

Зад.1 Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими наблюдения над с.в. $\xi \in N(\mu, 1)$. Да се намери м.п.о. за неизвестния параметър μ . Да се провери дали намерената оценка е неистражена, състоятелна и ефективна.

Зад.2 Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими наблюдения над с.в. $\xi \in N(\mu, \sigma^2)$, където μ е известен параметър. Да се намери м.п.о. за σ^2 . Да се провери дали намерената оценка е неистражена, състоятелна и ефективна.

Зад.3 Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими наблюдения над с.в. $\xi \in N(\mu, \sigma^2)$. Да се намери м.п.о. за неизвестния параметър $\theta = (\mu, \sigma^2)$. Да се провери дали намерената оценка е неистражена.

Зад.4 Смята се, че сериен дисконд е основната причина за киселинните дъждове. Измерена е концентрацията на дисконд (в микрограма на кубичен метър) над гора в Бавария, пострадала от киселинен дъжд:

52.7	43.9	41.7	71.5	47.6	55.1	62.2	56.5	33.4	61.8	54.3	50.0
45.3	63.4	53.9	65.5	66.6	70.0	52.4	38.6	46.1	44.4	60.7	56.4

$$(\bar{X}_n = 53.9, \sigma^2 = 97.25, s^2 = 101.48).$$

Предполага се, че наблюденията са нормално разпределени. Да се намери максимално правдоподобна оценка (м.п.о.) за математическото очакване. Да се провери дали тя е неистражена и състоятелна. Да се намери м.п.о. за дисперсията.

Зад.5 Нека с.в. ξ е броят на дефектите на квадратен метър в бокта, нанесена от робот. Измерени са следните стойности: 8, 5, 0, 10, 0, 3, 1, 12, 2, 7, 9, 6. Да се намери неистражена и ефективна оценка за средния брой дефекти на квадратен метър, ако $\xi \in Po(\lambda)$.

Зад.6 За да се оцени броят на рибите в едно езеро се постъпва по следния начин: улавят се N на брой риби маркират се и се връщат обратно в езерото. След известен период от време се улавят n риби откъдето се установява, че m от тях са маркирани. Да се намери м.п.о. за общия брой на рибите в езерото N .

Зад.7 Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими наблюдения над с.в. $\xi \in U(0, \beta)$. Да се намери м.п.о. за параметъра β . Да се провери дали намерената оценка е неистражена и състоятелна.

Зад.8 Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими наблюдения над с.в. $\xi \in Ge(p)$. Да се намери състоятелна оценка параметъра p .

Зад.9 Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими наблюдения над с.в. $\xi \in U(\theta_1, \theta_1 + \theta_2)$. Да се намери оценка по метода на моментите за параметрите θ_1 и θ_2 .

$$\xi \in N(0, 1) \Rightarrow f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

$$L(x_1, x_2, \dots, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

$$\xi \in Po(\lambda) \Rightarrow P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$\xi \in HG(N, M, n) \Rightarrow P(\xi = x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Мад 10.

Точкиви оценки: или оценка. Това е всяка функция на извадката, която се прилага за оценка на неизвестния параметър.

Има извадка - $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ - набори наблюдения.

Търсим оценка за функция $t(\theta)$ на неизвестния параметър θ в това разпределение. Означаваме оценката на оценката на $t(\theta)$ с $t_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Добра оценка $t_n(x_1, \dots, x_n)$ е най-добрата оценка за $t(\theta)$ ако $E t_n(x_1, \dots, x_n) = t(\theta)$.
↓ най-добре.

Задача 1. $x_1, \dots, x_n$ са независими наблюдения над с.в. $\xi \in N(\mu, 1)$

и.о.о за неизвестния параметър?

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

$$f_{x_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}}$$

$$L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{2}} \quad | \cdot l_n$$

→ на тази функция търсим max по μ

$$\ln L = -n \ln \sqrt{2\pi} - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{2}$$

Сега търсим производна:

$$\frac{dL}{d\mu} = 0 = \sum (x_i - \mu)$$

$$\| - n \text{ или } \sqrt{2n} = 0$$

(продолжит от const = 0)!

$$0 = \sum x_i - \sum \mu$$

$$0 = \sum x_i - n\mu$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}_n$$

$$\hat{\mu} = \bar{x}$$

Общая:

1. $t_n(x)$ неизвестная функция для $\tau(\theta)$ ако: $E t_n(x) = \tau(\theta)$

2. $t_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \tau(\theta)$

3. оценка является эффективной ако является неизвестной и является минимальной дисперсией.

Критерий за минимальную дисперсию $\rightarrow \frac{\partial L}{\partial \theta} = G(\theta, n) \cdot (t_n(x) - \tau(\theta))$ и $D t_n(x) = \left| \frac{\tau'(\theta)}{G(\theta, n)} \right|$

за проверку общей

1. проверка за $E \hat{\mu} = \mu$

$$E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E x_i = \frac{1}{n} \cdot n E x_i = E x_i = \mu.$$

2. закон больших чисел $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} \frac{E x_i}{n} & \xrightarrow{p} & E x_i \\ \parallel & & \parallel \\ \hat{\mu} & & \mu \end{array} \quad \checkmark$$

3. Знаем, че е неизменена! Сега да проверим за дисперсията!

Задача 2. Нека $x_1, \dots, x_n$ са независими наблюдения над с.в. $\xi \in N(\mu, \sigma^2)$, μ е неизвестен параметър, н.п.о за σ^2 ?

$$L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \right)^n \cdot e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

да проверим и свайсбайда:

1. Неизменност:

$$\ln L = -n \ln \sigma - n \ln \sqrt{2\pi} - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot \frac{1}{2\sigma^3} \cdot 2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}$$

Задача 5. $x_1, \dots, x_n$ — независимые наблюдения $z \in N(\mu, \sigma^2)$
Неизвестен параметр $\theta = (\mu, \sigma^2)$?

Пользуясь зад. 1. и зад. 2.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0$$

$$\frac{\sum (x_i - \mu)}{\sigma^2} = 0$$

$$-\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{\sigma^3} = 0$$

$$\Rightarrow \sum x_i - \mu n = 0$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}_n$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_n)^2}{n}$$

$$s_n^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_n)^2}{n-1}$$

Задача 6. Риди - M на дри се улавно маркирано и бројано!

След тоа улавно и риди се са маркираат.

н.п.о. за обична дри на ридите в езеро N.

Хипергеометрично!

$$z \in HG(N, M, n)$$

$$P(z=x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \rightarrow \text{дементу } n \text{ од } x!$$

$$= f_{xi}(x) \equiv L_n$$

Порам

$$1 < \frac{L_N}{L_{N-1}} = \frac{\frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}}{\frac{\binom{M}{x} \binom{N-1-M}{n-x}}{\binom{N-1}{n}}} = \frac{(N-M)!}{(n-x)!(N-M-n+x)!} \cdot \frac{(N-1)!}{n!(N-n-1)!}$$

$$= \frac{N!}{n!(N-n)!} \cdot \frac{(N-M-1)!}{(n-x)!(N-M-n+x-1)!}$$

$$1 < \frac{(N-M)(N-n)}{N(N-M-n+x)}$$

$$N^2 - NM - nN + Nx < N^2 - NM - Nn + Mn$$

$$N < \frac{M \cdot n}{x}$$

$$\hat{N} = \left\lceil \frac{Mn}{x} \right\rceil \quad \text{но } x=m \quad \hat{N} = \left\lceil \frac{Mn}{m} \right\rceil$$

Задача 5. 8 5 0 10 0 3 1 2 12 2 7 9 6

Неизмислена и ефективна оценка за средния брой дефекти на координатен мисор $z \in P_0(1)$.

Посочено $\rightarrow P(z=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k=0, 1, \dots$

$$f_z(x) = P(z=x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = f(x)$$

$$L = \frac{\lambda^{\sum x_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^n (x_i!)} \quad | \quad \ln$$

$$\ln L = -n\lambda + (\sum x_i) \ln \lambda - \ln(\prod (x_i!))$$

производна $\rightarrow$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -n + \frac{\sum x_i}{\lambda} = 0$$

$$\frac{\sum x_i}{\lambda} = n$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$$

Задача 8. $X_1, \dots, X_n$ са нез. наблюдения над а.в. $Z \in \text{Ber}(p)$.
Осложнена случайна параметра p ?

$$P(Z=k) = p(1-p)^k \quad k=0, \dots$$

$$\mu_1(\theta) = E_Z = \frac{p}{p} = \frac{1-p}{p} = \bar{X}_n = w_1$$

$$\frac{1}{p} - 1 = \bar{X}_n \quad \hat{p} = \frac{1}{\bar{X}_n + 1}$$

Задача 9. $X_1, \dots, X_n$ са нез. наблюдения $Z \in U(\theta_1, \theta_1 + \theta_2)$
оценка по метода на моментите за пар. θ_1 и θ_2 .

$$\begin{cases} \mu_1(\theta) = w_1 \\ \mu_2(\theta) = w_2 \end{cases}$$