01.IV.2014г. Числени методи на анализа – лекция

$T_n = \{a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx : a_k, b_k \in R\}$

Ако са дадени т. $x_0 < \dots < x_{2n}$ в $[0, 2\pi]$ и f е диф. б/у тях, то $\exists!\ \tau_n(f;x) \in T_n$:

(1) $\tau_n(f, x_k) = f(x_k)$, $k = \overline{0, 2n}$

Търсим решение на (1) във вида $\tau_n(f,x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \lambda_k(x)$,

$\lambda_k \in T_n$ и удовлетворява (2) $\lambda_k(x_j) = \delta_{kj}$, $\forall j,k = \overline{0, 2n}$

Съгласно Лема 1 (д-во): $\lambda_k(x) = e^{-inx} P_{2n,k}(e^{ix})$, $P_{2n}(z) \in \Pi_{2n}$

$x = x_j$: $\delta_{kj} = \lambda_k(x_j) = e^{-inx_j} P_{2n,k}(e^{ix_j})$

$z_j = e^{ix_j}$, $j = \overline{0, 2n}$

$$P_{2n,k}(z_j) = e^{inx_j}\delta_{kj} = z_j^n \delta_{kj} = \begin{cases} z_k^n, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \Rightarrow P_{2n}(z) = z_k^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{2n} \frac{z - z_j}{z_k - z_j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_k(x) = e^{-inx} e^{inx_k} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{2n} \frac{e^{ix} - e^{ix_j}}{e^{ix_k} - e^{ix_j}}$$

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \Big[\underbrace{e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}}_{2i \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\Big]$$

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{2n} \dots = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{2n} \frac{e^{i\frac{x+x_j}{2}} \cdot 2i \sin\frac{x-x_j}{2}}{e^{i\frac{x_k+x_j}{2}} \cdot 2i \sin\frac{x_k-x_j}{2}} \overset{\text{съкр. } e^{ix_j/2}}{=} \frac{e^{inx}}{e^{inx_k}} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{2n} \frac{\sin\frac{x-x_j}{2}}{\sin\frac{x_k-x_j}{2}}$$

Заместване по-горе $\Rightarrow$ (3) $\lambda_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{2n} \frac{\sin\frac{x-x_j}{2}}{\sin\frac{x_k-x_j}{2}}$

Теорема 2: Решението на задача (1) се дава с $\tau_n(f,x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k)\lambda_k(x)$, където $(\lambda_k)_0^{2n}$ са дадени с (3).

Нека разгледаме случая на равноотдалечените възли, т.е.

(4) $x_j = \frac{2\pi j}{2n+1}$, $j = \overline{0, 2n}$

Цел: Да се намерят явни изрази за коеф. $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ на
$\tau_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, т.е. ~~интегриране~~ интерполиране f в (4).

Твърдение 1: Изп. са (при възлите (4))

$$S_1 = \sum_{j=0}^{2n} \cos kx_j = \begin{cases} 2n+1, & k=(2n+1)s,\ s\in\mathbb{Z} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$S_2 = \sum_{j=0}^{2n} \sin kx_j = 0, \ \forall k$$

Доказателство: $S = S_1 + iS_2 = \sum_{j=0}^{2n} e^{ikx_j} = \sum_{j=0}^{2n} e^{ik\cdot\frac{2\pi j}{2n+1}} = \sum_{j=0}^{2n} \Big(\underbrace{e^{i\frac{2\pi k}{2n+1}}}_{q}\Big)^j$

1сл.) $q=1 \iff \frac{2\pi k}{2n+1} = 2\pi s \iff k=(2n+1)s$

$S = 2n+1 \Rightarrow S_1 = 2n+1, \ S_2 = 0$

2сл.) $q \neq 1$: $S = \frac{q^{2n+1}-1}{q-1} = \frac{e^{i2\pi k}-1}{q-1} = 0 \Rightarrow S_1 = S_2 = 0$ ■

f, g - функции, деф. в/у $x_j = \frac{2\pi j}{2n+1}$, $j=\overline{0,2n}$, то

$(f,g) = \sum_{j=0}^{2n} f(x_j)\cdot g(x_j)$ - к. произв.

Твърдение 2: При (x_j) от (4) функциите $\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx\}$ образуват ортогонална система в/у $(x_j)_0^{2n}$.

По-точно: $(\cos kx, \cos lx) = (\sin kx, \sin lx) = 0, \ k \neq l$

$(\cos kx, \sin lx) = 0, \ \forall k,l \in \{0,\dots,n\}$

$$(\cos kx, \cos kx) = \begin{cases} 2n+1, & k=0 \\ \frac{2n+1}{2}, & k=\overline{1,n} \end{cases}$$

$(\sin kx, \sin kx) = \frac{2n+1}{2}, \ k=\overline{1,n}$

Доказателство: $k \neq l$

$(\cos kx, \cos lx) = \sum_{j=0}^{2n} \cos kx_j \cos lx_j = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2n} \cos(k-l)x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2n} \cos(k+l)x_j$

1 сума: $0 < |k-l| \le n \xrightarrow{\text{Тв.1}}$ 1 сума $=0$

2 сума: $0 < k+l < 2n \xrightarrow{\text{Тв.2}}$ 2 сума $=0$

Аналогично и за останалите ■

$T_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$

Търсим $a_k = ?$ $(k \ge 1)$

$T_n(x_j) = f(x_j), \ j=\overline{0,2n} \Rightarrow T_n(x_j)\cos kx_j = f(x_j)\cos kx_j, \ j=\overline{0,n} \ / \sum_{j=0}$

$(T_n(x), \cos kx) = (f(x), \cos kx) \overset{\text{ортог.}}{=} a_k(\cos kx, \cos kx) \overset{\text{Тв.2}}{=} a_k \frac{2n+1}{2}$

$\Rightarrow a_k = \frac{2}{2n+1}(f, \cos kx) = \frac{2}{2n+1}\sum_{j=0} f(x_j)\cos kx_j$

Същото е вярно и за $k=0$ $a_0 = \frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} f(x_j)$

Теорема 3: Ако $I_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ интерполираме f в $x_j = \frac{2\pi j}{2n+1}$, $j = \overline{0,2n}$, то

$$\left.\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\} = \frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} f(x_j)\begin{cases}\cos kx_j \\ \sin kx_j\end{cases}$$

Теорема 4: Нека $x_j = \frac{2\pi j}{2n} = \frac{\pi j}{n}$, $j = \overline{0, 2n-1}$

Тогава $\exists!$ тригонометричен полином от вида $\varphi_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kx + b_k \sin kx + \frac{a_n}{2}\cos nx$, т.че $\varphi_n(f, x_j) = f(x_j)$, $j = \overline{0, 2n-1}$.

При това $\left.\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{2n-1} f(x_j)\begin{cases}\cos kx_j \\ \sin kx_j\end{cases}$

(Без доказателство)

Бележка: Общи формули за двата случая: $N = 2n+1$ $(2n)$

$$\left.\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\} = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\begin{cases}\cos kx_j \\ \sin kx_j\end{cases}$$

8. Бързо преобразуване на Фурие.

Ред на Фурие

(1) $f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx,$

(2) $\left.\begin{matrix} A_k \\ B_k \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\begin{cases}\cos kx \\ \sin kx\end{cases} dx$

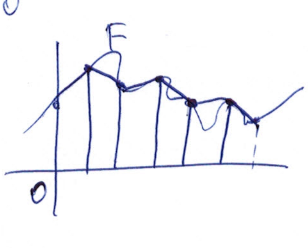
Комплексна форма

(1') $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx}$

(2') $C_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx, \ \forall k$

$$\int_0^{2\pi} F(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} F(x)\,dx \approx \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{\frac{x_{j+1}-x_j}{2}}_{\frac{\pi}{N}}\left[F(x_j) + F(x_{j+1})\right] = \frac{\pi}{N}\left[F(x_0) + 2\sum_{j=0}^{N-1} F(x_k) + F(x_N)\right]$$

$$= \frac{2\pi}{N}\sum_{j=0}^{N-1} F(x_j)$$



F – 2π – трапецовидна функция

$x_j = \frac{2\pi j}{N}$, $j = \overline{0, N}$

Оттук:

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-ikx_j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-\frac{2\pi i jk}{N}} =: c_k$$

<u>Определение:</u> Нека $f = (f_0, \ldots, f_{N-1})$. Дискретно преобразуване на Фурие (ДПФ) на f е $c = (c_0, \ldots, c_{N-1})$:

$$\left| \begin{array}{l} c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-\frac{2\pi i jk}{N}} \\ k = 0, \ldots, N-1 \end{array} \right.$$

Означаване $q_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j q_N^{jk} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j (q_N^k)^j$$ – полином от $N-1$ степен на q_N.

Предварително знаем $\{q_N^k\}_0^{N-1}$

Хорнер: $N-1$ умножения за едно $c_k \Rightarrow$ общо c: N^2 умножения ~~множества~~

Кули, Тюки: $N = 2^n$ ДПФ: $N \log_2 N$

$n = 10$: $N \approx 10^3$ $N^2 \approx 10^6$

$N \log_2 N \approx 10^4$ $\Rightarrow$ 100 <u>пъти</u> по-бързо!