08.V.2014г. ЧМН – лекция

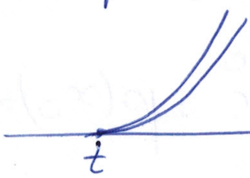
10. B-сплайни

$s \in S_{r-1}(x_1,\dots,x_n)$

$(x_1<\dots<x_n)$

$$s(x)=\sum_{i=0}^{r-1} a_i x^i + \sum_{k=1}^{n} c_k (x-x_k)_+^{r-1}$$

Деф: B-сплайн от $(r-1)$-степен с възли $x_0<\dots<x_r$ се нарича функцията: $B(t) := (x-t)_+^{r-1}[x_0,\dots,x_r]$
(т.е. разделена ~~р-ка~~ разлика на $f(x)=(x-t)_+^{r-1}$ в т. $x_0,\dots,x_r$)



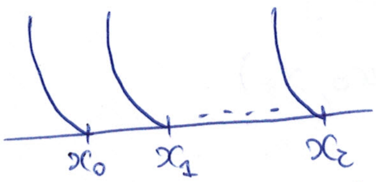
Други означения:
$B_{r-1}(t)$
$B(x_0,\dots,x_r;t)$

От свойството на разделената разлика (РР):

$$(*)\ B(t)=\sum_{k=0}^{r} \frac{(x_k-t)_+^{r-1}}{\omega'(x_k)},\quad \omega(x)=(x-x_0)\dots(x-x_r) \Rightarrow B(t)\in S_{r-1}(x_0,\dots,x_r)$$

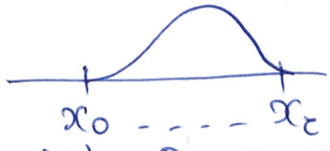
Св-во: $B(t)=0$ за $t<x_0$ и $t>x_r$.

Д-во:



$\Rightarrow$ за $t>x_r$: $B(t) \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{r} 0 = 0$

Нека сега $t<x_0$: От $(*)$: $B(t)=\sum_{k=0}^{r} \frac{(x_k-t)^{r-1}}{\omega'(x_k)} \overset{PP}{=} (x-t)^{r-1}[x_0,\dots,x_r] = 0$
полиноми от $r-1$ сте

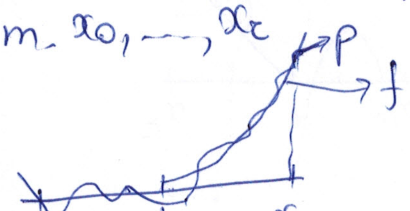


Теорема 1: $B(t)>0$ за $t\in(x_0,x_r)$ $\boxed{x_+^k = \begin{cases} x^k, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}}$

Доказателство: Фиксираме $t\in(x_0,x_r)$

$B(t) \overset{деф}{=}$ коеф. пред x^r в $p\in\pi_r$, който инт. $f(x)=(x-t)_+^{r-1}$ в т. $x_0,\dots,x_r$

? Коеф. >0



Разглеждаме $g(x)=f(x)-p(x)$.
Очевидно $g(x_k)=0$, $k=\overline{0,r}$
Да забележим, че $x_0,\dots,x_r$ са изолирани н
на g, т.е. $\forall k=\overline{0,r-1}$: $g(x)\not\equiv 0$ в (x_k,x_{k+1})

Да допуснем, че за някое k:

$g(x) \equiv 0$ в (x_k, x_{k+1})

Тогава поне един от $I = (x_k, x_{k+1}) \cap (x_0, t)$ и

$J = (x_k, x_{k+1}) \cap (t, x_r)$ е $\neq \emptyset$

Ако $I \neq \emptyset$: $\underbrace{g(x)}_{f(x) - p(x)} = 0, \forall x \in I$

$\Rightarrow p(x) \equiv 0$

Аналог. ако $J \neq \emptyset \Rightarrow p(x) \equiv (x-t)^{r-1} \to \overset{\circ}{x}$, $p(x_0) = 0$

$g \in C^1[a,b]$ и a, b - изолирани нули, то

Ако $g(a) = g(b)$ ~~то~~ $g'(x)$ си сменя знака в (a,b).

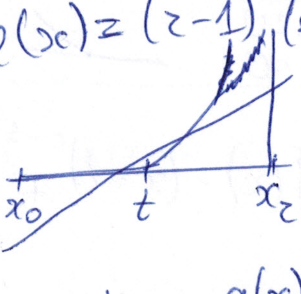
$g(x)$ има $r+1$ изолирани нули $x_0 < \dots < x_r$ в (x_0, x_r) и т.н.

$\Rightarrow g'(x)$ има r смени на знака

$g^{(r-2)}(x)$ има 3 смени на знака в (x_0, x_r)

$g^{(r-2)}(x) = \underbrace{f^{(r-2)}(x)}_{\varphi(x)} - \underbrace{p^{(r-2)}(x)}_{q \in \pi_2}$

$\varphi(x) = (r-1)!\,(x-t)_+^1$

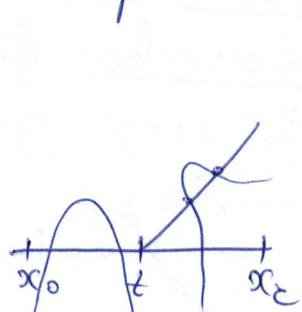


Не е възможно $q \in \pi_1$ (виж чертежа)

И така $q(x) = cx^2 + \dots$, $c \neq 0$

Сега ще докажем, че $c > 0$. Иначе $c < 0$:

(от чертежа $\Rightarrow$ не може $\varphi - q$ да 3 смени $\overset{\circ}{x}$



Но: $p(x) = B(t)x^r + \dots$

$q(x) = p^{(r-2)}(x) = \frac{r!}{2!} B(t) x^2 + \dots \Rightarrow B(t) > 0$ $\square$