

6.

09.04.2013.

Зад.1 Хвърлят се два зара. Нека сл.в ξ е сумата от падналите се точки. Да се намери разпределението на ξ , а също $E\xi$ и $D\xi$, ако заровете са:

а) правилни;

б) неправилни - $P(1) = P(6) = 1/4$, $P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = 1/8$.

Ще бъде ли необичайно, ако при хвърлянето на 1000 зара сумата е била повече 4500?

Зад.2 От урна съдържаща 5 бели и 3 черни топки се избират последователно, една по една топки докато се появи бяла. Да се намери разпределението на случайната величина - "брой на изтеглените черни топки" и се пресметне математическото очакване и дисперсията ѝ. Ако извадката е:

а) без връщане;

б) с връщане.

Опитът се повтаря 1000 пъти. Да се оцени вероятността да са извадени повече от 900 черни топки.

Зад.3 В кутия има 7 лампи от които 3 са дефектни. По случаен начин се избират за проверка 4 лампи. Да се намери разпределението на случайната величина "брой на изпробваните качествени лампи" и да се пресметне нейното очакване.

Зад.4 Книга от 500 страници съдържа 50 печатни грешки. Всяка грешка може да се срещне на коя да е страница с една и съща вероятност. Като се използва поасоново приближение да се определи вероятността избрана страница да съдържа не по-малко от три грешки.

Зад.5 80% от принтерите за домашна употреба работят добре при инсталирането им, а останалите имат нужда от допълнителни настройки. Фирма продава 10 принтера за една седмица. Намерете вероятността поне 9 от тях да работят без нужда от допълнителни настройки. Каква е съответната вероятност това да се случи за пет поредни месеца?

Зад.6 Двама ловци преследват заек. Първият улучва с вероятност 0,2, а вторият с вероятност 0,3. Ловците стрелят едновременно, ако никой не улучи ловците стрелят отново. Да се пресметне вероятността първият ловец да убие заека. Какъв е средния брой изстрели необходими за убиването на заека.

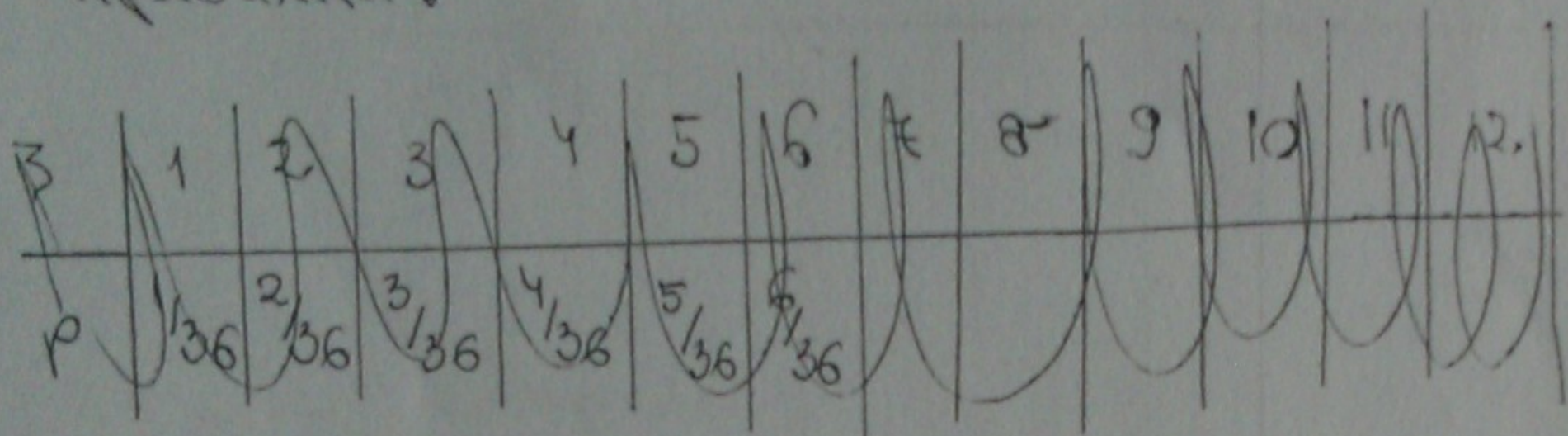
Зад.7 А и В играят последователно партии, А печели една партия с вероятност $2/3$, а В с вероятност $1/3$. Равни партии не са възможни. Играта продължава докато някой от играчите спечели два пъти последователно. Нека ξ е сл.в. "брой на изиграните партии". Да се определи разпределението и математическото очакване на ξ .

Задача 1.

2 бара. z - сума на двата бара.

Разпределение на z , Ez , Dz

а) график.



z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$Ez = 7$$

z_1	1	...	5	6
P	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$Ez_1 = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$Ez_1^2 = \sum_{i=1}^6 x_i^2 \frac{1}{6} = \frac{1}{6} (1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$$

$$Dz_1 = Ez_1^2 - (Ez_1)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} = Dz_2$$

$$Dz = D(z_1 + z_2) = Dz_1 + Dz_2 = \frac{35}{6}$$

8) неграбунки

$$P(1) = P(6) = \frac{1}{4}$$

$$P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{8}$$

ξ_1	1	2	3	4	5	6
P	$1/4$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/4$

ξ	2	3	4	...
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{64}$	

(2) $1 \cup 1 \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

(3) $1 \cup 2$
 $2 \cup 1 \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot 2$

(4) $2 \cup 2$ ~~$2 \cup 2$~~
 $1 \cup 3$
 $3 \cup 1$
 $\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \right) \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}$

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{4+1}{64} = \frac{5}{64}$$

1 $E_{\xi_1} = \frac{7}{2}$

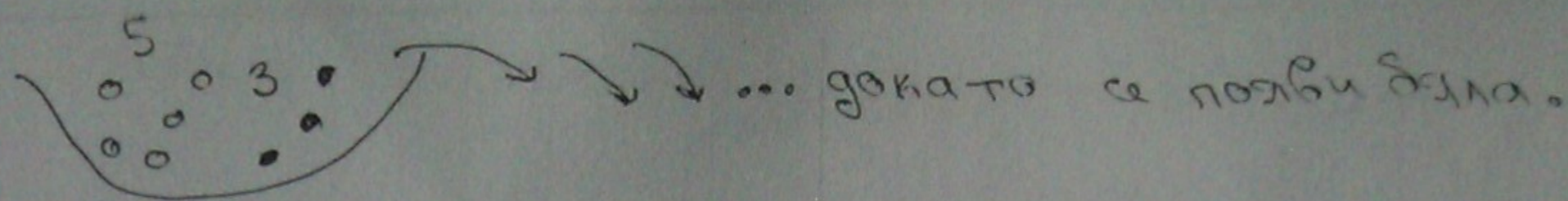
$$E_{\xi} = E_{\xi_1} + E_{\xi_2} = 2 \cdot \frac{7}{2} = 7$$

$$E_{\xi_1}^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} + \dots = 16$$

$$D_{\xi_1} = E_{\xi_1}^2 - (E_{\xi_1})^2 = \frac{15}{4}$$

$$D_{\xi} = 2 \cdot \frac{15}{4} = \frac{15}{2}$$

Задача 2.



Разпределението, мамо, окарване, геометрично?

ξ - брой неуспехи!

а) без връщане.

ξ	0	1	2	3
p	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$\textcircled{0} \quad \frac{5}{8}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{5}$$

$$E\xi = \frac{1}{2} \quad \text{окачено!}$$

$$D\xi = \frac{15}{28} \quad \left(\frac{30}{56} \text{ за погрешка} \right)$$

б) с връщане.

ξ	0	1	...	k	...
p	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8}$		$\left(\frac{3}{8} \right)^k \cdot \frac{5}{8}$	

! до първия успех!

$$\xi \in \text{ge} \left(\frac{5}{8} \right)$$

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k g^k p = k \cdot \left(1 - \frac{5}{8} \right)^k \cdot \frac{5}{8}$$

$$E\xi = \frac{1-p}{p} = \frac{1-\frac{5}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3/8}{5/8} = 3/5$$

$$D\xi = \frac{(1-p)}{p^2} = \frac{3/8}{25/64} = 24/25$$

Задача 3. 7 лампи → 3 дефектни.

За проба 4.

Разпределението и негово означение.

Хипергеометрично (класически!)

4	3
7	

$\{ \in H_6(7, 4, 4) \}$

↓
наклонове.

$\{$	1	2	3	4
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{36}{35}$	$\frac{36}{35}$	$\frac{4}{35}$

$$① \frac{C_4^1 \cdot C_3^3}{C_7^4}$$

$$② \frac{C_4^2 \cdot C_3^2}{C_7^4}$$

$$③ \frac{C_4^3 \cdot C_3^1}{C_7^4}$$

$$④ \frac{C_4^4}{C_7^4}$$

$$E\{ = \frac{4}{35} + \frac{36}{35} + \frac{36}{35} + \frac{4}{35} = \frac{16}{7}$$

Задача 4.

500 адр. 50 платни грижи.

Не по-малко от 3 грижи с поасот

$$n = 50 \quad p = \frac{1}{500} \quad \lambda = np = \frac{1}{10}$$

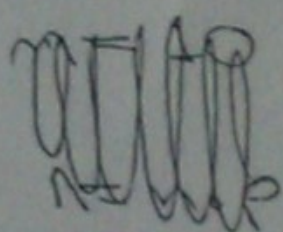
$$\begin{aligned} P(Z \geq 3) &= 1 - P(Z=0) - P(Z=1) - P(Z=2) \\ &= 1 - \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^0 e^{-\frac{1}{10}}}{1} - \frac{\frac{1}{10} \cdot e^{-\frac{1}{10}}}{1} - \frac{\frac{1}{100} \cdot e^{-\frac{1}{10}}}{2} \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{10}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200}\right). \end{aligned}$$

Задача 5.

80% - годне, гр + наобрѣи.

$n = 10$ поте 9 да работат.

5 поредни месеца.



дихотомно разпределение

$$p = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$$

$$q = \frac{1}{5}$$

$n = 10$ продажени

Z - др. продажени (работени)

$$P(Z \geq 9) = P(Z=9) + P(Z=10)$$

Задача 6.

2 кобьча + 3 аек.

$$1 \rightarrow 0.2$$

$$2 \rightarrow 0.5$$

| еднообразно.

1 за го удае?

Ср. др. изадрел неододини?

$$P(A_1) = 0.2$$

$$P(B_1) = 0.5$$

$$P(A_1 \cup \bar{A}_1 \bar{B}_1, A_2 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{B}_1 \bar{B}_2, A_3 \cup \dots) =$$

$$= 0.2 + 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.2 + (0.8 \cdot 0.7)^2 \cdot 0.2 + \dots =$$

$$= 0.2 (1 + 0.56 + (0.56)^2 + \dots)$$

$$= 0.2 \cdot \frac{1}{1 - 0.56} = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{0.44} = \frac{5}{11}$$

Неододини изадрел:

ξ	1	2	3	...	k	...
	0.2	0.8 \cdot 0.7	0.8 \cdot 0.7^2	...	0.8 \cdot 0.7^{k-1}	...

Геометрично разпределение.

$$P(A_1 \cup B_1) = P(A_1) + P(B_1) - P(A_1 \cap B_1)$$

$$= 0.2 + 0.5 - 0.06 = 0.44$$

$$P(A_1 \bar{A}_1 \bar{B}_1 \cup B_2 \bar{A}_1 \bar{B}_2) = P(A_1 \bar{A}_1 \bar{B}_1) + P(B_2 \bar{A}_1 \bar{B}_2) -$$

$$- P(A_1 \bar{A}_1 \bar{B}_1 \cap B_2 \bar{A}_1 \bar{B}_2) = 0.2 \cdot \frac{56}{100} + 0.5 \cdot \frac{56}{100} - \frac{6}{100} \cdot \frac{56}{100}$$

η - неуспешите
 $\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0, 1}_{\xi}$

$$\xi = \eta + 1$$

$$E\xi = E(\eta + 1) = E\eta + \underbrace{E1}_1 = E\eta + 1 = \frac{0.56}{0.44} + 1.$$

Задача 7. ξ - бр. на изиграните партии.

$$P(A_1) = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$P(B_1) = \frac{1}{3}$$

ξ	2	3	4	...	2k	...
P						

$$3 \rightarrow \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$4 \rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\text{и т.н.} \quad 2k \rightarrow \underbrace{\dots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2}_{2k-2} + \dots \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2}_{2k-2}$$

и т.н. -||- само $2k-1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k \left(\frac{2}{9}\right)^{k-1} \cdot \frac{4}{9} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+2) \left(\frac{2}{9}\right)^{k-1} \cdot \frac{8}{27}$$