn} p_{k+2}(x_0);$$

г) ако $(f, g) = \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx$, $p(x) \geq 0$, то нулите на p_k и p_{k+1} взаимно се разделят.

Задача 4.22. Докажете, че полиномите на Льожандър

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(1 - x^2)^n] \tag{4.1}$$

удовлетворяват диференциалните уравнения:

а) $(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n + 1)P_n(x) = 0$;

б) $P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = -(2n + 1)P_n'(x)$.

Задача 4.23. Нека $P_n(x)$ е полином на Льожандър, вж. (4.1). Докажете, че:

а) $P_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\theta)^n \, d\theta$ (формула на Лаплас);

б) $|P_n(x)| \leq 1$ за всяко $x \in [-1, 1]$.

Задача 4.24. Докажете, че

$$(1-x)^n P_n\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 1 + \binom{n}{1}^2 x + \binom{n}{2}^2 x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 x^{n-1} + x^n,$$

където $P_n(x)$ е полином на Льожандър, вж. (4.1).

Задача 4.25. Докажете, че за полиномите на Якоби

$$(4.2)\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}],$$

$\alpha, \beta > -1$, е изпълнено:

а) $P_n^{(\alpha,\beta)}x = \dfrac{1}{2^n n!}\left[\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}x^n + (\alpha-\beta)\dfrac{n\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}x^{n-1} + \ldots\right];$

б) $$\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)dx$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{за } m \neq n, \\ \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} & \text{за } m = n. \end{cases}$$

Задача 4.26. Докажете, че полиномите на Якоби, дефинирани с (4.2), удовлетворяват рекурентната зависимост

$$\frac{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+1)}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)$$
$$= (x - \frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)})P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$
$$+ \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

Задача 4.27. Докажете, че полиномите на Якоби, дефинирани с (4.2), удовлетворяват

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}, \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = \frac{(-1)^n\Gamma(\beta+n+1)}{n!\Gamma(\beta+1)}.$$

Задача 4.28. Докажете, че полиномите на Чебишов от първи род

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| \leq 1,$$

и от втори род

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| \leq 1,$$

удовлетворяват равенствата:

а) $\displaystyle\int_{-1}^{1} U_k(x)U_i(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{за } \ k \neq i, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{за } \ k = i, \end{cases}$;

б) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{за } \ m \neq n, \\ \pi & \text{за } \ n = m \neq 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{за } \ n = m = 0; \end{cases}$

в) $U_n(x) = T'_{n+1}(x)/(n+1)$;

г) $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$;

д) $(1-x^2)U''_n(x) - 3xU'_n(x) + (n^2 - 4n)U_n(x) = 0$.

Задача 4.29. Докажете, че полиномите на Лагер

$$L_n^{(a)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x}), \alpha > -1$$

удовлетворяват условията:

а) $L_n^{(a)}(x) = x^n - n(\alpha+n)x^{n-1} + \dots$;

б) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{\alpha}e^{-x}L_m^{(a)}(x)L_n^{(a)}(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{за } \ m \neq n, \\ n!\Gamma(\alpha+n+1) & \text{за } \ m = n; \end{cases}$

в) $x\left[L_n^{(a)}(x)\right]'' + (\alpha+1-x)\left[L_n^{(a)}(x)\right]' + nL_n^{(a)}(x) = 0$;

г) $L_{n+1}^{(a)}(x) - (x-\alpha-2n-1)L_n^{(a)}(x) + n(\alpha+n)L_{n-1}^{(a)}(x) = 0$.

Задача 4.30. Докажете, че полиномите на Ермит

$$H_n(x) = e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

удовлетворяват условията:

а) $H_n(x) = (-2)^n x^n + \dots$;

б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)q(x)dx = 0$, ако q е полином от степен $\leq n-1$;

в) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n^2(x)dx = 2^n n!\sqrt{\pi}$;

г) $H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$;

д) $H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0$.

РЕШЕНИЯ, УПЪТВАНИЯ И ОТГОВОРИ

4.1. Условията за минимум на функцията $s(M, B)$ са

$$\frac{\partial s}{\partial M} = -2\sum_{i=0}^{n}(y_i - Mx_i - B)x_i = 0,\ \frac{\partial s}{\partial B} = -2\sum_{i=0}^{n}(y_i - Mx_i - B) = 0$$

и ако $s_k = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^k,\ t_k = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i^k,\ k = 0, 1, 2$, то

$$M = \frac{s_0 t_1 - s_1 t_0}{s_0 s_2 - s_1^2},\quad B = \frac{s_2 t_0 - s_1 t_1}{s_0 s_2 - s_1^2}.$$

Единствеността следва от

$$s_0 s_2 - s_1^2 = (n+1)\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2 > 0.$$

Последното неравенство е пряко следствие от неравенството на Коши — Буняковски

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \sum_{i=0}^{n} a_i^2 \sum_{i=0}^{n} b_i^2 \quad \text{при} a_i = x_i \ \text{ и } b_i = 1.$$

Равенство се достига само при $a_i = b_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ — условия, които тук не са изпълнени.

4.2. След директно използване на зад. 4.1 се получава, че търсеният полином има вида

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)[(2n - 3i + 1) + 3(2i - n)x].$$

4.3. Пряко от зад. 4.1 следва $y(x) = \dfrac{2}{5}(x+2)$.

4.4. а) Нека търсеният полином е $P(x) = Ax^2 + Bx + C$, т. е. трябва да се минимизира функцията $s(A, B, C) = \sum\limits_{i=0}^{5}(y_i - Ax_i^2 - Bx_i - C)^2$. От условията за минимум

$$\frac{\partial s}{\partial A} = -2\sum_{i=0}^{5}(y_i - Ax_i^2 - Bx_i - C)x_i^2 = 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial B} = -2\sum_{i=0}^{5}(y_i - Ax_i^2 - Bx_i - C)x_i = 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial C} = -2\sum_{i=0}^{5}(y_i - Ax_i^2 - Bx_i - C) = 0$$

се получава $P(x) = \dfrac{1}{7}(-2x^2 + 11x + 30)$;

б) $P(x) = -x^2 + 2x + 8$;

в) $P(x) = x^2 + x + 1$.

4.5. Нека за определеност f е четна функция и $P(x)$ е полиномът ѝ на най-добро средноквадратично приближение от степен n. От

$$\begin{aligned}\left(\int_{-a}^{a}(f(x)-P(x))^2\,dx\right)^{1/2} &= \left(\int_{-a}^{a}(f(-t)-P(-t))^2\,dt\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_{-a}^{a}(f(x)-P(-x))^2\,dx\right)^{1/2}\end{aligned}$$

следва, че и полиномът $P(-x)$ е полином на най-добро средноквадратично приближение на f от степен n. От единствеността на полинома следва, че $P(x) \equiv P(-x)$, а това е възможно само ako P е четен.

4.6. $P(x) = \dfrac{8}{3}(x-x)^3$.

4.7. Нека $z = \ln y$, $B = \ln A$. Тогава $z = \ln y = B + Mx$ и във формулата $z = B+Mx$ коефициентите B и M се определят от таблицата, както в зад. 4.1. Окончателно

$$A = e^B,\ M = \frac{s_0t_1 - s_1t_0}{s_0s_2 - s_1^2},\ B = \frac{s_2t_0 - s_1t_1}{s_0s_2 - s_1^2},$$

където $s_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k,\ t_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \ln y_i,\ k = 0,1,2.$

4.8. Аналогично на зад. 4.7 след полагането $z = \log_2 y$, $B = \log_2 A$, се получава $z = B + Mx$, като B и M се определят от таблицата

$$\{x_i, z_i\}_{i=1}^{5} = \{x_i, \log_2 y_i\}_{i=1}^{5}.$$

Окончателно $M = 6/5$, $B = -7/5$ и $y(x) = 2^{(6x-7)/5}$.

4.9. След логаритмуване се получава $\ln(y - B) = \ln A + Mx$ и B се определя по следния начин: от

$$y_1 = Ae^{Mx_1} + B,\ y_n = Ae^{Mx_n} + B,\ \bar{y} = Ae^{M\bar{x}} + B,$$

където $\bar{x} = (x_1 + x_n)/2$, а $\bar{y}$, което съответства на $\bar{x}$, може да се получи чрез линейна интерполация от две съседни стойности. От равенствата

$$\begin{aligned}(y_1 - B)(y_n - B) &= A^2e^{Mx_1}e^{Mx_n} = A^2e^{M(x_1+x_n)}\\ &= A^2e^{2M\bar{x}} = (Ae^{M\bar{x}})^2 = (\bar{y} - B)^2,\end{aligned}$$

т. е. $(y_1 - B)(y_n - B) = (\bar{y} - B)^2$ и $B = (y_1y_n - \bar{y}^2)/(y_1 + y_n - 2\bar{y})$. След определянето на B задачата става еквивалентна на зад. 4.7.

4.10. След полагането $\ln(y - c) = Y$, $\ln x = X$, $\ln a = A$ се получава $Y = bX + A$. Първо се определя c от равенствата

$$y_1 = c_1 + ax_1^b,\ y_n = c + ax_n^b,\ \bar{y} = c + a\bar{x}^b,$$

където $\bar{x} = \sqrt{x_1x_n}$, а $\bar{y}$ е съответната на $\bar{x}$ стойност, получена например чрез линейна интерполация на две съседни на $\bar{x}$ точки. От

$$(y_1 - c)/(y_n - c) = a^2(x_1x_n)^b = (a\bar{x}^b)^2 = (\bar{y} - c)^2$$

следва $(y_1-c)(y_n-c)=(\bar{y}-c)^2$, откъдето $c=(y_1y_n-\bar{y}^2)/(y_1+y_n-2\bar{y})$. По-нататък намирането на A и b във формулата $Y=bX+A$ от таблицата $\{X_i,Y_i\}_{i=1}^n=\{\ln x_i,\ln(y_i-c)\}_{i=1}^n$ става, както в зад. 4.1.

4.11. Ако търсеният полином е $P(x)=ax+b$, то трябва да се минимизира функцията $s(a,b)=\sum_{i=0}^{n}(y_i-ax_i-b)^2p_i$. От условията за минимум на $s(a,b)$ се получава

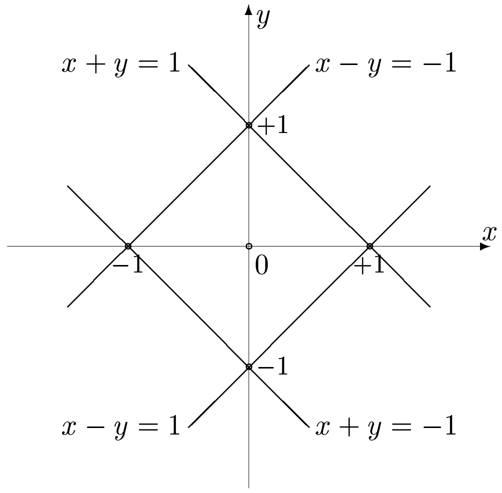
$$\frac{\partial s}{\partial a}=-2\sum_{i=0}^{n}(y_i-ax_i-b)p_ix_i=0,\quad \frac{\partial s}{\partial b}=-2\sum_{i=0}^{n}(y_i-ax_i-b)p_i=0,$$

т. е. $a=\dfrac{s_0t_1-s_1t_0}{s_0s_2-s_1^2}$, $b=\dfrac{s_2t_0-s_1t_1}{s_0s_2-s_1^2}$, където

$$s_k=\sum_{i=0}^{n}p_ix_i^k,\ t_k=\sum_{i=0}^{n}p_iy_ix_i^k,\ k=0,1,2.$$

4.12. Еквивалентността се проверява директно.

4.13. От зад. 4.12 следва $x=y=0$. За геометричния смисъл вижте следния чертеж:



4.14. а) $x=3/7,\ y=3/7,\ z=3/7$;
б) $x=161.8/155,\ y=302/155$;
в) $x=p,\ y=7/10,\ z=\dfrac{1}{2}-p$, където p е параметър.

4.15. Нека търсената парабола е $p_2(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$. След смяната $t=\dfrac{x-x_k}{h}$, $0\le k\le n$, се получава $p_2(x)=p_2(x_k+ht)=\bar{p}_2(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$ и

$$
\begin{aligned}
s(b_0,b_1,b_2) &= \sum_{i=0}^{n}(y_i-p_2(x_i))^2=\sum_{i=0}^{n}(y_i-p_2(x_k+t_ih))^2\\
&= \sum_{i=0}^{n}(y_i-\bar{p}_2(t_i))^2=\sum_{i=0}^{n}(y_i-a_0-a_1t_i-a_2t_i^2)\\
&= B(a_0,a_1,a_2).
\end{aligned}
$$

От условието за минимум на функцията $B(a_0,a_1,a_2)$ следва

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial a_0} &= -2\sum_{i=0}^{n}(y_i-a_0-a_1t_i-a_2t_i^2)=0,\\
\frac{\partial B}{\partial a_1} &= -2\sum_{i=0}^{n}(y_i-a_0-a_1t_i-a_2t_i^2)t_i=0,\\
\frac{\partial B}{\partial a_2} &= -2\sum_{i=0}^{n}(y_i-a_0-a_1t_i-a_2t_i^2)t_i^2=0
\end{aligned}
$$

и след полагането

$$
s_p=\sum_{i=0}^{n}t_i^p=\sum_{i=0}^{n}(i-k)^p,\ T_p=\sum_{i=0}^{n}t^iy_i=\sum_{i=0}^{n}(i-k)^py_i
$$

условията за минимум на $B(a_0,a_1,a_2)$ приемат вида

$$
\begin{aligned}
a_2s_2+a_1s_1+a_0s_0 &= T_0,\\
a_2s_3+a_1s_2+a_0s_1 &= T_1,\\
a_2s_4+a_1s_3+a_0s_2 &= T_2.
\end{aligned}
$$

Ако

$$
\Delta=\begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0\\ s_3 & s_2 & s_1\\ s_4 & s_3 & s_2\end{vmatrix},\ \Delta_0=\begin{vmatrix} s_2 & s_1 & T_0\\ s_3 & s_2 & T_1\\ s_4 & s_3 & T_2\end{vmatrix},
$$

$$
\Delta_1=\begin{vmatrix} s_2 & T_0 & s_0\\ s_3 & T_1 & s_1\\ s_4 & T_2 & s_2\end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix} T_0 & s_1 & s_0\\ T_1 & s_2 & s_1\\ T_2 & s_3 & s_2\end{vmatrix},
$$

от формулите на Крамер следва

$$
a_0=\frac{\Delta_0}{\Delta},\ a_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ a_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}.
$$

4.16. При означенията от зад. 4.15 и $t=\dfrac{x-x_k}{h}$ се получава

$$
t_{k-2}=-2,\ t_{k-1}=-1,\ t_k=0,\ t_{k+1}=1,\ t_{k+2}=2;
$$
$$
s_0=5,\ s_1=0,\ s_2=10,\ s_3=0,\ s_4=34.
$$

От

$$
\Delta=\begin{vmatrix} 10 & 0 & 5\\ 0 & 10 & 0\\ 34 & 0 & 10\end{vmatrix}=-700,
$$

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 10 & 0 & T_0 \\ 0 & 10 & T_1 \\ 34 & 0 & T_2 \end{vmatrix} = \frac{17T_0 - 5T_2}{35},$$

$$a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 10 & T_0 & 5 \\ 0 & T_1 & 0 \\ 34 & T_2 & 10 \end{vmatrix} = \frac{T_1}{10},$$

$$a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} T_0 & 0 & 5 \\ T_1 & 10 & 0 \\ T_2 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \frac{T_2 - 2T_0}{14},$$

където $T_p = \sum\limits_{i=k-2}^{k+2} t_i^p y_i,\ p = 0, 1, 2;$

$$\begin{aligned}
\text{а) } y(x_{k-2}) &\approx \bar{p}_2(t_{k-2}) = a_0 - 2a_1 + 4a_2 = \frac{17T_0 - 5T_2}{35} - 2\frac{T_1}{10} + 4\frac{T_2 - 2T_0}{14} \\
&= \frac{5T_2 - 7T_1 - 3T_0}{35} = \frac{5(4y_{k-2} + y_{k-1} + y_{k+1} + 4y_{k+2})}{35} \\
&- \frac{7(-2y_{k-2} - y_{k-1} + y_{k+1} + 2y_{k+2})}{35} \\
&- \frac{3(y_{k-2} + y_{k-1} + y_k + y_{k+1} + y_{k+2})}{35} \\
&= y_{k-2} + \frac{1}{5}\Delta^3 y_{k-2} + \frac{3}{35}\Delta^4 y_{k-2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } y(x_{k-1}) &\approx \bar{p}_2(t_{k-1}) = a_0 - a_1 + a_2 = \frac{17T_0 - 5T_2}{35} - \frac{T_1}{10} + \frac{T_2 - 2T_0}{14} \\
&= \frac{24T_0 - 7T_1 - 5T_2}{70} = \frac{24(y_{k-2} + y_{k-1} + y_k + y_{k+1} + y_{k+2})}{70} \\
&- \frac{7(-2y_{k-2} - y_{k-1} + y_{k+1} + 2y_{k+2})}{70} \\
&- \frac{5(4y_{k-2} + y_{k-1} + y_{k+1} + y_{k+2})}{70} \\
&= y_{k-1} - \frac{2}{5}\Delta^3 y_{k-2} - \frac{1}{7}\Delta^4 y_{k-2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{в) } y(x_k) &\approx \bar{p}_2(t_k) = a_0 = \frac{17T_0 - 5T_2}{35} \\
&= \frac{-3y_{k-2} + 12y_{k-1} + 17y_k + 12y_{k+1} - 3y_{k+2}}{35} \\
&= y_k - \frac{3}{35}(y_{k-2} - 4y_{k-1} + 6y_k - 4y_{k+1} + y_{k+2});
\end{aligned}$$

$$\text{г)}\quad y'(x_k) \approx \frac{d\bar{p}_2(t)}{dt}.\frac{dt}{dx}\bigg|_{t=t_k} = \bar{p}_2'(t_k).\frac{1}{h} = \bar{p}_2'(0).\frac{1}{h}$$
$$= \frac{T_1}{10h} = \frac{1}{10h}(-2y_{k-2} - y_{k-1} + y_{k+1} + 2y_{k+2}).$$

4.17. При означенията от зад. 4.15 и $t = \dfrac{x - x_0}{h}$ следва

$$t_0 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 2,\ t_3 = 3;$$
$$s_0 = 4,\ s_1 = 6,\ s_2 = 14,\ s_3 = 36,\ s_4 = 98;$$
$$T_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3,\ T_1 = y_1 + 2y_2 + 3y_3,\ T_2 = y_1 + 4y_2 + 9y_3.$$

От тях се получава

$$a_2 = (T_2 - 3T_1 + T_0)/4, \quad a_1 = (-15T_2 + 49T_1 - 21T_0)/20,$$
$$a_0 = (19T_0 - 21T_1 + 5T_2)/20;$$

$$\text{а)}\quad y_0' \approx \frac{d\bar{p}_2(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\bigg|_{t=t_0} = \bar{p}_2'(t_0).\frac{1}{h} = \bar{p}_2'(0)\frac{1}{h} = \frac{a_1}{h}$$
$$= \frac{-15T_2 + 49T_1 - 21T_0}{20h} = \frac{1}{20h}(-21y_0 + 13y_1 + 17y_2 - 9y_3);$$

$$\text{б)}\quad y_1' \approx \frac{d\bar{p}_2(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\bigg|_{t=t_1} = \bar{p}_2'(t_1).\frac{1}{h} = \bar{p}_2'(1)\frac{1}{h}$$
$$= \frac{a_1 + 2a_2}{h} = \frac{1}{20h}(-11y_0 + 3y_1 + 7y_2 + y_3);$$

$$\text{в)}\quad y_2' \approx \frac{d\bar{p}_2(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\bigg|_{t=t_2} = \bar{p}_2'(t_2).\frac{1}{h} = \bar{p}_2'(2)\frac{1}{h}$$
$$= \frac{a_1 + 4a_2}{h} = \frac{1}{20h}(-y_0 - 7y_1 - 3y_2 + 11y_3);$$

$$\text{г)}\quad y_3' \approx \frac{d\bar{p}_2(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\bigg|_{t=t_3} = \bar{p}_2'(t_3).\frac{1}{h} = \bar{p}_2'(3)\frac{1}{h}$$
$$= \frac{a_1 + 6a_2}{h} = \frac{1}{20h}(9y_0 - 17y_1 - 13y_2 + 21y_3).$$

4.18. При означенията от зад. 4.15 и $t = \dfrac{x - x_0}{h}$ следва

$$t_{-3} = -3,\ t_{-2} = -2,\ t_{-1} = -1,\ t_0 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 2,\ t_3 = 3,$$
$$s_0 = 7,\ s_1 = 0,\ s_2 = 28,\ s_3 = 0,\ s_4 = 196,$$
$$T_0 = y_{-3} + y_{-2} + y_{-1} + y_0 + y_1 + y_2 + y_3,$$
$$T_1 = -3y_{-3} - 2y_{-2} - y_{-1} + y_1 + 2y_2 + 3y_3,$$
$$T_2 = 9y_{-3} + 4y_{-2} + y_{-1} + y_1 + 4y_2 + 9y_3 \quad \text{и} \quad y_0' \approx \frac{a_1}{h} = \frac{T_1}{28h}.$$

4.19. Линейната система $\dfrac{\partial s}{\partial a_k} = 0,\ k = 0, 1, \dots, n$, има за матрица матрицата на Хилберт

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \dots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}.$$

За пресмятане на детерминантата на матрицата на Хилберт от всички редове се изважда последният

$$\det H_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

и след това от всички стълбове се изважда последният

$$\begin{aligned} \det H_n &= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \begin{vmatrix} \frac{n}{n+1} & \frac{n-1}{2(n+1)} & \dots & \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{n+1} \\ \frac{n}{2(n+2)} & \frac{n-1}{3(n+2)} & \dots & \frac{1}{(n+1)(n+2)} & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{n}{n.2n} & \frac{n-1}{(n+1)2n} & \dots & \frac{1}{(2n-1)2n} & \frac{1}{2n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} \det H_{n-1}. \end{aligned}$$

От получената рекурентна връзка следва
$$\det H_n = \frac{(n!(n-1)!\dots 1!)^3}{(2n+1)!\dots(n+1)!}$$
и при $n = 5$ $\det H_5 < 10^{-15}$, т. е. $\det H_5$ ще се запише като числото нула в паметта на действуващите в момента компютри.

4.20. Нека $p_{n+1}(x) = xp_n(x) + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n+1,i} p_i(x)$. От $(p_{n+1}, p_n) = 0$ намираме $\alpha_{n+1,i} = -(xp_n, p_i)/(p_i, p_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, а от
$$(xp_n, p_i) = (p_n, xp_i) = (p_n, p_{i+1} - \sum_{j=0}^{i} \alpha_{i+1,j} p_j) = 0, \ i+1 < n,$$
следва $\alpha_{n+1,i} = 0$ за $i < n-1$ и оттук
$$\alpha_{n+1} = -\alpha_{n+1,n} = \frac{(xp_n, p_n)}{(p_n, p_n)}, \ \beta_{n+1} = \alpha_{n+1,n-1} = -\frac{(xp_n, p_{n-1})}{(p_{n-1}, p_{n-1})}$$
$$= \frac{(p_n, xp_{n-1})}{(p_{n-1}, p_{n-1})} = -\frac{\left(p_n, p_n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i p_i\right)}{(p_{n-1}, p_{n-1})} = -\frac{(p_n, p_n)}{(p_{n-1}, p_{n-1})}.$$

4.21. а) Ако $p_k(x_0) = p_{k-1}(x_0) = 0$, то от рекурентната връзка между p_k, p_{k-1}, p_{k-2} (вж. зад. 4.20) следва $p_{k-2}(x_0) = 0$. Така се стига до противоречието $p_0(x_0) \equiv 1 = 0$;

б) От $\int_a^b p(x) p_n(x)\, dx = 0$ следва, че p_n има поне една реална нула с нечетна кратност в (a, b). Нека нулите с нечетна кратност са $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$, $r < n$. Тогава
$$\int_a^b p(x)(x-\xi_1)\dots(x-\xi_r) p_n(x)\, dx = 0,$$
но това равенство е невъзможно, тъй като полиномът $(x-\xi_1)\dots(x-\xi_r)p_n(x)$ има само нули с четна кратност в (a, b), т. е. допускането $r < n$ доведе до противоречие;

в) От зад. 4.20 следва $p_{n+1}(x_0) = \beta_{n+1} p_{n-1}(x_0)$. Ето защо е достатъчно да се покаже, че $\beta_{n+1} < 0$. От $xp_{n-1}(x) = p_n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i p_i(x)$ и израза за β_{n+1} от зад. 4.20 следва
$$\begin{aligned}\beta_{n+1} &= -\frac{(xp_n, p_{n-1})}{(p_{n-1}, p_{n-1})} = \frac{(p_n, xp_{n-1})}{(p_{n-1}, p_{n-1})} \\ &= -\frac{\left(p_n, p_n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i p_i\right)}{(p_{n-1}, p_{n-1})} = -\frac{(p_n, p_n)}{(p_{n-1}, p_{n-1})} < 0.\end{aligned}$$

г) Нека $p_1(x_1^{(1)}) = 0$, $x_1^{(1)} \in (a, b)$. От в) и от $p_0(x) = 1$ следва

$$v_2(x_1^{(1)}) < 0.$$

Нека нулите на p_2 са $x_1^{(2)},\ x_2^{(2)}$. От

$$\operatorname{sgn} p_2(a) = \operatorname{sgn} p_2(b) = \operatorname{sgn} p_2(\pm\infty) > 0,\ p_2(x_1^{(1)}) < 0,$$

следва $a < x_1^{(2)} < x_1^{(1)} < x_2^{(2)} < b$ и твърдението е доказано за $k = 1$. Да допуснем, че то е вярно за $k = n$, и да го докажем за $k = n + 1$. Да отбележим, че $p_n(b) > 0$ и $\operatorname{sgn} p_n(a) = (-1)^n$, тъй като $\operatorname{sgn} p_n(a) = \operatorname{sgn} p_n(-\infty)$ и $\operatorname{sgn} p_n(b) = \operatorname{sgn} p_n(\infty)$. Нека $\{x_i^{(n+1)}\}_{i=1}^{n+1}$ са нулите на p_{n+1} в интервала (a, b). От

$$\operatorname{sgn} p_{n+2}(a) = \operatorname{sgn} p_n(a),\ \operatorname{sgn} p_{n+2}(x_1^{(n+1)}) = \operatorname{sgn} p_n(x_1^{(n+1)}),$$

следва, че p_{n+2} има нула в $(a, x_1^{(n+1)})$, тъй като p_n не си мени знака в $[a, x_1^{(n+1)}]$. Като използваме отново, че $\operatorname{sgn} p_{n+2}(x_2^{(n+1)}) = -\operatorname{sgn} p_n(x_2^{(n+1)})$ и че p_n си мени знака само веднъж в $(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)})$, получаваме, че p_{n+2} има нула в този интервал. По аналогичен начин се доказва, че в интервалите

$$(a, x_1^{(n+1)}),\quad (x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}), \dots,\quad (x_{n+1}^{(n+1)}, b)$$

лежи по една нула на p_{n+2}.

4.22. а) След диференциране на $\varphi(x) = (x^2 - 1)^n$ и умножаване с $x^2 - 1$ се получава $\varphi'(x)(x^2 - 1) = 2n\varphi(x)$, откъдето следва

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[\varphi'(x)(x^2 - 1)] = 2n\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[x\varphi(x)]$$

и след прилагане на формулата на Лайбниц за диференциране на произведение

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \varphi^{(n+2-k)}(x)(x^2 - 1)^{(k)} = 2n \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \varphi^{(n+1-k)}(x)x^{(k)},$$

т. е.

$$\begin{aligned}\varphi^{(n+2)}(x)(x^2 - 1) + (n + 1)(2x\varphi^{(n+1)}(x) + n(n + 1)\varphi^{(n)}(x)\\ = 2n[x\varphi^{(n+1)}(x) + (n + 1)\varphi^{(n)}(x)]\end{aligned}$$

и от факта, че $\varphi^{(n)}(x) = cP_n(x)$, където c е константа, се получава твърдението;

б) Доказателството следва от

$$\begin{aligned}\bar{P}'_{n+1}(x) - \bar{P}'_{n-1}(x) &= \left\{ \left(\frac{(x^2 - 1)^{n+1}}{(2n + 2)!!}\right)^{(n+1)} - \left(\frac{(x^2 - 1)^{n-1}}{(2n - 2)!!}\right)^{(n-1)} \right\}' \\ &= \left\{ \left(\frac{(x^2 - 1)^{n+1}}{(2n + 2)!!}\right)'' - \frac{(x^2 - 1)^{n-1}}{(2n - 2)!!} \right\}^{(n)} \\ &= \left\{ \left(\frac{(2n + 1)x^2 - 1}{(2n)!!} - \frac{1}{(2n - 2)!!}\right) (x^2 - 1)^{n-1} \right\}^{(n)}\end{aligned}$$

$$= \frac{(2n+1)}{(2n)!!}((x^2-1)^n)^{(n)} = \frac{(2n+1)}{2^n n!}[(x^2-1)^n]^{(n)} = (2n+1)\bar{P}_n(x),$$

ако $\bar{P}_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}[(x^2-1)^n]^{(n)} = (2n+1)\bar{P}_n(x) = (-1)^n P_n(x)$.

4.23. а) Ако

$$R_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n\,d\theta,$$

то за функциите R_n е в сила рекурентната зависимост (същата, както за полиномите на Льожандър)

$$(n+1)R_{n+1}(x) = (2n+1)xR_n(x) - nR_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots.$$

Наистина нека $Z = x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta$. Тогава

$$(n+1)R_{n+1}(x) - (2n+1)xR_n(x) + nR_{n-1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi WZ^{n-1}\,d\theta,$$

където

$$\begin{aligned} W = {} & (n+1)\left[x^2 + 2x\sqrt{x^2-1}\cos\theta + (x^2-1)\cos^2\theta\right] \\ & -(2n+1)x[x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta] + n \\ = {} & -nx^2 + x\sqrt{x^2-1}\cos\theta + (n+1)(x^2-1)\cos^2\theta + n^2 \\ = {} & -n(x^2-1)(1-\cos^2\theta) + x\sqrt{x^2-1}\cos\theta + (x^2-1)\cos^2\theta \\ = {} & -n(x^2-1)\sin^2\theta + \left[x+\sqrt{x^2+1}\cos\theta\right]\sqrt{x^2-1}\cos\theta = U + V, \end{aligned}$$

т. е.

$$\int_0^\pi WZ^{n-1}\,d\theta = \int_0^\pi UZ^{n-1}\,d\theta + \int_0^\pi VZ^{n-1}\,d\theta.$$

Но

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi VZ^{n-1}\,d\theta = \sqrt{x^2-1}\int_0^\pi Z^n\,d\theta \\ = {} & \sqrt{x^2-1}\left[Z^n\sin\theta\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \sin\theta n Z^{n-1}\sqrt{x^2-1}\sin\theta\,d\theta\right] \\ = {} & n(x^2-1)\int_0^\pi Z^{n-1}\sin^2\theta\,d\theta = -\int_0^\pi UZ^{n-1}\,d\theta, \end{aligned}$$

т. е. $\int_0^\pi WZ^{n-1}\,d\theta = 0$. Тъй като

$$R_0(x) = P_0(x) = 1, \;\; R_1(x) = P_1(x) = x,$$

то $R_n(x) = P_n(x)$ за всяко n;

б) Решението следва от представянето в точка а) и нера венството

$$\left|x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right| = \sqrt{x^2\sin^2\theta + \cos^2\theta} \le 1,$$

вярно за всяко $x \in [-1, 1]$.

4.24. Използувайте представянето

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}[(1-x^2)^n]^{(n)} \\ &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{n!}{k!}(1+x)^{n-k}(1-x)^k. \end{aligned}$$

4.25. а) При $x > 1$ имаме

$$(x-1)^{\alpha+n} = x^{\alpha+n}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha+n} = x^{\alpha+n} - (\alpha+n)x^{\alpha+n-1} + \cdots,$$

$$(x+1)^{\beta+n} = x^{\beta+n}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\beta+n} = x^{\beta+n} + (\beta+n)x^{\beta+n-1} + \cdots,$$

откъдето

$$\frac{d^n}{dx^n}[(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n}]$$
$$= (\alpha+\beta+2n)\dots(\alpha+\beta+n+1)x^{\alpha+\beta+n}$$
$$+(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2n-1)\dots(\alpha+\beta+n)x^{\alpha+\beta+n-1} + \cdots,$$

или

$$\frac{d^n}{dx^n}[(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n}] = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}x^{\alpha+\beta+n}$$
$$+(\beta-\alpha)\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)}x^{\alpha+\beta+n-1} + \cdots$$

Аналогично

$$(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta} = x^{-\alpha-\beta}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\alpha}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\beta}$$
$$= x^{-\alpha-\beta} + (\alpha-\beta)x^{-\alpha-\beta-1} + \cdots$$

От последните две равенства следва

$$P_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2^n n!}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n}]$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{2^n n!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}x^n + \frac{(\alpha-\beta)n}{2^n n!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}x^{n-1} + \cdots$$

б) Да означим

$$I^{(m,n)} = \int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx,$$
$$\varphi_n(x) = (1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n},$$
$$Y_m(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^m}{dx^m}[(1-x)^{\alpha+m}(1+x)^{\beta+m}],$$
$$I_1^{(m,n)} = \int_{-1}^{1}Y_m(x)\varphi_n^{(n)}(x)dx.$$

След интегриране по части следва

$$I_1^{(m,n)} = (-1)^m\int_{-1}^{1}Y_m^{(m)}(x)\varphi_n^{(n-m)}(x)dx$$
$$= (-1)^{m+1}\int_{-1}^{1}Y_m^{(m+1)}(x)\varphi_n^{(n-m-1)}(x)\,dx.$$

От а) следва, че $Y_n(x) = (-1)^n\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}x^n + \dots$ (Y_n е полином от степен n) и следователно

$$I_1^{(m,n)} = \begin{cases} 0 & \text{за } \ m < n, \\ n! \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \displaystyle\int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx & \text{за } \ m = n. \end{cases}$$

За пресмятането на $\int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx$ се прави смяната $x = 2t-1$ и

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n} dx - 2^{\alpha+\beta+2n+1} \int_{0}^{1} (1-t)^{\alpha+ntb+n}\,dt. \end{aligned}$$

Известно е, че интеграли от вида $B(p,q) = \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1} dx$ се наричат *интеграли на Ойлер* и се изразяват чрез гама-функции $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, т. е.

$$\int_{-1}^{1} \varphi_n(x) dx = 2^{\alpha+\beta+2n+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}.$$

От получените равенства и от $I^{(m,n)} = \dfrac{(-1)^{m+n} + I_1^{(m,n)}}{2^{m+n} n! m!}$ следва твърдението.

4.26. От зад. 4.25 следва, че полиномите

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{2^n n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

са ортогонални в $[-1,1]$ с тегло $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ и имат коефициент пред най-високата степен единица. От зад. 4.20 следва, че за тях е в сила

$$Q_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (x - \alpha_{n+1}) Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \beta_{n+1} Q_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x),$$

където

$$\beta_{n+1} = -\frac{(Q_n^{(\alpha,\beta)}, Q_n^{(\alpha,\beta)})}{(Q_{n-1}^{(\alpha,\beta)}, Q_{n-1}^{(\alpha,\beta)})}.$$

От зад. 4.25 следва

$$\begin{aligned} (P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)}) &= \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (P_n^{(\alpha,\beta)}(x))^2\,dx \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)} \end{aligned}$$

и

$$\beta_{n+1} = \frac{4n(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n)^2(\alpha+\beta+2n-1)}.$$

Определянето на α_{n+1} става от рекурентната връзка за полиномите $Q_n^{(\alpha,\beta)}$ чрез сравняване на коефициентите пред x^n от двете страни на равенството, като се използва, че коефициентът пред x^{n-1} в полинома $P_n^{(\alpha,\beta)}$ е равен на $\dfrac{(\alpha-\beta)n\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{2^n n! \Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}$ (вж. зад. 4.25). Получава се

$$\alpha_{n+1} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)}.$$

За окончателното доказателство остава да се премине обратно от $Q_n^{(\alpha,\beta)}$ към $P_n^{(\alpha,\beta)}$.

4.27. Използувайте представянето:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n-k+1)\Gamma(\beta+k+1)}(x-1)^{n-k}(x+1)^k.$$

4.28. а) След смяната $x = \cos t$ се получава

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}.U_k(x)U_i(x)\,dx = \int_0^\pi \sin(k+1)t\sin(i+1)t\,dt = \begin{cases} 0 & \text{за } k \neq i, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{за } k = i. \end{cases}$$

г) Решението следва от равенството

$$\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2\sin n\theta\cos\theta$$

след полагане $\theta = \arccos x$.

4.29. а) Решението следва от тъждеството

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x}) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+n-k+1)x^{\alpha+n-k}e^{-x}.$$

б) От тъждеството

$$I = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x}L_m^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(x)\,dx = (-1)^n\int_0^\infty L_m^{(\alpha)}(x)\varphi_n^{(n)}(x)\,dx,$$

$\varphi_n(x) = x^{\alpha+n}e^{-x}$, след интегриране по части на интеграла вдясно се получава

$$I = (-1)^{n+m}\int_0^\infty (L_m^{(\alpha)}(x))^{(m)}\varphi_n^{(n-m)}(x)\,dx$$

и след още едно интегриране по части при $n > m$, като се има предвид, че $L_m^{(\alpha)}$ е полином от степен m, намираме

$$I = (-1)^{n+m+1}\int_0^\infty (L_m^{(\alpha)}(x))^{(m+1)}\varphi_n^{(n-m-1)}(x)\,dx = 0.$$

При $m = n$ от предпоследното равенство следва

$$I = \int_0^\infty (L_m^{(\alpha)}(x))^{(n)}\varphi_n(x)\,dx = n!\int_0^\infty \varphi_n(x)dx = n!\Gamma(\alpha+n+1),$$

като е използувано, че коефициентът пред x^n в $L_n^{(\alpha)}$ е равен на единица. От последните две равенства следва твърдението.

в) Нека $z(x) = x^{n+\alpha}e^{-x}$. След диференциране следва

$$xz' = (n+\alpha-x)z$$

и след $(n+1)-$кратно диференциране намираме

$$xz^{(n+2)} + (1-\alpha+x)z^{(m+1)} + (n+1)z^{(n)} = 0.$$

В това равенство заместваме $z^{(n+2)}$ и $z^{(n+1)}$, определени от

$$z^{(n)}(x) = (-1)^n x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x),$$

и търсеното тъждество се получава.

г) От зад. 4.20 следва

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (x - \alpha_{n+1}) L_n^{(\alpha)}(x) + \beta_{n+1} L_{n-1}^{(\alpha)}(x),$$

където

$$\beta_{n+1} = -\frac{(L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)})}{(L_{n-1}^{(\alpha)}, L_{n-1}^{(\alpha)})} = -n(n+\alpha),$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{(xL_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)})}{(L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)})} = \frac{(x^{n+1} - n(\alpha+n)x^n + \ldots,\ L_n^{(\alpha)})}{(L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)})} = 2n + \alpha + 1.$$

4.30. а) Нека $z(x) = e^{-x^2}$. По индукция се вижда, че

$$z^{(n)}(x) = [(-2)^n x^n + \ldots] e^{-x^2}.$$

Остава да се използва фактът, че $H_n(x) = e^{x^2} z^{(n)}(x)$.

б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) q(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) q(x)\, dx;$

след $n-$кратно интегриране по части

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) q(x)\, dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} q(x)\, dx = 0,$$

ако q е полином от степен, по-малка от n.

в) Решението следва от б) при $q(x) = H_n(x)$, предвид

$$H_n(x) = (-2)^n x^n + \ldots \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

г) Полиномите $\bar{H}_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{2^n} H_n(x)$ имат вида $\bar{H}_n(x) = x^n + \ldots$ и от зад. 4.20 следва, че $\bar{H}_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1})\bar{H}_n(x) + \beta_{n+1}\bar{H}_{n-1}(x)$, където

$$\beta_{n+1} = -\frac{(\bar{H}_n, \bar{H}_n)}{(\bar{H}_{n-1}, \bar{H}_{n-1})} = -\frac{(\bar{H}_n, \bar{H}_n)}{4(\bar{H}_{n-1}, \bar{H}_{n-1})} = -\frac{n}{2}, \quad \alpha_{n+1} = 0,$$

тъй като H_n съдържа само четни (нечетни) степени на x, ако n е четно (нечетно).

д) Нека $z(x) = e^{-x^2}$. Тогава $z'(x) = -2xz(x)$ и диференцирайки $n+1$ пъти, получаваме $z^{(n+2)}(x) + 2xz^{(n+1)}(x) + 2(n+1)z^{(n)}(x) = 0$. Остава да се вземе предвид $z^{(n)}(x) = e^{-x^2} H_n(x)$.