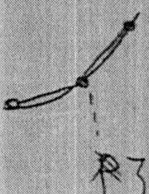
Лекции ЧМ 10.03.2014

2 тип (за контролното)

1. Нека $l_{k,n}(x)$, $k=\overline{0\div n}$ са базисните полиноми на Лагранж съответни на възлите $x_0 \dots x_n$
Да се намери (с д-во)
$\sum_{k=0}^{n} (x-x_k)^{n+1} l_{k,n}(x)$ \сума от базисите = 1\

2. Нека $f\in C^2[0,1]$ и е известно, че $|f''(x)| \le x^2$
$\forall x$ $[0,1]$ за $\xi \in (0,1)$ да означим с $P_\xi(x)$
линейната в $[0,\xi]$ $[\xi,1]$ непрекъсната ф-я,
която интерполира f в $\{0,\xi,1\}$
Да се определи ξ, така че $\max_{x\in[0,1]} x|f(x)-P_\xi(x)| \le 0{,}02$



3. Нека $(\eta_k)_0^n$ са екстремалните точки на полинома на Чебишов $T_n(x)$. Да се док, че ако $p\in\pi_n$ и $|p(\eta_k)|\le 1$ за $k=0\div n$, то $|p(x)| \le |T_n(x)|$ за $\forall |x|\ge 1$

4. Нека $x_k \ne 0, -1$ за $k=\overline{1,n}$ Намерете (с д-во)
$\sum_{k=1} \frac{x_k^n f(1/x_k)}{f'(x_k)(1+x_k)}$, където $f(x)=(x-x_1)\dots(x-x_n)$

5. Нека $l_{kn}(x)$, $k=\overline{0,n}$ са базисни полиноми на Лагранж съответно на $x_0 \dots x_n$ $\omega(x)=(x-x_0)\dots(x-x_n)$
$\varphi_k(x) = \left(1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right) l_{kn}^2(x)$, $k=\overline{0,n}$
Докажете, че $\varphi_k'(x_k)=0$, $k=\overline{0,n}$

6. Да се док., че ф-ите
$\{1, e^{2x}, e^{5x^2}\}$ образуват система на Чебишов
в $(-\infty,\infty)$

Лекции ЧМ

2 тип: (за контролното)

1. Нека $l_{k,n}(x)$, $k=\overline{0 \div n}$ са базисните полиноми на Лагранж съответни на възлите $x_0 \dots x_n$
Да се намери (с д-во)
$$\sum_{k=0}^{n}(x-x_k)^{n+1} l_{k,n}(x)$$ \сума от базисите = 1\

2. Нека $f\in C^2[0,1]$ и е известно, че $|f''(x)|\le x^2$ $\forall x\in[0,1]$ за $\xi\in(0,1)$ да означим с $P_\xi(x)$ линейната в $[0,\xi]$ $[\xi,1]$ непрекъсната ф-я, която интерполира f в т. $\{0,\xi,1\}$.
Да се определи ξ, така че $\max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)-P_\xi(x)|\le 0,02$

$P\xi$

3. Нека $(\eta_k)_0^n$ са екстремалните точки на полинома на Чебишов $T_n(x)$. Да се док., че ако $p\in\pi_n$ и $|p(\eta_k)|\le 1$ за $k=0\div n$, то $|p(x)|\le|T_n(x)|$ за $\forall |x|\ge 1$

4. Нека $x_k\ne 0,-1$ за $k=\overline{1,n}$ Намерете (с д-во)
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^n\, f(1/x_k)}{f'(x_k)(1+x_k)},$$ където $f(x)=(x-x_1)\dots(x-x_n)$

5. Нека $l_{kn}(x)$, $k=\overline{0,n}$ са базисни полиноми на Лагранж съответно на $x_0\dots x_n$ $\omega(x)=(x-x_0)\dots(x-x_n)$
$$\varphi_k(x)=\left(1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right)l_{kn}^2(x),\ k=\overline{0,n}$$
Докажете, че $\varphi_k'(x_k)=0$, $k=\overline{0,n}$

6. Да се док., че ф-ите $\{1,e^{2x},e^{5x^2}\}$ образуват система на Чебишов в $(-\infty,\infty)$

Филип Гезков 31334 ПМ

Нека $x_k \neq 0, -1$ за $k = \overline{1,n}$ Намерете

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n \, f\left(\frac{1}{x_k}\right)}{f'(x_k)(1+x_k)}$$, където $f(x) = (x-x_1), (x-x_n)$

$f(x) = (x-x_1) \dots (x-x_n)$

Нека $x_0 = -1$ и $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ имаме $n+1$ различни точки

$$w(x) = \prod_{k=0}^{n} (x-x_k)$$

(1) $w(x) = f(x)(x+1) + f(x)$

Диференцираме (1)

(2) $w'(x) = f'(x)(x+1) + f(x)$

Полагаме $x = x_k$ $k = 1, \dots, n$ в (2) и получаваме

$w'(x_k) = f'(x_k)(1+x_k)$ $k = 1, \dots, n$

Въвеждаме функцията

$$g(x) = x^n f\left(\tfrac{1}{x}\right) = x^n \left(\tfrac{1}{x} - x_1\right) \dots \left(\tfrac{1}{x} - x_n\right) = (1 - x_1 x) \dots (1 - x_n x)$$

$$= (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n . x^n + P_{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n f\left(\frac{1}{x_k}\right)}{f'(x_k)(1+x_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{g(x_k)}{w'(x_k)} + \frac{g(-1)}{w(-1)} - \frac{g(-1)}{w'(-1)} =$$

$$= g[x_0, \dots, x_n] - \frac{g(-1)}{w'(-1)} = (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n - \frac{(1-x_1) \dots (1+x_n)}{(-1-x_1) \dots (-1-x_n)} =$$

$$= (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n + (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1} (1 - x_1 x_2 \dots x_n)$$

Филип Генчов   31334 ПМ

Нека $l_{kn}(x), k=\overline{0,n}$ са базисни полиноми на Лагранж съответно на $x_0, \dots, x_n$ $w(x) = (x-x_0)\dots(x-x_5)$

$\varphi_k(x) = \left(1 - \frac{w''(x_k)}{w'(x_k)}(x-x_k)\right) l_{kn}^2(x), k=\overline{0,n}$

$W_k(x) = (x-x_0)\dots(x-x_{k-1})\dots(x-x_n)$

(1) $W_k(x).(x-x_k) = w(x)$

Диференцираме (1)

(2) $W_k'(x)(x-x_k) + W_k(x) = w'(x)$

При $x=x_k$ получаваме

(3) $W_k(x_k) = w'(x_k)$

Диференцираме (2)

$W_k''(x)(x-x_k) + 2W_k'(x) = w''(x)$

При $x=x_k$ получаваме

(4) $2W_k'(x_k) = w''(x_k)$

$\varphi_k(x) = \left(1 - \frac{w''(x_k)}{w'(x_k)}(x-x_k)\right)\frac{W_k^2(x)}{w'^2(x_k)}$

$\varphi_k'(x) = -\frac{w''(x_k)}{w'(x_k)} \cdot \frac{W_k^2(x)}{w'^2(x_k)} + \left(1 - \frac{w''(x_k)}{w'(x_k)}(x-x_k)\right) 2\frac{W_k(x)W_k'(x)}{w'^2(x_k)}$

При $x=x_k$ получаваме

$\varphi_k'(x_k) = -\frac{w''(x_k)}{w'(x_k)}\frac{W_k^2(x_k)}{w'^2(x_k)} + \frac{2W_k(x_k)W_k'(x_k)}{w'^2(x_k)}$

Като използваме (3) и (4) изразяваме всичко с w

$\varphi_k'(x_k) = \frac{-w''(x_k)w'^2(x_k)}{w'(x_k)w'^2(x_k)} + \frac{w''(x_k)w'(x_k)}{w'^2(x_k)} = 0$

Филип Гецков 31334 ПМ

Да се док., че ф-ите

$[1, e^{2x}, e^{5x^2}]$ Образуват с-ма на Чебишов в $(-\infty; +\infty)$

Д-во:

Да допуснем, че

(1) $f(x) = a_0 + a_1 e^{2x} + a_2 e^{5x^2}$ има 3 различни нули в $(-\infty; +\infty)$

Трябва да покажем, че $a_0 = a_1 = a_2 = 0$

По теоремата на Рол

$f'(x) = 2a_1 e^{2x} + a_2 e^{5x^2} \cdot 10x$ ще има 2 различни нули

(2) $g(x) = e^{-2x} f'(x) = 2a_1 + 10a_2 x e^{5x^2 - 2x}$ има 2 различни нули

По Теоремата на Рол.

$g'(x) = 10a_2 \left(e^{5x^2-2x} + x(10x-2)e^{5x^2-2x}\right)$ има нула

(3) $g'(x) = 10a_2 \underset{\overset{\vee}{0}}{e^{5x^2-2x}} \underset{\overset{\vee}{0}}{(10x^2 - 2x + 1)}$ има нула

От (3) получаваме, че $a_2 = 0$. Последователно от (2) и (1) получаваме, че $a_1 = 0$, $a_0 = 0$.

Филип Гецков 31334 ПМ

Нека $l_{k,n}(x)$, $k=0 \div n$ – баз. полиноми на Лагранж съответни на възлите $x_0 \dots x_n$

Намерете $\sum\limits_{k=0}^{n} (x-x_k)^{n+1} l_{k,n}(x)$

$f(t) = (x-t)^{n+1}$ x- фиксирано

От $\rightarrow f(t) - L_n(f;t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(t)$

$$(x-t)^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} (x-x_k)^{n+1} l_{kn}(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(t)$$

Полагаме $t=x$ $\longrightarrow f^{(n+1)}(\xi) = (-1)^{n+1} \cdot (n+1)!$

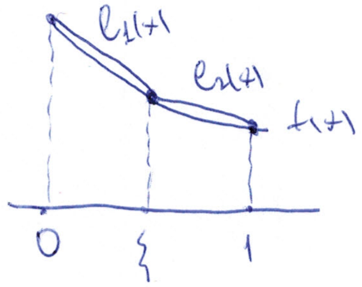
получаваме:

$$-\sum_{k=0}^{n} (x-x_k)^{n+1} l_{kn}(x) = \frac{\cancel{(n+1)!}(-1)^{n+1}}{\cancel{(n+1)!}} w(x)$$

$$\sum_{k=0}^{n} (x-x_k)^{n+1} l_{kn}(x) = (-1)^{n} w(x)$$

Филип Генцов 31334 ПМ

Нека ~~функция~~ $f \in C^2[0,1]$ и е известно, че $|f''(x)| \le x^2$ $\forall x [0,1]$ За $\xi \in (0,1)$ да означим с $P_\xi(x)$ линейната в $[0,\xi]$ $[\xi,1]$ непрекъсната ф-я, която интерполира в f в $f(0,\xi,1)$. Да се намери ξ, така че $\max x|f(x)-P_\xi(x)| \le 0,02$ $x \in [0,1]$



$$P_\xi(x) = \begin{cases} l_1(x) & x \in [0,\xi] \\ l_2(x) & x \in [\xi,1] \end{cases}$$

$$\max_{x \in [0,\xi]} |f(x)-l_1(x)| \le \max \frac{|f''(\eta)|}{2!} \max_{x \in [0,\xi]} |x(x-\xi)| \le \frac{\xi^2}{2} \cdot \frac{\xi^2}{4} = \frac{\xi^4}{8}$$

$$\max_{x \in [\xi,1]} |f(x)-l_2(x)| \le \max \frac{|f''(\eta_2)|}{2!} \max |(x-\xi)(x-1)| \le \frac{1}{2} \frac{(1-\xi)^2}{4} = \frac{(1-\xi)^2}{8}$$

$$\max_{[0,1]} |f(x)-P_\xi(x)| \le \max \left\{ \frac{\xi^4}{8}, \frac{(1-\xi)^2}{8} \right\}$$

$\frac{\xi^4}{8} \le 0,02$, $\frac{\xi^4}{8} \le \frac{2}{100}$, $\xi^4 \le \frac{16}{100}$, $\xi \le \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

$\frac{(1-\xi)^2}{8} \le \frac{2}{100}$, $(1-\xi)^2 \le \frac{16}{100}$, $1-\xi \le \frac{4}{10}$, $\xi \le \frac{3}{5}$

$\Rightarrow \xi \in \left[\frac{3}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right]$ $\max_{x \in [0,1]} |f(x)-P_\xi(x)| \le 0,02$

Филип Гецков 31334 ПМ

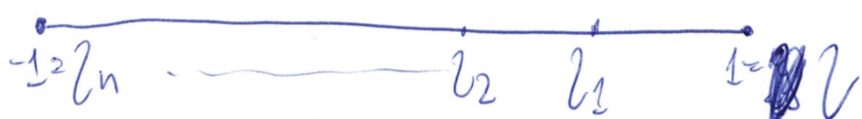
Нека $(\eta_k)_0^n$ са екстремалните точки на полиноми на Чебишов $T_n(x)$. Да се докаже, че ако $p \in \Pi_n$ и $|P(\eta_k)| \le 1$ за $k = 0 \div n$, то $|p(x)| \le |T_n(x)|$ за $\forall |x| \ge 1$

$\eta_k = \cos\frac{k\pi}{n}$ $k = 0, \dots, n$ $\qquad$ $l_{kn}(x)$ - базисни полиноми

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} P(\eta_k)\, l_{kn}(x)$$

за $\forall x$ $|P(x)| \le \sum_{k=0}^{n} \overbrace{|P(\eta_k)|}^{\le 1} |l_{kn}(x)| \le \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)|$

$$l_{kn}(x) = \frac{(x-\eta_0)\dots(x-\eta_{k-1})(x-\eta_{k+1})\dots(x-\eta_n)}{\underset{<0}{(\eta_k-\eta_0)}\dots\underset{<0}{(\eta_k-\eta_{k-1})}\underset{>0}{(\eta_k-\eta_{k-1})}\dots\underset{>0}{(\eta_k-\eta_n)}}$$



В знаменател на $l_{kn}(x)$ има k отрицателни множители

За $x \ge 1$ всички множители в числител на $l_{kn}(x)$ са ≥ 0

За $x \ge 1$ $|l_{kn}(x)| = (-1)^k l_{kn}(x)$

За $x \le -1$ всички n на брой множители в числителя на $l_{kn}(x)$ са ≤ 0

За $x \le -1$ $|l_{kn}(x)| = (-1)^{k+n} l_{kn}(x)$

За $x \ge 1$ $|P(x)| \le \sum_{k=0}^{n} (-1) l_{kn}(x) = \sum_{k=0}^{n} T_n(\eta_k)\, l_{kn}(x) = T_n(x) = |T_n(x)|$

За $x \le -1$ $|P(x)| \le (-1)^n T_n(x) = |T_n(x)|$