

Зад.1 От числата 1,2,3,4 и 5 се избират по случаен начин три числа без повторение. Нека ξ е случайната величина средното по големина число от избраните три, а η е случайната величина най-малкото от избраните числа. Да се определи:

- а) съвместното разпределение на ξ и η ;
- б) маргиналните разпределения на ξ и η ; *сумирание по редове/столбци*
- в) да се провери дали ξ и η са независими;
- г) ковариация и коефициент на корелация на ξ и η ;
- д) разпределението на случайната величина $\zeta = \xi - 2\eta$.

Зад.2 Четири пъти последователно се хвърля монета. Нека ξ е броят гербове паднали се при първите три хвърляния, а η броят гербове от последните две. Да се определи:

- а) съвместното разпределение на ξ и η ;
- б) условните разпределения на ξ и η ;
- в) разпределението на $E(\xi|\eta)$, $E(\eta|\xi)$.

Зад.3 Четири топки са разпределени случайно в девет кутии, от които две са бели три зелени и четири червени. Да се пресметнат вероятностите на събитията:

- а) в белите кутии има една топка, а в зелените две;
- б) в белите кутии има две топки;
- в) в белите кутии попадат повече топки отколкото в останалите взети заедно.

Зад.4 Двама стрелци правят по три изстрела в мишена. На всеки изстрел първият може да спечели точки от 7 до 10 с една и съща вероятност. Вторият уцелва 7 или 10 с вероятност по 1/8, а 8 или 9 с вероятност по 3/8.

- а) За всеки стрелец да се определи вероятността да изкара общо 25 точки.
- б) Каква е вероятността двамата да имат равен брой точки?
- в) Каква е вероятността първият да има с три точки повече от втория?

Зад.5 Вилетите в лотария имат номера от 0 до 999999. Да се определи вероятността за случайно избран билет:

- а) сумата от цифрите в номера да е равна на 21;
- б) да има равна сума от първите три и последните три цифри;
- в) сумата от първите три цифри да е с 2 по-голяма от сумата на последните три.

42! (една по-малко :P).

Зад.1 От числата 1,2,3,4 и 5 се избират по случаен начин три числа без повторение. Нека ξ е случайната величина средното по големина число от избраните три, а η е случайната величина най-малкото от избраните числа. Да се определи:

- а) съвместното разпределение на ξ и η ;
- б) маргиналните разпределения на ξ и η ;
- в) да се провери дали ξ и η са независими;
- г) ковариация и коефициент на корелация на ξ и η ;
- д) разпределението на случайната величина $\zeta = \xi - 2\eta$.

Зад.2 Четири пъти последователно се хвърля монета. Нека ξ е броят гербове паднали се при първите три хвърляния, а η броят гербове от последните две. Да се определи:

- а) съвместното разпределение на ξ и η ;
- б) условните разпределения на ξ и η ;
- в) разпределението на $E(\xi|\eta)$, $E(\eta|\xi)$.

Зад.3 Четири топки са разпределени случайно в девет кутии, от които две са бели три зелени и четири червени. Да се пресметнат вероятностите на събитията:

- а) в белите кутии има една топка, а в зелените две;
- б) в белите кутии има две топки;
- в) в белите кутии попадат повече топки отколкото в останалите взети заедно.

Зад.4 Двама стрелци правят по три изстрела в мишена. На всеки изстрел първият може да спечели точки от 7 до 10 с една и съща вероятност. Вторият уцелва 7 или 10 с вероятност по 1/8, а 8 или 9 с вероятност по 3/8.

- а) За всеки стрелец да се определи вероятността да изкара общо 25 точки.
- б) Каква е вероятността двамата да имат равен брой точки?
- в) Каква е вероятността първият да има с три точки повече от втория?

Зад.5 Вилетите в лотария имат номера от 0 до 999999. Да се определи вероятността за случайно избран билет:

- а) сумата от цифрите в номера да е равна на 21;
- б) да има равна сума от първите три и последните три цифри;
- в) сумата от първите три цифри да е с 2 по-голяма от сумата на последните три.

Задача 1. 1, 2, 3, 4 и 5 издират се три без повторение.

ξ - средно по големината от трите издирати сл.б.

η - сл.б. на най-малкото

а) определи съвместно разпределение на ξ и η .

$\eta \backslash \xi$	2	3	4
1	$3/10$	$2/10$	$1/10$
2	0	$2/10$	$1/10$
3	0	0	$1/10$

общо $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

12

3 4 5

2 4 5

1 4 5

123

124

125

134

135

с) маргинално разпределение на ξ и η

сумиране по редове и колони

ξ	2	3	4
p	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$

η	1	2	3
p	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

в) да се провери дали ξ и η са независими.

$$p_{ij} = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j)$$

Ако това е изпълнено в цялата таблица те са независими.

при нас не е вярно.

г) ковариация и коэффициент на корелация на ξ и η .

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi) \cdot (\eta - E\eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta$$

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi} \sqrt{D\eta}}$$

$$|\rho| \leq 1.$$

$$E\xi\eta = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij}$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{10} + 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{10} +$$

$$2 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{10} + 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{10} +$$

$$3 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \cdot 0 + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{10} - E\xi \cdot E\eta =$$

Задача 2.

4 монета по 10.

ξ - първите при първите 2 хвърляния,

η - последните две.

а) общото разпределение на ξ и η .

1.

$\xi \backslash \eta$	0	1	2	3	
0	$(\frac{1}{2})^4$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	4/16
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	8/16
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	4/16
	$\frac{2}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{2}{16}$	

1 1 0
0 1

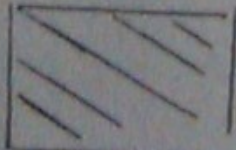
1 0 1
1 0

0 1 1
1 0

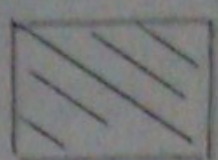
б) условните разпределения на ξ и η .

2.

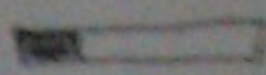
$\xi \backslash \eta$	0	1	2	3
$\eta=0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
$\eta=1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\eta=2$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

 = 1.1 / 1. условно
 $(\frac{1}{2})^4 / \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$\eta \setminus \xi$	0	1	2
$\xi=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\xi=1$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\xi=2$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\xi=3$			



= 1.1 / маргинално



$$\frac{1}{16} / \frac{2}{16} = \frac{1}{2}$$

б) Разпределението на $E(\xi|\eta)$ и $E(\eta|\xi)$.

$$E(\xi|\eta=y_0) = \sum x_j P(\xi=x_j|\eta=y_0)$$

$$E(\xi, \eta=0) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot 0 = 1$$

Във втората 2 + първите 2 реда.

$$E(\xi|\eta=1) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(\xi, \eta=2) = 2$$

$E(\xi, \eta)$	1	$\frac{3}{2}$	2
P	$\frac{4}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{4}{16}$

маргинали

$E(\eta, \xi)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{3}{2}$
P	$\frac{2}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{2}{16}$

$$E(\eta, \xi=0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 0 = \frac{1}{2}$$

$$E(\eta, \xi=1) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

$$E(\eta, \xi=2) = \frac{5}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$$

$$E(\eta, \xi=3) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$= \frac{48}{10} - E_{\xi} \cdot E_{\eta} = 4.8 - E_{\xi} \cdot E_{\eta} = 4.8 - 3 \cdot 1.5 = 4.8 - 4.5 = 0.3$$

$$E_{\xi} = 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{4}{10} + 4 \cdot \frac{3}{10} = 3$$

$$E_{\eta} = \frac{6}{10} + \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{15}{10}$$

$$E_{\xi}^2 = 4 \cdot \frac{3}{10} + 9 \cdot \frac{4}{10} + 16 \cdot \frac{3}{10} = \frac{96}{10}$$

$$E_{\eta}^2 = \frac{27}{10}$$

$$D_{\xi} = E_{\xi}^2 - (E_{\xi})^2 = \frac{96}{10} - 9 = 0.6$$

$$D_{\eta} = E_{\eta}^2 - (E_{\eta})^2 = \frac{27}{10} - 1.5 \cdot 1.5 = 0.45$$

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D_{\xi}} \sqrt{D_{\eta}}} = \frac{0.3}{\sqrt{\frac{6}{10}} \cdot \sqrt{\frac{9}{10}}} = \dots$$

2) разпределението на с.в. $\zeta = \xi - 2\eta$

$\zeta = \xi - 2\eta$	0	1	2	-1	0	-2
p	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

(Тук изобщо няма проверка
автността на вероятността в
таблицата).

Задача 3.

4 точки $\rightarrow$ 9 кути $\rightarrow$ бел 2

зелен 3

червен 4

а) белите има една точка, а 6 зелените две.

$$p_1 = \frac{2}{9}$$

$$f_1 = 1$$

$$p_2 = \frac{3}{9}$$

$$f_2 = 2$$

$$p_3 = \frac{4}{9}$$

$$f_3 = 1$$

$$P(f_1=1, f_2=2, f_3=1) = \left(\frac{2}{9}\right)^1 \left(\frac{3}{9}\right)^2 \left(\frac{4}{9}\right)^1 \cdot \frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!}$$

Мултипликативно разпределение!

б) 6 белите кути има 2 точки.

$$P(f_1=2) = p^k (1-p)^{n-k} C_n^k$$

$$= \left(\frac{2}{9}\right)^2 \left(\frac{7}{9}\right)^2 C_4^2$$

$$\parallel$$
$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

Биномиално разпределение!

в) 6 белите кути попадат побеге точки отколко 6 останалите
кути заедно.

$$P(Z > 2) = P(Z_1 = 3) + P(Z_2 = 4) = \left(\frac{2}{9}\right)^3 \left(\frac{1}{9}\right) \cdot C_4^3 + \left(\frac{2}{9}\right)^4 \cdot C_4^4$$

Задача 4.

2 стрели. $\rightarrow$ три изстрела.



Първия $\rightarrow 7; 8; 9; 10$. $\rightarrow$ вероятност една и обикно

Втория $\rightarrow 7$ или 10 . $\rightarrow$ вероятност $\frac{1}{8}$

8 или $9 \rightarrow$ вероятност $\frac{3}{8}$

а да изкара общо 25 .

$Z:$	7	8	9	10
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$P(Z_1, Z_2, Z_3) = 25.$$

$$P_{Z_1}(t) = \sum_k P(Z_1 = k) t^k$$

$$P_{Z_1}(t) = \frac{1}{4}t^7 + \frac{1}{4}t^8 + \frac{1}{4}t^9 + \frac{1}{4}t^{10} = \frac{1}{4}t^7(1+t+t^2+t^3) =$$

$$= \frac{1}{4}t^7(1+t)(1+t^2)$$

$$P_Z(t) = P_{Z_1+Z_2+Z_3} = \left(P_{Z_1}(t)\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 t^{21} \overset{(1+3t+3t^2+t^3)}{\underset{(1+t)}{\uparrow}} \overset{(1+3t^2+3t^4+t^6)}{\underset{(1+t^2)}{\uparrow}} (1+t)^3 (1+t^2)^3$$

или

$\downarrow$ изкара 25 .

мож е 21 .

$$P(Z = 25) = \text{coeff}_{t^{25}} [P_Z(t)] = \frac{1}{4^3} [3 \cdot 3 + 3] = \frac{3}{16}$$

n_i	7	8	9	10
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$N = n_1 + n_2 + n_3$$

$$p_{n_1}(t) = \frac{1}{8} \cdot t^7 + \frac{3}{8} t^8 + \frac{3}{8} t^9 + \frac{1}{8} t^{10} = \frac{t^7}{8} (1+t)^3$$

$$p_n(t) = [p_{n_1}(t)]^3 = \frac{t^{21}}{8^3} (1+t)^9$$

$$P(N=25) = \underset{t^{25}}{\text{coeff}} [p_n(t)] = \frac{1}{8^3} \left(\frac{9}{4} \right) = \frac{1}{8^3} \left(\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right)$$

όλ γινόμενα είν μιὰς ραβεν όρ. ποικι.