

Зад.1 Върху окръжност $K(O, r)$ е фиксирана точка A , точка B попада по случаен начин върху окръжността. Да се намери математическото очакване на лицето на триъгълник AOB .

Зад.2 Във вътрешността на кръг с радиус R случайно се избират точките A и B . Да се намери вероятността окръжността с център A и радиус AB да лежи във вътрешността на кръга.

Зад.3 В магазин работят две касиерки. Предполагаме, че времето необходимо за обслужване на клиент на всяка от двете опашки е експоненциално разпределена случайна величина с математическо очакване 8 мин. за първата опашка и 5 мин. за втората. Клиент, избрал по случаен начин опашка, е чакал по малко от 4 мин. Каква е вероятността той да е бил на първата опашка.

Зад.4 Времето за преглед на пациент е експоненциално разпределена сл.в. с очакване 30 мин. За преглед има записани двама пациента, първия в 11, а втория в 11,30 и двамата пристигат точно в определения час. Ако прегледа на първия не е завършил, вторият ще изчака. Да се пресметне средно колко време ще прекара вторият пациент в поликлиниката.

Зад.5 Нека случайната величина $\xi \in Ex(\lambda)$. Да се намерят плътностите на следните случайни величини:

- а) $\eta = -\xi$;
- б) $\eta = 2\xi - 1$;
- в) $\eta = \xi^{1/2}$;
- г) $\eta = \xi^a, a > 0$.

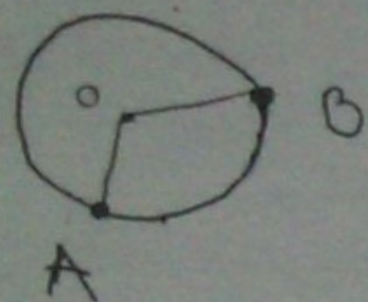
Зад.6 Случайната точка B е равномерно разпределена върху окръжността с център в точката $A(0, a)$ и радиус a . Нека $C(\xi, 0)$ е пресечната точка на правата AB с абцисната ос. Да се намери плътността на ξ .

Зад.7 Предполагаме, че височината на двадесет годишните младежи е нормално разпределена сл.в. $\mu = 170, \sigma = 5$. Да се определи вероятността от пет случайно избрани младежи поне един (точно двама) да има ръст от 165 до 175 см. Каква е вероятността младеж да бъде по-висок от 170 ако се знае, че той е по-висок от 160.

Зад.8 Размерът на пъпешите е нормално разпределена сл.в. с очакване 25 см. и дисперсия 36. Пъпешите по-малки от 20 см. са трето качество, а останалите се разделят на две равни по брой групи, като по-големите са първо качество, а по-малките второ. Каква част от пъпешите са трето качество. Колко голям трябва да е пъпеш за да бъде първо качество.

Зад.9 Сл.в. има плътност $f(x) = kx(1-x)^2$ за $x \in [0, 1]$. Да се пресметне вероятността сл.в. да бъде по-малка от средната си стойност.

Задача 1. (мат 8).



Есть ли ΔAOB ?

$$\xi \in U(0, 1)$$

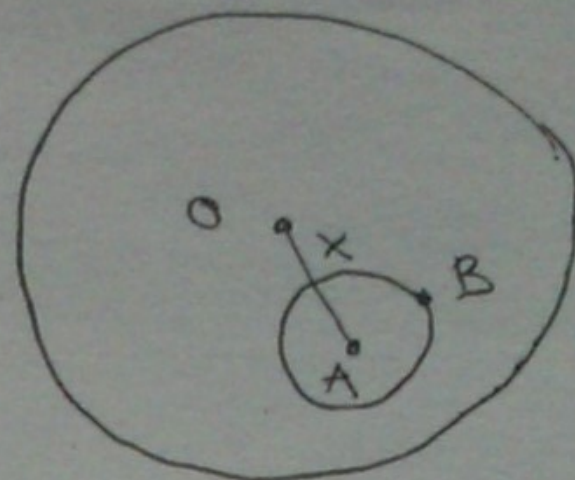
равномерно распределение

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 1/\pi & x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$S_{AOB} = \frac{r^2 \sin \xi}{2}$$

$$E\left(\frac{r^2 \sin \xi}{2}\right) = \int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin x}{2} \cdot \frac{1}{\pi} dx = \frac{r^2}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx$$

Задача 2.



$$|OA| = \xi$$

⊗ - га а ботте?

$$P(A) = \sum P(H_i) P(A|H_i)$$

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|\xi=x) \cdot f_{\xi}(x) dx$$

?

Задача 3. (с экспоненциальным распределением).

$$E(\xi_1) = 8$$

$$E(\xi_2) = 5$$

$$\xi_1 \in \text{Ex}(1/8)$$

$$\xi_2 \in \text{Ex}(1/5)$$

га а издере опашна $\rightarrow P(H_1) = P(H_2) = 1/2$

$$\begin{aligned} P(A|H_1) &= P(\xi_1 < 4) = \int_0^4 \frac{1}{8} e^{-1/8 x} dx \\ &= \frac{1}{8} \cdot \int_0^4 e^{-1/8 x} dx \\ &= \cancel{\frac{1}{8}} \cdot 1 - e^{-4/8} \end{aligned}$$

$$P(A|H_2) = 1 - e^{-4/5}$$

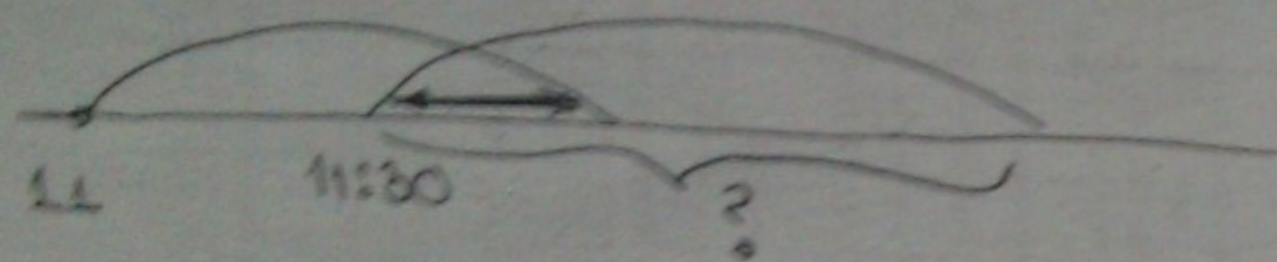
Формула на Байес:

$$P(H_1|A) = \frac{1/2 \cdot (1 - e^{-1/2})}{1/2 \cdot (1 - e^{-1/2}) + 1/2 \cdot (1 - e^{-4/5})}$$

Задача 4. (мод 8)

$$z_1, z_2 \in \exp(2)$$

$$E z_1 = E z_2 = \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$



$$\longleftrightarrow \max(0, z_1 - \frac{1}{2})$$

Скорее всего тогда $\max(0, z_1 - \frac{1}{2}) + z_2 = \eta$

$$E\eta = E(\max(0, z_1 - \frac{1}{2}) + z_2)$$

$$= E(\max(0, z_1 - \frac{1}{2})) + E z_2$$

= $\frac{1}{2}$

$$\int_0^{\infty} \max(0, x - \frac{1}{2}) \cdot 2e^{-2x} dx$$

~
нужно

$$\int_0^{1/2} 0 dx + \int_{1/2}^{\infty} (x - \frac{1}{2}) \cdot 2e^{-2x} dx$$

$$= \int_{1/2}^{\infty} (x - \frac{1}{2}) 2e^{-2x} dx$$

$$= \int_{1/2}^{\infty} 2xe^{-2x} dx - \int_{1/2}^{\infty} e^{-2x} dx$$

$$= -xe^{-2x} \Big|_{1/2}^{\infty} + \frac{1}{2}e^{-2x} \Big|_{1/2}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2e}$$

$$E\eta = \frac{1}{2e} + \frac{1}{2} \approx 41 \text{ win.}$$

Задача 5. $\xi \in Ex(1)$

а) $\eta = -3$

$$y = -x$$

$$x = -y$$

$$|y| = 1$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1e^{-|y|} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

б) $\eta = 2\xi - 1$

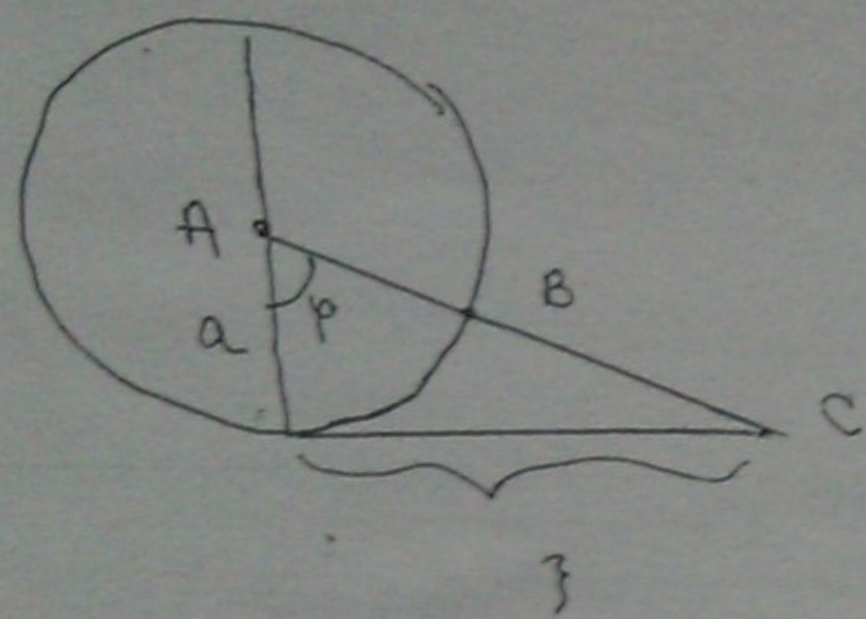
$$y = 2x - 1$$

$$x = \frac{1+y}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1e^{-1}}{2} & y \neq -1 \\ 0 & y = -1 \end{cases}$$

Задача 6. (Мат 8)



→ адична ос.

Повторно на z .

$$P \in U(0, \pi)$$

$$f_P(x) = \begin{cases} 1/\pi & x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$z = a \cos \psi$$

$$y = a \sin \psi$$

$$x = a \cos \psi$$

$$|J| = \frac{1}{1 + y^2/a^2} \cdot 1/a$$

$$f_z(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + y^2} \quad \forall y$$

Задача 7.

$$N(170, 25)$$

а) Пет случайно выбраных людейnone едн да има
рост 165-175 см.

$$P(A) = 1 - P(\text{нико едн}) = 1 - (1 - 0.6826)^5$$

$$P(165 < Z < 175) = P\left(\frac{165-170}{\sqrt{25}} < \frac{Z-170}{\sqrt{25}} < \frac{175-170}{\sqrt{25}}\right)$$

$$= P(-1 < \eta < 1)$$

$$= P(\eta < 1) - P(\eta < -1) = F_\eta(1) - F_\eta(-1) = \Phi(1) - \Phi(-1)$$

$$\Phi(1) = 0.8413$$

$$\Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0.1587$$

$$\Phi(1) - \Phi(-1) = 0.6826 \quad \text{точно едн, да е с рост 165-175 см.}$$

а) таптыг баала

данаага розгарагдана.

$$P(B) = C_5^2 p^2 (1-p)^3$$

$$б) P(\xi > 140 | \xi > 160) = \frac{P(\xi > 140)}{P(\xi > 160)}$$

$$= \frac{P(\eta > 0)}{P(\eta > -2)} = \frac{1/2}{1 - P(\eta < -2)} = \frac{1/2}{1 - \Phi(-2)} =$$

$$= \frac{1/2}{\Phi(2)} = \frac{1/2}{0.9772}$$

Задача 8. (маџ 8).

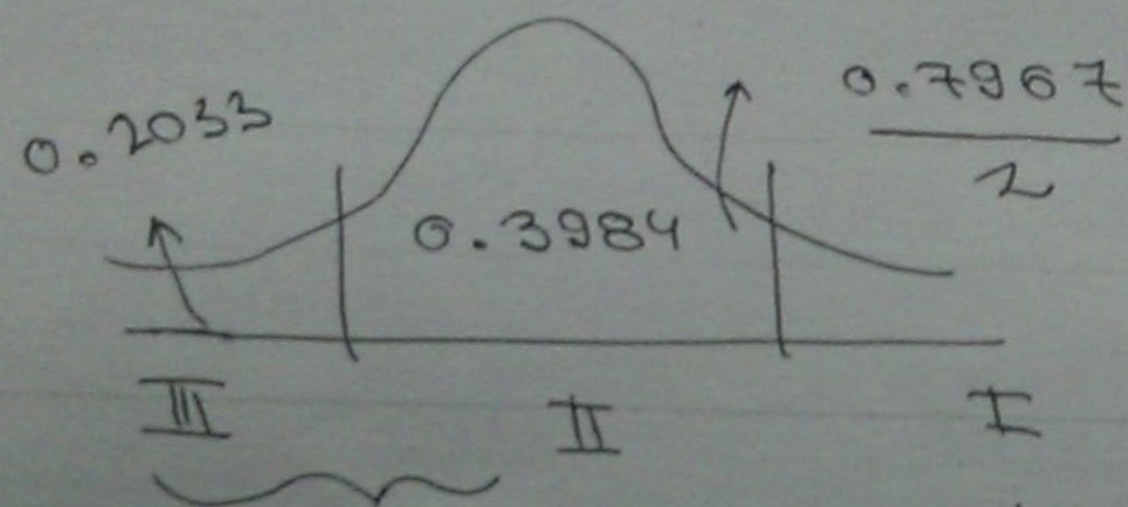
$N(25, 36)$

дисперсија = 6^2

по маџи од 20 до 7 III каменџо

$$P(Z < 20) = P\left(\eta < \frac{20 - 25}{6}\right) = P(\eta < -5/6) =$$

$$1 - \Phi(0.83) = 1 - 0.7967 = 0.2033 \approx 20\%$$



$$0.6017 = 0.20$$

$$P(\eta < 0.26) = 0.6017$$