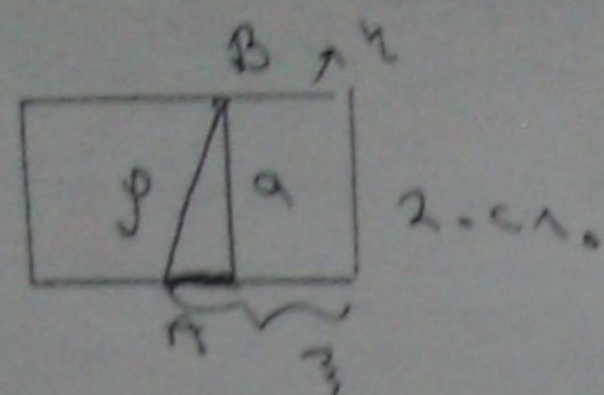
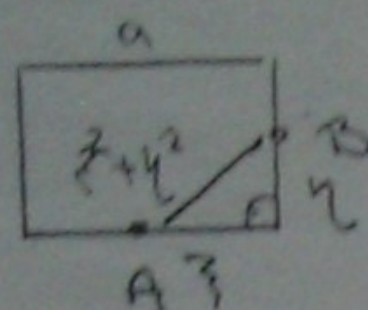


Пример 9.

задача 1.

1.сл.



2.сл.

$$x, y \in U(0, a)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/a & y \in [0, a] \\ 0 & y \notin [0, a] \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/a & x \in [0, a] \\ 0 & x \notin [0, a] \end{cases}$$

$$E r^2 = E($$

Зад.1 Върху две страни на квадрат независимо една от друга по случайен начин попадат две точки. Да се намери математическото очакване на квадрата на разстоянието между точките, ако страната на квадрата е с дължина a .

Зад.2 Нека сл. в. $\xi_1, \xi_2 \in Ex(\lambda)$ са независими. Да се намери разпределението на сл.в.

$$\eta = \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}$$

Зад.3 Нека сл. в. $\xi_1, \xi_2 \in U(0, 1)$. Да се намери разпределението на сл.в. $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Зад.4 Нека сл. в. $\xi_1, \xi_2 \in Ex(\lambda)$ са независими. Да се намери плътността на сл.в.

а) $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$;

б) $\eta = \min(\xi_1, \xi_2)$.

Зад.5 Електронно устройство за предпазване от крадци автоматично променя осветлението в дома. То е така настроено, че в разстояние на 1 час, в случайни моменти, точно веднъж ще запали и огаси лампите. Нека съвместната плътност на сл.в. ξ, η (време на запалване време на гасене) е $f_{\xi, \eta}(x, y) = cxy$, $0 < x < y < 1$. Да се определят:

а) константата c така че $f_{\xi, \eta}(x, y)$ да е плътност;

б) маргиналните плътности и очакванията;

в) вероятността лампите да бъдат запалени преди 45м и да светят по-малко от 10м;

г) колко е средното време на светене, ако лампите са били запалени на 15м;

д) каква е вероятността лампите да светят по-малко от 20м;

е) коефициента на корелация;

използване на са независими

$$f_X(x) f_Y(y) = f_{X,Y}(x, y)$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/a^2 & x, y \in [0, a] \\ 0 & x, y \notin [0, a] \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

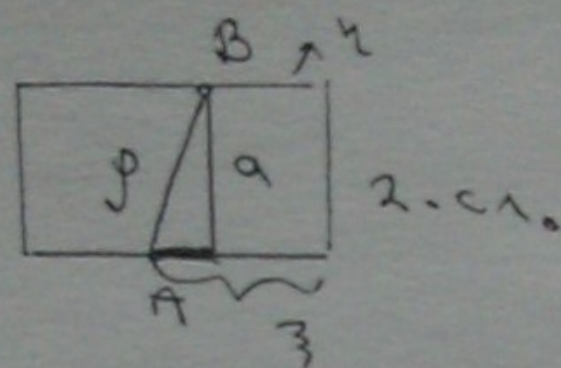
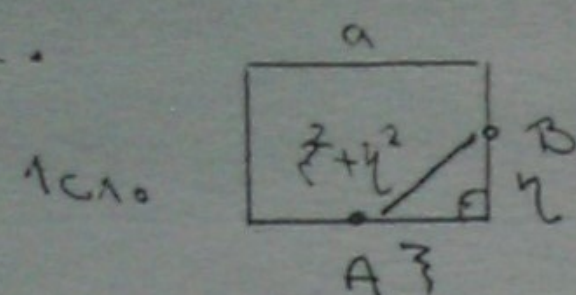
$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$E r^2 = E(x^2 + y^2) = \int_0^a \int_0^a x^2 + y^2 \cdot \frac{1}{a^2} dx dy$$

$$= \frac{2}{3} a^2$$

Задача 9.

Задача 1.



$$z, \eta \in U(0, a)$$

$$f_{\eta}(y) = \begin{cases} 1/a & y \in [0, a] \\ 0 & y \notin [0, a] \end{cases}$$

$$f_z(x) = \begin{cases} 1/a & x \in [0, a] \\ 0 & x \notin [0, a] \end{cases}$$

$$E\rho^2 = E(a^2 + (z - \eta)^2) = (Ea^2 + E z^2 - 2E(z, \eta) + E\eta^2)$$

$$= (Ea^2 + E(z^2 + \eta^2) - 2E(z, \eta))$$

$$= a^2 + \frac{2}{3}a^2 - \underbrace{2E_z \cdot E_{\eta}}_{?} = \frac{7}{6}a^2$$

невозможные и с. независимы

$$f_z(x) f_{\eta}(y) = f_{z, \eta}(x, y)$$

$$f_{z, \eta}(x, y) = \begin{cases} 1/a^2 & x, y \in [0, a] \\ 0 & x, y \notin [0, a] \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{z^2 + \eta^2}$$

$$\rho^2 = z^2 + \eta^2$$

$$E\rho^2 = E(z^2 + \eta^2) = \int_0^a \int_0^a x^2 + y^2 \cdot \frac{1}{a^2} dx dy$$

$$= \frac{2}{3}a^2$$

$$\parallel H_1, \dots, H_n \quad E_z = \sum P(H_i) \cdot E(z | H_i)$$

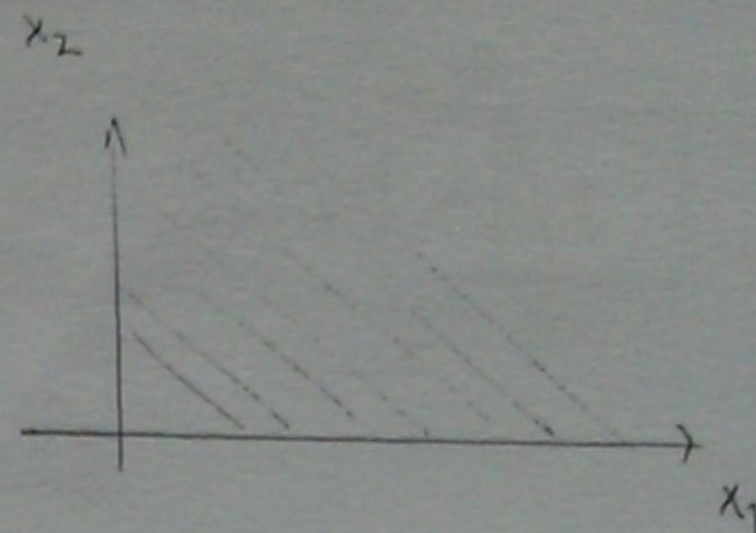
$$P(H_1) = 2/3$$

$$P(H_2) = 1/3$$

$$E\rho^2 = 2/3 \cdot 2/3 a^2 + 1/3 \cdot 7/6 a^2 = 5/6 a^2$$

задача 2. $\xi_1, \xi_2 \in E(1)$ - независимы.

$$f_{\xi_1}(x_1) = \begin{cases} 1e^{-1x_1} & x_1 \geq 0 \\ 0 & x_1 < 0 \end{cases}$$



$$f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = f_{\xi_1}(x_1) \cdot f_{\xi_2}(x_2) = \begin{cases} 1^2 e^{-1(x_1 + x_2)} & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

? $\eta = \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}$ Случай!

$\eta_1 = \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}$ $\eta_2 = \xi_1 + \xi_2$

$$f_{\eta_2}(y_2) = \int_0^\infty 1^2 e^{-1y_2} \cdot y_2 dy_2 = 1$$

определено

$$f_{\eta}(y) = \begin{cases} 1 & y \in [0, 1] \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

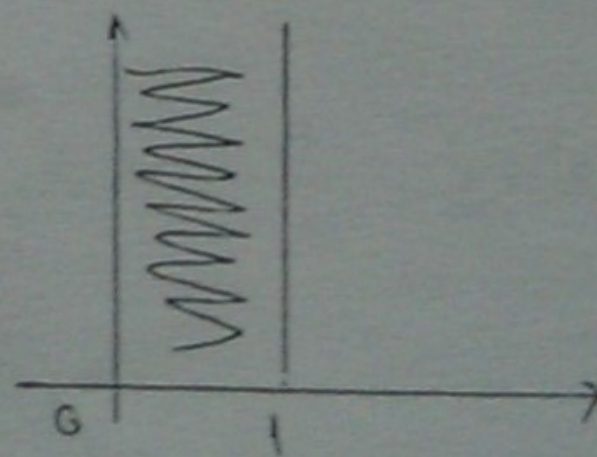
$$\begin{cases} y_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 y_2 \\ x_2 = y_2 - y_1 y_2 \end{cases} \quad x_1 + x_2 = y_2$$

$$|J| = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ -y_2 & 1 - y_1 \end{vmatrix} = y_2$$

$$f_{\eta_1, \eta_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} 1^2 e^{-1(y_2)} \cdot |J| & \text{где } y_1 \in [0, 1] \text{ и } y_2 \geq 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

определяем границы!

$$\begin{aligned} 0 &\leq y_1 \leq 1 \\ 0 &\leq y_2 < \infty \end{aligned}$$



Задание 3. $z_1, z_2 \in U(0,1)$

$$\eta = z_1 + z_2$$

$$f_{z_1}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

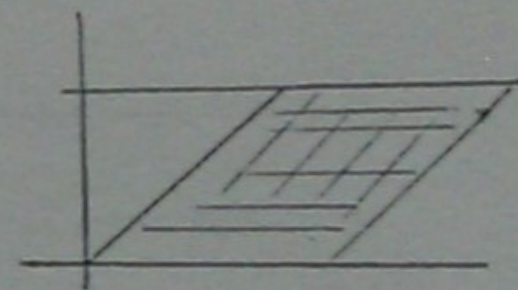
$$f_{z_2}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f_{z_1 z_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & x_1, x_2 \in [0,1] \\ 0 & \text{иначе!} \end{cases}$$

$$f_{\eta_1 \eta_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} 1 \cdot |J| & \text{параллелограмм} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq y_1 - y_2 \leq 1 \\ 0 \leq y_2 \leq 1 \end{cases}$$



$$1 \text{ сл. } 0 \leq y_1 \leq 1$$

$$f_{\eta_1}(y_1) = \int_0^{y_1} 1 dy_2 = y_1$$

$$2 \text{ сл. } 1 \leq y_1 \leq 2$$

$$f_{\eta_1}(y_1) = \int_{y_1-1}^1 1 dy_2 = 2 - y_1$$

$$f_{\eta}(y) = \begin{cases} y_1 & y_1 \in [0,1] \\ 2 - y_1 & y_1 \in [1,2] \\ 0 & \dots \end{cases}$$

Функция на разпределение!

$$F_3(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^x = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$F_{Y_1}(y_1) = \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y_2} y_2 dy_2 =$$

завдання 4. $z_1, z_2 \in \text{Exp}(1)$ - незалежні.

а) $\eta = \max(z_1, z_2)$ потрібне?

$E \Rightarrow E\eta(y) = P(\eta < y) = P(\max(z_1, z_2) < y) = P(z_1 < y, z_2 < y) = P(z_1 < y) \cdot P(z_2 < y).$

$$f_z(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$P(z < y) = \int_0^y \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda y} = (1 - e^{-\lambda y})^2 \quad y \geq 0$$

0

$y < 0.$

$$f_\eta(y) = \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{cases} 2(1 - e^{-\lambda y}) \cdot \lambda e^{-\lambda y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

б) $\eta = \min(z_1, z_2)$

$$E\eta(y) = P(\eta < y) = P(\min(z_1, z_2) < y) = 1 - P(\min(z_1, z_2) \geq y) = 1 - P(z_1 \geq y, z_2 \geq y) =$$