Числени методи на Анализа

Контролно

1 тип:

① Като използвате инт. ф-ла на Лагранж, намерете $p \in \pi_2$: $p(-1) = 2$, $p(1) = 2$, $p(2) = 5$. Представете $p(x)$ по степените на x.

② Пол. $L_2(f, x)$ инт. $f(x) = e^x$ в т. $-1, 0, 1$. Като използвате ф-лата за оценка на грешката, док., че

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - L_2(f; x)| \leq \frac{1}{5}$$

③ Като изп. инт. ф-ла на Нютон с разделени разлики, намерете $p \in \pi_3$: $p(-2) = -8$, $p(0) = 2$, $p(1) = 4$, $p(2) = 12$. Пр. $p(x)$ по ст. на x

④ Нека $S_k = 1^3 + \dots + k^3$ за $k \geq 1$, $S_0 = 0$. Пок., че $\exists!$ пол. $p \in \pi_3$: $p(k) = S_k$, $\forall k = 0, 1, 2, \dots$ Намерете S_n като изп. ф-лата на Нютон с кр. разлики за инт. напред

⑤ Като изп. инт. ф-ла на Нютон с разд. разлики с кратни възли, намерете инт. полином на Ермит, удовл. усл. $p(0) = -1$, $p'(0) = 1$, $p''(0) = 2$, $p(1) = 0$, $p'(1) = -1$. Пр. $p(x)$ по ст. на x

⑥ Като изп. ф-лата за триг. инт. при равноотд. възли, опр. коеф. a_0, a_1, b_1!

$$\tilde{t}(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

$$\tilde{t}(0) = -1, \quad \tilde{t}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2, \quad \tilde{t}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2$$

$\boxed{\text{II тип:}}$

① Нека $l_{kn}(x)$, $k=0,\dots,n$ са базисните полиноми на Лагранж, съотв. на възлите $x_0,\dots,x_n$. Да се намери (1 д-во)

$$\sum_{k=0}^{n} (x-x_k)^{n+1} l_{kn}(x)$$

② Нека $f \in C^2[0,1]$ и $|f''(x)| \le x^2$ $\forall x \in [0,1]$. ~~за~~ За $\xi \in (0,1)$ да озн. с $P_\xi(x)$ линейната в $[0,\xi]$ и $[\xi,1]$, която инт. f в т. $0, \xi, 1$. Да се опр. ξ:

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - P_\xi(x)| \le 0{,}02$$

③ Нека $(\eta_k)_0^n$ са екстрем. т. на пол. на Чебишов $T_n(x)$. Да се док., че ако $p \in \pi_n$ и $|p(\eta_k)| \le 1$ за $k=0,\dots,n$, то $|p(x)| \le |T_n(x)|$ за $\forall\, |x| \ge 1$

④ Нека $x_k \ne 0, -1$ за $k=1,\dots,n$. Намерете (1 д-во)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n f\left(\frac{1}{x_k}\right)}{f'(x_k)(1+x_k)} \qquad f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x-x_i)$$

⑤ Нека $l_{kn}(x)$ $k=\overline{0,n}$ са базисни пол. на Лагранж, съотв. на $x_0,\dots x_n$

$$\omega(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n)$$

$$\varphi_k(x) = \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right) l_{kn}^2(x) \quad k=\overline{0,n}$$

ДСД $\varphi_k'(x_k) = 0$

⑥ Да се док., че ф-ците $\{1, e^{2x}, e^{5x^2}\}$ обр. сис-ма на Чебишов в $(-\infty,\infty)$