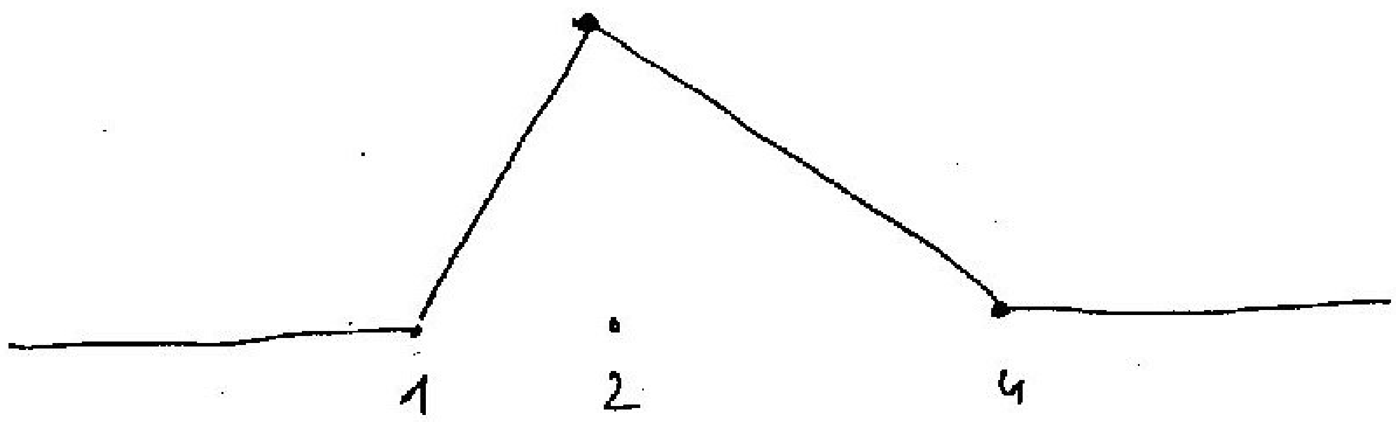
① задача

$B(1,2,4;t)$ изглежда така



По дефиниция

$$B(1,2,4;t) = (x-t)_+^{2-1}[1,2,4] = (x-t)_+[1,2,4]$$

като разд. разлика е по отношение на x

$$B(1,2,4;t) = \frac{(1-t)_+}{\omega'(1)} + \frac{(2-t)_+}{\omega'(2)} + \frac{(4-t)_+}{\omega'(4)} \quad \text{за всяко } t,$$

$\omega(x) = (x-1)(x-2)(x-4)$

За $t \in [2,4]$

$$B(1,2,4;t) = \frac{(4-t)}{(4-1)(4-2)} = -\frac{1}{6}t + \frac{2}{3}$$

$$B(1,2,4;2) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

За $t \in [1,2]$ $B(1,2,4;t)$ е полином от π_1, който $=0$ в точката $t=1$, т.е $B(1,2,4;t) = C(t-1)$

Константата C определяме от условието

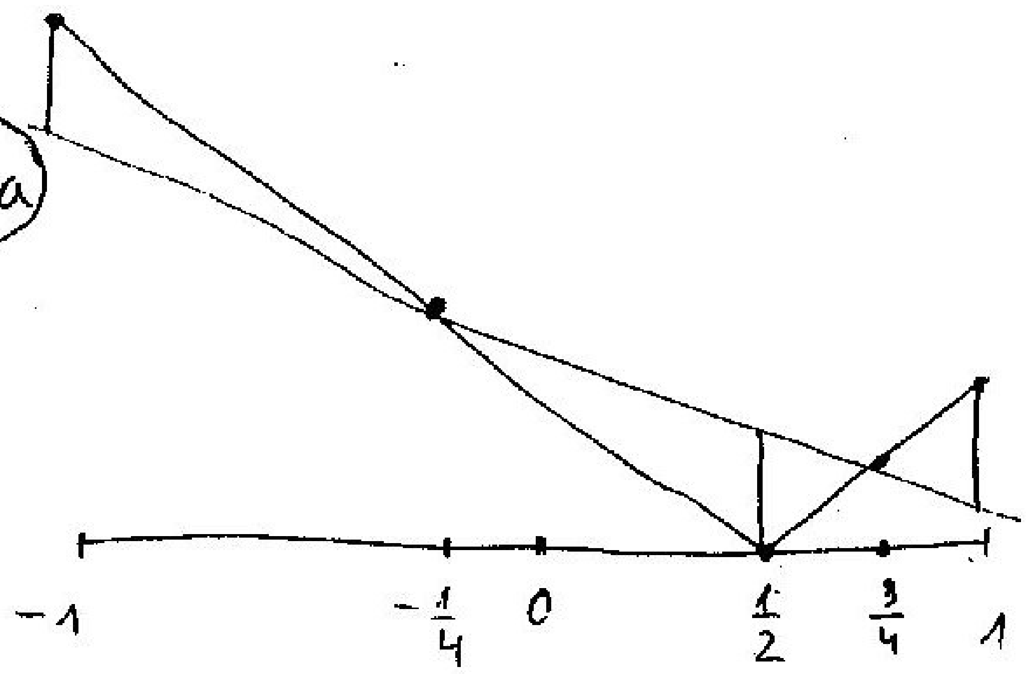
$B(1,2,4;2) = \frac{1}{3}$, т.е $C(2-1) = \frac{1}{3} \Rightarrow C = \frac{1}{3}$

т.е $B(1,2,4;t) = \frac{1}{3}(t-1) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$ за $t \in [1,2]$

Окончателно

$$B(1,2,4;t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}, & t \in [1,2] \\ -\frac{1}{6}t + \frac{2}{3}, & t \in [2,4] \end{cases}$$

2 задача



Разглеждаме полинома $P \in \pi_1$, който интерполира $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$ в точките $-\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$, т.е в средите на интервалите $[-1, \frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2}, 1]$

$$f(-\tfrac{1}{4}) = \left|-\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\right| = \tfrac{3}{4}$$

$$f(\tfrac{3}{4}) = \left|\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}\right| = \tfrac{1}{4}$$

$$P = P(-\tfrac{1}{4}) + P[-\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}](x + \tfrac{1}{4})$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{3}{4} - (-\frac{1}{4})}(x + \tfrac{1}{4})$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}(x + \tfrac{1}{4}) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{8}$$

Ясно е, че разликата $f - P$ приема най-голямата си по модул стойност в интервала $[-1, 1]$ в точките (3 на брой) $x_0 = -1$, $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = 1$, при това с алтернативно сменящи се знаци

$$f(x_0) - P(x_0) = -\left(f(x_1) - P(x_1)\right) = f(x_2) - P(x_2) = \max_{x \in [-1,1]} |f(x) - P(x)| =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

По теоремата на Чебишов за алтернанса $P = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{8}$ е ПНДРП от 1 степен за $f(x)$ в $[-1, 1]$

и $E_1(f) = \frac{3}{8}$

$\boxed{3 \text{ задача}}$

Имаме най-добро приближение в хилб. п-во със скаларно произведение

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} \mu(x) f(x) g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx \qquad (\mu(x) \equiv 1)$$

Нека $P = Ax + B$ е търсения полином

От условията за ортогоналност на $f - P$ на π_1, т.е. на 1 и x получаваме

$$\left|\begin{array}{l} \int_{-1}^{1} \left(e^x - (Ax+B)\right).1\,dx = 0 \\ \int_{-1}^{1} \left(e^x - (Ax+B)\right)x\,dx = 0 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \left(\int_{-1}^{1} 1\,dx\right).B + \left(\int_{-1}^{1} x\,dx\right)A = \int_{-1}^{1} e^x dx \\ \left(\int_{-1}^{1} x\,dx\right)B + \left(\int_{-1}^{1} x^2 dx\right)A = \int_{-1}^{1} e^x . x\,dx \end{array}\right.$$

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2, \quad \int_{-1}^{1} x\,dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} e^x dx = e^x\Big|_{-1}^{1} = e - e^{-1}$$

Интегралът $\int_{-1}^{1} e^x . x\,dx$ пресмятаме с интегриране по части

$$\int_{-1}^{1} e^x . x\,dx = \int_{-1}^{1} x\,de^x = e^x x\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x . dx = e + e^{-1} - (e - e^{-1}) = 2e^{-1}$$

Получаваме лин. с-ма

$$\left|\begin{array}{l} 2B = e - e^{-1} \Rightarrow B = \frac{e - e^{-1}}{2} \\ \frac{2}{3}A = 2e^{-1} \Rightarrow A = 3e^{-1} \end{array}\right.$$

$$\boxed{P = 3e^{-1} . x + \frac{e - e^{-1}}{2}}$$

Провери!

4 зад

x_i	0	1	3	4
f_i	5	2	2	1

Имаме най-добро приближение в хилб. п-во със скаларно произведение $\sum_{i=1}^{4} f(x_i)g(x_i) = (f,g)$

Нека $P = Ax+B \in \Pi_1$ е търсения полином.

От условията за ортогоналност на $f-P$ с 1 и X получаваме линейна с-ма с неизвестни A и B

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} (f_i - (Ax_i+B)).1 = 0 \\ \sum_{i=1}^{4} (f_i - (Ax_i+B))x_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{4} 1\right) B + \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right) A = \sum_{i=1}^{4} f_i \\ \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right) B + \left(\sum_{i=1}^{4} x_i^2\right) A = \sum_{i=1}^{4} f_i x_i \end{cases}$$

Сумите пресмятаме като използваме таблицата

$$\begin{cases} 4B + 8A = 10 \\ 8B + 26A = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4B + 8A = 10 \\ 4B + 13A = 6 \end{cases} \Rightarrow 5A = -4, \quad A = -\frac{4}{5}$$

$$4.B + 8.\left(-\frac{4}{5}\right) = 10$$

$$4B = 10 + \frac{32}{5} = \frac{82}{5} \qquad B = \frac{82}{20} = \frac{41}{10}$$

Окончателно: търсения полином е $P = -\frac{4}{5}x + \frac{41}{10}$

Провери все пак!