Глава 1

ИНТЕРПОЛАЦИЯ

1.1. ИНТЕРПОЛАЦИОНЕН ПОЛИНОМ НА ЛАГРАНЖ

С π_n ще бележим класа на всички алгебрични полиноми от степен, по-малка или равна на n.

Нека $x_0, \ldots, x_n$ са различни реални точки и $y_0, \ldots, y_n$ са дадени реални числа. Задачата за построяване на алгебричен полином $P \in \pi_n$, който удовлетворява условията

$$P(x_k) = y_k, \quad k = 0, \ldots, n, \tag{1.1}$$

се нарича интерполационна задача. Ако P удовлетворява (1.1), казваме, че P интерполира таблицата $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$. Полиномът P се нарича *интерполационен полином*, а точките $(x_k)_0^n$ — интерполационни възли.

Задача 1.1. Да се докаже, че ако съществува полином $P \in \pi_n$, който удовлетворява интерполационните условия (1.1), то той е единствен.

Задача 1.2. Да се докаже, че съществува полином $P \in \pi_n$, който удовлетворява условията (1.1).

Задача 1.3. Да се построи полиномът $l_{kn} \in \pi_n$, който удовлетворява условията $l_{kn}(x_i) = \delta_{ki}, \quad i = 0, \ldots, n$, където δ_{ki} е символът на Кронекер:

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad k = i \\ \\ 0 & \text{при} \quad k \neq i. \end{cases}$$

Полиномите l_{kn} се наричат базисни полиноми на Лагранж. Лесно се вижда, че решението на интерполационната задача (1.1) може да се запише вече в явен вид по следния начин:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \, l_{kn}(x).$$

Най-често числата $(y_k)_0^n$ се разглеждат като стойности на някаква функция $f(x)$ във възлите $(x_k)_0^n$, т. е. $y_k = f(x_k)$. В този случай решението на (1.1) се бележи с $L_n(f; x)$ и се нарича *интерполационен полином на Лагранж* за функцията f с възли $x_0, \ldots, x_n$. И така за всяка функция f, дефинирана в точките $x_0, \ldots, x_n$, имаме

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \, l_{kn}(x).$$

Задача 1.4. Нека $Q \in \pi_n$. Да се докаже, че $L_n(Q; x) \equiv Q(x)$, каквито и да са възлите $(x_k)_0^n, \quad x_k \neq x_j$ при $k \neq j$.

Задача 1.5. Да се построи интерполационният полином на Лагранж за таблицата

x	0	$0,5$	1	$1,5$
$f(x)$	1	2	3	4

Задача 1.6. Да се опрости изразът

$$-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)+x(x-2)(x-3)-\frac{3}{2}x(x-1)(x-3)+\frac{2}{3}(x-1)(x-2)x.$$

Задача 1.7. Определете приближено стойността на $f(x) = e^x$ при $x = 0,15$, като използувате интерполационен полином от трета степен и таблицата

x	$0,0$	$0,1$	$0,2$	$0,3$
$f(x)$	1	$1,10517$	$1,22140$	$1,34986$

Задача 1.8. Да се докаже, че при всяко естествено число n полиномът

$$l(x) = 1 + \frac{x-x_0}{x_0-x_1} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \cdots + \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)}$$

удовлетворява интерполационните условия

$$l(x_0) = 1, \quad l(x_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Задача 1.9. Да се докаже, че интерполационният полином на Лагранж за таблицата $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n)$ може да бъде построен по рекурентната връзка

$$P_0(x) = f_0,$$

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + [f_k - P_{k-1}(x_k)]\omega_k(x)/\omega_k(x_k),$$

където $\omega_1(x) = x - x_0, \quad \omega_{k+1}(x) = \omega_k(x)(x - x_k)$.

Задача 1.10. Да се докаже, че $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} l_{kn}(x) = 1$ за всяко x.

Задача 1.11. Да се докаже, че $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^m l_{kn}(x) = x^m, \quad m = 0, \ldots, n.$

Задача 1.12. Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^{n}(x-x_k)^m l_{kn}(x) = 0, \quad m = 1, \ldots, n.$$

Оттук нататък в този раздел с $\omega(x)$ ще бележим полинома

$$(x-x_0)\cdots(x-x_n).$$

Задача 1.13. Да се докаже равенството

$$\sum_{k=0}^{n} (x-x_k)^{n+1} l_{kn}(x) = (-1)^n \omega(x).$$

Задача 1.14. Да се докаже равенството

$$\sum_{k=0}^{n} (x-x_k)^{n+2} l_{kn}(x) = (-1)^n \omega(x) \sum_{k=0}^{n} (x-x_k).$$

Задача 1.15. Нека $x_0 < \ldots < x_n$. Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^{n+1}\, l_{kn}(0) = (-1)^n x_0 \ldots x_n.$$

Задача 1.16. Да се докаже, че ако $(x_i)_0^n$ са различни точки, то

$$\frac{1}{\omega(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{(x - x_k)},$$

където $A_k = \dfrac{1}{\omega'(x_k)}, \quad k = 0, \ldots, n.$

Задача 1.17. Да се разложи в сума от елементарни дроби функцията $(x^2 - x - 1)/((x-1)(x-2)(x-3))$.

Задача 1.18. Нека $s_0, \ldots, s_n$ са дадени числа и $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Да се построи полином, който удовлетворява условията

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)dx = s_i, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Задача 1.19. Като използувате формулата на Лагранж, докажете, че

$$\frac{1}{m-n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{m}{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{m-k}$$

при $m > n \geq 0$.

Задача 1.20. При предположение, че $m > n \geq 1$, като използувате формулата на Лагранж, докажете, че

$$\frac{m}{m-n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{m}{n} \binom{n}{k} \frac{k}{m-k}.$$

Задача 1.21. Да се докаже, че

$l_{kn}(x) + l_{k+1,n}(x) \geq 1$ при $x \in [x_k, x_{k+1}]$ за $k = 0, \ldots, n-1$.

Задача 1.22. Нека $P \in \pi_n$ и k е естествено число. Да се докаже, че ако $P(j)$ се дели точно на k за $n+1$ последователни цели стойности на j, то $P(j)$ се дели на k за всяко цяло j.

Задача 1.23. Нека $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Докажете, че коефициентът пред x^n на интерполационния полином, построен по интерполационната таблица

x_i	x_0	x_1	$\ldots$	x_i	x_{i+1}	$\ldots$	x_n
$f(x_i)$	0	0	$\ldots$	0	1	$\ldots$	1

е различен от нула.

Задача 1.24. Напишете интерполационната формула на Лагранж с възли, съвпадащи с нулите на полинома на Чебишов от първи род:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

т.е. с числата $x_k = \cos(2k-1)\pi/(2n), \quad k = 1, \ldots, n.$

Задача 1.25. Напишете интерполационната формула на Лагранж с възли, съвпадащи с нулите на полинома на Чебишов от втори род:

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

т. е. с числата $x_k = \cos \dfrac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, \ldots, n.$

Задача 1.26. Нека $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ е $n-$тият полином на Чебишов. Да се намери коефициентът a_{n-1}.

Задача 1.27. Нека $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Да означим с P полинома от класа π_n, който удовлетворява интерполационните условия

$$P(x_k) = (-1)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Да се докаже, че $|L_n(f;x)| \leq |P(x)|$ за всяко $x \notin (x_0, x_n)$, ако $|f(x_k)| \leq 1$, $k = 0, \ldots, n$. Да се докаже, че равенство се достига само при $f(x_k) = P(x_k)$, $k = 0, \ldots, n$, или при $f(x_k) = -P(x_k)$, $k = 0, \ldots, n$.

Задача 1.28. Като следствие от предишната задача да се покаже, че

$$|Q(x)| \leq |T_n(x)|. \max_{x \in [-1,1]} |Q(x)|$$

за всеки полином $Q \in \pi_n$ и всяко x, $|x| \geq 1$. Тук T_n е полиномът на Чебишов, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ за $-1 \leq x \leq 1$.

Задача 1.29. Да се докаже, че екстремалната задача

$$\min_{-1 \leq x_0 < \cdots < x_n \leq 1} \{ \max_{x \in [-1,1]} |P(x)| \ : \ P \in \pi_n, \ P(x_k) = (-1)^{n-k}, \ k = 0, \ldots, n\}$$

има единствено решение $P(x) = T_n(x)$.

Задача 1.30. Да се докаже, че $\displaystyle \inf_{-1 \leq x_0 < \cdots < x_n \leq 1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{|\omega'(x_k)|} = 2^{n-1}$ и този инфимум се достига единствено за екстремалните точки на полинома на Чебишов $\pm T_n$.

Задача 1.31. Намерете полином от степен, ненадминаваща n, който приема в точката ξ, $|\xi| > 1$, стойност η и най-малко се отклонява от нулата в интервала $[-1, 1]$.

Задача 1.32. Нека $x_0 < \ldots < x_n$ са произволни интерполационни възли в интервала $[a, b]$. Функцията

$$\lambda(x) := \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)|$$

се нарича функция на Лебег за интерполационния оператор на Лагранж. Да се докаже, че

$$\sup \left\{ |L_n(f;x)| : \quad f \in C[a,b], \quad \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq 1 \right\} = \lambda(x).$$

Задача 1.33. Да се докаже, че $\lambda(x) \geq 1$ за всяко x. Равенството се достига само при $x = x_k, \quad k = 0, \ldots, n$.

Задача 1.34. Да се намери такова число $\xi \in (0, 1]$, че при $n = 2$ и възли $-\xi, 0, \xi$ величината $\max\{|\lambda(x)| : x \in [-1, 1]\}$ да бъде най-малка.

Задача 1.35. Нека $n = 2$. Да се докаже, че при произволен избор на интерполационните възли $x_0 < x_1 < x_2$ е изпълнено неравенството

$$\max\{\lambda(x) : \quad x_0 \leq x \leq x_2\} \geq 5/4.$$

Задача 1.36. Нека $P \in \pi_2$. Да се докаже, че

$$\max\{|P(x)| : \quad x \in [a,b]\} \leq \frac{5}{4}. \max \left\{ |P(a)|, |P(b)|, \left| P\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \right\}.$$

Задача 1.37. Да се докаже, че ако $x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \ldots, n$, където h е дадено число, то

$$l_{kn}(x_0 + th) = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \prod_{j=0,\ j\neq k}^{n} (t - j), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Да се докаже, че

$$\max_{0\leq t\leq n} \quad |\lambda(x_0 + th)| \geq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k-1} \binom{n}{k}.$$

Тук както обикновено

$$(2n)!! = \prod_{k=1}^{n} (2k), \quad (2n-1)!! = \prod_{k=1}^{n} (2k-1).$$

Задача 1.38. Нека функцията $f(x)$ има непрекъснати производни до $(n+1)$–вата включително в $[a, b]$. Нека $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$. Да се докаже, че за всяко $x \in [a, b]$ може да се намери такава точка

$$\xi \in (\min\{x_0, \ldots, x_n, x\}, \max\{x_0, \ldots, x_n, x\}),$$

че

$$f(x) - L_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)\ldots(x - x_n).$$

Задача 1.39. Решете зад. 1.13 с помощта на предишната задача.

Задача 1.40. Нека $f \in C^2[x_0, x_1]$ и $\max\{|f''(x)| : x \in [x_0, x_1]\} = M$. Да се докаже, че при $x \in [x_0, x_1]$

$$|f(x) - L_1(f; x)| \leq \frac{M}{8}(x_1 - x_0)^2.$$

Задача 1.41. Да се намери оценка на грешката

$$R_n(x) = f(x) - L_n(f; x)$$

при $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$. Да се покаже, че в този случай

$$\max\{|R_n(x)| : x \in [a, b]\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

при произволен избор на възлите $\{x_k\}$ от крайния интервал $[a, b]$.

Задача 1.42. Нека $\max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(k)}(x)| = M_k$ и $M_k \leq A^k$ за $k = 0, 1, \ldots$, където A е константа. Да се докаже, че

$$\max_{x\in[a,b]} |L_n(f; x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

при произволна таблица $\{x_{kn}\}_{k=0,\ n=0}^{n\ \ \ \infty}$, $a \leq x_{k0} < \ldots < x_{kn} \leq b$ от интерполационни възли.

Задача 1.43. Нека $F(x) = \sqrt{x}, \quad h = 1/N, \quad x_i = 1 + ih, \quad i = 0, \ldots, N$. Да се определи h така, че функцията $F(x)$ да може да се приближава в интервала $[1, 2]$ с точност 0,001 с полином от втора степен, интерполиращ F в най-близките до x възли x_{i-1}, x_i, x_{i+1} от системата $\{x_k\}_0^N$.

Задача 1.44. Да се намери оценка на грешката, която се допуска при приближаването на функцията $f(x) = 1/(1 + x)$ в интервала $[0, 1]$ с интерполационния полином на Лагранж от първа степен с възли 0 и 1.

Задача 1.45. Нека

$$f(x) = \ln x,\ 1 \le \xi \le 9,\ h = (\xi - 1)/2,\ H = (9 - \xi)/2,$$
$$t_k = 1 + kh, \quad k = 0, 1, 2; \quad x_k = \xi + kH, \quad k = 0, 1, 2.$$

$P(x)$ и $Q(x)$ са полиномите от втора степен, определени от условията

$$P(t_k) = f(t_k), \quad Q(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2.$$

Нека

$$R(x) = \begin{cases} |f(x) - P(x)| & \text{за} \quad x \in [1, \xi), \\ |f(x) - Q(x)| & \text{за} \quad x \in [\xi, 9]. \end{cases}$$

Да се намери такова $\xi \in [1, 9]$, че $R(x) \le 1/5$ за всяко $x \in [1, 9]$.

Задача 1.46. Нека $f \in C^2[0, 1]$ и $|f''(x)| \le x^2$ за всяко $x \in [0, 1]$. Да означим с $p_\xi(x)$ линейната в $[0, \xi]$ и $[\xi, 1]$ непрекъсната функция, която интерполира f в точките $0, \xi$ и 1. Да се определи ξ така, че $|f(x) - p_\xi(x)|$ да бъде по-малко от 0,02 в интервала $[0, 1]$.

Задача 1.47. Нека $P_\xi(x) \in \pi_2$ е полиномът, който интерполира функцията $f(x) = |x|$ в точките $-1, \xi, 1$, където $0 \le \xi < 1$. Да се определи ξ така, че грешката $\max\limits_{x \in [-1,1]} |f(x) - P_\xi(x)|$ да е минимална.

Задача 1.48. Нека $P_\xi(x)$ е полиномът от втора степен, който интерполира $|x|$ в точките $\pm 1/2, \ \pm \xi \quad (0 \le \xi \le 1,\ \xi \ne 1/2)$. Определете $\rho(\xi) := \max\left\{ \left| P_\xi(x) - |x| \right| \ : \ -1 \le x \le 1 \right\}$ и намерете $\inf \rho(\xi)$ по всички допустими ξ. За кое ξ се достига минималната стойност?

Задача 1.49. Нека $\{P_i\}_0^\infty$ е редица от такива полиноми от степен, по-малка или равна на n, че $|P_i(x)| \le 1$ за $x \in [a, b]$. Като използвате интерполационната формула на Лагранж, покажете, че може да бъде избрана сходяща подредица $\{P_{i_k}\}_{k=0}^\infty$ и нейната граница е полином от π_n, т. е. ако $P_{i_k}(x) \to f(x)$ при $k \to \infty$ за всяко x от $[a, b]$, то $f \in \pi_n$.

Задача 1.50. Нека $f(x)$ е непрекъсната функция в интервала $[a, b]$, за която съществува такъв алгебричен полином $P(x)$ от степен, по-малка или равна на n, че $\max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| \le E$. Нека $x_0 < \ldots < x_n$ са произволни точки от $[a, b]$ и $\lambda(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)|$ е функцията на Лебег за тези точки. Да се докаже, че

$$|f(x) - L_n(f; x)| \le (1 + \lambda(x))\, E, \quad x \in [a, b].$$

Задача 1.51. Нека $1 < a$ и $P(x)$ е полином от π_n, за който е изпълнено $|P(x)| \le 1$ при всяко x от множеството σ, състоящо се от незастъпващи се подинтервали на $[-1, a]$ с обща дължина 2. Да се докаже, че $|P(a)| \le T_n(a)$, където T_n е полиномът на Чебишов. Равенството се достига само при $\sigma = [-1, 1]$ и $P = \pm T_n$.

Задача 1.52. Нека $\{x_k\}_1^n$ са нулите на полинома на Чебишов $T_n(x)$, т.е. $x_k = \cos \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$. Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)| \le 2n, \quad l_{kn}(x) = \prod_{i=1,\ i \ne k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Задача 1.53. Нека $L_n(f;x)$ е интерполационният полином на Лагранж, построен за $f(x) = x/(x+1)$ с интерполационни възли $0, 1, \ldots, n$. Да се докаже, че

$$L_n(f; n+1) = \frac{(-1)^{n+1} + (n+1)}{n+2}.$$

Задача 1.54. Нека $f^{(n)} \in L[a,b]$. Докажете, че за всяко $x \in [a,b]$ е в сила тъждеството

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt.$$

Това е известната формула на Тейлор с интегрален остатък.

Задача 1.55. Като използувате предишната задача, покажете, че ако $a \le x_0 < \ldots < x_n \le b$, то

$$f(x) - L_n(f;x) = \int_a^b K(x,t) f^{(n)}(t)dt$$

за всяка функция $f \in C^{n-1}[a,b]$ с интегруема в $[a,b]$ n-та производна, където

$$K(x,t) = \frac{1}{(n-1)!}\left\{(x-t)_+^{n-1} - \sum_{k=0}^{n} (x_k - t)_+^{n-1}\, l_{kn}(x)\right\},$$

а $(x-t)_+^{n-1}$ е отсечената степенна функция: $(x-t)_+^{n-1} := [\max\{x-t, 0\}]^{n-1}$.

1.2. РАЗДЕЛЕНИ РАЗЛИКИ

Нека $x_0, x_1, \ldots$ е дадена редица от различни точки в интервала $[a,b]$ и функцията $f(x)$ е дефинирана в тях. Разделената разлика на функцията f в точките $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ще бележим с $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$.

Дефиниция 1.1. *Разделената разлика се определя чрез рекурентната връзка:*

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}\ , \quad n = 1, 2, \ldots,$$

при $f[x_k] = f(x_k)$.

Задача 1.56. Да се докаже, че $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$, където $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$.

Задача 1.57. Да се докаже, че:

а) ако $F(x) = f(x) + c\, g(x)$, то

$$F[x_0, x_1, \ldots, x_n] = f[x_0, x_1, \ldots, x_n] + c\, g[x_0, x_1, \ldots, x_n];$$

б) $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = f[x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}]$, където $i_0, \ldots, i_n$ е произволна пермутация на $0, \ldots, n$.

Дефиниция 1.2. *Разделена разлика* $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *на функцията* f *в точките* $\{x_k\}_0^n$ *се нарича коефициентът пред* x^n *в интерполационния полином на Лагранж* $L_n(f;x)$ *от* $n-$*та степен за функцията* f*, построен при възли* $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Задача 1.58. Да се докаже, че дефинициите 1.1 и 1.2 са еквивалентни.

Задача 1.59. Да се докаже, че $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^i}{\omega'(x_k)} = 0, \quad i = 0, \dots, n-1.$

Задача 1.60. Нека $f(x) = x^n$. Да се докаже, че:

а) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1$;

б) $f[x_1, \dots, x_n] = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Задача 1.61. Нека $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ и $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Да означим

$$f(x) = (x - t_1)(x - t_2)\dots(x - t_n), \quad g(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n).$$

Да се докаже, че $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{g'(x_k)} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - t_i)$.

Задача 1.62. Да се докаже, че $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = 0.$

Задача 1.63. Да се докаже, че $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = (n+1)n.$

Задача 1.64. Пресметнете $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left[1 - \frac{\bar{\omega}''(x_k)}{\bar{\omega}'(x_k)}(x - x_k)\right]$, ако $x_1, \dots, x_n$ са различни точки и $\bar{\omega} = (x - x_1)\dots(x - x_n)$.

Задача 1.65. Нека $x_k \neq 0, -1$ за $k = 1, \dots, n$. Докажете равенството

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n f(1/x_k)}{f'(x_k)(1 + x_k)} = (-1)^{n+1}(1 - x_1 x_2 \dots x_n),$$

където $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$.

Дефиниция 1.3. *Ще наричаме разделена разлика на функцията f в точките $(x_k)_0^n$ единствения функционал от вида $D[f] = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$, който удовлетворява условията:*

$$D[x^n] = 1, \qquad D[x^k] = 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Задача 1.66. Да се докаже, че дефинициите 1.1, 1.2 и 1.3 са еквивалентни.

Задача 1.67. Нека $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Да се докаже формулата

$$f[x_0, \dots, x_n] = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Задача 1.68. Нека $(x_k)_0^n$ са произволни различни цели числа. Да се докаже, че ако P е полином от степен n с коефициент 1 пред x^n, то съществува точка x_j, $j \in [0, n]$, за която $|P(x_j)| \geq (n!)/2^n$.

Задача 1.69. Нека $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ и $n \ge 2$. Да се докаже, че при всяко фиксирано k, $0 < k < n$, съществуват такива положителни числа $(A_i)_0^{n-2}$, че $A_0 + A_1 + \cdots + A_{n-2} = 1$ и $f[x_0, x_k, x_n] = \sum_{i=0}^{n-2} A_i f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$.

Задача 1.70. Да се докаже, че ако $f(x) = g(x)h(x)$, то

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} g[x_0, \ldots, x_k]\, h[x_k, \ldots, x_n]$$

(това е известната формула на Стефенсън).

Задача 1.71. Нека са известни всички разделени разлики на функцията g в $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Да се намери разделената разлика $f[x_0, \ldots, x_n]$ на функцията $f(x) = xg(x)$.

Задача 1.72. Да се намери $f[x_0, \ldots, x_n]$ при $f(x) = 1/x$.

Задача 1.73. Да се докаже, че при всяко естествено число n

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Задача 1.74. Да се докаже, че ако $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ и функцията $f^{(n)}(x)$ е непрекъсната в $[x_0, x_n]$, то

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(\sigma_n)\, dt_n,$$

където $\sigma_n = x_0(1-t_1) + x_1(t_1 - t_2) + \cdots + x_{n-1}(t_{n-1} - t_n) + x_n t_n$.

Задача 1.75. При същите предположения, както в предишната задача, да се докаже, че $f[x_0, \ldots, x_n] = f^{(n)}(\xi)/n!$, където ξ е някаква точка от интервала $[x_0, x_n]$.

Задача 1.76. Да се докаже, че ако $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ и $f^{(n)}(x)$ е непрекъсната и различна от нула в интервала $[x_0, x_n]$, то

$$\operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x), \quad x \in [x_0, x_n].$$

Задача 1.77. Нека $f \in C^n[a,b]$, $\xi \in (a,b)$ и $x_k \to \xi$ за $k = 0, \ldots, n$. Да се докаже, че $f[x_0, \ldots, x_n] \to f^{(n)}(\xi)/n!$.

Задача 1.78. Нека $(x_k)_0^n$ са произволни различни точки от интервала $[a,b]$ и функцията f е дефинирана в $[a,b]$. Да се докаже, че:

а) полиномът

$$P_n(f;x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

удовлетворява интерполационните условия $P_n(f;x_k) = f(x_k)$, $k = 0, \ldots, n$;

б) за всяко x от $[a,b]$ е изпълнено равенството

$$f(x) = P_n(f;x) + (x - x_0)\ldots(x - x_n) f[x_0, \ldots, x_n, x].$$

(Полиномът $P_n(f;x)$ се нарича *интерполационен полином на Нютон.* Той представлява друг запис на интерполационния полином на Лагранж. Формулата б) се нарича *интерполационна формула на Нютон.*)

Задача 1.79. Нека $f[x_0,\dots,x_n]=0$ при всеки избор на различните точки $(x_k)_0^n$ от $[a,b]$. Да се докаже, че функцията $f(x)$ съвпада в $[a,b]$ с алгебричен полином от степен, по-малка или равна на $n-1$.

Задача 1.80. Нека $p(x)$ е полином от трета степен, който интерполира функцията $\ln x$ в точките 1,2,3,4. Докажете, че $p(x)>\ln x$ за $2<x<3$.

Задача 1.81. Да означим с W_0^n множеството на всички функции f от $C^n[a,b]$, за които $|f^{n)}(x)|\le 1$ при $x\in[a,b]$ и $f(x_k)=0, \quad k=1,\dots,n$ ($(x_k)_1^n$ са фиксирани различни точки от $[a,b]$). Да се докаже, че за всяко x от $[a,b]$ $\max\limits_{f\in W_0^n} f(x)=|(x-x_1)\dots(x-x_n)|/n!$

Задача 1.82. Нека $g(x)=f[x_0,\dots,x_k,x]$. Да се докаже, че

$$g[y_0.\dots,y_n]=f[x_0,\dots,x_k,y_0,\dots,y_n].$$

Задача 1.83. Нека $P(x)$ е полином от $n-$та степен, за който в интервала $[-1,1]$ е изпълнено неравенството $|P(x)|\le 1$. Докажете, че

$$P[x_0,x_1,\dots,x_n]\ \le\ 2^{n-1} \text{ при всеки избор на точките } x_0<\ \cdots<\ x_n.$$

1.3. КРАЙНИ РАЗЛИКИ

Дефиниция 1.4. *Нека е дадена редицата от числа $f_0,f_1,\dots$ Крайната разлика от $n-$ти ред $\Delta^n f_i$ се определя чрез рекурентните формули:*

$$\Delta f_i=f_{i+1}-f_i,$$
$$\Delta^n f_i=\Delta^{n-1}f_{i+1}-\Delta^{n-1}f_i.$$

Задача 1.84. Да се докаже, че $\quad \Delta^n f_i=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f_{i+k}.$

Задача 1.85. Нека $x_k=x_0+kh, \quad k=0,1,\dots$ Да се докаже, че

$$f[x_0,x_1,\dots,x_n]=\frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}.$$

Задача 1.86. Нека функцията $f(x)$ има непрекъсната $n-$та производна в интервала $[x_0,x_0+kh], \quad h>0$. Да се докаже, че съществува точка $\xi\in(x_0,x_0+kh)$, за която $\Delta^n f_0=h^k f^{(k)}(\xi)$.

Задача 1.87. Нека $x_k=x_0+kh, \ \ k=0,1,\dots$ Да се докаже, че за всеки полином $P(x)=a_0x^n+\dots+a_n$ са в сила равенствата:

а) $\Delta^n P(x_0)=a_0\,n!\,h^n, \qquad$ б) $\Delta^m P(x_0)=0$ при $m>n$.

Задача 1.88. Да се докаже, че

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j^{\,k}=\begin{cases}0 & \text{при } k=0,1,\dots,n-1,\\ n! & \text{при } k=n.\end{cases}$$

Задача 1.89. Да се докаже, че

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\binom{m+j}{k}=0$$

за всяко естествено число m и $k=0,1,\dots,n-1$.

Задача 1.90. Нека $f_0, f_1, \dots, f_n$ са произволни дадени числа. Да се покаже, че

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} f_k = f_0.$$

Задача 1.91. Нека $P(x)$ е произволен алгебричен полином от степен n, за който са известни величините $P_n, \Delta P_{n-1}, \dots, \Delta^n P_0$, където

$$P_k = P(x_k), \quad x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \dots$$

Да се покаже, че стойностите на полинома $P(x)$ за $x = x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ могат да бъдат изчислени, като се използват само n събирания за всяка от тях.

Задача 1.92. Нека $f_0, f_1, \dots, f_{n+1}$ е произволна редица от числа, които удовлетворяват условието

$$f_0 = f_{n+1} = 0 \ \text{ и } \ |\Delta^2 f_{i-1}| \le 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Да се докаже, че

$$|f_k| \le \frac{k(n+1-k)}{2}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Задача 1.93. Нека $f_0, f_1, \dots$ е редица от числа, за които

$$\Delta^{n+1} f_i = 0 \ \text{ за всяко } \ i = 0, 1, \dots.$$

Тогава съществува единствен алгебричен полином $q(x)$ от степен n, за който $q(k) = f_k, \ \ k = 0, 1, \dots$

Задача 1.94. Да се намери сумата:

а) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$; б) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$;

в) $1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2$; г) $1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3$.

Задача 1.95. Нека $f(x)$ е произволен полином от степен k. Да се докаже, че съществува такъв полином $F(x)$ от степен $k+1$, че за всяко n

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = F(n).$$

Задача 1.96. Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$ функция и

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} f(x_0 + kh) = 0$$

за всяко $h > 0$ и x_0 такова, че $[x_0, x_0 + nh] \subset [a,b]$. Да се докаже, че $f(x)$ е полином от степен, по-малка или равна на n в $[a,b]$.

Задача 1.97. Да се докаже, че $\delta_h^k f(x) = (-1)^k \delta_{-h}^k f(x)$, където $\delta_h^k f(x)$ е централна (симетрична) крайна разлика, дефинирана с равенството $\delta_h^k f(x) = \Delta_h^k f(x - \frac{k}{2} h)$.

1.4. ИНТЕРПОЛАЦИОННА ФОРМУЛА НА ЕРМИТ

Задача 1.98. Нека $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ и $(y_k)_0^n$, $(y'_k)_0^n$ са произволни реални числа. Да се построи полином Q от степен $2n+1$, който удовлетворява интерполационните условия:

$$Q(x_k) = y_k, \quad Q'(x_k) = y'_k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Задача 1.99. Да се построи полиномът от зад. 1.98 при възли

$$x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

При същите възли да се запише полиномът, съответстващ на стойностите $y_k = f(x_k)\,, \quad y'_k = 0, \quad k = 1, \ldots . n$. Той се нарича *интерполационен полином на Фейер.*

Задача 1.100. Да се построи полиномът от зад. 1.98, когато $(x_k)_1^n$ са нулите на полинома на Чебишов от втори род, т. е. когато

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Задача 1.101. Да се пресметне детерминантата на матрицата, съответстваща на интерполационната задача: $x_1 < \cdots < x_n$,

$$P(x_k) = a_0 x_k^{2n-1} + a_1 x_k^{2n-2} + \cdots + a_{2n-1} = y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$
$$P'(x_k) = a_0(2n-1)x_k^{2n-1} + a_1(2n-2)x_k^{2n-3} + \cdots + a_{2n-2} = y'_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Задача 1.102. Нека $x_1 < \cdots < x_n$ и $(\nu_k)_1^n$ са дадени цели положителни числа. Да се докаже, че полиномите

$$\omega_{k\lambda}(x) = (x-x_1)^{\nu_1} \ldots (x-x_{k-1})^{\nu_{k-1}} (x-x_k)^{\lambda},$$

$k = 1, 2, \ldots, n, \quad \lambda = 0, 1, \ldots, \nu_k - 1$, са линейно независими.

Задача 1.103. Нека $x_1 < \cdots < x_n$ и $(\nu_k)_1^n$ са дадени цели положителни числа. Да се докаже, че при всеки избор на стойностите

$$y_k, y'_k, \ldots, y_k^{(\nu_k-1)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

съществува единствен полином $H(x)$ от степен $N = \nu_1 + \cdots + \nu_n - 1$, който удовлетворява условията

$$H^{(\lambda)}(x_k) = y_k^{\lambda}, \qquad k = 1, \ldots, n, \quad \lambda = 0, \ldots, \nu_k - 1.$$

Задача 1.104. При същите условия, както в предишната задача, да се покаже, че полиномът

$$L_{k\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda!}\frac{\Omega(x)}{(x-x_k)^{\nu_k-1}} \sum_{\mu=0}^{\nu_k-\lambda-1} \frac{1}{\mu!} \left\{\frac{(x-x_k)^{\nu_k}}{\Omega(x)}\right\}^{(\mu)} \Bigg|_{x=x_k} .(x-x_k)^{\mu},$$

където $\Omega(x) = (x-x_1)^{\nu_1} \ldots (x-x_n)^{\nu_n}$, удовлетворява интерполационните условия

$$L_{k\lambda}^{(j)}(x_i) = \delta_{ki}\delta_{\lambda j}, \qquad i = 1 \ldots, n, \quad j = 0, \ldots, \nu_k - 1.$$

Задача 1.105. Да се построи полиномът от втора степен $P(x)$, който удовлетворява условията $P(a) = A, \; P(b) = B, \; P'(b) = B_1$.

1.5. ИНТЕРПОЛИРАНЕ С ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМИ

Дефиниция 1.5. *Тригонометричен полином от ред n се нарича всеки израз от вида*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos\, kx + b_k \sin\, kx),$$

където $\{a_k\}_0^n$ и $\{b_k\}_1^n$ са реални числа.

Задача 1.106. Да се докаже, че функцията
$$\varphi(x) = \sin\frac{x-x_1}{2}\cdots\sin\frac{x-x_{2n}}{2}$$
е тригонометричен полином от ред n при всеки избор на $x_1,\ldots,x_{2n}$.

Задача 1.107. Да се докаже, че всеки ненулев тригонометричен полином от ред n има най-много $2n$ различни нули в интервала $[0,2\pi)$.

Задача 1.108. Нека $\{x_k\}_0^{2\pi}$ са произволни, две по две различни точки от интервала $[0,2\pi)$ и $\{y_k\}_0^{2n}$ са произволни числа. Да се докаже, че съществува единствен тригонометричен полином $\tau(x)$ от ред n, който удовлетворява условията $\tau(x_k)=y_k,\quad k=0,1,\ldots,2n$.

Задача 1.109. Нека $t_0,t_1,\ldots,t_n$ са две по две различни точки от интервала $[0,\pi]$:

а) Да се построи тригонометричен полином от вида
$$g_i(t) = a_0 + a_1\cos t + \cdots + a_n\cos nt, \quad i=0,\ldots,n,$$
който удовлетворява интерполационните условия
$$g_i(t_j)=\delta_{ij}, \quad j=0,1,\ldots,n.$$

б) Да се построи тригонометричен полином $s_i(t)$ от вида
$$s_i(t) = b_1\sin t + b_2\sin 2t + \cdots + b_n\sin nt, \quad i=1,\ldots,n,$$
който удовлетворява интерполационните условия
$$s_i(t_j)=\delta_{ij}, \quad j=1,\ldots,n.$$

Задача 1.110. Да се докаже, че

а) $$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx = \frac{1}{2}\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)};$$

б) $$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx = -\frac{\cos(n+1/2)x+\cos(x/2)}{2\sin(x/2)}.$$

Задача 1.111. Да се построи тригонометричен интерполационен полином за таблицата
$$\begin{array}{c} t_0,t_1,\ldots,t_{2n} \\ y_0,y_1,\ldots,y_{2n} \end{array}$$
при $t_k=2k\pi/(2n+1),\quad k=0,\ldots,2n$.

Задача 1.112. Интерполационният полином от зад. 1.111 да се запише във вида
$$\tau_n(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

1.6. ЧЕБИШОВИ СИСТЕМИ

Дефиниция 1.6. *Една система от функции $\varphi_0,\ldots,\varphi_n$ образува система на Чебишов (Чебишова система) в множеството от точки $\mathcal{A}$, ако произволна ненулева линейна комбинация $a_0\,\varphi_0(x)+\cdots+a_n\,\varphi_n(x)$ има не повече от n различни нули в $\mathcal{A}$.*

Задача 1.113. Да се докаже, че функциите $\{x^k\}_0^n$ образуват система на Чебишов в произволен интервал $[a,b]$.

Задача 1.114. Да се докаже, че функциите 1, $\sin x$ са линейно независими в интервала $[0,\pi]$, но не образуват система на Чебишов.

Задача 1.115. Да се докаже, че функциите $\{x^{2k+1}\}_0^n$ образуват система на Чебишов във всеки интервал $[\alpha,\beta]$ при $0<\alpha<\beta$.

Задача 1.116. Да се докаже, че функциите $\{\varphi_k(x)\}_0^n$ образуват система на Чебишов в множеството $\mathcal{A}$ тогава и само тогава, когато

$$\det\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

при всеки избор на точките $x_0<x_1<\ldots<x_n$ от $\mathcal{A}$.

Задача 1.117. Да се докаже, че функциите $\{\cos kx\}_{k=0}^n$ образуват система на Чебишов в интервала $[0,\pi]$.

Задача 1.118. Да се докаже, че функциите

$$(\{\cos\ kx\}_{k=0}^n, \{\sin\ kx\}_{k=1}^n)$$

образуват система на Чебишов в интервала $[\alpha,\alpha+2\pi)$ за всяко реално α.

Задача 1.119. Нека $\alpha_0<\ldots<\alpha_n$ са произволни реални числа. Да се докаже, че функциите $\{e^{\alpha_k x}\}_{k=0}^n$ образуват система на Чебишов във всеки интервал $[a,b]$.

Задача 1.120. Нека $\alpha_0<\ldots<\alpha_n$. Да се докаже, че функциите $\{x^{\alpha_k}\}_{k=0}^n$ образуват система на Чебишов във всеки интервал $[a,b]$ при $0<a<b$.

Задача 1.121. Нека $\{\alpha_k\}_{k=0}^n$ са такива произволни реални числа, че $\alpha_i\neq\alpha_j$ при $i\neq j$ и $\alpha_i\notin[a,b]$, $i=0,\ldots,n$. Да се докаже, че функциите $\{1/(\alpha_k+x)\}_{k=0}^n$ образуват система на Чебишов в $[a,b]$.

Задача 1.122. Нека $\varphi(x)$ е непрекъсната функция в интервала $[a,b]$. Да се докаже, че функциите $\{[\varphi(x)]^k\}_{k=0}^n$ образуват система на Чебишов в $[a,b]$ тогава и само тогава, когато $\varphi(x)$ е строго монотонна в $[a,b]$.

Задача 1.123. Нека $f\in C^{n+1}[a,b]$ и $f^{(n+1)}(x)\neq 0$ при $x\in[a,b]$. Да се докаже, че функциите $\{f(x),1,x,\ldots,x^n\}$ образуват система на Чебишов в $[a,b]$.

Задача 1.124. Нека функциите $\{\varphi_k(x)\}_o^n$ образуват система на Чебишов в $[a,b]$ и $\psi(x)>0$ при $x\in[a,b]$. Да се докаже, че тогава и функциите $\{\psi(x)\varphi_k(x)\}_0^n$ образуват система на Чебишов в $[a,b]$.

Задача 1.125. Нека функциите $\{\varphi_k(x)\}_o^n$ образуват система на Чебишов в $[a,b]$ и $\psi(x)$ е строго растяща функция, дефинирана в $[\alpha,\beta]$ със стойности в $[a,b]$. Да се докаже, че функциите $\{\varphi_k(\psi(x))\}_0^n$ образуват система на Чебишов в $[\alpha,\beta]$.

Задача 1.126. Да се докаже, че функциите $\left\{e^{-(x_k-t)^2}\right\}_{k=0}^n$ образуват система на Чебишов в произволен интервал $[a,b]$ при произволни различни стойности на параметрите $x_0,x_1,\ldots,x_n$.

1.7. СПЛАЙН–ФУНКЦИИ

Дефиниция 1.7. *Казваме, че s е сплайн–функция (накратко сплайн) от степен r с възли $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, ако:*

1. $s(x)$ съвпада с алгебричен полином от степен $\le r$ във всеки подинтервал (x_i, x_{i+1}), $\quad i = 0, \ldots, n \quad (x_0 = -\infty,\ x_{n+1} = +\infty)$;

2. s има непрекъснати производни до $(r-1)-$вата включително в $(-\infty, +\infty)$.

По-нататък с $S_r(x_1, \ldots, x_n)$ ще означаваме множеството на всички сплайни от степен r с възли $x_1, \ldots, x_n$.

Задача 1.127. Да се докаже, че:

а) всеки алгебричен полином от степен r е сплайн от степен r без възли;

б) отсечената степенна функция

$$(x-\xi)_+^r := \begin{cases} (x-\xi)^r, & \text{ако } x-\xi \ge 0; \\ \\ 0, & \text{ако } \ x-\xi < 0 \end{cases}$$

е сплайн от степен r с един възел (в точката ξ);

в) производната на всеки сплайн от степен r е сплайн от степен $r-1$;

г) r-тата производна на един сплайн s от $S_r(x_1, \ldots, x_n)$ е на части постоянна функция с точки на прекъсване във възлите на s;

д) r-кратната примитивна функция на една на части постоянна функция е сплайн от степен r.

Задача 1.128. Докажете, че функциите $|\ x_k - t\ |, \quad k = 1, \ldots, n$, са линейно независими в $[a, b]$ при $a \le x_1 < \cdots < x_n \le b$.

Задача 1.129. Нека $\xi_1 < \cdots < \xi_n$ и $n \le r+1$. Докажете, че функциите $(x-\xi_1)_+^r, \ldots, (x-\xi_n)_+^r$ са линейно независими във всеки подинтервал на (ξ_n, ∞).

Задача 1.130. Покажете, че всеки сплайн s от $S_r(x_1, \ldots, x_n)$ може да се запише във вида

$$s(x) = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i x^i + \sum_{k=1}^{n} c_k (x-\xi_k)_+^r .$$

Задача 1.131. Нека $I_1(f; x)$ е сплайнът от $S_1(x_1, \ldots, x_{n-1})$, който интерполира f в точките $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Намерете коефициентите c_k в представянето

$$I_1(f; x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \ |\ x - x_k\ |\ .$$

Задача 1.132. Покажете, че

$$\|\ f - I_1(f; \cdot)\ \| \le 2\mathrm{dist}(f, S_1(x_1, \ldots, x_{n-1})),$$

където $||f|| := \max\{|f(x)| :\ x \in\ [a, b]\}$ и $\mathrm{dist}(g, F) := \inf\{\|\ g - f\ \| :\ f \in F\}$.

Задача 1.133. Покажете, че $\|\ f - I_1(f; \cdot)\ \| \le \omega(f; \Delta_n)$, където

$$\Delta_n := \max_{0 \le i \le n-1} |x_{i+1} - x_i|.$$

Задача 1.134. Покажете, че ако ω е изпъкнала функция, то

$$\| f - I_1(f;\cdot) \| \le \omega\left(f; \frac{\Delta_n}{2}\right).$$

Задача 1.135. Нека $f \in C^1[0,1]$ и $x_k = \dfrac{k}{n},\ k = 0,\ldots,n$. Докажете, че

$$\| f - I_1(f;\cdot) \| \le \frac{\| f' \|}{n}.$$

Задача 1.136. Нека $f \in C^2[0,1]$ и $x_k = \dfrac{k}{n},\ k = 0,\ldots,n$. Докажете, че

$$\| f - I_1(f;\cdot) \| \le \frac{C}{n^2}.$$

Задача 1.137. Нека $f(x)$ е изпъкнала функция в интервала $[0,1]$ и $x_k = \dfrac{k}{n},\ k = 0,\ldots,n$. Да се докаже, че

$$\| f - I_1(f;\cdot) \| \le \omega_2\left(f; \frac{1}{n}\right),$$

където $\omega_2(f;\delta) := \sup\{|f(t-h) - 2f(t) + f(t+h)| :\ \ |h| \le \delta,\ \ t-h, t+h \in [0,1]\}$.

Задача 1.138. Нека $f(x) = \sqrt{|x|}$ и $[a,b] = [-1,1]$.

а) Да се докаже, че

$$\| f - I_1(f;\cdot) \| = O(n^{-\frac{1}{2}}) \ \text{ при } \ x_k = -1 + \frac{2k}{n}, \quad k = 0,\ldots,n.$$

б) Да се намерят точки $\{x_k\}_0^n$, за които $\| f - I_1(f;\cdot) \| = O(n^{-2})$.

B-сплайн от степен $r-1$ с възли $x_0,\ldots,x_r$ се нарича разделената разлика на функцията $(x-t)_+^{r-1}$ в $r+1$ точки $x_0 < \cdots < x_r$. Ще бележим този сплайн с $B(x_0,\ldots,x_r;t)$. Имаме

$$B(x_0,\ldots,x_r;t) = (x-t)_+^{r-1}[x_0,\ldots,x_r].$$

Задача 1.139. Покажете, че

$$\begin{aligned} B(x_0,\ldots,x_r;t) &= 0 \qquad \text{за } t \in (x_0,x_r),\\ B(x_0,\ldots,x_r;t) &> 0 \qquad \text{за } t \notin (x_0,x_r). \end{aligned}$$

Задача 1.140. Покажете, че $\displaystyle\int_{x_0}^{x_r} B(x_0,\ldots,x_r;t)dt = \frac{1}{r}$.

Оттук нататък при дадена редица от точки $\{x_i\}$ (крайна или безкрайна) такива, че $x_i < x_{i+1}$ за всяко i , с $B_{i,r-1}(t)$ или просто с $B_i(t)$ ще означаваме В-сплайна

$$B_i(t) := B(x_i,\ldots,x_{i+r};t).$$

Задача 1.141. Покажете, че ако $\{x_i\}$ е безкрайна редица от точки върху цялата реална права, то

$$\sum_i (x_{i+r} - x_i) B_{i,r-1}(t) = 1.$$

Задача 1.142. Нека $x_0 < \cdots < x_r$ и ξ е точка, различна от тях. Докажете, че има число α, $0 < \alpha < 1$, такова, че

$$B(x_0,\ldots,x_r;t) = \alpha B(x_0,\ldots,x_{r-1},\xi;t) + (1-\alpha)B(x_1,\ldots,x_r,\xi;t).$$

Намерете α.

Задача 1.143. Нека $x_0 < \cdots < x_{r+N}$. Покажете, че функциите

$$B_i(t) := B(x_i,\ldots,x_{i+r};t), \quad i = 0,\ldots N,$$

са линейно независими в $(-\infty,\infty)$.

Задача 1.144. Нека

$$x_1 < \cdots < x_r < a < x_{r+1} < \cdots < x_N < b < x_{N+1} < \cdots < x_{r+N}.$$

Покажете, че функциите $B_1(t),\ldots,B_N(t)$ са линейно независими в $[a,b]$.

Задача 1.145. Нека $x_1 < \cdots < x_{2r}$. Покажете, че $B_1(t),\ldots,B_r(t)$ са линейно независими в интервала (x_r, x_{r+1}).

Задача 1.146. Нека

$$x_k = -r/2 + k, \quad k = 0,\ldots,r \ \text{ и } \ M_i(t) := rB(x_0,\ldots,x_r;t).$$

Покажете, че

а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} M_r(x)e^{ixt}\,dx = \left(\frac{\sin t/2}{t/2}\right)^r;$

б) $\displaystyle M_r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} M_{r-1}(x-t)M_1(t)dt.$

Задача 1.147. Докажете рекурентната връзка

$$B_{i,r-1}(t) = \frac{x_{i+r}-t}{x_{i+r}-x_i}B_{i+1,r-2}(t) + \frac{t-x_i}{x_{i+r}-x_i}B_{i,r-2}(t).$$

Задача 1.148. Покажете, че

$$\frac{d}{dt}B_{i,r-1}(t) = \frac{r-1}{x_{i+r}-x_i}\{-B_{i+1,r-2}(t) + B_{i,r-2}(t)\}.$$

Задача 1.149. Докажете рекурентната връзка

$$\frac{d}{dt}\frac{B_{i,r-1}(t)}{(x_{i+r}-t)^{r-1}} = (r-1)\frac{B_{i,r-2}(t)}{(x_{i+r}-t)^r}.$$

Това е известната формула на Л.Чакалов.

Задача 1.150. Нека φ_f е функцията, която удовлетворява интерполационните условия $\varphi_f(x_i) = f(x_i), \varphi_f'(x_i) = f'(x_i)$, $\quad i = 0,\ldots,n$, и φ_f съвпада с алгебричен полином от втора степен във всеки от подинтервалите (x_i, x_{i+1}), $\quad i = 0,\ldots,n-1$. Докажете, че ако

$$f \in C^4[a,b] \text{ и } \Delta_n := \max_{0\le i\le n-1}|x_{i+1}-x_i|,$$

то

$$\| f - \varphi_f \| \le (1/384)\Delta_n^4 \| f^{(4)} \|.$$

Задача 1.151 (П.Бинев [1984]). Нека s е сплайн с възли $\{x_j\}$ от степен k. Да се докаже, че за всяко четно $m \ge 2$ е изпълнено

$$\delta_h^{k+m}s(x_j) = 0 \quad \text{за } |h| \le \Big(2/(k+m)\Big)\min\{x_{j+1}-x_j, x_j-x_{j-1}\}.$$

Тук δ е симетрична крайна разлика (вж. зад. 1.97).

РЕШЕНИЯ, УПЪТВАНИЯ И ОТГОВОРИ

1.1. ИНТЕРПОЛАЦИОНЕН ПОЛИНОМ НА ЛАГРАНЖ

1.1. Допускаме, че има два такива полинома P_1 и P_2. Тогава разликата им $R = P_1 - P_2$ е полином от π_n и $R(x)$ се анулира в $n+1$ точки $(x_k)_0^n$. Следователно $R(x) \equiv 0$.

1.2. П ъ р в и н а ч и н: Търсим $P(x)$ във вида

$$P(x) = a_0 x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

Интерполационните условия $P(x_k) = y_k, \quad k = 0, \ldots, n$, се записват като линейна система от $n+1$ уравнения с $n+1$ неизвестни $a_0, \ldots, a_n$. Детерминантата ѝ е детерминантата на Вандермонд и следователно е различна от нула, когато $(x_k)_0^n$ са различни точки.

В т о р и н а ч и н: Търсим $P(x)$ във вида

$$P(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + A_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Тогава матрицата на системата $P(x_k) = y_k, \quad k = 0, \ldots, n$, е триъгълна и нейната детерминанта е

$$1.(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)\ldots(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1}) \neq 0.$$

1.3. Отг. $\quad l_{kn} = \dfrac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}.$

1.4. Полиномите $Q(x)$ и $L_n(Q;x)$ са от π_n и удовлетворяват условията $Q(x_k) = L_n(Q;x_k), \quad k = 0, \ldots, n$. Следователно $Q(x) \equiv L_n(Q;x)$.

1.5. Отг. $L_3(f;x) = 2x + 1$.

1.6. Да означим израза с $P(x)$. Очевидно $P \in \pi_3$. Освен това $P(x) = x+1$ за $x = 0, 1, 2, 3$. Следователно $P(x) \equiv x + 1$.

1.7. Имаме

$$\begin{aligned} e^{0,15} &\approx 1.l_{03}(0,15) + 1,10517\, l_{13}(0,15) \\ &+ 1,22140\, l_{23}(0,15) + 1,34986\, l_{33}(0,15) \\ &= -0,0625 + 0,621658 + 0,687037 - 0,084366 \quad = \quad 1,161829. \end{aligned}$$

Сравнете с точната до петия знак след запетаята стойност 1,16183.

1.8. Да означим с $l_k(x)$ изследвания израз при възли $x_0, \ldots, x_k$. Ще използуваме индукция по k. При $k = 1$ твърдението е очевидно. Допускаме, че то е вярно при $k = n$. Тогава по формулата на Лагранж

$$l_n(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x - x_i}{x_0 - x_i}$$

и следователно

$$l_{n+1}(x) = l_n(x) + \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)\ldots(x_0 - x_{n+1})}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{x - x_i}{x_0 - x_i}\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0 - x_{n+1}}\right) = \prod_{i=1}^{n+1} \frac{x - x_i}{x_0 - x_i}.$$

1.9. Лесно се вижда, че $P_k \in \pi_k$. Трябва да докажем, че

$$P_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Действително, при всяко $0 \le i \le n$ имаме

$$P_n(x_i) = P_{n-1}(x_i) = \cdots = P_i(x_i) = P_{i-1}(x_i) + f_i - P_{i-1}(x_i) = f_i.$$

1.10. Прилагаме зад. 1.4 при $Q(x) \equiv 1$.

1.11. Прилагаме зад. 1.4 при $Q(x) = x^m$.

1.12. Тъй като функцията $\varphi(t) = (x-t)^m$ е полином от степен m, то

$$(x-t)^m = \sum_{k=0}^{n} (x-x_k)^m l_{kn}(t)$$

при $m = 1, \ldots, n$. Полагаме $t = x$.

1.13. Нека $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$. Функцията

$$R(t) := \varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \varphi(x_k) l_{kn}(t)$$

е полином от степен $n+1$ и се анулира при $t = x_0, \ldots, x_n$. Следователно $R(t) = C\omega(t)$. Константата C определяме, като сравним коефициентите пред t^{n+1} в двете страни на горното тъждество. Получаваме $C = (-1)^{n+1}$. Полагаме $t = x$.

1.14. Да разгледаме функцията

$$R(t) := \sum_{k=0}^{n} (x-x_k)^{n+2} l_{kn}(t) - (x-t)^{n+2}.$$

Тя е полином от степен $n+2$. Освен това $R(x_k) = 0$ при $k = 0, \ldots, n$. Следователно $R(t)$ е от вида $R(t) = (At+B)\omega(t)$. Сравняваме коефициентите пред t^{n+2} и t^{n+1} и определяме константите A и B. Получаваме $A = (-1)^{n+1}$, $B = (-1)^n\left[(n+2)x - (x_0 + \cdots + x_n)\right]$. Полагаме $t = x$ в равенството

$$R(t) = (A\,t + B)\omega(t) = (-1)^n \left[-t + x + \sum_{k=0}^{n} (x - x_k)\right] \omega(t).$$

1.15. Полагаме $x = 0$ в тъждеството от зад. 1.13.

1.16. Съгласно зад. 1.10

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}.$$

Разделяме двете страни на $\omega(x)$.

1.17. Нека $L_2(Q;x)$ е интерполационният полином от степен 2, който интерполира функцията $Q(x) = x^2 - x - 1$ в точките 1,2,3. Тъй като $Q(x) \equiv L_2(Q;x)$, то

$$\frac{Q(x)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{Q(1)}{V'(1)} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{Q(2)}{V'(2)} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{Q(3)}{V'(3)} \cdot \frac{1}{x-3},$$

където $V(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

1.18. Нека $Q(x)$ е полиномът от степен n, който удовлетворява условията $Q(x_0) = 0,\ Q'(x) = P(x)$. Тогава

$$Q(x_{i+1}) - Q(x_i) = s_i, \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

и оттук $Q(x_i) = y_i$, където $y_i = s_0 + \cdots + s_{i-1}$, $\quad i = 1, \dots, n$, $\quad y_0 = 0$. По формулата на Лагранж

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, l_{in}(x).$$

Следователно

$$P(x) = Q'(x) = \sum_{i=1}^{n} (s_0 + \cdots + s_{i-1}) \, l'_{in}(x).$$

1.19. Нека $x_k = k$, $k = 0, \dots, n$. По формулата на Лагранж и зад. 1.10

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-k)\omega'(x_k)}, \qquad \omega(x) = x(x-1) \, \dots \, (x-n).$$

Тъй като

$$\omega(m) = \binom{m}{n} n!(m-n) \text{ и } \omega'(k) = (-1)^{n-k} k!(n-k)!,$$

то при $x = m$ от горното равенство получаваме

$$1 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{m-n}{m-k} \binom{m}{n} \binom{n}{k}.$$

Остава да разделим двете страни на равенството на $m - n$.

1.20. Нека $P(x)$ е интерполационният полином от степен n за функцията $f(x) = x$ при възли $x_k = k$, $\quad k = 0, \dots, n$. Твърдението следва веднага от очевидното равенство $x = P(x)$ при $x = m$.

1.21. Да означим $f(x) = l_{kn}(x) + l_{k+1,n}(x)$. Да допуснем, че съществува точка $\xi \in (x_k, x_{k+1})$, за която $f(\xi) < 1$. Тъй като

$$f(x_{k-1}) = 0, \quad f(x_k) = 1, \quad f(x_{k+1}) = 1, \quad f(x_{k+2}) = 0,$$

то от теоремата на Рол следва, че $f'(x)$ има поне три нули в интервала (x_{k-1}, x_{k+2}). Освен това $f(x_i) = 0$ при $i = 0, \dots, k-1, k+2, \dots, n$. Следователно пак по теоремата на Рол $f'(x)$ ще има поне $k-1$ нули в интервала (x_0, x_{k-1}) и поне $n-k-2$ нули в интервала (x_{k+2}, x_n). И така $f'(x)$ ще има общо поне n нули, което е невъзможно, защото $f' \in \pi_{n-1}$ и $f(x) \not\equiv \text{const}$.

1.22. Нека $P(j)$ се дели на k при $j = i, i+1, \dots, i+n$. По формулата на Лагранж

$$P(t) = \sum_{j=i}^{i+n} P(j) \prod_{m=i,\ m \neq j}^{i+n} \frac{t-m}{j-m}$$

за всяко t. Задачата ще бъде решена, ако успеем да покажем, че числото $l_{jn}(t) := \prod_{m=i,\ m \neq j}^{i+n} \frac{t-m}{j-m}$ е цяло, когато t е цяло. При $t > i+n$ имаме

$$\begin{aligned} l_{jn}(t) &= (-1)^{i+n-j} \frac{(t-i) \, \dots \, (t-j+1)(t-j-1) \, \dots \, (t-i-n)}{(j-i) \, \dots \, 2.1.1.2. \, \dots \, (i+n-j)} \\ &= (-1)^{i+n-j} \binom{t-i}{j-i} \binom{t-j-1}{i+n-j} \end{aligned}$$

и очевидно $l_{jn}(t)$ е цяло число. Случаят $t < i$ е напълно аналогичен.

1.23. Допускаме противното. Тогава $L'_n \in \pi_{n-2}$. От

$$L_n(x_k) = 0, \quad k = 0, \dots, i,$$
по теоремата на Рол следва, че $L_n'(x)$ има i нули в $[x_0, x_i]$. Аналогично в $[x_{i+1}, x_n]$ $L_n'(x)$ има други $n-i-1$ нули. Следователно в $[x_0, x_n]$ $L_n'(x)$, без да е тъждествено нула, има $n-1$ нули. Стигнахме до противоречие.

1.24. В този случай
$$l_{k,n-1}(x) = \frac{(-1)^{k-1}\left(1-x_k^2\right)^{1/2}}{n} \cdot \frac{T_n(x)}{x-x_k}, \quad k = 1, \dots n,$$
и следователно
$$L_{n-1}(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} f(x_k)\sqrt{1-x_k^2}\,\frac{T_n(x)}{(x-x_k)}.$$

1.25. Тъй като $U_n'(x_k) = (-1)^{k-1}\dfrac{(1-x_k^2)}{(n+1)}$, то
$$L_{n-1}(f;x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} f(x_k)(1-x_k^2)\frac{U_n(x)}{(x-x_k)}.$$

1.26. От $T_n'(0) = n\sin\left(n \arccos 0\right) = n\,\sin\dfrac{n\pi}{2}$ и $T_n'(0) = a_{n-1}$ намираме $a_{n-1} = n\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

1.27. По формулата на Лагранж
$$|L_n(f;x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, l_{kn}(x)\right| \le \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)|.$$
Нека $x \notin [x_0,\, x_n]$. За определеност да приемем, че $x > x_n$. Тъй като $l_{kn}(x)$ се анулира само в точките $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$, то очевидно $l_{kn}(x) \neq 0$. Нещо повече, $(-1)^{n-k}\, l_{kn}(x) > 0$ за $k = 0, \dots, n$. Следователно
$$|L_n(f;x)| \le \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\, l_{kn}(x) = L_n(P;x).$$
Но $L_n(P;x) = P(x)$. Следователно $|L_n(f;x)| \le |P(x)|$. Аналогично се доказва същото неравенство и при $x < x_0$. От доказателството се вижда, че равенство може да има само при $f(x_k) = \varepsilon(-1)^{n-k}, \quad k = 0,\, \dots,\, n$, където $\varepsilon = +1$ или $\varepsilon = -1$.

1.28. Лесно се проверява, че $T_n(x_k) = (-1)^{n-k}, \quad k = 0,\, \dots,\, n$, където $x_{n-k} = \cos\dfrac{k\pi}{n}, \quad k = 0,\, \dots,\, n$. Тогава съгласно зад. 1.27 за всяко Q от π_n ще имаме
$$|L_n(\hat{Q};x)| = |\hat{Q}(x)| \le |T_n(x)| \quad \text{при } |x| > 1,$$
където $\hat{Q}(x) = Q(x)/\max\limits_{x\in[-1,1]}|Q(x)|$. Това трябваше да се докаже.

1.29. Очевидно $||P|| := \max\limits_{x\in[-1,1]}|P(x)| \ge 1$ за всяко P, за което
$$P(x_k) = (-1)^{n-k}, \quad k = 0,\, \dots,\, n, \text{ при някои } -1 \le x_0 < \dots < x_n \le 1.$$
От друга страна,
$$||T_n|| = 1, \quad T_n(x_k) = (-1)^{n-k}, \quad x_{n-k} = \cos\frac{k\pi}{n}, \quad k = 0,\, \dots,\, n.$$

Ако допуснем, че има друг полином $P \neq \pm T_n$ от разглеждания вид със свойството $|P| = 1$, то по зад. 1.27 бихме имали

$$|P(x)| < |T_n(x)| \text{ при } |x| > 1 \quad \text{и} \quad |T_n(x)| < |P(x)| \text{ при } |x| > 1,$$

което е невъзможно.

1.30. Нека $x_0 < \ldots < x_n$ са произволни точки от $[-1, 1]$, несъвпадащи с множеството $\left\{\cos \dfrac{k\pi}{n}\right\}_{k=o}^{n}$ от екстремални точки на полинома на Чебишов $T_n(x)$. Вижда се, че величината $c(x_0, \ldots, x_n) := \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{|\omega'(x_k)|}$ е коефициентът пред x^n в полинома $P \in \pi_n$, който удовлетворява интерполационните условия $P(x_k) = (-1)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n$. Тъй като $|T_n(x_k)| \leq 1, \quad k = 0, \ldots, n$, то съгласно зад. 1.27

$$|T_n(x)| = |L_n(T_n; x)| < |P(x)| \quad \text{за всяко } |x| > 1.$$

Оттук и от факта, че $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots$, следва $c(x_0, \ldots, x_n) > 2^{n-1}$.

1.31. Разглеждаме

$$P(x) = \eta \frac{T_n(x)}{T_n(\xi)}, \quad P \in \pi_n.$$

Тогава $P(\xi) = \eta$. Ще докажем, че P най-малко се отклонява от нулата в $[-1, 1]$. Нека $\max_{x \in [-1,1]} |P(x)| = L$. Допускаме, че съществува $Q \in \pi_n$, за който $Q(\xi) = \eta$ и $\max_{x \in [-1,1]} |Q(x)| < L$. Тогава

$$R(x) = P(x) - Q(x), \quad R \in \pi_n,$$

и ще има $n + 1$ нули. Стигнахме до противоречие.

1.32. Оценката отгоре следва от

$$|L_n(f; x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)| = \lambda(x).$$

За всяко фиксирано x горната граница се достига за функцията $f_0(x)$, която е непрекъсната, на части линейна с възли в точките $x_0, \ldots, x_n$ и еднозначно определена с условието

$$f(x_k) = \operatorname{sgn}\{l_{kn}(x)\}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

1.33. От очевидното равенство $l_{0n}(x) + \cdots + l_{nn}(x) = 1$ следва

$$1 \leq \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)|,$$

като равенство се достига в точките $x_0, \ldots, x_n$. Да допуснем, че има и други точки, в които се достига равенство. Нека $x_j < \xi < x_{j+1}$ и $\lambda(\xi) = 1$. Тогава

$$\sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(\xi)| = \sum_{k=0}^{n} l_{kn}(\xi)$$

и оттук следва, че числата $l_{kn}(\xi), \quad k = 0, \ldots, n$, са положителни. Но това е невъзможно, защото $l_{j-1,n}(\xi)$ и $l_{j+1,n}(\xi)$ имат различни знаци в интервала (x_j, x_{j+1}). Тук се използва фактът, че полиномите $l_{in}(x)$ са от степен n и следователно $x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ са за тях прости нули, т. е. че $l_{in}(x)$ си сменя знака при преминаване през тях.

1.34. В този случай

$$||\lambda||_{[0,\xi]} = \lambda(\xi/2) = 5/4, \quad ||\lambda||_{[\xi,1]} = \lambda(1) = (2-\xi^2)/\xi^2.$$

Тъй като $\lambda(x)$ е симетрична функция, то изследваме поведението ѝ само в интервала [0,1]. Проверява се лесно, че

$$(2-\xi^2)/\xi^2 \le 5/4 \quad \text{при} \quad 2\sqrt{2}/3 \le \xi \le 1,$$
$$(2-\xi^2)/\xi^2 \ge 5/4 \quad \text{при} \quad 0 \le \xi \le 2\sqrt{2}/3,$$

откъдето следва, че $||\lambda||_{[-1,1]}$ приема най-малката си стойност, равна на $5/4$, при произволно $\xi \in [2\sqrt{2}/3, 1]$.

1.35. Очевидно е, че при линейна трансформация на възлите графиката на $\lambda(x)$ се разпъва или свива. Оттук следва, че без ограничение на общността можем да считаме, че $x_0 = -1,\ x_2 = 1$. Намираме явния израз за $\lambda(x)$ и изследваме, както в предишната задача, поведението на $||\lambda||_{[-1,1]}$ в зависимост от възела x_1.

1.36. И тук, както в предишната задача, можем да считаме, че $a = -\xi,\ b = \xi$, където ξ е параметърът от зад. 1.34. Там показахме, че $||\lambda||_{[-\xi,\xi]} = 5/4$. Остава да забележим, че

$$\max_{x\in[a,b]}|P(x)| \le \max\left\{|P(a)|, |P(b)|, \left|P\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right\} ||\lambda||_{[-\xi,\xi]}.$$

1.37. Равенството се доказва веднага, като извършим смяната

$$x = x_0 + th \text{ и } x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Ще докажем неравенството. Имаме

$$\begin{aligned} \max_{0\le t\le n}|\lambda(x_0+th)| &\ge \prod_{j=0}^{n}\left|j-\frac{1}{2}\right|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n!}\frac{1}{|k-1/2|} \\ &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2k-1}. \end{aligned}$$

1.38. Разглеждаме функцията

$$F(z) = f(z) - L_n(f;z) - C(z-x_0)\cdots(z-x_n),$$

където

$$C = \frac{f(x) - L_n(f;x)}{(x-x_0)\cdots(x-x_n)} \quad \text{при} \quad x \ne x_0, \ldots, x_n.$$

Тя има $n+2$ нули: $x, x_0, \ldots, x_n$. Прилагаме $n+1$ пъти последователно теоремата на Рол и заключаваме, че съществува точка ξ, за която $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. Оттук $C = f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!$. Сравняваме двата израза за C.

1.39. Прилагаме резултата от предишната задача за функцията $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$.

1.40. Следва от зад. 1.38 и от факта

$$\max_{x\in[x_0,x_1]}|(x-x_0)(x-x_1)| = (x_1-x_0)^2/4.$$

1.41. Тъй като $||f^{(n+1)}(x)||_{[0,2\pi]} = 1$, то $|R_n(x)| \le \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

1.42. Въз основа на зад. 1.38 $|R_n(x)| \le [A(b-a)]^{n+1}/(n+1)!$.

1.43. Нека p е интерполационният полином на Лагранж с възли $1+(i-1)h,\ 1+ih,\ 1+(i+1)h$. Получаваме оценката

$$|f(x)-p_i(x)| \le \frac{h^3}{24\sqrt{3}} \quad \text{за } x \in [1+(i-1)h, 1+(i+1)h].$$

Следователно грешката ще бъде по-малка от 0,001 например при $h = 1/4$.

1.44. Отг. 1/2.

1.45. Въз основа на зад. 1.38 получаваме

$$|R(x)| \le \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3\sqrt{3}} \max(h^3, H^3/\xi^3).$$

Избираме ξ така, че $h = H/\xi$. Оттук $\xi = 3$. Тогава $|R(x)| \le \dfrac{2}{15}$ за всяко $x \in [1,9]$.

1.46. Нека $R(x) = f(x) - P_\xi(x)$. Тогава

$$|R(x)| \le \begin{cases} \dfrac{\xi^2}{2}|x(x-\xi)| & \text{при} \ \ x \in [0,\xi], \\ \dfrac{1}{2}|(x-\xi)(x-1)| & \text{при} \ \ x \in [\xi,1]. \end{cases}$$

Оттук се вижда, че $|R(x)| \le 0,02$ например при $\xi = \dfrac{3}{5}$.

1.47. Намираме $P_\xi(x) = \dfrac{x^2+\xi}{1+\xi}$. Тъй като $f(x)$ и $P_\xi(x)$ са четни, разглеждаме само $x \in [0,1]$.

Образуваме

$$R(x) = \left| |x| - \frac{x^2+\xi}{1+\xi} \right| = \begin{cases} \dfrac{x^2+\xi}{1+\xi} - x & \text{за} \ \ x \in [0,\xi], \\ x - \dfrac{x^2+\xi}{1+\xi} & \text{за} \ \ x \in [\xi,1]. \end{cases}$$

От $\max\limits_{x\in[0,\xi]} |R| = |R(0)| = \dfrac{\xi}{1+\xi}$ и $\max\limits_{x\in[\xi,1]} |R| = R\left(\dfrac{1+\xi}{2}\right) = \dfrac{(1-\xi)^2}{4(1+\xi)}$ намираме, че ξ трябва да удовлетворява $\xi^2 - 6\xi + 1 = 0$, откъдето $\xi = 3 - 2\sqrt{2}$.

1.48.

$$\rho(\xi) = \begin{cases} (1-\xi)/(2\xi+1) & \text{при} \ \ 0 \le \xi \le 1/2, \\ \xi/(2\xi+1) & \text{при} \ \ 1/2 \le \xi \le 1. \end{cases}$$

Следователно $\inf\{\rho(\xi) : \xi \in [0,1], \xi \ne 1/2\} = \dfrac{1}{4} = \rho\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

1.49. Нека $x_0 < \ldots < x_n$ са произволни точки в $[a,b]$. По формулата на Лагранж

$$P_i(x) = \sum_{k=0}^{n} P_i(x_k)\, l_{kn}(x).$$

По теоремата на Болцано — Вайерщрас от числовите редици $\{P_i(x_k)\}_{i=0}^{\infty}$ могат да бъдат избрани сходящи подредици. Нека те клонят съответно към числата $p_k, \quad k = 0, \ldots, n$. Полиномът $\sum_{k=0}^{n} p_k\, l_{kn}(x)$ е граница на сходящата подредица.

1.50. Тъй като $L_n(P;x) = P(x)$, то

$$\begin{aligned} |f(x) - L_n(f;x)| &\leq |f(x) - P(x)| + \sum_{k=0}^{n} |f(x_k) - P(x_k)|\, l_{kn}(x) \\ &\leq E + E\sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)|. \end{aligned}$$

1.51. Нека $\theta_k = \cos \dfrac{(n-k)\pi}{n}, \quad k = 0, \ldots, n$. Знае се, че

$$T_n(\theta_k) = (-1)^{n-k}.$$

Да означим с $(x_k)_0^n$ онези точки от множеството σ_ν, които отиват в $(\theta_k)_0^n$ при подреждане на всички подинтервали на σ един до друг върху $[-1, 1]$. Тогава

$$|P(a)| \leq \sum_{k=0}^{n} |P(x_k)| \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{|a - x_i|}{|x_k - x_i|}.$$

Оттук

$$|P(a)| \leq \sum_{k=0}^{n} \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{|a - \theta_k|}{|\theta_k - \theta_i|} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\, l_{kn}(a),$$

където $l_{kn}(x)$ са базисните полиноми на Льожандър за възлите $(\theta_k)_0^n$. По-нататък

$$|P(a)| \leq \sum_{k=0}^{n} T_n(\theta_k)\, l_{kn}(a) = T_n(a).$$

1.52. Нека $x = \cos\theta,\ \theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, \ldots, n$. Тъй като

$$T_n'(x_k) = (-1)^{k+1} \frac{n}{\sin\, \theta_k},$$

то

$$|l_{kn}(x)| = \frac{1}{n} \left| \frac{\cos\, n\theta}{\cos\, \theta - \cos\, \theta_k} \sin\, \theta_k \right|, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Като използуваме съотношенията

$$|\cos\, n\theta| = |\cos\, n\theta - \cos\, n\theta_k| \leq 2 \left|\sin\, n\frac{\theta - \theta_k}{2}\right| \leq 2n \left|\sin\, \frac{\theta - \theta_k}{2}\right|,$$

$$|\cos\, \theta - \cos\, \theta_k| = 2 \left|\sin\, \frac{\theta - \theta_k}{2}\right| \left|\sin\, \frac{\theta + \theta_k}{2}\right|,$$

получаваме

$$\sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\sin\, \theta_k}{\sin\, \dfrac{\theta + \theta_k}{2}} \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\, \theta_k + \sin\, \theta}{\sin\, \dfrac{\theta + \theta_k}{2}} = 2\sum_{k=1}^{n} \cos \frac{\theta_k - \theta}{2} \leq 2n$$

при $0 \leq \theta \leq \pi$.

1.53. Образуваме $P(x) = (x+1)L_n(f;x) - x$. Проверяваме, че

$$P(x_k) = 0 \text{ за } x_k = k \quad , \quad k = 0, \ldots, n.$$

Следователно

$$P(x) = Cx(x-1)\dots(x-n).$$

От това, че $x=-1$ анулира $P(x)+x$, намираме $C = \dfrac{1}{(n+1)!(-1)^{n+1}}$. Тогава $P(n+1) = (-1)^{n+1}$ и $L_n(f;n+1) = \dfrac{(-1)^{n+1}+n+1}{n+2}$.

1.54. Използувайте индукция по n и интегриране по части.

1.55. По формулата на Тейлор от предишната задача получаваме

$$f(z) = P(z) + \int_a^b \frac{(z-t)_+^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$$

за $z = x, x_0, \dots, x_n$, където с P сме означили полинома $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. Тогава

$$\begin{aligned} f(z) - L_n(f;x) &= P(x) + \int_a^b \frac{(x-t)_+^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt \\ &- L_n(P;x) - \int_a^b \frac{1}{(n-1)!} L_n\left((x-t)_+^{n-1};x\right) f^{(n)}(t)dt \\ &= \int_a^b K(x,t) f^{(n)}(t)dt. \end{aligned}$$

1.2. РАЗДЕЛЕНИ РАЗЛИКИ

1.56. Използувайте индукция по броя на точките и рекурентната връзка

$$f[x_0,\dots,x_n] = \frac{f[x_1,\dots,x_n] - f[x_0,\dots,x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

1.57. Твърдението следва веднага от представянето на разделената разлика в предишната задача като линейна комбинация на стойностите на функцията $f(x)$ в точките $\{x_k\}_0^n$.

1.58. От формулата на Лагранж

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}$$

се вижда, че коефициентът пред x^n е точно равен на $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$. Прилагаме доказаното в зад. 1.56.

1.59. Съгласно зад. 1.56 изразът $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{x_j^k}{\omega'(x_j)}$ е равен на коефициента пред x^n в интерполационния полином $L_n(f;x)$ за $f(x) = x^k$. Но $L_n(f;x) = x^k$ при $k \le n$.

1.60. а) Използуваме дефиниция 1.2.

б) Нека $\omega(x) = x^n - (x_1 + \dots + x_n)x^{n-1} + p(x)$. Тогава при $f(x) = x^n$,

$$0 = \omega[x_1, \ldots, x_n] = f[x_1, \ldots, x_n] - (x_1 + \cdots + x_n).$$

Оттук $f[x_1, \ldots, x_n] = x_1 + \cdots + x_n$.

1.61. Вижда се, че $f[x_1, \ldots, x_n] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)/g'(x_k)$. Но

$$f(x) = x^n - (t_1 + \cdots + t_n)x^{n-1} + p(x),$$

където p е полином от степен $n-2$. Оттук, като използваме и предишната задача, получаваме

$$f[x_1, \ldots, x_n] = (x_1 + \cdots + x_n) - (t_1 + \cdots + t_n).$$

1.62. Това е разделената разлика на полинома $\omega''(x)$, а той е от степен $n-1$.

1.63. Това е разделената разлика на полинома $x\omega''(x)$, а той има вида $n(n+1)x^n+$ полином от степен $n-1$.

1.64. От $x\bar{\omega}''(x) = n(n-1)x^{n-1} + \cdots$ намираме

$$\sum_{k=1}^{n} \left[1 - \frac{\bar{\omega}''(x_k)}{\bar{\omega}'(x_k)}(x - x_k)\right] = n - x\sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\omega}''(x_k)}{\bar{\omega}'(x_k)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\omega}''(x_k)}{\bar{\omega}'(x_k)} x_k$$

$$= n + n(n-1) = n^2.$$

1.65. Нека

$$x_0 = -1,\ x_{n+1} = 0,\ g(x) = x^{n+1} f(1/x), \quad \varphi(x) = \prod_{k=0}^{n+1} (x - x_k).$$

Тогава

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n f(1/x_k)}{f'(x_k)(1 + x_k)} = \sum_{k=1}^{n+1} g(x_k)/\varphi'(x_k)$$

$$= g[x_0, \ldots, x_{n+1}] - g(x_0)/\varphi'(x_0) = g[x_0, \ldots, x_{n+1}] - (-1)^n.$$

Но $g(x) = (-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n . x^{n+1} + \cdots$. Следователно според дефиниция 1.2

$$g[x_0, \ldots, x_{n+1}] = (-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n.$$

1.66. Съгласно дефиниция 1.3 коефициентите $\{A_k\}_0^n$ се определят като решения на линейната система

$$A_0 x_0^k + A_1 x_1^k + \cdots + A_n x_n^k = \delta_{kn}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Детерминантата ѝ е Вандермондова и следователно е различна от нула. По формулите на Крамер получаваме $A_k = 1/\omega'(x_k), \quad k = 0, \ldots, n$. Оттук се вижда, че изразът $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ съвпада с израза от зад. 1.56. От друга страна, вече показахме в зад. 1.58, че дефиниции 1.1 и 1.2 са еквивалентни.

1.67. Използваме, че $f[x_0, \ldots, x_n]$ е коефициентът пред x^n в полинома $P(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n$, удовлетворяващ интерполационните условия $P(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, \ldots, n$. По формулите на Крамер получаваме искания израз за $a_0 = f[x_0, \ldots, x_n]$.

1.68. Нека $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$. Тогава $p[x_0, \ldots, x_n] = 1$. От друга страна,

$$|p[x_0,\dots,x_n]| \le M\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{|\omega'(x_k)|} \le M\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!} = M\frac{2^n}{n!},$$

където $M = \max\limits_{0\le k\le n}|p(x_k)|$. Следователно $M \ge \dfrac{n!}{2^n}$.

1.69. Да въведем функциите

$$\varphi_i(x) = (x_{i+2}-x_i)(x-x_{i+1})_+, \quad i=1,\dots,n-1.$$

Лесно се вижда, че $\varphi_i[x_j,x_{j+1},x_{j+2}] = \delta_{ij}, \quad j=0,\dots,n-2$. Каквито и да са числата $f(x_0),\dots,f(x_n)$, съществува единствена функция от вида

$$s(x) = A + Bx + \sum_{i=0}^{n-2} c_i\varphi_i(x),$$

която удовлетворява интерполационните условия

$$s(x_j) = f(x_j), \quad j=0,\dots,n.$$

Като използуваме свойствата на $\varphi_i(x)$, определяме коефициентите c_j:

$$f[x_j,x_{j+1},x_{j+2}] = s[x_j,x_{j+1},x_{j+2}] = \sum_{i=0}^{n-2} c_i\varphi_i[x_j,x_{j+1},x_{j+2}] = c_j.$$

Тогава

$$f[x_0,x_k,x_n] = \sum_{i=0}^{n-2} f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]\varphi_i[x_0,x_k,x_n].$$

Ще покажем, че числата $A_i = \varphi_i[x_0,x_k,x_n]$ са положителни. По дефиниция A_i е коефициентът пред x^2 в полинома от втора степен, който интерполира $\varphi_i(x)$ в точките $x_0 < x_k < x_n$. Вижда се, че този коефициент е винаги различен от нула, защото не съществува права линия, която да съвпада с $\varphi_i(x)$ в точките x_0, x_k, x_n. Тъй като коефициентът A_i е непрекъсната функция на x_k и очевидно $A_i > 0$ при $x_k < x_{i+1}$, то $A_i > 0$ при всяко положение на x_k в (x_0, x_n). Равенството $\sum\limits_{i=0}^{n-2} A_i = 1$ следва веднага, като поставим $f(x) = x^2$.

1.70. Доказателството ще проведем по индукция. За $n=2$ формулата е очевидна. Нека тя е вярна за произволни $n+1$ точки. Тогава

$$(x_{n+1}-x_0)f[x_0,\dots,x_{n+1}]$$
$$= \textstyle\sum_{k=0}^{n} g[x_1,\dots,x_{k+1}]\,h\,[x_{k+1},\dots,x_{n+1}] - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} g\,[x_0,\dots,x_k]\,h\,[x_k,\dots,x_n].$$

Но $g[x_1,\dots,x_{k+1}] = g[x_0,\dots,x_k] + (x_{k+1}-x_0)g[x_0,\dots,x_{k+1}]$. Оттук за дясната страна на предишното равенство получаваме

$$\sum_{k=0}^{n} g[x_0,\dots,x_k](h[x_{k+1},\dots,x_{n+1}] - h[x_k,\dots,x_n])$$
$$+ \quad \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1}-x_0)g[x_0,\dots,x_{k+1}]h[x_{k+1},\dots,x_{n+1}]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} (x_{n+1} - x_k) g[x_0, \ldots, x_k] h[x_k, \ldots, x_{n+1}] \\
&+ \sum_{k=1}^{n+1} (x_k - x_0) g[x_0, \ldots, x_k] h[x_k, \ldots, x_{n+1}] \\
&= \sum_{k=0}^{n} (x_{n+1} - x_0) g[x_0, \ldots, x_k] h[x_k, \ldots, x_{n+1}] \\
&+ (x_{n+1} - x_0) g[x_0, \ldots, x_{n+1}] h[x_{n+1}] \\
&= (x_{n+1} - x_0) \sum_{k=0}^{n+1} g[x_0, \ldots, x_k] h[x_k, \ldots, x_{n+1}].
\end{aligned}
$$

1.71. По формулата на Стефенсън

$$f[x_0, \ldots, x_n] = x_0 g[x_0, \ldots, x_n] + g[x_1, \ldots, x_n].$$

1.72. От равенството $xf(x) = 1$ следва

$$x_0 f[x_0, \ldots, x_n] + f[x_1, \ldots, x_n] = 0.$$

Получаваме рекурентната връзка $f[x_0, \ldots, x_n] = (-1/x_0) f[x_1, \ldots, x_n]$, която дава $f[x_0, \ldots, x_n] = \dfrac{(-1)^n}{x_0 x_1 \ldots x_n}$.

1.73. Нека $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ и $x_k = k, \quad k = 0, \ldots, n$. Тогава

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{1}{2i+1}.$$

От друга страна, прилагайки формулата на Стефенсън за произведението $(2x+1)f(x) = 1$, извеждаме рекурентната връзка

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{-2}{2x_0 + 1} f[x_1, \ldots, x_n],$$

от която следва $f[x_0, \ldots, x_n] = \dfrac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!}$.

1.74. Показваме, че интегралният израз удовлетворява същите рекурентни връзки, както разделената разлика.

1.75. Следва от формулата в предишната задача, като приложим теоремата за средните стойности.

1.76. От предишната задача следва $\operatorname{sgn} f[x_0, \ldots, x_n] = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x)$. Използуваме представянето на разделената разлика от зад. 1.67 и факта, че детерминантата на Вандермонд е положителна.

1.77. Първи начин: Нека $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Съгласно зад. 1.75 съществува такава точка $t, \quad x_0 < t < x_n$, че

$$f[x_0, \ldots, x_n] = f^{(n)}(t)/n!.$$

Извършваме граничния преход $x_k \to \xi, \quad k = 0, \ldots, n$, и се възползуваме от непрекъснатостта на f.

В т о р и н а ч и н: Забелязваме, че величината σ_n от зад. 1.74 клони към ξ при $x_k \to \xi$, $k = 0, \dots, n$. Извършваме граничен преход в интегралното представяне от същата задача.

1.78. а) Използуваме индукция по броя на точките и рекурентната връзка между разделените разлики.

б) Записваме полинома $P_{n+1}(t)$ по изведената в точка а) формула при възли $x, x_0, \dots, x_n$ и полагаме $t = x$.

1.79. Нека $(x_k)_0^{n-1}$ са произволни различни точки от $[a, b]$. Съгласно формулата на Нютон

$$f(x) = L_{n-1}(f; x),$$

защото по условие $f[x_0, \dots, x_{n-1}, x] = 0$.

1.80. Съгласно интерполационната формула на Нютон

$$\ln x - p(x) = C(x-1)(x-2)(x-3)(x-4),$$

където $C = f^{(4)}(\xi)/4!$, $\xi \in (1, 4)$. Остава да забележим, че $f^{(4)}(x) < 0$ при $x > 0$.

1.81. Използуваме, че ако $f \in W_0^n$, то

$$f(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n) f[x_1, \dots, x_n, x].$$

1.82. Прилагаме индукция по n.

1.83. Допускаме противното. От $P(x) = a_n(x^n + \cdots) = a_n Q_n(x)$ намираме

$$\max_{x \in [-1,1]} |P(x)| = a_n \max_{x \in [-1,1]} |Q_n(x)| > 2^{n-1} . \frac{1}{2^{n-1}} \max_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = 1.$$

Стигаме до противоречие.

1.3. КРАЙНИ РАЗЛИКИ

1.84. П ъ р в и н а ч и н: Използуваме индукция по n.

В т о р и н а ч и н: Използуваме представянето на разделената разлика от зад. 1.56 и връзката от следващата задача.

1.85. По индукция.

1.86. Решението следва от зад. 1.75 и предишната задача.

1.87. Решението следва от зад. 1.85 и съответните свойства на разделената разлика.

1.88. Това е крайната разлика от ред n на полинома $f(x) = x^n$.

1.89. Изразът е крайната разлика от ред n на алгебричния полином $f_j(x) = (m + x)(m + x - 1) \dots (m + x - j + 1)/j!$, който е от степен j.

1.90. Да се запише интерполационният полином $p(x)$ от степен n, който интерполира таблицата (k, f_k), $k = 0, \dots, n$, като се използува формулата на Нютон за интерполиране назад. Исканото равенство е еквивалентно на $p(0) = f_0$.

1.91. Използувайте факта, че $\Delta^{n+1} P_i = 0$ за всяко i (защото $P \in \pi_n$). Тогава

$$P(x_{n+1}) = P(x_n) + \Delta P(x_{n-1}) + \cdots + \Delta^{n-1} P(x_1) + \Delta^n P(x_0).$$

1.92. Да означим $b_k = k(n+1-k)/2, \quad k = 0, \ldots, n+1$. Вижда се, че
$$b_0 = b_{n+1} = 0, \; b_{k+1} - 2b_k + b_{k-1} = -1, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$
Допускането, че редицата $\{f_k - b_k\}_{k=0}^{n+1}$ съдържа положително число или че редицата $\{f_k + b_k\}_{k=0}^{n}$ съдържа отрицателно число, води до противоречие с условието $\left|\Delta^2 f_{i-1}\right| \leq 1$.

1.93. Нека $q \in \pi_n$ и $q(k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, m, \quad m \geq n$. Ще покажем, че $q(m+1) = f_{m+1}$. Наистина по формулата на Нютон
$$f_{m+1} = q(m+1) + \frac{\Delta^{n+1} f_{m-n}}{(n+1)!} \prod_{i=m-n}^{m} (m+1-i) = q(m+1).$$

1.94. а) Нека $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$. Тъй като $\Delta^4 S_n = 0$, то съгласно предишната задача $S_n = q(n)$, където $q \in \pi_3$. По формулата на Нютон, като използуваме, че $\Delta S_n = n^2, \; \Delta^2 S_n = 2n+1, \; \Delta^3 S_n = 2$, получаваме $q(n) = n(n+1)(2n+1)/6$. Аналогично:

б) Отг. $n^2(n+1)^2/4$;

в) Отг. $n(4n^2-1)/3$;

г) Отг. $n^2(2n^2-1)$.

1.95. Решението следва от зад. 1.93, понеже $\Delta F(n) = f(n+1)$ и следователно $\Delta^{k+2} F(n) = 0$ за всяко n.

1.96. Съгласно зад. 1.93 при всяко $0 < h < \dfrac{b-a}{n}$ съществува такъв полином $q(h;x)$ от π_n, че $q(h;x)$ съвпада с $f(x)$ в точките от вида $a + kh$ в $[a,b]$. Но $q(h;x) \equiv q\,(h/2m;x)$ за всяко $m = 1, 2, \ldots$, защото тези полиноми имат повече от n общи стойности. Тогава $f(x)$ съвпада с полинома $q(h;x)$ във всички двоично-рационални точки и следователно (поради непрекъснатостта на f) във всички точки на $[a,b]$.

1.97. Съгласно дефиницията
$$\begin{aligned}
\delta_h^k f(x) &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x + (j - \frac{k}{2})h) \\
&= (-1)^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{k-j} f(x - (k - j - \frac{k}{2})h) \\
&= (-1)^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x - (j - \frac{k}{2})h) = (-1)^k \delta_{-h}^k f(x).
\end{aligned}$$

1.4. ИНТЕРПОЛАЦИОННА ФОРМУЛА НА ЕРМИТ

1.98. У п ъ т в а н е: Полиномът Q да се търси във вида

$$Q(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[y_k+(x-x_k)\left(\alpha_k y_k+\beta_k y_k'\right)\right]l_{kn}^2(x).$$

Отг. $$Q(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\left\{1-(x-x_k)\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\right\}l_{kn}^2(x)+\sum_{k=0}^{n}y_k'l_{kn}^2(x).(x-x_k).$$

1.99. Отг.

$$Q(x)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{T_n^2(x)}{(x-x_k)^2}\left\{f(x_k)(1-x\,x_k)+f'(x_k)(1-x_k^2)(x-x_k)\right\}.$$

1.100. Отг.

$$Q(x)=\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{u_n^2(x)(1-x_k^2)}{(x-x_k)^2}$$
$$\times\left\{f(x_k)(1+2x_k^2-3xx_k)+f'(x_k)(1-x_k^2)(x-x_k)\right\}.$$

1.101. Отг. $$\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^4.$$

1.102. Използувайте, че всеки $N+1$ полинома $(\varphi_i)_0^N$ от вида

$$\varphi_i(x)=x^i+\text{ полином от степен } i-1$$

са линейно независими.

1.103. Очевидно хомогенната система

$$H^{(\lambda)}(x_k)=0,\quad k=1,\ldots,n,\ \lambda=0,\ldots,\nu_k-1,$$

допуска само нулевото решение, защото един ненулев полином от степен N има най-много N реални нули, броейки кратностите.

1.104. Не са очевидни само равенствата

$$L_{k\lambda}^{(j)}(x_k)=\delta_{\lambda j},\quad j=\lambda,\ldots,\nu_{k-1}.$$

Да ги докажем. По формулата на Лайбниц

$$L_{k\lambda}^{(j)}(x_k)=\frac{1}{\lambda!}\sum_{m=\lambda}^{j}\binom{j}{m}\left\{\frac{\Omega(x)}{(x-x_k)^{\nu_k}}\right\}_{x=x_k}^{(j-m)}.\frac{1}{(m-\lambda)!}\left\{\frac{(x-x_k)^{\nu_k}}{\Omega(x)}\right\}_{x=x_k}^{(m-\lambda)}.ml.$$

По-нататък, като се възползуваме от равенството

$$\binom{j}{m}\binom{m}{\lambda}=\binom{j}{\lambda}\binom{j-\lambda}{m-\lambda},$$

получаваме

$$\begin{aligned}
L_{k\lambda}^{(j)}(x_k) &= \binom{j}{\lambda}\sum_{m=\lambda}^{j}\binom{j-\lambda}{m-\lambda}\left\{\frac{\Omega(x)}{(x-x_k)^{\nu_k}}\right\}_{x=x_k}^{(j-m)}\left\{\frac{(x-x_k)^{\nu_k}}{\Omega(x)}\right\}_{x=x_k}^{(m-\lambda)}\\
&= \binom{j}{\lambda}\sum_{i=0}^{j-\lambda}\binom{j-\lambda}{i}\left\{\frac{\Omega(x)}{(x-x_k)^{\nu_k}}\right\}_{x=x_k}^{(j-\lambda-i)}\left\{\frac{(x-x_k)^{\nu_k}}{\Omega(x)}\right\}_{x=x_k}^{(m-\lambda)}\\
&= \binom{j}{\lambda}\left\{\frac{\Omega(x)}{(x-x_k)^{\nu_k}}\frac{(x-x_k)^{\nu_k}}{\Omega(x)}\right\}_{x=x_k}^{(j-\lambda)}=\delta_{\lambda j}.
\end{aligned}$$

1.105. Търсим полином $P(x)$ във вида $P(x) = L(x) + C(x-a)(x-b)$, където $L(x)$ е полиномът от първа степен, който удовлетворява условията $L(a) = A$, $L(b) = B$, а параметърът C се определя от условието $P'(b) = B_1$. Получаваме

$$P(x) = A\frac{(x-b)^2}{(b-a)^2} + B\frac{(x-a)(2b-a-x)}{(b-a)^2} + B_1\frac{(x-a)(x-b)}{b-a}.$$

1.5. ИНТЕРПОЛИРАНЕ С ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМИ

1.106. Използувайте индукция по n.

1.107. Нека $\tau(x)$ е произволен тригонометричен полином от ред n с поне един ненулев коефициент. Като направим смяната $z = e^{\mathrm{i}x}$ и използуваме известните формули на Ойлер

$$\cos kx = (e^{\mathrm{i}kx} + e^{-\mathrm{i}kx})/2 = (z^k + z^{-k})/2,$$
$$\sin kx = (e^{\mathrm{i}kx} - e^{-\mathrm{i}kx})/2\mathrm{i} = (z^k - z^{-k})/2\mathrm{i},$$

получаваме

$$\tau(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k = z^{-n} P_{2n}(z),$$

където c_k се изразяват чрез коефициентите $\{a_k\}_0^n$ и $\{b_k\}_1^n$ на тригонометричния полином $\tau(x)$. Тъй като P_{2n} е алгебричен полином от степен $2n$, то той има не повече от $2n$ нули в комплексната равнина. Но уравнението $e^{\mathrm{i}x} = z$ има единствен корен в ивицата $0 \le \mathrm{Re}x < 2\pi$ при всяко фиксирано z. Следователно и уравнението $\tau(x) = 0$ има в тази ивица не повече от $2n$ корена. Оттук следва, че реалните корени на $\tau(x) = 0$ в $[0, 2\pi]$ са не повече от $2n$.

1.108. Въз основа на предишната задача хомогенната система

$$\tau(x_k) = 0, \quad k = 0, \dots, 2n$$

допуска само нулевото решение.

1.109. Отг. а) $g_i(t) = \displaystyle\prod_{j=0,\, j\ne i}^{n} \frac{\cos\, t - \cos\, t_j}{\cos\, t_i - \cos\, t_j}$,

б) $s_i(t) = \dfrac{\sin\, t}{\sin\, t_i} \displaystyle\prod_{j=1,\, j\ne i}^{n} \frac{\cos\, t - \cos\, t_j}{\cos\, t_i - \cos\, t_j}$.

1.110. а) Умножаваме двете страни с $2\,\sin\,(x/2)$ и използуваме формулата

$$2\sin\frac{x}{2}\,\cos\,kx = \sin\,\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\,\left(k-\frac{1}{2}\right)x.$$

б) Както в подточка а).

1.111. Отг. $\tau(t) = \dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} y_k \frac{\sin\, \dfrac{2n+1}{2}(t-t_k)}{\sin\, \dfrac{t-t_k}{2}}$.

1.112. Отг. $a_k = \dfrac{2}{2n+1} \displaystyle\sum_{i=0}^{2n} y_i \cos\ kt_i, \quad k = 0, \ldots, n,$

$$b_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} y_i \sin\ kt_i, \quad k = 0, \ldots, n.$$

1.6. ЧЕБИШОВИ СИСТЕМИ

1.113. Използувайте, че всеки алгебричен полином от степен n има не повече от n реални нули.

1.114. Например линейната комбинация $\sin\ x - \dfrac{1}{2}$ има две нули в $[0, \pi]$.

1.115. Всяка линейна комбинация $f(x)$ на $\left\{x^{2k+1}\right\}_0^n$ е нечетна функция. Следователно, ако $f(x)$ има $n+1$ нули в $[\alpha, \beta]$, то $f(x)$ ще има още $n+1$ нули и в $[-\beta, -\alpha]$, т. е. общо $2n+2$. Но f е полином от степен $2n+1$. Стигаме до противоречие.

1.116. Нека $(\varphi_k)_0^n$ е система на Чебишов. Допускаме, че има точки $(x_k)_0^n$, за които въпросната детерминанта е равна на нула. Тогава хомогенната система

$$a_0\varphi_0(x_k) + \cdots + a_n\varphi_n(x_k) = 0, \quad k = 0, \ldots, n,$$

има ненулево решение: $a_0, \ldots, a_n$, т. е. съществува ненулев полином $a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$, който се анулира в $n+1$ точки: $x_0, \ldots, x_n$. Стигаме до противоречие.

Нека сега предположим, че детерминантата е различна от нула при всеки избор на различните точки $(x_k)_0^n$ от A. Да допуснем, че функциите $(\varphi_k)_0^n$ не образуват система на Чебишов. Тогава има ненулев обобщен полином $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x)$ и точки $x_0 < \cdots < x_n$ от A, за които $f(x_k) = 0, \ k = 0, \ldots, n$, т. е. написаната по-горе система има ненулево решение. Тогава нейната детерминанта е равна на нула. Това противоречи на условието.

1.117. Направете трансформацията $x = \arccos t$.

1.118. Твърдението следва от зад. 1.107.

1.119. Прилагаме индукция по n. Използуваме факта, че ако

$$\alpha_0 < \cdots < \alpha_{n+1}$$

и функцията $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k e^{\alpha_k x}$ има $n+2$ различни нули, то $g(x) := f(x)/e^{\alpha_0(x)}$ ще има също $n+2$ нули, а оттук по теоремата на Рол функцията $g'(x)$ ще има поне $n+1$ нули. Но

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k(\alpha_k - \alpha_0)e^{(\alpha_k - \alpha_0)x}$$

и съгласно индукционното предположение $g'(x)$ има най-много n нули.

1.120. Твърдението следва от предишната задача, като направим смяната $x = e^t$.

1.121. Допускаме противното. Тогава съществува функция

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k/(\alpha_k + x),$$

която има поне $n+1$ различни нули в $[a,b]$. Но като приведем към общ знаменател, заключаваме, че функцията

$$f(x) = g(x)/\omega(x), \quad \text{където} \;\; \omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(\alpha_k + x),$$

а оттук и функцията

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \omega_k(x), \quad \text{където} \;\; \omega_k(x) = \omega(x)/(\alpha_k + x), \quad k = 0, \dots, n,$$

има поне $n+1$ различни нули. Тъй като $g(x) \in \pi_n$, то $g(x) \equiv 0$. От линейната независимост на $\{\omega_k\}_0^n$ следва, че $a_0 = \cdots = a_n = 0$.

1.122. Съгласно зад. 1.116 функциите $\left\{[\varphi(x)]^k\right\}_0^n$ образуват система на Чебишов тогава и само тогава, когато детерминантата

$$D = \det\left\{[\varphi(x_i)]^k\right\}_{k,i=0}^{n}$$

е различна от нула при всеки избор на точките $a \le x_0 < \cdots < x_n \le b$. Но D е детерминанта на Вандермонд за точките $y_k = \varphi(x_k), \quad k = 0, \dots, n$. Остава да забележим, че $\varphi(x_k) \ne \varphi(x_i)$ при $k \ne i$ за всяка система от точки $x_0 < \cdots < x_n$ тогава и само тогава, когато $\varphi(x)$ е строго монотонна.

1.123. Допускаме противното и прилагаме теоремата на Рол.

1.124. Решението следва от факта, че функцията

$$f(x) = a_0\psi(x)\varphi_0(x) + \cdots + a_n\psi(x)\varphi_n(x)$$

има толкова нули, колкото и функцията $a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$.

1.125. Ясно е, че броят на нулите на линейната комбинация

$$a_0\varphi_0(\psi(x)) + \cdots + a_n\varphi_n(\psi(x))$$

в $[\alpha,\beta]$ е равен на броя на нулите на $a_0\varphi_0(t) + \cdots + a_n\varphi_n(t)$ в $[a,b]$.

1.126. Очевидно

$$e^{-(x_k-t)^2} = e^{-x_k^2}.e^{2x_kt}.e^{-t^2}.$$

Вече показахме в зад. 1.119, че функциите $\left\{e^{2x_kt}\right\}_{k=o}^{n}$ образуват система на Чебишов във всеки интервал $[a,b]$. Тъй като $e^{-t^2} > 0$ в интервала $(-\infty,\infty)$, то твърдението следва от зад. 1.124.

1.7. СПЛАЙН–ФУНКЦИИ

1.127. Всички твърдения следват непосредствено от дефиницията на сплайн-функция.

1.128. Допускаме, че съществуват числа $a_1, \dots, a_n$, поне едно от които е различно от нула и такива, че

$$a_1 \mid x_1 - t \mid + \cdots + a_n \mid x_n - t \mid = 0 \ \text{ в } \ [a,b].$$

Но $a_k = (f'(x_k+0) - f'(x_k-0))/2 = 0$ за всяко $k = 1,\ldots,n$. Стигнахме до противоречие.

1.129. Допускаме противното. Тогава има интервал $[a,b]$ и числа $a_1,\ldots,a_n$, поне едно от които е различно от нула и такива, че

$$f(x) := a_1(x-x_1)^r + \cdots + a_n(x-x_n)^r = 0 \ \text{ в } \ [a,b].$$

Оттук следва, че $f^{(j)}(t) = 0$ за $j = 0,\ldots,r$, където t е някаква фиксирана точка от $[a,b]$. Означаваме $\xi_k := t - x_k, \quad k = 1,\ldots,n$. Разглеждаме системата от уравнения $f^{(j)}(t) = 0, \quad j = r-n+1,\ldots,r$, която е еквивалентна със системата $a_1\xi_1^i + \cdots + a_n\xi_n^i = 0$ за $i = 0,\ldots,n-1$. Детерминантата на тази хомогенна система е Вандермондова. Следователно тя допуска само нулевото решение $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Стигнахме до противоречие.

1.130. Покажете, че $s^{(r)}(x)$ може да се представи като линейна комбинация на функциите $1, (x-x_1)_+^0, \ldots, (x-x_n)_+^0$, и след това интегрирайте този израз r пъти.

1.131. Отг. $c_k = \dfrac{1}{2}(f[x_k,x_{k+1}] - f[x_{k-1},x_k]), \quad k = 1,\ldots,n-1,$

$$c_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{x_n - x_0} + f[x_0,x_1]\right),$$

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{x_n - x_0} - f[x_{n-1},x_n]\right).$$

1.132. Нека $\rho := \operatorname{dist}(f, S_1(x_1,\ldots,x_{n-1})) = \ \| f - s \|$. Тогава за всяко x от (x_i, x_{i+1}) имаме

$$\begin{aligned} |f(x) - I_1(f;x)| &\le |f(x) - s(x)| + |s(x) - I_1(f;x)| \\ &\le \rho + \max\{|s(x_i) - I_1(f;x_i)|, |s(x_{i+1}) - I_1(f;x_{i+1})|\} \\ &\le \rho + \max\{|s(x_i) - f(x_i)|, |s(x_{i+1}) - f(x_{i+1})|\} \le 2\rho. \end{aligned}$$

1.133. Неравенството следва от факта, че за всяко $x \in (x_i, x_{i+1})$ имаме $|f(x) - I_1(f;x)| \le \max\{|f(x) - f(x_i)|, |f(x) - f(x_{i+1})|\} \le \omega(f;\Delta_n)$.

1.134. За всяко $x \in (x_i, x_{i+1})$

$$f(x) - I_1(f;x) = [f(x) - f(x_i)]\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + [f(x) - f(x_{i+1})]\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

Следователно

$$|f(x) - I_1(f;x)| \le \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\omega(f;|x - x_i|) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\omega(f;|x_{i+1} - x|).$$

Сега използувайте неравенството

$$\alpha\omega(f;\delta_1) + (1-\alpha)\omega(f;\delta_2) \le \omega(f;\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_2).$$

1.135. Използувайте зад. 1.133 и неравенството $\omega(f;\delta) \le \| f' \| \delta$.

1.136. Съгласно формулата на Нютон

$$f(x) - I_1(f;x) = f[x_i, x_{i+1}, x](x - x_i)(x - x_{i+1}).$$

Тогава за $x \in (x_i, x_{i+1})$ имаме

$$\| f - I_1(f;\cdot) \| \le \max_{\xi\in[x_i,x_{i+1}]} |f''(\xi)| \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)^2.$$

1.137. Нека $I_1(f;x)$ съвпада с линейната функция $l_1(x)$ в (x_{i-1}, x_i) и с $l(x)$ в (x_i, x_{i+1}). Тъй като $f(x)$ е изпъкнала функция, то $l(x) \le f(x) \le l_1(x)$ за всяко $x \in (x_i, x_{i+1})$. Следователно

$$\begin{aligned} &|f(x) - l(x)| \le |l_1(x) - l(x)| \le |l_1(x_{i+1}) - l(x_{i+1})| \\ &= |\{f(x_i) + f[x_{i-1}, x_i](x_{i+1}) - x_i)\} - \{f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x_{i+1}) - x_i)\}| \\ &= |f[x_{i-1}, x_i] - f[x_i, x_{i+1}]|(x_{i+1}) - x_i) \le \omega_2\left(f; \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

1.138. Тъй като $\omega(f;\delta) = f(\delta)$, то а) следва от зад. 1.133. За б) използувайте например точките $x_k = \left(\frac{k-1}{n-1}\right)^4$, $k = 2, \ldots, n$, и техните симетрични от $[-1, 0]$.

1.139. От дефиницията на разделена разлика следва, че

$$B(t) := B(x_0, \ldots, x_r; t) = \sum_{k=0}^{r} \frac{(x_k - t)_+^{r-1}}{\omega\prime(x_k)}.$$

Тъй като $(x_k - t)_+^{r-1} = 0$ при $t > x_k$, то очевидно $B(t) = 0$ за $t > x_r$. При $t < x_0$ имаме $(x_k - t)_+^{r-1} = (x_k - t)^{r-1}$ и горната сума е разделената разлика на полинома $(x - t)^{r-1}$ от степен $r - 1$ в $r + 1$ точки. Следователно тя е равна на нула.

За да докажете положителността на $B(t)$ в (x_0, x_r), покажете най-напред, че $B(t)$ не си сменя знака в (x_0, x_r). След това проверете, че $B(t) > 0$ за $t \in (x_{r-1}, x_r)$.

1.140. Използувайте връзката

$$1 = f[x_0, \ldots, x_r] = \frac{1}{(r-1)!}\int_{x_0}^{x_r} B(x_0, \ldots, x_r; t) f^{(r)}(t)dt$$

при $f(x) = x^r$.

1.141. Използувайте рекурентната връзка

$$(x_{i+r} - x_i)B_{i,r-1}(t) = (\cdot - t)_+^{r-1}[x_{i+1}, \ldots, x_{i+r}] - (\cdot - t)_+^{r-1}[x_i, \ldots, x_{i+r-1}].$$

1.142. Равенството следва от съответната подобна връзка между разделените разлики.

1.143. Допускаме противното. Тогава съществува линейна комбинация

$$f(t) := a_0B_0(t) + \cdots + a_N B_N((t)$$

с поне един ненулев коефициент a_i, която е тъждествено равна на нула в $(-\infty, \infty)$. Но при $t \in (x_0, x_1)$ имаме $f(t) = a_0B_0(t) = 0$. Тъй като $B(t) > 0$ (вж. зад. 1.139), то $a_0 = 0$. Аналогично се показва след това, че $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ и т. н. Всички коефициенти a_k са нули. Стигнахме до противоречие.

1.144. Използувайте, че $B-$сплайните са сплайни с минимален носител. С други думи, ако $s(t)$ е сплайн от степен $r - 1$ с възли $t_1, \ldots, t_r$ и $s(t) = 0$ вън от интервала (t_1, t_r), то $s(t) \equiv 0$. Сега, ако допуснете, че линейната комбинация

$$f(t) = a_1 B_1(t) + \cdots + a_N B_N((t)$$
се анулира в $[a,b]$, то тя ще се анулира и в $[t_1, t_r]$ и $[t_{N+1}, t_{N+r}]$, а следователно и в $(-\infty, \infty)$. Тогава от зад. 1.143 ще следва, че всичките коефициенти на f са нули.

1.145. Ако линейната комбинация $f(t) = a_1 B_1(t) + \cdots + a_r B_r((t)$ се анулира в (x_r, x_{r+1}) , то f ще се анулира и в (x_1, x_r), (x_{r+1}, x_{2r}), защото те съдържат само по r възела (използуваме, че B-сплайните имат минимален носител).

1.146. Нека $\delta f(x)$ е операторът на централната разделена разлика със стъпка 1, т. е.
$$\delta f(x) := f(x + \frac{1}{2}) - f(x - \frac{1}{2}), \quad \delta^{k+1} f(x) := \delta^k \delta f(x), \quad k = 0, 1, \ldots$$
Покажете най-напред, че за $f(x) = e^{\mathrm{i}xt}$ имаме $\delta f(x) = \left(2\mathrm{i} \sin \frac{t}{2}\right) .e^{\mathrm{i}xt}$ и следователно
$$\delta^r f(x) = \left(2\mathrm{i} \sin \frac{t}{2}\right)^r .e^{\mathrm{i}xt}.$$
Тогава а) следва от връзката
$$\delta^r f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} M_r(x) f^{(r)}(x) dx,$$
вземайки предвид, че $f^{(r)}(x) = (\mathrm{i}t)^r e^{\mathrm{i}xt}$. б) се проверява директно.

1.147. Използувайте правилото на Стефенсън и представянето
$$B_{i,r-1}(t) = (f \cdot g)[x_i, \ldots, x_{i+r}],$$
където $f(t) := x - t, \qquad g(t) := (x - t)_+^{r-2}$.

1.148. Съгласно рекурентната връзка за разделените разлики
$$(x_{i+r} - x_i) \frac{d}{dt} B_{i,r-1}(t)$$
$$= \frac{d}{dt} (\cdot - t)_+^{r-1} [x_{i+1}, \ldots, x_{i+r}] - \frac{d}{dt} (\cdot - t)_+^{r-1} [x_i, \ldots, x_{i+r-1}].$$
Диференцираме и получаваме исканата връзка.

1.149. Имаме
$$\frac{d}{dt} \frac{B_{i,r-1}(t)}{(x_{i+r} - t)^{r-1}} = \frac{1}{(x_{i+r} - t)^r} \left((x_{i+r} - t) B'_{i,r-1}(t) + (r-1) B_{i,r-1}(t) \right).$$
Сега като заместим изразите за $B'_{i,r-1}(t)$ и $B_{i,r-1}(t)$ от зад. 1.147 и 1.148, получаваме търсената връзка.

1.150. Използувайте, че при $x \in (x_i, x_{i+1})$ е в сила връзката
$$f(x) - \varphi_f(x) = (x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2 f[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}, x].$$

1.151. От условието за h получаваме, че в крайната разлика участвуват само стойности на $s(x)$ от интервала $[x_{j-1}, x_{j+1}]$. Затова можем да смятаме, че $s(x) = p_j(x) + a_j (x - x_j)_+^k$, където $p_j \in \pi_k$ и $a_j \in R$. От свойството, че крайната разлика от ред $k + m > k$ се анулира за полиноми от степен k, имаме, че
$$\delta_h^{k+m} s(x_j) = \delta_h^{k+m} (p_j + a_j f_j)(x_j) = a_j \delta_h^{k+m} f_j(x_j),$$

където $f_j(x) = (x - x_j)_+^k$. Нека $g_j(x) = (x - x_j)_-^k = (-1)^k f_j(2x_j - x)$. Тогава от свойството на симетричната крайна разлика и от четността на m следва

$$\delta_h^{k+m} f_j(x_j) = (-1)^k \delta_{-h}^{k+m} f_j(x_j) = \delta_h^{k+m} g_j(x_j).$$

Накрая от $f_j(x) + g_j(x) = x^k$ получаваме

$$\delta_h^{k+m} f_j(x_j) = \frac{1}{2}\,\delta_h^{k+m} f_j(x_j) + \frac{1}{2}\,\delta_h^{k+m} g_j(x_j) = \frac{1}{2}\,\delta_h^{k+m}(f_j + g_j)(x_j) = 0.$$