25.II.2014г. Числени методи на анализа

Милев

Литература:

1. Числени методи на анализа – Боянов

2. Сборник задачи по ЧМА

Крайна оценка $= \frac{2\,\text{текущ контрол} + 3\,\text{финален изпит}}{5}$

при усп. (финален изпит ≥ 3)
теория и задачи

~~фина~~

Част 1. Приближаване на функции

Осн. зад. Приближаване на сложни функции с прости функции.

Сложни функции:

- сложни аналитични изрази
  - много изтощителна работа
  - грешки от закръгляне
- таблично зададени функции

x_0	...	x_n
y_0	...	y_n

  - непълна информация
  - необходимост ~~информация, интересуваща~~ се диференциране, интегриране

Прости функции:

- прости ~~като~~ изрази
- лесно да се пресмята стойността
- лесно да се диференцира, интегрира
- хубави свойства, изучени
- да могат да приближават широки класове от функции

Например: $\int_a^b f(x)dx \approx ?$

1) $f(x) \approx \varphi_f(x)$ – проста функция

2) $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi_f(x)\,dx$

1.) алгебричните полиноми $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

$$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = (a_2 x + a_1)x + a_0$$

Хорнер: n умножения

2) тригонометричните полиноми

$$\tau(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$\tau(x + 2\pi) = \tau(x)$$

Приближаване на една функция с друга функция

Два типа критерий:

1) интерполационни критерии:

Избиране краен брой характеристики на функцията:

$L_0(f), \dots, L_n(f)$

Казваме, че $f \approx g$ ако $L_k(f) = L_k(g)$, $k = 0, \dots, n$

Примери: а) $L_k(f) = f(x_k)$, $x = \overline{0, n}$ (стойности в зададени точки)

б) $L_k(f) = \int_a^b f(x) \cdot x^k dx$, $x_k = \overline{0, n}$ (моменти)

2) метрични критерии

В пространството от функции F се въвежда метрика (разстояние)

$\rho(f, g)$ със свойства:

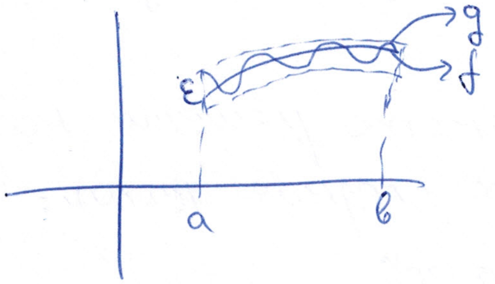
1) $\rho(f, g) \geq 0$, $= 0 \Leftrightarrow f = g$

2) $\rho(f, g) = \rho(g, f)$

3) $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$

Казваме, че $f \approx g$ ако $\rho(f, g) \approx 0$

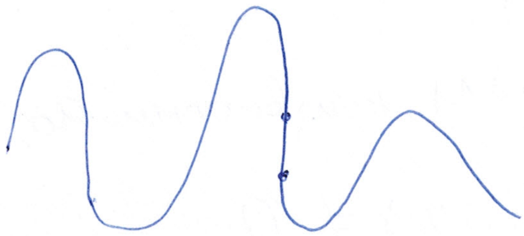
Примери: $\rho(f,g) = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$ 1) равномерно разстояние



$\rho(f,g) < \varepsilon$

2) интегрално разстояние

$$\rho(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$



1. Интерполационна формула на Лагранж

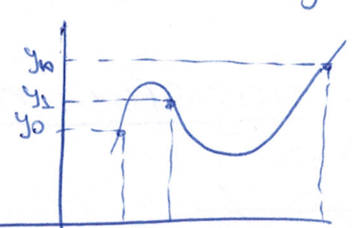
$\Pi_n = \left\{ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k : a_k \in \mathbb{R},\ k=\overline{0,n} \right\}$ - алгебричен полином от степен $\leq n$

Задача: Дадени са

- точки $x_0, \dots, x_n$ ($x_i \neq x_j$ за $i \neq j$) - „интерполационни възли"
- стойности $y_0, \dots, y_n$

Да се намери $p \in \Pi_n$:

(1) $p(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, n$



Единственост: Да допуснем, че съществуват $p_1, p_2 \in \Pi_n$: решават задача (1)

Да разгледаме $p(x) = p_1(x) - p_2(x) \in \Pi_n$ и

$p(x_k) = p_1(x_k) - p_2(x_k) = y_k - y_k = 0$, $k=\overline{0,n}$

И така, $p \in \Pi_n$ има $n+1 \neq$ нули $\Rightarrow$ (основна теорема на алгебрата) $\Rightarrow p(x) \equiv 0$, т.е. $p_1(x) \equiv p_2(x)$ □

Основна теорема на алгебрата: Всеки ненулев резултат от степен точно n $(n\geq 1)$ има точно n нули (вкл. компланарни, кратни)

Едновременно съществуване и единственото решение на задача (1) може да се докаже по следния начин:

Да потърсим $p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$

Тогава: $\left|\begin{array}{l} a_0+a_1x_0+\dots+a_nx_0^n=y_0 \\ \vdots \\ a_0+a_1x_n+\dots+a_nx_n^n=y_n \end{array}\right.$

– система $(n+1)$ уравнения за $(n+1)$ неизвестни: $a_0,\dots,a_n$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \overset{\text{известно}}{=} \prod_{i>j}(x_i-x_j)\neq 0$$

$\overset{\text{ПА}}{\Longrightarrow}$ (1) има единствено решение

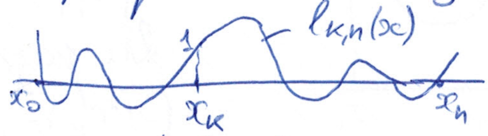
Построяване на решението на задачата (1).

Търсим решението $p(x)$ във вида

(2) $p(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k\, l_{k,n}(x)$ където $l_{k,n}\in\pi_n$ и удовлетворява условията:

(3) $l_{k,n}(x_i)=\delta_{ki}=\begin{cases}0, & k\neq i\\ 1, & k=i\end{cases}$

Полиномите $\{l_{k,n}\}_{k=0}^{n}$ се наричат базисни полиноми на Лагранж.



Ако сме построили полиномите $\{l_{k,n}\}_0^n$, то $p(x)$ (от (2)) е решение на (1). Действително: $p(x_i)=\sum_{k=0}^{n} y_k\, l_{k,n}(x_i) \overset{(3)}{=} \sum_{k=0}^{n} y_k\,\delta_{ki}=y_i$, $i=\overline{0,n}$

Намиране на $l_{k,n}(x)$:

$\pi_n \to l_{k,n}$ има n # нули: $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow l_{k,n}(x) = A(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)$$

При $x = x_k$: $1 = A(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (x_k-x_i)}$$

Оттук:

$$(4)\quad l_{kn}(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_n}{x_k-x_i}$$

Ако $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$, където f е дадена функция, то решението на (1) се бележи с $L_n(f,x)$ и се нарича <u>интерполационен полином на Лагранже</u> от π_n за f с възли $x_0, \dots, x_n$. Казваме още, че $L_n(f,x)$ <u>интерполира</u> f в точките $x_0, \dots, x_n$

<u>Теорема 1</u>: Нека са дадени $x_0, \dots, x_n$ ($x_i \neq x_j$, за $i \neq j$) и функцията f, която е дефинирана върху точките. Тогава съществува единствен полином от степен $\leq n$ (бележим го с $L_n(f,x)$), който удовлетворява условията
$L_n(f, x_k) = f(x_k)$, $k = 0, \dots, n$

При това е в сила <u>интерполационната формула на Лагранже</u>:

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, l_{k,n}(x),$$

където $\{l_{k,n}(x)\}_{k=0}^{n}$ се дават с формулите (4).

<u>Бележка</u>: Едно друго представяне на базисен полином е:

$$l_{k,n}(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\,\omega'(x_k)}, \text{ където } \omega(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n).$$

Действително $\frac{\omega(x)}{x-x_k}$ е число на (4).

$\omega'(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n) + \dots + (x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$

При $x = x_k$: $\omega'(x_k) =$ знаменател в (4).

Свойство: Ако $f \in \pi_n$, то $L_n(f;x) = f(x)$.

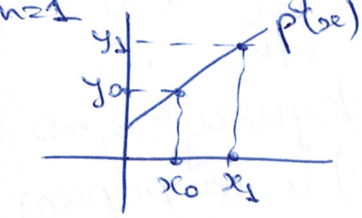
Доказателство: В двете страни са полиноми от π_n и решава една и съща задача.

x_0	$\dots$	x_n
$f(x_0)$	$\dots$	$f(x_n)$

От ~~едновремен~~ единствеността в задачата на Лагранж $\Rightarrow$ двата полинома съвпадат.

Частен случай:

$n=1$



$p \in \pi_1 : p(x_0) = y_0 \;,\; p(x_1) = y_1$

$$p(x) = y_0 \cdot l_{0,1}(x) + y_1\, l_{1,1}(x)$$

$$= y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

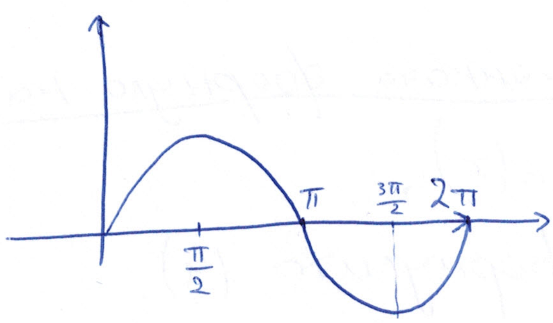
$l_{0,1}(x_1) = 0$

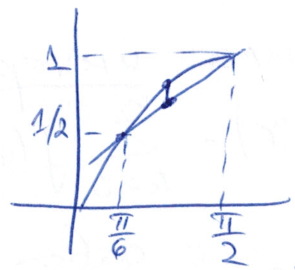
$l_{0,1}(x_0) = 1$

Упражнение: Подробно формулата на Лагранж $n=2$

Пример: Да се намери $L_1(f,x)$ за $f(x) = \sin x$ при $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$. Да се използва $L_1(f,x)$ за приближено намиране на $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$

Решение:





$y_0 = \frac{1}{2}$ $\quad x_0 = \frac{\pi}{6}$

$y_1 = 1$ $\quad x_1 = \frac{\pi}{2}$

$$p(x) = \frac{1}{2} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}} + 1 \cdot \frac{x - \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{-\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{6}\,3}} + \frac{x - \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{3}} = -\frac{3}{2\pi} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{3}{2\pi} x + \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx L_1\left(f, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{3}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

грешка $\approx \underline{\underline{0{,}08}} \leq 0{,}1$