Глава 3

РАВНОМЕРНИ ПРИБЛИЖЕНИЯ

С $C_{[a,b]}$ ще означаваме множеството на всички непрекъснати функции в интервала $[a, b]$.

Ако функцията f е дефинирана в интервала $[a, b]$, то $w(f; \delta)$ се нарича *модул на непрекъснатост* на f и се определя чрез

$$w(f; \delta) = \sup_{|x'-x''|\leq\delta} |f(x') - f(x'')|, \quad x', x'' \in [a, b].$$

За функцията f, дефинирана в интервала $[a, b]$, с $\|f\|$ ще означаваме равномерната норма, определена чрез $\|f\| = \sup_{a\leq x\leq b} |f(x)|$. С π_n ще означаваме съвкупността на всички алгебрични полиноми от степен, не по-висока от n. Ако функцията f е дефинирана в интервала $[a, b]$, то $E_n(f)$ се нарича *най-добро равномерно приближение на* f с полиноми от π_n и се определя чрез $E_n(f) = \inf_{p\in\pi_n} \|f - p\|$.

Теорема 3.1 (Борел). *За всяко естествено n и всяка непрекъсната в интервала $[a, b]$ функция f съществува алгебричен полином P от n-та степен на най-добро равномерно приближение, т. е. такъв, че*

$$E_n(f) = \|f - P\|.$$

Ако функцията $f \in C_{[a,b]}$, то полиномът ѝ на най-добро равномерно приближение от n-та степен е единствен.

Теорема 3.2 (Чебишов). *Нека f е непрекъсната функция в интервала $[a, b]$. Необходимо и достатъчно условие P да бъде алгебричен полином на най-добро равномерно приближение от n-та степен за f е да съществуват такива $n + 2$ точки $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$ в интервала $[a, b]$, че*

$$f(x_i) - P(x_i) = \varepsilon(-1)^i\|f - P\|, \quad \text{където } \varepsilon \text{ е или } 1, \text{ или } -1.$$

Точките $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ се наричат *точки на Чебишов алтернанс.*

Теорема 3.3 (Вайерщрас). *Ако $f \in C_{[a,b]}$, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват такова цяло положително число n и такъв алгебричен полином P от n-та степен, че $\|f - P\| < \varepsilon$.*

Съответствието L, с което на всяка функция $f \in A$ се съпоставя една функция $L(f) \in V$, се нарича *оператор с дефиниционна област A и област на стойности V*. Стойността на $L(f)$ в точката x ще означаваме с $L(f; x)$. Операторът L се нарича *линеен*, ако $L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$, където α и β са числа.

Операторът L се нарича *положителен*, ако от $f(x) \geq 0$ за всяко $x \in [a, b]$ следва $L(f; x) \geq 0$ за всяко $x \in [a, b]$.

Теорема 3.4 (Коровкин). *Нека L е линеен положителен оператор, дефиниран в $C_{[a,b]}$ и*

$$\begin{aligned} L(1; x) &= 1, \\ L(t; x) &= x + \alpha(x), \\ L(t^2; x) &= x^2 + \beta(x). \end{aligned}$$

Тогава за всяка функция $f \in C_{[a,b]}$ е изпълнено

$$L(f; x) = f(x) + \gamma(x),$$

където

$$|\gamma(x)| \leq 2\omega\Big(f; \sqrt{\beta(x) - 2x\alpha(x)}\Big).$$

Полиномите на Бернщайн (операторите на Бернщайн) в интервала $[0, 1]$ се определят чрез

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}.$$

Задача 3.1. Покажете, че:
а) $\omega(|x|; \delta) \leq \delta$; б) $\omega(x^{\frac{1}{3}}; \delta) \leq (4\delta^{\frac{1}{3}})$; в) $\omega(\sin x; \delta) \leq \delta$.

Задача 3.2. Докажете, че $\lim_{\delta \to 0} \omega\left(\cos \dfrac{\pi}{x}; \delta\right) = 2$ при $x \in (0, 1)$.

Задача 3.3. Докажете, че $f \in C_{[a,b]}$ тогава и само тогава, когато $\lim_{\delta \to 0} \omega(f; \delta) = 0$.

Задача 3.4. Да се докаже, че за всяка функция f и за произволни $\delta \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$ е изпълнено $0 \leq \omega(f; \delta) \leq \omega(f; \delta + \varepsilon) \leq \omega(f; \delta) + \omega(f; \varepsilon)$.

Задача 3.5. Покажете, че за всяко $\lambda \geq 0$ е в сила неравенството $\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$.

Задача 3.6. Да означим $\mathrm{Lip}_H\alpha = \{f : |f(x_1) - f(x_2)| \leq H|x_1 - x_2|^\alpha\}$. Докажете, че $f \in \mathrm{Lip}_H\alpha$ тогава и само тогава, когато $\omega(f;\delta) \leq H\delta^\alpha$.

Задача 3.7. Докажете, че ако $f \in C_{[a,b]}$, то $\omega(f;\delta)$ е непрекъсната функция на δ; $\delta \geq 0$.

Задача 3.8. Нека $f \in C_{[0,1]}$ и

$$S_n(x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{2i-1}{2n}\right) & \text{за } x \in \left(\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\[2ex] f\left(\dfrac{i}{n}\right) & \text{за } x = \dfrac{i}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Докажете, че $\|f - S_n\|_C \leq \omega\left(f; \dfrac{1}{2n}\right)$.

Задача 3.9. Покажете, че:

а) $\omega(\operatorname{sgn} x;\delta) = 1, \quad x \geq 0$; б) $\omega(x \operatorname{sgn} x;\delta) \leq \delta$;

в) $\omega(x^2 \operatorname{sgn} x;\delta) \leq \delta(2-\delta)$ при $0 \leq \delta \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1$;

$\omega(x^2 \operatorname{sgn} x;\delta) = 2 - 2\delta + \delta^2$ при $1 < \delta \leq 2, \quad -1 \leq x \leq 1$.

Задача 3.10. Докажете, че за всеки две функции f и g е изпълнено $\omega(f+g;\delta) \leq \omega(f;\delta) + \omega(g;\delta)$.

Задача 3.11. Докажете, че ако $\delta_1 \leq \delta_2$, то $\omega(f;\delta_2)/\delta_2 \leq 2\omega(f;\delta_1)/\delta_1$.

Задача 3.12. Да се докаже, че ако $f_1 \in C_{[-1,1]}$ и $f_2 \in C_{[0,\pi]}$, където $f_2(x) = f_1(\cos x)$, то $\omega(f_2;\delta) \leq \omega(f_1;\delta)$.

Задача 3.13. Ако $f \in C_{[a,b]}$, намерете полинома на най-добро равномерно приближение от нулева степен и пресметнете $E_0(f)$.

Задача 3.14. Нека $f \in C^2_{[a,b]}$ и $f'' \neq 0$ има постоянен знак. Намерете полинома на най-добро равномерно приближение от първа степен на f.

Задача 3.15. Намерете полинома на най-добро равномерно приближение от първа степен на функцията $\sqrt{x}, x \in [0,1]$.

Задача 3.16. За функцията $f(x) = \arcsin x, x \in [0,1]$, намерете полинома на най-добро равномерно приближение от първа степен и пресметнете $E_1(f)$.

Задача 3.17. За функцията $f(x) = 1/(x+2),\ x \in [0,1]$, намерете полинома на най-добро равномерно приближение от първа степен и пресметнете $E_1(f)$.

Задача 3.18. За функцията $f(x) = \ln(1+x),\ x \in [0,1]$, намерете полинома на най-добро равномерно приближение от първа степен и пресметнете $E_1(f)$.

Задача 3.19. Докажете, че ако $f \in C_{[-a,a]}$ е четна (нечетна) функция, то полиномът на най-добро равномерно приближение на f от степен n е също четен (нечетен).

Задача 3.20. Намерете полинома на най-добро равномерно приближение от втора степен на функцията $|x|$ в интервала $[-1,1]$.

Задача 3.21. Намерете полинома на най-добро равномерно приближение от втора степен на функцията $f_m(x) = \operatorname{arctg}(mx^2)$ в интервала $[-1,1]$. Изследвайте $E_2(f_m)$ при $m \to \infty$.

Задача 3.22. За функцията $\sqrt[m]{|x|}, x \in [-1,1]$, намерете полинома на най-добро равномерно приближение от втора степен и най-доброто приближение $E_2(\sqrt[m]{|x|})$. Изследвайте $E_2(\sqrt[m]{|x|})$ при $m \to \infty$.

Задача 3.23. Намерете полинома на най-добро равномерно приближение от втора степен на функцията $f_m(x) = 1/(mx^2+1)$ в интервала $[-1,1]$. Изследвайте $E_2(f_m)$ при $m \to \infty$.

Задача 3.24. За функцията

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{за } -1 \le x < -\alpha, \\ \dfrac{x}{\alpha} & \text{за } -\alpha \le x < \alpha, \\ 1 & \text{за } \alpha < x \le 1, \end{cases}$$

където $0 < \alpha < 1$, намерете полинома на най-добро равномерно приближение от нулева, първа, втора, трета и четвърта степен и пресметнете съответните най-добри приближения.

Задача 3.25. Нека $f(x) = |x - 0,5|,\ x \in [-1,1]$. Намерете полинома на най-добро равномерно приближение от втора степен на f и пресметнете $E_2(f)$.

Задача 3.26. Нека $f(x) = A\sin nx$, $x \in [0, 2\pi]$. Намерете $E_0(f)$, $E_1(f)$,…, $E_{2n-2}(f)$.

Задача 3.27. Нека $f \in C_{[0,1]}$, $g \in C_{[0,1]}$. Докажете, че:

а) $E_n(f+g) \le E_n(f) + E_n(g)$; б) $E_n(\gamma f) = |\gamma| E_n(f)$;

в) ако $g \in \pi_n$, то $E_n(f+g) = E_n(f)$; г) $E_n(f) \le \|f\|$.

Задача 3.28. Нека $f \in C_{[0,1]}$, $g \in C_{[0,1]}$ и $\psi(\lambda) = E_n(f + \lambda g)$. Докажете, че:

а) $\psi(\lambda)$ е непрекъсната функция; б) $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty} \psi(\lambda) = \infty$;

в) $\psi(\lambda)$ е изпъкнала функция.

Задача 3.29. Нека за $x \in [a, b]$ е изпълнено $f^{(n+1)}(x) > 0$ и

$$E_n(f) = \|f - P\|,\ P \in \pi_n.$$

Докажете, че уравнението $f(x) - P(x) = 0$ има точно $n + 1$ корена в интервала $[a, b]$.

Задача 3.30. Нека $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ е полиномът на най-добро равномерно приближение от степен n на функцията $\sqrt{x}$ в интервала $[0, 1]$. Докажете, че $a_0 > 0$ и $\mathrm{sgn} a_i = (-1)^{i+1}$ за $i \ge 1$.

Задача 3.31. Нека $f, g \in C_{[a,b]}$ и $E_n(f) = \|f - P\|$, $E_n(g) = \|g - Q\|$. Докажете, че:

а) $|E_n(f) - E_n(g)| \le \|f - g\|$; б) $\|P - Q\| \le 2(E_n(f) + \|f - g\|)$.

Задача 3.32. Нека $f \in C_{[a,b]}$ и $\varepsilon > 0$. Докажете, че съществува такова $\delta > 0$, че ако $\|Q - P\| < \varepsilon$, $E_n(f) = \|f - P\|$ за някой полином $Q \in \pi_n$, то $\|Q - f\| \le (1 + \delta)E_n(f)$.

Задача 3.33. За функцията $f(x) = 1/(x - a)$ в интервала $[-1, 1]$ намерете $E_n(f)$ и полинома на най-добро равномерно приближение от степен n при $a > 1$.

Задача 3.34. Нека за функциите f и g в интервала $[-1, 1]$ е изпълнено условието $0 < f^{(n+1)}(x) < g^{(n+1)}(x)$. Докажете, че $E_n(f) \le E_n(g)$.

Задача 3.35. Докажете, че за всяка функция $f \in C_{[a,b]}$ съществува такава триъгълна матрица от възли $\{x_{n,i}\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$, че ако $L_n(f)$ е интерполационният полином на Лагранж за f по възлите $x_{n0}, x_{n1}, \ldots, x_{nn}$, то $\|L_n(f) - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Задача 3.36. Докажете, че за функцията $f(x) = \cos x$ в интервала $[-1, 1]$ е в сила $E_n(f) \le 1/[2^{n-1}(n+1)!]$.

Задача 3.37. Докажете, че за функцията $f(x) = e^x$ в интервала $[-1, 1]$ е изпълнено $E_{10}(f) < 10^{-10}$.

Задача 3.38. Докажете, че в интервала $[-1, 1]$ е изпълнено равенството

$$|x| = 1 - \frac{1}{2}(1-x^2) - \frac{1}{2.4}(1-x^2)^2 - \cdots - \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots 2n}(1-x^2)^n - \cdots$$

Пресметнете скоростта на сходимост на горния ред.

Задача 3.39. Нека $\psi \in C_{[a,b]}$ и $a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b$. Да се докаже, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува полином R, за който

$$R(x_k) = \psi(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{и} \quad \|R - \psi\| < \varepsilon.$$

Задача 3.40. Използувайки теоремата на Вайерщрас, докажете, че ако $f \in C_{[a,b]}$ и $\int_a^b x^k f(x)dx = 0,\ k = 0, 1, \ldots$, то $f(x) = 0$.

Задача 3.41. Ако $f \in C_{[a,b]}$, то покажете, че съществува редица полиноми $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ с цели коефициенти, за които $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ за $x \in [a, b]$, където $[a, b] \subset (0, 1)$.

Задача 3.42. Чрез директно пресмятане покажете, че във всеки краен интервал $B_n(t^3; x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x^3$, където $B_n(t^3; x)$ е полиномът на Бернщайн за функцията x^3.

Задача 3.43. Покажете, че за полиномите на Бернщайн $B_n(f)$ е изпълнено $\|B_n(f)\| \le \|f\|$.

Задача 3.44. Да се докаже, че ако $f \in C^1_{[a,b]}$, то за полиномите на Бернщайн $B_n(f)$ е изпълнено $\|(B_n(f))' - f'\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Задача 3.45. Да се докаже, че ако функцията $f \in C^1_{[a,b]}$, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществува полином P, за който $\|f^{(i)} - P^{(i)}\| < \varepsilon,\ i = 0, 1$.

Задача 3.46. Ако $f_{n0}(x) = 1,\ f_{nm}(x) = x\,(x - 1/n)\cdots(x - (m-1)/n)$, то покажете, че полиномите на Бернщайн $B_n(f_{nm})$ удовлетворяват равенството $B_n(f_{nm}; x) = x^m f_{nm}(1),\ n \ge m$.

Задача 3.47. Намерете полиномите на Бернщайн за функциите

$$f(x) = 1, \quad f(x) = x, \quad f(x) = x^2, \quad f(x) = e^x$$

в интервала $[0, 1]$.

Задача 3.48. Напишете явния вид на полиномите на Бернщайн в интервала $[a, b]$.

Задача 3.49. За функцията e^{kx}, $x \in [a, b]$, намерете $B_n(e^{kt}; x)$.

Задача 3.50. Постройте $B_{2n}(|t|; x)$ в интервала $[-1, 1]$.

Задача 3.51. За функцията $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$, $x \in [-1, 1]$, намерете $B_4(f; x)$.

Задача 3.52. Докажете, че ако $f \in \pi_k$, то $B_n(f) \in \pi_k$ за $n \geq k$.

Задача 3.53. Да се докаже, че ако $f'' \in C_{[0,1]}$, то

$$|f(x) - B_n(f; x)| \leq \frac{x(1-x)}{n} \|f''\|.$$

Задача 3.54. За функцията x^n в интервала $[-1, 1]$ намерете полинома на най-добро равномерно приближение от $(n-1)$−ва степен.

Задача 3.55. Измежду всички полиноми от вида $Ax^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, където $A \neq 0$ е дадено число, намерете полином, отклоняващ се най-малко от нулата в интервала $[a, b]$.

Задача 3.56. Докажете, че за полиномите на Чебишов от първи род $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ е изпълнено:

а) $T_{m+n} + T_{m-n} = 2T_m T_n$; б) $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$;

в) $T_{2n} = 2T_n^2 - 1$; г) $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots$.

Задача 3.57. Докажете, че:

а) $T'_{n+1}/(n+1) = 2T_n + T'_{n-1}/n - 1, n > 1$;

б) $T'_{2n}/(2n) = 2(T_{2n-1} + T_{2n-3} + \cdots + T_1)$;

в) $T'_{2n+1}/(2n+1) = 2(T_{2n} + T_{2n-2} + \cdots + T_2) + 1$.

Задача 3.58. Докажете, че

$$T_{2k+1}(x)/x = 2T_{2k}(x) - 2T_{2k-2}(x) + 2T_{2k-4}(x) + \cdots + (-1)^k T_0(x).$$

Задача 3.59. Нека T_n^* е полиномът на Чебишов в интервала $[0,1]$. Докажете, че :

а) $T_n^*(x) = T_n(2x-1)$;
б) $T_{n+1}^*(x) = (4x-2)T_n^*(x) - T_{n-1}^*(x)$.

Задача 3.60. За $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$, $x \in [-1,1]$, покажете, че $E_1(f) > 0,021$ и $E_2(f) < 0,016$.

Задача 3.61. Покажете, че измежду всички полиноми от степен, не по-висока от n, приемащи в точката ξ стойност η, $|\xi| > 1$, полиномът $\eta T_n(x)/T_n(\xi)$ се отклонява най-малко от нулата в интервала $[-1,1]$.

Задача 3.62. Докажете, че ако полиномът P от степен, не по-висока от n, удовлетворява неравенството $\max_{-1\le x\le 1}|P(x)| \le L$, то за всяко $x \ge 1$ е изпълнено

$$P(x) \le \frac{L}{2}[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n].$$

Задача 3.63. За полинома ax^3+bx^2+cx+d намерете полинома на най-добро равномерно приближение от втора степен в интервала $[-1,1]$.

Задача 3.64. Докажете, че ако функциите f и g удовлетворяват в интервала $[-1,1]$ неравенството $|f^{(n+1)}(x)| < g^{(n+1)}(x)$, то $E_n(f) < 2E_n(g)$.

Задача 3.65. Докажете, че:

а) $(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$;
б) $\dfrac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^nT_n(x), \quad -1 < t < 1$;
в) $T_n(x) = x^n - \dbinom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2) + \dbinom{n}{4}4x^{n-4}(1-x^2)^2 + \cdots$;
г) $T_n(T_m(x)) = T_{nm}(x)$; д) $T_{2n}(x) = T_n(2x^2-1)$;
е) $\int T_n(x)dx = T_{n+1}(x)/(2n+2) - T_{n-1}(x)/(2n-2)$.

Задача 3.66. Нека S е съвкупност от краен брой рационални числа в интервала $[-1,1]$. Докажете, че съществува такова цяло положително n, че ако означим с $R_n = \{x_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ нулите на T_n, то $S \bigcap R_n = \emptyset$.

Задача 3.67. Нека $E_n(f) = \inf_{P\in\pi_n} \|f - P\|$, а γ и

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

се определят от условията $(-1)^i\gamma + P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n+2$, т. е. $\gamma = \gamma(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})$, където $a \le x_1 < x_2 < \cdots x_{n+2} \le b$. Докажете, че ако $f \in C_{[a,b]}$, то $E_n(f) = \max_{x_1<x_2<\cdots<x_{n+2}} |\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})|$.

Задача 3.68. Нека $f \in C_{[a,b]}$ и $B_n(f)$ е n-тият полином на Бернщайн на f в интервала $[0, 1]$. Докажете, че $\|B_n(f) - f\| \le 2\omega(f; \dfrac{1}{2\sqrt{n}})$.

Задача 3.69. Нека $M_n(f; x) = e^{-nx} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f(\frac{k}{n})\frac{(nx)^k}{k!}$. Докажете, че за всяка функция $f \in C_{[0,\infty]}$ е в сила $|f(x) - M_n(f; x)| \le 2\omega(f; \sqrt{\dfrac{x}{n}})$.

Задача 3.70. Докажете, че $\|f - K_n(f)\| \le c\omega(f; \dfrac{1}{\sqrt{n}})$, където $f \in C_{[0,1]}$ и

$$K_n(f; x) = (n + 1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1 - x)^{n-k}\int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(t)\,dt,$$

а константата c не зависи от n и f.

Задача 3.71. Нека $a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b$, а g_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, са функции, дефинирани в $[a, b]$. Докажете, че $L_n(f; x) \stackrel{\text{def}}{=} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g_i(x)$ е линеен положителен оператор тогава и само тогава, когато $g_i(x) \ge 0$ за всяко $x \in [a, b]$ и всяко $i = 1, 2, \ldots, n$.

Задача 3.72. Докажете, че ако $f \in C_{[0,\ 1+1/n]}$ и

$$f_n(x) = n\int_0^{1/n} f(x + t)\,dt,$$

то $\|f - f_n\| \le \omega(f; \dfrac{1}{n})$.

Задача 3.73. Нека полигонът l_n с възли $x_i = \dfrac{i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, интерполира функцията $f \in C_{[0,1]}$ в точките x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Докажете, че

$$\|f - l_n\| \le 3\omega\left(f; \frac{1}{2n}\right).$$

Задача 3.74. Нека полиномът $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ удовлетворява неравенството

$$\max_{-1\le x\le 1} P_n(x) \le L.$$

Да се докаже, че $|a_0| \le 2^{n-1}L$.

Задача 3.75. Нека $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ и числото γ се определя от линейната система $(-1)^i\gamma + P(x_i) = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n+2$, където f е функция, определена в точките $x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n+2$. Докажете, че

$$\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\alpha_i}{\alpha} f(x_i),$$

където

$$\alpha_i = \prod_{j=1,\, j\ne i}^{n+2} (x_i - x_j)^{-1} \quad \text{и} \quad \alpha = \sum_{i=1}^{n+2} (-1)^i \alpha_i.$$

РЕШЕНИЯ, УПЪТВАНИЯ И ОТГОВОРИ

3.1. в) Следва от $|\sin x - \sin y| = 2\left|\sin\dfrac{x-y}{2}\right|\ \left|\cos\dfrac{x+y}{2}\right| \le |x-y|$.

3.2. Изберете $x_n = 1/n,\ y_n = 1/n{+}1$ и образувайте $\left|\cos\dfrac{\pi}{x_n} - \cos\dfrac{\pi}{y_n}\right|$.

3.3. Следва от дефиницията на равномерно непрекъсната функция.

3.4. За $h \in [0, \varepsilon + \delta]$ нека $h = h_1 + h_2$, където $h_1 \in [0, \delta]$ и $h_2 \in [0, \varepsilon]$. Тогава

$$\begin{aligned}\omega(f; \delta + \varepsilon) &= \sup_{0\le h_1\le\delta;\ 0\le h_2\le\varepsilon} \|f(x + h_1 + h_2) - f(x)\| \\ &\le \sup_{0\le h_1\le\delta} \|f(x + h_1 + h_2) - f(x + h_2)\| \\ &+ \sup_{0\le h_2\le\varepsilon} \|f(x + h_2) - f(x)\| \le \omega(f; \delta) + \omega(f; \varepsilon).\end{aligned}$$

3.5. Първо се доказва неравенството $\omega(f; n\delta) \le n\omega(f; \delta)$, където n е цяло положително число. При $n = 1$ твърдението е вярно. Нека то е вярно за $n = k$. Тогава при $n = k + 1$ предвид зад. 3.4 следва

$$\omega(f; (k + 1)\delta)) \le \omega(f; k\delta) + \omega(f; \delta) \le k\omega(f; \delta) + \omega(f; \delta) = (k + 1)\omega(f; \delta),$$

т. е. за естествено n твърдението е доказано по индукция. За $\lambda > 0$ се получава $\omega(f; \lambda\delta) \le \omega(f; [\lambda + 1]\delta) \le [\lambda + 1]\omega(f; \delta) \le (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$, където $[\lambda]$ означава цялата част на λ.

3.6. Нека $\omega(f; \delta) \le H\delta^a$. Тогава за всеки две точки x и y е изпълнено $|f(x) - f(y)| \le \omega(f; x - y|) \le H|y - x|^\alpha$. Обратно, ако $f \in \mathrm{Lip}_H\alpha$, то при $|x - y| \le \delta$ е в сила $|f(x) - f(y)| \le H|y - x|^\alpha \le H\delta^\alpha$. Тъй като последното неравенство е изпълнено за всеки две точки, за които $|x - y| \le \delta$, то и $\omega(f; \delta) \le H\delta^\alpha$.

3.7. От зад. 3.4 следва, че ако $0 \le \alpha \le \beta < b - a$, то

$$\omega(f; \beta) \le \omega(f; \beta - \alpha + \alpha) \le \omega(f; \beta - \alpha) + \omega(f; \alpha),$$

т. е. $\omega(f; \beta) - \omega(f; \alpha) \le \omega(f; \beta - \alpha)$. От последното неравенство при произволни $\delta, \delta + h \in [0, b - a]$ следва неравенството $|\omega(f; \delta + h) - \omega(f; \delta)| \le \omega(f; h)$. Но $\omega(f; h) \to 0$, тъй като f е равномерно непрекъсната в $[a, b]$.

3.8. Ако $x \in \left(\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}\right)$, то

$$|f(x) - S_n(x)| = \left|f(x) - f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right| \le \omega\left(f; \frac{1}{2n}\right).$$

3.11. Тъй като $\delta_2/\delta_1 \ge 1$, то

$$\begin{aligned}\omega(f; \delta_2)/\delta_2 &= \omega(f; \delta_1\delta_2/\delta_1)/\delta_2 \le (\delta_2/\delta_1 + 1)\omega(f; \delta_1)/\delta_2 \\ &= (1/\delta_1 + 1/\delta_2)\omega(f; \delta_1) \le 2\omega(f; \delta_1)/\delta_1.\end{aligned}$$

3.12. Следва от $|\cos x - \cos y| \le |x - y|$.

3.13. Нека $M = \max\limits_{a \le x \le b} f(x),\ m = \min\limits_{a \le x \le b} f(x)$. Тогава от теоремата на Чебишов следва, че $p(x) = \dfrac{M+m}{2}$ и $E_0(f) = \dfrac{M-m}{2}$.

3.14. Нека $p(x) = Ax + B$ е полиномът на най-добро равномерно приближение и $x_1 < x_2 < x_3$ са точките на алтернанс, $x_2 \in (a, b)$, т. е. x_2 е точка на екстремум на $f - p$. Тогава $f'(x_2) - p'(x_2) = 0$ и следователно $A = f'(x_2)$. Тъй като f'' не си мени знака, то f' или строго расте, или строго намалява. Следователно само в точката x_2 функцията f' приема стойност A, т. е. $x_1 = a,\ x_3 = b$. Да означим $x_2 = c$. От теоремата на Чебишов получаваме $f(a) - p(a) = -(f(c) - p(c)) = f(b) - p(b)$, или

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad f'(c) = A, \quad B = \frac{f(a) + f(c)}{2} - A\frac{a+c}{2}.$$

3.15. $p(x) = x + 1/8$ — вж. зад. 3.14.

3.16. $p(x) = \dfrac{\pi}{2}x - E_1(f),\ E_1(f) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{1 - 4/\pi^2} - \arcsin\sqrt{1 - 4/\pi^2}\right).$

3.17. $p(x) = -\dfrac{x}{6} + \dfrac{1}{2} - E_1(f),\ E_1(f) = \dfrac{5 - 2\sqrt{6}}{12}.$

3.18. $p(x) = \ln 2 . x + E_1(f),\ E_1(f) = (\ln 2 - \ln\ln 2 - 1)/2.$

3.19. Нека f е четна функция. Ако $p_n(x)$ е полином на най-добро равномерно приближение на f от $n-$та степен, покажете, че и полиномът $p_n(-x)$ е също полином на най-добро равномерно приближение на f. След това използувайте, че полиномът на най-добро равномерно приближение е единствен.

3.20. Полиномът на най-добро равномерно приближение от степен 2 е също полином на най-добро равномерно приближение от степен 3 (вж. зад. 3.19.) и има вида $p(x) = ax^2 + b$. Нека точките на алтернанс са $x_1 = -1,\ x_2 = -\alpha,\ x_3 = 0,\ x_4 = \alpha,\ x_5 = 1$. От теоремата на Чебишов следва $|x_i| - p(x_i) = (-1)^i \varepsilon E_2(|x|),\ \varepsilon = \pm 1,\ i = 3, 4, 5$, и заедно с условието $(|x| - p(x))'_{x=\alpha} = 0$ след пресмятане се получава $a = 1,\ b = 1/8,\ E_2(|x|) = b$.

3.21. Вж. зад. 3.20. $p(x) = ax^2 + b,\ a = \operatorname{arctg} m,$

$$b = E_2(f) = (\operatorname{arctg} m\alpha - (\operatorname{arctg} m)\alpha)/2,$$

$$\alpha = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{m}{\operatorname{arctg} m} - 1}, \quad \lim_{m \to \infty} E_2(f) = \frac{\pi}{4}.$$

3.22. Вж. зад. 3.20. $p_2(x) = ax^2 + b,\ a = 1,$

$$b = E_2(f) = \left[\left(\frac{1}{2m}\right)^{1/(2m-1)} - \left(\frac{1}{2m}\right)^{2m/(2m-1)}\right] \Big/ 2, \quad \lim_{m \to \infty} E_2(f) = \frac{1}{2}.$$

3.24. Нека полиномите на най-добро приближение са съответно P_0, P_1, P_2, P_3, P_4. Тъй като f е нечетна функция, то $P_1 = P_2,\ P_3 = P_4$ и съответно $E_1(f) = E_2(f),\ E_3(f) = E_4(f)$. Очевидно $P_0(x) \equiv 0,\ E_0(f) = 1$. Нека $P_1(x) = ax$ и точките на алтернанс са $x_1 = -1,\ x_2 = -\alpha,\ x_3 = \alpha, x_4 = 1$. От системата $f(x_i) - P_1(x_i) = \varepsilon(-1)^i E_1(f),\ i = 1,2,\ \varepsilon = \pm 1$, се получава $a = \dfrac{2}{1+\alpha},\ E_1(f) = \dfrac{1-\alpha}{(1+\alpha)}$. Нека сега $P_3(x) = ax^3 + bx$. Шестте точки на алтернанс $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$ удовлетворяват условията $x_1 = -x_6,\ x_2 = -x_5,\ x_3 = -x_4$. Точките $x_4, x_5, x_6 > 0$ се определят измежду четирите точки y_j, които се задават с $0 < y_1 < y_2 = \alpha < y_3 < y_4 = 1$ и $f'(y_j) - P_3'(y_j) = 0$ за $j = 1,3$. Така имаме $y_1 = \sqrt{\dfrac{\alpha - b}{3a}}$ и $y_3 = \sqrt{\dfrac{-b}{3a}}$, в случай че съществуват.

По-нататък изследваме последователно случаите 3 от тези точки да са точките x_4, x_5, x_6, след което проверяваме дали за така намерените a, b и $E_3(f)$ се удовлетворява условието $|f(y_j) - P_3(y_j)| \le E_3(f)$ за четвъртата точка y_j.

В зависимост от α имаме различни възможности. Нека

$$\alpha_1 = \frac{1}{22}(6\sqrt{3} - 8 + \sqrt[4]{12}(5\sqrt{3} - 2) \approx 0,5876$$

е корен на уравнението $11\alpha^2 - 2(3\sqrt{3} - 4)\alpha + 8 - 6\sqrt{3} = 0$, а $\alpha_2 = \sqrt{3} - 1 \approx 0,732$ е корен на $\alpha^3 - 6\alpha + 4 = 0$. Тогава окончателно получаваме следните три случая:

1. $\alpha \in (0, \alpha_1] :\ x_4 = y_2 = \alpha,\ x_5 = y_3,\ x_6 = y_4 = 1$. Тогава

$$a = \frac{2}{(1+\beta)(\beta^2 - \beta - \alpha^2 - \alpha)},\ b = \frac{2(1 + \alpha + \alpha^2)}{(1+\beta)(\beta^2 - \beta - \alpha^2 - \alpha)},$$

$$E_3(f) = \frac{(1+\beta)(\beta^2 - \beta - \alpha^2 - \alpha) + 2\alpha^2 + 2\alpha}{(1+\beta)(\beta^2 - \beta - \alpha^2 - \alpha)},$$

където $\beta = \dfrac{\sqrt{1 + \alpha + \alpha^2}}{\sqrt{3}}$;

2. $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2] :\ x_4 = y_1,\ x_5 = y_2 = \alpha,\ x_6 = y_3$. Тогава

$$a = -\frac{4\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{9\alpha^3},\quad b = \frac{2\sqrt{3}}{3\alpha},\quad E_3(f) = \frac{2\sqrt{3} - 3}{9};$$

3. $\alpha \in [\alpha_2, 1] :\ x_4 = y_1,\ x_5 = y_2 = \alpha,\ x_6 = y_4 = 1$. Тогава

$$a = 4(\alpha - 1)\mu,\ b = (4 - 2\alpha^3)\mu,\ E_3(f) = 2\alpha(\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2)\mu,$$

където $\mu = \dfrac{1}{\alpha(\alpha^3 - 3\alpha^2 + 4)}$.

3.25. Нека $p(x) = ax^2 + bx + c$ и точките на алтернанс са $x_1 = -1$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 1/2$, $x_4 = 1$. От системата

$$|x_i - 1/2| - p(x_i) = (-1)^i \varepsilon E_2(f), \quad \varepsilon = \pm 1; \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

и условието $(|x - 1/2| - p(x))'_{x=\alpha} = 0$ следва

$$a = \frac{16}{25},\ b = -\frac{17}{25},\ c = \frac{9}{25},\ \alpha = -\frac{1}{4},\ E_2(f) = \frac{9}{50}.$$

За така намерения полином се проверява лесно, че $\|f - p_2\| = \dfrac{9}{50} = E_2(f)$.

3.26. От теоремата на Чебишов и от факта, че функцията $A \sin nx$ приема в $2n$ последователни точки от интервала стойности A и $-A$, следва

$$E_0(f) = E_1(f) = \cdots = E_{2n-2}(f) = |A|.$$

3.27. Нека $E_n(f) = \max\limits_{0 \le x \le 1} |f(x) - P(x)|,\ E_n(g) = \max\limits_{0 \le x \le 1} |g(x) - Q(x)|$. Тогава:

а) $E_n(f+g) \le \|f+g-P-Q\| \le \|f-P\| + \|g-Q\| = E_n(f) + E_n(g)$;

б) $E_n((\lambda f) = \inf\limits_{R \in \pi_n} \|\lambda f - R\| = |\lambda| \inf\limits_{R \in \pi_n} \|f - R/\lambda\| = |\lambda| E_n(f)$;

в) $E_n(f + g) = \inf\limits_{R \in \pi_n} \|f + g - R\| = \inf\limits_{R \in \pi_n} \|f - R\| = E_n(f)$;

г) $E_n(f) \le \|f - 0\| = \|f\|$.

3.28. а) Да фиксираме $\lambda = \lambda_0$. Нека за функцията $f + \lambda_0 g$ полиномът на най-добро приближение от $n-$та степен е P_0. Тогава

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) &= \inf_{P \in \pi_n} \|f + \lambda g - P\| \\ &\le \|f + \lambda_0 g - P_0\| + \|\lambda g - \lambda_0 g\| = \psi(\lambda_0) + |\lambda - \lambda_0| \|g\|, \end{aligned}$$

т. е. $\psi(\lambda) - \psi(\lambda_0) \le |\lambda - \lambda_0| . \|g\|$. Аналогично намираме

$$\psi(\lambda_0) - \psi(\lambda) \le |\lambda - \lambda_0| \|g\|.$$

б) $|\lambda| E_n(g) = E_n(\lambda g) \le E_n(f + \lambda g) + E_n(-f) = \psi(\lambda) + E_n(f)$ и при $\lambda \to \infty$ следва твърдението;

в) следва от

$$\begin{aligned} \psi(\alpha\lambda + (1-\alpha)\mu) &= E_n(f + (\alpha\lambda + (1-\alpha)\mu) g) \\ = E_n(\alpha(f + \lambda g) + (1-\alpha)(f + \mu g)) &\le \alpha E_n(f + \lambda g) + (1-\alpha) E_n(f + \mu g) \\ &= \alpha\psi(\lambda) + (1-\alpha)\psi(\mu), \quad 0 \le \alpha \le 1. \end{aligned}$$

3.29. От теоремата на Чебишов следва, че уравнението

$$f(x) - P(x) = 0$$

има поне $n+1$ корена в интервала $[a, b]$. Нека то има $n+2$ корена $\{x_i\}_{i=1}^{n+2}$. Тогава полиномът P може да се представи като интерполационен полином веднъж по точките $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$:

$$f(x)-P(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_1(x))}{(n+1)!}(x-x_1)\dots(x-x_{n+1}),$$
и втори път по точките $\{x_i\}_{i=2}^{n+2}$:
$$f(x)-P(x)=\frac{f^{n+1}(\xi_2(x))}{(n+1)!}(x-x_2)\dots(x-x_{n+2}).$$
От двете представяния следва
$$f^{(n+1)}(\xi_1(x))(x-x_1)=f^{(n+1)}(\xi_2(x))(x-x_{n+2}),$$
което противоречи на условието $f^{(n+1)}(x)>0$.

3.30. От зад. 3.29 следва, че функцията
$$p(x)-\sqrt{x},\quad p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n,$$
има $n+1$ нули в интервала $[0,1]$. Полиномът $q(t)=p(t^2)-t$ има също $n+1$ нули в интервала. Остава да се приложи правилото на Декарт за смяна на знаците пред коефициентите на полинома $q(t)$.

3.31. Нека $E_n(f)=\|f-P\|, E_n(g)=\|g-Q\|$:

а) $E_n(f)=\|f-P\|\le\|f-Q\|=\|f-g+g-Q\|\le\|f-g\|+E_n(g)$ и от обратното $E_n(g)\le\|f-g\|+E_n(f)$ следва $|E_n(f)-E_n(g)|\le\|f-g\|$;

б) $\|P-Q\|=\|P-f+f-Q+g-g\|\le E_n(f)+E_n(g)+\|f-g\|$ и от условието а) се получава $\|P-Q\|\le 2(E_n(f)+\|f-g\|)$.

3.32. Нека $\delta=\varepsilon/E_n(f)$. Тогава
$$\begin{aligned}\|Q-f\|&=\|Q-f+P-P\|\le\|Q-P\|+\|P-f\|\\&\le\varepsilon+E_n(f)=\delta E_n(f)+E_n(f)=(1+\delta)E_n(f).\end{aligned}$$

3.33. Нека полиномът на най-добро равномерно приближение на функцията $1/(x-a)$ е P. Тогава функцията $1/(x-a)-P$ трябва да достига максималното си отклонение от нулата L поне $n+2$ пъти с алтернативно сменящи се знаци. Но функцията $R(x)\equiv 1/(x-a)-P(x)$, където
$$\begin{aligned}R(x)&=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n[ax-1+\sqrt{(x^2-1)(a^2-1)}]}{2(x-a)(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}\\&+\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n[ax-1-\sqrt{(x^2-1)(a^2-1)}]}{2(x-a)(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}\end{aligned}$$
притежава исканите свойства. Наистина числителят на R е полином от $(n+1)-$ва степен и от $\lim\limits_{x\to a}(x-a)R(x)=1$ следва, че $1/(x-a)-R\in\pi_n$. Нека
$$x=\cos\theta,\ \sin\theta=\sqrt{1-x^2},\ \frac{ax-1}{x-a}=\cos\psi,\ \frac{\sqrt{(1-x^2)(a^2-1)}}{x-a}=\sin\psi,$$
т. е. $R(x)=L\cos(n\theta+\psi)$, където $L=1/(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n$. Тогава при $x\in[-1,1],\ 0\le\theta\le\pi,\ -\pi\le\psi\le 0$ и е ясно, че R достига L точно $n+2$ пъти със смяна на знаците, т. е. $E_n(f)=L$.

3.34. Нека P и Q са интерполационните полиноми на Лагранж съответно на f и g по възлите $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ и нека

$$f(x) - P(x) = R(x); \quad g(x) - Q(x) = S(x).$$

Функцията

$$\Phi(z) = R(x)S(z) - S(x)R(z)$$

при произволно, но фиксирано $x \in [-1,1]$, $x \neq x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, се анулира в точките $x, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. По теоремата на Рол съществува такава точка $\xi \in (-1,1)$, че $\Phi^{(n+1)}(\xi) = R(x)S^{(n+1)}(\xi) - S(x)R^{(n+1)}(\xi) = 0$, т. е. $R(x)S^{(n+1)}(\xi) = S(x)R^{(n+1)}(\xi)$. От последното равенство и от

$$R^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi), \quad S^{(n+1)}(\xi) = g^{(n+1)}(\xi)$$

следва

$$R(x)|g^{(n+1)}(\xi)| = |S(x)||f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Оттук $|R(x)| < |S(x)|$ или $|f(x) - P(x)| < |g(x) - Q(x)|$. Нека $\overline{Q}$ е полиномът на най-добро равномерно приближение на функцията g от степен n. Според теоремата на Чебишов $g - \overline{Q}$ си мени знака в $n+1$ точки в интервала $[-1,1]$. Ако $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ се изберат да бъдат точките, където $g - \overline{Q}$ си мени знака, то $Q \equiv \overline{Q}$. От последното неравенство следва $\|f - P\| < E_n(g)$ и от очевидното неравенство $E_n(f) \leq \|f - P\|$ се получава $E_n(f) < E_n(g)$.

3.35. Нека $E_n(f) = \|f - P_n\|, P_n \in \pi_n, n = 0, 1, \ldots$. Изберете триъгълната матрица $\{x_{n,i}\}_{i=0}^{n}$, $n = 0, 1, \ldots$, чийто $n-$ти ред се състои от точките $\{x_{n,i}\}_{i=0}^{n}$, в които P_n съвпада с f. Тогава интерполационният полином, построен по възлите $\{x_{n,i}\}_{i=0}^{n}$, ще съвпада с P_n, т. е.

$$\|L_n(f) - f\| = \|P_n - f\| = E_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

3.36. Използувайте остатъчния член на интерполационния полином на Лагранж, когато възлите са нули на полинома на Чебишов.

3.37. Вж. зад. 3.36.

3.38. Като се приложи формулата на Тейлор с остатъчен член в интегрална форма

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m} f_{(a)}^{(k)} \frac{(t-a)^k}{k!} + \frac{1}{m!} \int_a^t (t-u)^m f^{(m+1)}(u) du$$

(доказателството се получава просто след $m-$кратно интегриране по части на остатъчния член) към функцията $|x| = \sqrt{1 - (1 - x^2)}$, се получава при $1 - x^2 = t$ формулата

$$\sqrt{1-t} = 1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2.4} - \cdots - \frac{1.3 \ldots 2(n-3)}{2.4 \ldots 2n} t^n + R_n,$$

където $a = 0$ и

$$R_n(t) = \frac{1}{n!} \int_0^t (t-u)^n f^{(n+1)}(u) du = \frac{(2n-1)!!}{2(2n)!!} \int_0^t \left(\frac{t-u}{1-u}\right)^n \frac{du}{\sqrt{1-u}}$$

$$\leq \frac{(2n-1)!!}{2(2n)!!}\int_0^t \frac{du}{\sqrt{1-u}} \leq \frac{(2n-1)!!}{2(2n)!!}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}} = \frac{(2n)!}{2.[(2n)!!]^2}.2 = \frac{(2n)!}{2^{2n}.(n!)^2}.$$

След това приложете формулата на Стирлинг $n! \approx n^n.e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ при $n \to \infty$.

3.39. Нека $q = \min\limits_{1\leq k\leq n-1}(x_{k+1}-x_k)$ и $M = 1 + n\left(\dfrac{b-a}{q}\right)^{n-1}$. По теоремата на Вайерщрас съществува такъв полином P_ε, че $|P_\varepsilon(x) - \phi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ за всяко $\varepsilon > 0$. Ако $\rho_k = P_\varepsilon(x_k) - \phi(x_k)$, то полиномът

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x-x_k)\omega_n'(x_k)}\rho_k$$

удовлетворява условията $Q(x_k) = \rho_k$, $|Q(x)| < \varepsilon n(b-a)^{n-1}/Mq^{n-1}$ и търсеният полином е $R(x) = P_\varepsilon(x) - Q(x)$.

3.40. Нека $\varepsilon > 0$. От теоремата на Вайерщрас следва, че съществува полином P, за който $\|f - P\| \leq \varepsilon$. От

$$\int_a^b (f-P)^2\,dx \leq \varepsilon^2(b-a),$$

$$\int_a^b (f-P)^2\,dx = \int_a^b f^2\,dx - 2\int_a^b fP\,dx + \int_a^b P^2\,dx,$$

$$\int_a^b fP\,dx = 0,$$

следва $\displaystyle\int_a^b f^2 dx \leq \varepsilon^2(b-a)$ и тъй като ε е произволно, $f \equiv 0$.

3.41. Нека $\alpha = \max(b, 1-a)$ и $\overline{B}_n(f;x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]x^k(1-x)^{n-k}$.

Полиномът $\overline{B}_n(f)$ е с цели коефициенти и

$$\|f - \overline{B}_n(f)\| \leq \|f - B_n(f)\| + \|B_n(f) - \overline{B}_n(f)\|.$$

Тъй като $\|f - B_n(f)\| \to 0$, остава да се покаже, че $\|B_n(f) - \overline{B}_n(f)\| \to 0$. Наистина

$$\|B_n(f) - \overline{B}_n(f)\| = \max_{a\leq x\leq b}\left|\sum_{k=0}^{n}\left(\left[\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)\right] - \binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)x^k(1-x)^{n-k}\right|$$

$$\leq \max_{a\leq x\leq b}\sum_{k=0}^{n}\left|x^k(1-x)^{n-k}\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\alpha^k\alpha^{n-k} = (n+1)\alpha^n \to 0,\ \alpha < 1.$$

3.42. Първо покажете с директни пресмятания, че

$$B_n(t^3;x) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)x^3 + \frac{3}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{x}{n}.$$

3.44. Нека $\phi_n(x) = n\left[f\left(\dfrac{n-1}{n}x + \dfrac{1}{n}\right) - f\left(\dfrac{n-1}{n}x\right)\right]$. От неравенството $\|B_n(f)\| \leq \|f\|$ (зад. 3.43) и равенствата

$$(B_n(f))' = B_{n-1}(\phi_n), \quad \lim_{n\to\infty} \|f' - \phi_n\| = 0$$

следва

$$\|f' - (B_n(f))'\| = \|B_{n-1}(\phi_n) - f'\|$$

$$\le \|B_{n-1}(\phi_n) - B_{n-1}(f')\| + \|B_{n-1}(f') - f'\| \le \|\phi_n - f'\| + \|B_{n-1}(f') - f'\|$$

и тъй като $\|B_n(f')-f'\| \to 0$, окончателно се получава $\|f'-(B_n(f))'\| \to 0$.

3.45. Използувайте зад. 3.44.

3.46. $B_n(f_{nm};x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k(k-1)\dots(k-m+1)}{n^m} x^k(1-x)^{n-k}$

$$= \frac{1}{n^m} \sum_{k=m}^{n} \frac{n!}{(n-k)!(k-m)!} x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m} x^m \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-m}{k} x^k(1-x)^{n-m+k}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m} x^m = x^m f_{nm}(1).$$

3.47. $1, x, x^2 + \frac{x(1-x)}{n}, \ \left(1 + (e^{1/n} - 1)x\right)^n.$

3.48. $B_n(f;x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \binom{n}{k} (x-a)^k (b-x)^{n-k}.$

3.49. $B_n(e^{kt};x) = \sum_{i=0}^{n} e^{k(a+i(b-a)/n)} \binom{n}{i} \frac{(x-a)^i(b-x)^{n-i}}{(b-a)^n}$

$$= e^{ka} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left[e^{k(b-a)/n}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]^i \cdot \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-i}$$

$$= e^{ka}\left[e^{k(b-a)/n}\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + \frac{b-x}{b-a}\right]^n = e^{ka}\left[1 + \left(e^{k(b-a)/n} - 1\right)\frac{x-a}{b-a}\right]^n.$$

3.50. Според зад. 3.48

$$B_{2n}(|t|;x) = \sum_{k=0}^{2n} \left|-1 + \frac{k}{n}\right| \binom{2n}{k} \frac{(1+x)^k(1-x)^{2n-k}}{4^n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{n} \binom{2n}{k} \frac{(1+x)^k(1-x)^{2n-k}}{4^n}$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{-n+k}{n} \binom{2n}{k} \frac{(1+x)^k(1-x)^{2n-k}}{4^n}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} \binom{2n}{n-i} \frac{(1+x)^{n-i}(1-x)^{n+i}}{4^n}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \binom{2n}{n+i} \frac{(1+x)^{n+i}(1-x)^{n-i}}{4^n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \binom{2n}{n-i} \frac{(1+x)^{n-i}(1-x)^{n+i} + (1+x)^{n+i}(1-x)^{n-i}}{4^n}$$
$$= \frac{1}{n} \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \sum_{i=1}^{n} i \binom{2n}{n-i} \left[\left(\frac{1-x}{1+x} \right)^i + \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^i \right].$$

3.51. Полиномите на Бернщайн са линейни и положителни оператори и
$$B_4 \left(\frac{t+|t|}{2}; x \right) = \frac{1}{2} B_4(t;x) + \frac{1}{2} B_4(|t|;x).$$
От зад. 3.50 следва $B_4(|t|;x) = \dfrac{1}{16}((1-x)^3(3+x) + (1+x)^3(3-x))$, а от зад. 3.47 следва $B_4(t;x) = x$. Окончателно
$$B_4 \left(\frac{t+|t|}{2}; x \right) = \frac{x}{2} + \frac{1}{32}((1-x)^3(3+x) + (1+x)^3(3-x)).$$

3.52. Достатъчно е да се докаже твърдението при
$$f(x) = x^m, \quad m = 0, 1, \dots, k,$$
при което $B_n(t^m;x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{i^m}{n^m} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$, и остава да се покаже, че
$$\sum_{i=0}^{n} i^m \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \in \pi_m.$$
За тази цел тъждеството $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i = (1+z)^n$ се диференцира и умножава на z последователно m пъти. Получава се $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^m \binom{n}{i} z^i = (1+z)^{n-m} P_m(z)$, където P_m е полином от степен m на z. Последното равенство се умножава с $(1-x)^n$ и се прави смяната $z = \dfrac{x}{1-x}$, т. е.
$$\sum_{i=0}^{n} i^m \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-1} = (1-x)^m P_m \left(\frac{x}{1-x} \right),$$
и тъй като P_m е полином от степен m, то всичко е доказано.

3.53. За всеки $x, t \in [0,1]$ и за всяка функция $f \in C^2_{[0,1]}$ е в сила формулата на Тейлор
$$f(t) = f(x) + \frac{t-x}{1!} f'(x) + \int_0^x (\theta - t)_+ f''(\theta)\, d\theta + \int_x^1 (t-\theta)_+ f''(\theta)\, d\theta,$$
където $x_+ = \max(0,x)$ (доказателството се извършва чрез интегриране по части на определените интеграли). Към двете страни на формулата на Тейлор по отношение на t се прилага операторът на Бернщайн и тъй като $B_n(1;x) = 1$, $B_n(t;x) = x$, то
$$B_n(f;x) = f(x) + B_n \left(\int_0^x (\theta - t)_+ f''(\theta)\, d\theta + \int_x^1 (t-\theta)_+ f''(\theta)\, d\theta;\ x \right),$$

$$
\begin{aligned}
|B_n(f;x)-f(x)| &\le B_n\left(\int_x^1 (t-\theta)_+|f''(\theta)|\,d\theta+\int_0^x(\theta-t)_+|f''(\theta)|\,d\theta;\ x\right)\\
&\le \|f''\|B_n\left(\int_x^t (t-\theta)_+\,d\theta+\int_t^x(\theta-t)_+\,d\theta;\ x\right)\\
&\le \|f''\|B_n\left(\int_x^t (t-\theta)\,d\theta+\int_t^x(\theta-t)\,d\theta;\ x\right)\\
&= \|f''\|B_n((t-x)^2;x)=\|f''\|\frac{x(1-x)}{n}.
\end{aligned}
$$

3.54. Нека R е полиномът на най-добро равномерно приближение от $(n-1)$-ва степен. Тогава полиномът $T(x)=x^n-R(x)$ достига $n+1$ пъти максималното си отклонение в $[-1,1]$, $\|x^n-R\|=L$.

Тъй като T' е полином от $(n-1)$-ва степен, то вътрешните екстремни точки са най-много $n-1$. Следователно точките -1 и 1 са точки от алтернанса. Полиномите $L^2-T^2(x)$ и $(1-x^2)T'^2(x)$ имат едни и същи корени и се различават само с постоянен множител, който се определя, като се сравнят коефициентите пред x^{2n}, т. е.

$$n^2(L^2-T^2(x))=(1-x^2)T'^2(x).$$

Общият интеграл на последното диференциално уравнение е

$$T(x)=L\cos(n\arccos x+C),$$

но само при $C=0$ е полином. От изискването коефициентът пред x^n да е 1 следва $L=\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

3.55. Задачата е еквивалентна на намирането на полином на най-добро равномерно приближение от $(n-1)$-ва степен в интервала $[a,b]$ на функцията Ax^n. От зад. 3.54 следва, че полиномът

$$\cos\left(n\arccos\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right)$$

достига в $n+2$ различни точки максималното си отклонение в $[a,b]$, което е 1, но коефициентът му пред x^n е $2^n\times 2^{n-1}/(b-a)^n$. Тогава полиномът

$$T(x)=\frac{A(b-a)^n}{2^{2n-1}}\cos\left(n\arccos\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$$

има коефициент пред x^n, равен на A, и следователно

$$Ax^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k=T(x).$$

3.56. а) Решението следва от равенството

$$\cos(m+n)\theta+\cos(m-n)\theta=2\cos m\theta\cos\theta$$

след полагане на $\theta=\arccos x$;

б) следва от а) при $n=1$;

в) следва от а) при $n=m$;

г) следва от б).

3.57. а) От

$$\frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{T'_{n-1}(x)}{n-1} = \frac{\sin[(n-1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

при $\theta = \arccos x$, $\sqrt{1-x^2} = \sin\theta$ следва

$$\frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T'_{n-1}(x)}{n-1} = \frac{\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta}{\sin\theta} = 2\cos n\theta = 2T_n(x);$$

б) следва от а) за n нечетно;

в) следва от а) за n четно.

3.58. Следва по индукция от зад. 3.56 б).

3.59. В полинома на Чебишов направете линейна смяна на x с $2t-1$, т. е. трансформирайте интервала $[-1,1]$ в $[0,1]$.

3.60. За доказателството на $E_1(f) > 0,021$ използувайте зад. 3.14, а за доказателството на $E_2(f) < 0,016$ вместо полинома на най-добро равномерно приближение от втора степен вземете интерполационния полином на Лагранж от втора степен, като възлите на интерполиране да бъдат нулите на полинома на Чебишов от трета степен.

3.61. Нека $R_n(x) = \eta T_n(x)/T_n(\xi)$. В точките

$$x_i = \cos\frac{n-i}{n}\pi, \ i = 0,1,\dots,n,$$

е в сила $T_n(x_i) = (-1)^{n+1}$. Тъй като $\|T_n\| = 1$, то

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\eta\frac{T_n(x)}{T_n(\xi)}\right| = \frac{\eta}{|T_n(\xi)|} = L.$$

Ако съществува полином P от степен n, за който $P(\xi) = \eta$ и

$$\max_{-1\le x\le 1}|P(x)| < L,$$

то $(-1)^{n+i}\{R_n(x_i) - P(x_i)\} \ge 0$ и от очевидното равенство $R_n(\xi) = P(\xi) = \eta$ следва, че полиномът $R_n - P$ има $n+1$ нули, т. е. $R_n \equiv P$.

3.62. Покажете, че $T_n(x) = \frac{1}{2}[(x+i\sqrt{1-x^2})^n + (x-i\sqrt{1-x^2})^n]$ и използувайки зад. 3.61, докажете, че за всяко $|x| \ge 1$ е изпълнено

$$|P(x)| \le L|T_n(x)|.$$

3.63. Нека за полинома $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ полиномът

$$P_2(x) = b_1x^2 + c_1x + d_1$$

да бъде полином на най-добро равномерно приближение от втора степен. Тогава

$$\begin{aligned}\max_{-1\le x\le 1}|P_3(x) - P_2(x)| &= |a|\max_{-1\le x\le 1}\left|x^3 + \frac{b-b_1}{a}x^2 + \frac{c-c_1}{a}x + \frac{d-d_1}{a}\right| \\ &= |a|\max_{-1\le x\le 1}\left|\frac{T_3(x)}{2^2}\right| = \frac{a}{4}.\end{aligned}$$

Тъй като $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, то $\dfrac{b-b_1}{a} = 0$, $\dfrac{c-c_1}{a} = -\dfrac{3}{4}$, $d - d_1 = 0$. Окончателно $P_2(x) = bx^2 + \left(c + \dfrac{3a}{4}\right) x + d$.

3.64. От $E_n(f) = E_n\left(\dfrac{f+g}{2} + \dfrac{f-g}{2}\right) \le E_n\left(\dfrac{f+g}{2}\right) + E_n\left(\dfrac{f-g}{2}\right)$ и

$$0 < \frac{g^{(n+1)}(x) + f^{(n+1)}(x)}{2} < g^{(n+1)}(x),$$
$$0 < \frac{g^{(n+1)}(x) - f^{(n+1)}(x)}{2} < g^{(n+1)}(x)$$

и от зад. 3.34 следва $E_n\left(\dfrac{f+g}{2}\right) \le E_n(g)$, $E_n\left(\dfrac{f-g}{2}\right) \le E_n(g)$. От получените неравенства се вижда, че $E_n(f) \le 2E_n(g)$.

3.65. б) Редът вдясно е реалната част на $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(te^{i\theta})^n$ при $x = \cos\theta$;

в) Полиномът вдясно е реалната част на $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ при $x = \cos\theta$.

3.66. Нека $S = \left\{\dfrac{p_i}{q_i}\right\}_{i=1}^{r}$, p_i и q_i са несъкратими. От $\left|\dfrac{p_i}{q_i}\right| < 1$ следва, че съществуват p_i^*, q_i^*, за които

$$\cos\frac{p_i^*}{q_i^*}\pi = \frac{p_i}{q_i},\ 0 \le \frac{p_i^*}{q_i^*} \le 1.$$

Нека $n = 2mq_1^* q_2^* \dots q_r^*$. Ако

$$x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi = \frac{p_i}{q_i} = \cos\frac{p_i^*}{q_i^*}\pi,$$

то $\dfrac{2k-1}{2n}\pi = \dfrac{p_i^*}{q_i^*}\pi$, откъдето стигаме до противоречието

$$2k - 1 = 4mp_i^* q_1^* q_2^* \dots q_{i-1}^* q_{i+1}^* \dots q_r^*.$$

3.67. От теоремата на Чебишов следва, че $|\gamma(x_1, x_2, \dots, x_{n+2})|$ е най-доброто равномерно приближение на f на множеството $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ с полиноми от степен не по-висока от n. Ще покажем, че за произволни точки $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ е изпълнено $E_n(f) \ge |\gamma(x_1, x_2, \dots, x_{n+2})|$, където $E_n(f)$ е най-доброто равномерно приближение на f с полиноми от степен n в целия интервал. Наистина, ако полиномите на най-добро равномерно приближение на f съответно в $[a, b]$ и в множеството от точки $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ са P и Q, то

$$|\gamma(x_1, x_2, \dots, x_{n+2})| = \max_{x=x_i}|f(x) - Q(x)| \le \max_{x=x_i}|f(x) - P(x)|$$
$$\le \max_{a\le x\le b}|f(x) - P(x)| = E_n(f),$$

т. е. $|\gamma(x_1, x_2, \dots, x_{n+2})| \le E_n(f)$. Ако точките $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ са точките на алтернанс на f в интервала $[a,b]$, то очевидно $E_n(f) = |\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})|$, с което твърдението е доказано.

3.68. Използувайте, че

$$B_n(1;x) = 1,\ B_n(t;x) = x,\ B_n(t^2;x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

(вж. зад. 3.47), и приложете теоремата на Коровкин.

3.69. След като покажете, че

$$M_n(1;x) = 1,\ M_n(t;x) = x,\ M_n(t^2;x) = x^2 + \frac{x}{n},$$

приложете теоремата на Коровкин.

3.70. Покажете, че $K_n(1;x) = 1,\ K_n(t;x) = x + \dfrac{1-2x}{2(n+1)}$,

$$K_n(t^2;x) = x^2 + \frac{1 - 6nx - (9n+3)x^2}{3(n+1)^2},$$

и приложете теоремата на Коровкин.

3.71. Ако $g_i(x) \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$, очевидно е, че $L_n(f;x)$ е линеен и положителен оператор. Обратно, нека $L_n(f;x)$ е линеен и положителен оператор. Ще докажем, че $g_i(x) \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Да допуснем, че $g_l(z) < 0,\ a < z < b,\ 1 \leq l \leq n$. За положителната функция f, определена чрез $f(x_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots l-1, l+1, \ldots, n,\ f(x_l) = 1$ и линейна между точките x_i, е изпълнено

$$0 \leq L_n(f;x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) g(x_i) = f(x_l) g_l(x) = g_l(x),$$

което противоречи на $0 \leq L_n(f;z) = g_l(z) < 0$.

3.72. Следва от

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| n \int_0^{1/n} (f(x) - f(x+t))\, dt \right| \\ &\leq n \int_0^{1/n} \omega(f; 1/n)\, dt = \omega\left(f; \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

3.73. $l_n(x)$ може да се разглежда като линеен положителен оператор, притежаващ свойствата $l_n(1;x) = 1,\ l_n(t;x) = x,\ l_n(t^2;x) = x^2 + \alpha(x)$, като $\|\alpha\| = \dfrac{1}{4n^2}$ и от теоремата на Коровкин следва търсеното неравенство.

3.74. Използувайте зад. 3.61.

3.75. Нека $g(x) = f(x) - P(x)$ при $g(x_i) = (-1)^i \lambda$. Тогава

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}) = g(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}),$$

където $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})$ е разделената разлика на f от $(n+1)$-ви ред, и от свойствата на разделените разлики следва

$$\sum_{i=1}^{n+2} \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{g(x_i)}{\omega'(x_i)} = \lambda \sum_{i=1}^{n+2} \frac{(-1)^i}{\omega'(x_i)},$$

където $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+2})$. От тези равенства твърдението се получава директно.