Глава 2

КВАДРАТУРНИ ФОРМУЛИ

2.1. ПРИБЛИЖЕНО ПРЕСМЯТАНЕ НА ОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ ЧРЕЗ РАЗВИВАНЕ НА ПОДИНТЕГРАЛНАТА ФУНКЦИЯ В РЕД

Този метод има ограничено приложение, тъй като изисква подинтегралната функция да може да се развие в степенен ред, равномерно сходящ в интеграционния интервал. Друг недостатък е, че методът е индивидуален за всяка функция.

Задача 2.1. Като използувате развитие в ред на подинтегралната функция, пресметнете приближено

$$I = \int_0^{0,5} \frac{\mathrm{tg} x}{x}\, dx\,.$$

Задача 2.2. Определете колко члена от развитието на подинтегралната функция в ред на Маклорен трябва да се вземат, за да бъде пресметнат всеки от следващите интеграли с грешка $\varepsilon \le 10^{-5}$. Намерете съответните приближени стойности.

а) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\sin x\, dx$; б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$; в) $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; г) $\displaystyle\int_0^1 \exp\left(-x^2\right) dx$.

2.2. ИНТЕРПОЛАЦИОННИ КВАДРАТУРНИ ФОРМУЛИ

Дефиниция 2.1. *Квадратурна формула се нарича линеен функционал $Q(f)$ от вида*

$$Q(f) := \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k), \quad a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b,$$

който служи за приближено пресмятане на $\int_a^b f(x)\, dx$, т. е.

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx Q(f).$$

По-общо квадратурната формула може да съдържа и производни на подинтегралната функция:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{\nu_k - 1} a_{kj} f^{(j)}(x_k).$$

Най-често за построяване на квадратурни формули се използува интерполация, т. е. $Q(f) = \int_a^b L_{n-1}(f;x)\,dx$ или $Q(f) = \int_a^b H(f;x)\,dx$, където $L_{n-1}(f;x)$ и $H(f;x)$ са съответно интерполационни полиноми на Лагранж и Ермит. Квадратурните формули, получени по такъв начин, наричаме *интерполационни.*

Дефиниция 2.2. *Алгебрична степен на точност на една квадратурна формула наричаме най-голямото цяло неотрицателно n, за което*

$$\int_a^b f(x)\,dx = Q(f)$$

винаги, когато подинтегралната функция f е алгебричен полином от степен, ненадминаваща n.

Задача 2.3. Намерете:

а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right\}$; б) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+4}\cdots+\frac{1}{2n^2}\right\}$.

Задача 2.4. Покажете, че:

а) квадратурната формула на правоъгълниците

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f(\xi) =: Q_{\text{пр}}(f),\ \ a\le\xi\le b,$$

има алгебрична степен на точност 1 при $\xi = (a+b)/2$ и 0 в противен случай;

б) квадратурната формула на трапеците

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] =: Q_{\text{тр}}(f)$$

има алгебрична степен на точност 1;

в) квадратурната формула на Симпсон

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] =: Q_{\text{С}}(f)$$

има алгебрична степен на точност 3.

Задача 2.5. Покажете, че

$$Q_C(f) = \frac{1}{3}\cdot Q_{\text{тр}}(f) + \frac{2}{3}\cdot Q_{\text{пр}}(f)\ \ (\xi = (a+b)/2).$$

Задача 2.6. Да се построи квадратурна формула от вида

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx \approx h[Af(0)+Bf(h)+Cf(2h)]$$

с възможно най-висока алгебрична степен на точност.

Задача 2.7. Определете a, b и c така, че квадратурната формула

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx c[f(ah)+f(bh)]$$

да има възможно най-висока алгебрична степен на точност.

Задача 2.8. Да се определят a, b, c, d и A така, че квадратурната формула

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \approx A[f(a)+f(b)+f(c)+f(d)]$$

да има възможно най-висока алгебрична степен на точност.

Задача 2.9. Да се определят A, B, C, D и E така, че квадратурната формула

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx \approx h[Af(0) + Bf(h) + Cf(2h)] + h^2[Df'(0) + Ef'(2h)]$$

да има възможно най-висока алгебрична степен на точност.

Задача 2.10. Определете A и B така, че квадратурната формула

$$\int_0^h \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx \approx Af(0) + Bf(h)$$

да има възможно най-висока алгебрична степен на точност.

Задача 2.11. Да се определят коефициентите a_i, b_i, $i = 1, 2, 3$, така, че квадратурната формула

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} f(x)\,dx &\approx h[a_1 f(-h) + a_2 f(0) + a_3 f(h)] \\ &+ h^2[b_1 f'(-h) + b_2 f'(0) + b_3 f'(h)]\end{aligned}$$

да има възможно най-висока алгебрична степен на точност.

Задача 2.12. Да се докаже, че квадратурната формула

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(0) + f(h)] - \frac{h^3}{24}[f''(0) + f''(h)]$$

е точна за всички полиноми от степен, ненадминаваща 3.

Задача 2.13. Като се използува методът на неопределените коефициенти, да се построи формулата

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(0) + f(h)] + \frac{h^2}{10}[f'(0) - f'(h)] + \frac{h^3}{120}[f''(0) + f''(h)].$$

Да се докаже, че тя има алгебрична степен на точност 5.

Задача 2.14. Покажете, че квадратурната формула

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{3}{8}\cdot f(1/6) + \frac{27}{56}\cdot f(11/18) + \frac{1}{7}\cdot f(1)$$

има алгебрична степен на точност 2.

2.3. СЪСТАВНИ КВАДРАТУРНИ ФОРМУЛИ. ОЦЕНКА НА ГРЕШКАТА

За повишаване точността на пресмятанията вместо елементарни интерполационни квадратурни формули се прилагат съставни такива, които се получават чрез разделяне на интеграционния интервал на равни части, прилагане на елементарната квадратура за всеки подинтервал и сумиране на резултатите.

За оценка на грешката на квадратурните формули често се прилага следната теорема на Пеано:

Теорема 2.1. *Нека R е произволен линеен функционал, дефиниран върху пространството*

$$W_1^r[a,b] := \left\{ f \in C^{r-1}[a,b] : \ f^{(r-1)} \ \text{абс. непр. в } (a,b), \ \int_a^b |f^{(r)}(x)|\, dx < \infty \right\},$$

който се анулира върху множеството π_{r-1} от всички алгебрични полиноми от степен, ненадминаваща $r-1$. Тогава за функционала R е валидно представянето

$$R(f) = \int_a^b K_r(R;t) f^{(r)}(t)\, dt, \qquad \text{където} \qquad K_r(R;t) = R\left(\frac{(\cdot - t)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right)$$

(тук u_+ е отсечената степенна функция, $u_+ = \max\{u, 0\}$).

Ние прилагаме тази теорема за $R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$. В този случай функцията $K_r(R;t)$ се нарича $r-$то ядро на Пеано за квадратурната формула Q (ще го бележим по-нататък с $K_r(Q;t)$). Нека за $1 \le p < \infty$ означим с $W_p^r[a,b]$ множеството

$$\left\{ f \in C^{r-1}[a,b] : \ f^{(r-1)} \ \text{абс. непр. в } \ (a,b), \ \left(\int_a^b |f^{(r)}(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \le M \right\},$$

а с $W_\infty^r[a,b]$ — множеството

$$\left\{ f \in C^{r-1}[a,b], \ f^{(r-1)} \ \text{абс. непр. в } \ (a,b), \ \operatorname{supvrai}_{x\in(a,b)} |f^{(r)}(x)| \le M \right\}.$$

Следствие 2.1. *Нека квадратурната формула Q има алгебрична степен на точност, не по-малка от $m-1$ $(m-1 \ge 0)$. Тогава за нейната грешка в пространствата $W_p^r[a,b]$, $r \le m$, са валидни формулите:*

а) при $1 < p \le \infty$

$$\sup_{f \in W_p^r[a,b]} \left| \int_a^b f(x)\,dx - Q(f) \right| = M \left(\int_a^b |K_r(Q;t)|^q dt \right)^{1/q}, \ q = \frac{p}{p-1};$$

б) $$\sup_{f \in W_1^r[a,b]} \left| \int_a^b f(x)\,dx - Q(f) \right| = M \max_{t\in[a,b]} |K_r(Q;t)|.$$

Следствие 2.2. *Нека квадратурната формула Q има алгебрична степен на точност, не по-малка от $m-1$ $(m-1 \ge 0)$. Нека $f \in C^m[a,b]$ и нека $K_m(Q;t)$ не сменя знака си в (a,b). Тогава съществува точка $\xi \in (a,b)$, такава че*

$$\int_a^b f(x)\,dx - Q(f) = f^{(m)}(\xi) \int_a^b K_m(Q;t) dt.$$

Задача 2.15. Нека $Q(f)$ е квадратурна формула за пресмятане на $\int_0^1 f(x)\,dx$. Докажете, че n-тата съставна квадратурна формула, основаваща се на Q, може да се получи като $Q(\varphi_n)$, където

$$\varphi_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+x}{n}\right).$$

Задача 2.16. Покажете, че за $t \in [a,b]$ ядрата на Пеано за квадратурната формула $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k)$ с алгебрична степен на точност $m-1$ имат представянията:

а) $K_r(Q;t) = \dfrac{(b-t)^r}{r!} - \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k \frac{(x_k-t)_+^{r-1}}{(r-1)!}$;

б) $K_r(Q;t) = (-1)^r \left[\dfrac{(t-a)^r}{r!} - \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k \frac{(t-x_k)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right]$

за $r = 1, 2, \ldots, m$.

Задача 2.17. Покажете, че в квадратурната формула

$$Q(f) = \sum_{j=1}^n a_j f(x_j)$$

коефициентите a_j се изразяват чрез ядрото ѝ на Пеано посредством формулите

$$a_j = (-1)^r [K_r^{(r-1)}(Q; x_j+0) - K_r^{(r-1)}(Q; x_j - 0)], \quad j = 1, \ldots, n.$$

Задача 2.18. Покажете, че $\dfrac{d}{dt} K_r(Q;t) = -K_{r-1}(Q;t)$.

Задача 2.19. Покажете, че за грешката на съставната формула на трапеците

$$I(f) := \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}(f(a)+f(b)) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right] := Q^n{}_{\text{тр}}(f)$$

е изпълнено

$$|I(f) - Q^n{}_{\text{тр}}(f)| \le (b-a)\omega\left(f; \frac{b-a}{n}\right),$$

където $\omega(f;t) := \sup\{|f(t') - f(t'')|,\ t', t'' \in [a,b],\ |t'-t''| \le t\}$, т. е. $\omega(f;t)$ е модулът на непрекъснатост на функцията f.

Задача 2.20. Нека $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) =: Q(f)$ е симетрична квадратурна формула, т. е.

$$x_k - a = b - x_{n+1-k},\ a_k = a_{n+1-k},\ k = 1, \ldots, [(n+1)/2].$$

Докажете, че за всяко $t \in [a,b]$ е изпълнено

$$K_r(Q; a+b-t) = (-1)^r K_r(Q;t).$$

Задача 2.21. Докажете, че ако $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) =: Q(f)$ е симетрична квадратурна формула, то

$$\int_a^b |K_r(Q;x)|\,dx = 2\int_a^{(a+b)/2} |K_r(Q;x)|\,dx.$$

Задача 2.22. Нека $\int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) =: Q(f)$ и нека S_n е n-тата съставна квадратурна формула, получена на базата на Q. Покажете, че

$$K_r(S_n;t) = \frac{1}{n^r} K_r(Q; nt - j) \quad \text{за } t \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right),\ j = 0, \ldots, n-1.$$

Задача 2.23. Нека $Q(f)$ е квадратурна формула с алгебрична степен на точност $m-1$ $(m-1 \geq 0)$ за пресмятане на $\int_a^b f(x)\,dx$. Ако за грешката на тази квадратурна формула в W_∞^r $(1 \leq r \leq m)$ е изпълнено неравенството

$$\sup_{f \in W_\infty^r[a,b]} \left| \int_a^b f(x)\,dx - Q(f) \right| \leq A,$$

то за $n-$тата съставна квадратурна формула S_n, получена от Q, е в сила оценката

$$\sup_{f \in W_\infty^r[a,b]} \left| \int_a^b f(x)\,dx - S_n(f) \right| \leq \frac{A}{n^r}.$$

Задача 2.24. Нека квадратурната формула

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) := Q(f)$$

има алгебрична степен на точност $m-1 \geq 1$. Ако ядрото ѝ на Пеано $K_r(Q;t)$ $(1 \leq r \leq m)$ има нула $\tau \in (0,1)$, докажете, че разглежданата квадратурна формула е точна за функцията $f(x) = (x-\tau)_+^{r-1}$. По-общо, ако $\tau \in [0,1]$ е $s-$кратна нула за $K_r(Q;t)$ $(1 \leq s \leq r-1)$, квадратурната формула ще бъде точна за функциите

$$(x-\tau)_+^{r-1},\ (x-\tau)_+^{r-2}, \ldots, (x-\tau)_+^{r-s}.$$

Задача 2.25. Да се намерят грешките на квадратурните формули на правоъгълниците, трапеците и Симпсон (вж. зад. 2.4) за пространството $W_\infty^1[a,b]$. Какви са оценките за грешките на съответните съставни квадратурни формули?

Задача 2.26. Да се намерят оценки за грешките на квадратурните формули на правоъгълниците, трапеците и Симпсон за пространството $W_\infty^2[a,b]$. Какви са оценките за грешките на съответните съставни квадратурни формули ?

Задача 2.27. Нека $f \in C^2[a,b]$. Докажете, че съществуват точки ξ_1 и ξ_2 от интервала $[a,b]$, такива че

$$\int_a^b f(x)\,dx - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f''(\xi_1)}{24}(b-a)^3;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] = -\frac{f''(\xi_2)}{12}(b-a)^3.$$

Задача 2.28. Докажете, че ако функцията f е изпъкнала в интервала $[a,b]$, то

$$Q_{\text{пр}}(f) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq Q_{\text{тр}}(f).$$

Задача 2.29. Докажете, че за грешката на формулата на Симпсон в класа $W_\infty^3[a,b]$ е изпълнено

$$\sup_{f \in W_\infty^3[a,b]} \left| \int_a^b f(x)\,dx - Q_{\text{С}}(f) \right| = M \frac{(b-a)^4}{576}.$$

Задача 2.30. Да се оцени грешката на елементарната и съставната формула на Симпсон в класа $W_\infty^4[a,b]$.

Задача 2.31. Нека $f \in C^4[a,b]$. Докажете, че съществува точка ξ_3 от интервала $[a,b]$, такава че

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] = -\frac{f^{(4)}(\xi_3)}{2880}(b-a)^5.$$

Задача 2.32. Нека $f \in C^3[0,1]$ и $0 < m \le |f'''(x)| \le M$ за $x \in [0,1]$. Ако съгласно зад. 2.27 $\xi_1,\ \xi_2 \in [0,1]$ са такива точки, че

$$\int_0^1 f(x)\,dx - f(1/2) = \frac{f''(\xi_1)}{24}, \qquad \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] = -\frac{f''(\xi_2)}{12},$$

то за точките $\xi_1,\ \xi_2$ е изпълнено $|\xi_1 - \xi_2| \le \min\left\{\dfrac{M}{16m}, 1\right\}$.

Задача 2.33. Като използувате зад. 2.27, докажете твърдението: ако $f \in C^2[0,1]$, то съществуват точки η_1 и η_2 от $[0,1]$, такива че:

а) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - 2f(1/2) + \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] = \frac{f''(\eta_1)}{6};$

б) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{4}{3}f(1/2) + \frac{1}{6}[f(0)+f(1)] = \frac{f''(\eta_2)}{12}.$

Задача 2.34. Ако $f \in C^2[0,1]$, докажете, че съществува точка ξ от интервала $[0,1]$, такава че

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2}[f(1/4) + f(3/4)] = \frac{f''(\xi)}{96}.$$

Задача 2.35. Ако $f \in C^2[0,1]$, докажете, че съществува точка ξ от интервала $[0,1]$, такава че

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2}[f(1/3) + f(2/3)] = \frac{f''(\xi)}{36}.$$

Задача 2.36. Решете зад. 2.26, но за пространството $W_2^2[a,b]$.

Задача 2.37. Нека $f \in C^4[a,b]$. Да се докаже равенството

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3}{80}f^{(4)}(\xi)h^5,$$

където $a < \xi < b$, $x_k = a + kh$, $k = 0,1,2,3$ и $h = (b-a)/3$.

Задача 2.38. Нека $f \in C^4[a,b]$. Докажете равенството

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{4}{3}h[2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3)] + \frac{14}{45}f^{(4)}(\xi)h^5,$$

където $a < \xi < b$, $x_k = a + kh$, $k = 1,2,3$ и $h = (b-a)/4$.

Задача 2.39. Нека $f(x)$ има интегруема първа производна, ненадминаваща по абсолютна стойност 1 в $[0,1]$. Да се определи за какъв брой възли съставната формула на правоъгълниците (трапеците, Симпсон) пресмята $\int_0^1 f(x)\,dx$ с точност 0,001.

Задача 2.40. Определете броя на подинтервалите за прилагане на съставната квадратурна формула на правоъгълниците (трапеците, Симпсон), осигуряващ пресмятането с точност $0,00001$ на:

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$; б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Задача 2.41. Да се определи броят $N = 2m$ на подинтервалите за прилагане на съставната квадратурна формула на Симпсон така, че да се осигури точност 10^{-3} при пресмятане на интеграла $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Задача 2.42. Да се получи формулата за числено интегриране

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, f(x)\,dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2 \frac{k\pi}{n} f\left(\cos \frac{k\pi}{n}\right).$$

Да се даде оценка за грешката.

Задача 2.43. Да се получи формулата за числено интегриране

$$\int_{0}^{1} \sqrt{x(1-x)}\, f(x)\,dx \approx \frac{\pi}{4n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2 \frac{k\pi}{n} f\left(\cos^2 \frac{k\pi}{2n}\right).$$

2.4. КВАДРАТУРНИ ФОРМУЛИ ОТ ГАУСОВ ТИП

Квадратурни формули, при които свободните възли са избрани по такъв начин, че да осигуряват максимална алгебрична степен на точност, се наричат квадратурни формули от Гаусов тип. Характеризация на такива квадратурни формули дава следната теорема:

Теорема 2.2. *Квадратурната формула*

$$\int_a^b \sigma(x) f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k), \ \ a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n \le b$$

има алгебрична степен на точност $n-1+k$ *тогава и само тогава, когато са изпълнени едновременно условията:*

1. *формулата е интерполационна;*

2. $\int_a^b \sigma(x)\omega(x)p(x)\,dx = 0$ *за всеки полином* p *от степен, ненадминаваща* k, *където* $\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

В частност, ако $x_{1,n}^* < x_{2,n}^* < \ldots < x_{n,n}^*$ са нулите на $n-$тия ортогонален в $[a,b]$ полином по отношение на теглото $\sigma(x)$, получаваме квадратурната формула на Гаус

$$\int_a^b \sigma(x) f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^G f(x_{k,n}^*)$$

с алгебрична степен на точност $2n-1$.

Квадратурната формула с алгебрична степен на точност $2n+1$ от вида

$$\int_a^b \sigma(x) f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^L f(x_{k,n}) + b_n^L f(a) + c_n^L f(b) =: Q_n^L(f)$$

се нарича *квадратурна формула на Лобато*, а квадратурните формули с алгебрична степен на точност $2n$ от вида

$$\int_a^b \sigma(x)f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^R f(x_{k,n}) + b_n^R f(a) =: Q_n^R(f),$$

$$\int_a^b \sigma(x)f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{k,n}^R f(\tilde{x}_{k,n}) + c_n^R f(b) =: \tilde{Q}_n^R(f)$$

се наричат *квадратурни формули на Радо*. Съгласно горната теорема възлите на квадратурната формула на Лобато са нулите на $n-$тия ортогонален в $[a,b]$ полином по отношение на теглото $\sigma(x)(b-x)(x-a)$, а възлите на квадратурните формули на Радо са нулите на ортогоналните в $[a,b]$ полиноми от степен n по отношение съответно на теглата $\sigma(x)(x-a)$ и $\sigma(x)(b-x)$. Тъй като тези ортогонални полиноми са единствени за всяко фиксирано (нетривиално) тегло, следва, че единствени са и квадратурните формули на Гаус, Лобато и Радо.

Задача 2.44. Нека $\sigma(x)$ е теглова функция в интервала $[a,b]$, като $\int_a^b \sigma(x)\,dx > 0$. Докажете, че няма квадратурна формула с n възела за пресмятане на $\int_a^b \sigma(x)f(x)\,dx$ с алгебрична степен на точност, по-голяма от $2n-1$.

Задача 2.45. Докажете, че (при същото условие за σ) няма квадратурна формула дори от вида

$$\int_a^b \sigma(x)f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \left[a_k f(x_k) + b_k f'(x_k)\right],$$

която да има по-висока алгебрична степен на точност от формулата на Гаус с n възела.

Задача 2.46. За квадратурните формули на Лобато и Радо докажете твърдения, аналогични на тези от зад. 2.44 и 2.45 .

Задача 2.47. Докажете, че ако $f \in C^{2n}[a,b]$, за грешката на квадратурната формула на Гаус с n възела е изпълнено

$$\int_a^b \sigma(x)f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^G f(x_{k,n}^*)$$
$$= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \sigma(x)(x-x_{1,n}^*)^2 \dots (x-x_{n,n}^*)^2\,dx$$

за някое $\xi \in [a,b]$ и следователно

$$\left|\int_a^b \sigma(x)f(x)\,dx - Q_n^G(f)\right| \le \frac{M}{(2n)!}\int_a^b \sigma(x)\omega^2(x)\,dx,$$

където $M := \max_{x\in[a,b]} |f^{(2n)}(x)|$ и $\omega(x) = x^n + \dots$ е $n-$тият ортогонален полином в $[a,b]$ при тегло $\sigma(x)$.

Задача 2.48. Докажете, че ако $f \in C^{2n+2}[a,b]$, за грешката на квадратурната формула на Лобато е изпълнено

$$\int_a^b \sigma(x)f(x)\,dx - \left[\sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^L f(x_{k,n}) + b_n^L f(a) + c_n^L f(b)\right]$$

$$= -\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b \sigma(x)(x-a)(b-x)\omega^2(x)\, dx,$$

където $\xi \in [a,b]$ и $\omega(x) = x^n + \dots$ е ортогоналният полином при тегло $\sigma(x)(x-a)(b-x)$. Като следствие, ако $M := \max_{x\in[a,b]} |f^{(2n+2)}(x)|$, имаме оценката

$$\left| \int_a^b \sigma(x) f(x)\, dx - Q_n^L(f) \right| \le \frac{M}{(2n+2)!} \int_a^b \sigma(x)(x-a)(b-x)\omega^2(x)\, dx.$$

Задача 2.49. Докажете, че ако $f \in C^{2n+1}[a,b]$, за грешката на квадратурните формули на Радо са изпълнени неравенствата

$$\left| \int_a^b \sigma(x) f(x)\, dx - Q_n^R(f) \right| \le \frac{M}{(2n+1)!} \int_a^b \sigma(x)(x-a)\omega^2(x)\, dx$$

и

$$\left| \int_a^b \sigma(x) f(x)\, dx - \tilde{Q}_n^R(f) \right| \le \frac{M}{(2n+1)!} \int_a^b \sigma(x)(b-x)\tilde{\omega}^2(x)\, dx,$$

където $M := \max_{x\in[a,b]} |f^{(2n+1)}(x)|$ и ω, $\tilde{\omega}$ са полиномите от степен n със старши коефициент 1, ортогонални в $[a,b]$ по отношение съответно на теглата $\sigma(x)(x-a)$ и $\sigma(x)(b-x)$.

Задача 2.50. Докажете, че в квадратурните формули на Гаус, Лобато и Радо всички коефициенти са положителни.

Нека $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ е редицата от ортонормирани полиноми в интервала $[a,b]$, относно тегловата функция $\sigma(x)$, $p_n(x) = k_n x^n + \dots$, т. е.

$$\int_a^b \sigma(x) p_n(x) p_m(x)\, dx = \delta_{n,m}, \quad n,m = 0,1,2,\dots,$$

където $\delta_{n,m}$ е символът на Кронекер.

Задача 2.51. Докажете, че редицата $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ от ортонормирани полиноми удовлетворява тъждеството

$$p_0(x)p_0(y) + p_1(x)p_1(y) + \dots + p_n(x)p_n(y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y}$$

(тъждество на Кристофел — Дарбу).

Задача 2.52. Като използувате тъждеството на Кристофел — Дарбу, докажете, че за коефициентите $a_{k,n}^G$ на Гаусовата квадратурна формула

$$\int_a^b \sigma(x) f(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^n a_{k,n}^G f(x_{k,n})$$

са валидни представянията

а) $a_{k,n}^G = \dfrac{k_{n+1}}{k_n} \dfrac{-1}{p_{n+1}(x_{k,n})p_n'(x_{k,n})}$; б) $a_{k,n}^G = \dfrac{k_n}{k_{n-1}} \dfrac{1}{p_{n-1}(x_{k,n})p_n'(x_{k,n})}$.

Задача 2.53. Докажете, че коефициентите на Гаусовата квадратурна формула могат да се пресметнат по формулата

$$a_{k,n}^G = \int_a^b \sigma(x) \left(\frac{p_n(x)}{p_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})} \right)^2 dx.$$

Задача 2.54. Като използувате зад. 2.52, докажете, че квадратурната формула
$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k), \quad x_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},\ k=1,\dots,n,$$
е точна за полиномите от степен, ненадминаваща $2n-1$, т. е. тя е Гаусова квадратурна формула (и същевременно квадратурна формула от Чебишов тип).

Задача 2.55. Ако $f\in C^{2n}[-1,1]$ е такава, че
$$\max_{x\in[a,b]}|f^{(2n)}(x)|\le M,$$
докажете, че за грешката на Гаусовата квадратурна формула от зад. 2.54 е изпълнено
$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right| \le M\frac{\pi}{(2n)!2^{2n-1}}.$$

Задача 2.56. Като използувате зад. 2.52, докажете, че квадратурната формула
$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}f(x)\,dx \approx \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{n+1}f(x_k),\ x_k=\cos\frac{k\pi}{n+1},\ k=1,\dots,n,$$
е Гаусова.

Задача 2.57. Ако $f\in C^{2n}[-1,1]$ е такава, че
$$\max_{x\in[a,b]}|f^{(2n)}(x)|\le M,$$
докажете, че за грешката на Гаусовата квадратурна формула от зад. 2.56 е изпълнено
$$\left|\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}f(x)\,dx - \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{n+1}f(x_k)\right| \le M\frac{\pi}{(2n)!2^{2n+1}}.$$

Задача 2.58. Докажете, че за коефициентите на квадратурната формула на Гаус
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{k-1}^{n} a_{k,n}^{G} f(x_{k,n})$$
е валидно представянето
$$a_{k,n}^{G}=\frac{2}{(1-x_{k,n}^2)[P_n'(x_{k,n})]^2},$$
където P_n е $n-$тият полином на Льожандър
$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]. \tag{2.1}$$

Задача 2.59. Докажете, че за коефициентите на квадратурната формула на Гаус с n възела за интервала $[-1,1]$ и тегло $\sigma(x)\equiv 1$ са изпълнени неравенствата
$$(0<)\ a_{k,n}^{G} < x_{k+1,n}-x_{k-1,n},\quad k=1,2,\dots,n,$$
където $x_{1,n}<x_{2,n}<\ldots<x_{n,n}$ са нулите на $n-$тия полином на Льожандър и $x_{0,n}:=-1$, $x_{n+1,n}=1$.

Задача 2.60. Нека, както в зад. 2.59, $\{x_{k,n}\}_{k=1}^n$ са нулите на $n-$тия полином на Льожандър, наредени в нарастващ ред. Нека P е алгебричен полином от степен, ненадминаваща $2n$, за който $P(-1)=P(1)$. Докажете, че съществува точка $\xi \in (x_{1,n}, x_{n,n})$, такава че $P'(\xi)=0$ (Л. Чакалов).

Задача 2.61. Нека $\{x_{k,n}\}_{k=1}^n$ са нулите на полинома на Льожандър. Означаваме с $\mathcal{P}$ класа

$$\left\{P(x):\quad P(x)=x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\cdots+a_{2n},\ P(x)\ge 0 \text{ при } x\in[-1,1]\right\}.$$

Да се докаже, че

$$\inf_{P\in\mathcal{P}}\int_{-1}^{1}P(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\omega^2(x)\,dx,$$

където $\omega(x)=(x-x_{1,n})\ldots(x-x_{n,n})$.

Задача 2.62. Нека

$$\varphi_k(x_1,\ldots,x_n)=\int_a^b\omega(x)\omega_k(x)\,dx,\quad k=1,\ldots,n,$$

където $\omega(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_n)$, $\omega_k(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})$, $\omega_0(x):=1$. Да се докаже, че ако $\varphi_i(x_1,\ldots,x_n)=0$ за $i=1,\ldots,n$, то

$$\operatorname{sgn}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_k}=(-1)^{n-k-1},\quad k=1,\ldots,n.$$

Задача 2.63. Намерете най-малкия затворен интервал $[a,b]$, съдържащ се в $[-1,1]$ и притежаващ свойството: за всеки алгебричен полином P от степен, ненадминаваща $2n$, който е монотонно растящ в $[a,b]$, е изпълнено $P(1)\ge P(-1)$.

Задача 2.64. Докажете, че коефициентите на квадратурната формула на Лобато с $n+2$ възела за интервала $[-1,1]$ и тегло $\sigma(x)\equiv 1$ удовлетворяват неравенствата

$$(0<)\ a_{k,n}^L<x_{k+1,n}-x_{k-1,n},\quad k=1,2,\ldots,n,$$

където $x_{1,n}<x_{2,n}<\ldots<x_{n,n}$ са нулите на $n-$тия ортогонален полином в $[-1,1]$ при тегло $\sigma(x)=1-x^2$ и $x_{0,n}:=-1$, $x_{n+1,n}=1$.

Задача 2.65. Да се докаже, че аналогични неравенства на тези от зад. 2.59 и 2.64 са валидни за коефициентите на квадратурната формула на Радо с $n+1$ възела за интервала $[-1,1]$ и тегло $\sigma(x)\equiv 1$.

Задача 2.66. Нека $K_2(Q_n^G;x)$, $K_2(Q_n^L;x)$ и $K_2(Q_n^R;x)$ са вторите ядра на Пеано за квадратурните формули съответно на Гаус, Лобато и Радо, използващи n вътрешни възела (за интервала (a,b)). Докажете, че:

а) $K_2(Q_n^G;x)$ има точно $2n-2$ прости нули в (a,b) ;

б) $K_2(Q_n^R;x)$ има точно $2n-1$ прости нули в (a,b) ;

в) $K_2(Q_n^L;x)$ има точно $2n$ прости нули в (a,b).

Задача 2.67. Докажете, че възлите и коефициентите на квадратурната формула на Гаус с n възела за интервала $[-1,1]$ и тегло $\sigma(x)\equiv 1$ удовлетворяват неравенствата

$$1+x_{j,n}<\sum_{k=1}^{j}a_{k,n}^G<1+x_{j+1,n},\quad j=1,\ldots,n, \tag{2.2}$$

където $\{x_{k,n}\}_{k=1}^n$ са наредените нули на $n-$тия полином на Льожандър.

Задача 2.68. Решете зад. 2.59, използувайки неравенствата (2.2).

Задача 2.69. Ако $f \in C^{2n}[-1,1]$ е такава, че
$$\max_{x\in[a,b]} |f^{(2n)}(x)| \le M,$$
докажете, че за грешката на Гаусовата квадратурна формула с n възела за интервала $[-1,1]$ и тегло $\sigma(x) \equiv 1$ е изпълнено
$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^{G} f(x_{k,n}) \right| \le M \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^2(2n+1)!}.$$

Задача 2.70. Да се запише формулата на Гаус за произволен интервал $[a,b]$ при тегло $\sigma(x) \equiv 1$. Каква е оценката за грешката?

Задача 2.71. Ако $f \in C^{2n+2}[-1,1]$ е такава, че
$$\max_{x\in[a,b]} |f^{(2n+2)}(x)| \le M,$$
докажете, че грешката на квадратурната формула на Лобато с $n+2$ възела за интервала $[-1,1]$ и тегло $\sigma(x) \equiv 1$ удовлетворява неравенството
$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \left[\sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^{L} f(x_{k,n}) + b_n^L f(-1) + c_n^L f(1) \right] \right|$$
$$\le M \frac{2^{2n+3} n! [(n+1)!]^2 (n+2)!}{[(2n+2)!]^2 (2n+3)!}.$$

Задача 2.72. Ако $f \in C^{2n+1}[-1,1]$ е такава, че
$$\max_{x\in[a,b]} |f^{(2n+1)}(x)| \le M,$$
докажете, че за грешката на квадратурната формула на Радо с $n+1$ възела за интервала $[-1,1]$ и тегло $\sigma(x) \equiv 1$ е изпълнено
$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \left[\sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^{R} f(x_{k,n}) + b_n^R f(-1) \right] \right| \le M \frac{2^{2n+2}[n!]^2[(n+1)!]^2}{[(2n+1)!]^2(2n+2)!}.$$
Същата оценка на грешката е валидна и за квадратурната формула на Радо, използуваща като възел 1 вместо -1.

Задача 2.73. Докажете, че в квадратурната формула на Радо с $n+1$ възела за интервала $[-1,1]$ и тегло $\sigma(x) \equiv 1$ коефициентът пред $f(-1)$ е
$$b_n^R = \frac{2}{(n+1)^2}.$$

Задача 2.74. Докажете, че в квадратурната формула на Лобато с $n+2$ възела за интервала $[-1,1]$ и тегло $\sigma(x) \equiv 1$ коефициентите пред $f(-1)$ и $f(1)$ са
$$b_n^L = c_n^L = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Задача 2.75. Докажете, че коефициентите $\{a_{k,n}^L\}_{k=1}^n$ и вътрешните възли $\{x_{k,n}\}_{k=1}^n$ на квадратурната формула на Лобато за интервала $[-1,1]$ и тегло $\sigma(x) \equiv 1$ удовлетворяват неравенствата
$$x_{k,n} + \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} \le \sum_{j=1}^{k} a_{j,n}^L \le x_{k+1,n} + \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}. \tag{2.3}$$

Задача 2.76. Докажете, че коефициентите $\{a^R_{k,n}\}_{k=1}^n$ и вътрешните възли $\{x_{k,n}\}_{k=1}^n$ на квадратурната формула на Радо за интервала $[-1,1]$ и тегло $\sigma(x)\equiv 1$ удовлетворяват неравенствата

$$x_{k,n}+\frac{n^2+2n-1}{(n+1)^2}\le\sum_{j=1}^k a^R_{j,n}\le x_{k+1,n}+\frac{n^2+2n-1}{(n+1)^2}. \tag{2.4}$$

Задача 2.77. Решете зад. 2.64 и 2.65, като използувате неравенствата (2.3) и (2.4).

Задача 2.78. Да се построи квадратурната формула на Гаус за интервала $[-1,1]$ при тегло $\sigma(x)\equiv 1$ за $n=2,3$. Дайте оценки за грешката.

Задача 2.79. Да се построи квадратурната формула на Гаус с 2 възела за интервала $[-1,1]$ при тегло $\sigma(x)=1-|x|$. Дайте оценка за грешката.

Задача 2.80. Да се построи квадратурната формула на Лобато за интервала $[-1,1]$ при тегло $\sigma(x)=\sqrt{1-x^2}$ за $n=2$. Дайте оценка за грешката.

Задача 2.81. Покажете, че формулата

$$\int_0^1 f(x)\,dx\approx\frac{1}{4}f(0)+\frac{3}{4}f(2/3)$$

е квадратурната формула на Радо за $n=1$, интервала $[0,1]$ и теглото $\sigma\equiv 1$. Докажете, че ако $f\in C^3[0,1]$, съществува $\xi\in[0,1]$, такова че

$$\int_0^1 f(x)\,dx-\left[\frac{1}{4}f(0)+\frac{3}{4}f(2/3)\right]=\frac{f'''(\xi)}{216}.$$

Задача 2.82. Изведете квадратурната формула на Радо за $n=2$, интервала $[-1,1]$ и теглото $\sigma\equiv 1$. Дайте оценка за грешката.

Задача 2.83. Покажете, че квадратурната формула на Симпсон е формулата на Лобато с един вътрешен възел за тегло $\sigma\equiv 1$.

Задача 2.84. Да се намери квадратурната формула на Лобато за $n=2$, интервала $[-1,1]$ и теглото $\sigma\equiv 1$. Дайте оценка за грешката.

Задача 2.85. Да се докаже, че формулата

$$\int_0^\infty e^{-x}f(x)\,dx\approx\frac{2+\sqrt{2}}{4}f(2-\sqrt{2})+\frac{2-\sqrt{2}}{4}f(2+\sqrt{2})$$

е точна за всички полиноми от степен ≤ 3, т. е. е Гаусова квадратурна формула.

Задача 2.86. Докажете, че формулата

$$I(f):=\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}f(x)\,dx\approx\frac{\sqrt{\pi}}{6}\left[f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+4f(0)+f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right]:=Q(f)$$

е Гаусова квадратурна формула, т. е. е точна за всички полиноми от степен ≤ 5.

По–нататък с $f|_A$ ще означаваме рестрикцията на функцията f върху множеството A, съдържащо се в дефиниционната област на f.

Задача 2.87. Нека $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n-1} = 1$ и нека

$$X := \{f \in C[0,1],\ f|_{(x_i,x_{i+1})} \in \pi_1,\ i = 0,1,\ldots,2n-2\}.$$

(Лесно се вижда, че X е линейно пространство с размерност $2n$.) Докажете, че Гаусовата квадратурна формула за пространството X е

$$I(f) := \int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_k f(\tau_k) =: Q_n^G(f),$$

където

$$a_1^G = \frac{x_1 + x_2 - 2x_0}{2}, \quad \tau_1 = \frac{x_1 x_2 - x_0^2}{x_1 + x_2 - 2x_0},$$

$$a_k^G = \frac{x_{2k-1} + x_{2k} - x_{2k-3} - x_{2k-2}}{2}, \quad \tau_k = \frac{x_{2k-1}x_{2k} - x_{2k-3}x_{2k-2}}{x_{2k-1} + x_{2k} - x_{2k-3} - x_{2k-2}},$$

$$k = 2,3,\ldots,n-1,$$

$$a_n^G = \frac{2x_{2n-1} - x_{2n-2} - x_{2n-3}}{2}, \quad \tau_n = \frac{x_{2n-1}^2 - x_{2n-3}x_{2n-2}}{2x_{2n-1} - x_{2n-2} - x_{2n-3}}.$$

Задача 2.88. Нека $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n} = 1$ и нека Y е линейното пространство с размерност $2n+1$, зададено с

$$Y := \{f \in C[0,1]\ \ f|_{(x_i,x_{i+1})} \in \pi_1,\ i = 0,1,\ldots,2n-1\}.$$

Докажете че, квадратурната формула на Радо за пространството Y е

$$I(f) := \int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_k^R f(\tau_k) + c^R f(1) =: Q_n^R(f),$$

където

$$a_1^R = \frac{x_1 + x_2 - 2x_0}{2}, \quad \tau_1 = \frac{x_1 x_2 - x_0^2}{x_1 + x_2 - 2x_0},$$

$$a_k^R = \frac{x_{2k-1} + x_{2k} - x_{2k-3} - x_{2k-2}}{2}, \quad \tau_k = \frac{x_{2k-1}x_{2k} - x_{2k-3}x_{2k-2}}{x_{2k-1} + x_{2k} - x_{2k-3} - x_{2k-2}},$$

$$k = 2,3,\ldots,n,$$

$$c^R = \frac{x_{2n} - x_{2n-1}}{2}.$$

Задача 2.89. Нека $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n+1} = 1$ и нека Z е линейното пространство с размерност $2n+2$, зададено със

$$Z := \{f \in C[0,1]:\ f|_{(x_i,x_{i+1})} \in \pi_1,\ i = 0,1,\ldots,2n\}.$$

Докажете, че квадратурната формула на Лобато за пространството Z е

$$I(f) := \int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_k^L f(\tau_k) + b^L f(0) + c^L f(1) =: Q_n^L(f),$$

където

$$a_k^L = \frac{x_{2k} + x_{2k+1} - x_{2k-1} - x_{2k-2}}{2}, \quad \tau_k = \frac{x_{2k}x_{2k+1} - x_{2k-2}x_{2k-1}}{x_{2k} + x_{2k+1} - x_{2k-1} - x_{2k-2}},$$

$$k = 1,\ldots,n,$$

$$b^L = \frac{x_1 - x_0}{2}, \quad c^L = \frac{x_{2n+1} - x_{2n}}{2}.$$

Задача 2.90. Докажете, че квадратурната формула

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\approx \frac{2}{2n-1}\left[\frac{3}{4}\left(f\left(\frac{2}{6n-3}\right)+f\left(\frac{6n-5}{6n-3}\right)\right)+\sum_{k=2}^{n-1} f\left(\frac{4k-3}{4n-2}\right)\right] =: \bar{Q}_n^G(f)$$

е точна за линейното пространство от функции с размерност $2n$

$$X := \{f \in C[0,1]:\ f|_{\left(i/(2n-1),(i+1)/(2n-1)\right)} \in \pi_1,\ i=0,1,\dots,2n-2\}.$$

Докажете, че за грешката на тази формула в класа W_∞^2 е изпълнено

$$\sup_{f\in W_\infty^2}\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \bar{Q}_n^G(f)\right| = \frac{n-1}{4(2n-1)^3}M.$$

Задача 2.91. Докажете, че квадратурната формула

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{3}{4n} f\left(\frac{1}{3n}\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{4k-3}{4n}\right) + \frac{1}{4n} f(1) =: \bar{Q}_n^R(f)$$

е точна за линейното пространство от функции с размерност $2n+1$

$$Y := \{f \in C[0,1]:\ f|_{\left(i/(2n),(i+1)/(2n)\right)} \in \pi_1,\ i=0,1,\dots,2n-1\}.$$

Докажете, че за грешката на тази формула в класа W_∞^2 е изпълнено

$$\sup_{f\in W_\infty^2}\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \bar{Q}_n^R(f)\right| = \frac{3n-1}{96n^3}M.$$

Задача 2.92. Докажете, че квадратурната формула

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{2}{2n+1}\left[\frac{1}{4}(f(0)+f(1)) + \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{4k-1}{2(2n+1)}\right)\right] =: \bar{Q}_n^L(f)$$

е точна за линейното пространство от функции с размерност $2n+2$

$$Z := \{f \in C[0,1]:\ f|_{\left(i/(2n+1),(i+1)/(2n+1)\right)} \in \pi_1,\ i=0,1,\dots,2n\}.$$

Докажете, че за грешката на тази формула в класа W_∞^2 е изпълнено

$$\sup_{f\in W_\infty^2}\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \bar{Q}_n^L(f)\right| = \frac{3n+1}{12(2n+1)^3}M.$$

Задача 2.93. Докажете, че квадратурната формула на Гаус за пространството от сплайни от степен 1 с възли

$$x_0 = 0,\ x_{2n-1} = 1 \text{ и } x_{2k-1} = \frac{4k-1}{4n},\ x_{2k} = \frac{4k+1}{4n},\quad k=1,\dots,n-1,$$

е

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{15}{32n}\right) + f\left(1-\frac{15}{32n}\right) + \sum_{k=2}^{n-1} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right] =: Q_n^{GT}(f).$$

За грешката на тази квадратурна формула в W_∞^2 докажете

$$\sup_{f\in W_\infty^2}\left|\int_0^1 f(x)\,dx - Q_n^{GT}(f)\right| = \left(\frac{1}{32}n^{-2} + \frac{29}{3072}n^{-3}\right)M.$$

РЕШЕНИЯ, УПЪТВАНИЯ И ОТГОВОРИ

2.1. ПРИБЛИЖЕНО ПРЕСМЯТАНЕ НА ОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ ЧРЕЗ РАЗВИВАНЕ НА ПОДИНТЕГРАЛНАТА ФУНКЦИЯ В РЕД

2.1. От развитието на $\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}$ в ред на Маклорен следва

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{0,5} \frac{\mathrm{tg}x}{x}\,dx = \int_0^{0,5}\left[1+\frac{x^2}{3}+\frac{2x^4}{15}+\frac{17x^6}{315}+\frac{62x^8}{2835}+\cdots\right]dx \\ &\approx 0,5+\frac{1}{9}(0,5)^3+\frac{2}{75}(0,5)^5+\frac{17}{2205}(0,5)^7+\frac{62}{25515}(0,5)^9 = 0,5147872. \end{aligned}$$

(Знае се, че с точност до четвъртия знак $I = 0,5147$.)

2.2. а) П ъ р в о р е ш е н и е: Тъй като редът на Маклорен за $\sqrt{x}\sin x$ е равномерно сходящ (дори не само в [0,1]), имаме

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \sqrt{x}\sin x\,dx &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+3/2}}{(2k+1)!}\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!(2k+5/2)}. \end{aligned}$$

Полученият числов ред е алтернативен с намаляващ по абсолютна стойност общ член. За такива редове $|I-S_n| < |a_{n+1}|$, където $(-1)^n a_n$ е общият член на реда и S_n е $n-$тата му частична сума. В конкретния случай

$$\left|\int_0^1 \sqrt{x}\sin x\,dx - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!(2k+5/2)}\right| < \frac{1}{(2n+3)!(2n+9/2)}.$$

Ето защо достатъчно е да изберем най-малкото n, за което

$$\frac{1}{(2n+3)!(2n+9/2)} < 10^{-5},$$

т. е. $n=3$. Изпълнено е

$$I \approx \frac{1}{2,5} - \frac{1}{3!(2+2,5)} + \frac{1}{5!(4+2,5)} - \frac{1}{7!(6+2,5)} = 0,364221671,$$

и при това $|I - 0,364221671| < 3.10^{-7}$.

В т о р о р е ш е н и е: Ако използуваме остатъчния член във формулата на Тейлор, имаме

$$\int_0^1 \sqrt{x}\sin x\,dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!(2k+5/2)} + R_n,$$

където

$$R_n = \int_0^1 \sqrt{x}(-1)^{n+1}\sin\theta_x \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\,dx, \quad 0 \le \theta_x \le 1.$$

По теоремата за средните стойности при някакво θ, $0 \le \theta \le 1$,

$$|R_n| = \frac{\sin\theta}{(2n+2)!}\int_0^1 \sqrt{x}\,x^{2n+2}\,dx < \frac{1}{(2n+2)!(2n+7/2)}$$

(малко по-слаба оценка отколкото при първото решение), след което отново заключаваме, че $n = 3$ ще ни гарантира желаната точност.

б) От развитието на $\dfrac{\sin x}{x}$ в ред на Маклорен и почленно интегриране получаваме

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!(2k+1)}$$

и, както при решението на а), изпълнено е неравенството

$$\left|\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!(2k+1)}\right| < \frac{1}{(2n+3)!(2n+3)}$$

и е достатъчно n да бъде такова, че $\dfrac{1}{(2n+3)!(2n+3)} \leq 10^{-5}$, откъдето определяме $n = 3$ и

$$I \approx 1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} - \frac{1}{7!7} = 0,946082766, \quad \text{и} \quad |I - 0,946082766| < 3,1\,.10^{-7}.$$

Направете оценка и като използувате остатъчния член в реда на Маклорен.

в) Използувайки развитието

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{-1/2}{k}x^{4k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1.3.\ldots.(2k-1)}{2^k k!}x^{4k},$$

валидно за всяко $x \in (-1,1)$, получаваме след почленно интегриране

$$I = \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1.3.\ldots.(2k-1)}{2^{5k+1}k!(4k+1)}.$$

Тъй като редът в дясната страна на последното равенство е алтернативен с намаляващ по абсолютна стойност общ член, изпълнено е неравенството

$$\left|\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{1.3.\ldots.(2k-1)}{2^{5k+1}k!(4k+1)}\right| < \frac{1.3.\ldots.(2n+1)}{2^{5n+6}(n+1)!(4n+5)}$$

и е достатъчно дясната страна да не надминава 10^{-5}, което е изпълнено при $n = 2$, затова

$$I \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{5.64} + \frac{1}{3.2^{12}} = 0,49695638, \quad \text{и} \quad |I - 0,49695638| < 6,5\,.10^{-6}.$$

г) Имаме

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^k}{k!}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!(2k+1)}$$

и най-малкото n, за което е изпълнено $\dfrac{1}{(n+1)!(2n+3)} < 10^{-5}$, е $n = 7$, затова

$$I \approx 1 - \frac{1}{1!3} + \frac{1}{2!5} - \frac{1}{3!7} + \frac{1}{4!9} - \frac{1}{5!11} + \frac{1}{6!13} - \frac{1}{7!15} = 0,746822806,$$

и $|I - 0,746822806| < 1,5\,.10^{-6}$.

2.3. а) Вижда се, че

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+1/n} + \frac{1}{1+2/n} + \cdots + \frac{1}{1+n/n}\right]$$

е Риманова сума за $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, и затова търсената граница е равна на стойността на този интеграл, т. е. на $\ln 2 = 0,69314718\ldots$ За да оценим величината $|S_n - \ln 2|$, използуваме факта, че $\dfrac{1}{1+x}$ е намаляваща функция, следователно за $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+k/n} > \int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{dx}{1+x} > \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+(k+1)/n}$$

и затова

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} > \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k+1} = S_n,$$

и $0 < \ln 2 - S_n < \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1}\right] = \frac{1}{2n}.$

б) Отново

$$S_n = n\left[\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+4} + \ldots + \frac{1}{n^2+n^2}\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(k/n)^2}$$

е Риманова сума за $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ и затова $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{4} = 0,785398163\ldots$ Тъй като подинтегралната функция е намаляваща в $(0,1)$, изпълнено е

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+(k/n)^2} > \int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{dx}{1+x^2} > \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+((k+1)/n)^2},$$

следователно

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(k/n)^2} > \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} > \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+((k+1)/n)^2} = S_n$$

и $0 < \dfrac{\pi}{4} - S_n < \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{1+(k/n)^2} - \frac{1}{1+((k+1)/n)^2}\right] = \frac{1}{2n}.$

2.6. За да определим коефициентите A, B и C, са ни нужни три уравнения. Това са уравненията, които се получават от изискването квадратурната формула да бъде точна за $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2.$ Имаме

$$\begin{aligned}
2h &= \int_0^{2h} 1\,dx = h(A+B+C),\\
\frac{(2h)^2}{2} &= \int_0^{2h} x\,dx = h(Bh + 2Ch),\\
\frac{(2h)^3}{3} &= \int_0^{2h} x^2\,dx = h(Bh^2 + 4Ch^2).
\end{aligned}$$

Решаваме тази линейна система и получаваме $A = C = 1/3$, $B = 4/3$, следователно формулата има вида

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(0) + 4f(h) + f(2h)\right].$$

Това очевидно е формулата на Симпсон за интервала $[0, 2h]$. Съгласно зад. 2.4 в) тя има алгебрична степен на точност 3.

2.7. Опитваме се да определим параметрите a, b и c от условието формулата да е точна за първите три степени на x: $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2$. Получаваме системата

$$\begin{aligned}
2h &= \int_{-h}^{h} 1\,dx = 2c,\\
0 &= \int_{-h}^{h} x\,dx = c(ah + bh),\\
\frac{2h^3}{3} &= \int_{-h}^{h} x^2\,dx = c[(ah)^2 + (bh)^2].
\end{aligned}$$

Оттук намираме $c = h$, $a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $b = -a$. Търсената формула е от вида

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx h\left[f\left(-\frac{h}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)\right].$$

Веднага се вижда, че тя е точна и за $f(x) = x^3$. При $f(x) = x^4$ имаме

$$\frac{2h^5}{5} = \int_{-h}^{h} x^4\,dx \neq h\left[f\left(-\frac{h}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{2h^5}{9}.$$

Следователно алгебричната точност на формулата е 3.

2.8. Ще се опитаме да определим параметрите A, a, b, c и d от условието формулата да бъде точна за $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Получаваме системата

$$\begin{aligned}
4 &= \int_{-2}^{2} 1\,dx = 4A;\\
0 &= \int_{-2}^{2} x\,dx = A(a + b + c + d);\\
\frac{16}{3} &= \int_{-2}^{2} x^2\,dx = A(a^2 + b^2 + c^2 + d^2);\\
0 &= \int_{-2}^{2} x^3\,dx = A(a^3 + b^3 + c^3 + d^3);\\
\frac{64}{5} &= \int_{-2}^{2} x^4\,dx = A(a^4 + b^4 + c^4 + d^4).
\end{aligned}$$

От първото уравнение се вижда, че $A = 1$. Да въведем полинома

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$$

и нека $S_i = a^i + b^i + c^i + d^i$. По известните връзки на Нютон

$$0 = S_1 + a_1 = a_1; \qquad 0 = S_2 + a_1 S_1 + 2a_2 = \frac{16}{3} + 2a_2;$$

$$0 = S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3a_3 = 3a_3; \quad 0 = S_4 + a_1 S_3 + a_2 S_2 + a_3 S_1 + 4a_4 = \frac{64}{3} + a_2 \frac{16}{3} + 4a_4.$$

Решаваме тази система и получаваме $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = -\frac{8}{3}$ и $a_4 = \frac{16}{45}$, следователно имаме $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = x^4 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{16}{45}$. Оттук

$$a = -\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{8}{3\sqrt{5}}}, \quad b = -\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{8}{3\sqrt{5}}}, \quad c = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{8}{3\sqrt{5}}}, \quad d = \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{8}{3\sqrt{5}}}.$$

Веднага се вижда, че така получената формула е точна и за $f(x) = x^5$. За $f(x) = x^6$ имаме

$$\frac{256}{7} = \int_{-2}^{2} x^6\, dx \neq 2\left[\left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3\sqrt{5}}\right)^3 + \left(\frac{4}{3} + \frac{8}{3\sqrt{5}}\right)^3\right] = \frac{256.17}{135}.$$

Следователно алгебричната степен на точност на формулата е 5.

2.9. Коефициентите A, B, C, D и E се определят от условието формулата да бъде точна за функциите $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Получаваме системата

$$\begin{aligned}
2h &= \int_0^{2h} 1\, dx = h(A + B + C),\\
2h^2 &= \int_0^{2h} x\, dx = h(Bh + 2Ch) + h^2(D + E),\\
\frac{8h^3}{3} &= \int_0^{2h} x^2\, dx = h(Bh^2 + 4Ch^2) + h^2 E.4h,\\
4h^4 &= \int_0^{2h} x^3\, dx = h(Bh^3 + 8Ch^3) + h^2 12h^2 E,\\
\frac{32h^5}{5} &= \int_0^{2h} x^4\, dx = h(Bh^4 + 16Ch^4) + h^2 32h^3 E.
\end{aligned}$$

Решаваме тази система и намираме

$$A = C = \frac{7}{15}, \quad B = \frac{16}{15}, \quad D = -E = \frac{1}{15},$$

следователно търсената квадратурна формула е

$$\int_0^{2h} f(x)\, dx \approx \frac{h}{15}[7.f(0) + 16.f(h) + 7.f(2h)] + \frac{h^2}{15}[f'(0) - f'(2h)].$$

Проверява се, че така получената формула е точна и за $f(x) = x^5$, докато за $f(x) = x^6$ имаме

$$\frac{128\, h^7}{7} = \int_0^{2h} x^6\, dx \neq h\left(\frac{16}{15}h^6 + \frac{7}{15}64\, h^6\right) - h^2\left(\frac{1}{15}192h^5\right) = \frac{272}{15}h^7.$$

Следователно алгебричната степен на точност на формулата е 5.

2.10. Определяме A и B от условието формулата да бъде интерполационна, т. е. да е точна за $f(x) = 1,\ x$. Получаваме

$$\operatorname{arctg} h = \int_0^h \frac{dx}{1+x^2} = A + B, \quad \frac{1}{2}\ln(1+h^2) = \int_0^h \frac{x\,dx}{1+x^2} = Bh.$$

Оттук $A = \operatorname{arctg} h - \frac{1}{2h}\ln(1+h^2)$, $B = \frac{1}{2h}\ln(1+h^2)$. При $f(x) = x^2$ така получената формула не е точна. Наистина

$$\int_0^h \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = h - \operatorname{arctg} h < \frac{h}{2}\ln(1+h^2) \quad (h > 0).$$

Следователно нейната алгебрична степен на точност е равна на 1.

2.11. Избираме коефициентите така, че формулата да бъде точна за $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Получаваме системата

$$\begin{aligned}
2h &= \int_{-h}^h 1\,dx = h(a_1 + a_2 + a_3),\\
0 &= \int_{-h}^h x\,dx = h^2(-a_1 + a_3) + h^2(b_1 + b_2 + b_3),\\
\frac{2h^3}{3} &= \int_{-h}^h x^2\,dx = h^3(a_1 + a_3) + h^3(-2b_1 + 2b_3),\\
0 &= \int_{-h}^h x^3\,dx = h^4(-a_1 + a_3) + h^4(3b_1 + 3b_3),\\
\frac{2h^5}{5} &= \int_{-h}^h x^4\,dx = h^5(a_1 + a_3) + h^5(-4b_1 + 4b_3),\\
0 &= \int_{-h}^h x^5\,dx = h^6(-a_1 + a_3) + h^6(5b_1 + 5b_3).
\end{aligned}$$

Решаваме тази система и намираме

$$a_1 = a_3 = \frac{7}{15}, \quad a_2 = \frac{16}{15}, \quad b_1 = -b_3 = \frac{1}{15}, \quad b_2 = 0,$$

т. е. получаваме квадратурната формула

$$\int_{-h}^h f(x)\,dx \approx \frac{h}{15}[7f(-h) + 16f(0) + 7f(h)] + \frac{h^2}{15}[f'(-h) - f'(h)] := Q(f).$$

Проверката показва, че за $f(x) = x^6$ $\frac{2h^7}{7} = \int_{-h}^h x^6\,dx \neq Q(x^6) = \frac{2h^7}{15}$, следователно така получената формула има алгебрична степен на точност 5 (сравнете с квадратурната формула от зад. 2.9).

2.12. Достатъчно е да се провери, че формулата е точна за полиномите $1,\ x,\ x^2$ и x^3. Получаваме

$$\begin{aligned}
h &= \int_0^h dx \approx h,\\
\frac{h^2}{2} &= \int_0^h x\,dx \approx \frac{h}{2}(0+h) = \frac{h^2}{2},\\
\frac{h^3}{3} &= \int_0^h x^2\,dx \approx \frac{h}{2}(0+h^2) - \frac{h^2}{24}(2+2) = \frac{h^3}{3},\\
\frac{h^4}{4} &= \int_0^h x^3\,dx \approx \frac{h}{2}(0+h^3) - \frac{h^3}{24}(0+6h) = \frac{h^4}{4}.
\end{aligned}$$

Формулата не е точна за $f(x) = x^4$, защото

$$\frac{h^5}{5} = \int_0^h x^4\,dx \approx \frac{h}{2}(0+h^4) - \frac{h^3}{24}(0+12h^2) = 0.$$

2.13. Търсим такива коефициенти a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, че квадратурната формула

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx a_0 f(0) + b_0 f(h) + a_1 f'(0) + b_1 f'(h) + a_2 f''(0) + b_2 f''(h)$$

да е точна за полиномите x^k, $k = 0, \ldots, 5$. Получаваме системата уравнения

$$\begin{aligned}
&h = a_0 + b_0, && \frac{h^2}{2} = b_0 h + a_1 + b_1,\\
&\frac{h^3}{3} = b_0 h^2 + 2b_1 h + 2a_2 + 2b_2, && \frac{h^4}{4} = b_0 h^3 + 3b_1 h^2 + 6b_2 h,\\
&\frac{h^5}{5} = b_0 h^4 + 4b_1 h^3 + 12 b_2 h^2, && \frac{h^6}{6} = b_0 h^5 + 5b_1 h^4 + 20 b_2 h^3.
\end{aligned}$$

От 4-ото и 5-ото уравнение и от 5-ото и 6-ото уравнение, елиминирайки b_0, получаваме връзките $b_1 h + 6b_2 = -h^3/20$, $b_1 h + 8b_2 = -h^3/30$, откъдето намираме $b_1 = -h^2/10$, $b_2 = h^3/120$. От 6-ото уравнение определяме $b_0 = h/2$. По-нататък последователно намираме от 1-вото, 2-рото и 3-тото уравнение на системата $a_0 = h/2$, $a_1 = h^2/10$, $a_2 = h^3/120$.

2.14. Непосредствената проверка показва, че формулата е точна за всяка от функциите 1, x, x^2.

2.3. СЪСТАВНИ КВАДРАТУРНИ ФОРМУЛИ. ОЦЕНКА НА ГРЕШКАТА

2.15. Съгласно дефиницията на $n-$тата съставна квадратурна формула върху всеки от интервалите $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $k = 0, \ldots, n-1$, се прилага базисната квадратурна формула, след което се сумират резултатите от тях. Имаме

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^1 f\left(\frac{k+u}{n}\right)du \approx Q\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k+\cdot}{n}\right)\right), \ k = 0, \ldots, n-1.$$

Тогава

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,dx$$

$$\approx \sum_{k=0}^{n-1} Q\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k+\cdot}{n}\right)\right) = Q\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+\cdot}{n}\right)\right) = Q(\varphi_n).$$

(В последното равенство сме използували линейността на Q.)

2.16. Съгласно дефиницията си ядрото на Пеано за квадратурната формула е

$$K_r(Q;t) = \int_a^b \frac{(x-t)_+^{r-1}}{(r-1)!}\,dx - \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{(x_k-t)_+^{r-1}}{(r-1)!}$$

$$= \int_t^b \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!}\,dx - \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{(x_k-t)_+^{r-1}}{(r-1)!} = \frac{(b-t)^r}{r!} - \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{(x_k-t)_+^{r-1}}{(r-1)!},$$

с което формулата а) е доказана. За да докажем формулата б), ще използуваме тъждеството

$$(x-t)_+^{r-1} = (x-t)^{r-1} + (-1)^r (t-x)_+^{r-1}.$$

То се установява, като се разгледат поотделно случаите $x \ge t$ и $x < t$ и се приложи дефиницията за отсечената степенна функция. Наистина при $x \ge t$ имаме $(x-t)_+^{r-1} = (x-t)^{r-1}$, $(t-x)_+^{r-1} = 0$ и двете страни са идентични. При $x < t$ $(x-t)_+^{r-1} = 0$, $(t-x)_+^{r-1} = (t-x)^{r-1} = (-1)^{r-1}(x-t)^{r-1}$ и отново имаме $0 \equiv 0$. Тогава, отчитайки, че квадратурната формула е точна за $f(x) = (x-t)^{r-1}$, получаваме

$$K_r(Q;t) = \int_a^b \frac{(x-t)^{r-1} + (-1)^r (t-x)_+^{r-1}}{(r-1)!}\,dx - Q\left(\frac{(\cdot-t)^{r-1} + (-1)^r (t-\cdot)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right)$$

$$= \int_a^b \frac{(-1)^r (t-x)_+^{r-1}}{(r-1)!}\,dx - Q\left(\frac{(-1)^r (t-\cdot)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right)$$

$$= (-1)^r \left[\frac{(t-a)^r}{r!} - \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{(t-x_k)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right],$$

с което и формулата б) е установена.

2.17. Използувайки формулата б) от зад. 2.16 и

$$\frac{d}{dt}(t-\alpha)_+^{r-1} = (r-1)(t-\alpha)_+^{r-2},$$

получаваме $K_r^{(r-1)}(Q;t) = (-1)^r \left[t - a - \sum_{k=0}^{n} a_k (t-x_k)_+^0\right]$, откъдето

$$K_r^{(r-1)}(Q;x_j+0) - K_r^{(r-1)}(Q;x_j-0) = (-1)^{r+1}\left[\sum_{k=0}^{j-1} a_k - \sum_{k=0}^{j} a_k\right] = (-1)^r a_j.$$

2.18. Следва от $\frac{d}{dt}(t-\alpha)_+^{r-1} = (r-1)(t-\alpha)_+^{r-2}$ и от представянето б) на $K_r(Q;t)$ от зад. 2.16.

2.19. Формулата на трапеците се получава от интегрирането на интерполационния полином на Лагранж

$$P_1(f;x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

За $x \in [a,b]$ е изпълнено

$$|f(x) - P_1(f;x)| \le \frac{b-x}{b-a}|f(x)-f(a)| + \frac{x-a}{b-a}|f(x)-f(b)| \le \omega(f; b-a).$$

Следователно

$$|I(f) - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b P_1(f;x)\,dx \right|$$

$$\le \int_a^b |f(x) - P_1(f;x)|\,dx \le (b-a)\omega(f;b-a).$$

За да получим оценката за съставната формула на трапеците, използваме последното неравенство, приложено за интервалите

$$\left[a + k\frac{b-a}{n},\ a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right],\ k = 0,\dots,n-1,$$

а именно

$$|I(f) - Q^n{}_{\text{тр}}(f)| \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n}\omega\left(f; \frac{b-a}{n}\right) = (b-a)\omega\left(f; \frac{b-a}{n}\right).$$

2.20. Ще използуваме представянето б) от зад. 2.16. Тъй като формулата е симетрична, изпълнени са $a+b-t-x_k = x_{n+1-k} - t$ и $a_k = a_{n+1-k}$. Имаме

$$\begin{aligned} K_r(Q; a+b-t) &= (-1)^r \left[\frac{(a+b-t-a)^r}{r!} - \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{(a+b-t-x_k)_+^{r-1}}{(r-1)!} \right] \\ &= (-1)^r \left[\frac{(b-t)^r}{r!} - \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} \frac{(x_{n+1-k}-t)_+^{r-1}}{(r-1)!} \right] \\ &= (-1)^r \left[\frac{(b-t)^r}{r!} - \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{(x_k-t)_+^{r-1}}{(r-1)!} \right] = (-1)^r K_r(Q;t) \end{aligned}$$

съгласно представянето а) от зад. 2.16.

2.21. Имаме

$$\int_a^b |K_r(Q;x)|\,dx = \int_a^{(a+b)/2} |K_r(Q;x)|\,dx + \int_{(a+b)/2}^b |K_r(Q;x)|\,dx.$$

Във втория интеграл правим смяната $x = a+b-t$ и получаваме

$$\int_{(a+b)/2}^b |K_r(Q;x)|\,dx = \int_a^{(a+b)/2} |K_r(Q;a+b-t)|\,dt = \int_a^{(a+b)/2} |K_r(Q;x)|\,dx$$

съгласно зад. 2.20. Оттук

$$\int_a^b |K_r(Q;x)|\,dx = 2\int_a^{(a+b)/2} |K_r(Q;x)|\,dx.$$

2.22. Съгласно зад. 2.15 $n-$тата съставна квадратурна формула $S_n(f)$, получена на базата на Q, може да се представи като

$$Q(\varphi_n) = Q\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+\cdot}{n}\right)\right).$$

Тогава съгласно теоремата на Пеано ще бъде изпълнено

$$\int_0^1 f(x)\,dx - S_n(f) = \int_0^1 f(x)\,dx - Q(\varphi_n) = \int_0^1 K_r(Q;x)\varphi_n^{(r)}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 K_r(Q;x) f^{(r)}\left(\frac{k+x}{n}\right)dx$$

$$= \frac{1}{n^r}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} K_r(Q;nx-k) f^{(r)}(x)\,dx = \int_0^1 K_r(S_n;x) f^{(r)}\,dx,$$

откъдето получаваме желаната формула.

2.23. Без ограничение върху общността на разсъжденията можем да считаме $[a,b] \equiv [0,1]$. Използуваме следствие 2.1 от теоремата на Пеано и зад. 2.15:

$$\sup_{f\in W_\infty^r[0,1]}\left|\int_0^1 f(x)\,dx - Q(f)\right| = M\int_0^1 |K_r(Q;x)|\,dx = A,$$

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - S_n(f)\right| = \left|\int_0^1 K_r(Q;x)\varphi_n^{(r)}(x)\,dx\right|.$$

Тъй като

$$\varphi_n^{(r)}(x) = \frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=0}^{n-1} f^{(r)}\left(\frac{k+x}{n}\right),$$

заключаваме, че функцията $n^r\varphi(x)$ е от класа $W_\infty^r[0,1]$. Оттук

$$\sup_{f\in W_\infty^r[0,1]}\left|\int_0^1 f(x)\,dx - S_n(f)\right| = \frac{1}{n^r}M\int_0^1 |K_r(Q;x)|\,dx = \frac{A}{n^r},$$

с което доказателството е завършено.

2.24. Фактът, че $\tau\in(0,1)$ е нула на $K_r(Q;x)$, означава (вж. зад. 2.16 б)), че

$$\frac{\tau^r}{r!} - \sum_{k=0}^{n} a_k\frac{(\tau-x_k)_+^{r-1}}{(r-1)!} = 0.$$

От друга страна,

$$\int_0^1 \frac{(x-\tau)_+^{r-1}}{(r-1)!}\,dx - Q\left(\frac{(\cdot-\tau)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right)$$

$$= \int_\tau^1 \frac{(x-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}\,dx - \sum_{k=1}^{n} a_k\frac{(\tau-x_k)_+^{r-1}}{(r-1)!} = K_r(Q;\tau) = 0,$$

което показва, че разглежданата квадратурна формула е точна за функцията $f(x) = \dfrac{(x-\tau)_+^{r-1}}{(r-1)!}$, а значи и за $(x-\tau)_+^{r-1}$. Условието $\tau\in(0,1)$ да е $s-$кратна нула на $K_r(Q;x)$ означава, че $K_r^{(j)}(Q;\tau)=0,\ j=0,\dots,s-1$, което съгласно зад. 2.18 е еквивалентно на $K_{r-j}(Q;\tau)=0,\ j=0,\dots,s-1$. Това влече от току–що доказаното квадратурната формула да бъде точна за функциите $f_j(x) = (x-\tau)_+^{r-j}$, $j = 1, \dots, s$, с което е доказано твърдението в общия случай.

2.25. а) П ъ р в о   р е ш е н и е: За функциите от $W^1_\infty[a,b]$ са изпълнени неравенствата $f(\xi) - M|x-\xi| \le f(x) \le f(\xi) + M|x-\xi|$ почти за всички $x \in [a,b]$. Ето защо

$$R(\xi) = \sup_{f \in W^1_\infty[a,b]} \left| \int_a^b f(x)\,dx - f(\xi)(b-a) \right|$$

$$= \sup_{f \in W^1_\infty[a,b]} \left| \int_a^b [f(x) - f(\xi)]\,dx \right| \le \sup_{f \in W^1_\infty[a,b]} \int_a^b |f(x) - f(\xi)|\,dx$$

$$\le \int_a^b M|x-\xi|\,dx = \frac{M}{2}[(b-\xi)^2 + (\xi-a)^2].$$

Лесно се проверява, че $\displaystyle\min_{a \le \xi \le b} R(\xi) = R\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{M}{4}(b-a)^2$ (т. е. най-малка грешка има симетричната формула на правоъгълниците).

В т о р о   р е ш е н и е (за симетричната формула на правоъгълниците): Формулата

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = Q_{\text{пр}}(f)$$

има ядро на Пеано

$$K_1(Q_{\text{пр}}; x) = -\left[(x-a) - (b-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)_+^0\right], \ a \le x \le b.$$

Съгласно следствие 2.1 от теоремата на Пеано грешката се задава с

$$M \int_a^b |K_1(Q_{\text{пр}}; x)|\,dx.$$

Поради симетрията можем да приложим зад. 2.21:

$$\sup_{f \in W^1_\infty[a,b]} \left| \int_a^b f(x)\,dx - Q_{\text{пр}}(f) \right| = M \int_a^b |K_1(Q_{\text{пр}}; x)|\,dx$$

$$= 2M \int_a^{(a+b)/2} |K_1(Q_{\text{пр}}; x)|\,dx = 2M \int_a^{(a+b)/2} (x-a)\,dx = M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

б) За формулата на трапеците ядрото на Пеано е

$$K_1(Q_{\text{тр}}; x) = (b-x) - \frac{b-a}{2}[(a-x)_+^0 + (b-x)_+^0] = \frac{a+b}{2} - x, \quad a \le x \le b.$$

Тя е симетрична, затова

$$\sup_{f \in W^1_\infty[a,b]} \left| \int_a^b f(x)\,dx - Q_{\text{тр}}(f) \right| = 2M \int_a^{(a+b)/2} \left(\frac{a+b}{2} - x\right)dx = M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

в) За формулата на Симпсон ядрото на Пеано е

$$K_1(Q_{\text{C}};x) = (b-x) - \frac{b-a}{6}\left[(a-x)_+^0 + 4\left(\frac{a+b}{2}-x\right)_+^0 + (b-x)_+^0\right],$$

или след извършване на опростявания

$$K_1(Q_{\text{C}};x) = \begin{cases} \dfrac{5a+b}{6} - x & \text{за} \quad a \le x \le \dfrac{a+b}{2}, \\ x - \dfrac{a+5b}{6} & \text{за} \quad \dfrac{a+b}{2} \le x \le b. \end{cases}$$

Вижда се, че $K_1(Q_{\text{C}};x)$ сменя два пъти знака си в (a,b). Формулата на Симпсон е симетрична, затова

$$\int_a^b |K_1(Q_{\text{C}};x)|\,dx = 2\int_a^{(a+b)/2} |K_1(Q_{\text{C}};x)|\,dx$$

$$= 2\left[\int_a^{(5a+b)/6} K_1(Q_{\text{C}};x)\,dx - \int_{(5a+b)/6}^{(a+b)/2} K_1(Q_{\text{C}};x)\,dx\right]$$

$$= -\left((5a+b)/6 - x\right)^2\Big|_a^{(5a+b)/6} + \left((5a+b)/6 - x\right)^2\Big|_{(5a+b)/6}^{(a+b)/2} = \frac{5(b-a)^2}{36}.$$

Следователно

$$\sup_{f\in W_\infty^1[a,b]} \left|\int_a^b f(x)\,dx - Q_{\text{C}}(f)\right| = M\frac{5(b-a)^2}{36}.$$

За да намерим грешките на съответните съставни квадратурни формули, използуваме зад. 2.23. Грешката на $n-$тите съставни квадратурни формули са:

$$M\frac{(b-a)^2}{4n} \tag{2.5}$$

за формулите на правоъгълниците и трапеците и

$$M\frac{5(b-a)^2}{36n} \tag{2.6}$$

за формулата на Симпсон.

2.26. а) Квадратурната формула на правоъгълниците има ядро на Пеано

$$\begin{aligned} K_2(Q_{\text{пр}};x) &= \frac{(x-a)^2}{2!} - (b-a)\big(x-(a+b)/2\big)_+ \\ &= \begin{cases} \dfrac{(x-a)^2}{2!} & \text{за} \quad a \le x \le (a+b)/2; \\ \dfrac{(b-x)^2}{2!} & \text{за} \quad \dfrac{a+b}{2} \le x \le b. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.7}$$

В частност виждаме, че $K_2(Q_{\text{пр}};x) \ge 0$ за $x \in (a,b)$. За да оценим грешката в класа $W_\infty^2[a,b]$, прилагаме следствие 2.1 от теоремата на Пеано

$$\sup_{f\in W_\infty^2[a,b]} \left|\int_a^b f(x)\,dx - Q_{\text{пр}}(f)\right| = M\int_a^b |K_2(Q_{\text{пр}};x)|\,dx.$$

Тъй като формулата е симетрична, можем да приложим зад. 2.21, получавайки

$$\int_a^b |K_2(Q_{\text{пр}};x)|\,dx = 2\int_a^{(a+b)/2} |K_2(Q_{\text{пр}};x)|\,dx$$
$$= 2\int_a^{(a+b)/2} \frac{(x-a)^2}{2!}\,dx = \frac{(b-a)^3}{24},$$

ето защо

$$\sup_{f\in W^2_\infty[a,b]} \left|\int_a^b f(x)\,dx - Q_{\text{пр}}(f)\right| = M\frac{(b-a)^3}{24};$$

б) Квадратурната формула на трапеците

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] = Q_{\text{тр}}(f)$$

има ядро на Пеано

$$K_2(Q_{\text{тр}};x) = \frac{(b-x)^2}{2!} - \frac{b-a}{2}[(a-x)_+ + (b-x)_+] = \frac{(b-x)(a-x)}{2} \tag{2.8}$$

$(a \le x \le b)$, следователно $K_2(Q_{\text{тр}};x) \le 0,\ x\in(a,b)$. Прилагайки следствие 2.1 от теоремата на Пеано, получаваме

$$\sup_{f\in W^2_\infty[a,b]} \left|\int_a^b f(x)\,dx - Q_{\text{тр}}(f)\right| = M\int_a^b \frac{(b-x)(x-a)}{2}\,dx = M\frac{(b-a)^3}{12};$$

в) Ядрото на Пеано за квадратурната формула на Симпсон

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] =: Q_{\text{C}}(f)$$

е

$$K_2(Q_{\text{C}};x) = \frac{(x-a)^2}{2!} - \frac{b-a}{6}\left[(x-a)_+ + 4\left(x-\frac{a+b}{2}\right)_+ + (x-b)_+\right],$$

което след опростяване води до представянията

$$K_2(Q_{\text{C}};x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-a)\left(x-\frac{2a+b}{3}\right) & \text{за}\ \ a\le x\le \frac{a+b}{2},\\ \frac{1}{2}(b-x)\left(\frac{2b+a}{3}-x\right) & \text{за}\ \ \frac{a+b}{2}\le x\le b,\end{cases}$$

(2.9) или еквивалентно

$$K_2(Q_{\text{C}};x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-a)^2 - \frac{b-a}{6}(x-a) & \text{за}\ \ a\le x\le \frac{a+b}{2};\\ \frac{1}{2}(b-x)^2 - \frac{b-a}{6}(b-x) & \text{за}\ \ \frac{a+b}{2}\le x\le b.\end{cases}$$

(Тъй като квадратурната формула на Симпсон е симетрична, втората част може да се получи от първата, като се приложи зад. 2.20.) Вижда се че, ядрото има две смени на знака в (a,b), затова

$$\int_a^b |K_2(Q_{\text{C}};x)|\,dx = 2\int_a^{(a+b)/2} |K_2(Q_{\text{C}};x)|\,dx$$
$$= 2\left[-\int_a^{(2a+b)/3} K_2(Q_{\text{C}};x)\,dx + \int_{(2a+b)/3}^{(a+b)/2} K_2(Q_{\text{C}};x)\,dx\right]$$

$$= -2\left(\frac{(x-a)^3}{6} - \frac{b-a}{12}(x-a)^2\right)\Bigg|_a^{(2a+b)/3}$$

$$+2\left(\frac{(x-(2a+b)/3)^3}{6} + \frac{b-a}{12}\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)^2\right)\Bigg|_{(2a+b)/3}^{(a+b)/2} = \frac{(b-a)^3}{81}.$$

Следователно за грешката на формулата на Симпсон в $W_\infty^2[a,b]$ имаме

$$\sup_{f\in W_\infty^2[a,b]} \left|\int_a^b f(x)\,dx - Q_{\text{С}}(f)\right| = M\frac{(b-a)^3}{81}.$$

Грешките на $n-$тите съставни квадратури в класа $W_\infty^2[a,b]$, съгласно зад. 2.23 са съответно

$$\sup_{f\in W_\infty^2[a,b]} \left|\int_a^b f(x)\,dx - S^n_{\text{пр}}(f)\right| = M\frac{(b-a)^3}{24n^2} \tag{2.10}$$

за формулата на правоъгълниците;

$$\sup_{f\in W_\infty^2[a,b]} \left|\int_a^b f(x)\,dx - S^n_{\text{тр}}(f)\right| = M\frac{(b-a)^3}{12n^2} \tag{2.11}$$

за формулата на трапеците и

$$\sup_{f\in W_\infty^2[a,b]} \left|\int_a^b f(x)\,dx - S^n_{\text{С}}(f)\right| = M\frac{(b-a)^3}{81n^2} \tag{2.12}$$

за формулата на Симпсон.

2.27. В решението на зад. 2.26 беше показано, че ядрата $K_2(Q_{\text{пр}};x)$ и $K_2(Q_{\text{тр}};x)$ не сменят знака си в (a,b) (първото е положително, а второто отрицателно). Можем следователно да приложим следствие 2.2 от теоремата на Пеано, за да получим желаните представяния на грешките.

2.28. Условието функцията да е изпъкнала в $[a,b]$ се изразява аналитично с неравенствата

$$f(\lambda y + (1-\lambda)x) \le \lambda f(y) + (1-\lambda)f(x) \quad \text{за всеки } x,y\in[a,b] \quad \text{и } \lambda\in[0,1].$$

Ако направим смяната $x = \lambda b + (1-\lambda)a$, получаваме

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f(\lambda b + (1-\lambda)a)\,d\lambda$$

$$\le (b-a)\int_0^1 [\lambda f(b) + (1-\lambda)f(a)]\,d\lambda = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)],$$

с което второто неравенство е доказано. За да докажем първото неравенство, използваме факта, че поради изпъкналостта на f за всяко $x\in[a,b]$ имаме

$$f((a+b)/2) \le [f(x) + f(a+b-x)]/2.$$

Интегрирането на двете страни на това неравенство ни дава

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(a+b-x)\,dx\right] = \int_a^b f(x)\,dx,$$

с което и второто неравенство е доказано.

Задачата има проста геометрична интерпретация. Да предположим, че функцията f е положителна в $[a,b]$ и диференцируема в точката $\frac{a+b}{2}$.

Поради изпъкналостта на функцията хордата, свързваща крайните точки от графиката на функцията, е над самата графика, което показва, че формулата на трапеците дава оценка отгоре за $\int_a^b f(x)\,dx$. От друга страна, лицето на правоъгълника, изразено по формулата на правоъгълниците, е равно на лицето на правоъгълния трапец, ограничен от абсцисната ос, правите $x = a$ и $x = b$ и допирателната към графиката на функцията в точката с координати $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$. Остава да отбележим, че понеже функцията е изпъкнала, нейната графика е над тази допирателна.

2.29. Третото ядро на Пеано за формулата на Симпсон е

$$K_3(Q_{\mathrm{C}};x) = -\left[\frac{(x-a)^3}{3!} - \frac{b-a}{6}\left(\frac{(x-a)_+^2}{2!} + 4\frac{(x-(a+b)/2)_+^2}{2!} + \frac{(x-b)_+^2}{2!}\right)\right],$$

или след опростяване

$$K_3(Q_{\mathrm{C}};x) = \begin{cases} -\dfrac{(x-a)^2}{6}\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right) & \text{за } a \le x \le \dfrac{a+b}{2}, \\[2ex] -\dfrac{(b-x)^2}{6}\left(\dfrac{a+b}{2} - x\right) & \text{за } \dfrac{a+b}{2} \le x \le b. \end{cases}$$

Пресмятаме

$$\int_a^b |K_3(Q_{\mathrm{C}};x)|\,dx = 2\int_a^{(a+b)/2} |K_3(Q_{\mathrm{C}};x)|\,dx = \frac{(b-a)^4}{576}.$$

За оценка на грешката прилагаме следствие 2.1.

2.30. Ядрото на Пеано за квадратурната формула на Симпсон е

$$K_4(Q_{\mathrm{C}};x) = \frac{(x-a)^4}{4!} - \frac{b-a}{6}\left[\frac{(x-a)_+^3}{3!} + 4\frac{(x-(a+b)/2)_+^3}{3!} + \frac{(x-b)_+^3}{3!}\right]$$

и след извършване на опростявания

$$K_4(Q_{\mathrm{C}};x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^3}{3!}\left[\dfrac{x-a}{4} - \dfrac{b-a}{6}\right] & \text{за } a \le x \le \dfrac{a+b}{2}, \\[2ex] \dfrac{(b-x)^3}{3!}\left[\dfrac{b-x}{4} - \dfrac{b-a}{6}\right] & \text{за } \dfrac{a+b}{2} \le x \le b, \end{cases}$$

(2.13) или еквивалентно

$$K_4(Q_{\mathrm{C}};x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^3}{4!}\left(x - \dfrac{a+2b}{3}\right) & \text{за } a \le x \le \dfrac{a+b}{2}, \\[2ex] \dfrac{(b-x)^3}{4!}\left(\dfrac{2a+b}{3} - x\right) & \text{за } \dfrac{a+b}{2} \le x \le b. \end{cases}$$

Вижда се, че $K_4(Q_{\mathrm{C}};x)$ няма нули в (a,b), и поради симетрията

$$\sup_{f\in W^4_\infty[a,b]}\left|\int_a^b f(x)\,dx - Q_{\text{ C}}(f)\right| = 2M\int_a^{(a+b)/2} |K_4(Q_{\text{ C}};x)|\,dx$$

$$= -2M\int_a^{(a+b)/2}\left[\frac{(x-a)^4}{4!} - \frac{b-a}{6}\frac{(x-a)^3}{3!}\right]dx$$

$$= 2M\left[\frac{(b-a)^5}{2^5 4!3} - \frac{(b-a)^5}{2^5 5!}\right] = M\frac{(b-a)^5}{2880}.$$

Съгласно зад. 2.23 грешката на съставната формула на Симпсон е

$$\sup_{f\in W^4_\infty[a,b]}\left|\int_a^b f(x)\,dx - S^n_{\text{C}}(f)\right| = M\frac{(b-a)^5}{2880n^4}. \tag{2.14}$$

2.31. У п ъ т в а н е: Тъй като ядрото на Пеано $K_4(Q_{\text{ C}};x)$ е по–малко или равно на 0 в (a,b) (вж. (2.13)), прилагаме следствие 2.2 от теоремата на Пеано.

2.32. Имаме (вж. също зад. 2.5)

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{6}\left[f(0)+4f(1/2)+f(1)\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\int_0^1 f(x)\,dx - f(1/2)\right] + \frac{1}{3}\left[\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2}(f(0)+f(1))\right]$$

$$= \frac{2}{3}\frac{f''(\xi_1)}{24} - \frac{1}{3}\frac{f''(\xi_2)}{24} = \frac{1}{36}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)] = \frac{f'''(\eta)}{36}(\xi_1-\xi_2).$$

Тъй като $f\in W^3_\infty[0,1]$, от зад. 2.29 знаем

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{6}\left[f(0)+4f(1/2)+f(1)\right]\right| \le \frac{M}{576}.$$

Тогава от горното неравенство следва

$$\frac{m}{36}|\xi_1-\xi_2| \le \left|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{6}\left[f(0)+4f(1/2)+f(1)\right]\right| \le \frac{M}{576},$$

откъдето $|\xi_1-\xi_2| \le \min\left\{\dfrac{M}{16m},\,1\right\}$.

2.33. Дадените квадратурни формули се представят като линейни комбинации на квадратурните формули на правоъгълниците и трапеците, а именно

$$Q_1(f) := 2f(1/2) - \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] = 2Q_{\text{ пр}}(f) - Q_{\text{ тр}}(f),$$

$$Q_2(f) := \frac{4}{3}f(1/2) - \frac{1}{6}[f(0)+f(1)] = \frac{4}{3}Q_{\text{ пр}}(f) - \frac{1}{3}Q_{\text{ тр}}(f).$$

Ако означим $I(f) := \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ и използуваме зад. 2.27, получаваме

$$I(f) - Q_1(f) = 2[I(f) - Q_{\text{ пр}}(f)] - [I(f) - Q_{\text{ тр}}(f)] = 2\frac{f''(\xi_1)}{24} + \frac{f''(\xi_2)}{12}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2} = \frac{f''(\eta_1)}{6};$$

$$I(f) - Q_2(f) = \frac{4}{3}[I(f) - Q\ \text{пр}(f)] - \frac{1}{3}[I(f) - Q\ \text{тр}(f)]$$
$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{f''(\xi_1)}{24} + \frac{1}{3} \cdot \frac{f''(\xi_2)}{12} = \frac{1}{12}\left[\frac{2}{3}f''(\xi_1) + \frac{1}{3}f''(\xi_2)\right] = \frac{f''(\eta_2)}{12}.$$

Задачата може да се реши и като се изследват ядрата на Пеано за квадратурните формули, след което се приложи следствие 2.2 от теоремата на Пеано.

2.34. Ядрото на Пеано за разглежданата квадратурна формула е

$$K_2(Q;x) = \frac{x^2}{2!} - \frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)_+ + \left(x - \frac{3}{4}\right)_+\right],$$

или след опростяване

$$(2.15)\qquad K_2(Q;x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{за } x \in (0, \frac{1}{4}), \\ \dfrac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{2} & \text{за } \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}, \\ \dfrac{(x-1)^2}{2} & \text{за } \frac{3}{4} \le x \le 1. \end{cases}$$

Понеже $K_2(Q;x) \ge 0$ в (0,1), можем да приложим следствие 2.2 от теоремата на Пеано. Формулите (2.15) дават $\int_0^1 K_2(Q;x)\,dx = \frac{1}{96}$, откъдето следва исканото представяне на грешката.

2.35. Решава се както зад. 2.34.

2.36. Прилагаме следствие 2.1 от теоремата на Пеано, като използваме намерените при решението на зад. 2.26 представяния на съответните ядра.

За формулата на правоъгълниците имаме, поради (2.7) и симетрията

$$\int_a^b [K_2(Q\ \text{пр};x)]^2\,dx = 2\int_a^{(a+b)/2} [K_2(Q\ \text{пр};x)]^2\,dx$$
$$= 2\int_a^{(a+b)/2} \frac{(x-a)^4}{4}\,dx = \frac{(b-a)^5}{320},$$

затова

$$\sup_{f \in W_2^2[a,b]} \left|\int_a^b f(x)\,dx - Q\ \text{пр}(f)\right| = M\left(\int_a^b [K_2(Q\ \text{пр};x)]^2\,dx\right)^{1/2} = M\frac{(b-a)^{5/2}}{8\sqrt{5}}.$$

За формулата на трапеците, отчитайки (2.8), получаваме

$$\int_a^b [K_2(Q\ \text{тр};x)]^2\,dx = \int_a^b \frac{(x-a)^2(x-b)^2}{4}\,dx = \frac{(b-a)^5}{30},$$

следователно

$$\sup_{f \in W_2^2[a,b]} \left|\int_a^b f(x)\,dx - Q\ \text{тр}(f)\right| = M\left(\int_a^b [K_2(Q\ \text{тр};x)]^2\,dx\right)^{1/2} = M\frac{(b-a)^{5/2}}{\sqrt{30}}.$$

За формулата на Симпсон, като вземем предвид (2.9) и симетрията, получаваме

$$\int_a^b [K_2(Q_{\,\mathrm{C}};x)]^2\,dx = 2\int_a^{(a+b)/2} [K_2(Q_{\,\mathrm{C}};x)]^2\,dx$$

$$= \int_a^{(a+b)/2} \left[\frac{(x-a)^4}{2} - \frac{b-a}{3}(x-a)^3 + \frac{(b-a)^2}{18}(x-a)^2\right] dx = \frac{(b-a)^5}{4320},$$

следователно

$$\sup_{f\in W_2^2[a,b]} \left|\int_a^b f(x)\,dx - Q_{\,\mathrm{C}}(f)\right| = M\frac{(b-a)^{5/2}}{12\sqrt{30}},$$

т. е. в класа $W_2^2[a,b]$ формулата на Симпсон има 12 пъти по-малка грешка от формулата на трапеците.

2.37. Непосредствено се проверява, че разглежданата квадратурна формула има алгебрична степен на точност 3 и че ядрото ѝ на Пеано

$$K_4(Q;x) = \frac{(x-a)^4}{4!} - \frac{b-a}{8}\left[\frac{(x-x_0)_+^3}{3!} + 3\frac{(x-x_1)_+^3}{3!} + \frac{3(x-x_2)_+^3}{3!}\right]$$

е неположително в $[a,b]$. Пресмятаме стойността на интеграла

$$\int_a^b K_4(Q;x)\,dx = \int_a^b \frac{(x-a)^4}{4!}\,dx - \frac{b-a}{8}\int_a^b \frac{(x-a)^3}{3!}\,dx$$

$$-\frac{3(b-a)}{8}\int_{x_1}^b \frac{(x-x_1)^3}{3!}\,dx - \frac{3(b-a)}{8}\int_{x_2}^b \frac{(x-x_2)^3}{3!}\,dx$$

$$= \frac{(b-a)^5}{5!} - \frac{(b-a)^5}{8.4!} - \frac{3(b-a)}{8.4!}\left(\frac{2(b-a)}{3}\right)^4 - \frac{3(b-a)}{8.4!}\left(\frac{b-a}{3}\right)^4$$

$$= -\frac{3}{80}\left(\frac{b-a}{3}\right)^5.$$

Прилагаме следствие 2.2 от теоремата на Пеано, за да получим

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] = -f^{(4)}(\xi)\frac{3}{80}h^5,$$

което трябваше и да докажем.

2.38. Решава се както предишната задача.

2.39. В зад. 2.25 определихме точните горни граници за грешките на съставните формули на правоъгълниците, трапеците и Симпсон. Достататъчно е да изберем такива n, за които тези граници не надминават 10^{-3}. Съгласно (2.5) за формулите на правоъгълниците и трапеците е достатъчно n да е такова, че $\dfrac{1}{4n} \le 10^{-3}$, което е изпълнено при $n \ge 250$, т. е. трябва да разделим $[0,1]$ на $n \ge 250$ равни части и върху всеки подинтервал да приложим елементарната квадратура. За съставната квадратурна формула на Симпсон е достатъчно (вж. (2.6)) n да удовлетворява $\dfrac{5}{36n} \le 10^{-3}$, което е изпълнено за $n \geq 139$. Ако сравняваме обаче броя на възлите, които ще ни се наложи да използуваме, за да пресметнем интеграла с исканата точност, най-малък — 250, той ще е за съставната формула на правоъгълниците срещу 251 и 279 съответно за формулите на трапеците и Симпсон.

2.40. а) Функцията $f(x) = 1/(1+x)$ има непрекъснати производни от всякакъв ред в интервала $[0,1]$, затова можем да се възползуваме от оценките за грешките на съставните формули на правоъгълниците и трапеците в класовете W_∞^r, $r = 2,3$ (съответно (2.5), (2.10) и (2.11)), както и за съставните формули на Симпсон в класовете W_∞^r, $r = 1,2,3,4$ (вж. (2.6), (2.12) и (2.14)). Изпълнено е

$$\max_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leq 1, \ \max_{x\in[0,1]} |f''(x)| \leq 2, \ \max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| \leq 24.$$

Ако приложим съставната формула на правоъгълниците, достатъчно е n да е такова, че $2/(24n^2) \leq 10^{-5}$, т. е. $n \geq 92$. Ако изберем да прилагаме съставната формула на Симпсон, достатъчно е n да бъде такова, че $24/(2880n^4) \leq 10^{-5}$, т. е. $n \geq 6$. За съставната формула на трапеците трябва $2/(12n^2) \leq 10^{-5}$, което е изпълнено за $n \geq 130$.

б) Решава се както а).

2.41. Грешката на съставната формула на Симпсон (вж. (2.14)) може да се запише и като

$$\sup_{f\in W_\infty^4[a,b]} \left| \int_a^b f(x)\,dx - S^n_{\mathrm{C}}(f) \right| \leq \frac{h^4(b-a)}{180} \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|,$$

където $h = (b-a)/N$ е разстоянието между два съседни възела на съставната квадратура. За четвъртата производна на $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ получаваме

$$f^{(4)}(x) = \frac{\sin x}{x} + 4\frac{\cos x}{x^2} - 12\frac{\sin x}{x^3} - 24\frac{\cos x}{x^4} + 24\frac{\sin x}{x^5} = p(x) - q(x),$$

където

$$p(x) = \frac{\sin x}{x}\left(1 - \frac{12}{x^2} + \frac{24}{x^4}\right) \quad \text{и} \quad q(x) = 4\,\frac{\cos x}{x^2}\left(\frac{6}{x^2} - 1\right).$$

Вижда се, че в интервала $[\pi/4, \pi/2]$ функциите p и q са положителни и монотонно намаляващи, следователно те достигат своя максимум при $x = \pi/4$. Тогава

$$\left(|p(x)| + |q(x)|\right)\Big|_{x=\pi/4} < 81.$$

Стъпката h тогава определяме да удовлетворява $\dfrac{h^4\pi.81}{4.180} \leq 10^{-3}$. Оттук получаваме $h < 0,164$. Изборът $h = \pi/24 \approx 0,13$ удовлетворява това неравенство, следователно можем да осигурим пресмятане на интеграла с желаната точност, избирайки $N = (\pi/2 - \pi/4)/h = 6$.

2.42. Правим смяната $x = \cos t$ и получаваме

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x)\,dx = \int_0^\pi \sin^2 t f(\cos t)\,dt.$$

Разделяме интервала $[0,\pi]$ на n равни части и във всеки подинтервал прилагаме формулата на правоъгълниците с възел левия край. Получаваме

$$I \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{k\pi}{n} f(\cos \frac{k\pi}{n}) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2 \frac{k\pi}{n} f(\cos \frac{k\pi}{n}),$$

което представлява желаната формула. За оценка на грешката използваме зад. 2.25, където установихме неравенството

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - (b-a)f(\xi) \right| \le \frac{M}{2}[(b-\xi)^2 + (\xi - a)^2] \tag{2.16}$$

за $\xi \in [a,b]$ и $M = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. В конкретния случай, ако означим

$$M = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|, \quad M_1 = \max_{x\in[-1,1]} |f'(x)|$$

и приложим (2.16) за всеки интервал $[k\pi/n, (k+1)\pi/n]$, $k = 0,\dots,n-1$ с $\xi = k\pi/n$, получаваме оценката

$$\max_{t\in[0,\pi]} |\{\sin^2 t f(\cos t)\}'| \le M + M_1,$$

$$\left| I - \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2 \frac{k\pi}{n} f(\cos \frac{k\pi}{n}) \right| \le n \frac{M+M_1}{2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2(M+M_1)}{2n}.$$

2.43. Аналогично на предишната задача след смяната $x = \cos^2 t$ и прилагане на съставната формула на правоъгълниците получаваме

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t f(\cos^2 t) 2 \sin t \cos t\,dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\, f(\cos^2 t)\,dt \approx \frac{\pi}{4n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2 \frac{k\pi}{n} f(\cos^2 \frac{k\pi}{2n}).$$

2.4. КВАДРАТУРНИ ФОРМУЛИ ОТ ГАУСОВ ТИП

2.44, 2.45. Допускаме, че съществува квадратурна формула от вида

$$I(f) := \int_a^b \sigma(x) f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} [a_k f(x_k) + b_k f'(x_k)] := Q(f),$$

която да е точна за полиномите от степен $\ge 2n$. Тогава тя трябва да бъде точна и за полинома $P(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)^2 \dots (x-x_n)^2$, който е от степен $2n$. Но $P(x_i) = P'(x_i) = 0$ за $i = 1,\dots,n$, затова $Q(P) = 0$. Но тогава трябва да е изпълнено и $\int_a^b \sigma(x)P(x)\,dx = 0$, тъй като по предположение трябва $I(P) = Q(P)$. Последното обаче е невъзможно, тъй като $P(x) > 0$ за $x \in [a,b] \backslash \{x_i\}_1^n$ и следователно $\int_a^b \sigma(x)P(x)\,dx > 0$. Полученото противоречие показва, че няма квадратурна формула от разглеждания вид с алгебрична степен на точност $\ge 2n$ (в частност няма и такава, за която $b_k = 0$, $k = 1,\dots,n$).

2.46. Упътване: Използува се идеята от предишната задача, като се прилага квадратурната формула към подходящо избран полином.

2.47. Нека $\{x^*_{k,n}\}_{k=1}^n$ са нулите на полинома от степен n, ортогонален в $[a,b]$ при тегло $\sigma(x)$ (известно е, че $\{x^*_{k,n}\}_{k=1}^n$ са реални, различни и лежат в (a,b)). Нека $H_{2n-1}(f;x)$ е полиномът от степен $\leq 2n-1$, който интерполира функцията f и нейната първа производна в точките $\{x^*_{k,n}\}_{k=1}^n$, т. е. който удовлетворява равенствата

$$H_{2n-1}(f;x^*_{k,n}) = f(x^*_{k,n}) \quad \text{и} \quad H'_{2n-1}(f;x^*_{k,n}) = f'(x^*_{k,n}) \quad \text{за} \quad k=1,2,\dots,n.$$

Този полином може да се запише във вида

$$H_{2n-1}(f;x) = \sum_{k=1}^n [h_{k,0}(x)f(x^*_{k,n}) + h_{k,1}(x)f'(x^*_{k,n})],$$

където $h_{k,j} \in \pi_{2n-1}$ са определени от равенствата

$$h^{(s)}_{k,j}(x^*_{r,n}) = \delta_{rk}.\delta_{sj} \quad \text{за } k,r = 1,\dots,n \quad \text{и} \quad j,s = 0,1.$$

Знаем, че за грешката при интерполацията е изпълнено

$$f(x) - H_{2n-1}(f;x) = \frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!}(x-x^*_{1,n})^2 \dots (x-x^*_{n,n})^2. \tag{2.17}$$

Ако умножим двете страни на (2.17) със $\sigma(x)$ и интегрираме в граници от a до b, ще получим

$$\begin{aligned} \int_a^b \sigma(x)f(x)\,dx \quad &= \sum_{k=0}^n [a_k f(x^*_{k,n}) + b_k f'(x^*_{k,n})] \\ &+ \int_a^b \sigma(x)\frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!}(x-x^*_{1,n})^2 \dots (x-x^*_{n,n})^2\,dx \\ &= \sum_{k=0}^n [a_k f(x^*_{k,n}) + b_k f'(x^*_{k,n})] \\ &+ \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b \sigma(x)(x-x^*_{1,n})^2 \dots (x-x^*_{n,n})^2\,dx \end{aligned} \tag{2.18}$$

за някое $\xi \in [a,b]$, където $a_k = \int_a^b \sigma(x)h_{k,0}(x)\,dx$, $b_k = \int_a^b \sigma(x)h_{k,1}(x)\,dx$, $k = 1,\dots,n$. Очевидно квадратурната формула (2.18) е точна за всяко $f \in \pi_{2n-1}$. При това, тъй като

$$h_{k,1}(x) = c_k\omega(x)\frac{\omega(x)}{x-x^*_{k,n}} \quad \text{и} \quad \omega(x)/(x-x^*_{k,n}) \in \pi_{n-1},$$

поради ортогоналността е изпълнено $b_k = 0$, $k = 1,\dots,n$. Следователно квадратурната формула (2.18) не използува стойности на производните на подинтегралната функция, т. е. (2.18) е Гаусовата квадратурна формула.

2.48. Построяваме интерполационния полином на Ермит

$$H_{2n+1}(f;x) \in \pi_{2n+1},$$

удовлетворяващ условията

$$H^{(j)}_{2n+1}(f;x_{k,n}) = f^{(j)}(x_{k,n}), \; k = 1,\dots,n \quad \text{и } j = 0,1;$$

$$H_{2n+1}(f;a) = f(a), \quad H_{2n+1}(f;b) = f(b),$$
където $\{x_{k,n}\}_{k=1}^n$ са нулите на $n-$тия ортогонален полином за интервала $[a,b]$ и тегло $\sigma(x)(x-a)(b-x)$. За грешката тогава е изпълнено
$$f(x) - H_{2n+1}(f;x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi(x))}{(2n+2)!}(x-a)(x-x_{1,n})^2\dots(x-x_{n,n})^2(x-b).$$
Умножаваме двете страни на това равенство със $\sigma(x)$ и интегрираме в граници от a до b, при което след прилагане на теоремата за средните стойности получаваме равенството
$$\int_a^b \sigma(x)f(x)\,dx = a_0 f(a) + a_{n+1}f(b) + \sum_{k=1}^n [a_k f(x_{k,n}) + b_k f'(x_{k,n})] - R(f),$$
$$R(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b \sigma(x)(x-a)(b-x)(x-x_{1,n})^2\dots(x-x_{n,n})^2\,dx.$$
Очевидно квадратурната формула, получена след пренебрегване на $R(f)$, е точна за полиномите от степен, ненадминаваща $2n+1$. Остава да се забележи, че $b_k = \int_a^b \sigma(x)h_{k,1}(x)\,dx$, където $h_{k,1} \in \pi_{2n+1}$ удовлетворява условията $0 = h_{k,1}(a) = h_{k,1}(b) = h_{k,1}(x_{j,n})$, $j = 1,\dots,n$, и следователно може да се представи във вида $(x-a)(b-x)\omega(x)p(x)$, $p \in \pi_{n-1}$. От ортогоналността тогава следва $b_k = 0$, $k = 1,\dots,n$, откъдето заключаваме, че тази квадратурна формула е именно формулата на Лобато, с което задачата е решена.

2.49. Решава се както предишните две задачи.

2.50. Нека $\{x^*_{k,n}\}_{k=1}^n$ са възлите на квадратурната формула на Гаус и нека за произволно $k \in \{1,2,\dots,n\}$ полиномът $p_k \in \pi_{2n-2}$ е определен от условията
$$p_k(x^*_{i,n}) = p'(x^*_{i,n}) = 0 \text{ за } i \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \{k\}, \quad p_k(x^*_{k,n}) = 1.$$
Очевидно p_k няма други нули освен тези с кратност 2 във възлите на квадратурната формула на Гаус (изключвайки $x^*_{k,n}$), затова p_k не сменя своя знак върху реалната права и по-точно $p_k \geq 0$ за всяко реално x, тъй като $p_k(x^*_{k,n}) = 1$. Квадратурната формула на Гаус пресмята точно интеграла от p_k, затова
$$0 < \int_a^b \sigma(x)p_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^n a^G_{k,n}p_k(x^*_{k,n}) = a^G_{k,n}$$
и понеже k беше произволно избрано, доказали сме, че всички коефициенти в Гаусовата квадратурна формула са положителни.

По подобен начин, прилагайки квадратурните формули на Лобато и Радо към подходящо избрани неотрицателни полиноми, установяваме положителността на техните коефициенти.

2.51. Използуваме рекурентната връзка за ортогоналните полиноми, записана във вида
$$x\,p_m(x) = A_m p_{m+1}(x) + B_m p_m(x) + C_m p_{m-1}(x);$$
$$A_m = \frac{k_m}{k_{m+1}}, \quad C_m = \frac{k_{m-1}}{k_m} \tag{2.19}$$

(явният вид на B_m няма да ни е нужен), валидна за $m = 0, 1, \dots$, като сме положили $p_{-1} := 0$. От равенството (2.19) получаваме

$$x\, p_m(x)p_m(y) = \frac{k_m}{k_{m+1}} p_{m+1}(x)p_m(y) + B_m p_m(x)p_m(y) + \frac{k_{m-1}}{k_m} p_{m-1}(x)p_m(y).$$

От последното тъждество изваждаме почленно тъждеството, което се получава, като разменим местата на x и y, което дава

$$\begin{aligned}(x-y)p_m(x)p_m(y) &= \frac{k_m}{k_{m+1}}[p_{m+1}(x)p_m(y) - p_m(x)p_{m+1}(y)] \\ &- \frac{k_{m-1}}{k_m}[p_m(x)p_{m-1}(y) - p_{m-1}(x)p_m(y)].\end{aligned}$$

Сумираме тези равенства по m от 0 до n:

$$(x-y)\sum_{m=0}^{n} p_m(x)p_m(y) = \frac{k_n}{k_{n+1}}[p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)].$$

За да получим тъждеството на Кристофел — Дарбу, трябва само да разделим последното равенство на $x - y$.

2.52. а) Във формулата на Кристофел — Дарбу полагаме $y = x_{\nu,n}$, където $x_{\nu,n}$ е ν-тата нула на p_n и получаваме

$$\sum_{m=0}^{n} p_m(x)p_m(x_{\nu,n}) = -\frac{k_n}{k_{n+1}}\,\frac{p_n(x)p_{n+1}(x_{\nu,n})}{x - x_{\nu,n}}.$$

Умножаваме двете страни на това равенство със $\sigma(x)$ и интегрираме по x в граници от a до b. Тъй като системата $\{p_m(x)\}_{m=0}^{n}$ е ортонормирана, имаме

$$\begin{aligned}1 &= -\frac{k_n}{k_{n+1}} p_{n+1}(x_{\nu,n}) \int_a^b \sigma(x)\frac{p_n(x)}{x - x_{\nu,n}}\,dx \\ &= -\frac{k_n}{k_{n+1}} p_{n+1}(x_{\nu,n})p_n'(x_{\nu,n}) \int_a^b \sigma(x)\frac{p_n(x)}{(x - x_{\nu,n})p_n'(x_{\nu,n})}\,dx \\ &= -\frac{k_n}{k_{n+1}} p_{n+1}(x_{\nu,n})p_n'(x_{\nu,n}).a_{\nu,n}^G\,,\end{aligned}$$

откъдето следва

$$a_{\nu,n}^G = \frac{k_{n+1}}{k_n}\,\frac{-1}{p_{n+1}(x_{\nu,n})p_n'(x_{\nu,n})}.$$

б) Полагаме $y = x_{\nu,n}$ в тъждеството на Кристофел — Дарбу

$$\sum_{m=0}^{n-1} p_m(x)p_m(y) = \frac{k_{n-1}}{k_n}\,\frac{p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)}{x - y},$$

и получаваме

$$\sum_{m=0}^{n-1} p_m(x)p_m(x_{\nu,n}) = \frac{k_{n-1}}{k_n}\,\frac{p_{n-1}(x_{\nu,n})p_n(x)}{x - x_{\nu,n}}.$$

Желаната формула намираме, като умножим последното равенство със $\sigma(x)$ и интегрираме в граници от a до b.

2.53. Функцията $f(x) = \left(\dfrac{p_n(x)}{p_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})}\right)^2$ е полином от степен $2n-2$, удовлетворяващ условията

$$f(x_{j,n}) = \delta_{j,k},\ j = 1, \ldots, n,$$

затова Гаусовата квадратурна формула е точна за f и

$$\int_a^b \sigma(x) f(x)\, dx = \sum_{j=1}^n a_{j,n}^G f(x_{j,n}) = a_{k,n}^G.$$

2.54. Наистина възлите на квадратурната формула на Гаус са нулите на ортогоналния полином в $[-1,1]$ с тегло $\sigma(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ и това е $T_n(x) = \cos n \arccos x$. Можем да приложим коя да е от формулите а), б) от зад. 2.52, за да намерим коефициентите на квадратурната формула. Ортонормираната система се състои от полиномите $\sqrt{1/\pi}$, $\sqrt{2/\pi}\, T_1(x)$, $\sqrt{2/\pi}\, T_2(x), \ldots, \sqrt{2/\pi}\, T_n(x)$ и старшите коефициенти на тези полиноми при $n \geq 1$ са $k_n = \sqrt{2/\pi}\, 2^{n-1}$. Освен това имаме

$$T_{n+1}(x_k) = \cos\frac{(n+1)(2k-1)\pi}{2n} = (-1)^{k-1} \sin\frac{(2k-1)\pi}{2n},$$

$$T_n'(x_k) = n\frac{\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2}}{\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}} = n\frac{(-1)^k}{\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}}.$$

Като приложим формулата а) от зад. 2.52, получаваме за коефициентите на Гаусовата квадратурна формула

$$a_k = 2\frac{-1}{\sqrt{2/\pi}(-1)^{k-1}\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\sqrt{2/\pi}\ n(-1)^k\left(\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right)^{-1}} = \frac{\pi}{n},$$

с което задачата е решена.

2.55. Използуваме резултата от зад. 2.47, като вземем предвид, че $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \ldots = 2^{n-1}\omega(x)$ и

$$\int_{-1}^1 T_n^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad n \geq 1.$$

Тогава

$$\int_{-1}^1 f(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1} \omega^2(x)\, dx$$

$$= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}.2^{-2(n-1)}\int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1} T_n^2(x)\, dx = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \cdot \frac{\pi}{2^{2n-1}},$$

откъдето получаваме нужната оценка.

2.56. Възлите $x_k = \cos\dfrac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, \ldots, n$, на квадратурната формула са нули на полинома на Чебишов от втори род

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}},$$

който е ортогонален в интервала $[-1,1]$ при тегло $\sigma(x) = \sqrt{1-x^2}$. Необходимо е още да покажем, че коефициентите на Гаусовата квадратурна формула за това тегло са $a_k = \dfrac{\pi}{n+1}\sin^2\dfrac{k\pi}{n+1}$. Ортонормираните полиноми са $\sqrt{2/\pi}\, U_n(x)$, $n = 0,1,\ldots,$ и старшите им коефициенти са $k_n = \sqrt{2/\pi}\, 2^n$. Пресмятаме

$$U_{n+1}(x_k) = \frac{\sin\dfrac{(n+2)k\pi}{n+1}}{\sin\dfrac{k\pi}{n+1}} = \frac{(-1)^k \sin\dfrac{k\pi}{n+1}}{\sin\dfrac{k\pi}{n+1}} = (-1)^k,$$

$$U_n'(x_k) = -(n+1)\frac{\cos k\pi}{1-\cos^2\dfrac{k\pi}{n+1}} = (n+1)\frac{(-1)^{k+1}}{\sin^2\dfrac{k\pi}{n+1}}.$$

Тогава от формула а) от зад. 2.52 имаме

$$a_k = 2\frac{-1}{(-1)^k\sqrt{2/\pi}(n+1)(-1)^{k+1}\sqrt{2/\pi}\left(\sin^2\dfrac{k\pi}{n+1}\right)^{-1}} = \frac{\pi}{n+1}\sin^2\frac{k\pi}{n+1},$$

което и трябваше да докажем.

2.57. Тъй като

$$U_n(x) = 2^n x^n + \ldots = 2^n\omega(x) \quad \text{и} \quad \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,U_n^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2},$$

съгласно зад. 2.47, имаме

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}f(x)\,dx - \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{n+1}f(x_k)$$

$$= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\left(\frac{U_n(x)}{2^n}\right)^2 dx = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\cdot\frac{\pi}{2^{2n+1}},$$

откъдето резултатът следва, като вземем предвид

$$\max_{x\in[-1,1]}|f^{(2n)}(x)| \le M.$$

2.58. Полиномът $q_k(x) = P_n(x)P_n'(x)/(x-x_{k,n})$ е от степен $2n-2$ и за него е изпълнено

$q_k(x_{j,n}) = 0$ за $j = 1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n$, $q_k(x_{k,n}) = [P_n'(x_{k,n})]^2$.

Гаусовата квадратурна формула ще бъде точна за q_k, затова

$$\int_{-1}^{1}q_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}a_{k,n}^G q_k(x_{k,n}) = a_{k,n}^G[P_n'(x_{k,n})]^2.$$

От друга страна, след интегриране по части ще получим

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{x-x_{k,n}}P_n'(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{x-x_{k,n}}d(P_n(x))$$

$$= \left.\frac{P_n^2(x)}{x-x_{k,n}}\right|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}P_n(x)\left(\frac{P_n(x)}{x-x_{k,n}}\right)'dx.$$

Поради ортогоналността последният интеграл е 0. Затова, като отчетем и факта, че $P_n(1) = (-1)^n P_n(-1) = 1$, получаваме

$$a_{k,n}^G [P_n'(x_{k,n})]^2 = \frac{1}{1 - x_{k,n}} - \frac{1}{-1 - x_{k,n}} = \frac{2}{1 - x_{k,n}^2},$$

откъдето намираме исканото представяне на $a_{k,n}^G$.

2.59. За произволно $k \in \{2, \dots, n-1\}$ разглеждаме $q_k \in \pi_{2n-2}$, определен от интерполационните условия

$$q_k(x_{i,n}) = 1 \quad \text{за} \quad i = 1, \dots, k-1; \quad q_k(x_{i,n}) = 0 \quad \text{за} \quad i = k, \dots, n;$$
$$q_k'(x_{i,n}) = 0 \quad \text{за} \quad i = 1, \dots, k-2, k, \dots, n.$$

По теоремата на Рол q_k' има поне по една нула във всеки от интервалите $(x_{i,n}, x_{i+1,n})$, $i = 1, \dots, k-2, k, \dots, n-1$, и отчитайки и $(n-1)$-те нули в точките $x_{i,n}$, $i = 1, \dots, k-2, k, \dots, n$, общо поне $2n-3$ нули. Тъй като $q_k' \in \pi_{2n-3}$, нулите му са точно $2n-3$, т. е. q_k' няма други нули освен посочените по-горе. Същите съображения показват, че q_k няма други нули освен тези, зададени с дефиницията му. Оттук заключаваме, че $q_k(x) \geq 1$ в $[-1, x_{k-1,n}]$, $q_k(x) \geq 0$ в $[x_{k-1,n}, 1]$ и понеже Гаусовата квадратурна формула ще бъде точна за q_k, получаваме

$$\int_{-1}^{1} q_k(x)\, dx = \sum_{j=1}^{k-1} a_{j,n}^G > \int_{-1}^{x_{k-1,n}} dx = x_{k-1,n} + 1. \tag{2.20}$$

Аналогично дефинираме полином $r_k \in \pi_{2n-2}$, определен от интерполационните условия

$$r_k(x_{i,n}) = 0 \quad \text{за} \quad i = 1, \dots, k; \quad r_k(x_{i,n}) = 1 \quad \text{за} \quad i = k+1, \dots, n;$$
$$r_k'(x_{i,n}) = 0 \quad \text{за} \quad i = 1, \dots, k, k+2, \dots, n,$$

и както по-горе заключаваме, че $r_k(x) \geq 0$ в $[-1, x_{k+1,n}]$, $r_k(x) \geq 1$ в $[x_{k+1,n}, 1]$. Като приложим Гаусовата квадратурна формула за r_k, получаваме

$$\int_{-1}^{1} r_k(x)\, dx = \sum_{j=k+1}^{n} a_{j,n}^G > \int_{x_{k+1,n}}^{1} dx = 1 - x_{k+1,n}. \tag{2.21}$$

Събираме неравенствата (2.20) и (2.21):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j,n}^G - a_{k,n}^G = 2 - a_{k,n}^G > 2 + x_{k-1,n} - x_{k+1,n}.$$

Тук използувахме, че $\sum_{j=0}^{n} a_{j,n}^G = \int_{-1}^{1} dx = 2$, следователно

$$a_{k,n} < x_{k+1,n} - x_{k-1,n} \quad \text{за} \quad k = 2, 3, \dots, n-2.$$

За $k = 1$ дефинираме $r_1 \in \pi_{2n-2}$ с равенствата

$$r_1(x_{1,n}) = 0, \quad r_1(x_{i,n}) = 1, \; i = 2, \dots, n,$$
$$r_1'(x_{i,n}) = 0, \quad \text{за} \quad i = 1, 3, \dots, n.$$

За r_1 е изпълнено $r_1(x) \geq 0$ в $[-1, x_{2,n})$ и $r_1(x) \geq 1$ в $[x_{2,n}, 1]$. Прилагането на квадратурната формула към r_1 води до

$$\int_{-1}^{1} r_1(x)\, dx = \sum_{j=2}^{n} a_{j,n}^G = 2 - a_{1,n}^G > \int_{x_{2,n}}^{1} dx = 1 - x_{2,n},$$

поради което $a_{1,n}^G < x_{2,n} + 1$, и е доказано неравенството за $k = 1$. Аналогично се получава и неравенството за $k = n$.

2.60. Тъй като $P' \in \pi_{2n-1}$, квадратурната формула на Гаус ще пресмята точно $\int_{-1}^{1} P'(x)\,dx$. Тогава

$$0 = P(1) - P(-1) = \int_{-1}^{1} P'(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^{G} P'(x_{k,n}).$$

Тъй като коефициентите $a_{k,n}^{G}$ са положителни (вж. зад. 2.50), следва, че или е изпълнено $P'(x_{k,n}) = 0$ за всяко k, или има такива $i, j \in \{1, \ldots, n,\}$, че $P'(x_{i,n})P'(x_{j,n}) < 0$. И в двата случая следва твърдението на задачата.

2.61. Нека $P(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \cdots + a_{2n}$ е произволен полином от изследвания вид. Тогава $P(x) - \omega^2(x) \in \pi_{2n-1}$ и тъй като квадратурната формула на Гаус е точна за π_{2n-1}, получаваме

$$\int_{-1}^{1} [P(x) - \omega^2(x)]\,dx = \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^{G} P(x_{k,n}^{G}) \geq 0$$

(отчитаме, че $a_{k,n}^{G} > 0$ и $\omega(x_{k,n}) = 0$).

2.62. Очевидно $\{x_k\}$ са нулите на квадратурната формула на Гаус за интервала (a, b). Ако $\{A_k\}$ са коефициентите на тази формула, имаме

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} &= -\int_a^b \omega_k^2(x) \prod_{i=k+1}^{n} (x - x_i)\,dx = -\int_a^b \frac{\omega(x)}{x - x_k}\omega_k(x)\,dx \\
&= -\int_a^b \frac{\omega(x)}{x - x_k}\{[\omega_k(x) - \omega_k(x_k)] + \omega_k(x_k)\}\,dx \\
&= -\omega_k(x_k)\int_a^b \frac{\omega(x)\omega_k'(x_k)}{(x - x_k)\omega_k'(x_k)}\,dx = -\omega_k(x_k)\omega_k'(x_k)A_k.
\end{aligned}$$

Тъй като $A_k > 0$, $\operatorname{sgn} \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} = -\operatorname{sgn} \omega_k(x_k) . \operatorname{sgn} \omega_k'(x_k) = (-1)^{n-k-1}$.

2.63. Търсеният интервал е $[x_{1,n}, x_{n,n}]$, определен от първата и последната нула на полинома на Льожандър: ако $[a, b] \supset [x_{1,n}, x_{n,n}]$, ще бъде изпълнено

$$P(1) - P(-1) = \int_{-1}^{1} P'(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^{G} P'(x_{k,n}) \geq 0,$$

тъй като $P'(x) \geq 0$ в интервала $[a, b]$. Ако предположим, че $a > x_{1,n}$, може да се построи контрапример — например полиномът

$$P(x) = \int_c^x (t - a)(t - x_{2,n})^2 (t - x_{3,n})^2 \ldots (t - x_{n,n})^2 dt$$

е от степен $2n$, $P'(x) = (x-a)(x-x_{2,n})^2(x-x_{3,n})^2 \ldots (x-x_{n,n})^2 \geq 0$ за $x \geq a$, но $P(1) - P(-1) = a_{1,n}^{G} P'(x_{1,n}) < 0$. Следователно трябва да е изпълнено $a \leq x_{1,n}$. Аналогично, ако предположим $b < x_{n,n}$, полиномът

$$P(x) = \int_c^x (b - t)(t - x_{1,n})^2 (t - x_{2,n})^2 \ldots (t - x_{n-1,n})^2 dt$$

е от степен $2n$, $P'(x) = (b - x)(x - x_{1,n})^2 (x - x_{2,n})^2 \ldots (x - x_{n-1,n})^2 \geq 0$ за $x \leq b$, докато $P(1) - P(-1) = a_{n,n}^{G} P'(x_{n,n}) < 0$. Следователно необходимо е

$b \geq x_{n,n}$. Получихме, че $[a, b] \supset [x_{1,n}, x_{n,n}]$, с което задачата е решена.

2.64, 2.65. Вж. решението на зад. 2.59.

2.66. а) Съгласно теоремата на Пеано е изпълнено

$$\int_a^b f(x)\,dx - Q_n^G(f) = \int_a^b K_2(Q_n^G; x) f''(x)\,dx$$

и двете страни на това равенство са равни на нула за всеки полином от степен, ненадминаваща $2n-1$. Ако допуснем, че $K_2(Q_n^G; x)$ има най-много $2n-3$ различни нули в (a, b), бихме могли да построим алгебричен полином $P(x) \in \pi_{2n-1}$, чиято втора производна да следва смените на знака на $K_2(Q_n^G; x)$, т. е. P'' сменя знака си точно в тези точки от (a, b), където сменя знака си и $K_2(Q_n^G; x)$. Но тогава квадратурната формула няма да е точна за $P(x)$, тъй като $\int_a^b K_2(Q_n^G; x) P''(x)\,dx \neq 0$. Полученото противоречие показва, че $K_2(Q_n^G; x)$ има поне $2n-2$ смени на знака в (a, b). От друга страна, тъй като $K_2(Q_n^G; x)$ е парабола върху всеки от интервалите $(x_{k,n}, x_{k+1,n})$, $k = 1, \dots, n-1$, и

$$K_2(Q_n^G; x) = \frac{(x-a)^2}{2} \quad \text{за } x \in (a, x_{1,n}); \quad K_2(Q_n^G; x) = \frac{(b-x)^2}{2} \text{ за } x \in (x_{n,n}, b),$$

виждаме, че $K_2(Q_n^G; x)$ не може да има повече от $2n-2$ нули в (a, b). Доказателството на б) и в) е аналогично.

2.67. Според зад. 2.66 $K_2(Q_n^G; x)$ трябва да има две различни реални нули $\tau_{1,j}$ и $\tau_{2,j}$ във всеки от интервалите

$$(x_{j,n}, x_{j+1,n}), \ j = 1, \dots, n-1.$$

Но за $x \in (x_{j,n}, x_{j+1,n})$

$$\begin{aligned} K_2(Q_n^G; x) &= \frac{(x+1)^2}{2} - \sum_{k=1}^{j} a_{k,n}^G (x - x_{k,n}) \\ &= \frac{1}{2}\left[x^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{j} a_{k,n}^G - 1\right) x + 1 + 2\sum_{k=1}^{j} a_{k,n}^G x_{k,n}\right]. \end{aligned}$$

Прилагайки формулите на Виет, получаваме

$$2x_{j,n} < \tau_{1,j} + \tau_{2,j} = 2\left(\sum_{k=1}^{j} a_{k,n}^G - 1\right) < 2x_{j+1,n},$$

а това са точно неравенствата (2.2).

2.68. Съгласно (2.2) е изпълнено

$$x_{k+1,n} - x_{k-1,n} > \sum_{j=1}^{k} a_{j,n}^G - \sum_{j=1}^{k-1} a_{j,n}^G = a_{k,n}^G.$$

2.69. Използваме резултата от зад. 2.47. За полиномите на Льожандър P_n знаем, че $P_n(x) = \dfrac{(2n)!}{2^n [n!]^2} x^n + \cdots$ и $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = 2/(2n+1)$. Съгласно зад. 2.47 имаме

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^{G} f(x_{k,n}) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\left(\frac{(2n)!}{2^n[n!]^2}\right)^{-2}\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx$$
$$= f^{(2n)}(\xi)\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^2(2n+1)!},$$

и оттук можем да установим исканата оценка.

2.70. Нека $\{x_{k,n}\}_{k=1}^{n}$ са нулите на полинома на Льожандър и $\{a_{k,n}^{G}\}_{k=1}^{n}$ са коефициентите на квадратурната формула на Гаус за интервала $[-1,1]$. След смяна на променливата $t = \dfrac{b-a}{2}x + \dfrac{a+b}{2}$ получаваме

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right)\,dx$$
$$= \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^{G} f(t_{k,n}) + R_n(f),$$

където $t_{k,n} = \dfrac{b-a}{2}x_{k,n} + \dfrac{a+b}{2}$, $k = 1,\ldots,n$, и

$$R_n(f) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1}\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_{-1}^{1}\omega^2(x)\,dx$$
$$= \frac{(b-a)^{2n+1}}{2n+1}\frac{(n!)^4}{[(2n)!]^3}f^{(2n)}(\xi), \quad a \le \xi \le b.$$

2.71. Възлите на квадратурната формула на Лобато са нулите на $n-$тия ортогонален полином в $[-1,1]$ за теглото $\sigma(x) = 1 - x^2$, т. е. на полинома на Якоби $P_n^{(1,1)}$. Както е известно,

$$P_n^{(1,1)}(x) = \frac{(2n+2)!}{2^n n!(n+2)!}x^n + \ldots$$

и

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)[P_n^{(1,1)}(x)]^2\,dx = \frac{2^3[(n+1)!]^2}{n!(n+2)!(2n+3)}.$$

Тогава съгласно зад. 2.48

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \left[\sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^{L} f(x_{k,n}) + b_n^L f(-1) + c_n^L f(1)\right]$$
$$= \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\left(\frac{P_n^{(1,1)}(x)}{\frac{(2n+2)!}{2^n n!(n+2)!}}\right)^2\,dx$$
$$= \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\left(\frac{(2n+2)!}{2^n n!(n+2)!}\right)^{-2}\frac{2^3[(n+1)!]^2}{n!(n+2)!(2n+3)}$$
$$= f^{(2n+2)}(\xi)\frac{2^{2n+3}n![(n+1)!]^2(n+2)!}{[(2n+2)!]^2(2n+3)!},$$

откъдето получаваме желания резултат.

2.72. Решава се както предишните две задачи.

2.73. Възлите на квадратурната формула на Радо са нулите на полинома на Якоби $P_n^{(0,1)}(x)$. Използуваме, че $y(x) = P_n^{(0,1)}(x)$ удовлетворява диференциалното уравнение

$$(1-x^2)y'' - (3x+1)y' + n(n+2)y = 0. \tag{2.22}$$

Ако приложим квадратурната формула

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^R f(x_{k,n}) + b_n^R f(-1)$$

за $f(x) := y(x)$, ще получим равенството $\int_{-1}^1 y(x)\,dx = b_n^R y(-1)$ и следователно $b_n^R = \dfrac{\int_{-1}^1 y(x)\,dx}{y(-1)}$. За да намерим $\int_{-1}^1 y(x)\,dx$, интегрираме уравнението (2.22) в граници от -1 до 1, като последователно чрез интегриране по части получаваме

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dy'(x) - \int_{-1}^{1}(3x+1)\,dy(x) + n(n+2)\int_{-1}^{1} y(x)\,dx \\
&= 2\int_{-1}^{1} xy'(x)\,dx - (3x+1)y(x)\Big|_{-1}^{1} + 3\int_{-1}^{1} y(x)\,dx + n(n+2)\int_{-1}^{1} y(x)\,dx \\
&= 2x.y(x)\Big|_{-1}^{1} - 4y(1) + 2y(-1) + (n^2+2n+1)\int_{-1}^{1} y(x)\,dx \\
&= -2y(-1) + (n+1)^2\int_{-1}^{1} y(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Оттук намираме

$$b_n^R = \frac{\int_{-1}^1 y(x)\,dx}{y(-1)} = \frac{2}{(n+1)^2}.$$

2.74. Възлите на квадратурната формула на Лобато

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^L f(x_{k,n}) + b_n^L f(-1) + c_n^L f(1)$$

са нулите на полинома на Якоби $P_n^{(1,1)}(x)$. Ще използваме следните две свойства на полиномите $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$:

$$\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+n+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x); \tag{2.23}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n\binom{n+\beta}{n}, \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}. \tag{2.24}$$

Формулата на Лобато е точна за полинома $(1+x)P_n^{(1,1)}(x)$, следователно

$$\int_{-1}^{1}(1+x)P_n^{(1,1)}(x)\,dx = 2c_n^L P_n^{(1,1)}(1),$$

и предвид (2.24)

$$c_n^L = \frac{1}{2(n+1)} \int_{-1}^{1} (1+x) P_n^{(1,1)}(x)\, dx. \tag{2.25}$$

За да пресметнем интеграла, използуваме формулата (2.23) и виждаме, че

$$\frac{d}{dx} P_{n+1}(x) = \frac{n+2}{2} P_n^{(1,1)}(x),$$

където $P_{n+1}(x)$ е полиномът на Льожандър. Тогава

$$\int_{-1}^{1} (1+x) P_n^{(1,1)}(x)\, dx = \frac{2}{n+2} \int_{-1}^{1} (1+x) dP_{n+1}(x)$$

$$= \frac{2}{n+2} \left[(1+x) P_{n+1}(x) \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)\, dx \right] = \frac{4}{n+2}$$

(в последното равенство $P_{n+1}(1) = 1$ съгласно (2.24), интегралът е 0 поради ортогоналността). Като заместим стойността на интеграла в (2.25), получаваме формулата за c_n^L. Коефициентът b_n^L е равен на c_n^L поради симетрията.

2.75. Съгласно зад. 2.66 второто ядро на Пеано за формулата на Лобато има $2n$ прости нули в $[-1,1]$ и следователно по две нули $\tau_{1,k}$ и $\tau_{2,k}$ във всеки интервал $(x_{k,n}, x_{k+1,n})$, $k = 1, \dots, n-1$. От друга страна, предвид зад. 2.74 за $x \in (x_{k,n}, x_{k+1,n})$ имаме

$$K_2(Q_n^L; x) = \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{2}{(n+1)(n+2)}(x+1) - \sum_{j=1}^{k} a_{j,n}^L (x - x_{j,n})$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \left(\sum_{j=1}^{k} a_{j,n}^L - \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} \right) x + \sum_{j=1}^{k} a_{j,n}^L x_{j,n} + \frac{1}{2} - \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

От формулите на Виет тогава получаваме

$$2x_{k,n} < \tau_{1,k} + \tau_{2,k} = 2\sum_{j=1}^{k} a_{j,n}^L - 2\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} < 2x_{k+1,n},$$

и това са точно желаните неравенства.

2.76. Решава се като зад. 2.75.

2.77. Решава се като зад. 2.68.

2.78. Възлите на квадратурните формули са нулите на полиномите на Льожандър $P_2(x)$ и $P_3(x)$, които са (вж. (2.1))

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

откъдето намираме

$$x_{1,2} = -\sqrt{3}/3,\ x_{2,2} = \sqrt{3}/3, \quad x_{1,3} = -\sqrt{3/5},\ x_{2,3} = 0, \quad x_{3,3} = \sqrt{3/5}.$$

От условието квадратурните формули да са точни съответно за $1, x$ и $1, x, x^2$ намираме

$$a_{1,2}^G = a_{2,2}^G = 1; \quad a_{1,3}^G = a_{3,3}^G = \frac{5}{9}, \quad a_{2,3}^G = \frac{8}{9}.$$

За оценка на грешката можем да се възползуваме от зад. 2.69, откъдето получаваме

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - [f(-\sqrt{3}/3) + f(-\sqrt{3}/3)]\right| \le \frac{M_4}{135},$$

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \frac{1}{9}[5f(-\sqrt{3/5}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{3/5})]\right| \le \frac{M_6}{15750},$$

тук $M_4 = ||f^{(4)}||_{C[-1,1]}$, $M_6 = ||f^{(6)}||_{C[-1,1]}$.

2.79. Намираме полинома $p(x) = x^2 + ax + b$, ортогонален на π_1 по отношение на теглото $\sigma(x) = 1 - |x|$. Условията са

$$\int_{-1}^{1} (1 - |x|)(x^2 + ax + b)x^k\,dx = 0, \quad k = 0, 1,$$

откъдето получаваме $a = 0$, $b = -1/6$, $p(x) = x^2 - 1/6$. Следователно възлите на търсената квадратурна формула ще бъдат

$$x_1 = -1/\sqrt{6},\ x_2 = 1/\sqrt{6}.$$

Условието формулата да е точна за $f(x) = 1$, x води до системата

$$\begin{aligned} a_1.1 + a_2.1 &= \int_{-1}^{1} (1 - |x|)1\,dx = 1, \\ a_1(-1/\sqrt{6}) + a_2(1/\sqrt{6}) &= \int_{-1}^{1} (1 - |x|)x\,dx = 0, \end{aligned}$$

откъдето намираме $a_1 = a_2 = 1/2$. За грешката на получената квадратурна формула съгласно зад. 2.47 имаме

$$\left|\int_{-1}^{1} (1 - |x|)f(x)\,dx - \frac{1}{2}[f(-1/\sqrt{6}) + f(\sqrt{6})]\right|$$
$$\le \frac{M_4}{4!}\int_{-1}^{1} (1 - |x|)(x^2 - \frac{1}{6})^2\,dx = \frac{7M_4}{4320}.$$

2.80. Възлите на квадратурната формула са нулите на полинома $p(x) = x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2$, ортогонален на π_1 в $[-1, 1]$ по отношение на теглото $\sigma(x) = \sqrt{1 - x^2}(1 - x^2)$. Условията за ортогоналност налагат системата

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}(1 - x^2)(x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2)\,dx &= 0, \\ \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}(1 - x^2)(x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2)x\,dx &= 0, \end{aligned}$$

откъдето намираме

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1/6, \quad p(x) = x^2 - 1/6 \quad \text{и} \quad x_1 = -1/\sqrt{6},\ x_2 = 1/\sqrt{6}.$$

Ако търсената квадратурна формула има вида

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} f(x)\,dx$$
$$\approx bf(-1) + cf(1) + a_1 f(-1/\sqrt{6}) + a_2 f(1/\sqrt{6}) := Q(f),$$

коефициентите b, c, a_1 и a_2 намираме от условието квадратурната формула да е точна за $f(x) = 1, x, x^2$ и x^3. Имаме

$$\begin{aligned}
Q(1) &= b + c + a_1 + a_2 = I(1) = \frac{\pi}{2}, \\
Q(x) &= -b + c - \frac{1}{\sqrt{6}}a_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}a_2 = I(x) = 0, \\
Q(x^2) &= b + c + \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{6}a_2 = I(x^2) = \frac{\pi}{8}, \\
Q(x^3) &= -b + c - \frac{1}{6\sqrt{6}}a_1 + \frac{1}{6\sqrt{6}}a_2 = I(x^3) = 0.
\end{aligned}$$

Решението на тази система е $b = c = \dfrac{\pi}{40}$, $a_1 = a_2 = \dfrac{9\pi}{40}$. За грешката на формулата на Лобато е изпълнено

$$\left|\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}f(x)\,dx - \frac{\pi}{40}[f(-1) + f(1) + 9f(-1/\sqrt{6}) + 9f(1/\sqrt{6})]\right|$$
$$\leq \frac{M_6}{6!}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}(1-x^2)[x^2 - 1/6]^2\,dx = \frac{M_6\pi}{55296},$$

където $M_6 = \max_{x\in[-1,1]}|f^{(6)}(x)|$.

2.81. Проверява се, че квадратурната формула е точна за полиномите от степен, ненадминаваща 2, следователно наистина е формулата на Радо (която е единствена при фиксирано n). Ако $P(f; x) \in \pi_2$ интерполационен полином на Ермит за функцията $f \in C^3[-1, 1]$, построен по стойностите $f(2/3)$, $f'(2/3)$ и $f(0)$, изпълнено е

$$f(x) - P(f; x) = \frac{f'''(\xi(x))}{3!}x(x - 2/3)^2.$$

Като интегрираме това равенство в граници от 0 до 1 и приложим теоремата за средните стойности, ще получим желаната формула (задачата може да се реши и като се изследва ядрото на Пеано за квадратурната формула).

2.82. Намираме полинома $p(x) = x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2$, ортогонален в $[-1, 1]$ по отношение на теглото $\sigma(x) = 1 + x$. Получаваме

$$p(x) = x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5},$$

следователно нулите му $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{6}}{5}$ и $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{6}}{5}$ са вътрешните възли на квадратурната формула на Радо. От условието формулата да бъде точна за $1, x, x^2$ намираме коефициентите пред $f(-1)$, $f(x_1)$ и $f(x_2)$ съответно $\dfrac{2}{9}$, $\dfrac{16+\sqrt{6}}{18}$, $\dfrac{16-\sqrt{6}}{18}$. За грешката на формулата на Радо е изпълнено

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \frac{1}{18}\left[4f(-1) + (16+\sqrt{6})f\left(\frac{1-\sqrt{6}}{5}\right) + (16-\sqrt{6})f\left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)\right]$$
$$= \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\int_{-1}^{1}(1+x)\left[x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}\right]^2\,dx = \frac{f^{(5)}(\xi)}{1125}.$$

2.84. Възлите на формулата на Лобато са нулите на полинома от втора степен, ортогонален по отношение на теглото $\sigma(x) = 1 - x^2$, а той е $p(x) = x^2 - 1/5$ и следователно $x_1 = -1/\sqrt{5}$, $x_2 = 1/\sqrt{5}$. От условието формулата да е точна за $1, x, x^2, x^3$ намираме и коефициентите на формулата

$$I(f) := \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{6}[f(-1) + 5f(-1/\sqrt{5}) + 5f(1/\sqrt{5}) + f(1)] := Q(f).$$

За грешката на формулата е изпълнено

$$I(f) - Q(f) = -\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-1}^{1}(1-x^2)[x^2 - 1/5]^2\,dx = -\frac{2f^{(6)}(\xi)}{23625}.$$

2.85. Лесно се проверява, че $I_n := \int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx = n!$ (I_n е всъщност Ойлеровата функция $\Gamma(n+1)$). Непосредствената проверка показва, че $Q(x^k) = k!$, $k = 0, 1, 2, 3$, докато $Q(x^4) = 20 \neq 4!$.

2.86. Нека $I_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}x^n\,dx$. Като интегрираме по части, получаваме рекурентната връзка $I_n = \dfrac{n-1}{2}I_{n-2}$. Тъй като $I_0 = \sqrt{\pi}$ (това е известният интеграл на Поасон) и $I_1 = 0$, то

$$I_{2n-1} = 0,\ I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad n = 1, 2, \dots$$

От друга страна, за приближената стойност $Q(f)$ получаваме

$$\begin{aligned} &Q(x^{2n-1}) = 0 = I_{2n-1}, && n = 1, 2, \dots, \\ &Q(x^{2n}) = 2\frac{\sqrt{\pi}}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{3^{n-1}}{2^n}\sqrt{\pi}, && n = 1, 2, \dots, \\ &Q(x^0) = I_0 = \sqrt{\pi}, \\ &Q(x^6) = \frac{9}{8}\sqrt{\pi} \neq \frac{15}{8}\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

2.87. Добавяме два произволни възела $x_{-1} < 1$ и $x_{2n} > 1$. B–сплайните

$$\{B_i(t)\}_{i=1}^{2n}, \quad B_i = (\cdot - t)_+[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$$

тогава образуват базис за пространството X, следователно търсената квадратурна формула трябва да бъде точна за всяка от функциите $\{B_i(t)\}_{i=1}^{2n}$. Тъй като B–сплайните са неотрицателни, следва, че всеки един от интервалите (x_{i-1}, x_{i+1}), $i = 2, \dots, 2n-3$, както и (x_0, x_1) и (x_{2n-2}, x_{2n-1}), трябва да съдържа възел на квадратурната формула. От друга страна, формулата има само n възела, следователно $\tau_k \in (x_{2k-2}, x_{2k-1})$, $k = 1, \dots, n$. От свойствата на B–сплайните следва

$$\int_0^1 B_i(t) = 1/2, \quad i = 2, \dots, 2n-1,$$

а изискването квадратурната формула да е точна за B–сплайните води до

$$\int_0^1 B_{2k-1}(t)dt = a_k B_{2k-1}(\tau_k) = 1/2, \quad k = 2, \dots, n,$$
$$\int_0^1 B_{2k}(t)dt = a_k B_{2k}(\tau_k) = 1/2, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

което показва, че $B_{2k-2}(\tau_k) = B_{2k-1}(\tau_k)$, т. е. $\{\tau_k\}_{k=2}^{n-1}$ са точно абсцисите на пресечните точки на графиките на $B_{2k-1}(t)$ и $B_{2k}(t)$. От явния вид на B–сплайните

$$B_i(t) = \begin{cases} \dfrac{t - x_{i-2}}{(x_i - x_{i-2})(x_{i-1} - x_{i-2})} & \text{за } x_{i-2} \le t < x_{i-1}, \\ \dfrac{x_i - t}{(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-1})} & \text{за } x_{i-1} \le t \le x_i, \\ 0 \quad \text{в останалите случаи,} & \end{cases}$$

намираме търсените формули за a_k и τ_k, $k = 2, \ldots, n-1$. За определяне на крайните възли и коефициенти, освен условията

$$\int_0^1 B_2(t)dt = a_1 B_2(\tau_1) = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 B_{2n-2}(t)dt = a_n B_{2n-2}(\tau_n) = \frac{1}{2},$$

използуваме още равенствата

$$\int_0^1 B_1(t)dt = a_1 B_1(\tau_1) = \frac{x_1 - x_0}{2(x_1 - x_{-1})},$$

$$\int_0^1 B_{2n}(t)dt = a_n B_{2n}(\tau_n) = \frac{x_{2n-1} - x_{2n-2}}{2(x_{2n} - x_{2n-2})},$$

които лесно се извеждат от явния вид на B–сплайните.

2.88, 2.89. Решават се както зад. 2.87.

2.90. Непосредствено се проверява, че разглежданата квадратурна формула е точна за функциите $1, x$. Ядрото на Пеано за квадратурната формула е

$$\begin{aligned} K_2(Q;x) \quad &= \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4n-2}\left(x - \frac{2}{6n-3}\right)_+ \\ &- \frac{2}{2n-1}\sum_{k=2}^{n-1}\left(x - \frac{4k-3}{4n-2}\right)_+ - \frac{3}{4n-2}\left(x - \frac{6n-5}{6n-3}\right)_+ . \end{aligned}$$

Като използваме това представяне, показваме индуктивно, че ако означим с $\{\tau_k\}_{k=1}^{n}$ възлите на разглежданата квадратурна формула, изпълнено е

$$K_2(Q;x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 & \text{за } 0 \le x \le \tau_1, \\ \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{2k-1}{2n-1}\right)\left(x - \dfrac{2k}{2n-1}\right) & \text{за } \tau_k \le x \le \tau_{k+1}, \\ \qquad\qquad k = 1, \ldots, n-1, & \\ \dfrac{1}{2}(x-1)^2 & \text{за } \tau_n \le x \le 1. \end{cases}$$

Съгласно зад. 2.24 квадратурната формула ще бъде точна за всяка от функциите

$$\left(x - \frac{i}{2n-1}\right)_+, \quad i = 1, 2, \ldots, 2n-2,$$

с което е установено, че формулата е точна за пространството X, тъй като тези функции заедно с $1, x$ образуват базис в това пространство. Използувайки последното представяне на $K_2(Q;x)$, пресмятаме

$$\int_0^1 |K_2(Q;x)|\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} |K_2(Q;x)|\,dx = \frac{n-1}{4(2n-1)^3},$$

където $\tau_0 := 0$, $\tau_{n+1} := 1$. Формулата за грешката сега се получава от следствие 2.2 от теоремата на Пеано.

Разглежданата квадратурна формула може да се получи и като се използуват формулите от зад. 2.87.

2.91, 2.92, 2.93. Решават се както зад. 2.90.